

УДК 539.3

Прогибы неоднородного стержня при осевом сжатии

Егоров А.В.

Национальный институт авиационных технологий,

Кировоградская ул., 3, Москва, 117587, Россия

e-mail: antegor177@mail.ru

Аннотация

Построена объемная конечно-элементная модель деформирования гибкого неоднородного стержня при осевом сжатии. В программном комплексе ANSYS на основании модального анализа определены возможные формы колебаний и собственные частоты и проведено их сравнение с формами и частотами однородного стержня.

Из расчетов напряженно-деформированного состояния неоднородного стержня в программном комплексе LS-DYNA в динамической постановке найдены поперечные перемещения (прогибы) продольно нагруженного стержня, имеющего малые технологические отклонения, которые заданы в виде вкладышей с отличными от основного стержня модулями упругости. Рассмотрены два случая: жесткие и мягкие вкладыши. Потерю устойчивости стержня устанавливали по величине прогибов. Сравнение с критической силой Эйлера показало, что найденная критическая нагрузка превышает ее на 21 %, что можно считать верхней оценкой, так как вкладыши были взяты малого объема и составляли 0,8 % по отношению к

объему стержня. При допущении об отсутствии разрушения стержня установлен процесс его формоизменения, связанный с большими перемещениями, и указан момент времени достижения в верхнем тонком слое на выпуклой поверхности изогнутого стержня предельной деформации.

Ключевые слова: неоднородный стержень, сжатие, устойчивость, модальный анализ, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние.

Задачи прогиба стержней при осевом сжатии исследуются в разделе строительной механики — устойчивость стержней. В этом направлении известны работы В.И. Феодосьева [1, 2], В.В. Болотина [3], С.П. Тимошенко [4], А.С. Вольмира [5], Н.А. Алфутова [6] и других авторов. Рассматривались, преимущественно, однородные стержни. Сегодня при весовой оптимизации ответственных стержневых конструкций необходимы более точные расчетные схемы, в которых учитываются неоднородные свойства материалов в объеме стержня, что имеет место в реальных изделиях и существенно отражается на механическом поведении нагруженных стержневых элементов.

Современное развитие классической статической задачи устойчивости стержней Л. Эйлера [7] связано с динамической постановкой и более сложными условиями закрепления и нагружения. Динамические расчеты подразделяются на два типа в зависимости от действующих ударных нагрузок, которые могут быть кратковременными [8–10] или продолжительными [11–13].

Прямолинейные стержни могут нагружаться следящими силами [14, 15], иметь на подвижном торце сосредоточенные массы [16, 17], испытывать вибрации для стабилизации статической неустойчивости [18]. Решения проводят в геометрически линейной и нелинейной постановках [19], применительно к однородным одномерным объектам. Численная реализация осуществляется путем формирования систем дифференциальных уравнений [20, 21] или конечно-элементных моделей [22, 23].

В данной работе деформирование стержня под действием длительного удара (термин заимствован из работы [9]) рассматривается в трехмерной постановке, чтобы можно было учесть несимметричную относительно оси стержня неоднородность материала. Процесс деформирования предлагается анализировать с учетом реального (текущего) времени, что дает возможность отслеживать перемещения точек стержня в функции времени. Неоднородность материала задается в малом объеме с целью оценки минимального влияния технологических отклонений (в частном случае неоднородности механических свойств) на напряженно-деформированное состояние стержня.

Поставленная задача решается с применением объемных конечных элементов в программном комплексе LS-DYNA в динамической постановке [24]. Поиск возможных форм отклонений оси стержня от прямолинейной проводится на основе модального анализа с привлечением программного комплекса ANSYS.

Пусть стержень длиной l закреплен шарнирно (рис. 1) на торцах. Нижний шарнир — неподвижен, верхний — допускает вертикальные смещения. Сила P направлена вдоль оси стержня.

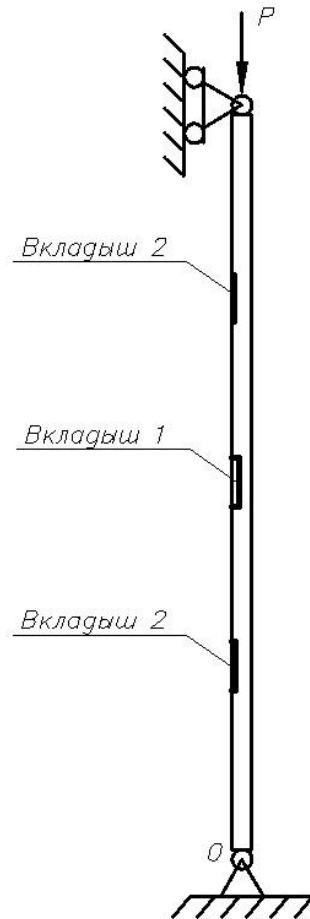


Рис. 1. Расчетная схема неоднородного стержня

Неоднородность стержня задана в виде трех «левосторонних» вкладышей — центрального (№ 1) и двух боковых (№ 2). Геометрические размеры конструкции (рис. 2) приведены в табл. 1. Механические характеристики стального стержня [25] указаны в табл. 2. Для линейно-упругих вкладышей принимали два значения модуля упругости. Одно значение $E_f = 180$ МПа, что на 10 % меньше модуля упругости

стержня и соответствует величинам возможных технологических отклонений;
 второе значение $E_f = 1$ кПа, что близко к «вырезам» в стержне.

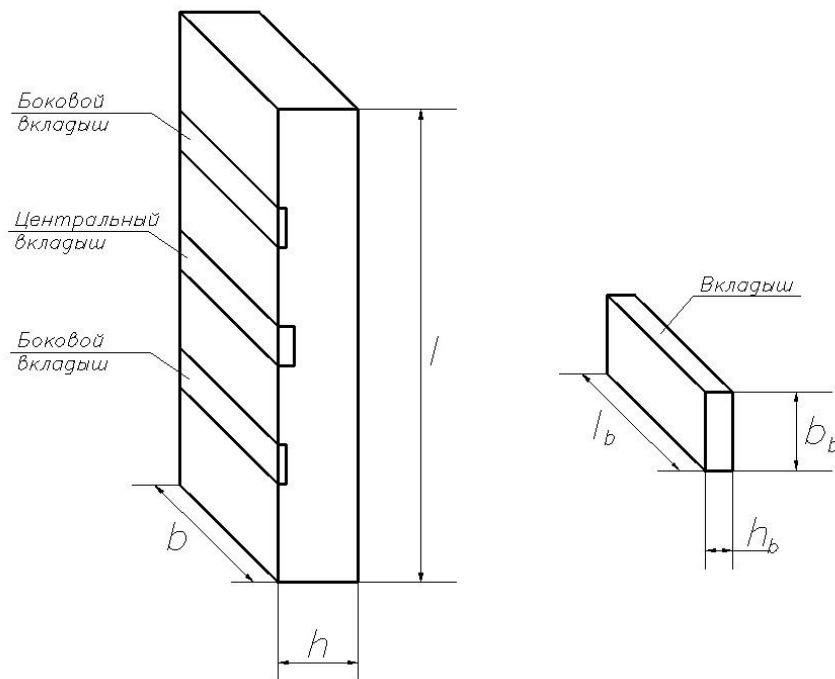


Рис. 2. Конструктивная схема стержня

Таблица 1

Геометрические размеры неоднородного стержня

l , мм	b , мм	h , мм	Вкладыш 1			Вкладыш 2		
			l_1 , мм	b_1 , мм	h_1 , мм	l_2 , мм	b_2 , мм	h_2 , мм
300	10	1,2	10	2	0,4	10	2	0,2

Таблица 2

Механические характеристики стального стержня

E , ГПа	$\sigma_{0,2}$, ГПа	σ_B , ГПа	δ , %	ρ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
201	1,2	1,3	4	7800

Сила P во времени изменяется по кусочно-линейному закону: на первом участке — линейный, на втором — константа.

Вначале в программном комплексе ANSYS устанавливаем формы и частоты собственных колебаний стержня с выбранными распределениями неоднородности материала и условий закрепления. Для этого формируем трехмерную геометрически и физически нелинейную конечно-элементную модель (рис. 3) стержня с выделением вкладышей, что позволяет удобнее задавать в программе их свойства. Выбираем команду MODAL ANALYSIS.

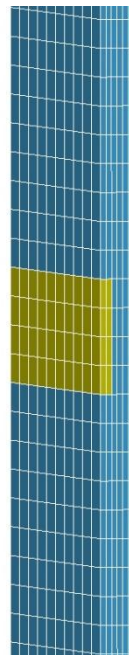


Рис. 3. Конечно-элементная модель стержня

Рассмотрим четыре варианта (табл. 3) неоднородности стержня, различающиеся модулями упругости E_f вкладышей. В первом варианте — все три вкладыша «жесткие», во втором — один центральный вкладыш «жесткий», в

третьем — один центральный вкладыш «мягкий», в четвертом — все три вкладыша «мягкие».

Таблица 3

Модуль упругости вкладышей E_f , ГПа

Номер вкладыша	Номер варианта			
	1	2	3	4
1	180	180	10^{-6}	10^{-6}
2, 3	180	200	200	10^{-6}

Первые десять форм колебаний стержня (рис. 4), найденные по первому варианту, представляют собой следующую последовательность полуволн и частот, возрастающих с ростом номера моды колебаний (табл. 4). Низшей частоте 0,341 Гц отвечает первая форма колебаний по одной полуволне в плоскости xz , когда изгиб стержня происходит относительно оси y с минимальным моментом инерции поперечного сечения. Из полученной последовательности (см. табл. 4) выделяются формы № 4, 7, 9. По формам № 4 и № 9 стержни деформируются в плоскости yz , по форме № 7 стержень закручивается относительно своей продольной оси.

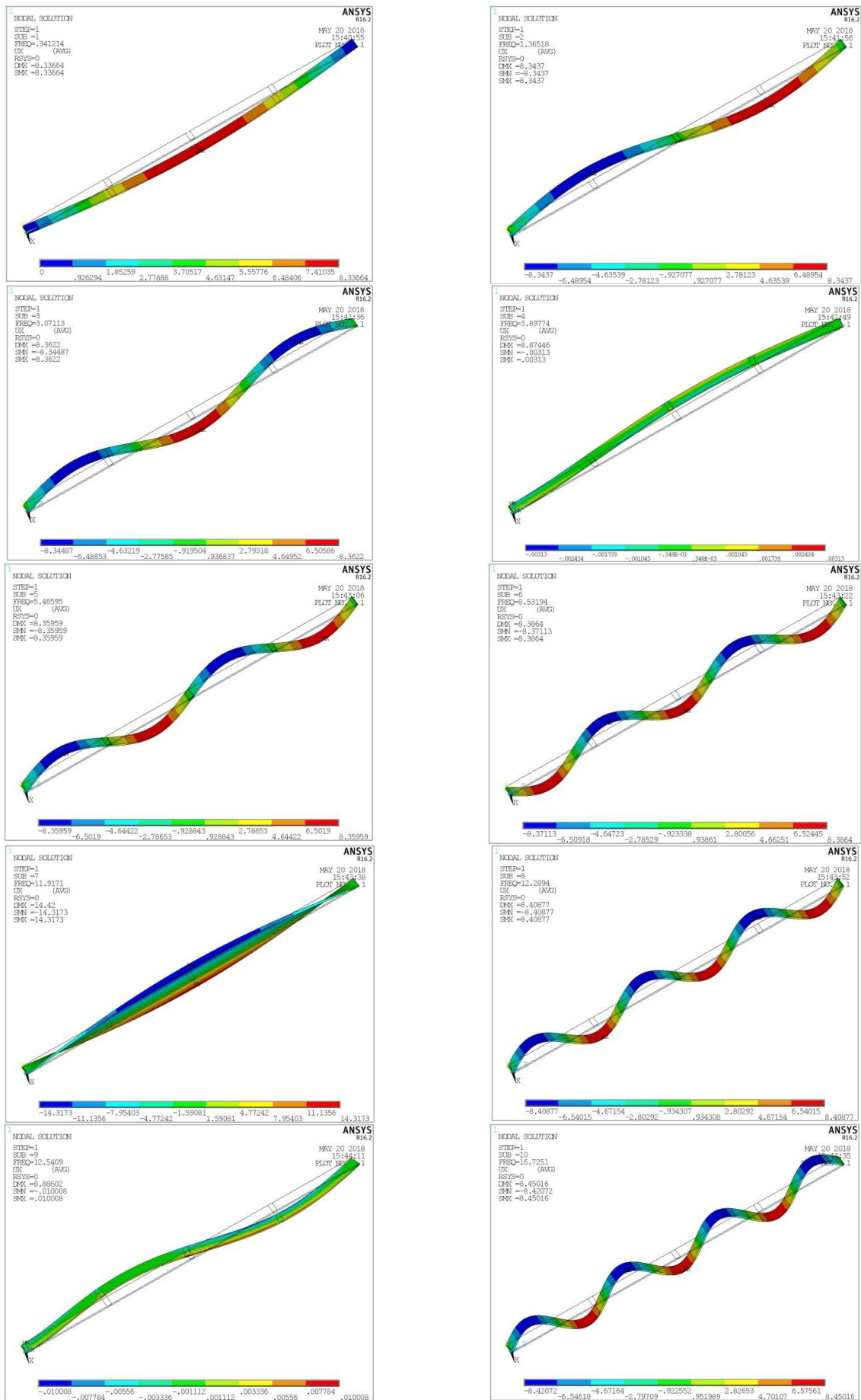


Рис. 4. Формы колебаний стержня с тремя жесткими вкладышами

Таблица 4

Последовательность полуволн и частот
колебаний стержня

Номер формы	Число полуволн	Плоскость прогиба	Частота, Гц
1	1	xz	0,341
2	2	xz	1,365
3	3	xz	3,071
4	1,5	yz	3,898
5	4	xz	5,466
6	5	xz	8,532
7	–	Кручение	11,917
8	6	xz	12,289
9	2,5	yz	12,541
10	7	xz	16,725

Расчеты показали, что формы колебаний (см. рис. 4) рассмотренного неоднородного стержня (вариант 1) и однородного стержня (вариант 5) совпадают, собственные частоты колебаний расходятся в пределах 0,1 %.

По варианту 2 с одним жестким центральным вкладышем неоднородный стержень ведет себя аналогично варианту 1 — с тремя жесткими вкладышами; собственные частоты (табл. 5) совпадают с точностью до 0,05 %.

Таблица 5

Собственные частоты колебаний неоднородного стержня ω , Гц

Номер моды	Номер варианта				Однородный
	1	2	3	4	
1	0,34121	0,34136	0,33077	0,33077	0,34158
2	1,3652	1,3664	1,3663	1,3440	1,3664
3	3,0711	3,0725	1,4102	1,4102	3,0745
4	3,8977	3,8983	1,4128	1,4128	3,8996
5	5,4659	5,4660	1,4596	1,4596	5,4660
6	8,5319	8,5357	1,4810	1,4810	8,5411
7	11,917	11,923	1,4810	1,4810	11,923
8	12,289	12,300	1,4898	1,4898	12,300
9	12,541	12,545	1,4955	1,4955	12,546
10	16,725	16,732	1,5046	1,5046	16,743

Неоднородный стержень с мягким центральным вкладышем (вариант 3) имеет первые две обычные формы колебаний по одной и двум полуволнам, а начиная с третьей — деформирование стержня происходит в области центрального вкладыша (рис. 5). Собственные частоты колебаний после третьей моды изменяются мало. Если для третьей моды частота равна 1,41 Гц, то для десятой — 1,5 Гц.

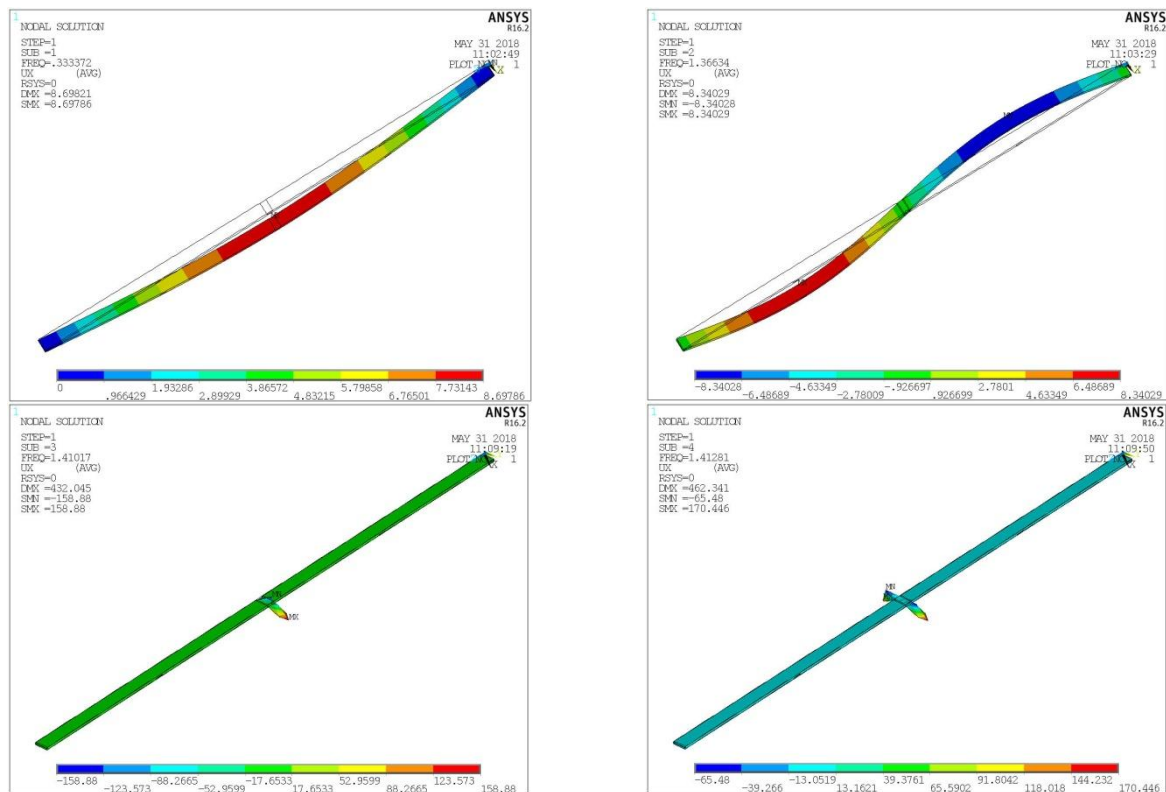


Рис. 5. Формы колебаний стержня с мягким центральным вкладышем

Для неоднородного стержня с тремя мягкими вкладышами (вариант 4) первые две формы колебаний — стандартные: по одной и двум полуволнам. Начиная с третьей моды деформации стержня локализуются около центрального вкладыша (рис. 6). Частоты колебаний возрастают (см. табл. 5), но незначительно — в пределах 5 %.

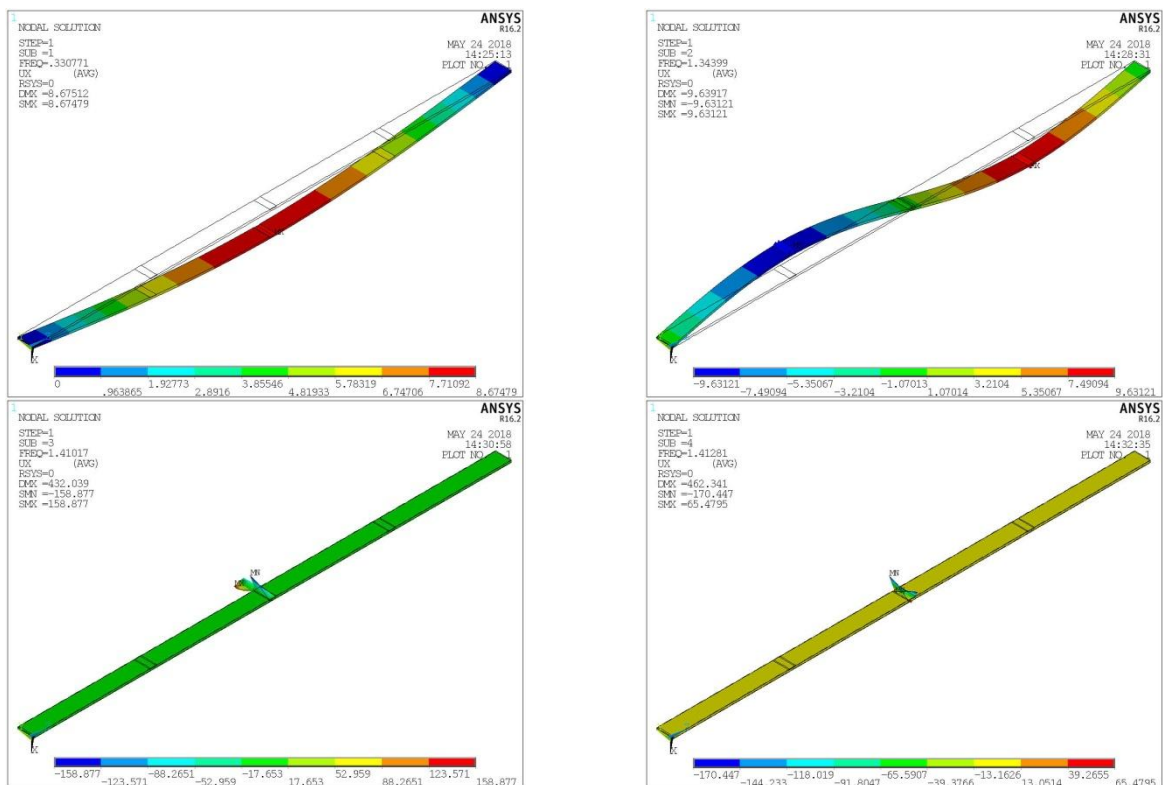


Рис. 6. Формы колебаний стержня с тремя мягкими вкладышами

Таким образом, модальный анализ показывает, что все рассмотренные неоднородные стержни (варианты 1–4) отличаются от однородного стержня (вариант 5) по первой собственной частоте не более, чем на 3,2 %. Формы колебаний стержней с жесткими вкладышами и однородного стержня совпадают. Стержни с мягкими вкладышами («вырезами») имеют отличные от однородного стержня формы колебаний, за исключением двух первых мод.

Далее в работе неоднородный стержень (см. рис. 1) под действием сжимающей силы P исследовали на устойчивость, применяя программный комплекс LS-DYNA. Сложность и длительность расчетов ограничили числом вариантов нагружения по величине силы P . Интервалы нагрузок выбирались так, чтобы

отследить последовательность (табл. 6) форм потери устойчивости стержня от одной до пяти полуволн.

Таблица 6

Результаты расчета в программном комплексе LS-DYNA

Номер формы	Нагрузка P , Н	Форма прогиба	Число полуволн
1	40 – 300	Устойчивая	1
2	373 – 375	Неустойчивая	2
3	400 – 1200	Устойчивая	3
4	–	Нет	–
5	1500	Неустойчивая	4
6	1800	Устойчивая	5

Из расчета неоднородного стержня (вариант 2) с центральным жестким вкладышем следует, что нечетное число полуволн соответствует устойчивым формам прогиба, четное число — неустойчивым (см. табл. 6). Отметим, что найденные нагрузки потери устойчивости стержня (вариант 2) совпадают с нагрузками, рассчитанными для неоднородного стержня (вариант 1) с тремя вкладышами, это нагрузки: $P_1 = 40$ Н; $P_2 = 400$ Н; $P_3 = 1800$ Н.

При расчете неоднородного стержня (вариант 2) под нагрузкой $P = 60$ Н перемещение центральной точки стержня (узел 11661) носит колебательный характер (рис. 7). Максимальные поперечные перемещения 0,128 м узла 11661 возникают при $\tau = 0,085$ с.

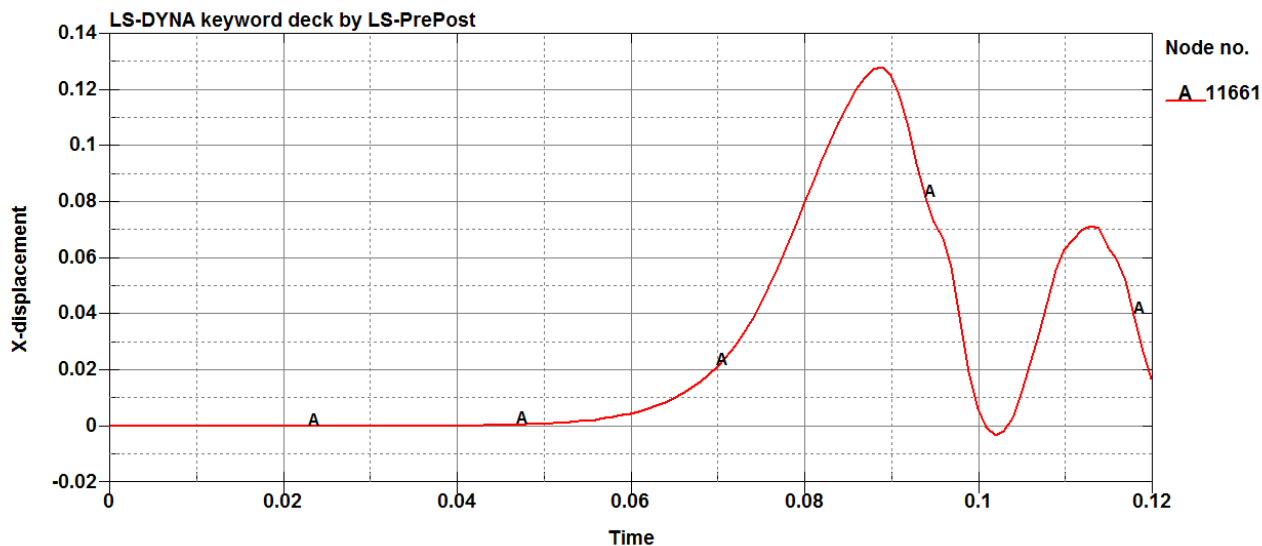


Рис. 7. Перемещение центрального узла 11661 стержня

В этот момент времени стержень изогнут по одной полуволне (рис. 8), а на его внутренней стороне деформация по Мизесу составляет 1,05 %.

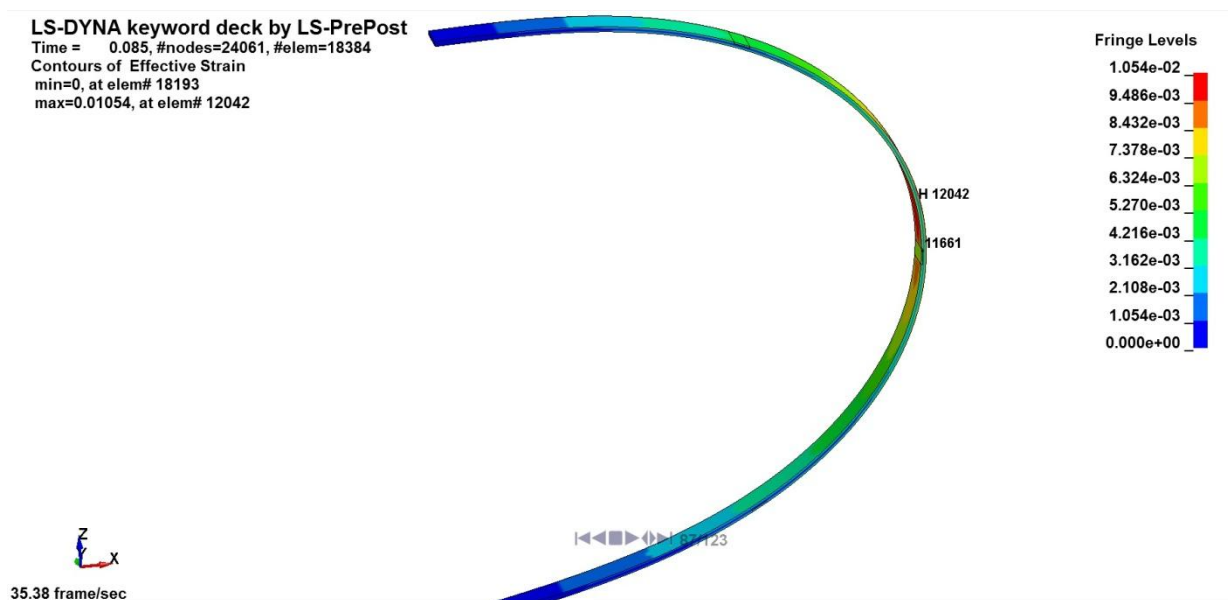
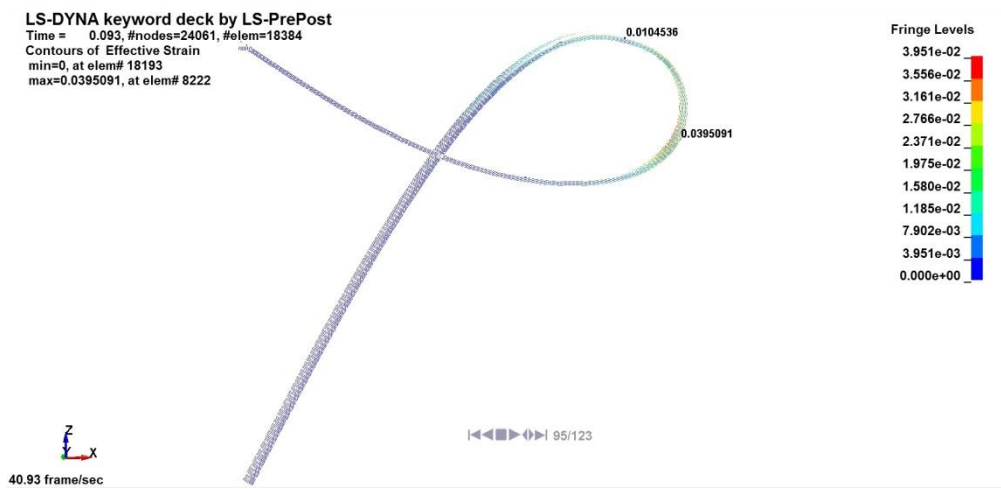
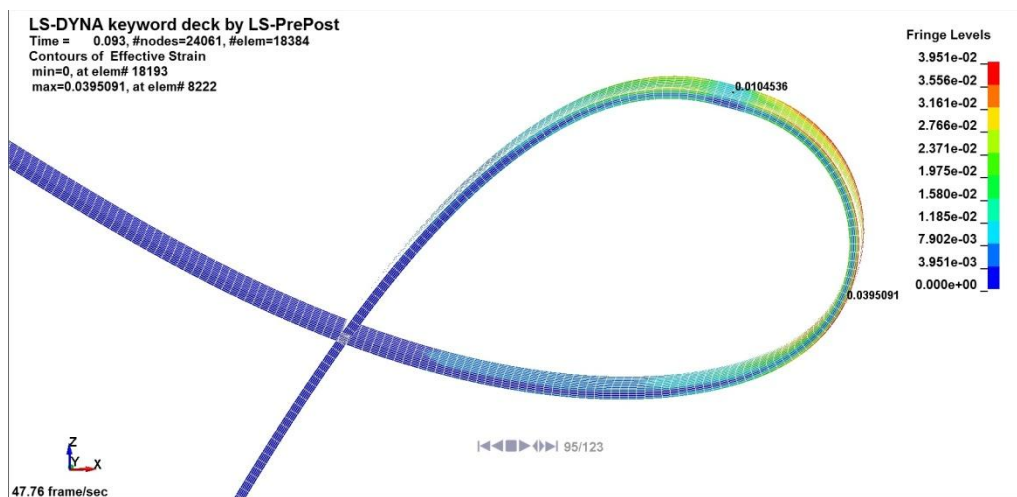


Рис. 8. Прогиб стержня (вариант 2) при $P = 60$ Н, $\tau = 0,085$ с

При дальнейшем изгибе стержня его подвижный (верхний) шарнир опускается ниже неподвижного (нижнего) шарнира и образуется петля (рис. 9). При $\tau = 0,093$ с деформация по Мизесу достигает 3,95 %, т. е. величины, приближенной к удлинению при разрыве δ . Это означает, что в стержне может начинаться процесс разрушения.



a



б

Рис. 9. Форма стержня при $\tau = 0,093$ с

Если принять, что возникновение пластического шарнира не приведет к разрушению стержня, то можно проследить возможные перемещения центрального узла 11661 (см. рис. 7) и формоизменение стержня. В рассмотренном случае после потери устойчивости стержня его точки совершают вполне определенные большие перемещения.

Проведенные модальный и деформационный анализы позволили установить формы и амплитуды поперечных прогибов неоднородных стержней с минимальными технологическими отклонениями в виде трех «левосторонних» вкладышей малого объема с пониженными модулями упругости, имитирующими местное снижение механических свойств стержня до 10 %, а также наличие возможных нарушений сплошности материала стержня (вырезов).

Найденные первые 10 мод колебаний рассматриваемого шарнирно закрепленного плоского стержня показали, что основные поперечные колебания происходят относительно оси с минимальным моментом инерции поперечного сечения стержня. Кроме того, существуют поперечные колебания относительно ортогональной оси, с максимальным моментом инерции, и крутильные колебания.

В результате деформационных исследований рассматриваемого неоднородного стержня на действие сжимающей осевой нагрузки получены нечетные устойчивые и четные неустойчивые формы прогибов. Критической для неоднородного стержня оказалась нагрузка $P = 40 \text{ Н}$, в то время как по Эйлера для однородного стержня $P_3 = 31,5 \text{ Н}$ [24], т. е. на 21 % ниже.

Такая разница получена при минимальных технологических отклонениях неоднородного стержня, и очевидно, что при увеличении технологических отклонений, например, при расширении объемов вкладышей, эта разница будет снижаться. Таким образом установлено, что введение в однородный стержень минимальных технологических отклонений, дает верхнюю оценку критической силы по отношению к силе Эйлера, что подтверждает применимость предложенного приема оценки устойчивости центрально сжатого стержня по величине поперечных прогибов.

Библиографический список

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. - 543 с.
2. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. - М.: Наука. Физматлит, 1996. - 368 с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1961. - 340 с.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. - 808 с.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука. Физматлит, 1967. - 984 с.
6. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1991. - 336 с.

7. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. – М.: Гостехиздат, 1934. - 600 с.
8. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при продольном ударе // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2009. № 2. С. 105 – 111.
9. Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Биения в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // Известия РАН. Механика твердого тела. 2015. № 4. С. 112 - 125.
10. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Еще раз о задаче Ишлинского - Лаврентьева // Доклады РАН. 2014. Т. 455. № 4. С. 412 - 415.
11. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады Академии Наук. 1949. Т. 64. № 6. С. 779 - 782.
12. Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского - Лаврентьева // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 28 - 33.
13. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Устойчивость стержня при длительном осевом сжатии // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 1. С. 40 - 48.
- 14 Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин. Сборник статей. // Под ред. В.А. Светлицкого, О.С. Нарайкина. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. С. 244 – 259.

15. Ferretti M., Luongo A. Flexural-Torsional Flutter and Buckling of Braced Foil Beams under a Follower Force // *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, (2):1–10. DOI: 10.1155/2017/2691963
16. Andersen S.B., Thomsen J.J. Post-critical behavior of Beck's column with a tip mass // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, no. 37, pp. 135 – 151.
17. Detinko F.M. Lumped damping and stability of Beck column with a tip mass // *International Journal of Solids and Structures*, 2003, no. 40, pp. 4479 - 4486.
18. Seyranian A.P., Seyranian A.A. Chelomei's problem of the stabilization of a statically unstable rod by means of vibration // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, pp. 898 – 903.
19. Di Egidio A., Luongo A., Paolone A. Linear and nonlinear interactions between static and dynamic bifurcations of damped planar beams // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, vol. 42 (1), pp. 88–98. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.010
20. Елисеев В.В., Зиновьев Т.В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней. - Санкт-Петербург, Изд-во СПбГТУ, 2008. - 95 с.
21. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. - Санкт-Петербург, Изд-во СПбГТУ, 2007. - 101 с.
22. Лалин В.В., Яваров А.В. Построение и тестирование конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернули-Эйлера // *Жилищное строительство*. 2013. № 5. С. 51 - 55.
23. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных

поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832>

24. Егоров А.В. Деформирование центрально-сжатого гибкого стержня // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 4 (76). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1750

25. Егоров А.В. Влияние жесткости вкладыша на деформирование сжатого неоднородного стержня // Авиационная промышленность. 2018. № 2. С. 22 - 26.