

Научная статья

УДК 629.787

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=185679>

EDN: <https://www.elibrary.ru/PXWCAS>



Верификация уравнений математической модели движения спускаемого аппарата с применением разработанного технического комплекса

Андрей Сергеевич Кухаренко^{1✉}, Всеволод Владимирович Корянов², Сергей Николаевич Кухаренко³

^{1, 2} Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Российская Федерация

³ Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого,
Гомель, Республика Беларусь

¹ kuharenko-as@mail.ru [✉] SPIN 5158-0831

² vkoryanov@bmstu.ru SPIN 6616-8654

³ kuharenko-sn@mail.ru SPIN 4662-7956

Аннотация. Создан комплекс, моделирующий угловое движение спускаемого аппарата, управляемого смещением центра масс за счет поворота внутренней подвижной массы. Комплекс состоит из механической системы, измерительного оборудования и программного обеспечения для обработки результатов измерений. Исследования с применением данного комплекса подтвердили правильность математической модели углового движения спускаемого аппарата, управляемого смещением центра масс. Комплекс позволил оценить влияние моментов сил трения на рассогласование теоретических и экспериментальных результатов.

Ключевые слова: изменение положения центра масс, поворот полезной нагрузки, внутренняя подвижная масса, верификация уравнений математической модели, управление движением спускаемого аппарата

Для цитирования: Кухаренко А.С., Корянов В.В., Кухаренко С.Н. Верификация уравнений математической модели движения спускаемого аппарата с применением разработанного технического комплекса // Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 3. С. 185–197. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=185679>

Original article

Verification of the Descent Vehicle Motion Mathematical Model Equations Employing the Developed Technical Complex

Andrei S. Kukharenko^{1✉}, Vsevolod V. Koryanov², Sergei N. Kukharenko³

^{1, 2} Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

³ Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus

¹ kuharenko-as@mail.ru [✉] SPIN 5158-0831

² vkoryanov@bmstu.ru SPIN 6616-8654

³ kuharenko-sn@mail.ru SPIN 4662-7956

© Кухаренко А.С., Корянов В.В., Кухаренко С.Н., 2025

Abstract

The purpose of the article consists in improving the descent motion module controlling method, allowing for landing in a pre-determined area. It verifies the equations of the descent module angular motion mathematical model while this control performing. The descent module control is being accomplished through the center of mass position changing with the internal movable mass. The descent module is represented as a system of two rigid bodies fixed by a cylindrical hinge.

To check correctness of the assumptions made when compiling the descent module the angular motion mathematical model and its verification, an experimental study of the angular motion of a system of two connected bodies applying the developed technical complex was performed during the work.

The said complex consists of a mechanical system simulating angular motion, measuring instruments and the equipment for the results processing.

The tasks solved to achieve the stated goal are:

- 1) A mechanical system simulating the angular motion of two connected bodies was realized;
- 2) The software for the motion parameters measuring and results processing was developed;
- 3) Comparison of the measurement results with the numerical solution results of the mechanical system equations of motion was performed.

The equations of the angular motion of the mechanical system elements of the technical complex were obtained from the descent vehicle angular motion equations. After mechanical parameters measuring of the system and substituting them into the equations of angular motion, the computed values of the elements angular velocities of the e mechanical system were obtained. The performed measurements were compared with the results of solving the equations of the test bench elements angular motion.

The discrepancy between the measurement and simulation results was 3.06%, or 0.185 rad/s², which confirms correctness of the compiled mathematical model.

The results of the work are technical means of modeling, as well as techniques for the results measuring and processing that may be applied in the scientific research.

Keywords: change of the center of mass position, rotation of the payload, internal moving mass, verification of the mathematical model equations, the descent vehicle motion control

For citation: Kukhareno A.S., Koryanov V.V., Kukhareno S.N. Verification of the Descent Vehicle Motion Mathematical Model Equations Employing the Developed Technical Complex. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(3):185–197. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=185679>

List of Figures

Fig. 1. The descent vehicle structure scheme with the acting forces: F_x^{ad} – the aerodynamic force projection on the $O''x''$ axis; F_y^{ad} – the of aerodynamic force projection on the $O''y''$ axis; L_x^{ad} – projection of the vector connecting the descent vehicle center of mass with the point of the aerodynamic forces application (center of pressure) onto the $O''x''$ axis; L_y^{ad} – projection of the vector connecting the descent vehicle center of mass with the point of of aerodynamic forces application (center of pressure) onto the $O''y''$ axis; $\vec{G}$ – gravitational force vector; $\vec{V}_\infty$ – free stream velocity vector; $\vec{M}_{ynp}$ – control moment vector; α – angle of attack; ц.м. – the descent vehicle center of mass; ц.д. – the resultant aerodynamic force point of application

Fig. 2. Mechanical system diagram: 1 – the supporting body which corresponds to the braking device; 2 – the supported body which corresponds to the internal moving mass

Fig. 3. Mechanical system of the technical complex: *a* – model; *b* – kinematic diagram indicating the forces and moments acting on its elements: 1 – carrying disk; 2 – carried disk with 180 notches; 3 – a load creating a moment of external forces; 4 – pulley for winding thread; 5 – electric motor for creating a control moment; 6 – strain-gauge beam; M_{tp}^{on} – moment of friction force of the of the carrying disk support (It is assumed that the moment of friction force of the support is zero. When verifying the method for measuring the moments of inertia of the bearing and supported disks, correctness of this assumption will be evaluated)

Fig. 4. Photo of the technical complex mechanical system: 1 – carrying disk; 2 – carried disk; 3 – angular position sensor; 4 – counting marks

Fig. 5. Photo of the developed technical complex: 1 – oscilloscope, performing the function of registration and recording the signals from sensors. 2 – the laptop is being used to process the recorded measurements and compute the obtained dependencies of the change in the angular values of the bench elements with a discreteness of 2°; 3 – mechanical system

Fig. 6. Kinematic diagram of the mechanical device for measuring the rigid body moment of inertia: 1 – carrying disk; 2 – pulley for winding thread; 3 – load for creating a moment of the external forces

Fig. 7. Dependence of the angular acceleration change on time for the carrying disk

Fig. 8. Dependence of the angular velocity change on time for the carrying disk

Fig. 9. Dependence of the change in the carrying disk angle of rotation on time and the line approximating this result

Fig. 10. Kinematic diagram of a mechanical system for verifying the moment of inertia measuring method:

- 1 — carrying disk; 2 — disk with a known moment of inertia; 3 — pulley for winding the thread;
4 — load for creating a moment of external forces

Fig. 11. Diagram of the mechanical device for the angular velocities changing of the carrier and supported disks under the action of a control torque created by the electric motor: 1 — carrying disk, 2 — carried disk

Fig. 12. Dependence of the angular velocity change of the carrying disk on time relative to the fixed coordinate system

Fig. 13. Dependence of the angular velocity change of the carried disk on time relative to the fixed coordinate system

Введение

Технологические возможности, открывающиеся благодаря освоению космического пространства, позволяют повысить эффективность человеческой деятельности во многих отраслях [1–3]. Возрастающая роль космических исследований и технологий требует совершенствования техники доставки грузов. Наиболее сложным этапом транспортировки груза является спуск на поверхность планеты. В процессе спуска возникает ряд проблем:

- ограничения перегрузок, действующих на спускаемый аппарат в процессе движения [4, 5];
- высокие температуры и неравномерный нагрев спускаемого аппарата [6];
- обеспечение требуемой точности посадки [7].

Данная работа направлена на совершенствование способа управления движением спускаемого аппарата, позволяющего обеспечить посадку в заданном районе. В статьях [8, 9] предложено управлять движением спускаемого аппарата в атмосфере планеты посредством изменения положения центра масс поворотом внутренней подвижной массы. Роль внутренней подвижной массы может выполнять полезная нагрузка. В работе [10] спускаемый аппарат представлен как система двух твердых тел: тормозного устройства и полезной нагрузки. В точке сопряжения этих тел находится поворотное устройство, которое реализует функцию управления.

Уравнения, описывающие движение спускаемого аппарата, управляемого изменением положения центра масс [10], позволяют рассчитать параметры углового движения спускаемого аппарата при управлении. В математической модели был принят ряд допущений, которые позволили упростить математические выкладки. Предложено рассматривать поворотное устройство в виде цилиндрического шарнира.

В процессе управления на каждое из твердых тел системы действуют моменты сил, которые отличаются друг от друга по величине и направлению. Данное отличие создает сложности в описании углового движения каждого из элементов системы. Для подтверждения правильности составленной математической модели потребовалось выполнить ее верификацию.

С целью проверки правильности принятых допущений и верификации математической модели проведено экспериментальное исследование углового движения системы двух связанных тел с применением разработанного технического комплекса.

Существуют экспериментальные устройства для отработки и исследования систем управления малых космических аппаратов [11, 12]. Данные стенды полунатурного моделирования предназначены для исследования и отработки системы управления угловым положением космического аппарата, исполнительными органами которого могут являться внутренние подвижные массы (маховики). Подвеска стенда на воздушной шаровой опоре [13] или струне [14] исключает возможность приложить моменты внешних сил к исследуемому объекту. Существуют также стенды для исследования поступательного движения подводных аппаратов за счет внутренней подвижной массы [15]. Нахождение экспериментального устройства в водной среде затрудняет регулировку моментов внешних сил.

Разработанная и представленная в статье механическая система предназначена для исследования углового движения летательного аппарата, управляемого поворотом внутренней подвижной массы с учетом внешних сил, действующих на спускаемый аппарат.

Потребовалось решить следующие задачи:

1. Реализовать механическую систему, имитирующую угловое движение двух связанных тел.
2. Разработать программное обеспечение для обработки результатов и измерить параметры движения.
3. Сопоставить результаты измерений с результатами численного решения уравнений движения механической системы.

Комплекс состоит из механической системы, имитирующей угловое движение, измерительного оборудования и оборудования для обработки результатов.

Описание технического комплекса

Перед тем как описывать механическую систему технического комплекса, рассмотрим конструкцию спускаемого аппарата и реализацию управления (рис. 1).

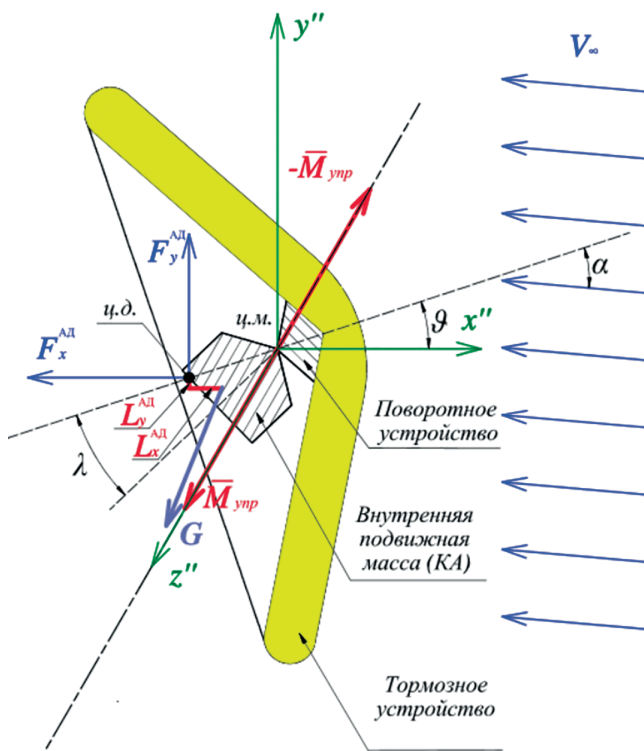


Рис. 1. Схема конструкции спускаемого аппарата с действующими силами: $F_x^{\text{ад}}$ — проекция аэродинамической силы на ось $O''x''$; $F_y^{\text{ад}}$ — проекция аэродинамической силы на ось $O''y''$; $L_x^{\text{ад}}$ — проекция вектора, соединяющего центр масс спускаемого аппарата с точкой приложения аэродинамических сил (центром давления), на ось $O''x''$; $L_y^{\text{ад}}$ — проекция вектора, соединяющего центр масс спускаемого аппарата с точкой приложения аэродинамических сил (центром давления), на ось $O''y''$; $\vec{G}$ — вектор гравитационной силы; $\vec{V}_\infty$ — вектор скорости набегающего потока; $\vec{M}_{\text{упр}}$ — вектор управляющего момента; α — угол атаки; ц.м. — центр масс спускаемого аппарата; ц.д. — точка приложения равнодействующей аэродинамической силы

Спускаемый аппарат состоит из тормозного устройства, которое является корпусом спускаемого аппарата, поворотного устройства, внутренней подвижной массы.

Управление движением спускаемого аппарата осуществляется за счет изменения положения его центра масс. Смещение положения центра масс реализовано следующим образом: внутри тормозного устройства расположена полезная нагрузка спускаемого аппарата, выполняющая роль внутренней подвижной массы. С тормозным устройством полезная нагрузка соединена посредством поворотного механизма, который предназначен для создания управляющего момента относительно оси их сопряжения. Изменение углового положения внутренней

подвижной массы приводит к смещению центра масс спускаемого аппарата относительно продольной оси тормозного устройства. Это смещение центра масс, в свою очередь, приводит к повороту спускаемого аппарата на некоторый угол атаки α , в результате возникает составляющая аэродинамической силы, перпендикулярная направлению движения. За счет этой аэродинамической силы и осуществляется управление движением [11–13].

Для верификации уравнений движения спускаемого аппарата в работе [10] предложена схема механической системы (рис. 2), состоящей из двух дисков, закрепленных на одной оси. Эта ось эквивалентна цилиндрическому шарниру спускаемого аппарата (ось Oz'').

Ось цилиндрического шарнира, соединяющего несомое и несущее тело, является главной центральной осью инерции и совпадает с осью Oz_1 . В результате этого упрощения уравнения углового движения элементов экспериментального устройства имеют вид:

$$J_{O''}^{(1)} \cdot \ddot{\vartheta} + J_{O''}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) = Q_{\vartheta}; \quad (1)$$

$$J_{O''}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) = Q_{\lambda}, \quad (2)$$

где $Q_{\vartheta} = M_{\text{внеш}}$; $Q_{\lambda} = M_{\text{упр}}$;

$M_{\text{внеш}}$ — момент внешней силы, действующей на несущее тело;

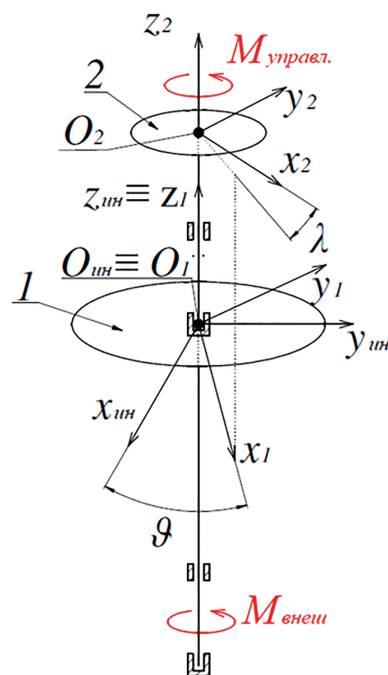


Рис. 2. Схема механической системы: 1 — несущее тело, соответствующее тормозному устройству; 2 — несомое тело, соответствующее внутренней подвижной массе

- $\ddot{\theta}$ — угловое ускорение несущего диска;
 $\ddot{\lambda}$ — угловое ускорение несомого диска относительно несущего;
 $J_{O''}^{(1)}$ — момент инерции тормозного устройства спускаемого аппарата относительно оси цилиндрического шарнира;
 $J_{O''}^{(2)}$ — момент инерции полезной нагрузки (внутренней подвижной массы) спускаемого аппарата относительно оси цилиндрического шарнира.

Согласно предложенной кинематической схеме механической системы, разработана модель ее конструкции (рис. 3, а). Предлагаемая конструкция позволит получить зависимости изменения угловых величин элементов стенда ($\ddot{\theta}$ и $\ddot{\lambda}$) от времени под действием управляющего и внешнего моментов. Сопоставление характера изменения измеренных угловых скоростей элементов системы с теоретическими значениями угловых скоростей, полученными в результате решения математической модели, позволит подтвердить правильность записанной математической модели движения спускаемого аппарата.

Внешний момент создает груз 3, раскручивая нить, намотанную на шкив 4. Управляющий момент создает электродвигатель 5. Управляющий момент передается на несомый диск через тензометриче-

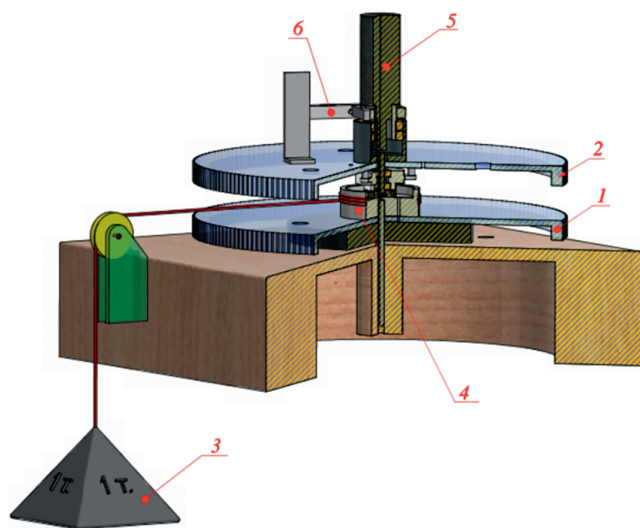
скую балку. Тензометрическая балка используется в системе автоматического регулирования управляющего момента, она также используется для его контроля. При отсутствии управляющего момента несомый и несущий диски остаются неподвижными друг относительно друга. При отсутствии тензометрической балки несомый диск свободно вращается относительно несущего. Свободное вращение обеспечивает опора качения, на которую установлен несомый диск.

С учетом способа создания момента внешних сил, уравнения углового движения стенда примут следующий вид:

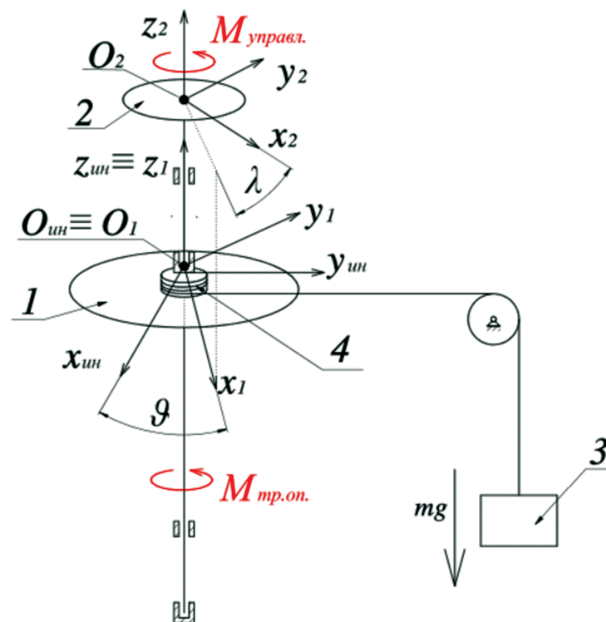
$$\ddot{\theta} = \frac{mgR_6 - J_{\text{вд}} \ddot{\lambda}}{mR_6^2 + J_{\text{нд}} + J_{\text{вд}}}; \quad (3)$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{M_{\text{упр}}}{J_{\text{вд}}} - \ddot{\theta}, \quad (4)$$

где R_6 — радиус шкива для намотки нити; g — ускорение свободного падения; m — масса груза для создания момента внешних сил; $J_{\text{нд}}$ — момент инерции несущего диска (диска 1) относительно оси O_1z_1 ; $J_{\text{вд}}$ — момент инерции несомого диска (диска 2) относительно оси O_2z_2 .



а



б

Рис. 3. Механическая система технического комплекса: а — модель; б — кинематическая схема с указанием сил и моментов, действующих на ее элементы: 1 — несущий диск; 2 — несомый диск со 180 засечками; 3 — груз для создания момента внешних сил; 4 — шкив для намотки нити; 5 — электродвигатель для создания управляющего момента $M_{\text{упр}}$; 6 — тензометрическая балка; $M_{\text{тр.оп}}$ — момент силы трения опоры несущего диска (примем допущение о том, что момент сил трения опоры равен нулю; при верификации метода измерения моментов инерции несущего и несомого дисков выполним оценку правильности данного допущения)

На рис. 4 представлено фото механической системы технического комплекса. Угловая скорость измеряется с помощью датчиков углового положения, регистрирующих прохождение отсчетной засечки. Угловое расстояние между двумя соседними засечками составляет 2° .

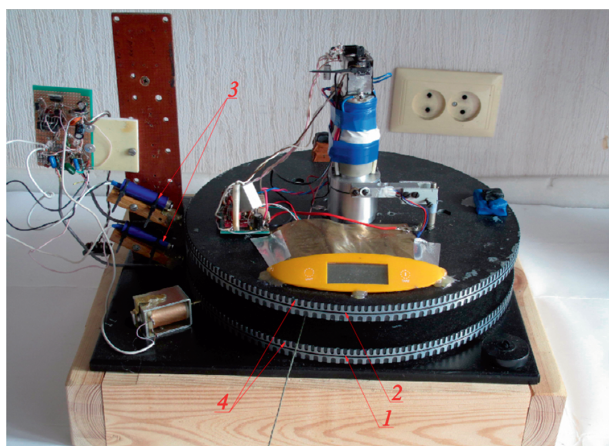


Рис. 4. Фото механической системы технического комплекса:

- 1 — несущий диск; 2 — несомый диск;
- 3 — датчик углового положения;
- 4 — отсчетные засечки

На рис. 5 представлено фото технического комплекса, который включает механическую систему, измерительное и вычислительное оборудование.

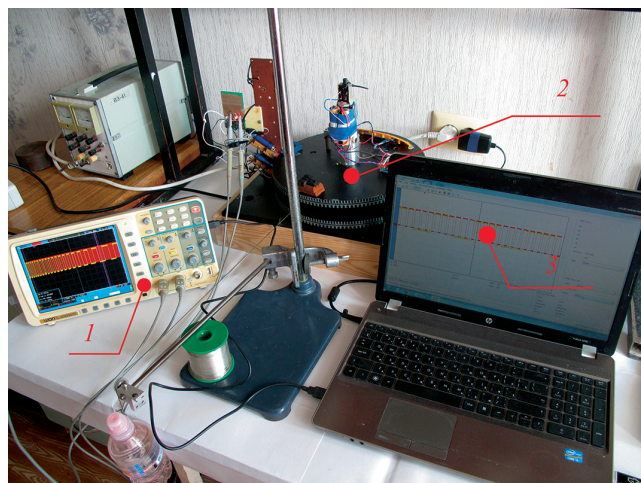


Рис. 5. Фото разработанного технического комплекса:

- 1 — осциллограф, выполняющий функцию регистрации и записи сигналов с датчиков;
- 2 — механическая система;
- 3 — ноутбук, использующийся для обработки записанных измерений и расчета полученных зависимостей изменения угловых величин элементов стенда с дискретностью 2°

Таким образом, разработанный комплекс позволит получить зависимости изменения угловых величин элементов стенда от времени.

Для того чтобы промоделировать угловое движение несущего и несомого дисков механической системы, необходимо решить уравнения (3), (4), описывающие это движение. В (3), (4) известны следующие величины:

$$R_6 = 0,031 \text{ м}; g = 9,8065 \text{ м/с}^2;$$

$$m = 0,338 \text{ кг};$$

$$M_{\text{упр}} = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Неизвестны значения моментов инерции несущего $J_{\text{нд}}$ и несомого дисков $J_{\text{вд}}$. Таким образом, для численного решения уравнений (3), (4), необходимо измерить моменты инерции $J_{\text{нд}}$ и $J_{\text{вд}}$.

Измерение моментов инерции несущего и несомого дисков

Моменты инерции измерены через определение параметров углового движения твердого тела под действием момента внешних сил (рис. 6).

Согласно схеме (рис. 6) запишем уравнения углового движения твердого тела 1, используя теорему Лагранжа 2-го рода [14–16] (применить уравнение Лагранжа 2-го рода при выводе уравнений движения механической системы проще, чем использовать теорему об изменении кинетического момента):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (5)$$

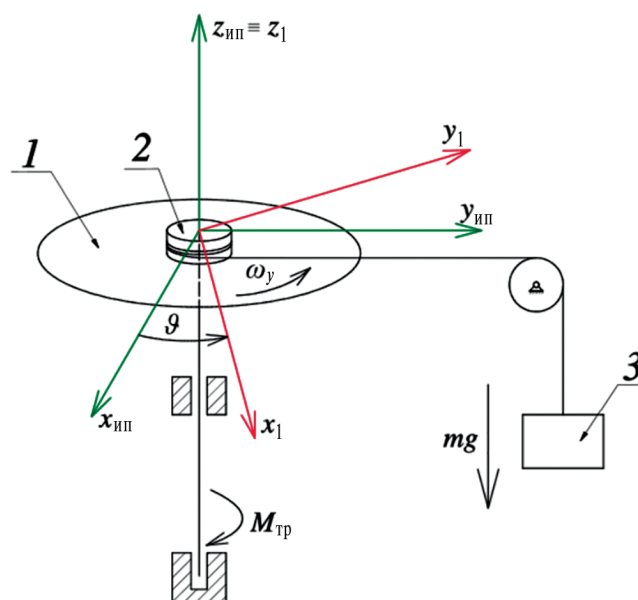


Рис. 6. Кинематическая схема механического устройства для измерения момента инерции твердого тела:

- 1 — несущий диск; 2 — шкив для намотки нити;
- 3 — груз для создания момента внешних сил

где T – кинетическая энергия механического устройства;

q_i – обобщенные координаты, принятые для определения положения элементов механического устройства;

Π – потенциальная энергия элементов механического устройства.

Кинетическая энергия представляет собой сумму кинетических энергий углового движения диска T_d и поступательного движения груза T_r [17]: $T = T_r + T_d$.

Кинетическая энергия диска, записанная через обобщенные координаты:

$$T_d = \frac{J_{нд} \omega^2}{2} = \frac{J_{нд} \dot{\vartheta}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия груза, записанная через обобщенные координаты:

$$T_r = \frac{mV^2}{2} = \frac{m(\omega R_6)^2}{2} = \frac{mR_6^2}{2} \dot{\vartheta}^2.$$

Потенциальная энергия груза, записанная через обобщенные координаты:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{y_{нач}}^{y_{кон}} mg dy = mg(y_{кон} - y_{нач}); \\ y_{кон} &< y_{нач}; \quad y_{кон} - y_{нач} = -h; \\ \Pi &= -mgh = -mg\vartheta R_6. \end{aligned}$$

Преобразуем уравнение Лагранжа 2-го рода с учетом выражений для потенциальной и кинетической энергий:

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = J_{нд} \dot{\vartheta} + mR_6^2 \dot{\vartheta}; \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = J_{нд} \ddot{\vartheta} + mR_6^2 \ddot{\vartheta}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} = -mgR_6. \quad (9)$$

После подстановки уравнений (6)–(9) в уравнение (5) получим

$$J_{нд} \ddot{\vartheta} + mR_6^2 \ddot{\vartheta} = mgR_6. \quad (10)$$

Запишем момент инерции $J_{нд}$ из выражения (10) в виде

$$J_{нд} = \left(\frac{g}{\ddot{\vartheta}} - R_6 \right) mR_6. \quad (11)$$

Измерение моментов инерции элементов стенда описанным методом

На рис. 7 представлен результат измерения параметров углового движения твердого тела в виде зависимости изменения углового ускорения от времени. Анализ зависимости углового ускорения от времени позволил сделать вывод: значения углового ускорения сильно зашумлены, что не позволяет точно определить эту характеристику.

Для устранения зашумленности выполнено интегрирование углового ускорения по времени [18]. В результате получена зависимость изменения угловой скорости от времени, представленная на рис. 8.

Полученная зависимость менее зашумлена. Для устранения оставшихся флуктуаций выполнено повторное интегрирование. Получена зависимость изменения угла поворота твердого тела от времени (рис. 9).

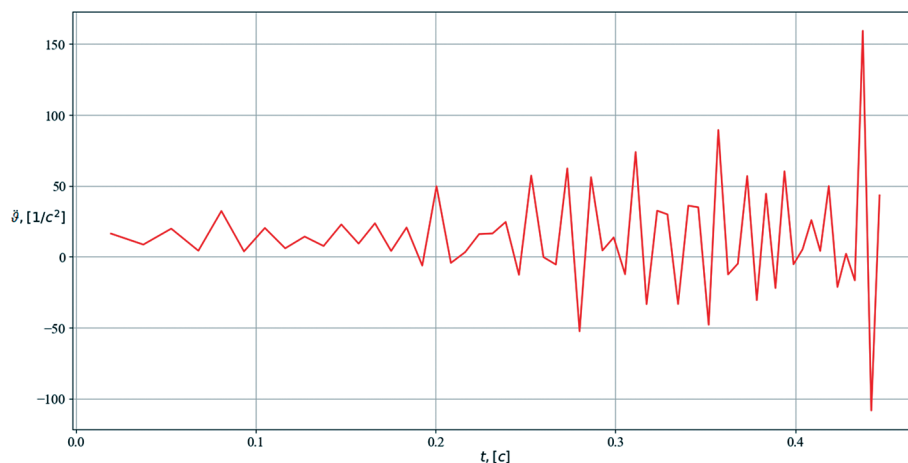


Рис. 7. Зависимость изменения углового ускорения от времени для несущего диска

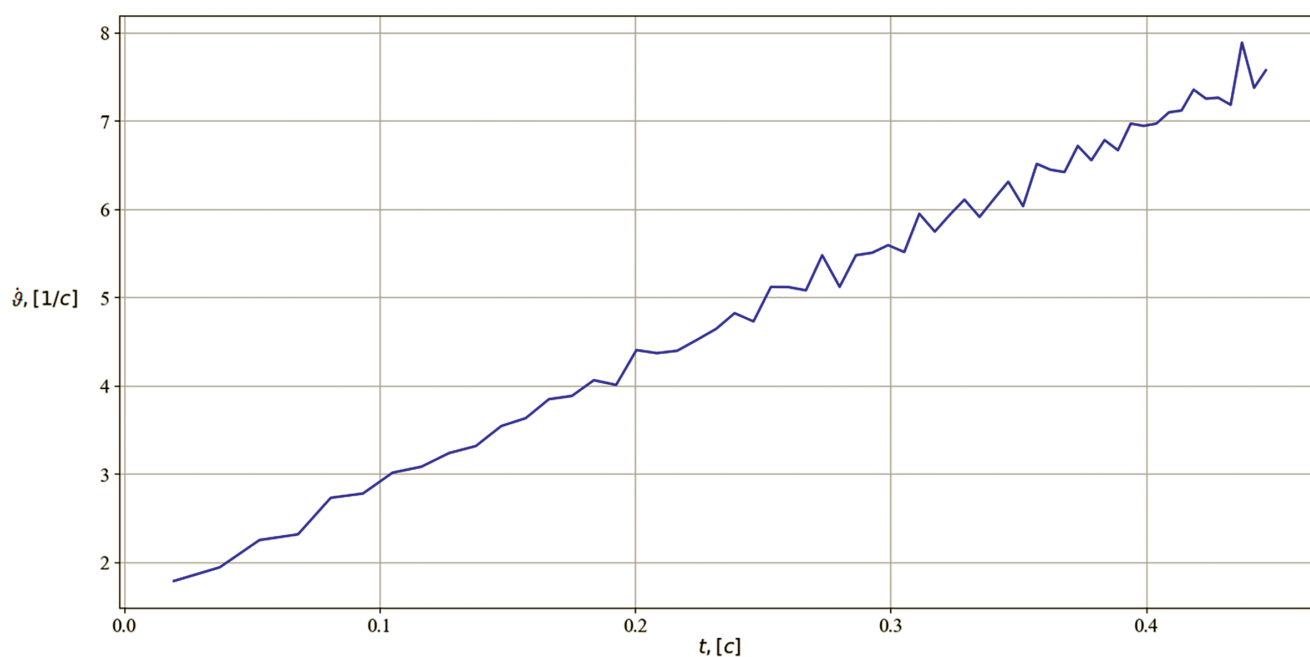


Рис. 8. Зависимость изменения угловой скорости от времени для несущего диска

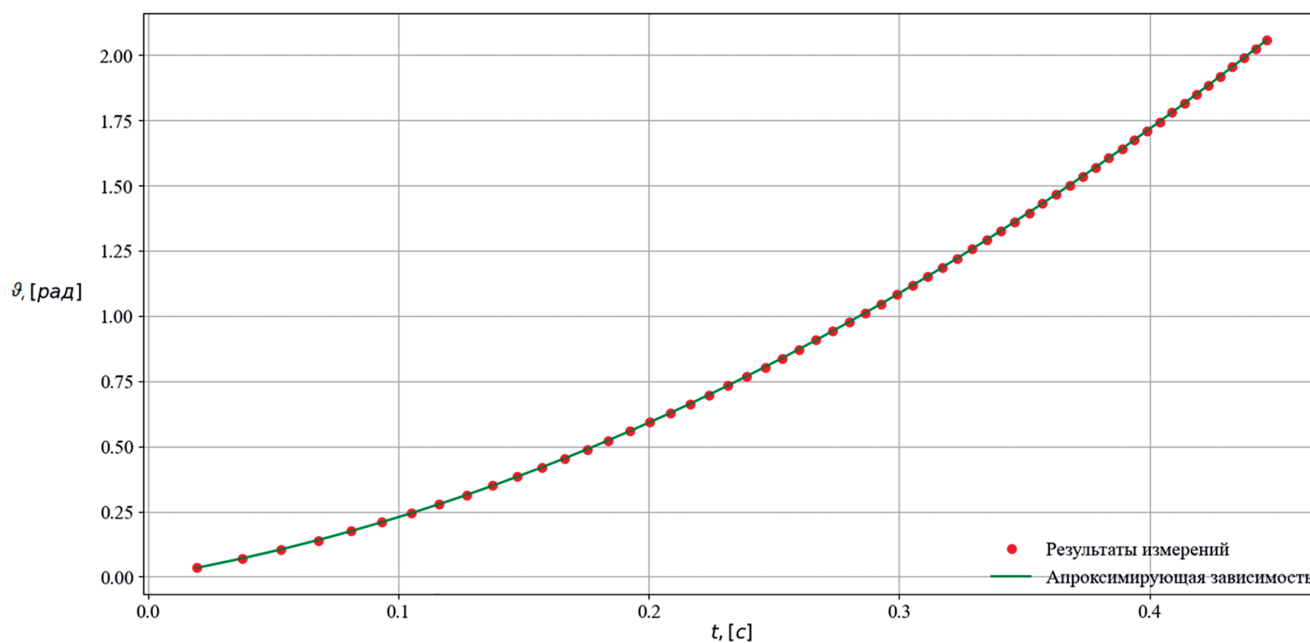


Рис. 9. Зависимость изменения угла поворота несущего диска от времени и аппроксимирующая этот результат линия

В зависимости изменения угла поворота несущего диска от времени флуктуации отсутствуют. Аппроксимация полученной зависимости полиномом второй степени [19] позволила измерить угловое ускорение несущего диска: $\ddot{\vartheta}_1 = 3,342 \text{ 1/c}^2$.

С использованием формулы (11) вычислен момент инерции несущего диска:

$$J_{\text{нд}}^{\text{изм}} = 3,042 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для подтверждения правильности используемой методики измерения момента инерции выполнена ее верификация методом сопоставления измеренного значения момента инерции твердого тела с его известным значением.

На рис. 10 представлена схема механического устройства для верификации метода измерения момента инерции.

В данном случае измеренный момент инерции является суммой момента инерции несущего диска и момента инерции твердого тела с известной характеристикой.

Измеренное значение углового ускорения в данном эксперименте составляет $\ddot{\vartheta}_2 = 1,785 \text{ 1/c}^2$.

$$J_{\text{сист}}^{\text{изм}} = J_{\text{нд}}^{\text{изм}} + J_2^{\text{изм}} = 5,723 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

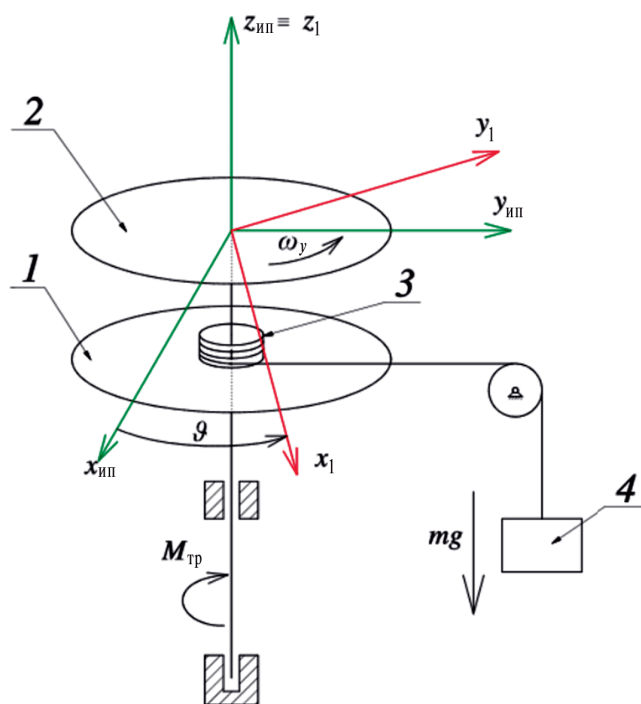


Рис. 10. Кинематическая схема механической системы для верификации метода измерения момента инерции:

- 1 — несущий диск;
- 2 — диск с известным моментом инерции;
- 3 — шкив для намотки нити;
- 4 — груз для создания момента внешних сил

где $J_2^{\text{изм}}$ — измеренный момент инерции диска 2.

Вычтя из суммарного момента инерции момент инерции несущего диска, измеренный ранее, определим момент инерции диска 2:

$$J_2^{\text{изм}} = J_{\text{сист}}^{\text{изм}} - J_{\text{нд}}^{\text{изм}} = 5,723 \cdot 10^{-2} - 3,042 \cdot 10^{-2} = 2,681 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Вычислим погрешность используемого метода измерения относительно известного значения момента инерции диска 2:

$$\sigma = \left| \frac{J_2^{\text{изм}} - J_2^{\text{изв}}}{J_2^{\text{изв}}} \right| \cdot 100 = \frac{2,681 \cdot 10^{-2} - 2,284 \cdot 10^{-2}}{2,284 \cdot 10^{-2}} \cdot 100 = 17,38\%.$$

Погрешность определена относительно известного момента инерции. Предполагается, что данная погрешность возникла в результате действия сил трения в опоре, которые не учтены в уравнениях.

С целью расчета коэффициента момента силы трения в опоре нижнего диска и для уточнения значения управляющего момента выполнены три эксперимента. Для каждого эксперимента серии составлено уравнение, в которое входят неизвестные характеристики станда: 1 — момент инерции несущего диска; 2 — момент инерции несомого диска; 3 — момент силы трения в опоре; 4 — управляющий момент.

Рассмотрим каждый эксперимент.

Первый эксперимент: разгон несущего диска под действием момента внешней силы (см. рис. 6). Перепишем выражение (10) с учетом момента силы трения в опоре несущего диска $M_{\text{тр}}^{\text{оп}}$. Выражения для обобщенной работы моментов сил трения в опоре:

$$\partial A_{\text{оп}} = M_{\text{тр}}^{\text{оп}} \cdot \partial \vartheta_2;$$

$$\frac{\partial A_{\text{оп}}}{\partial \vartheta_2} = M_{\text{тр}}^{\text{оп}}.$$

С учетом последнего выражения выражение (10) примет следующий вид:

$$J_{\text{нд}} \ddot{\vartheta}_1 + m R_6^2 \ddot{\vartheta}_1 = m g R_6 - M_{\text{тр}}^{\text{оп}}. \quad (12)$$

В уравнение (12), описывающее этот эксперимент, входят две неизвестные величины: $J_{\text{нд}}$, $M_{\text{тр}}^{\text{оп}}$. Момент силы трения в опоре $M_{\text{тр}}^{\text{оп}}$ зависит от массы $m_{\text{н}}$, которая нагружает опору, и коэффициента трения k : $M_{\text{тр}}^{\text{оп}} = m_{\text{н}} \cdot k$.

Второй эксперимент аналогичен эксперименту по верификации метода измерения момента инерции твердого тела (см. рис. 10). С учетом силы трения в опоре несущего диска уравнение, описывающее этот эксперимент, имеет следующий вид:

$$(J_{\text{нд}} + J_2) \ddot{\theta}_2 + mR_6^2 \ddot{\theta}_2 = M_{\text{тр}}^{\text{оп}}. \quad (13)$$

В уравнение (13) вошли следующие неизвестные величины: $J_{\text{нд}}$, $M_{\text{тр}}^{\text{оп}}$.

Третий эксперимент. На рис. 11 представлена схема механического устройства для изменения угловых скоростей несущего и несомого дисков под действием управляющего момента, создаваемого электродвигателем.

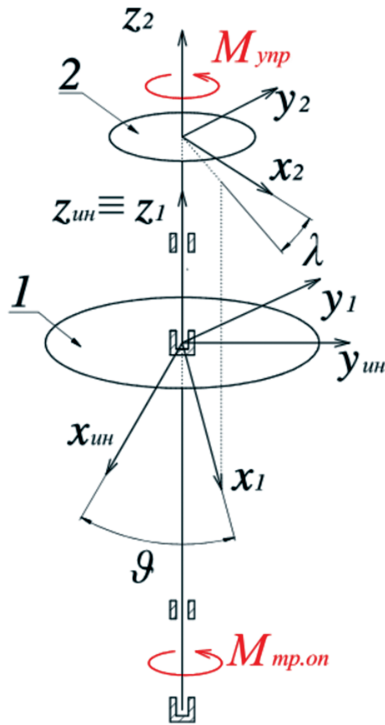


Рис. 11. Схема механического устройства для изменения угловых скоростей несущего и несомого дисков под действием управляющего момента, создаваемого электродвигателем: 1 — несущий диск, 2 — несомый диск

Уравнения движения элементов механического устройства имеют следующий вид:

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{M_{\text{тр}}^{\text{оп}} - J_{\text{вд}} \ddot{\lambda}_3}{J_{\text{нд}} + J_{\text{вд}}}, \quad (14)$$

$$\ddot{\lambda}_3 = \frac{M_{\text{упр}}}{J_{\text{вд}}} - \ddot{\theta}_3, \quad (15)$$

где $\ddot{\theta}_3$ — измеренное значение углового ускорения несущего диска в третьем эксперименте;
 $\ddot{\lambda}_3$ — измеренное значение углового ускорения несомого диска в третьем эксперименте.

В уравнения, описывающие этот эксперимент, войдут четыре неизвестные величины: $J_{\text{нд}}$, $J_{\text{вд}}$, $M_{\text{тр}}^{\text{оп}}$, $M_{\text{упр}}$. Таким образом, составлена система из четырех уравнений:

$$J_{\text{нд}} \ddot{\theta}_1 + mR_6^2 \ddot{\theta}_1 = mgR_6 - m_{\text{н1}}k; \quad (16)$$

$$(J_{\text{нд}} + J_2) \ddot{\theta}_2 + mR^2 \ddot{\theta}_2 = -m_{\text{н2}}k + mgR; \quad (17)$$

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{-m_{\text{н3}}k - J_{\text{вд}} \ddot{\lambda}_3}{J_{\text{нд}} + J_{\text{вд}}}; \quad (18)$$

$$\ddot{\lambda}_3 = \frac{M_{\text{упр}}}{J_{\text{вд}}} - \ddot{\theta}_3, \quad (19)$$

где $m_{\text{н1}} = 2,812$ кг — масса, установленная на опору несущего диска в первом эксперименте;

$m_{\text{н2}} = 5,096$ кг — масса, установленная на опору несущего диска во втором эксперименте;

$m_{\text{н3}} = 5,718$ кг — масса, установленная на опору несущего диска в третьем эксперименте.

В каждом из уравнений известно значение углового ускорения: $\ddot{\theta}_1 = 3,345$ рад/с²;

$$\ddot{\theta}_2 = 1,789 \text{ рад/с}^2; \quad \ddot{\theta}_3 = 2,736 \text{ рад/с}^2;$$

$$\ddot{\lambda}_3 = -2,768 \text{ рад/с}^2.$$

В систему уравнений входят четыре величины, которые не известны либо подлежат уточнению: $J_{\text{нд}}$, $J_{\text{вд}}$, k , $M_{\text{упр}}$.

При решении системы уравнений [20] получены следующие результаты:

$$J_{\text{нд}} = 2,972 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_{\text{вд}} = 3,281 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$k = 1,660 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м/кг}; \quad M_{\text{упр}} = -9,080 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Выполним повторно верификацию метода измерения момента инерции твердого тела с учетом момента силы трения в опоре. Воспользуемся уравнением (12):

$$J_2 = \frac{-m_{\text{н3}}k + mgR - mR^2 \ddot{\theta}_3}{\ddot{\theta}_3} - J_{\text{нд}} =$$

$$= 5,237 \cdot 10^{-2} - 2,972 \cdot 10^{-2} = 2,265 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Полученное рассогласование

$$\sigma = \left| \frac{2,265 \cdot 10^{-2} - 2,284 \cdot 10^{-2}}{2,284 \cdot 10^{-2}} \right| \cdot 100\% = 0,83\%$$

позволяет сделать вывод о соответствии результатов математического моделирования результатам натурного эксперимента.

Измерение параметров углового движения элементов стенда и их сопоставление с результатами моделирования углового движения

Получены уравнения углового движения элементов экспериментального устройства с учетом моментов сил трения в опоре несущего диска:

$$\ddot{\vartheta} = \frac{mgR_6 - M_{\text{тр}}^{\text{оп}} - J_{\text{вд}} \ddot{\lambda}}{mR_6^2 + J_{\text{нд}} + J_{\text{вд}}}; \quad (20)$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{M_{\text{упр}}}{J_{\text{вд}}} - \ddot{\vartheta}. \quad (21)$$

На рис. 12, 13 представлены результаты моделирования углового движения элементов стенда и результаты измерений. Синей пунктирной линией обозначена теоретическая зависимость изменения угловой скорости от времени, красной — экспериментальная зависимость изменения угловой скорости от времени.

Теоретические значения получены в результате решения уравнений углового движения несущего (20) и несомого (21) дисков. Рассогласование между теоретическими и экспериментальными результатами составляет 3,06%, что соответствует 0,185 рад/с².

Выводы

Разработана механическая система для верификации математической модели управляемого движения спускаемого аппарата. Данная механическая система позволяет создавать и регулировать момент внешних сил, в отличие от таких экспериментальных устройств, как платформы на воздушной шаровой опоре и плавательные платформы.

Исследования с применением разработанного комплекса подтвердили соответствие математической модели, описывающей угловое движение элементов спускаемого аппарата, поведению механической системы под воздействием управляющих моментов и моментов внешних сил.

Список источников

1. Фаворский В.В., Мещеряков И.В. Космонавтика и ракетно-космическая промышленность. Кн. 2. Развитие отрасли (1976-1992). Сотрудничество в космосе. М.: Машиностроение, 2003. 430 с.
2. Kulu E. In-Space Manufacturing - 2024 Industry Survey, Trends, Economics and Enablers // IAF Microgravity Sciences and Processes Symposium (14-18 October 2024; Milan, Italy), pp. 383-416. DOI: 10.52202/078356-0050
3. Frick J., Kulu E., Rodrigue G., et al. Semiconductor Manufacturing in Low-Earth Orbit for Terrestrial Use. 2023. DOI: 10.31219/osf.io/d6ar4

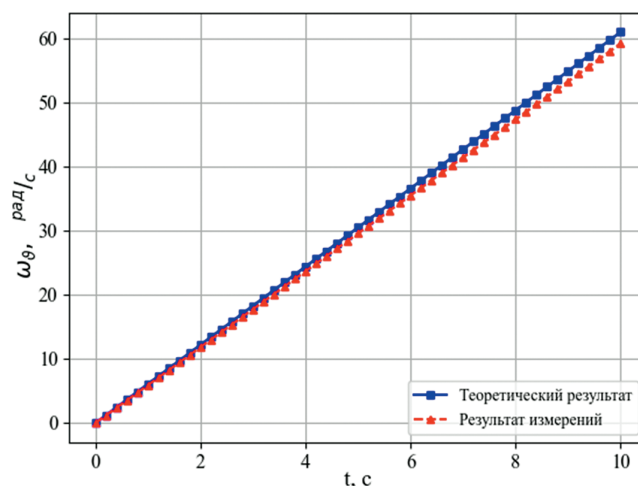


Рис. 12. Зависимость изменения угловой скорости несущего диска от времени относительно неподвижной системы координат

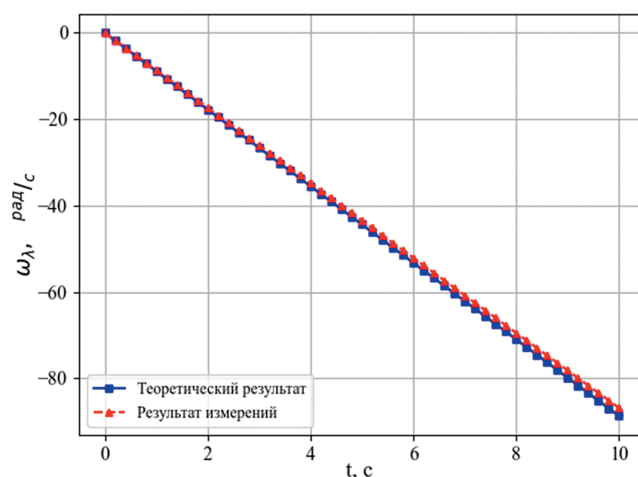


Рис. 13. Зависимость изменения угловой скорости несомого диска от времени относительно неподвижной системы координат

4. Самотохин А.С. Алгоритм ограничения перегрузки на рикошетирующей траектории возвращения от Луны. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 86. 21 с. Препринт. DOI: 10.20948/prepr-2020-86
5. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Воронин В.В. Математическое моделирование процесса посадки космического аппарата на участке его контакта с поверхностью // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18. № 4. С. 38-46. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=27227> EDN OIFYXZ.
6. Леонов В.В., Гришко Д.А., Айрапетян М.А. и др. Тепловой анализ траекторий возвращения от Луны с несколькими входами в атмосферу для баллистической капсулы и аппаратов скользящего спуска // Космические исследования. 2021. Т. 59. № 3. С. 196-208. DOI: 10.31857/S0023420621030079

7. Кудрявцев С.И. Анализ баллистических проблем организации спуска перспективного пилотируемого транспортного корабля с орбиты искусственного спутника Земли для безопасной посадки на территории России // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 2(74). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-2-1731
8. Кухаренко А.С. Экспериментальное исследование углового движения твердого тела под влиянием изменяющегося тензора инерции // Фундаментальные и прикладные задачи механики: Сборник трудов Международной конференции (05–08 декабря 2023; Москва). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024. С. 138–141.
9. Кухаренко А.С. Управляемый посредством смещения центра масс полет спускаемого аппарата, оснащенного надувным тормозным устройством // Идеи Циолковского в теориях освоения космоса: Сборник трудов 58-х Научных чтений (19–21 сентября 2023; Калуга). Калуга: ИП Стрельцов И.А., 2023. С. 257–261.
10. Кухаренко А.С., Корянов В.В., Игнатов А.И. и др. Математическая модель углового движения спускаемого аппарата, управляемого смещением центра масс // Инженерный журнал: наука и инновации. 2025. № 7(163). DOI: 10.18698/2308-6033-2025-7-2462
11. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Стенд КОС-МОС для моделирования движения макетов системы управления микроспутников и обзор мировых аналогов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 138. 32 с. Препринт. DOI: 10.20948/prepr-2016-138
12. Schwartz J., Peck M.A., Hall C.D. Historical Review of Air-Bearing Spacecraft Simulators // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2003. Vol. 26. No. 3, pp. 513–522. DOI: 10.2514/1.1035
13. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. и др. Лабораторные испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника «Чибис-М». М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2011. № 40. 29 с. Препринт. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-40>
14. Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Лабораторный стенд для полунатурной отработки систем ориентации микро- и наноспутников. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2008. № 38. 32 с. Препринт. URL: https://keldysh.ru/papers/2008/prep38/prep2008_38.html?ysclid=mdijwp6fuo2067528
15. Клековкин А.В. Исследование динамики движения в жидкости роботов с неизменяемой формой оболочки и управляемых внутренними роторами: Дисс. ... канд. техн. наук. Ижевск, 2020. 131 с.
16. Atkins B.M. Mars precision entry vehicle guidance using internal moving mass actuators. Ph.D. Virginia Polytechnic Institute and State University, United States. 2014.
17. Menon P., Sweriduk G., Ohlmeyer E., et al. Integrated guidance and control of moving mass actuated kinetic warheads // Journal of Guidance Control & Dynamics. 2004. Vol. 27. No. 1, pp. 118–126. DOI: 10.2514/1.9336
18. Кухаренко А.С., Корянов В.В. Угловое движение спускаемого аппарата при управлении методом поворота полезной нагрузки // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 3. С. 174–186.
19. Раус Э. Динамика системы твердых тел. В 2 томах /Пер. с англ. под ред. Ю.А. Архангельского и В.Г. Демина. М.: Наука, 1983. Т. 1, 464 с.
20. Дмитриевский А.А., Казаковцев В.П., Устинов В.Ф. и др. Движение ракет: Введение в теорию полета ракет. М.: Воениздат, 1968. 464 с.

References

1. Favorskii VV, Meshcheryakov IV. *Cosmonautics and the rocket and space industry. Book 2. Development of the industry (1976–1992). Cooperation in space*. Moscow: Mashinostroyeniye; 2003. 430 p. (In Russ.).
2. Kulu E. In-Space Manufacturing - 2024 Industry Survey, Trends, Economics and Enablers. *IAF Microgravity Sciences and Processes Symposium (October 14–18, 2024; Milan, Italy)*. p. 383–416. DOI: 10.52202/078356-0050
3. Frick J, Kulu E, Rodrigue G, et al. *Semiconductor Manufacturing in Low-Earth Orbit for Terrestrial Use*. 2023. DOI: 10.31219/osf.io/d6ar4
4. Samotokhin AS. *Overload limitation algorithm on the ricocheting trajectory of return from the Moon*. Moscow: Preprint, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS. 2020. No. 86. 21 p. (In Russ.). DOI: 10.20948/prepr-2020-86
5. Bakulin VN, Borzykh SV, Voronin VV. The mathematical simulation of the spacecraft landing in the area of its contact with surface. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(1):7–13. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=27227> EDN OIFYXZ.
6. Leonov VV, Grishko DA, Airapetyan MA, et al. Thermal analysis of trajectories of return from the moon using several entries into the atmosphere for ballistic capsule and gliding descent vehicles. *Cosmic Research*. 2021;59(3):162–174. (In Russ.). DOI: 10.1134/S0010952521030060
7. Kudryavtsev SI. Analysis of ballistic problems of management of prospective manned transport vehicle descending from the artificial Earth satellite orbit for safe landing on the territory of Russia. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2018(2). (In Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-2-1731
8. Kuharenko AS. Experimental study the angular motion of a solid body under the influence of a variable tensor of inertia. *Materials of the International Scientific Conference “Fundamental and applied problems of mechanics” (FAPM-2023; Moscow, Bauman Moscow State Technical University)*. 2024. p. 138–141. (In Russ.).
9. Kukharensko AS. The flight of a descent vehicle equipped with an inflatable braking device controlled by shifting the

- center of mass. *Materials of the 59th Scientific Readings "The Konstantin Tsiolkovsky's ideas in theories of space exploration" (September 19-21, 2023; Kaluga)*. p. 257-261. (In Russ.).
10. Kukhareenko AS, Koryanov VV, Ignatov AI, et al. Mathematical model of the descent vehicle angular motion controlled by the center-of-mass displacement. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2025(7). (In Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2025-7-2462
 11. Ivanov DS, Ovchinnikov MYu, Tkachev SS. *The COSMOS stand for modeling the motion of microsatellite control system layouts and an overview of world analogues*. Moscow: Preprint, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS. 2016. No. 138. 32 p. (In Russ.). DOI:10.20948/prepr-2016-138
 12. Schwartz J, Peck MA, Hall CD. Historical Review of Air-Bearing Spacecraft Simulators. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2003;26(3):513-522. DOI: 10.2514/1.1035
 13. Ivanov DS, Karpenko SO, Ovchinnikov MYu, et al. *Laboratory tests of algorithms for controlling the orientation of the Chibis-M microsatellite*. Moscow: Preprint, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS. 2011. No. 40. 29 p. (In Russ.).
 14. Karpenko SO, Ovchinnikov MYu. *Laboratory Facility for Testing of Micro- and Nanosatellite Attitude Control Systems*. Moscow: Preprint, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS. 2008. No. 38. 32 p. (In Russ.).
 15. Klekovkin AV. *Investigation of motion dynamics in a liquid of robots with an unchangeable shell shape and controlled by internal rotors*. PhD thesis. Izhevsk: Kalashnikov ISTU; 2020. 131 p. (In Russ.).
 16. Atkins BM. *Mars precision entry vehicle guidance using internal moving mass actuators*. Ph.D. Virginia Polytechnic Institute and State University, United States. 2014.
 17. Menon P, Sweriduk G, Ohlmeyer E, et al. Integrated guidance and control of moving mass actuated kinetic warheads. *Journal of Guidance Control & Dynamics*. 2004;27(1):118-126. DOI: 10.2514/1.9336
 18. Kukhareenko AS, Koryanov VV. Angular motion of a descent vehicle under control by the payload rotation method. *Aerospace MAI Journal*. 2023;30(3):174-186. (In Russ.).
 19. Routh EJ. *Dynamics of a system of rigid bodies*. London: Legare Street Press, 2023. 58 p. (In Russ.).
 20. Dmitrievskii AA, Kazakovtsev VP, Ustinov VF, et al. *Rocket movement: An introduction to the theory of rocket flight*. Moscow: Voenizdat; 1968. 464 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию / Received 16.06.2025
Одобрена после рецензирования / Revised 31.08.2025
Принята к публикации / Accepted 31.08.2025