

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э. БАУМАНА

На правах рукописи



**Яковлев Дмитрий Олегович**

**Моделирование процессов деформирования многослойных  
тонких термоупругих пластин  
на основе метода асимптотической гомогенизации**

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

Научный руководитель  
Доктор физико-математических наук,  
Профессор  
Димитриенко Ю.И.

Москва 2016 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	4
<b>Глава 1. Разработка теории термоупругости многослойных тонких пластин на основе метода асимптотической гомогенизации</b>	10
1.1. Постановка трехмерной задачи линейной теории термоупругости для многослойной пластины	10
1.2. Асимптотические разложения для многослойной пластины	12
1.3. Формулировка локальных задач	14
1.4. Решение задачи нулевого приближения	17
1.5. Решение задач первого, второго и третьего приближений	19
1.6. Осредненные уравнения равновесия многослойных пластин	21
1.7. Осредненные определяющие соотношения	22
1.8. Осредненные кинематические соотношения	23
1.9. Осредненная система уравнений равновесия для пластин	23
1.10. Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в пластине	25
1.11. Пластины с симметричным расположением слоев	26
1.12. Однослойная пластина при воздействии равномерного температурного поля	26
<b>Глава 2. Моделирование напряженно-деформированного состояния многослойных тонких пластин при изгибе</b>	28
2.1. Задача об изгибе симметричной пластины равномерным давлением	28
2.2. Сравнение решения задачи об изгибе многослойной пластины с трехмерным решением	30
2.3. Задача об изгибе многослойной пластины при неравномерном нагреве	44

### **Глава 3. Разработка теории гармонических колебаний многослойных тонких пластин на основе метода асимптотической гомогенизации** **49**

3.1 Постановка трехмерной задачи линейной теории упругости при установившихся колебаниях	49
3.2 Асимптотические разложения для многослойной пластины	50
3.3 Формулировка локальных задач колебаний пластины	52
3.4 Решение задачи нулевого приближения	53
3.5 Решение задачи первого, второго и третьего приближений	54
3.6 Осредненные уравнения установившихся колебаний многослойных пластин	57
3.7 Осредненные определяющие соотношения теории пластин	58
3.8 Осредненные кинематические соотношения теории пластин	59
3.9 Осредненная система уравнений для установившихся колебаний многослойных пластин	60
3.10 Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в пластине	60

### **Глава 4. Моделирование гармонических изгибных колебаний многослойных тонких пластин** **62**

4.1 Изгибные колебания симметричной многослойной тонкой пластины	62
4.2 Собственные колебания симметричной многослойной пластины	65
4.3 Вынужденные изгибные колебания симметричной многослойной пластины	72
4.4 Разработка программного комплекса	77
Выводы и заключение	79
Список литературы	80

## Введение

На сегодняшний день во многих отраслях промышленности: машиностроении, строительстве, авиа- и космической технике, медицине, и многих других в качестве элементов конструкций широкое применение находят многослойные пластины из композиционных материалов. Поэтому существует потребность развития математических моделей и методов, которые позволили бы описывать происходящие в них процессы деформирования.

Несмотря на появление в последнее время мощных вычислительных средств, позволяющих решать задачи теории упругости в общей трехмерной постановке для конструкций сложной формы, интерес к решению задач в двумерной постановке (для пластин и оболочек) не пропадает. Очевидные преимущества двумерных постановок – снижение размерности задачи, отсутствие необходимости детального построения сеток по толщине координате для достижения приемлемой точности расчета напряжений. Однако платой за сокращение размерности является уменьшение точности получаемого решения, главным образом, для напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений, которые для многих задач играют наиболее важную роль при проектировании тонкостенных конструкций.

Расчет этих напряжений в общей трехмерной постановке задачи теории упругости крайне затруднителен, в связи с чем существует потребность в разработке уточненных методов теории тонких пластин и оболочек.

Проблемы модификации классических теорий пластин и оболочек с целью получения уточненных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния тонких тел, рассматриваются во многих работах, укажем лишь некоторые исследования в этой области [3, 4, 10, 13, 16-18, 20, 55, 58, 66-71, 81]. Одним из методов упрощения задачи теории упругости в общей трехмерной постановке является понижение размерности, которое может быть проведено, например при учете малости каких-либо параметров, входящих в задачу,

например толщины пластины, которая мала по сравнению с ее другими характерными размерами (длина, ширина) [49, 50]. Понижение размерности в этом случае может быть осуществлено при помощи методов асимптотического осреднения [5, 8, 130], заменяющих традиционные гипотезы теории пластин. Так в работах [5, 59, 127] проведено исследование асимптотического поведения уравнений равновесия при помощи рядов специального вида, применяющихся при осреднении уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами, что позволило построить решение, асимптотически сходящееся к решению задач трехмерной теории упругости.

Для случая пластин применение асимптотического разложения в ряд началось с работы R.V. Kohn, M. Vogelius [126]. Исследование пологих оболочек проведено С.В. Шешениным и К.А. Скопцовым в [66]. В работах Г.П. Панасенко [5, 57, 58], М.В. Резцова [61-63] рассматривается применение методов осреднения и асимптотического разложения применительно к задаче теории упругости в неоднородной пластине толщины  $\varepsilon$  с характерным периодом неоднородностей также  $\varepsilon$ . В работе Горбачева В.И., Емельянова А.Н. [15] рассматривается проблема осреднения краевой задачи для неоднородного тела, обладающего моментными свойствами.

Обширный обзор литературы по применению асимптотических методов можно найти в [76].

Отметим работы С.В. Шешенина [68-70, 71], О.А. Ходоса [71], в которых предложены теории тонких пластин и оболочек с двумерной микроструктурой – гофрированными, сотовыми, сетчатыми конструкциями, используя для этого метод асимптотического осреднения (метод гомогенизации - МГ), хорошо зарекомендовавший себя при осреднении композитов с трехмерной периодической структурой [5, 59, 65, 33-38, 97, 155]. Применение МГ для двумерных структур вызывает определенные сложности и не является частным случаем общей трехмерной задачи, поскольку двумерные пластины и оболочки сохраняют «третью» координату, но не облают по ней периодической структурой. В работах [66, 71] был предложен вариант МГ для тонких пластин, в котором

использовалось допущение о линейном характере распределения по толщине главных членов асимптотического ряда для перемещений, что позволило получить систему уравнений типа Кирхгофа-Лява.

В работе [22] был разработан МГ для тонких многослойных пластин, в котором не делается такое предположение о линейности распределения перемещений, в ней было показано, что для многослойных пластин такое линейное распределение отсутствует, а имеет место аналог гипотезы ломаной линии, используемой в теории Григолюка-Куликова [20].

**Актуальность темы.** Очевидные преимущества двумерных постановок задач теории упругости для пластин и оболочек такие, как снижение размерности задачи, отсутствие необходимости детального построения сеток по толщине координате для достижения приемлемой точности расчета напряжений, сохраняются и в настоящее время, и, по-видимому, будут актуальны и востребованы еще достаточно долго. В этой связи попытки модификации классических теорий пластин и оболочек, направленные на получение уточненных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния тонких тел, продолжают быть актуальными.

Востребованность и актуальность новых модификации классических теорий пластин и оболочек обусловила **цель данной диссертации:** разработать математический аппарат для решения задач термоупругости тонких многослойных анизотропных пластин, на основе асимптотического анализа общей трехмерной теории термоупругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине и задач моделирования собственных колебаний тонких упругих многослойных анизотропных пластин, на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений упругих колебаний тел, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине.

**Задачами настоящей работы** являются:

- разработка теория термоупругости тонких многослойных анизотропных пластин, на основе асимптотического анализа общей трехмерной теории термоупругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине;

- разработка теория собственных колебаний тонких упругих многослойных анизотропных пластин, на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений упругих колебаний тел, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине;

- сравнение расчетов, полученных с помощью разработанных теорий и с помощью конечно-элементного решения трехмерных задач теории упругости и термоупругости на основе конечноэлементного метода.

**Научная новизна** работы состоит:

- в разработке теории термоупругости тонких многослойных анизотропных пластин, которая построена из уравнений общей трехмерной теории термоупругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине, и позволяет вычислить все 6 компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига;

- в разработке теории собственных колебаний тонких упругих многослойных анизотропных пластин, которая построена на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений упругих колебаний тел, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине, и позволяет вычислить все 6 компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига.

**В работе использованы следующие методы исследования:**

– метод асимптотической гомогенизации или метод асимптотического осреднения;

– численные конечно-элементные методы решения задачи трехмерной теории термоупругости и задачи о свободных и вынужденных колебаниях упругих тел;

– численные конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений.

**На защиту вынесены следующие положения:**

- разработанная теория термоупругости тонких многослойных анизотропных пластин, которая построена из уравнений общей трехмерной теории термоупругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине;

- разработанная теория собственных колебаний тонких упругих многослойных анизотропных пластин, которая построена на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений упругих колебаний тел, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине.

**Достоверность результатов** обусловлена корректной постановкой задач, применением классических математических методов, сравнением результатов расчётов с результатами, полученными прямым конечно-элементным решением с помощью программного комплекса ANSYS.

**Апробация работы:** основные результаты доложены на:

- научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 135-летию кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского, февраль 2013;

- III Международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея, май 2014;

- Международной научной конференция "Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech - 2014), посвященной 50-летию

Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э.Баумана  
17-19 ноября 2014 года. 2014;

- XIX Международной конференции по вычислительной механике и  
современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), май 2015;

- Международной конференции Multiscale Modeling and Methods: Upscaling  
in Engineering and Medicine : Abstracts of the Fifth International Conference / Ed. by  
Yu. Dimitrienko, G. Panasenko ; Bauman Moscow State Technical University, Moscow  
: BMSTU, June 25-27, 2015;

- и опубликованы в 12 работах [25-32, 39-40, 98, 99], в том числе в 4  
работах, опубликованных в журналах из списка ВАК [25, 27, 28, 39].

**Структура и объем работы:** диссертация состоит из 4 глав, введения,  
выводов и заключения и списка использованной литературы из 172 наименований.  
Объем диссертации 97 с.

# ГЛАВА 1. РАЗРАБОТКА ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ

## 1.1. Постановка трехмерной задачи линейной теории термоупругости для многослойной пластины

Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины, введем малый параметр  $\kappa = h/L \ll 1$ , как отношение общей толщины пластины  $h$  к характерному размеру всей пластины  $L$  (например, к ее максимальной длине). Введем прямоугольные декартовы координаты  $\tilde{x}_k$ , ориентированные таким образом, что ось  $O\tilde{x}_3$  направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси  $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$  принадлежат срединной поверхности пластины. Кроме  $L$  введем следующие характерные величины:  $t_0$  - характерное время исследуемого процесса нагрева, характерное значение плотности  $\rho_0$ , удельной теплоемкости  $c_0$ , температуры  $\theta_0$ , теплопроводности  $\lambda_0$ , напряжения  $\sigma_0$ . Тогда можно ввести соответствующие им безразмерные величины:  $t = \tilde{t}/t_0$  - время,  $x_k = \tilde{x}_k/L$  - координаты,  $\rho = \tilde{\rho}/\rho_0$  - плотность,  $c = \tilde{c}/c_0$  - теплоемкость,  $\theta = \tilde{\theta}/\theta_0$  - температуру,  $\lambda_{ij} = \tilde{\lambda}_{ij}/\lambda_0$  - компоненты тензора теплопроводности,  $q_i = \tilde{q}_i L/\lambda_0 \theta_0$  - компоненты вектора теплового потока,  $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/\sigma_0$  - компоненты тензора напряжений,  $C_{ijkl} = \tilde{C}_{ijkl}/\sigma_0$  - компоненты тензора модулей упругости,  $u_j = \tilde{u}_j/L$  - компоненты вектора перемещений,  $\nabla_j = \partial/\partial x_j$  - оператор дифференцирования по декартовым координатам. Волной сверху обозначены соответствующие размерные величины.

Рассмотрим для многослойной пластины трехмерную задачу линейной теории термоупругости, которая в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\nabla_j \sigma_{ij} &= 0, \\
\frac{C}{\kappa^2} \partial_i \theta &= -\nabla_i q_i, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j), \\
g_j &= \nabla_j \theta, \\
\sigma_{ij} &= C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T), \\
q_i &= -\lambda_{ij} g_j, \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} &= -\kappa^3 p_{\pm} \delta_{i3}, \\
q_3 &= \pm q_{e\pm}, \\
\Sigma_T : u_i &= u_{ei}, \quad q_i n_i = 0; \\
\Sigma_S : [\sigma_{i3}] &= 0, \quad [u_3] = 0, \quad [q_3] = 0, \quad [\theta] = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

и состоит из уравнений равновесия, нестационарного уравнения теплопроводности, соотношений Коши, выражения для градиента температуры, определяющих соотношений термоупругости, закона Фурье, граничных условий на внешних поверхностях пластины оболочки – на внешней и внутренней поверхности  $\Sigma_{3\pm}$  (их уравнение имеет вид  $\tilde{x}_3 = \pm h/2$ ), на торцевой поверхности  $\Sigma_T$ , а также граничных условий идеального контакта на поверхности раздела  $\Sigma_S$  слоев пластины ( $[u_i]$  - скачок функций), которые могут и отсутствовать, например, для однослойной пластины.

В системе (1.1) обозначены:  $p_{\pm}$  - давление и  $q_{0\pm}$  - тепловой поток на внешних поверхностях пластины,  $u_{ei}$  - заданные компоненты вектора перемещений на торцах пластины. Торцы предполагаются теплоизолированными.

В уравнениях (1.1) также обозначены:  $\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензора малых деформаций,  $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl} \Delta \theta$  - компоненты тензора тепловой деформации, которые являются функциями перепада температуры  $\Delta \theta = \theta - \theta_0$ , где  $\theta_0$  - начальная отсчетная температура,  $\alpha_{kl}$  - компоненты тензора теплового расширения. Компоненты тензора модулей упругости  $C_{ijkl}$ , теплопроводности  $\lambda_{ij}$ , тепловой

деформации  $\varepsilon_{kl}^T$ , а также массовая теплоемкость  $C = \rho c / Fo_0$  ( $Fo = \lambda_0 t_0 / \rho_0 c_0 L^2$  - критерий Фурье) - различны для каждого слоя многослойной пластины. Никакого специального допущения об анизотропии материалов слоев не делаем. Малые латинские индексы пробегает значения 1,2,3, а большие :  $I, J, K \dots$  - принимают значения 1,2.

В системе (1.1) приняты 3 основных допущения:

1) давление на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет третий порядок малости  $O(\kappa^3)$  т.е.

$$\sigma_{33} = -\kappa^3 p_{\pm},$$

2) продолжительность нагрева не слишком велика, в том смысле, что критерий Фурье  $Fo = \lambda_0 t_0 / \rho_0 c_0 L^2$  процесса нагрева имеет один порядок малости с  $\kappa^2$ , т.е. -  $Fo = \kappa^2 Fo_0$ , где  $Fo_0$  число порядка 1:  $Fo_0 = O(1)$ ;

3) давления  $p_{\pm}$  и тепловой поток  $q_{0\pm}$  - мало изменяются на расстояниях порядка  $h$ .

Эти допущения, как правило, соответствуют реальным условиям нестационарного термонагружения тонких пластин во многих приложениях, в частности в задачах аэродинамического нагрева теплозащиты высокоскоростных летательных аппаратов [19].

## 1.2. Асимптотические разложения для многослойной пластины

Введем безразмерную локальную  $\xi$  координату:  $\xi = x_3 / \kappa$ . Координаты  $x_3$  и  $\xi$ , как обычно, в методе асимптотического осреднения [11] рассматриваются как независимые переменные. Координата  $\xi$  по толщине пластины изменяется в диапазоне  $-0.5 < \xi_3 < 0.5$  Тогда термоупругие характеристики пластины можно рассматривать как функции координаты  $\xi$ :

$$\Omega = \Omega(\xi),$$

$$\Omega = \{C_{ijkl}, \lambda_{ij}, \varepsilon_{kl}^T, C\},$$

(1.2)

в результате задача (1.1) содержит локальную координату  $\xi$ , а также малый параметр  $\kappa$ , поэтому ее решение можно искать в виде асимптотических разложений по параметру  $\kappa$  в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \\ \theta &= \theta^{(0)}(\xi) + \kappa \theta^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 \theta^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 \theta^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами  $I, J, K, L$  принимают значения 1,2, а индексы  $i, j, k, l$  - значения 1,2,3.

Подставим разложения (1.3) в выражения для  $\varepsilon_{ij}$  и  $g_i$  в системе (1.1), при этом используем правила дифференцирования функций локальных координат [10-12] ( $\partial / \partial x_j \rightarrow \partial / \partial x_j + (1/\kappa) \delta_{j3} \partial / \partial \xi$ ), тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa \varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots, \\ g_i &= \frac{1}{\kappa} g_i^{(-1)} + g_i^{(0)} + \kappa g_i^{(1)} + \kappa^2 g_i^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IJ}^{(m)} &= \frac{1}{2} (u_{I,J}^{(m)} + u_{J,I}^{(m)}), \\ \varepsilon_{I3}^{(m)} &= \frac{1}{2} (u_{3,I}^{(m)} + u_{I/3}^{(m+1)}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{33}^{(m)} = u_{3/3}^{(m+1)}, \quad m=0,1,2,\dots$$

$$g_I^{(-1)} = 0,$$

$$g_3^{(-1)} = \theta_{/3}^{(0)},$$

$$g_I^{(m)} = \theta_{/I}^{(m)}, \quad (1.6)$$

$$g_3^{(m)} = \theta_{/3}^{(m+1)}$$

и.т.д.,

здесь обозначены производные по локальной координате  $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial \xi$  и по глобальным координатам  $u_{I,J}^{(1)} = \partial u_I^{(1)} / \partial x_J$ . Подставляя выражение (1.3) для температуры в формулы (1.2), получаем асимптотические разложения для тепловой деформации пластины:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{kl}^T &= \varepsilon_{kl}^{T(0)} + \kappa \varepsilon_{kl}^{T(1)} + \kappa^2 \varepsilon_{kl}^{T(2)} + \dots \\
\varepsilon_{kl}^{T(m)} &= \alpha_{kl} \Delta \theta^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\
\Delta \theta^{(0)} &= \theta^{(0)} - \theta_0, \\
\Delta \theta^{(m)} &= \theta^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.4) и (1.7) в закон Гука и закон Фурье в системе (1.1), получаем асимптотическое разложения для напряжений и теплового потока

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa \sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots, \\
q_i &= \frac{1}{\kappa} q_i^{(-1)} + q_i^{(0)} + \kappa q_i^{(1)} + \kappa^2 q_i^{(2)} + \dots
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\sigma_{IJ}^{(m)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(m)} + \tilde{C}_{IJK3} \varepsilon_{k3}^{(m)} - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(m)}, \tag{1.9}$$

$$\sigma_{i3}^{(m)} = C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(m)} + \tilde{C}_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(m)} - C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^{T(m)},$$

$$-q_i^{(-1)} = \lambda_{33} g_3^{(-1)},$$

$$-q_i^{(m)} = \lambda_{ij} g_J^{(m)} + \lambda_{i3} g_3^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tilde{C}_{ijK3} = 2C_{ijK3},$$

$$\tilde{C}_{ij33} = C_{ijK3}.$$

(1.10)

### 1.3 Формулировка локальных задач

Подставляя разложения (1.3), (1.4), (1.8) в уравнения равновесия и граничные условия системы (1.1), получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa} \sigma_{i3/3}^{(0)} + (\sigma_{ij,J}^{(0)} + \sigma_{i3/3}^{(1)}) + \kappa (\sigma_{ij,J}^{(1)} + \sigma_{i3/3}^{(2)}) + \kappa^2 (\sigma_{ij,J}^{(2)} + \sigma_{i3/3}^{(3)}) + \dots = 0, \\
\frac{1}{\kappa^2} (C \partial_i \theta^{(0)} + q_{3/3}^{(-1)}) + \frac{1}{\kappa} (C \partial_i \theta^{(1)} + q_{i,I}^{(-1)} + q_{3/3}^{(0)}) + (C \partial_i \theta^{(2)} + q_{i,I}^{(0)} + q_{3/3}^{(1)}) + \kappa \dots = 0,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} + \kappa \sigma_{i3}^{(1)} + \kappa^2 \sigma_{i3}^{(2)} + \dots = -\kappa^3 p_{\pm} \delta_{i3},$$

$$\frac{1}{\kappa} (q_3^{(-1)} \mp q_{e\pm}) + q_3^{(0)} + \kappa q_3^{(1)} + \kappa^2 \dots = 0;$$

$$\Sigma_T : u_i^{(0)} + \kappa u_i^{(1)} + \kappa^2 u_i^{(2)} + \kappa^3 u_i^{(3)} + \dots = u_{ei},$$

$$\left(\frac{1}{\kappa} q_I^{(-1)} + q_I^{(0)} + \kappa q_I^{(1)} + \kappa^2 \dots\right) n_I = 0.$$

Приравняем в уравнениях равновесия и теплопроводности этой системы члены при отрицательных степенях  $\kappa$  к нулю, а при остальных степенях от  $\kappa$  к некоторым величинам  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)} \dots$  и  $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)} \dots$ , не зависящим от  $\xi$ . Аналогично поступим с граничными условиями, в результате получим рекуррентную последовательность локальных задач термоупругости. Локальная задача термоупругости для нулевого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{i3/3}^{(0)} &= 0, \\ C \partial_i \theta^{(0)} + q_{3/3}^{(-1)} &= 0 \\ \sigma_{i3}^{(0)} &= C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{C}_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(0)}, \\ -q_3^{(-1)} &= \lambda_{33} g_3^{(-1)}, \\ g_3^{(-1)} &= \theta_{/3}^{(0)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(0)} &= \frac{1}{2} (u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \\ \varepsilon_{I3}^{(0)} &= \frac{1}{2} (u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(0)}), \\ \varepsilon_{33}^{(0)} &= u_{3/3}^{(1)}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} &= 0; \quad q_3^{(-1)} = \pm q_{e\pm}; \\ \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(0)}] &= 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0, \quad [q_i^{(-1)}] = 0, \quad [\theta^{(0)}] = 0, \\ \langle u_i^{(1)} \rangle &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Локальная задача термоупругости для первого приближения такова

$$\begin{aligned}
\sigma_{i3/3}^{(1)} + \sigma_{iJ,J}^{(0)} &= h_i^{(0)}, \\
C \partial_i \theta^{(1)} + q_{i,I}^{(-1)} + q_{3/3}^{(0)} &= 0, \\
\sigma_{i3}^{(1)} &= C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + \tilde{C}_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(1)} - C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^{T(1)}, \\
-q_3^{(0)} &= \lambda_{3J} g_J^{(0)} + \lambda_{33} g_3^{(0)}, \\
\varepsilon_{IJ}^{(1)} &= \frac{1}{2} (u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}), \\
\varepsilon_{I3}^{(1)} &= \frac{1}{2} (u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}), \\
\varepsilon_{33}^{(1)} &= u_{3/3}^{(2)}, \\
g_3^{(0)} &= \theta_{/3}^{(1)}, \\
g_J^{(0)} &= \theta_{,J}^{(0)}, \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(1)} &= 0; \quad q_3^{(0)} = 0; \\
\Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(1)}] &= 0, \quad [u_i^{(2)}] = 0, \quad [q_3^{(0)}] = 0, \quad [\theta^{(1)}] = 0, \\
\langle u_i^{(2)} \rangle &= 0;
\end{aligned} \tag{1.13}$$

для второго приближения

$$\begin{aligned}
\sigma_{i3/3}^{(2)} + \sigma_{iJ,J}^{(1)} &= h_i^{(1)}, \\
C \partial_i \theta^{(2)} + q_{i,I}^{(0)} + q_{3/3}^{(1)} &= 0, \\
\sigma_{i3}^{(2)} &= C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(2)} + \tilde{C}_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(2)} - C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^{T(2)}, \\
-q_3^{(1)} &= \lambda_{3J} g_J^{(1)} + \lambda_{33} g_3^{(1)}, \\
\varepsilon_{IJ}^{(2)} &= \frac{1}{2} (u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}), \\
\varepsilon_{I3}^{(2)} &= \frac{1}{2} (u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(3)}), \\
\varepsilon_{33}^{(2)} &= u_{3/3}^{(3)}, \\
g_J^{(1)} &= \theta_{,J}^{(1)}, \\
g_3^{(1)} &= \theta_{/3}^{(2)}, \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(2)} &= 0; \quad q_3^{(1)} = 0; \\
\Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(2)}] &= 0, \quad [u_i^{(3)}] = 0, \quad [q_3^{(1)}] = 0, \quad [\theta^{(2)}] = 0, \\
\langle u_i^{(3)} \rangle &= 0;
\end{aligned} \tag{1.14}$$

для третьего приближения

$$\begin{aligned}
\sigma_{i3/3}^{(3)} + \sigma_{ij,J}^{(2)} &= h_i^{(2)}, \\
C \partial_i \theta^{(3)} + q_{i,I}^{(1)} + q_{3/3}^{(2)} &= 0, \\
\sigma_{i3}^{(3)} &= C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(3)} + \tilde{C}_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(3)} - C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^{T(3)}, \\
-q_3^{(2)} &= \lambda_{3J} g_J^{(2)} + \lambda_{33} g_3^{(2)} \\
\varepsilon_{IJ}^{(3)} &= \frac{1}{2} (u_{I,J}^{(3)} + u_{J,I}^{(3)}), \\
\varepsilon_{I3}^{(3)} &= \frac{1}{2} (u_{3,I}^{(3)} + u_{I/3}^{(4)}), \\
\varepsilon_{33}^{(3)} &= u_{3/3}^{(4)}, \\
g_J^{(2)} &= \theta_{,J}^{(2)}, \\
g_3^{(2)} &= \theta_{,3}^{(3)}, \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(3)} &= -p_{\pm} \delta_{i3}; \quad q_3^{(2)} = 0; \\
\Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(3)}] &= 0, \quad [u_i^{(4)}] = 0, \quad [q_3^{(2)}] = 0, \quad [\theta^{(3)}] = 0, \\
\langle u_i^{(4)} \rangle &= 0;
\end{aligned} \tag{1.15}$$

и т.д. Здесь обозначена операция осреднения по толщине пластины

$$\langle u_i^{(1)} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(3)} d\xi. \tag{1.16}$$

Уравнения равновесия в системе (1.11) после введения функций  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$  принимают вид

$$h_i^{(0)} + \kappa h_i^{(1)} + \kappa^2 h_i^{(2)} + \dots = 0. \tag{1.17}$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (1.12) – являются функции  $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ , они зависят от локальных координат  $\xi_l$  и входных данных этой задачи – перемещений  $u_j^{(0)}(x_j)$  и теплового потока. Решением задачи (1.13) являются функции  $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ , а  $u_j^{(1)}, \sigma_{ij}^{(0)}$  в этой задаче – входные данные. В задаче (1.14) функции  $u_j^{(3)}, \varepsilon_{kl}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$  – неизвестные, а  $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$  – входные данные и т.д.

#### 1.4 Решение задачи нулевого приближения

Ввиду того, что задачи (1.12)-(1.15) являются одномерными по локальной переменной  $\xi$ , их решение можно найти аналитически. Поскольку задача

термоупругости является несвязанной, то решение задачи нестационарной теплопроводности в системе (1.12) можно найти отдельно от задачи механического равновесия. Будем считать, что эта задача

$$\begin{aligned} C\partial_i\theta^{(0)} &= (\lambda_{33}\theta_{/3}^{(0)})_{/3} \\ \Sigma_{3\pm}: \quad -\lambda_{33}\theta_{/3}^{(0)} &= \pm q_{e\pm}; \quad \Sigma_S: \quad [\lambda_{33}\theta_{/3}^{(0)}] = 0, \quad [\theta^{(0)}] = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

решена, например, численно, и найдено температурное поле  $\theta^{(0)}(\xi, x_j, t)$ . Тогда решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче (1.12) имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \forall \xi: -0.5 < \xi < 0.5. \quad (1.19)$$

Подставляя сюда выражение (1.9) для  $\sigma_{i3}^{(0)}$ , получим

$$C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{C}_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)} - C_{i3kl}\varepsilon_{kl}^{T(0)} = 0. \quad (1.20)$$

Выразим из этой системы уравнений деформации  $\varepsilon_{k3}^{(0)}$

$$\varepsilon_{k3}^{(0)} = -\tilde{C}_{k3i3}^{-1} (C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} - C_{i3kl}\varepsilon_{kl}^{T(0)}), \quad (1.21)$$

где  $\tilde{C}_{i3k3}^{-1}$  матрица компонент, обратная к  $\tilde{C}_{i3k3}$ . Подставляя в (1.21) выражения для деформаций  $\varepsilon_{k3}^{(0)}$  из формул (1.5), после интегрирования с учетом условий  $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$ , находим перемещения  $u_i^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} u_I^{(1)} &= -\xi u_{3,I}^{(0)} + \varepsilon_{KL}^{(0)} U_{IKL} - U_I^T, \\ u_3 &= \varepsilon_{KL}^{(0)} U_{3KL} - U_3^T, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где обозначены функции

$$\begin{aligned} U_{iKL}(\xi) &= 2\left\langle \int_{-0.5}^{\xi} \tilde{C}_{i3j3}^{-1} C_{j3KL} d\xi \right\rangle - \int_{-0.5}^{\xi} \tilde{C}_{i3j3}^{-1} C_{j3KL} d\xi = 2\left\langle \int_{-0.5}^{\xi} Z_{iKL} d\xi \right\rangle - \int_{-0.5}^{\xi} Z_{iKL} d\xi \\ U_I^T(\xi) &= 2\left\langle \int_{-0.5}^{\xi} \tilde{C}_{i3j3}^{-1} C_{j3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} d\xi \right\rangle - \int_{-0.5}^{\xi} \tilde{C}_{i3j3}^{-1} C_{j3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} d\xi = \\ &= 2\left\langle \int_{-0.5}^{\xi} Z_{ikl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} d\xi \right\rangle - \int_{-0.5}^{\xi} Z_{ikl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} d\xi, \\ Z_{iKL} &= \tilde{C}_{i3j3}^{-1} C_{j3KL}, \quad Z_{ikl} = \tilde{C}_{i3j3}^{-1} C_{j3kl}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

здесь учтено, что деформации  $\varepsilon_{KL}^{(0)}(x_j)$ , согласно (1.5), не зависят от  $\xi$ .

Подставляя выражение (1.21) в первую группу соотношений (1.9), находим, что напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$ , в отличие от  $\sigma_{i3}^{(0)}$ , являются ненулевыми

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \quad (1.24)$$

$$C_{IJKl}^{(0)} = C_{IJKl} - C_{Iln3} \tilde{C}_{n3i3}^{-1} C_{i3kl}. \quad (1.25)$$

### 1.5 Решение задач первого, второго и третьего приближений

Задачи теплопроводности в системах (1.13), (1.14) и (1.15) решаются рекуррентно, не зависимо от задач механики. Также положим, что эти задачи

$$\begin{aligned} C \partial_i \theta^{(m+1)} &= (\lambda_{33} \theta_{/3}^{(m+1)})_{/3} + (\lambda_{3J} \theta_{,J}^{(m)})_{/3} + (\lambda_{I3} \theta_{/3}^{(m)})_{,I} \\ \Sigma_{3\pm} : \quad -\lambda_{33} \theta_{/3}^{(m+1)} &= 0; \quad \Sigma_S : \quad [\lambda_{33} \theta_{/3}^{(m+1)}] = 0, \quad [\theta^{(m+1)}] = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.26)$$

решены, например, численно. Эти задачи дают поправки к полю температуры  $\theta^{(0)}(\xi, x_j, t)$  порядка  $\kappa$ . В формулы расчета напряжений в пластинах, с точностью до главных членов разложения, эти поправки не входят, поэтому, как правило, в рамках рассматриваемого класса задач, для температуры можно ограничиться рассмотрением только нулевого приближения  $\theta^{(0)}(\xi, x_j, t)$ , для которой с помощью разработанного метода получено одномерная по толщине задача нестационарной теплопроводности (1.18).

Решение уравнений равновесия в системах (1.13), (1.14) и (1.15) вместе с граничными условиями на  $\Sigma_S$  и  $\xi = -0.5$  имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = - \int_{-0.5}^{\xi} \sigma_{iJ,J}^{(0)} d\xi + h_i^{(0)}(\xi + 0.5), \quad (1.27)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = - \int_{-0.5}^{\xi} \sigma_{iJ,J}^{(1)} d\xi + h_i^{(1)}(\xi + 0.5), \quad (1.28)$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -p_- \delta_{i3} - \int_{-0.5}^{\xi} \sigma_{iJ,J}^{(2)} d\xi + h_i^{(2)}(\xi + 0.5). \quad (1.29)$$

Условия существования решений (1.27)-(1.29) задач (1.13)-(1.15), удовлетворяющих граничным условиям  $\sigma_{i3}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(2)} = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(1)} = -p_+$  на внешней поверхности  $\xi = 0.5$ , приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$

$$h_i^{(0)} = \langle \sigma_{ij,J}^{(0)} \rangle, \quad (1.30)$$

$$h_i^{(1)} = \langle \sigma_{ij,J}^{(1)} \rangle, \quad (1.31)$$

$$h_i^{(2)} = \langle \sigma_{ij,J}^{(2)} \rangle - \Delta p \delta_{i3}, \quad \Delta p = p_+ - p_-. \quad (1.32)$$

С учетом формул (1.30)-(1.32), напряжения  $\sigma_{i3}^{(m)}$  (1.27)-(1.29) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{ij,J}^{(0)} \rangle - \sigma_{ij,J}^{(0)}) d\xi, \quad (1.33)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{ij,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{ij,J}^{(1)}) d\xi, \quad (1.34)$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -(p_- + \Delta p(\xi + 0.5))\delta_{i3} + \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{ij,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{ij,J}^{(2)}) d\xi. \quad (1.35)$$

Если подставить выражения (1.24) в (1.33), то получим для напряжений  $\sigma_{i3}^{(1)}$  следующую формулу

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \varepsilon_{KL,J}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi - \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl,J}^{T(0)} \rangle - C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl,J}^{T(0)}) d\xi, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0. \quad (1.36)$$

Выразим деформации  $\varepsilon_{k3}^{(1)}$  из 2-й группы соотношений (1.9)

$$\varepsilon_{k3}^{(1)} = \tilde{C}_{i3k3}^{-1} (\sigma_{i3}^{(1)} - C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3jl} \varepsilon_{jl}^{T(1)}), \quad (1.37)$$

тогда с учетом формул (1.36), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k3}^{(1)} = & -\tilde{C}_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + \tilde{C}_{k3i3}^{-1} C_{i3jl} \varepsilon_{jl}^{T(1)} - \tilde{C}_{k3i3}^{-1} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi - \\ & -\tilde{C}_{k3i3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl,J}^{T(0)} \rangle - C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl,J}^{T(0)}) d\xi \end{aligned} \quad (1.38)$$

Если подставить теперь (1.38) в 1-ю группу соотношений (1.9) при  $m=1$ , то найдем оставшиеся напряжения 1-го приближения

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(1)} = & C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + N_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - \sigma_{IJ}^{T(1)}, \\ N_{IJKL}^{(0)} = & -C_{Ijk3} \tilde{C}_{k3P3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{PMKL}^{(0)} \rangle - C_{PMKL}^{(0)}) d\xi, \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\sigma_{IJ}^{T(1)} = C_{Ijl}^{(0)} \varepsilon_{jl}^{T(1)} + C_{Ijk3}^{(0)} \tilde{C}_{k3P3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{PQjn}^{(0)} \varepsilon_{jn,Q}^{T(0)} \rangle - C_{PQjn}^{(0)} \varepsilon_{jn,Q}^{T(0)}) d\xi.$$

Деформации  $\varepsilon_{KL}^{(1)}$  с учетом первой группы формул (1.5) и первой формулы (1.22) можно представить в виде

$$\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi \eta_{KL} + \Phi_{KLMNS} \varepsilon_{MN,S}^{(0)} - \Phi_{KL}, \quad (1.40)$$

$$\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)}, \quad (1.41)$$

$$\Phi_{KLMNS}(\xi) = \frac{1}{2} (U_{KMN}(\xi) \delta_{LS} + U_{LMN}(\xi) \delta_{KS}),$$

$$\Phi_{KL}(\xi) = \frac{1}{2} (U_{K,L}^T(\xi) - U_{L,K}^T(\xi)) \quad (1.42)$$

С учетом формул (1.40), выражения (1.39) принимают вид

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = \xi C_{IJKL}^{(0)} \eta_{KL} + \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - \tilde{\sigma}_{IJ}^{(1)}, \quad (1.43)$$

$$\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = N_{IJKLM}^{(0)} + C_{IJSP}^{(0)} \Phi_{SPKLM},$$

$$\tilde{\sigma}_{IJ}^{(1)} = \sigma_{IJ}^{T(1)} + C_{IJKL}^{(0)} \Phi_{KL}.$$

## 1.6 Осредненные уравнения равновесия многослойных пластин

Подставляя выражения (1.30)-(1.32) в асимптотическое разложение (1.17) уравнений равновесия, получим

$$\langle \sigma_{i,j}^{(0)} \rangle + \kappa \langle \sigma_{i,j}^{(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \sigma_{i,j}^{(2)} \rangle - \Delta p \delta_{i3} + \dots = 0. \quad (1.44)$$

Домножим уравнения равновесия системы (1.11) на  $\xi \kappa$  и проинтегрируем их по толщине, тогда получим следующее вспомогательное уравнение

$$\kappa \langle \xi \sigma_{i,j}^{(0)} \rangle - \langle \sigma_{i3}^{(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \xi \sigma_{i,j}^{(1)} \rangle - \langle \sigma_{i3}^{(2)} \rangle + \dots = 0, \quad (1.45)$$

Здесь учтено, что  $\langle \xi \sigma_{i3/3}^{(1)} \rangle = - \langle \sigma_{i3}^{(1)} \rangle$ ,  $\langle \xi \sigma_{i3/3}^{(2)} \rangle = - \langle \sigma_{i3}^{(2)} \rangle$ .

Введем обозначения для усилий  $T_{ij}$ , моментов  $M_{ij}$  и перерезывающих сил  $Q_i$  в пластине

$$T_{ij} = \langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle + \kappa \langle \sigma_{ij}^{(1)} \rangle + \dots,$$

$$Q_i = \kappa \langle \sigma_{i3}^{(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \sigma_{i3}^{(2)} \rangle + \dots, \quad (1.46)$$

$$M_{ij} = \kappa \langle \xi \sigma_{ij}^{(0)} \rangle + \kappa^2 \langle \xi \sigma_{ij}^{(1)} \rangle + \dots$$

Тогда уравнения (1.44) и (1.45) можно записать в традиционном виде уравнений равновесия и уравнений моментов тонких пластин [20-22]

$$\begin{aligned}
T_{IJ} &= 0, \\
Q_{J,J} &= \Delta \bar{p}, \\
M_{IJ} - Q_I &= 0,
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Это и есть искомые осредненные уравнения равновесия многослойной пластины, здесь обозначено  $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p$ .

## 1.7 Осредненные определяющие соотношения

Подставляя выражения (1.24), (1.43) для напряжений  $\sigma_{IJ}^{(0)}$ ,  $\sigma_{IJ}^{(1)}$  в интегралы формул (1.48), получим

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} + K_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - T_{IJ}^T, \tag{1.48}$$

$$M_{IJ} = B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - M_{IJ}^T, \tag{1.49}$$

$$Q_I = K_{IJKL} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^2 \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle - Q_I^T, \tag{1.50}$$

где обозначены тензоры осредненных упругих констант пластины

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{IJKL} &= \langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle = \langle C_{IJKL} \rangle - \langle C_{Ijk3} \tilde{C}_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle, \\
B_{IJKL} &= \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \\
K_{IJKLM} &= \kappa \langle \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle, \\
K_{IJKL} &= \kappa \left\langle \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi \right\rangle, \\
\bar{D}_{IJKL} &= \kappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \\
\bar{K}_{IJKLM} &= \kappa^2 \langle \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle, \\
T_{IJ}^T &= \langle C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle + \kappa \langle \tilde{\sigma}_{IJ}^{(1)} \rangle, \\
M_{IJ}^T &= \kappa \langle \xi C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle + \kappa^2 \langle \xi \tilde{\sigma}_{IJ}^{(1)} \rangle, \\
Q_I^T &= \kappa \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl,J}^{T(0)} \rangle - C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl,J}^{T(0)}) d\xi.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

## 1.8 Осредненные кинематические соотношения

В систему осредненных определяющих соотношений (1.48)-(1.50) входят деформации срединной поверхности  $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ , кривизны  $\eta_{KL}$  и градиенты деформаций  $\varepsilon_{KL,N}^{(0)}$ , которые зависят от 3 функций  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$  глобальных переменных  $x_I$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{IJ}^{(0)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \\ \eta_{KL} &= -u_{3,KL}^{(0)}, \\ \varepsilon_{IJ,K}^{(0)} &= \frac{1}{2}(u_{I,JK}^{(0)} + u_{I,KJ}^{(0)}).\end{aligned}\tag{1.52}$$

## 1.9 Осредненная система уравнений равновесия для пластин

Подставляя далее выражения (1.48)-(1.50) и (1.52) в систему (1.47), получаем систему уравнений относительно 3 неизвестных функций  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$ :

$$\begin{aligned}\bar{C}_{IKL}u_{K,LJ}^{(0)} + B_{IKL}u_{3,KLJ}^{(0)} + K_{IKLM}u_{K,LMJ}^{(0)} - T_{IJ}^T &= 0, \\ B_{IKL}u_{K,LJI}^{(0)} + D_{IKL}u_{3,KLJI}^{(0)} + \bar{K}_{IKLM}u_{K,LMJI}^{(0)} - M_{IJ,JI}^T &= \Delta\bar{p}.\end{aligned}\tag{1.53}$$

Эта система имеет четвертый порядок относительно прогиба  $u_3^{(0)}$ , как в классической теории пластин Кирхгофа-Лява, и третий порядок производных относительно продольных перемещений  $u_I^{(0)}$ , чем отличается от теории Кирхгофа-Лява. Разработанная теория многослойных пластин близка по характеру распределения перемещений по толщине к теории ломаной нормали Э.И.Григолюка [1], поскольку перемещения согласно (1.3) и (1.22) с точностью до членов 2-го порядка малости имеют вид:

$$\begin{aligned}u_I &= u_I^{(0)} + \kappa(-\xi u_{3,I}^{(0)} + \varepsilon_{KL}^{(0)}U_{IKL}(\xi) - U_I^T(\xi)), \\ u_3 &= u_3^{(0)} + \kappa(\varepsilon_{KL}^{(0)}U_{3KL}(\xi) - U_3^T(\xi)).\end{aligned}\tag{1.54}$$

В инженерной практике чаще всего применяют ортотропные или моноклинные материалы [22], содержащие не более, чем 13 независимых упругих

модулей  $C_{ijkl}$ . Например, тканевые композиты, слоисто-волоконистые композиты, с различными углами ориентации волокон - принадлежат к моноклинному классу анизотропии. Немоноклинные материалы в инженерной практике встречаются крайне редко, это в основном кристаллические материалы, применяемые в электротехнике.

Для моноклинных материалов матрица модулей упругости и матрица теплового расширения имеют следующий вид [22]

$$(C_{ijkl}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{2212} \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{3312} \\ & & & 2C_{2323} & \sqrt{2}C_{2313} & 0 \\ & сим. & & & 2C_{1313} & 0 \\ & & & & & 2C_{1212} \end{pmatrix}, (\alpha_{kl}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Для моноклинных материалов ненулевыми являются только 13 констант, матрицы  $(C_{ijkl})$ , поэтому для них тензор  $Z_{IKL} = C_{I3j3}^{-1} C_{j3KL}$  имеет только нулевые компоненты, и, следовательно, компоненты тензора 3-го ранга  $U_{IKL}(\xi)$  являются все нулевыми. Ненулевой является матрица  $U_{3KL}(\xi)$ , она имеет следующий вид

$$U_{IKL}(\xi) = 0, \quad (1.56)$$

$$U_{3KL}(\xi) = 2 \left( \int_{-0.5}^{\xi} \frac{C_{33KL}}{C_{3333}} d\xi \right) > - \int_{-0.5}^{\xi} \frac{C_{33KL}}{C_{3333}} d\xi.$$

Аналогично устанавливаем, что для моноклинных материалов функции  $U_i^T(\xi)$  (1.23) равны нулю, и ненулевой является только  $U_3^T(\xi)$ :

$$U_i^T(\xi) = 0, \quad (1.57)$$

$$U_3^T(\xi) = 2 \left( \int_{-0.5}^{\xi} \frac{C_{33KL}}{C_{3333}} \varepsilon_{KL}^{T(0)} d\xi \right) > - \int_{-0.5}^{\xi} \frac{C_{33KL}}{C_{3333}} \varepsilon_{KL}^{T(0)} d\xi$$

Подставляя (1.56), (1.57) в (1.54), получаем, что для моноклинных материалов продольные перемещения  $u_i$  линейно зависят от поперечной координаты  $\xi$ , как и в классических теориях Тимошенко и Кирхгофа-Лява [23-25]:

$$\begin{aligned}
 u_I &= u_I^{(0)} - \kappa \xi u_{3,I}^{(0)}, \\
 u_3 &= u_3^{(0)} + \kappa (\varepsilon_{KL}^{(0)} U_{3KL}(\xi) - U_3^T(\xi)),
 \end{aligned}
 \tag{1.58}$$

но этот факт не является допущением, как это обычно осуществляется в классических теориях пластин, а он представляет собой итог асимптотических разложений уравнений общей трехмерной теории упругости, т.е. является строгим математически доказательным результатом. Для немоноклинных материалов линейного закона распределения продольных перемещений уже может не быть.

В отличие от классических теорий Тимошенко и Кирхгофа-Лява поперечное перемещение  $u_3$  пластины, в соответствии с формулой (1.58) зависит от поперечной координаты  $\xi$ .

### 1.10 Напряжения межслоя сдвига и поперечные напряжения в пластине

После того как решена осредненная задача (1.53), и найдены функции  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$ , вычисляем деформации (1.52), а затем напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$  по формулам (1.24). Сдвиговые напряжения  $\sigma_{I3}^{(0)}$  и поперечное напряжение  $\sigma_{33}^{(0)}$ , как было установлено (формулы (1.19)), в пластине тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются у следующего члена асимптотического разложения -  $\sigma_{IJ}^{(1)}$ , согласно (1.36). Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение - это значение  $\sigma_{33}^{(2)}$ , которое вычисляется согласно (1.26), (1.27):

$$\sigma_{33} = -\kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(1)}) d\xi + \kappa^3 (-p_- - \Delta p(\xi + 0.5) + \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(2)}) d\xi), \tag{1.59}$$

$$\sigma_{I3} = \kappa \sigma_{I3}^{(1)} + \kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(1)}) d\xi. \tag{1.60}$$

Входящие в эти выражения напряжения  $\sigma_{13}^{(1)}$ ,  $\sigma_{11}^{(1)}$  и  $\sigma_{13}^{(2)}$  вычисляются по формулам (1.36), (1.39) и (1.34). Таким образом, разработанная теория тонких пластин позволяет найти все шесть компонент тензора напряжений.

### 1.11 Пластины с симметричным расположением слоев

В частном случае, когда слои пластины расположены симметрично относительно срединной плоскости  $\xi = 0$ , часть тензоров (1.51) являются нулевыми

$$\begin{aligned} B_{IJKL} &= 0, \\ K_{IJKLM} &= 0, \end{aligned} \tag{1.61}$$

и определяющие соотношения (1.48) и (1.49) принимают такой вид

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} - T_{IJ}^T, \quad M_{IJ} = D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - M_{IJ}^T. \tag{1.62}$$

Эти соотношения отличаются от определяющих соотношений классической теории пластин Кирхгофа-Лява и Тимошенко наличием слагаемого  $\bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}$  в выражении для моментов.

### 1.12 Однослойная пластина при воздействии равномерного температурного поля

Если упругие модули всех слоев одинаковы, т.е. пластина однослойная, однородная и температура пластины равномерна по толщине, то все функции (1.23) – равны нулю:  $U_{iKL}(\xi) = 0$ ,  $U_i^T(\xi) = 0$ , и формулы (1.22) для пластины соответствуют классическим выражениям для пластин Кирхгофа-Лява [21,22]:

$$\begin{aligned} u_I &= u_I^{(0)} - \kappa \xi u_{3,I}^{(0)}, \\ u_3 &= u_3^{(0)}. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Для однородных однослойных пластин, кроме того, всегда  $\bar{K}_{IJKLM} = 0$  и выполняются соотношения (1.52), тогда осредненные определяющие соотношения (1.48)-(1.50) принимают вид

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} - T_{IJ}^T, \\ M_{IJ} &= D_{IJKL} \eta_{KL} - M_{IJ}^T. \end{aligned} \quad (1.64)$$

а система (1.53) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL} u_{K,LJ}^{(0)} - T_{IJ,J}^T &= 0, \\ D_{IJKL} u_{3,KLJ}^{(0)} - M_{IJ,J}^T &= \Delta \bar{p}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Формулы (1.52), (1.63)-(1.65) формально совпадают с соотношениями теории пластин Кирхгофа-Лява.

## ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ИЗГИБЕ

### 2.1 Задача об изгибе симметричной пластины равномерным давлением

Рассмотрим в качестве примера классическую задачу об изгибе многослойной пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного давления и при равномерном температурном поле. Слои пластины расположены симметрично относительно плоскости  $\xi = 0$ , поэтому имеют место соотношения (1.61). В этом случае для задачи изгиба пластины  $u_I^{(0)} = 0, \varepsilon_{KL}^{(0)} = 0, T_{IJ} = 0, \sigma_{IJ}^{(0)} = 0, \sigma_{I3}^{(0)} = 0$ , и ненулевыми неизвестными функциями являются только  $u_3^{(0)}(x), M_{11}(x), Q_1(x)$ , здесь  $x = x_1$  - безразмерная продольная координата пластины. Тождественно ненулевые уравнения равновесия (1.47), определяющие соотношения (1.62) и кинематические соотношения (1.52) принимают вид

$$\begin{aligned} M_{11,11} &= \Delta \bar{p}, \\ M_{11} &= D_{1111} \eta_{11}, \\ \eta_{11} &= -u_{3,11}^{(0)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Напряжения в 1-го и 2-го приближений согласно (1.36), (1.43) и (1.34) в данной задаче имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(1)} &= -\xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)}, \\ \sigma_{I3}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_{I3}^{(2)} &= -u_{3,111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тогда изгибные напряжения, напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения, согласно (2.2) и (1.59), (1.60), при сохранении главных членов в асимптотических разложениях (1.8), вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{II} &= -\kappa \xi C_{II11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)}, \\
\sigma_{I3} &= -\kappa^2 u_{3,111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi, \\
\sigma_{33} &= -\kappa^3 (p_- + \Delta p (\xi + 0.5) + u_{3,1111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma^{(2)} \rangle - \sigma^{(2)}) d\xi), \\
\sigma^{(2)} &= \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi C_{1111}^{(0)} \rangle - \xi C_{1111}^{(0)}) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Из этих выражений следует, что напряжения  $\sigma_{II}$  распределены по толщине пластины кусочно-линейным образом, а для однослойной пластины, для которой  $C_{ijkl} = \text{const}$ , эти напряжения имеют линейное распределение по толщине, как и в классической теории пластин.

Решение уравнений (2.1) вместе с граничными условиями жесткого защемления  $x=0$  и  $x=1$ :  $u_3^{(0)} = 0$ ,  $u_{3,1}^{(0)} = 0$  - это классическое решение для прогиба пластины в теории Кирхгофа-Лява:

$$u_3^{(0)} = -\frac{\Delta p}{24 D_{11}} x(x^3 - 2x^2 + x), \tag{2.4}$$

$$D_{11} = \langle \xi^2 C_{1111}^{(0)} \rangle,$$

а напряжения (2.3) принимают следующий вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{II} &= \frac{C_{II11}^{(0)} \Delta \tilde{p}}{24 \kappa^2 D_{11}} x(x-1), \\
\sigma_{I3} &= \frac{\Delta \tilde{p}}{\kappa D_{11}} (x-1/2) \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi, \\
\sigma_{33} &= -(\tilde{p}_- + \Delta \tilde{p} (\xi + 0.5) - \frac{\Delta \tilde{p}}{D_{11}} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma^{(2)} \rangle - \sigma^{(2)}) d\xi).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь учтено, что  $\frac{\Delta \bar{p}}{D_{1111}} = \frac{\Delta p}{D_{11}} = \frac{\Delta \tilde{p}}{\kappa^3 D_{11}}$ , а также обозначено:  $\Delta \tilde{p} = \kappa^3 \Delta p$ ,  $\tilde{p}_- = \kappa^3 p_-$ .

Если пластина однослойная, т.е.  $C_{ijkl} = \text{const}$ , то напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения, согласно (2.3), вычисляются по формулам

$$\sigma_{I3} = -\frac{\kappa^2}{2} C_{I111}^{(0)} u_{3,111}^{(0)} \left( \xi^2 - \frac{1}{4} \right), \tag{2.6}$$

$$\sigma_{33} = -\kappa^3 \left( p_- + \Delta p(\xi + 0.5) + u_{3,1111}^{(0)} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} + \left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi}{4} \right) \right) \right),$$

С учетом (2.5) для случая жесткого защемления однослойной пластины получаем явное выражение напряжений сдвига

$$\sigma_{13} = \frac{6\Delta\tilde{p}}{\kappa} \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( \xi^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что максимальное значение касательного напряжения:  $\max \sigma_{13} = \frac{3\Delta\tilde{p}}{4\kappa}$  - таково же как и в классической теории Кирхгофа-Лява. Однако, для многослойной пластины формулы для напряжений (2.3) отличаются от выражений, получаемых из теории Кирхгофа-Лява с единой деформируемой нормалью, а также от выражений, получаемых с помощью модели Григолюка-Куликова с ломаной линией.

## 2.2. Сравнение решения задачи об изгибе многослойной пластины с трехмерным решением

Для анализа точности разработанной теории многослойных пластин было проведено сравнение результатов расчетов напряжений по формуле (2.5) с результатами расчетов по точной трехмерной теории упругости. Для нахождения численного решения по трехмерной теории использовался программный конечно-элементный пакет ANSYS, с тетраэдральным 10-ти узловым конечным элементом SOLID187. Пластина в этом случае рассматривалась как трехмерное тело (параллелепипед), торцы которого  $x=0$  и  $x=1$  были жестко защемлены, на одной внешней поверхности  $\xi=0.5$  было задано равномерное давление  $\tilde{p}_- = \kappa^3 p_-$ , вторая поверхность  $\xi = -0.5$  полагалась свободной, а боковые грани  $x_2 = \pm b/2$  (b-ширина пластины) были защемлены со свободным скольжением:  $u_2 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{13} = 0$ . Пластина состояла из 3-х слоев с симметричным их расположением относительно срединной плоскости (рисунок 2.1): толщина средней пластины

была выбрана в 2 раза большей, чем толщина внешних слоев. Числа  $\kappa = h/L$  и  $b/L$  были выбраны равными:  $\kappa = b/L = 0.04$ , что обеспечивало условие "тонкости" пластины. Материалы слоёв были выбраны ортотропными, с главными осями ортотропии совпадающими с осями симметрии пластины, значения упругих характеристик слоев приведены в таблице 2.1 для внешних слоев и в таблице 2.2 для внутреннего слоя.

Таблица 2.1 – Упругие характеристики материала внешних слоев

$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$E_3$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{31}$	$\nu_{23}$
14	14	5,3	1,8	0,75	0,75	0,08	0,14	0,15

Таблица 2.2 – Упругие характеристики материала внутреннего слоя

$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$E_3$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{31}$	$\nu_{23}$
21	21	7,95	2,7	1,125	1,125	0,12	0,21	0,225

В процессе проведения трехмерных конечно-элементных расчетов с помощью пакета ANSYS была установлена существенная зависимость решения от использованной при расчетах конечно-элементной сетки. В начале расчеты проводились с равномерной КЭ сеткой с числом элементов по толщине пластины равным  $N=12$  (что соответствует минимум 3-м КЭ по толщине на каждый из 4-х слоев пластины). Общее число КЭ для всей пластины в такой сетке составило 492544 (693634 узла). Однако точность решения, получаемого на такой сетке, оцениваемая по отклонению от решения (2.5), полученного по с помощью асимптотической теории (далее АТ-решение), оказалась крайне не удовлетворительной (см. далее).

Для повышения точности КЭ-решения оказалось необходимым существенное измельчение сетки с  $N=80$  КЭ по толщине пластины. Однако при этом резко возрос общий размер КЭ – примерно до 50 млн. КЭ, что сделало затруднительным не только решение задачи на персональном компьютере, но и само хранение КЭ сетки в оперативной памяти компьютера.

Для того, чтобы избежать необходимости применения параллельных вычислений, было предложено создать специальную неравномерную КЭ-сетку,

для которой сгущение реализуется только вблизи 9 нормальных сечений пластины (рисунок 2.1), названных "опорными", для остальных частей пластины использовалась существенно более крупная сетка. Так для  $N=12$  число КЭ по толщине и ширине пластины вне областей опорных сечений составляло 4 (9 узлов) (рисунок 2.1).

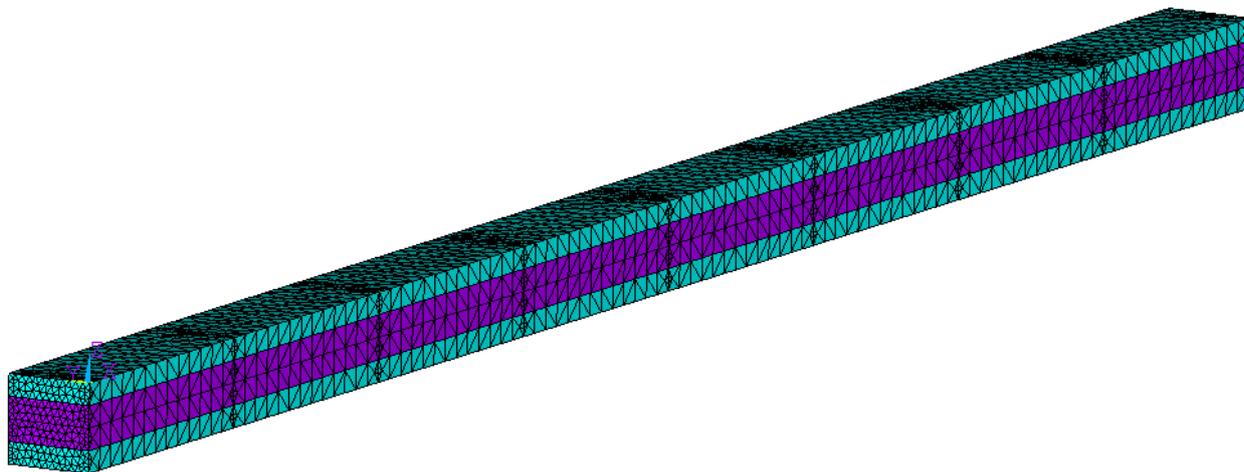


Рисунок 2.1 – Неравномерная конечно-элементная сетка трехслойной пластины, использованная в расчетах

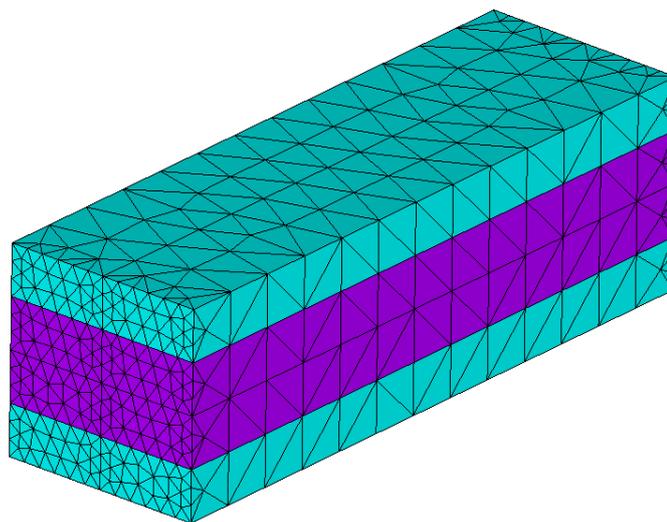


Рисунок 2.2 – Конечно элементная сетка 1/8 части пластины с 12-ю КЭ по толщине для опорных сечений ( $N=12$ )

Число  $N$  КЭ в опорном сечении выбиралось исходя из условия близости скачка напряжения  $\sigma_{22}$  на поверхности раздела слоёв, рассчитанного по АТ-решению (2.5) и с помощью комплекса ANSYS:

$$\Delta[\sigma_{22}] = \frac{|[\sigma_{22}]_{ansys} - [\sigma_{22}]_{AT}|}{[\sigma_{22}]_{AT}} \cdot 100\% < 20\% . \quad (2.8)$$

В таблице 2 приведено сравнение невязки  $\Delta[\sigma_{22}]$  вычисления скачка поперечного нормального напряжения  $[\sigma_{22}]$  в зависимости от числа  $N$  конечных элементов в опорных сечениях. На рисунке 2.3 приведены соответствующие распределения поперечного напряжения  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, в окрестности сечения  $x_1 = 0,25$  (стык слоев 1 и 2 пластины), полученные с помощью разработанной теории (АТ) и с помощью пакета ANSYS для различных КЭ сеток с разным числом  $N$ . Для относительно крупных сеток с  $N=12$  и  $20$  величина невязки  $\Delta[\sigma_{22}]$  является достаточно большой и не удовлетворяет условию (2.8). Выполнение этого условия обеспечивает только достаточно мелкая сетка с  $N=80$ .

Таблица 2.2 – зависимость невязки  $\Delta[\sigma_{22}]$  вычисления скачка напряжения  $[\sigma_{22}]$  от измельчения КЭ сетки

Число $N$ КЭ (узлов) по толщине пластины в опорных сечениях	Невязка $\Delta[\sigma_{22}]$ вычисления скачка напряжения $[\sigma_{22}]$ в сечении $x_1 = 0,25$ , %
12 (25)	73,7
20 (41)	55,3
80 (161)	18,5

Исходя из полученных результатов число конечных элементов по толщине и ширине пластины в опорных сечениях, было выбрано равным  $N=80$  (по 20 элементов на слой). Общее число КЭ в такой неравномерной сетки оставалось относительно не большим - 224733 (число узлов – 319869), что позволяло относительно быстро проводить расчеты на этой сетке.

Сравнение распределений напряжений, рассчитанных по АТ -решению с ANSYS- решением, приведено на рисунках 4 - 7 для 4-х различных сечений  $x = x_1 = [0,125; 0,25; 0,375; 0,5]$ , ( $y = x_2, z = x_3$ ).

На этих рисунках, как и ранее, поперечная безразмерная координата  $\xi$  изменяется в пределах  $[-0,5; 0,5]$ : значение  $\xi = 0,5$  – соответствует верхней плоскости, на которой задано равномерно распределенное давление:  $k^3 p_+ = 10^6$  Па; а значения  $\xi = \pm 0,25$  – соответствуют плоскостям стыка слоев. Так как материалы слоев выбраны ортотропными, то два касательных напряжения отсутствуют во всех слоях:  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ .

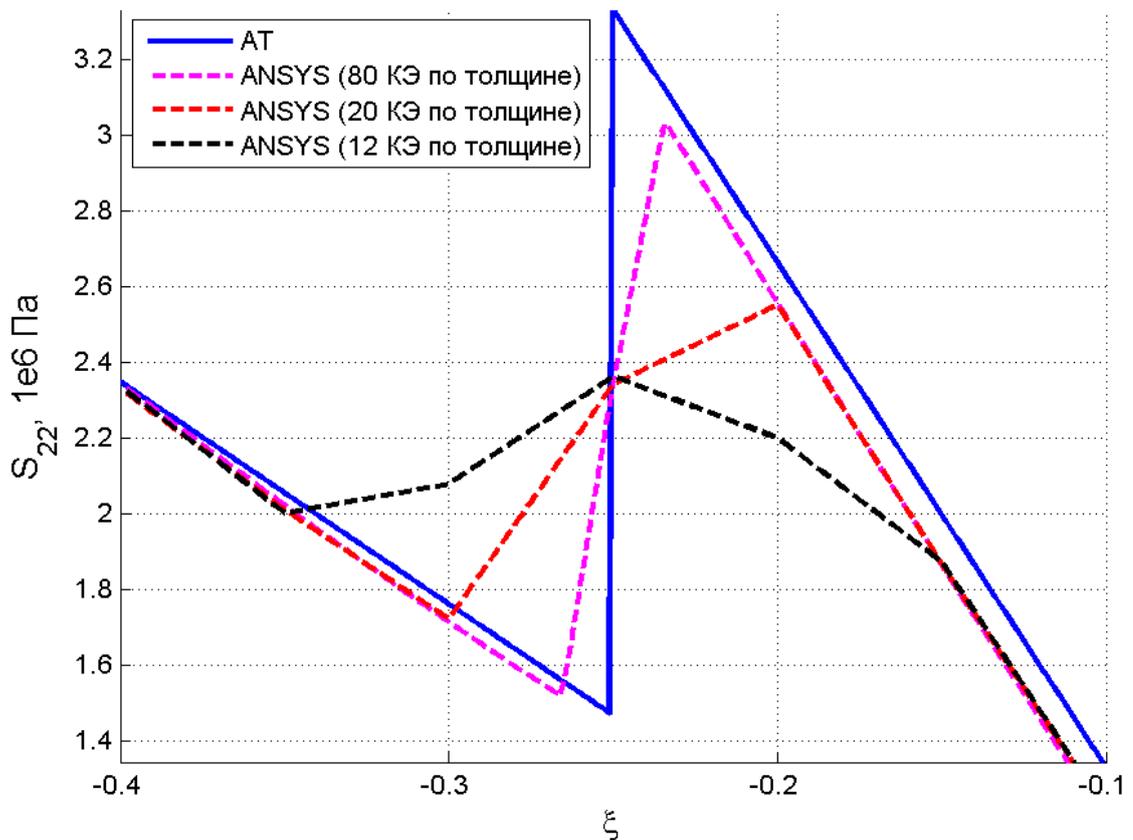


Рисунок 2.3. Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины в окрестности стыка слоев 1 и 2 пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS, для сечения  $x_1 = 0,25$

Распределения остальных 4-х напряжений  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ , рассчитанные с помощью разработанной асимптотической теории (АТ) по формулам (2.5) и с

помощью пакета ANSYS для сетки с  $N=80$  достаточно хорошо совпадают (рисунки 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11).

В качестве количественные характеристики близости решений кроме невязки (2.8) рассматривалась также среднеинтегральная по толщине невязки численного решения для напряжений в различных сечениях  $x_1$  (по поперечной координате  $x_2$  в данной задаче напряжения не изменяются):

$$\delta(\sigma_{\alpha\alpha}) = \frac{\int_{-0.5}^{0.5} \left( (\sigma_{\alpha\alpha})_{ansys} - (\sigma_{\alpha\alpha})_{AT} \right)^2 d\xi}{\int_{-0.5}^{0.5} \left( (\sigma_{\alpha\alpha})_{AT} \right)^2 d\xi} \cdot 100\% . \quad (2.9)$$

Для  $N=80$  значение среднеинтегральной невязки  $\delta(\sigma_{\alpha\alpha})$  составило: для  $\delta(\sigma_{22}) = 8,8 \%$ ,  $\delta(\sigma_{11}) = 3,5 \%$ ,  $\delta(\sigma_{33}) = 0,6 \%$ ,  $\delta(\sigma_{13}) = 0,7 \%$  в сечении  $x_1 = 0,25$ .

Решение, показанное на рисунке 4г, отражает тот факт, что теоретически нулевое распределение касательного напряжения  $\delta(\sigma_{13})$  в центральном сечении  $x_1 = 0,5$  при численной КЭ-реализации близко к машинному нулю, максимальное значение отклонений от нуля, есть величина примерно на 3 порядка меньшая, чем максимальное значение касательных напряжений в сечении  $x_1 = 0,375$  (рисунок 2.4в).

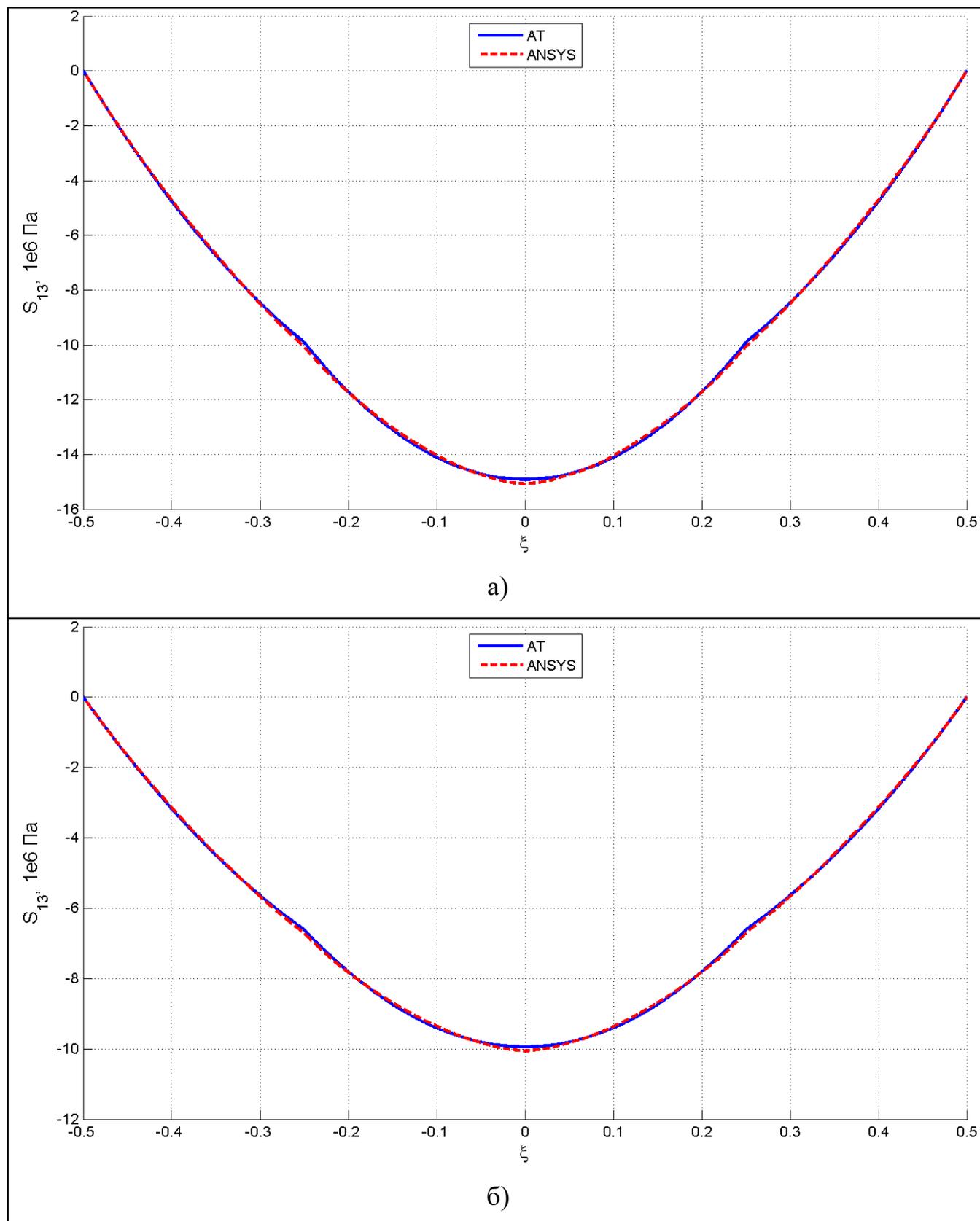


Рисунок 2.4 – Распределение напряжения  $\sigma_{13}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS:

а –  $x_1 = 0,125$ ; б –  $x_1 = 0,25$

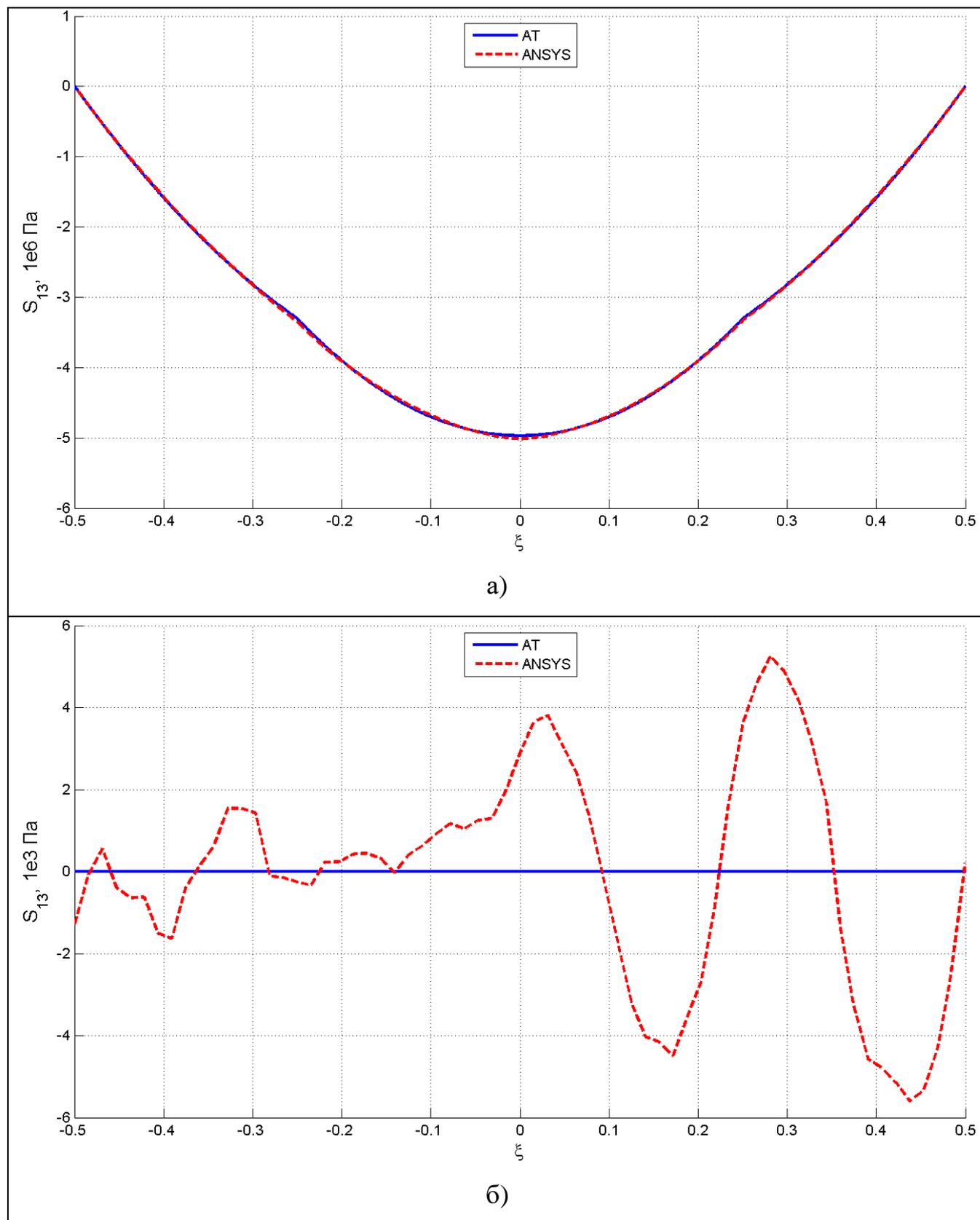


Рисунок 2.5 – Распределение напряжения  $\sigma_{13}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS:

а –  $x_1 = 0,375$ ; б –  $x_1 = 0,5$

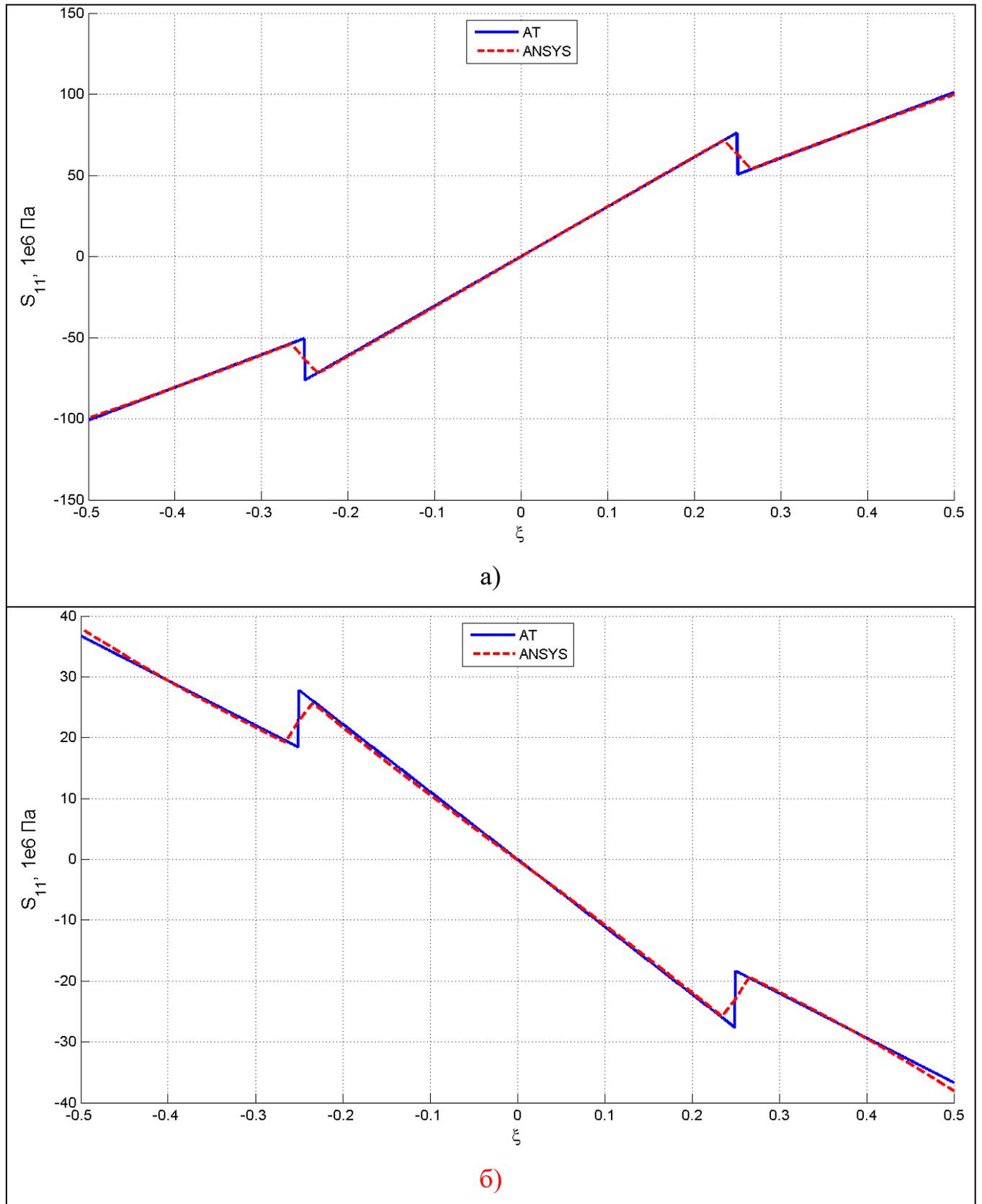


Рисунок 2.6 – Распределение изгибного напряжения  $\sigma_{11}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS:

а –  $x_1 = 0,125$ ; б –  $x_1 = 0,25$

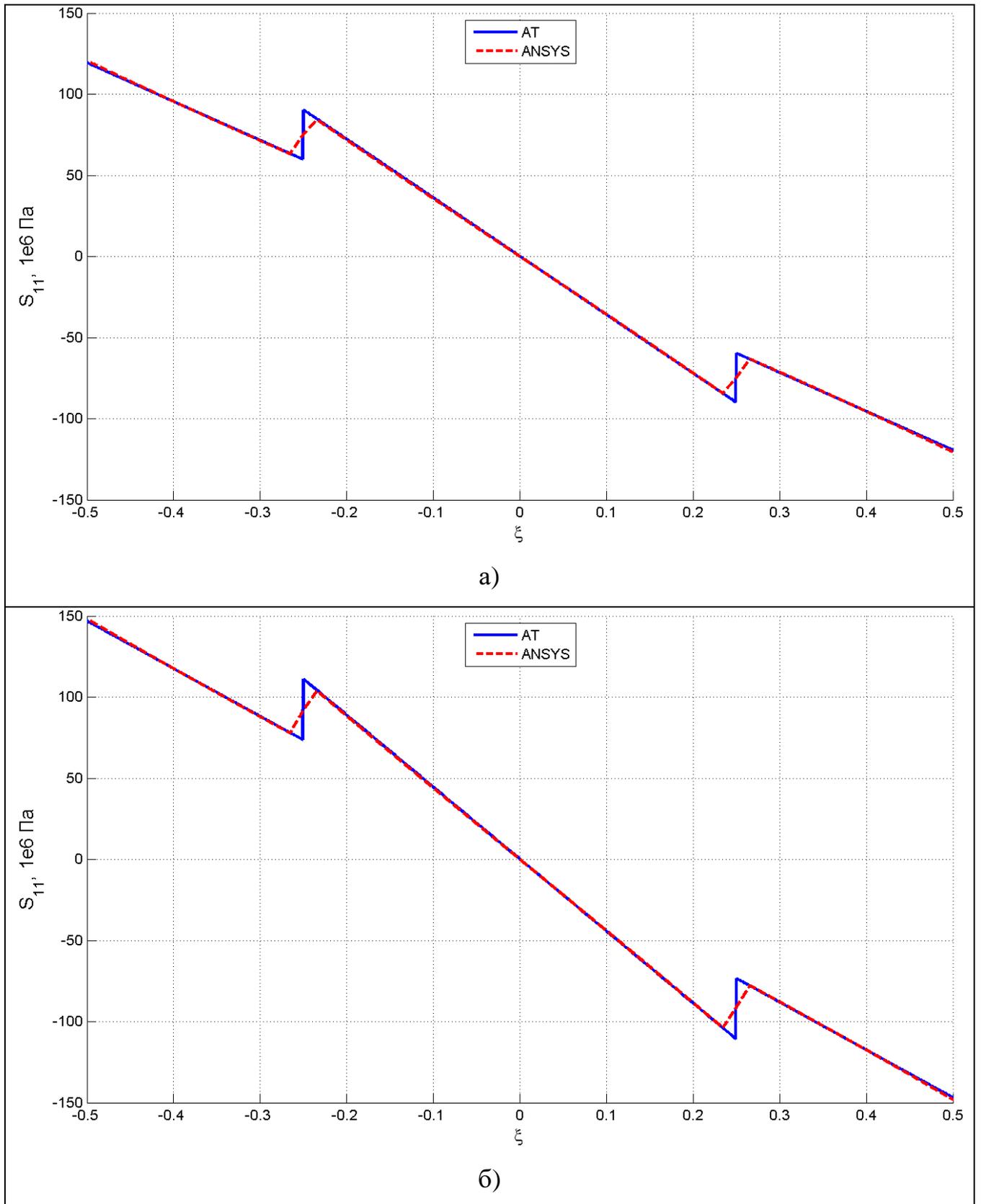


Рисунок 2.7 – Распределение изгибного напряжения  $\sigma_{11}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS:

а –  $x_1 = 0,375$ ; б –  $x_1 = 0,5$

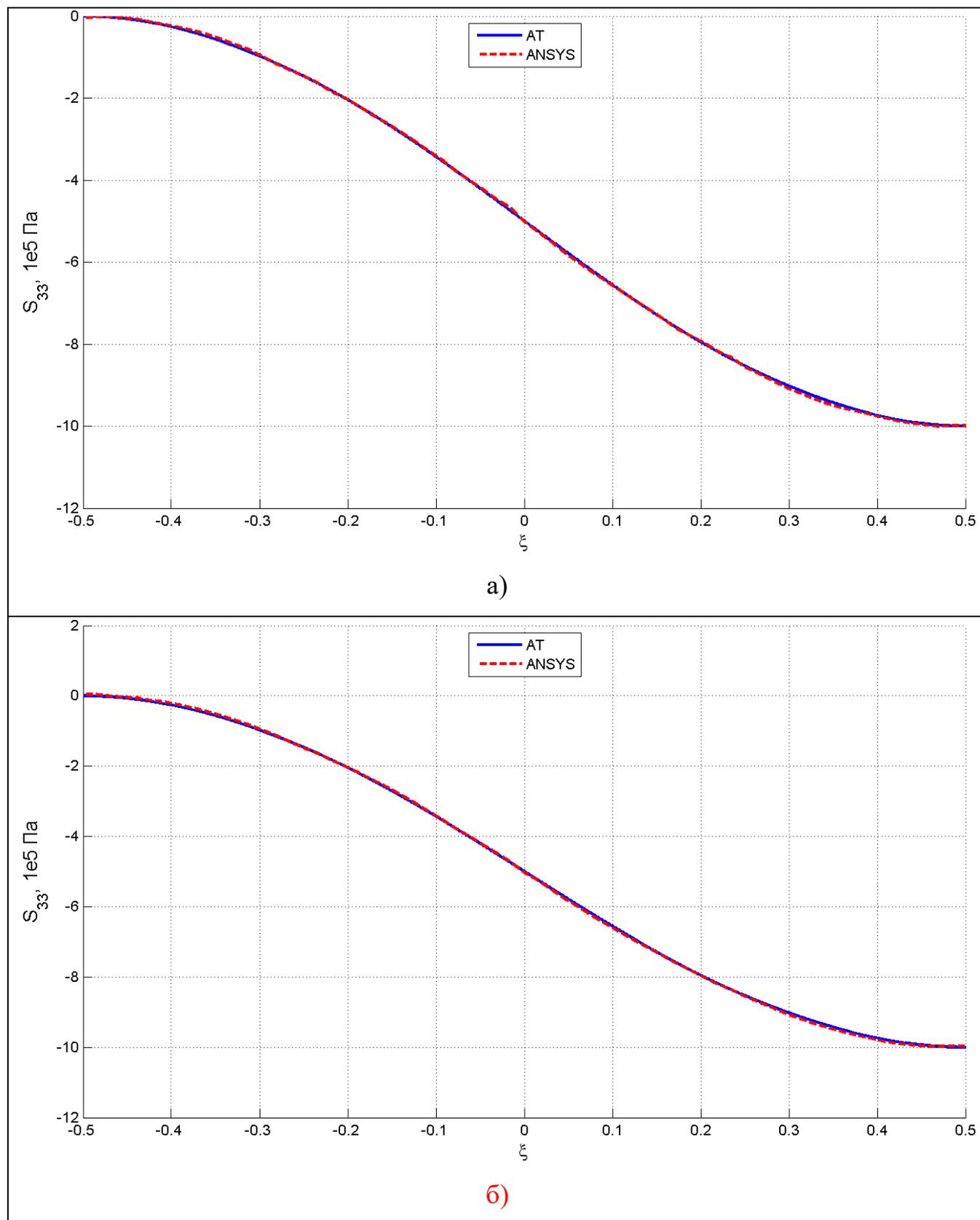


Рисунок 2.8 – Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{33}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS: а –  $x_1 = 0,125$ ; б –  $x_1 = 0,25$

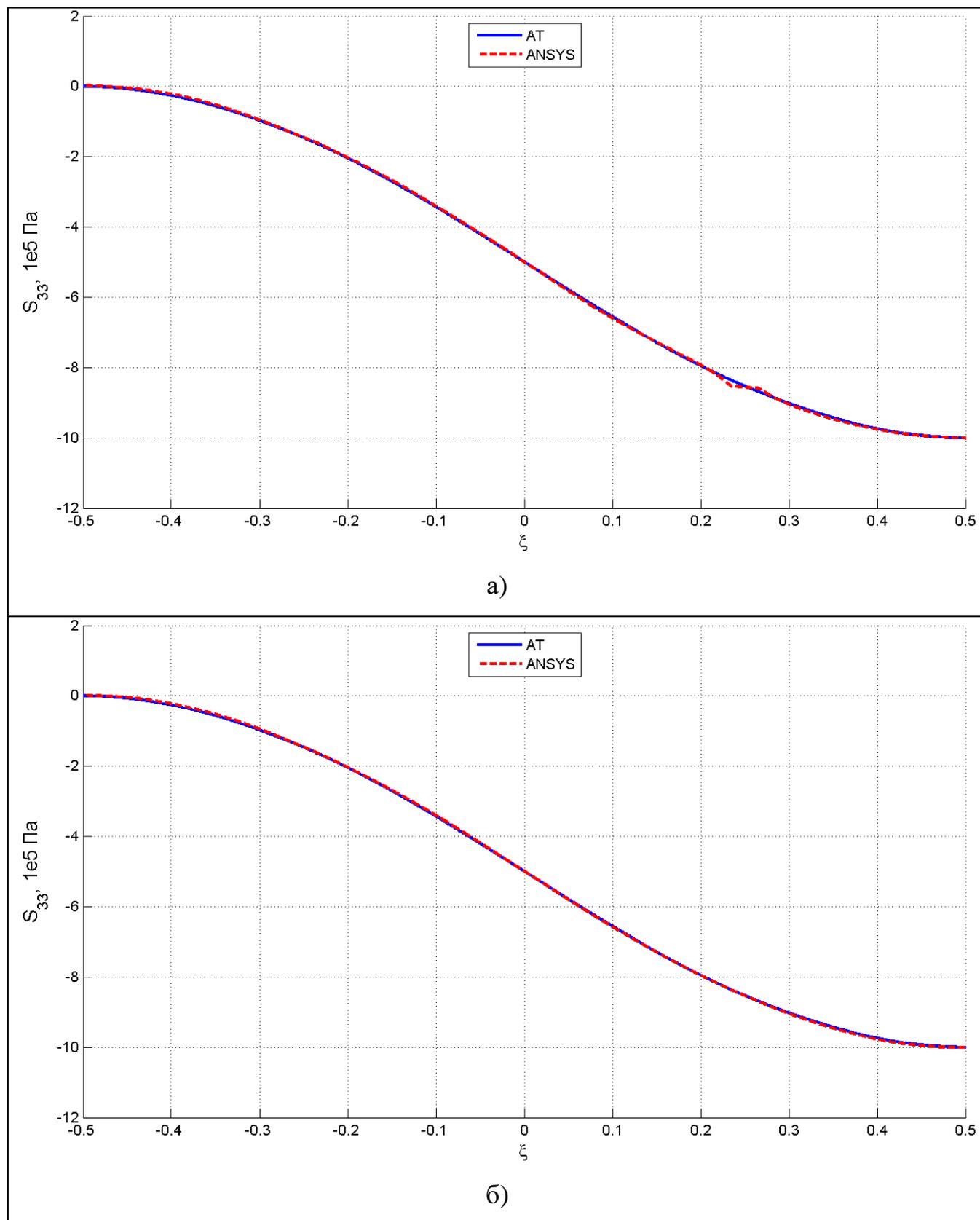


Рисунок 2.9 – Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{33}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS: а –  $x_1 = 0,375$ ; б –  $x_1 = 0,5$

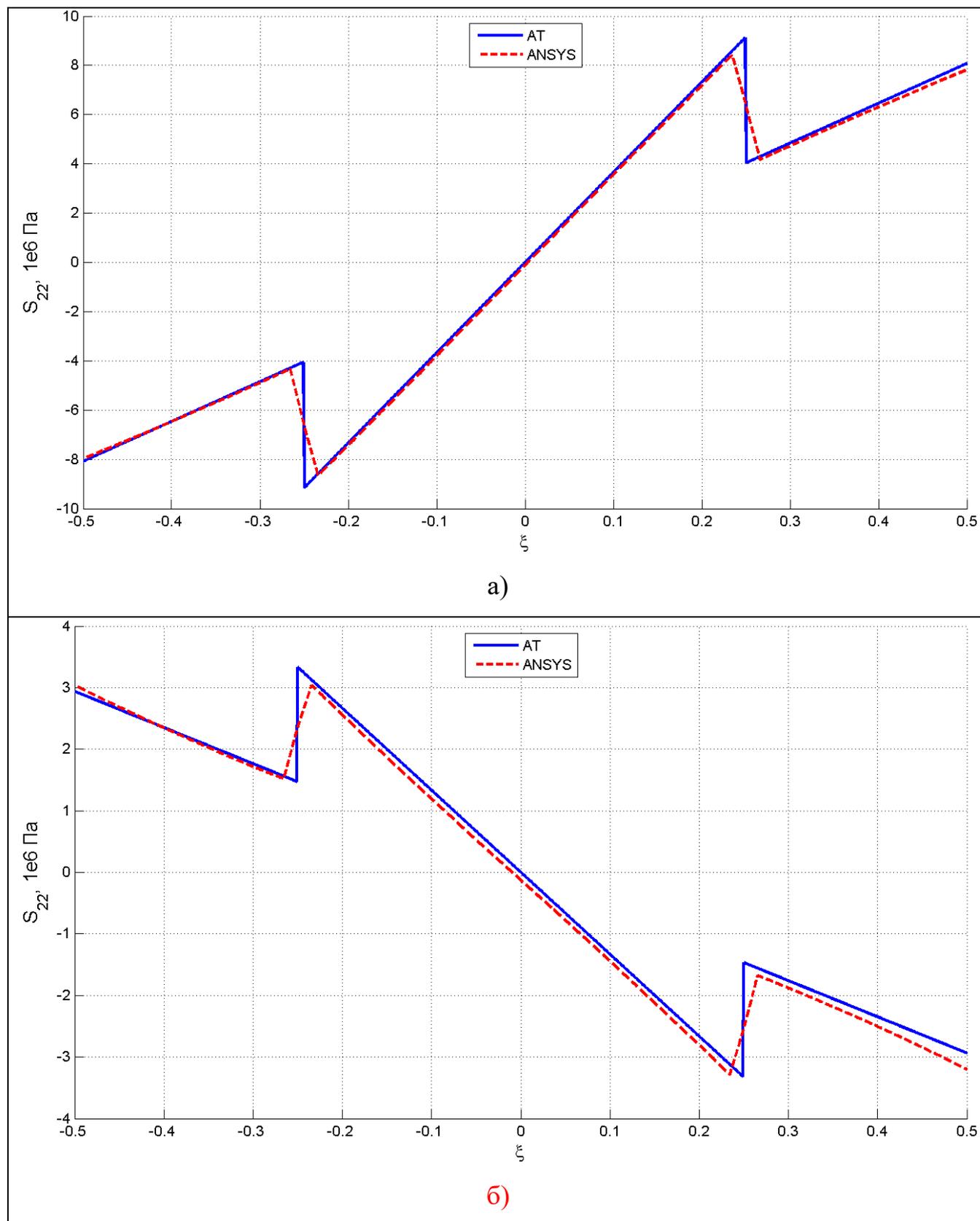


Рисунок 2.10 – Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS: а –  $x_1 = 0,125$ ; б –  $x_1 = 0,25$

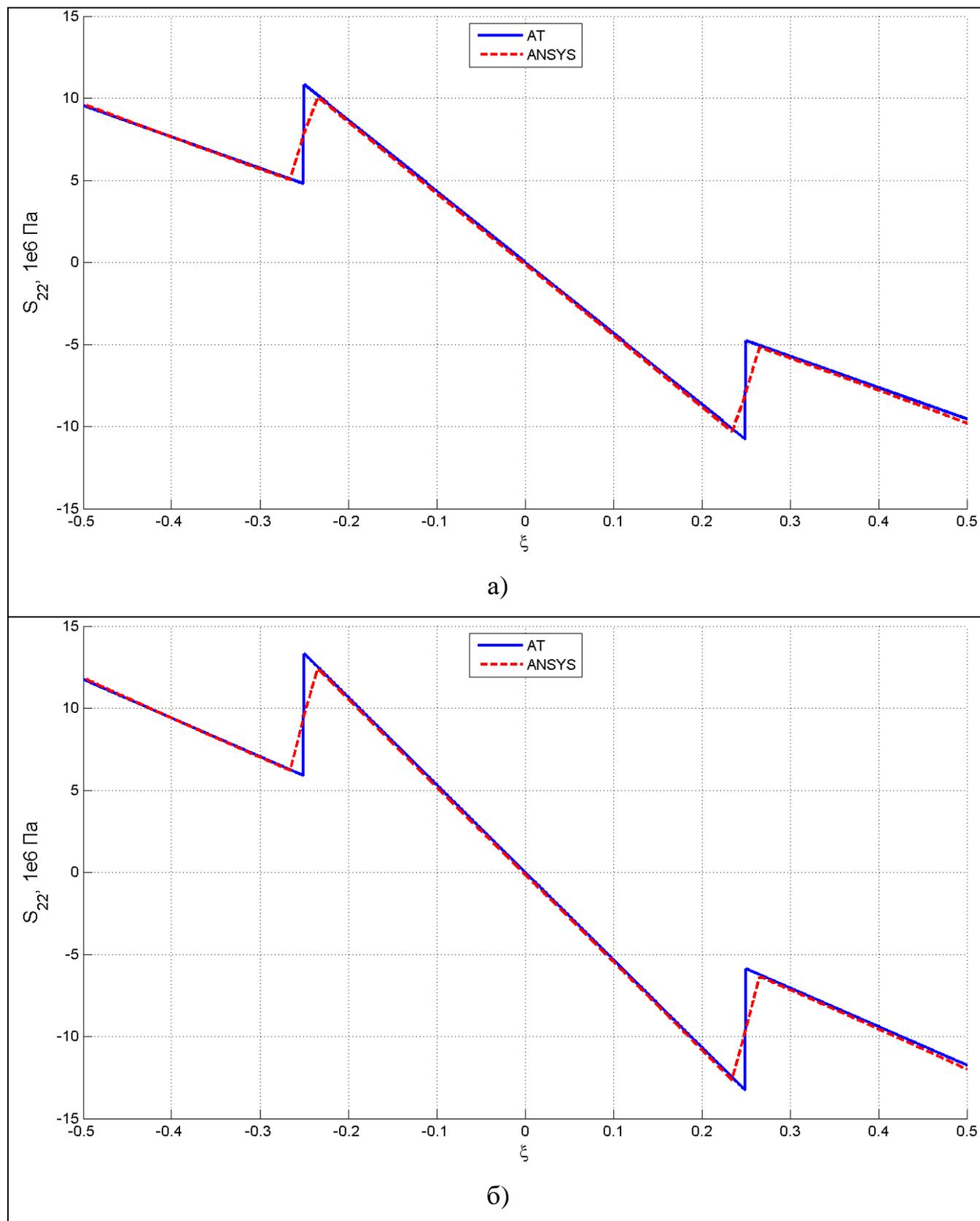


Рисунок 2.11 – Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS: а –  $x_1 = 0,375$ ; б –  $x_1 = 0,5$

### 2.3. Задача об изгибе многослойной пластины при неравномерном нагреве.

Рассмотрим задачу об изгибе многослойной пластины при неравномерном нагреве. Положим, что температурное поле пластины  $\theta^{(0)}$  известно, является неравномерным по толщине, но не зависит от  $x_j$ :  $\theta^{(0)}(\xi, t)$ . Тогда из (1.39), (1.41), (1.43) следует, что

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{KL}(\xi) &= \Phi_{KL}(\xi) = 0, \\ \tilde{\sigma}_{IJ}^{T(1)} &= \sigma_{IJ}^{T(1)} = C_{Ijl}^{(0)} \varepsilon_{jl}^{T(1)}, \\ T_{IJ}^T &= \langle C_{Ikl}^{(0)} (\varepsilon_{kl}^{T(0)} + \kappa \varepsilon_{kl}^{T(1)}) \rangle, \\ M_{IJ}^T &= \kappa \langle \xi C_{Ikl}^{(0)} (\varepsilon_{kl}^{T(0)} + \kappa \varepsilon_{kl}^{T(1)}) \rangle.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Отсюда видно, что с точностью до величин порядка  $\kappa$  можно пренебречь тепловыми деформациями 1-го приближения  $\varepsilon_{kl}^{T(1)}$  по сравнению с деформациями нулевого приближения  $\varepsilon_{kl}^{T(0)}$  и можно положить:  $T_{IJ}^T = \langle C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle$ ,  $M_{IJ}^T = \kappa \langle \xi C_{Ikl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle$ . Так как  $\theta^{(0)}(\xi, t)$  не зависит от  $x_j$ , то  $T_{IJ}^T$  и  $M_{IJ}^T$  также не зависят от  $x_j$ . Будем считать слои пластины ортотропными, торцы пластины  $x_1 = 0$  и  $x_1 = 1$  и внешние поверхности пластины  $\xi = \pm 0.5$  - свободными от нагрузки ( $\Delta \bar{p} = 0$ ), боковые поверхности  $x_2 = \pm b/2$  - стесненными, свободно скользящими, тогда  $T_{12} = 0$  и  $M_{12} = 0$ ,  $u_2^{(0)} = 0$ ,  $u_1^{(0)}(x_1), u_3^{(0)}(x_1)$ ,  $\varepsilon_{22}^{(0)} = 0$ ,  $M_{22}(x_1)$  и система уравнений (1.53) принимает вид:

$$\begin{aligned}T_{11} &= 0, \\ T_{22} &= \bar{C}_{2211} \varepsilon_{11}^{(0)} - T_{22}^T = const,\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$M_{22} = D_{2211} \eta_{11} - M_{22}^T,$$

$$M_{11,11} = 0,$$

$$M_{11} = D_{1111} \eta_{11} - M_{11}^T,\tag{2.12}$$

$$\eta_{11} = -u_{3,11}^{(0)}.$$

Решение системы уравнений (2.12) с граничными условиями:

$$x_1 = 0: u_3^{(0)} = 0, u_{3,1}^{(0)} = 0,$$

$$x_1 = 1: u_3^{(0)} = 0, T_{11} = 0,$$

имеет вид:

$$u_3^{(0)} = -\frac{M_{11}^T}{4D_{1111}} x(x^2 - x),$$

$$u_1^{(0)} = \frac{T_{11}^T}{C_{1111}} x_1, \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{T_{11}^T}{C_{1111}} = const.$$

Тогда изгибные напряжения, напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения, согласно (2.2) и (1.59), (1.60), при сохранении главных членов в асимптотических разложениях (1.8), в данной задаче имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} &= \sigma_{IJ}^{(0)} + \kappa \sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJ11}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(0)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} - \kappa^2 \xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)} = \\ &= \frac{C_{IJ11}^{(0)}}{C_{1111}} T_{11}^T - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} - \kappa^2 \xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{I3}^{(1)} = 0, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{I3} = \kappa^2 \sigma_{I3}^{(2)} = -\kappa^2 u_{3,111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi \sigma_{I3}^{(2)} = 0,$$

$$\sigma_{33} = 0.$$

На рисунках 2.12–2.15 показаны распределения изгибных напряжений  $\sigma_{IJ}$  по толщине пластины для различных значений координаты  $x_1$ , вычисленные по формулам (2.14) для трехслойной пластины, с характеристиками слоев

Для нахождения численного решения по трехмерной теории термоупругости также использовался программный пакет ANSYS, с тетраэдральным 10-ти узловым конечным элементом SOLID226.

Для расчетов использовалась описанная выше неравномерная КЭ-сетка. Число конечных элементов по толщине и ширине пластины было выбрано одинаковым и составило 8 элементов (17 узлов), со сгущением сетки в опорных

сечениях, для которых проводилось сравнение расчетного решения с решением, полученным с помощью ANSYS, до  $N=80$  элементов (161 узла) (по 20 элементов на слой).

Общее число элементов в сетке при решении задачи термоупругости составило 768525, узлов – 1077573.

Невязка (2.8) вычисления скачка напряжений  $[\sigma_{22}]$  и  $[\sigma_{11}]$  на поверхности раздела слоёв, полученная с помощью АТ-решения и ANSYS-решения, составила  $\Delta[\sigma_{22}]=6,5\%$  и  $\Delta[\sigma_{11}]=35\%$ .

Среднеинтегральная невязка (2.9) решения составила:  $\delta(\sigma_{22})=2,7\%$  и  $\delta(\sigma_{11})=2,8\%$ , в сечении  $x_1 = 0,25$ , что говорит о высокой точности АТ-решения.

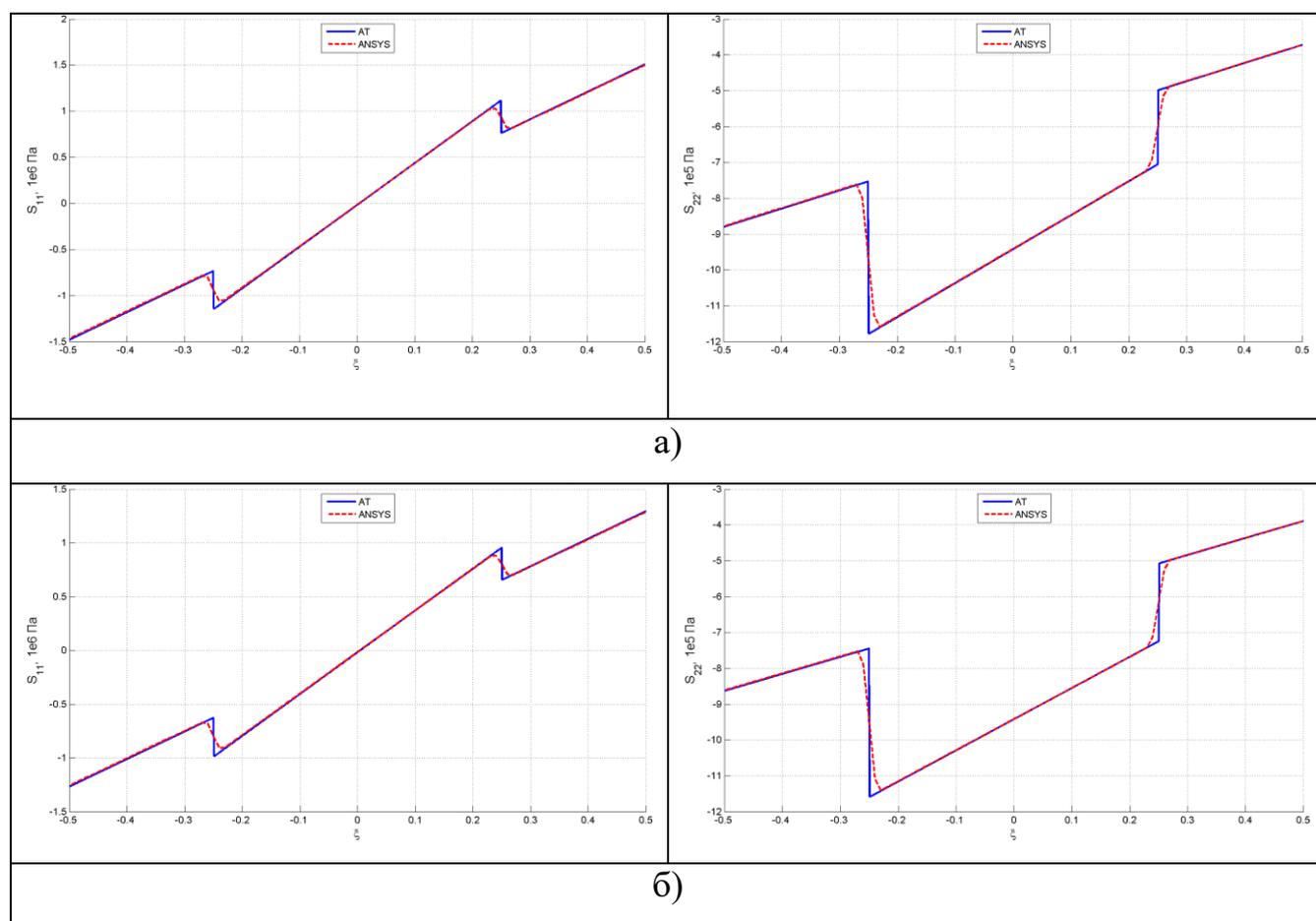


Рисунок 2.12 – Распределение поперечных напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, полученные с помощью разработанной теории (АТ-решение) и пакета ANSYS. для различных сечений пластины:

а –  $x_1 = 0,125$ ; б –  $x_1 = 0,25$ ;

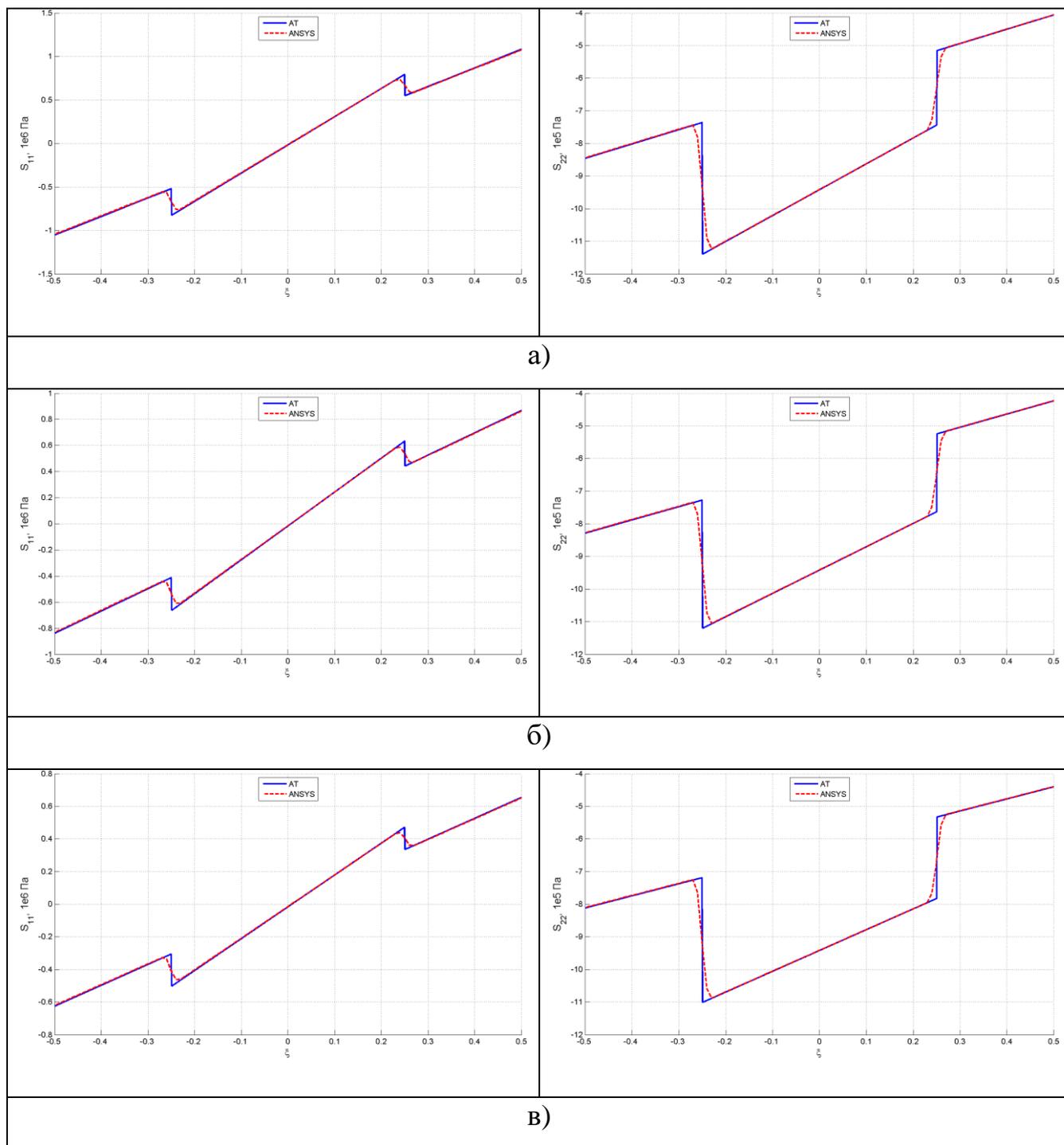


Рисунок 2.13 – Распределение поперечных напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, полученные с помощью разработанной теории (АТ-решение) и пакета ANSYS. для различных сечений пластины:

$$\text{а} - x_1 = 0,375; \text{б} - x_1 = 0,5; \text{в} - x_1 = 0,625;$$

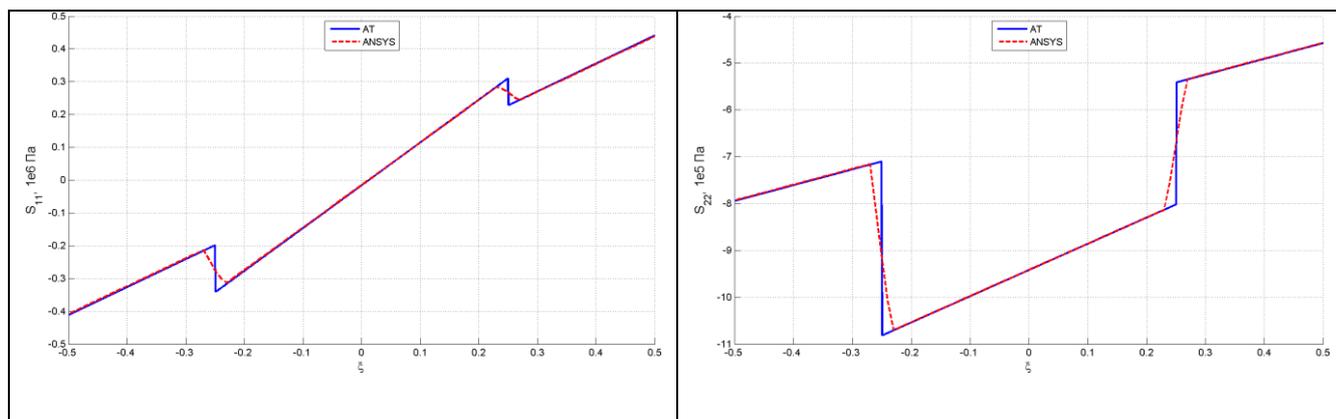


Рисунок 2.14 – Распределение поперечных напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, полученные с помощью разработанной теории (АТ-решение) и пакета ANSYS. для сечения пластины  $x_1 = 0,750$

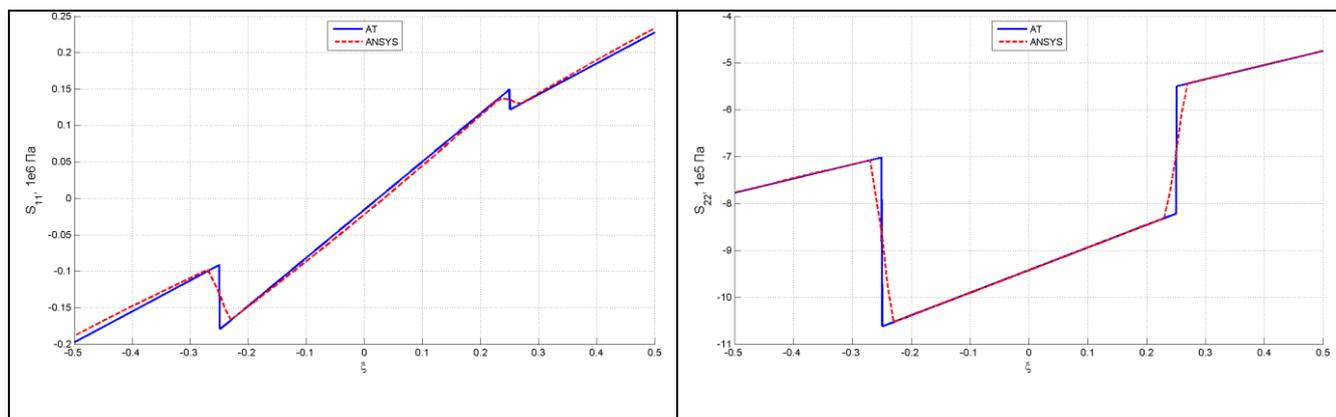


Рисунок 2.15 – Распределение поперечных напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, полученные с помощью разработанной теории (АТ-решение) и пакета ANSYS. для сечения пластины:  $x_1 = 0,875$

### ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА ТЕОРИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ

#### 3.1. Постановка трехмерной задачи линейной теории упругости при установившихся колебаниях

Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины, введем малый параметр  $\kappa = h/L \ll 1$ , как отношение общей толщины пластины  $h$  к характерному размеру всей пластины  $L$  (например, к ее максимальной длине). Введем также глобальные  $x_k$  и локальную  $\xi$  координаты:

$$\begin{aligned} x_k &= \tilde{x}_k / L, \\ \xi &= x_3 / \kappa, \quad k=1,2,3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $\tilde{x}_k$  - обычные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось  $O\tilde{x}_3$  направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси  $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$  принадлежат срединной поверхности пластины. Полагаем, что существует 2 масштаба изменения перемещений  $u_k$ : один по направлениям  $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$ , а второй по направлению  $O\tilde{x}_3$ . Координаты  $x_3$  и  $\xi$ , как обычно, в методе асимптотического осреднения рассматриваются как независимые переменные. Координата  $\xi$  по толщине пластины изменяется в диапазоне  $-0.5 < \xi_3 < 0.5$ .

Рассмотрим для пластины трехмерную задачу линейной теории упругости при установившихся колебаниях[15]

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij} + \rho \omega^2 u_i &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} &= -\kappa^3 p_{\pm} \delta_{i3}, \quad \Sigma_T : u_i = u_{ei}, \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0, \quad [u_3] = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

состоящую из уравнений установившихся колебаний, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешних поверхностях пластины оболочки – на внешней и внутренней поверхности  $\Sigma_{3\pm}$  (их уравнение имеет вид  $\tilde{x}_3 = \pm h/2$ ) и на торцевой поверхности  $\Sigma_T$ , а также граничных условий на поверхности контакта  $\Sigma_S$  слоев пластины ( $[u_i]$  - скачок функций), которые могут и отсутствовать, например, для однослойной пластины.

Принимаем основное допущение, состоящее в том, что давление  $\tilde{p}_{\pm}$  на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости  $O(\kappa^3)$  (т.е.  $\tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}$ ) - это допущение, как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин.

В уравнениях (3.2) обозначены  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензора деформаций,  $u_j$  - компоненты вектора перемещений,  $\nabla_j = \partial/\partial\tilde{x}_j$  - оператор дифференцирования по декартовым координатам,  $\omega$  - частота вынужденных колебаний,  $C_{ijkl}(\xi)$  - компоненты тензора модулей упругости, который полагается зависящим от координаты  $\xi_3 = \xi$ , так как этот тензор различен для разных слоев пластины,  $\rho(\xi)$  - плотность слоев пластины. Никакого специального допущения об анизотропии материалов слоев пока не делаем, т.е. тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [16].

### 3.2 Асимптотические разложения для многослойной пластины

Задача (3.2) содержит локальную координату  $\xi$ , а также малый параметр  $\kappa$  в граничных условиях (это коэффициент при давлении), поэтому ее решение будем искать в виде асимптотических разложений по параметру  $\kappa$  в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \quad (3.3)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами  $I, J, K, L$  принимают значения 1,2, а индексы  $i, j, k, l$  - значения 1,2,3.

Подставим разложения (3.3) в соотношения Коши в системе (3.2), при этом используем правила дифференцирования функций локальных координат [10-13] ( $\partial/\partial\tilde{x}_j \rightarrow \partial/\partial x_j + (1/\kappa)\delta_{j3}\partial/\partial\xi$ ), тогда получим асимптотические разложения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IJ}^{(0)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), & \varepsilon_{I3}^{(0)} &= \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(0)}), & \varepsilon_{33}^{(0)} &= u_{3/3}^{(0)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(1)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}), & \varepsilon_{I3}^{(1)} &= \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(1)}), & \varepsilon_{33}^{(1)} &= u_{3/3}^{(1)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}), & \varepsilon_{I3}^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(2)}), & \varepsilon_{33}^{(2)} &= u_{3/3}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

и т.д.

здесь обозначены производные по локальной координате  $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial \xi$  и по глобальным координатам  $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial x_j$ .

Подставляя выражение (3.4) в закон Гука в системе (3.2), получаем асимптотическое разложение для напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa\sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(0)} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{C}_{IJK3}\varepsilon_{k3}^{(0)}, & \sigma_{i3}^{(0)} &= C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{C}_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)}, \\ \sigma_{IJ}^{(1)} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + \tilde{C}_{IJK3}\varepsilon_{k3}^{(1)}, & \sigma_{i3}^{(1)} &= C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + \tilde{C}_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(1)}, \\ \sigma_{IJ}^{(2)} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + \tilde{C}_{IJK3}\varepsilon_{k3}^{(2)}, & \sigma_{i3}^{(2)} &= C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + \tilde{C}_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(2)}, \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.3. Формулировка локальных задач колебаний пластины

Подставляя разложения (3.3), (3.4), (3.6) в уравнения установившихся колебаний и граничные условия системы (3.2), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa} \sigma_{i3/3}^{(0)} + (\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \sigma_{i3/3}^{(1)} + \rho \omega^2 u_i^{(0)}) + \kappa (\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \sigma_{i3/3}^{(2)} + \rho \omega^2 u_i^{(1)}) + \\ & + \kappa^2 (\sigma_{iJ,J}^{(2)} + \sigma_{i3/3}^{(3)} + \rho \omega^2 u_i^{(2)}) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} + \kappa \sigma_{i3}^{(1)} + \kappa^2 \sigma_{i3}^{(2)} + \dots = -\kappa^3 p_{\pm} \delta_{i3}, \quad \Sigma_T : u_i = u_i^{(0)} + \kappa u_i^{(1)} + \kappa^2 u_i^{(2)} + \kappa^3 u_i^{(3)} + \dots = u_{ei}.$$

Приравнивая в уравнениях равновесия члены при  $\kappa^{-1}$  к нулю, а при остальных степенях от  $\kappa$  к некоторым величинам  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ , не зависящим от  $\xi_i$ , получим рекуррентную последовательность локальных задач. Задача для нулевого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} & \sigma_{i3/3}^{(0)} = 0, \\ & \sigma_{i3}^{(0)} = C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(0)}, \\ & \varepsilon_{iJ}^{(0)} = \frac{1}{2} (u_{i,J}^{(0)} + u_{J,i}^{(0)}), \quad \varepsilon_{i3}^{(0)} = \frac{1}{2} (u_{3,i}^{(0)} + u_{i/3}^{(1)}), \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)}, \\ & \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(0)}] = 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0, \quad \langle u_i^{(1)} \rangle = 0; \end{aligned} \quad (3.9)$$

для первого приближения

$$\begin{aligned} & \sigma_{i3/3}^{(1)} + \sigma_{iJ,J}^{(0)} + \rho \omega^2 u_i^{(0)} = h_i^{(0)}, \\ & \sigma_{i3}^{(1)} = C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(1)}, \\ & \varepsilon_{iJ}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{i,J}^{(1)} + u_{J,i}^{(1)}), \quad \varepsilon_{i3}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{3,i}^{(1)} + u_{i/3}^{(2)}), \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}, \\ & \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(1)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(1)}] = 0, \quad [u_i^{(2)}] = 0, \quad \langle u_i^{(2)} \rangle = 0; \end{aligned} \quad (3.10)$$

для второго приближения

$$\begin{aligned} & \sigma_{i3/3}^{(2)} + \sigma_{iJ,J}^{(1)} + \rho \omega^2 u_i^{(1)} = h_i^{(1)}, \\ & \sigma_{i3}^{(2)} = C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(2)}, \\ & \varepsilon_{iJ}^{(2)} = \frac{1}{2} (u_{i,J}^{(2)} + u_{J,i}^{(2)}), \quad \varepsilon_{i3}^{(2)} = \frac{1}{2} (u_{3,i}^{(2)} + u_{i/3}^{(3)}), \quad \varepsilon_{33}^{(2)} = u_{3/3}^{(3)}, \\ & \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(2)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(2)}] = 0, \quad [u_i^{(3)}] = 0, \quad \langle u_i^{(3)} \rangle = 0; \end{aligned} \quad (3.11)$$

для третьего приближения

$$\begin{aligned}
\sigma_{i3/3}^{(3)} + \sigma_{ij,J}^{(2)} + \rho\omega^2 u_i^{(2)} &= h_i^{(2)}, \\
\sigma_{i3}^{(3)} &= C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(3)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(3)}, \\
\varepsilon_{ij}^{(3)} &= \frac{1}{2}(u_{i,J}^{(3)} + u_{J,i}^{(2)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(3)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(3)} + u_{I/3}^{(4)}), \quad \varepsilon_{33}^{(3)} = u_{3/3}^{(4)}, \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(3)} &= -p_{\pm} \delta_{i3}; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(3)}] = 0, \quad [u_i^{(4)}] = 0, \quad \langle u_i^{(4)} \rangle = 0;
\end{aligned} \tag{3.12}$$

и т.д. Здесь обозначена операция осреднения по толщине пластины

$$\langle u_i^{(4)} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(3)} d\xi. \tag{3.13}$$

Уравнения установившихся колебаний (3.8) после введения функций  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ , принимают вид

$$h_i^{(0)} + \kappa h_i^{(1)} + \kappa^2 h_i^{(2)} + \dots = 0. \tag{3.14}$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (3.9) – являются функции  $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ , они зависят от локальных координат  $\xi_l$  и входных данных этой задачи – перемещений  $u_j^{(0)}(x_j)$ . Решением задачи (3.10) являются функции  $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ , а  $u_j^{(1)}, \sigma_{ij}^{(0)}$  в этой задаче – входные данные. В задаче (3.11) функции  $u_j^{(3)}, \varepsilon_{kl}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$  – неизвестные, а  $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$  – входные данные и т.д.

### 3.4 Решение задачи нулевого приближения

Ввиду того, что задачи (3.9)-(3.11) являются одномерными по локальной переменной  $\xi$ , их решение можно найти аналитически. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче (3.9) имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \forall \xi : -0.5 < \xi < 0.5. \tag{3.15}$$

Подставляя сюда выражение (3.7) для  $\sigma_{i3}^{(0)}$ , получим

$$C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(0)} = 0. \tag{3.16}$$

Выразим из этой системы уравнений деформации  $\varepsilon_{k3}^{(0)}$

$$\varepsilon_{k3}^{(0)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{3.17}$$

где  $C_{i3k3}^{-1}$  матрица компонент, обратная к  $C_{i3k3}$ . Подставляя в (3.17) выражения для деформаций  $\varepsilon_{k3}^{(0)}$  из задачи (3.9), после интегрирования с учетом условий  $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$ , находим перемещения  $u_i^{(1)}$

$$u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)} + 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \left( \int_{-0.5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right) - \int_{-0.5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi, \quad (3.18)$$

$$u_3^{(1)} = \varepsilon_{KL}^{(0)} \left( \int_{-0.5}^{\xi} C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right) - \int_{-0.5}^{\xi} C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi,$$

здесь учтено, что деформации  $\varepsilon_{KL}^{(0)}(x_J)$ , согласно (3.9), не зависят от  $\xi$ .

Подставляя выражение (3.17) в первую группу соотношений (3.7), находим, что напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$ , в отличие от  $\sigma_{i3}^{(0)}$ , являются ненулевыми

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad (3.19)$$

$$C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{Ijk3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL}. \quad (3.20)$$

### 3.5 Решение задачи первого, второго и третьего приближений

Решение уравнений установившихся колебаний (3.10), (3.11) и (3.12) вместе с граничными условиями на  $\Sigma_\sigma$  и  $\xi = -0.5$  имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = - \int_{-0.5}^{\xi} (\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \rho \omega^2 u_i^{(0)}) d\xi + h_i^{(0)} (\xi + 0.5), \quad (3.21)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = - \int_{-0.5}^{\xi} (\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \rho \omega^2 u_i^{(1)}) d\xi + h_i^{(1)} (\xi + 0.5), \quad (3.22)$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -p_- \delta_{i3} - \int_{-0.5}^{\xi} (\sigma_{iJ,J}^{(2)} + \rho \omega^2 u_i^{(2)}) d\xi + h_i^{(2)} (\xi + 0.5). \quad (3.23)$$

Условия существования решения (3.21)-(3.23) задач (3.10)-(3.12), удовлетворяющих граничным условиям  $\sigma_{i3}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(2)} = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(1)} = -p_+$  на внешней поверхности  $\xi = 0.5$ , приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$

$$h_i^{(0)} = \langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \rangle + \langle \rho \rangle \omega^2 u_i^{(0)}, \quad (3.24)$$

$$h_i^{(1)} = \langle \sigma_{ij,j}^{(1)} \rangle + \omega^2 \langle \rho u_i^{(1)} \rangle, \quad (3.25)$$

$$h_i^{(2)} = \langle \sigma_{ij,j}^{(2)} \rangle + \omega^2 \langle \rho u_i^{(2)} \rangle - \Delta p \delta_{i3}, \quad \Delta p = p_+ - p_-. \quad (3.26)$$

т.к.  $u_i^{(0)}$  - не зависит от  $\xi$ . С учетом формул (3.24)-(3.26), напряжения  $\sigma_{i3}^{(m)}$  (3.21)-(3.23) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{ij,j}^{(0)} \rangle - \sigma_{ij,j}^{(0)} + (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_i^{(0)}) d\xi, \quad (3.27)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{ij,j}^{(1)} \rangle - \sigma_{ij,j}^{(1)} + \omega^2 (\langle \rho u_i^{(1)} \rangle - \rho u_i^{(1)})) d\xi, \quad (3.28)$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -(p_- + \Delta p(\xi + 0.5)) \delta_{i3} + \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{ij,j}^{(2)} \rangle - \sigma_{ij,j}^{(2)} + \omega^2 (\langle \rho u_i^{(2)} \rangle - \rho u_i^{(2)})) d\xi. \quad (3.29)$$

Если подставить выражения (3.19) в (3.27), то с учетом (3.15) получим для напряжений  $\sigma_{i3}^{(1)}$  следующую формулу

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \varepsilon_{KL,J}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi + \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_i^{(0)} d\xi, \quad (3.30)$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_3^{(0)} d\xi.$$

Заметим, что в отличие от квазистатической задачи [15], для установившихся колебаний напряжение  $\sigma_{33}^{(1)}$  отлично от нуля. Выразим деформации  $\varepsilon_{k3}^{(1)}$  из 4-й группы соотношений (3.7), тогда с учетом формул (3.27), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k3}^{(1)} = & -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + \varepsilon_{KL,J}^{(0)} C_{k3i3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi + \\ & + \omega^2 C_{k3i3}^{-1} u_i^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \end{aligned} \quad (3.31)$$

Если подставить теперь (3.31) в 3-ю группу соотношений (3.7), то найдем оставшиеся напряжения 1-го приближения

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + N_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 G_{Iji} u_i^{(0)}, \quad N_{IJKLM}^{(0)} = C_{Ijk3} C_{k3P3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{PMKL}^{(0)} \rangle - C_{PMKL}^{(0)}) d\xi, \quad (3.32)$$

$$G_{Iji} = C_{Ijk3} C_{k3i3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi.$$

Деформации  $\varepsilon_{KL}^{(1)}$  с учетом формул (3.10), (3.18) можно представить в виде

$$\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi \eta_{KL} + \Phi_{KLMNS} \varepsilon_{MN,S}^{(0)}, \quad (3.33)$$

$$\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)}, \quad (3.34)$$

$$\Phi_{KLMNS}(\xi) = \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) - \langle \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) \rangle,$$

$$\tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) = - \int_{-0.5}^{\xi} (C_{K3i3}^{-1} \delta_{SL} + C_{L3i3}^{-1} \delta_{SK}) C_{i3MN} d\xi. \quad (3.35)$$

С учетом формул (3.33), выражения (3.32) принимают вид

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = \xi C_{IJKL}^{(0)} \eta_{KL} + \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 G_{IJ} u_i^{(0)}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = N_{IJKLM}^{(0)} + \Phi_{IJKLM}.$$

Вычислим перемещение  $u_i^{(2)}$  второго приближения, используя третью формулу (3.7), и пятую формулу в (3.5), тогда получим

$$u_{I/3}^{(2)} = -u_{3,I}^{(1)} + 2C_{k3i3}^{-1} (\sigma_{IJ}^{(1)} - C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)}),$$

$$u_{I/3}^{(2)} = -u_{3,I}^{(1)} + 2C_{I3i3}^{-1} (\sigma_{i3}^{(1)} - C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)}),$$

После интегрирования этого выражения с учетом условий  $\langle u_i^{(2)} \rangle = 0$ , находим перемещения  $u_i^{(2)}$

$$u_I^{(2)} = \langle \int_{-0.5}^{\xi} u_{3,I}^{(1)} d\xi \rangle - \int_{-0.5}^{\xi} u_{3,I}^{(1)} d\xi - 2 \langle \int_{-0.5}^{\xi} C_{k3i3}^{-1} (\sigma_{IJ}^{(1)} - C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)}) d\xi \rangle + 2 \int_{-0.5}^{\xi} C_{k3i3}^{-1} (\sigma_{IJ}^{(1)} - C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)}) d\xi$$

$$u_I^{(2)} = \langle \int_{-0.5}^{\xi} u_{3,I}^{(1)} d\xi \rangle - \int_{-0.5}^{\xi} u_{3,I}^{(1)} d\xi - 2 \langle \int_{-0.5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} (\sigma_{i3}^{(1)} - C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)}) d\xi \rangle + 2 \int_{-0.5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} (\sigma_{i3}^{(1)} - C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)}) d\xi.$$

### 3.6 Осредненные уравнения установившихся колебаний многослойных пластин.

Подставляя выражения (3.24)-(3.25) в асимптотическое разложение (3.14) уравнений равновесия, получим

$$\begin{aligned} <\sigma_{ij,J}^{(0)}> + <\rho> \omega^2 u_i^{(0)} + \kappa (<\sigma_{ij,J}^{(1)}> + \omega^2 <\rho u_i^{(1)}>) + \\ & + \kappa^2 (<\sigma_{ij,J}^{(2)}> + \omega^2 <\rho u_i^{(2)}> - \Delta p \delta_{i3}) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Домножим уравнения системы (3.8) на  $\xi \kappa$  и проинтегрируем их по толщине, тогда получим следующее вспомогательное уравнение

$$\begin{aligned} \kappa (<\xi \sigma_{ij,J}^{(0)}> + \omega^2 <\rho u_i^{(1)} \xi> - <\sigma_{i3}^{(1)}>) + \\ & + \kappa^2 (<\xi \sigma_{ij,J}^{(1)}> + \omega^2 <\rho u_i^{(2)} \xi> - <\sigma_{i3}^{(2)}>) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

Здесь учтено, что  $<\xi \sigma_{i3/3}^{(1)}> = - <\sigma_{i3}^{(1)}>$ ,  $<\xi \sigma_{i3/3}^{(2)}> = - <\sigma_{i3}^{(2)}>$  в силу граничных условий на  $\Sigma_{\pm 3}$ :  $\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \sigma_{i3}^{(1)} = 0$ .

Введем обозначения для усилий  $T_{ij}$ , моментов  $M_{ij}$  и перерезывающих сил  $Q_i$  в пластине

$$\begin{aligned} T_{ij} &= <\sigma_{ij}^{(0)}> + \kappa <\sigma_{ij}^{(1)}> + \dots, \\ Q_i &= \kappa <\sigma_{i3}^{(1)}> + \kappa^2 <\sigma_{i3}^{(2)}> + \dots, \\ M_{ij} &= \kappa <\xi \sigma_{ij}^{(0)}> + \kappa^2 <\xi \sigma_{ij}^{(1)}> + \dots, \end{aligned} \quad (3.39)$$

а также обозначения для обобщенных перемещений пластины

$$\begin{aligned} \bar{\rho} U_i &= <\rho> u_i^{(0)} + \kappa <\rho u_i^{(1)}> + \kappa^2 <\rho u_i^{(2)}> + \dots \\ \bar{\rho} \Gamma_i &= \kappa <\rho u_i^{(1)} \xi> + \kappa^2 <\rho u_i^{(2)} \xi> + \dots \end{aligned}$$

где  $\bar{\rho} = <\rho>$ .

Если в этих выражениях сохранить только главные члены асимптотических разложений, то, с учетом (3.18), получим

$$\begin{aligned} U_i &= u_i^{(0)} \\ \bar{\rho} \Gamma_i &= \kappa <\rho u_i^{(1)} \xi> = -R u_{3,i}^{(0)} + \varepsilon_{KL}^{(0)} R_{IKL}, \\ R_{IKL} &= 2\kappa <\int_{-0.5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi> <\rho \xi> - 2\kappa <\rho \xi \int_{-0.5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi>, \end{aligned}$$

$$R = \kappa < \rho \xi^2 > .$$

Тогда уравнения (3.37)-(3.38) можно записать в традиционном для теории пластин виде уравнений равновесия и уравнений моментов при установившихся колебаниях

$$\begin{aligned} T_{IJ,J} + \bar{\rho} \omega^2 U_I &= 0, \\ Q_{J,J} + \bar{\rho} \omega^2 U_3 &= \Delta \bar{p}, \\ M_{IJ,J} - Q_I + \bar{\rho} \omega^2 \Gamma_I &= 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

Это и есть искомые осредненные уравнения установившихся колебаний многослойной пластины, здесь обозначено  $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p$ . Эти уравнения отличаются от традиционных уравнений колебаний пластин [10] только наличием слагаемого  $\varepsilon_{KL}^{(0)} R_{IKL}$  в коэффициентах  $\Gamma_I$ .

### 3.7 Осредненные определяющие соотношения теории пластин

Подставляя выражения (3.19), (3.30), (3.36) для напряжений  $\sigma_{IJ}^{(0)}, \sigma_{IJ}^{(1)}, \sigma_{I3}^{(1)}$  в интегралы формул (3.39), получим

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} + K_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 \bar{G}_{IJ} u_i^{(0)} \quad (3.41)$$

$$M_{IJ} = B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 \hat{G}_{IJ} u_i^{(0)} \quad (3.42)$$

$$Q_I = K_{IJKL} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \omega^2 \bar{G} u_I^{(0)} + \kappa^2 < \sigma_{I3}^{(2)} > \quad (3.43)$$

где обозначены тензоры осредненных упругих констант пластины

$$\bar{C}_{IJKL} = < C_{IJKL}^{(0)} > = < C_{IJKL} > - < C_{IK3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} >, B_{IJKL} = \kappa < \xi C_{IJKL}^{(0)} >, \quad (3.44)$$

$$K_{IJKLM} = \kappa < \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} >, \quad (3.44)$$

$$K_{IJKL} = \kappa < \int_{-0.5}^{\xi} (< C_{IJKL}^{(0)} > - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi >, \quad (3.44)$$

$$D_{IJKL} = \kappa^2 < \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} >, \quad (3.44)$$

$$\bar{K}_{IJKLM} = \kappa^2 < \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} >, \quad (3.44)$$

$$\bar{G}_{Iji} = \kappa \langle G_{Iji} \rangle = \kappa \langle C_{Ijk3} C_{k3i3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle,$$

$$\hat{G}_{Iji} = \kappa^2 \langle \xi G_{Iji} \rangle = \kappa^2 \langle C_{Ijk3} C_{k3i3}^{-1} \xi \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle,$$

$$\bar{G} = \kappa \langle \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle.$$

В частном случае, когда выполняются условия: 1) слои пластины расположены симметрично относительно плоскости  $\xi = 0$ , и 2) толщины всех слоев одинаковы, функции вида  $\langle C_{PMKL}^{(0)} \rangle - C_{PMKL}^{(0)}$  будут симметричными относительно плоскости, а функции  $\int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{PMKL}^{(0)} \rangle - C_{PMKL}^{(0)})$  - антисимметричными,

поэтому следующие функции являются нулевыми

$$B_{IJKL} = 0, \quad K_{IJKLM} = 0, \quad K_{IJKL} = 0, \quad \bar{G}_{Iji} = 0 \quad (3.45)$$

и определяющие соотношения (3.41)-(3.43) принимают более простой вид

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad (3.46)$$

$$M_{Ij} = D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 \hat{G}_{Iji} u_i^{(0)},$$

который, для моментов имеет отличный вид от классической теории пластин Кирхгофа-Лява и Тимошенко [15] из-за второго и третьего слагаемых.

### 3.8 Осредненные кинематические соотношения теории пластин

В систему осредненных определяющих соотношений (3.41)-(3.43) входят деформации срединной поверхности  $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ , кривизны  $\eta_{KL}$  и градиенты деформаций  $\varepsilon_{KL,N}^{(0)}$ , которые зависят от 3 функций  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$  глобальных переменных  $x_I$ ,

$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2} (u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad (3.47)$$

$$\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)}.$$

### 3.9 Осредненная система уравнений для установившихся колебаний многослойных пластин

Подставляя далее выражения (3.41)-(3.43) и (3.47) в систему (3.40), получаем систему относительно 3 неизвестных функций  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL} u_{K,LJ}^{(0)} - B_{IJKL} u_{3,KLJ}^{(0)} + K_{IJKLM} u_{K,LMJ}^{(0)} + \omega^2 (\bar{G}_{Iji} + \langle \rho \rangle \delta_{i3}) u_{i,J}^{(0)} = 0, \\ B_{IJKL} u_{K,LJI}^{(0)} - D_{IJKL} u_{3,KLJI}^{(0)} + \bar{K}_{IJKLM} u_{K,LMJI}^{(0)} + \omega^2 \hat{G}_{Iji} u_{i,IJ}^{(0)} - \bar{\rho} \omega^2 (R u_{3,II}^{(0)} - u_{K,LI}^{(0)} R_{IKL} + u_3^{(0)}) = \Delta \bar{p} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Эта система имеет четвертый порядок относительно прогиба  $u_3^{(0)}$ , как в классической теории пластин Кирхгофа-Лява, и третий порядок производных относительно продольных перемещений  $u_I^{(0)}$ , чем отличается от теории Кирхгофа-Лява. Отличается она также наличием слагаемых при  $\bar{G}_{Iji}$ ,  $R_{IKL}$  и  $\hat{G}_{Iji}$ . Разработанная теория многослойных пластин близка по характеру распределения перемещений по толщине к теории ломаной нормали Э.И.Григолюка [1], поскольку перемещения согласно (3.3) и (3.17) с точностью до членов 1-го порядка малости имеют вид (3.18).

Нелинейная зависимость перемещений  $u_k$  от  $\xi$  обусловлена различием модулей упругости для разных слоев пластины.

### 3.10 Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в пластине

После того как решены осредненные уравнения (3.48), и найдены функции  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$ , можно вычислить деформации (3.47), а затем напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$  по формулам (3.19). Сдвиговые напряжения  $\sigma_{I3}^{(0)}$  и поперечное напряжение  $\sigma_{33}^{(0)}$ , как было установлено, в пластине тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются у следующего члена асимптотического разложения -  $\sigma_{I3}^{(1)}$ , согласно (3.30). Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение - это значение  $\sigma_{33}^{(1)}$ , которое

вычисляется согласно (3.30), а следующие члены разложения -  $\sigma_{33}^{(2)}$  и  $\sigma_{33}^{(3)}$  - по (3.28), (3.29):

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & \kappa \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_3^{(0)} d\xi + \kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(1)} + (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_i^{(1)}) d\xi + \\ & + \kappa^3 (-p_- - \Delta p(\xi + 0.5) + \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(2)} + \omega^2 (\langle \rho u_i^{(2)} \rangle - \rho u_i^{(2)})) d\xi) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{I3} = & \kappa \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(0)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(0)} + (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_I^{(0)}) d\xi + , \\ & + \kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(1)} + \omega^2 (\langle \rho u_I^{(1)} \rangle - \rho u_I^{(1)})) d\xi \end{aligned} \quad (3.50)$$

Таким образом, разработанная теория тонких пластин позволяет найти все шесть компонент тензора напряжений.

## ГЛАВА 4 МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

### 4.1 Изгибные колебания симметричной многослойной тонкой пластины

Рассмотрим в качестве примера классическую задачу об установившихся изгибных колебаниях многослойной пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного давления. Пусть слои пластины расположены симметрично относительно плоскости  $\xi = 0$ , поэтому имеют место соотношения (3.45). В этом случае

$$u_I^{(0)} = 0, \varepsilon_{KL}^{(0)} = 0, T_{IJ} = 0, \sigma_{IJ}^{(0)} = 0, \quad (4.1)$$

и ненулевыми неизвестными функциями являются только

$$u_3^{(0)}(x), M_{11}(x), Q_1(x), \quad (4.2)$$

здесь  $x = x_1$  - безразмерная продольная координата пластины. Тождественно ненулевые уравнения колебаний (3.40), определяющие соотношения (3.42) и кинематические соотношения (3.47) принимают вид

$$\begin{aligned} Q_{1,1} + \bar{\rho}\omega^2 u_3^{(0)} &= \Delta\bar{p}, \\ M_{11,1} - Q_1 - \omega^2 R u_{3,1}^{(0)} &= 0 \\ M_{11} &= D_{1111}\eta_{11} + \omega^2 \hat{G}_{113} u_3^{(0)}, \\ \eta_{11} &= -u_{3,11}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\hat{G}_{113} = \kappa^2 \langle C_{11k3} C_{k333}^{-1} \xi \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle$ ,

Исключая из первых двух уравнений этой системы перерезывающую силу, получаем

$$\begin{aligned} M_{11,11} + \omega^2 (\bar{\rho} u_3^{(0)} - R u_{3,11}^{(0)}) &= \Delta\bar{p} \\ M_{11} &= -D_{1111} u_{3,11}^{(0)} + \omega^2 \hat{G}_{113} u_3^{(0)}, \end{aligned}$$

Отсюда получаем окончательное дифференциальное уравнение колебаний многослойной пластины

$$D_{1111}u_{3,111}^{(0)} + \omega^2 R(1 - \hat{G}_{113}/R)u_{3,11}^{(0)} - \omega^2 \bar{\rho}u_3^{(0)} + \Delta\bar{p} = 0 \quad (4.4)$$

Это уравнение практически совпадает с классическим уравнением изгибных колебаний пластины Кирхгофа-Лява и отличается от него только членом  $\hat{G}_{113}/R$

$$\hat{G}_{113}/R = \frac{\kappa}{\langle \rho \xi^2 \rangle} < C_{11k3} C_{k333}^{-1} \xi \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi > \quad (4.5)$$

который мал по сравнению с 1. Таким образом, разработанная асимптотическая теория колебаний многослойных пластин в частном случае колебаний симметричных пластин приводит к хорошо известному уравнению колебаний пластин Кирхгофа-Лява.

Рассмотрим решение уравнения (4.4) вместе с граничными условиями шарнирного закрепления торцов пластины

$$x=0 \quad u \quad x=1: \quad u_3^{(0)} = 0, \quad u_{3,11}^{(0)} = 0. \quad (4.6)$$

Для случая  $\Delta\bar{p} = 0$  решение задачи (3.18), (4.6) представляет собой собственные колебания пластины  $u_3^{(0)} = W_n \sin(\pi n x)$ , где  $u_3^{(0)} = W_n \sin(\pi n x)$  - амплитуда,  $n=1,2,3,\dots$ . Частота  $\omega$  в данном случае является собственной частотой  $\omega_n$  колебаний пластины и вычисляется по формуле:

$$\omega_n^2 = (\pi n)^4 D_{1111} / (\bar{\rho} + \pi^2 n^2 (R - \hat{G}_{113})). \quad (4.7)$$

Напряжения  $\sigma_{II}^{(0)}, \sigma_{k3}^{(0)}$  нулевого приближения, согласно (3.15) и (4.1) являются нулевыми, а напряжения 1-го и 2-го приближений, согласно (3.36), (3.30) и (3.28) в данной задаче имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{II}^{(1)} &= -\xi C_{II11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)} + \omega^2 G_{II3} u_3^{(0)}, \\ \sigma_{I3}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_{33}^{(1)} &= u_3^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 d\xi, \\ \sigma_{I3}^{(2)} &= -u_{3,111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi + \\ &+ \omega^2 u_3^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle G_{II3} \rangle - G_{II3}) d\xi + \omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \xi \rangle - \rho \xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$+\omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle G_{IJ3} \rangle - G_{IJ3}) d\xi - \omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \xi \rangle - \rho \xi) d\xi$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = 0,$$

$$\sigma_{33}^{(3)} = \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(2)} + \omega^2 (\langle \rho u_3^{(2)} \rangle - \rho u_3^{(2)})) d\xi$$

т.к.  $u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)}$ ,  $u_2^{(1)} = u_3^{(1)} = 0$ , согласно (3.18).

Тогда изгибные напряжения, напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения, согласно (3.6), при сохранении главных членов в асимптотических разложениях, вычисляются по формулам

$$\sigma_{IJ} = -\kappa (\xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)} + \omega^2 G_{IJ3} u_3^{(0)}),$$

$$\sigma_{I3} = -\kappa^2 u_{3,111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi +$$

$$+\kappa^2 \omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle G_{IJ3} \rangle - G_{IJ3}) d\xi - \kappa^2 \omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \xi \rangle - \rho \xi) d\xi \quad (4.9)$$

$$\sigma_{33} = \kappa \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_3^{(0)} d\xi -$$

$$-\kappa^3 (p_- + \Delta p(\xi + 0.5)) - \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{31,1}^{(2)} \rangle - \sigma_{31,1}^{(2)}) d\xi - \omega^2 \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho u_3^{(2)} \rangle - \rho u_3^{(2)}) d\xi,$$

$$\sigma_{31,1}^{(2)} = -u_{3,1111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} [\langle \sigma^{(2)} \rangle - \sigma^{(2)}] d\xi +$$

$$+\omega u_{3,11}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} \left[ \langle \int_{-0.5}^{\xi} (\langle G_{113} \rangle - G_{113}) d\xi \rangle - \int_{-0.5}^{\xi} (\langle G_{113} \rangle - G_{113}) d\xi \right] d\xi -$$

$$-\omega^2 u_{3,11}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} \left[ \langle \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi \rho \rangle - \xi \rho) d\xi \rangle - \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi \rho \rangle - \xi \rho) d\xi \right] d\xi,$$

$$\sigma^{(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \xi C_{1111}^{(0)} \rangle - \xi C_{1111}^{(0)}) d\xi.$$

## 4.2 Собственные колебания симметричной многослойной пластины

Для анализа точности асимптотической теории многослойных пластин проведем сравнение результатов расчетов напряжений по формулам (4.9) с результатами расчетов по точной трехмерной теории упругости. Для нахождения численного решения по трехмерной теории используем программный конечно-элементный пакет ANSYS, с тетраэдральным 10-ти узловым конечным элементом SOLID187. Пластина в этом случае рассматривалась как трехмерное тело (параллелепипед), торцы которого  $x=0$  и  $x=1$  были шарнирно закреплены, внешние поверхности  $\xi = 0.5$ ,  $\xi = -0.5$  полагались свободными, а боковые грани  $x_2 = \pm b/(2L)$  ( $b$ - ширина пластины) были защемлены со свободным скольжением:  $u_2 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{13} = 0$ . Пластина состояла из 3-х слоев с симметричным их расположением относительно срединной плоскости (рисунок 2): толщина средней пластины была выбрана в 2 раза большей, чем толщина внешних слоев. Числа  $\kappa = h/L$  и  $b/L$  были выбраны равными:  $\kappa = b/L = 0.04$ , что обеспечивало условие "тонкости" пластины. Материалы слоёв были выбраны ортотропными, с главными осями ортотропии совпадающими с осями симметрии пластины, значения упругих характеристик слоев соответствовали 2-м типам стеклопластика и приведены в таблице 4.1 для внешних слоев и в таблице 4.2 для внутреннего слоя.

Таблица 4.1 – Упругие характеристики материала внешних слоев

$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$E_3$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{31}$	$\nu_{23}$
14	14	5,3	1,8	0,75	0,75	0,08	0,14	0,15

Таблица 4.2 – Упругие характеристики материала внутреннего слоя

$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$E_3$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{31}$	$\nu_{23}$
21	21	7,95	2,7	1,125	1,125	0,12	0,21	0,225

В процессе проведения трехмерных конечно-элементных расчетов с помощью пакета ANSYS была установлена существенная зависимость решения от использованной при расчетах конечно-элементной сетки. В начале расчеты проводились с равномерной КЭ сеткой с числом элементов по толщине пластины равным  $N=12$  (что соответствует минимум 3-м КЭ по толщине на каждый из 4-х слоев пластины). Общее число КЭ для всей пластины в такой сетке составило 492544 (693634 узла). Однако точность решения, получаемого на такой сетке, оцениваемая по отклонению от решения (4.9), полученного по с помощью асимптотической теории (далее АТ-решение), оказалась крайне не удовлетворительной.

Для повышения точности КЭ-решения оказалось необходимым существенное измельчение сетки с  $N=80$  КЭ по толщине пластины. Однако при этом резко возрос общий размер КЭ – примерно до 50 млн. КЭ, что сделало затруднительным не только решение задачи на персональном компьютере, но и само хранение КЭ сетки в оперативной памяти компьютера. Для того, чтобы избежать необходимости применения параллельных вычислений, было предложено создать специальную неравномерную КЭ-сетку, для которой сгущение реализуется только вблизи 9 нормальных сечений пластины (рисунок 4.1), названных "опорными", для остальных частей пластины использовалась существенно более крупная сетка. Так для  $N=12$  число КЭ по толщине и ширине пластины вне областей опорных сечений составляло 4 (9 узлов) (рисунок 4.1).

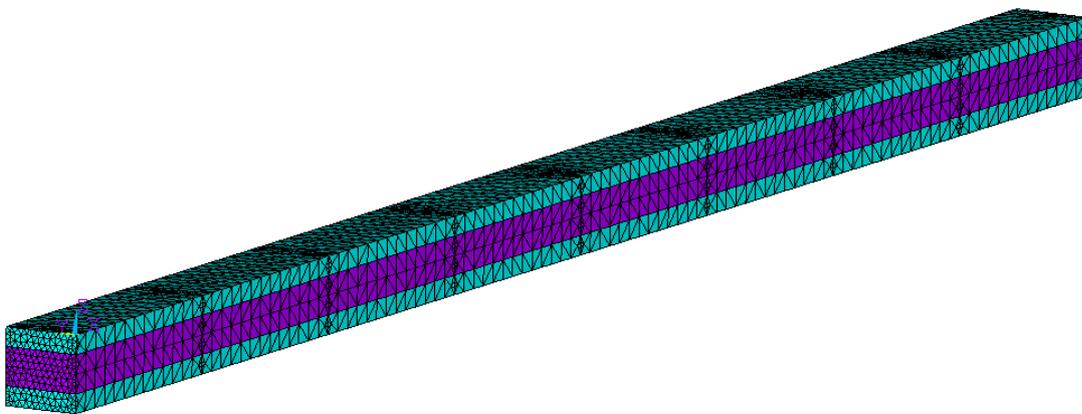


Рисунок 4.1 – Неравномерная конечно-элементная сетка трехслойной пластины, использованная в расчетах.

Для сравнения АТ-решения и решения ANSYS число конечных элементов по толщине и ширине пластины в опорных сечениях, было выбрано равным  $N=12$  (по 3 элемента на слой). Общее число КЭ в такой неравномерной сетки оставалось относительно не большим - 24677 (число узлов – 38735), что позволяло быстро проводить расчеты на этой сетке.

Сравнение распределений напряжений, рассчитанных по АТ -решению с ANSYS- решением, приведено на рисунках 2 - 5 для 2-х различных сечений  $x = x_1 = [0,25; 0,5]$ , ( $y = x_2, z = x_3$ ).

На этих рисунках, как и ранее, поперечная безразмерная координата  $\xi$  изменяется в пределах  $[-0,5; 0,5]$ : значение  $\xi = 0,5$  – соответствует верхней плоскости; а значения  $\xi = \pm 0,25$  – соответствуют плоскостям стыка слоев. Так как материалы слоев выбраны ортотропными, то два касательных напряжения отсутствуют во всех слоях:  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ .

Распределения остальных 4-х напряжений  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ , соответствующие низшей частоте собственных колебаний, рассчитанные с помощью разработанной асимптотической теории (АТ) по формулам (4.9) и с помощью пакета ANSYS для сетки с  $N=12$  достаточно хорошо совпадают (рисунки 4.2-4.5).

Сравнение низших собственных частот полученных с помощью АТ-решения (4.7) и ANSYS приведено в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Низшие собственные частоты

Частота, Гц	
АТ-решение	ANSYS
41,9	42,2
158,9	162,9
330,7	347,1

Решение, показанное на рисунке 3б, отражает тот факт, что теоретически нулевое распределение касательного напряжения  $\delta(\sigma_{13})$  в центральном сечении

$x_1 = 0,5$  при численной КЭ-реализации близко к машинному нулю, максимальное значение отклонений от нуля, есть величина примерно на 3 порядка меньшая, чем максимальное значение касательных напряжений в сечении  $x_1 = 0,25$  (рисунок 4.2а).

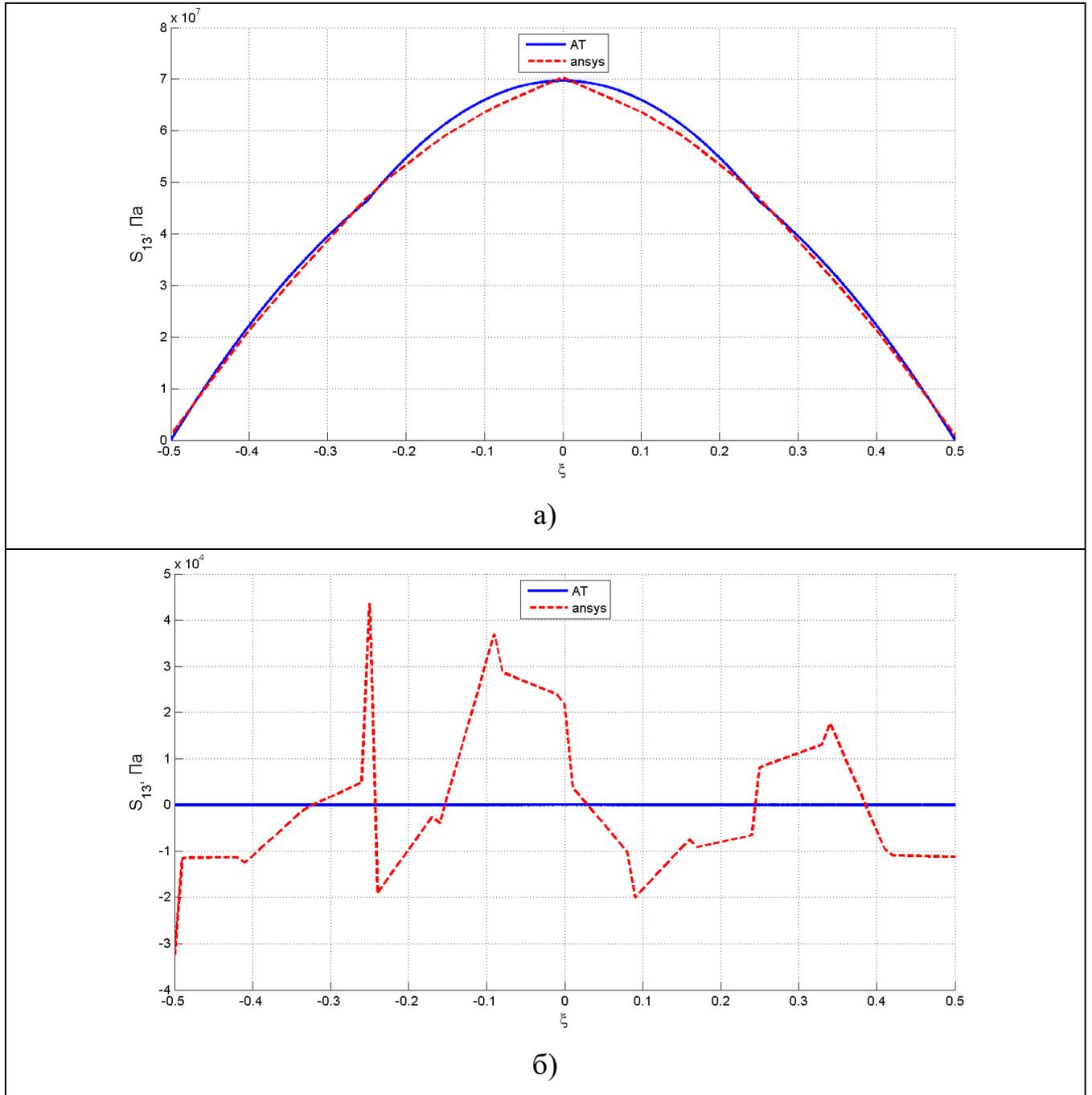


Рисунок 4.2 – Распределение напряжения  $\sigma_{13}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS:

а –  $x_1 = 0,25$ ; б –  $x_1 = 0,5$

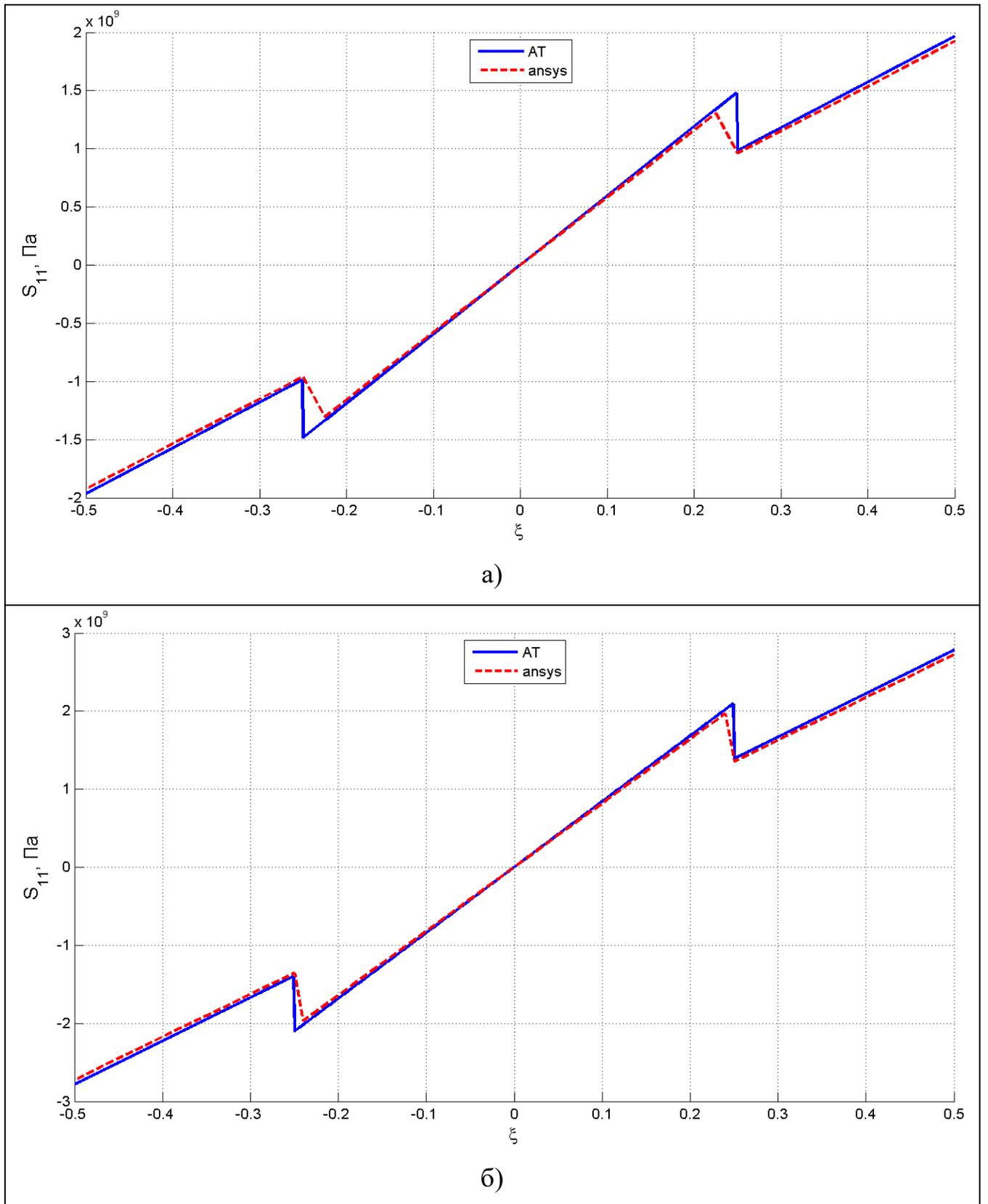


Рисунок 4.3 – Распределение изгибного напряжения  $\sigma_{11}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS:

а –  $x_1 = 0,25$ ; б –  $x_1 = 0,5$

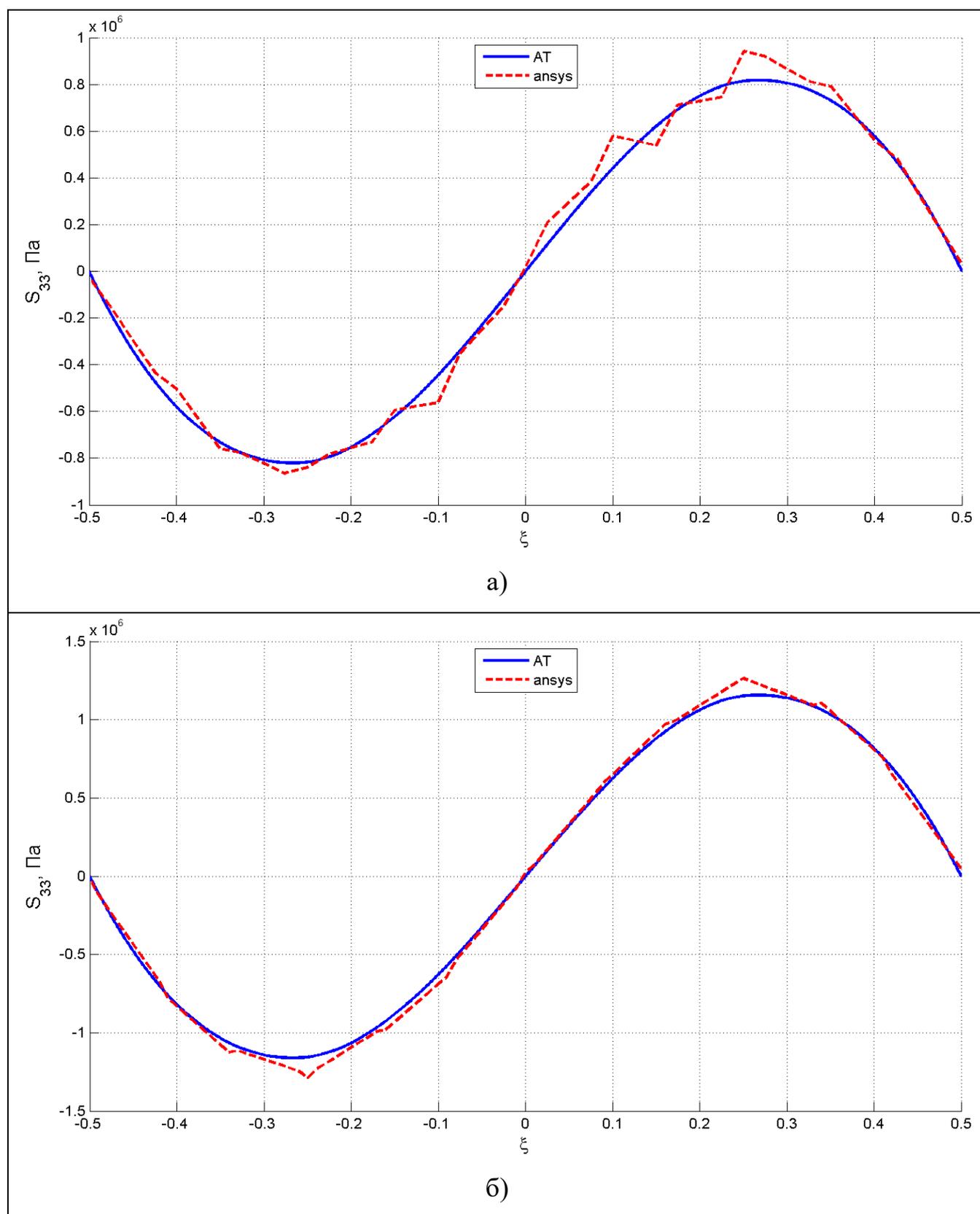


Рисунок 4.4 – Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{33}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS: а –  $x_1 = 0,25$ ; б –  $x_1 = 0,5$

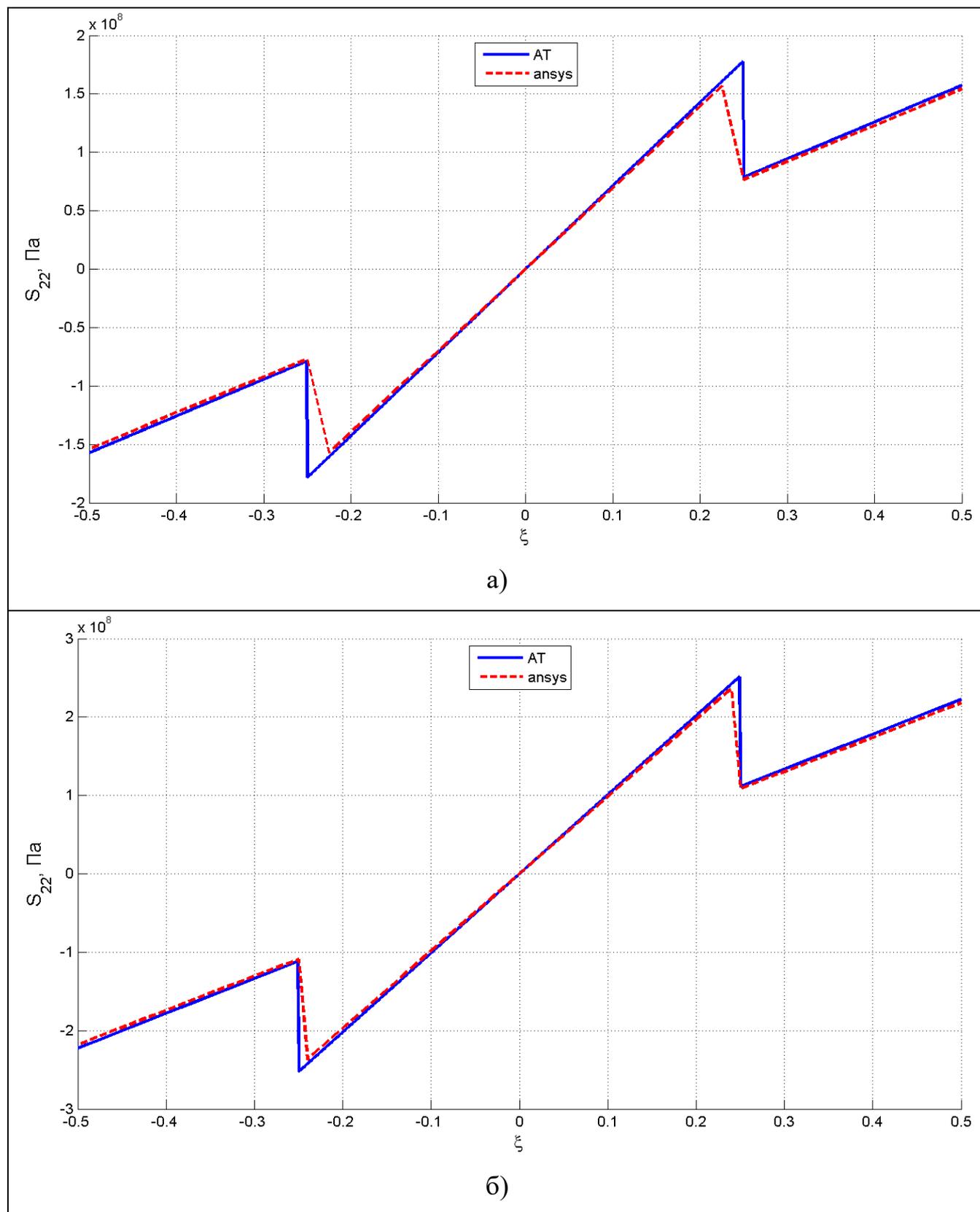


Рисунок 4.5 – Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS: а –  $x_1 = 0,25$ ; б –  $x_1 = 0,5$

### 4.3 Вынужденные изгибные колебания симметричной многослойной пластины

Рассмотрим пластину из 3-х слоев на внешнюю поверхность  $\xi = 0,5$  которой действует давление изменяющееся по гармоническому закону с амплитудой  $\Delta\bar{p} = 1$  МПа и частотой 15 Гц. Также как и в задаче о собственных колебаниях пластина рассматривалась как трехмерное тело (параллелепипед), торцы которого  $x=0$  и  $x=1$  были шарнирно закреплены, внешняя поверхность  $\xi = -0,5$  полагались свободными, а боковые грани  $x_2 = \pm b/(2L)$  ( $b$ - ширина пластины) были защемлены со свободным скольжением:  $u_2 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{13} = 0$ .

Пластина состояла из 3-х слоев с симметричным их расположением относительно срединной плоскости (рисунок 4.1): толщина средней пластины была выбрана в 2 раза большей, чем толщина внешних слоев. Числа  $\kappa = h/L$  и  $b/L$  были выбраны равными:  $\kappa = b/L = 0.04$ , что обеспечивало условие "тонкости" пластины.

Материалы слоёв были выбраны ортотропными, с главными осями ортотропии совпадающими с осями симметрии пластины, значения упругих характеристик слоев соответствовали 2-м типам стеклопластика и приведены в таблице 1.

На рисунках 4.6 – 4.9 представлены распределения напряжений по толщине пластины в двух сечениях, для случая вынужденных колебаний под действием внешнего давления с амплитудой  $\Delta\bar{p} = 1 \text{e}6$  Па и частотой 15 Гц.

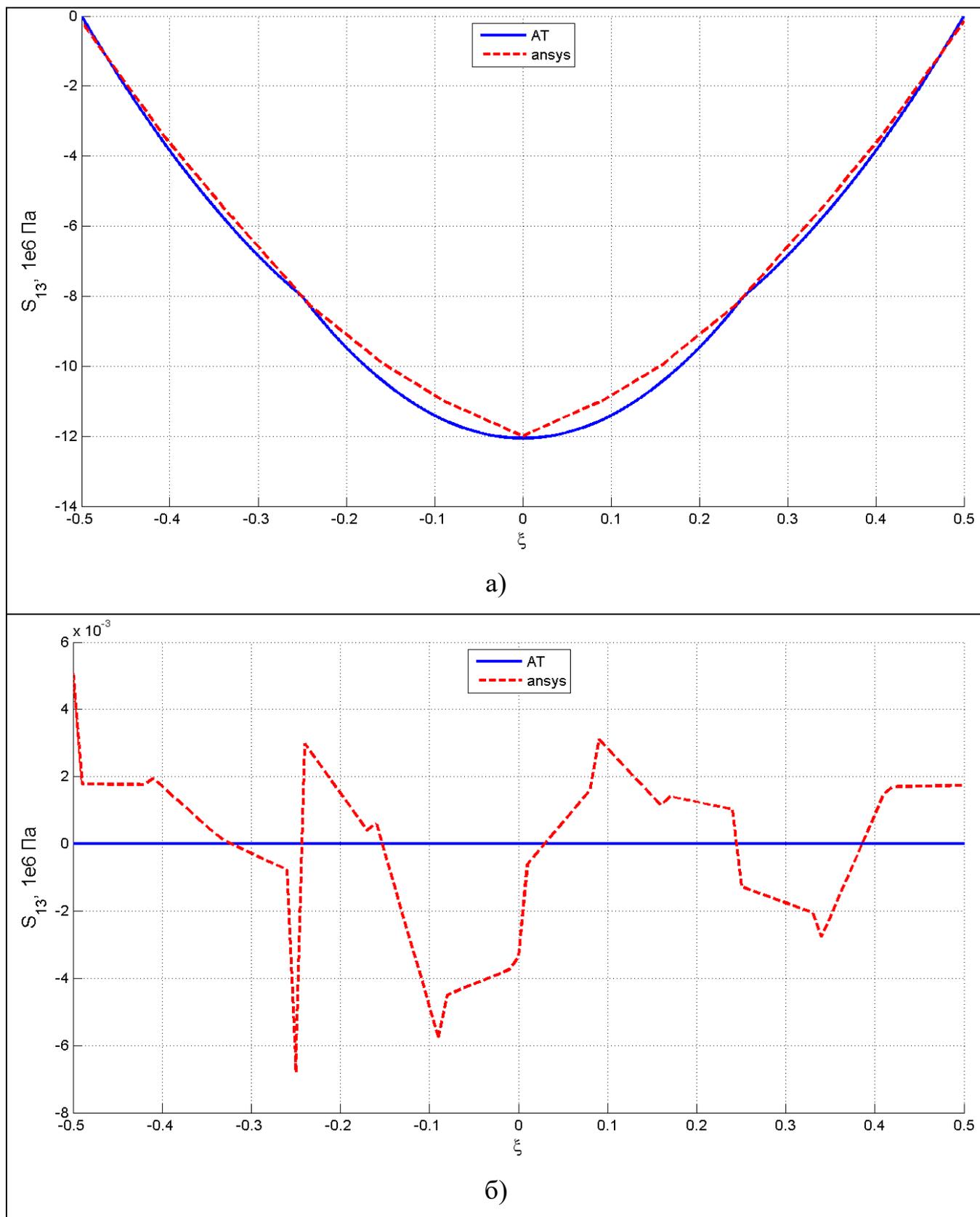


Рисунок 4.6 – Распределение напряжения  $\sigma_{13}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS: а –

$x_1 = 0,25$ ; б –  $x_1 = 0,5$

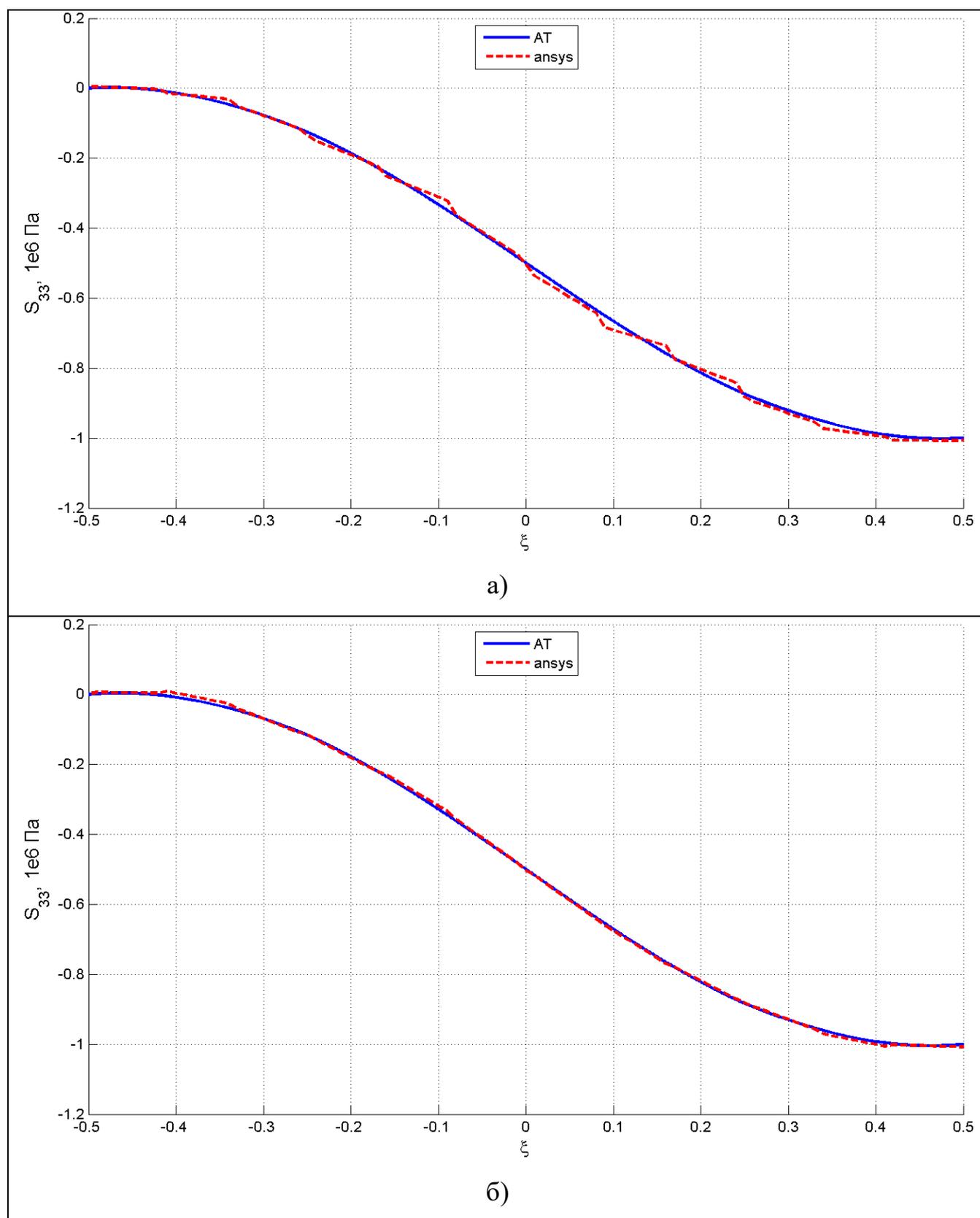


Рисунок 4.7 – Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{33}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS: а –  $x_1 = 0,25$ ; б –  $x_1 = 0,5$

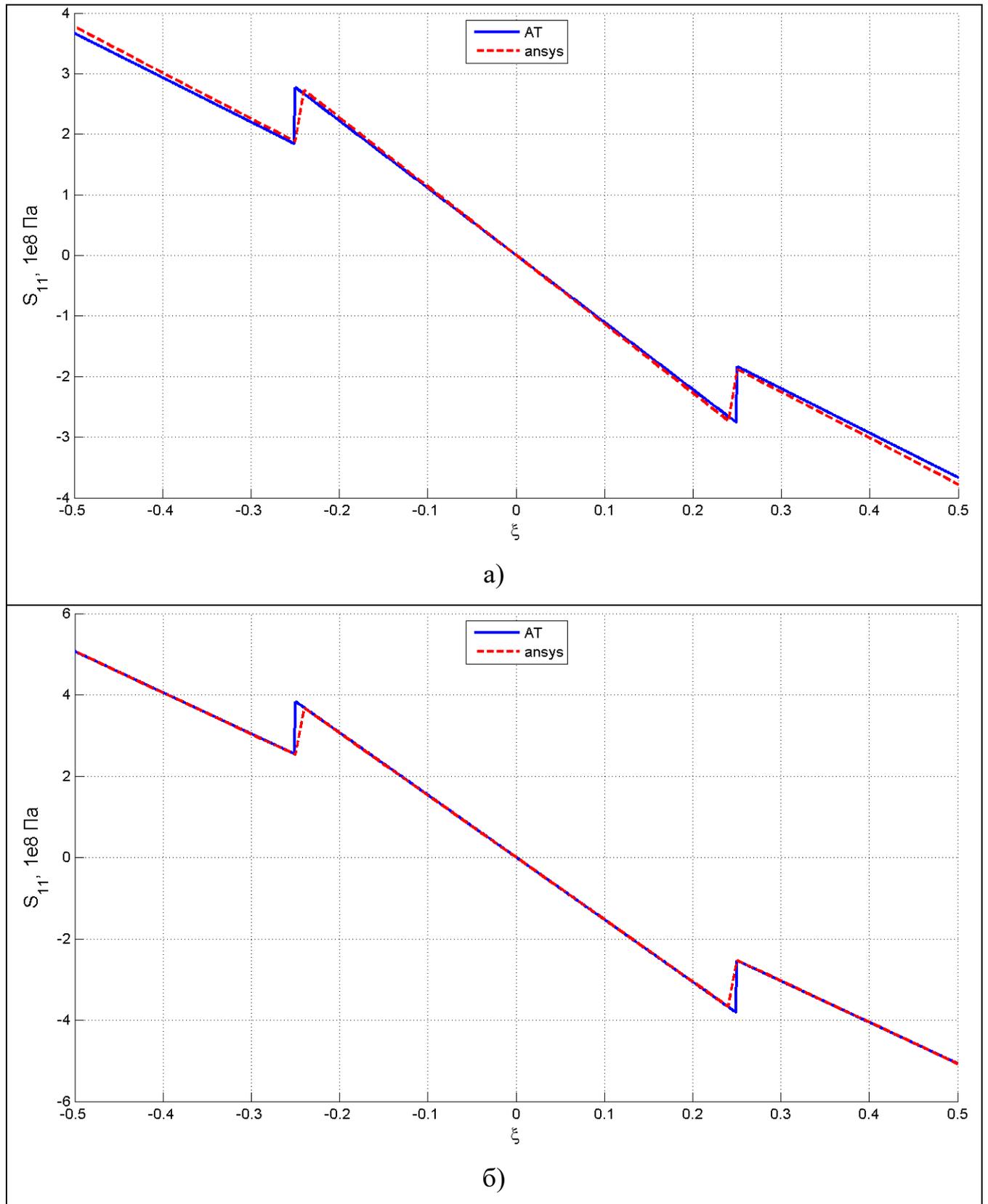


Рисунок 4.8 – Распределение изгибного напряжения  $\sigma_{11}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS:

а –  $x_1 = 0,25$ ; б –  $x_1 = 0,5$

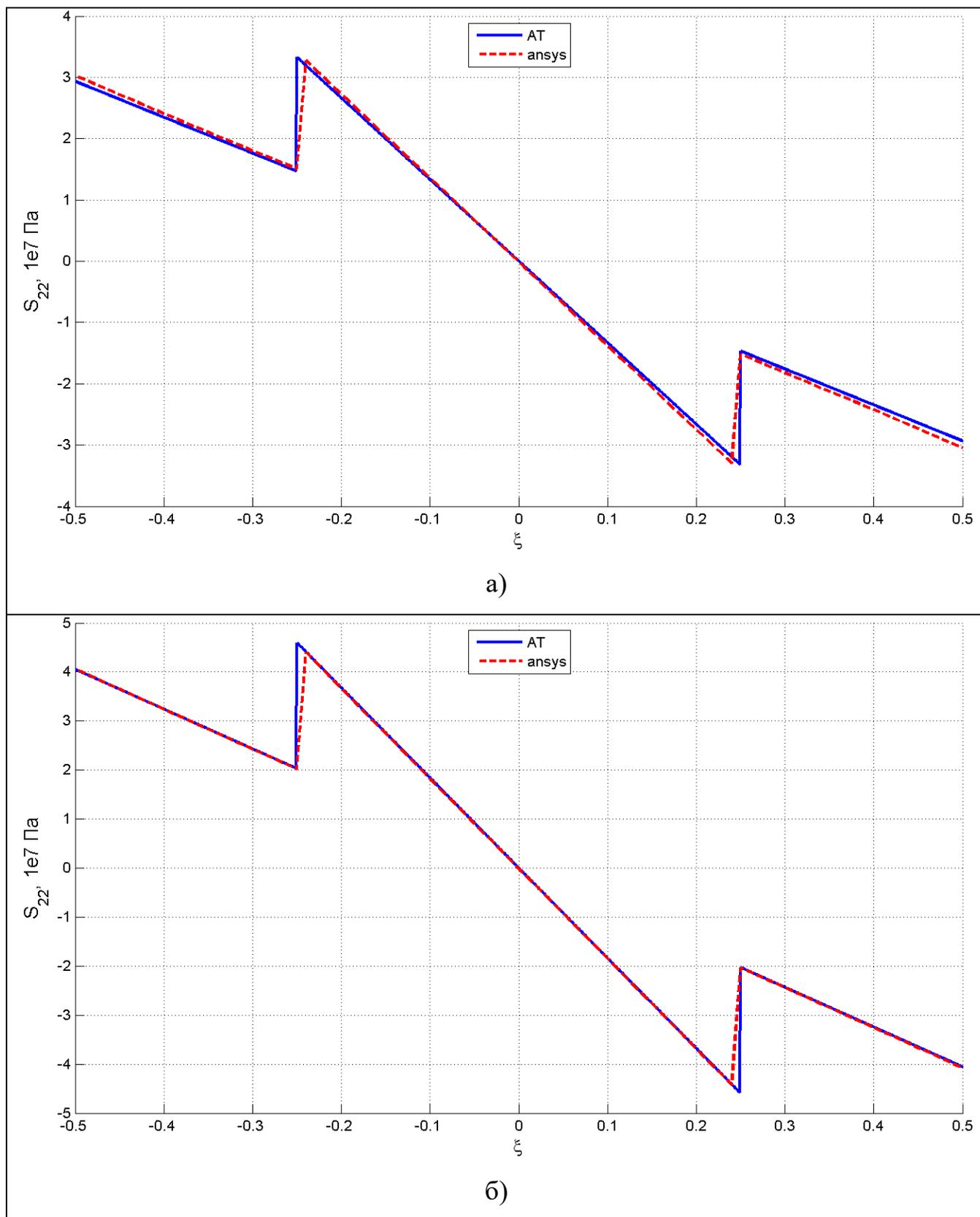


Рисунок 4.9 – Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{22}$  по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS: а –  $x_1 = 0,25$ ; б –  $x_1 = 0,5$

#### 4.4 Разработка программного комплекса

Для численного вычисления полученных соотношений и сравнения с численным решением по трехмерной теории, полученном в программном конечно-элементном пакете ANSYS, был разработан программный комплекс, который реализует:

– вычисление всех 6 компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига на основе разработанной теории термоупругости тонких многослойных анизотропных пластин;

– вычисление значений собственных частот и всех 6 компонент тензора напряжения в пластине на основе разработанной теории собственных колебаний тонких упругих многослойных анизотропных пластин, которая построена на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений упругих колебаний тел.

Программный комплекс состоит из препроцессора, модуля расчета НДС и постпроцессора.

В модуле препроцессора реализован ввод констант материалов слоев и параметров внешнего воздействия на многослойную пластину:

- геометрические размеры многослойной пластины: длина, ширина, толщина и количество слоев;

- давление на внешней и внутренней поверхности;

- распределение температуры по объему пластины.

Также в препроцессоре определяются шаги разбиения по длине и толщине многослойной пластины и производится построение узловой сетки, в узлах которой будет вычисляться решение.

Данные о свойствах материалов, координаты узлов сетки и параметры внешнего воздействия (давления, распределение температуры) передаются в модуль расчета НДС.

На основе этих данных для задачи об изгибе многослойной пластины равномерным давлением и неравномерным температурным полем модуль расчета НДС формирует матрицы модулей упругости материалов слоев, производит расчет температурных деформаций, усилий и моментов, вычисляет компоненты тензора напряжений нулевого, первого, второго, третьего приближений и итоговые искомые напряжения;

для задачи о гармонических колебаниях многослойных тонких упругих пластин модуль расчета НДС формирует матрицы модулей упругости материалов слоев, вычисляет собственные частоты колебаний пластин и соответствующие формы колебаний, вычисляется условие устойчивости реализованного конечноразностного метода решения дифференциального уравнения колебаний многослойной пластины.

Постпроцессор, производит построение распределения компонент тензора напряжений по толщине пластины для выбранных опорных сечений, сохраняет результаты расчета в виде:

- текстовых файлов формата \*.csv для просмотра в табличных редакторах (например, Origin, Microsoft Exell),
- в виде файлов формата \*.txt для просмотра в графических модулях и дальнейшего анализа,
- в виде графиков распределения компонент тензора напряжений по толщине пластины в формате \*.png.

Разработка программного комплекса велась в среде разработки MATLAB MathWorks.

## Выводы и заключение

1. Разработана теория термоупругости тонких многослойных анизотропных пластин, которая построена из уравнений общей трехмерной теории термоупругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине, и позволяет вычислить все 6 компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига.
2. Разработана теория собственных колебаний тонких упругих многослойных анизотропных пластин, которая построена на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений упругих колебаний тел, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине, и позволяет вычислить все 6 компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига.
3. Приведены примеры решения задачи об изгибе многослойной пластины равномерным давлением и неравномерным температурным полем, а также об изгибных колебаниях многослойной пластины. Сравнение расчетов, полученных с помощью разработанного метода и с помощью конечно-элементного решения трехмерной задач теории упругости и термоупругости на основе программного комплекса ANSYS показало, что предложенный метод позволяет вычислять все 6 напряжения в пластине с очень высокой точностью, приблизится к которому с помощью конечно-элементного трехмерного решения удастся только при использовании очень мелких сеток с большим числом КЭ по толщине пластины, что является серьезным ограничением при проведении расчетов тонкостенных пластин и оболочек.

## Список литературы

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.:Машиностроение. – 1980. – 324 с.
2. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры // Москва: Едиториал УРСС, 2003, 376 с.
3. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // Доклады Академии Наук СССР, т. 268, № 4, pp. 836-840, 1983.
4. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Эффективные модули композитов, армированных системой пластин и стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 38, № 5, 1998, 813 с.
5. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.:Наука, 1984.
6. Бердичевский В.Л. Пространственное осреднение периодических структур // Доклады Академии Наук СССР, т. 222, № 3, pp. 565-567, 1975.
7. Бердичевский В.Л., Вариационные принципы механики сплошной среды, Москва: Наука, 1983.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
9. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций, Москва: Машиностроение, 1980.
10. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры, Днепропетровск: Пороги, 2008.

11. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач, Москва: Наука, 1988, р. 550.
12. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В. и Ташкинов А.А., Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов, С. Ю.В., Ред., Москва: Наука. Физматлит., 1997, р. 288.
13. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б. Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. – Т. – 20. – № 4. – С. 491-505.
14. Горбачев В.И. Осреднение линейных задач механики композитов при непериодической неоднородности // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела., № 1, р. 31, 2001.
15. Горбачев В.И., Емельянов А.Н. Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 1. – С. 95-107.
16. Горбачев В. И. Об одном подходе к построению теории неоднородных оболочек // Научная конференция Ломоносовские чтения, секция механики. Тезисы докладов. — 2006.
17. Горбачев В.И., Фирсов Л.Л. Изгиб многослойной пластины // Научная конференция "Ломоносовские чтения. Апрель 2009 года. — Секция механики. — Издательство Московского университета Москва, 2009. — С. 57–57.
18. Горлыкин Г.Л., Немировский Ю.В. Метод асимптотического расщепления пространственной теории слоистых пластин // Физическая механика 7 Спец. Выпуск Ч. 1, 2004
19. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И. и Яровая А.В., Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций, Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005, р. 576.

20. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов // Механика композит. Материалов. – 1988. – №4. – С. 698-704.
21. Григорян С.С., «Об осреднении физических величин,» Доклады академии наук СССР, т. 254, № 4, pp. 1081-1085, 1980.
22. Дмитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин// Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки., 2012, №. 3, С. 86–100.
23. Дмитриенко Ю.И. Механика сплошной среды, т.1. Тензорный анализ. – М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. – 367 с.
24. Дмитриенко Ю.И. Основы механики твердого тела/ Механика сплошной среды.Т.4. – Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. – 2013. – 580 с.
25. Дмитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Федонюк Н.Н., Яковлев Д.О. Метод расчета рассеяния энергии в конструкциях из гибридных композитов // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 2014. – №11. – С.12-24.
26. Дмитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория многослойных упругих пластин/Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Методы решения задач МДТТ». М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2014. 32 с. ISBN: 978-5-7038-3961-4 URL:<http://ebooks.bmstu.ru/catalog/96/book39.html>
27. Дмитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин// Наука и образование. Электронный журнал. # 10, октябрь 2014 DOI: 10.7463/1014.0730105. С.359-382.
28. Дмитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория гармонических колебаний многослойных тонких упругих пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. – 2015. – № 6. – С.99-120.
29. Дмитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Новая теория расчета многослойных композитных пластин, основанная на асимптотическом

- анализе трехмерных уравнений теории упругости// Аэрокосмические технологии: тезисы докладов Третьей международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
30. Дмитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Расчет многослойных пластин на основе асимптотической теории осреднения. Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине "Методы решения задач МДТТ", электронное учебное издание. Место издания г. Москва, Издатель: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014, № госрегистрации 0321401630. <http://catalog.inforeg.ru/Inet/GetEzineByID/301002>
31. Дмитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Теория колебаний многослойных пластин, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМПСПС'2013) 24-31 мая 2015 г. – М.:Изд-во МАИ. – С.255-256.
32. Дмитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Теория многослойных тонких композитных пластин, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений вязкоупругости//Тезисы докл. Международной научной конференция "Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech - 2014), посвященной 50-летию Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э.Баумана 17-19 ноября 2014 года. 2014. С.23-24
33. Дмитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана, сер. Естественные науки. – 2002. – №2. – 2002 г.
34. Дмитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на

- основе метода асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. – №1. – 2007. – С.102-116.
35. Дмитриенко Ю.И., Соколов А.П. Автоматизация прогнозирования свойств композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Информационные технологии. 2008. № 8. С. 31-38.
36. Дмитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов// Математическое моделирование. – 2012. – Т.24. – № 5. – С. 3-20.
37. Дмитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка автоматизированной технологии вычисления эффективных упругих характеристик композитов методом асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2. С. 57-67.
38. Дмитриенко Ю.И., Соколов А.П. Современный численный анализ механических свойств композиционных материалов // Известия РАН. Физическая серия – Т. 75, №11. - 2011. – С. 1551-1556.
39. Дмитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин// Механика композиционных материалов и конструкций. Т.20. № 2. – 2014. – 260-282 с.
40. Дмитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 7(19). URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>
41. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. – 2003. – Т.67,вып.3. – С. 472-483.
42. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. – 2008. – Т.72,вып.2. – С. 308-321.
43. Иванов Д.С. и Ташкинов А.А., «Физические поля в компонентах композитов с псевдослучайной структурой,» Физическая мезомеханика, т. 4, № 2, pp. 29-36, 2001.
44. Кристенсен Р., Введение в механику композитов, Москва: МИР, 1982.

45. Крылов Н.М. и Боголюбов Н.Н., Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, Киев: УССР, 1934.
46. Лурье С.А. и Соляев Ю.О., «Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями,» Вестник пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, № 1, pp. 80-90, 2010.
47. Лурье С.А. и Шахрам Ю., «Об определении эффективных характеристик неоднородных материалов,» Механика композиционных материалов и конструкций, т. 3, № 4, pp. 76-92, 1997.
48. Ляв А., Математическая теория упругости, Москва, Ленинград: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1935.
49. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов, Киев: Вища школа, 1991.
50. Маневич Л.И., Павленко А.В. Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела, Киев: Вища школа, 1982.
51. Марченко В.А. и Хруслов Е.Я., Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей, Киев: Наукова думка, 1974.
52. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. – М.: Наука, 1988
53. Назаров С.А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Т1. Понижение размерности и интегральные оценки. – Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002
54. Назаров С.А. Введение в асимптотические методы теории упругости. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983
55. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Асимптотический анализ задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин при граничных условиях первого и третьего рода //Сибирский журнал индустриальной математики, Том X, № 4(32), 2007, 12 с.

56. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В. и Андрианов И.В., Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций, Москва: Машиностроение, 1991.
57. Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294. – № 5. – С. 1061-1065.
58. Панасенко Г.П. Осреднение системы уравнений теории упругости для неоднородной пластины. - УМН, 1985, т.40, В.5 (245), С. 218-219 3.
59. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
60. Победря Б.Е. , Горбачев В.И. Концентрация напряжений и деформаций в композитах // Механика композиционных материалов, № 2, pp. 207-214, 1984.
61. Резцов М.В. Асимптотическое разложение решения трехмерной системы уравнений теории упругости, заданной в ортотропной пластине. – Тр. П Всесоюзной научно-технической конференции "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов", т.П1, Ереван, изд-во ЕГУ, 1984, С. 81-84
62. Резцов М.В. Композиционные пластины, армированные высокомодульными волокнами // Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 30, № 9, pp. 1394-1404, 1990.
63. Резцов М.В., «Осреднение системы уравнений трехмерной теории упругости в неоднородном тонком слое // ОВМ АН СССР, Москва, 1987.
64. Роговой А.А. Конечные деформации в материалах со структурными изменениями // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки, т. 152, № 4, pp. 210-224, 2010.
65. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.:Мир,1984.

66. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический анализ слоистых пластин и пологих оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 161–171.
67. Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости, Запорожье: ЗГИА, 1997.
68. Шешенин С. В., Скопцов К. А. Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 2. – С. 49-61.
69. Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 71–79.
70. Шешенин С.В. Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2006. – № 1. – С. 47-51.
71. Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины // Вычислительная механика сплошной среды. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 128-139.
72. Эглит М.Э., Якубенко Т.А. Об эффективных модулях неоднородных сред, характеризующихся несколькими малыми параметрами // Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела, № 1, pp. 103-113, 2011.
73. Эглит М.Э. Об усредненном описании процессов в периодических упруго-пластических средах // Механика композиционных материалов, № 5, pp. 825-831, 1984.
74. Aboudi J., Pindera M.-J. and Arnold S., "A coupled higher-order theory for functionally graded composites with partial homogenization," Composites Engineering, vol. 5, no. 7, p. 771–792, 1995.
75. Aboudi J., Pindera M.-J. and Arnold S.M., "Microstructural optimization of functionally graded composites subjected to a thermal gradient via the coupled

- higher-order theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, no. 1-2, p. 93–108, 1997.
76. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. *Asymptotic Solution of the Theory of Shells Boundary Value Problem*, Hindawi Publishing Corporation *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2007, 25 c.
77. Andrianov I.V., Awrejcewicz J. and Barantsev R.G., "Asymptotic approaches in mechanics: New parameters and procedures," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, no. 1, pp. 87-109, 2003.
78. Andrianov I.V., Bolshakov V.I., Danishevs'kyi V.V. and Weichert D., "Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials," *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 464, no. 2093, pp. 1181-1201, 2008.
79. Andrianov I.V., Danishevs'kyi V.V. and Kalamkarov A.L., "Micromechanical analysis of fiber-reinforced composites on account of influence of fiber coatings," *Composites Part B: Engineering*, vol. 39, no. 5, pp. 874-881, 2008.
80. Andrianov I.V., Danishevs'kyi V.V. and Weichert D., "Asymptotic determination of effective elastic properties of composite materials with fibrous square-shaped inclusions," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 21, no. 6, p. 1019–1036, 2002.
81. Andrianov I.V., Diskovsky A.A. and Kholod E.G., "Homogenization method in the theory of corrugated plates," *Technische Mechanik*, vol. 18, no. 2, pp. 123-133, 1998.
82. Bahr H.-A., Balke H., Fett T., Hofinger I., Kirchhoff G., Munz D., Neubrand A., Semenov A.S., Wess H.-J. and Yang Y.Y. , "Cracks in functionally graded materials," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, no. 1-2, pp. 2-16, 2003.
83. Barrett R., Berry M., Chan T., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine Ch. и Vorst H., *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*, Philadelphia: SIAM Press, 1993, p. 113.

84. Bensousson A., Lions J.L. and Papanicolaou G., Asymptotic analysis for periodic structures, Amsterdam: North-Holland, 1978.
85. Benveniste Y., "A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials," *Mechanics of Materials*, vol. 6, no. 2, p. 147–157, 1987.
86. Birman V., "Stability of functionally graded shape memory alloy sandwich panels," *Smart Materials and Structures*, vol. 6, no. 3, pp. 278-286, 1997.
87. Böhme T., Dreyer W. и Müller W.H., «Determination of stiffness and higher gradient coefficients by means of the embedded-atom method,» *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, т. 18, № 7-8, pp. 411-441, 2007.
88. Borst R., Crisfield M., Remmers J. and Verhoosel C., *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Chichester, United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd., 2012.
89. Boutin C. and Hans S., "Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures," *Computers and Geotechnics*, vol. 30, no. 4, p. 303–320, 2003.
90. Boutin C., "Study of permeability by periodic and self-consistent homogenisation," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 19, no. 4, p. 603–632, 2000.
91. Boutin C., "Microstructural effects in elastic composites," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, no. 7, p. 1023–1051, 1996.
92. Caillerie D. and Nedelec J.C., "Thin elastic and periodic plates," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 6, no. 1, p. 159–191, 1984.
93. Chockalingam K. and Wellford L.C., "Multi-scale homogenization procedure for continuum–atomistic, thermo-mechanical problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 1-4, pp. 356-371, 2011.
94. Chou P.C. and Chou D.K., "Plastic flow rule of laminated composites," *Journal of Composites Materials*, vol. 10, no. 1, pp. 55-68, 1976.
95. Chou P.C., McNamee B.M. and Chou D.K., "The yield criterion of laminated media," *Journal of Composite Materials*, vol. 7, no. 1, pp. 22-35, 1973.

96. Christensen R.M. и Lo K.H., «Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models.» Journal of the Mechanics and Physics of Solids, т. 27, № 4, pp. 315-330, 1979.
97. Dimitrienko Yu.I. Thermomechanics of Composites under High Temperatures. – Kluwer Academic Publishers. – Dordrecht/Boston/London. – 1999. – 347 p.
98. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O., Yurin Yu.V. Asymptotic homogenization for harmonic vibrations of multilayer thin elastic plates// Multiscale Modeling and Methods: Upscaling in Engineering and Medicine : Abstracts of the Fifth International Conference / Ed. by Yu. Dimitrienko, G. Panasenko ; Bauman Moscow State Technical University, Moscow : BMSTU, June 25-27, 2015. pp.17-18.
99. Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. The Asymptotic Theory of Thermoelasticity of Multilayer Composite Plates // Composites: Mechanics, Applications. An International Journal. 2015. v.6. № 1. pp.13-51. DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v6.i1.20
100. Doghri I. and Ouair A., "Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures: Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms," International Journal of Solids and Structures, vol. 40, no. 7, p. 1681–1712, 2003.
101. Doghri I., "Fully implicit integration and consistent tangent modulus in elasto-plasticity," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, no. 22, p. 3915–3932, 1993.
102. Dreyer W. и Müller W.H., «A study of the coarsening in tin/lead solders,» International Journal of Solids and Structures, № 37, pp. 3841-3871, 2000.
103. Eraslan A. и Akis T., «Elastoplastic response of a long functionally graded tube subjected to internal pressure,» Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences, т. 29, pp. 361-368, 2005.
104. Fujimoto T. and Noda N., "Crack propagation in a functionally graded plate under thermal shock," Archive of Applied Mechanics, vol. 70, no. 6, pp. 377-386, 2000.

105. Gambin B. and Kröner E., "Higher-Order Terms in the Homogenized Stress-Strain Relation of Periodic Elastic Media," *Physica status solidi B*, vol. 151, no. 2, p. 513–519, 1989.
106. Giannakopoulos A.E., Suresh S., Finot M. and Olsson M., "Elastoplastic analysis of thermal cycling<sup>^</sup> layered materials with compositional gradients," *Acta Metallurgica et Materialia*, vol. 43, no. 4, p. 1335–1354, 1995.
107. Gilbert R. P. and Hackl K., Eds., *Asymptotic Theories for Plates and Shells*, vol. 319 of Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific & Technical, Harlow, UK; John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1995.
108. González C. and Llorca J., "A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, no. 4, p. 675–692, 2000.
109. Goupee A.J. and Vel S.S., "Multi-objective optimization of functionally graded materials with temperature-dependent material properties," *Materials & Design*, vol. 28, no. 6, p. 1861–1879, 2007.
110. Grujicic M. and Zhang Y., "Determination of effective elastic properties of functionally graded materials using Voronoi cell cell finite element method," *Materials Science and*
111. Guinovart-Díaz R., Rodríguez-Ramos R., Sabina F.J. and Bravo-Castillero J., "Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I. Elastic and square symmetry," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, no. 7, p. 1445–1462, 2001.
112. Harris P.G., Chaggar K.S. и Whitmore M.A., «The Effect of Ageing on the Microstructure of 60:40 Tin-lead Solders,» *Soldering & Surface Mount Technology*, т. 3, № 1, pp. 20 - 33, 1991.
113. Hashin Z. and Shtrikman S., "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, no. 2, p. 127–140, 1963.

114. Hashin Z., «Viscoelastic fiber reinforced materials.» American Institute of Aeronautics and
115. Hill R., «Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behaviour,» *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, т. 12, № 4, pp. 199-212, 1964.
116. Jin Z.-H. and Batra R.C., "Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 19, no. 4, pp. 317-339, 1996.
117. Jin Z.-H., "An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 29, no. 7, pp. 887-895, 2002.
118. Jones R., *Mechanics of Composite Materials*, Philadelphia: Taylor&Francis, 1999.
119. Jones R.M. *Mechanics of composite materials.* – Philadelphia; L.:Taylor&Francis, 1998. – 519 p.
120. Jones R.M. *Mechanics of composite materials.* – Philadelphia; L.:Taylor&Francis, 1998. – 519 p.
121. Kafka V., "Elastic-plastic deformation of a periodically non-homogeneous medium," *Acta technica ČSAV*, vol. 10, no. 4, pp. 404-451, 1965.
122. Kalamkarov A.L. and Kolpakov A.G., "A new asymptotic model for a composite piezoelastic plate," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 34-35, pp. 6027-6044, 2001.
123. Kalamkarov A.L. and Kolpakov A.G., *Analysis, design and optimization of composite structures*, New York: J.Wiley & Sons, 1997.
124. Kalamkarov A.L., *Composite and reinforced elements of construction*, Chichester: John Wiley & Sons, 1992.
125. Kamotski V., Matthies K. and Smyshlyaev V.P., "Exponential Homogenization of Linear Second Order Elliptic PDEs with Periodic Coefficients," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 38, no. 5, p. 1565–1587, 2006.

126. Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness // *Int. J. Solids and Struct.* – 1984. – V. 20, № 4. – P. 333-350.
127. Kolpakov A. G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. – Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004. – 228 p.
128. Kuhl E. и Schmid D.W., «Computational Modeling of Mineral Unmixing and Growth,» *Computational Mechanics*, т. 39, № 4, pp. 439-451, 2006.
129. Lee J.-M. and Toi Y., "Elasto-plastic damage analysis of functionally graded materials subjected to thermal shock and thermal cycle," *JSME International Journal. Series A. Solid Mechanics and Material Engineering*, vol. 45, no. 3, pp. 331-338, 2002.
130. Lewiński T. and Telega J.J., *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*, Singapore: World Scientific Publishing, 2000, p. 768.
131. Lewiński T., "Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, no. 3, p. 309–326, 1992.
132. Liew K.M., Kitipornchai S., Zhang X.Z. and Lim C.W., "Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 10, p. 2355–2380, 2003.
133. Lun Li, Müller W.H., «Computer modeling of the coarsening process in tin-lead solders,» *Computational Materials Science*, № 21, pp. 159-184, 2001.
134. Lurie S., Tuchkova N. and Volkov-Bogorodsky D.D., "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics," in *A Generalized Solution of Eshelby and Eshelby Self-Consistent Method for Gradient Models in Mechanics of Composites*, Rhodes, Greece, 2010.
135. Ma L.S. and Wang T.J., "Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 13-14, p. 3311–3330, 2003.
136. Manevitch L.I., Andrianov I.V. and Oshmyan V.G., *Mechanics of periodically heterogeneous structures*, Berlin: Springer, 2002.

137. Meguid S.A. and Kalamkarov A.L., "Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 3, p. 303–316, 1994.
138. Miehe C., Schröder J. and Bayreuther C., "On the homogenization analysis of composite materials based on discretized fluctuations on the micro-structure," *Acta Mechanica*, vol. 155, no. 1-2, pp. 1-16, 2002.
139. Miehe C., «Strain-driven homogenization of inelastic microstructures and composites based on an incremental variational formulation,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, т. 55, № 11, p. 1285–1322, 2002.
140. Müller W.H. и Böhme T., «Quantitative description of micro-structural changes in lead-free
141. Müller W.H., «Morphology changes in solder joints—experimental evidence and physical understanding,» *Microelectronics Reliability*, т. 44, № 12, p. 1901–1914, 2004.
142. Nakamura T., Wang T. and Sampath S., "Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation," *Acta Materialia*, vol. 48, no. 17, p. 4293–4306, 2000.
143. Noda N. and Jin Z.-H., "Thermal stress intensity factors for a crack in a strip of a functionally gradient material," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, no. 8, p. 1039–1056, 1993.
144. Pan'kov A.A., Sokolkin Yu.V. и Tashkinov A.A., «Singular approximation of the method of periodic components in statistical mechanics of composite materials,» *Mechanics of Composite Materials*, т. 33, № 4, pp. 322-331, 1997.
145. Paulino G.H., Yin H.M. and Sun L.Z., "Micromechanics-based interfacial debonding model for damage of functionally graded materials with particle interactions," *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 15, no. 3, pp. 267-288, 2006.
146. Pettermann H.E., Plankensteiner A.F., Böhm H.J. and Rammerstorfer F.G., "A thermo-elasto-plastic constitutive law for inhomogeneous materials based on an

- incremental Mori–Tanaka approach," *Computers & Structures*, vol. 71, no. 2, p. 197–214, 1999.
147. Pindera M.-J., Aboudi J. and Arnold S.M., "Limitations of the uncoupled, RVE-based micromechanical approach in the analysis of functionally graded composites," *Mechanics of Materials*, vol. 20, no. 1, p. 77–94, 1995.
  148. Pitakthapananhong S. and Busso E.P., "Self-consistent elastoplastic stress solutions for functionally graded material systems subjected to thermal transients," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, no. 4, p. 695–716, 2002.
  149. Pobedrya B.E. и Kholmatov T., «Deformation of laminar composites,» *Mechanics of Composite Materials*, т. 17, № 5, pp. 516-519, 1982.
  150. Rahman S. and Chakraborty A., "A stochastic micromechanical model for elastic properties of functionally graded materials," *Mechanics of Materials*, vol. 39, no. 6, p. 548–563, 2007.
  151. Reddy J. and Cheng Z.-Q., "Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 20, no. 5, p. 841–855, 2001.
  152. Reiter T., Dvorak G. and Tvergaard V., "Micromechanical models for graded composite materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 45, no. 8, p. 1281–1302, 1997.
  153. Sanchez-Hubert J. and Sanchez Palencia E., *Coques Elastiques Minces, Propriétés Asymptotiques*, Masson, Paris, France, 1997.
  154. Sanchez-Palencia E., *Non-homogeneous media and vibration theory*, vol. 127, Berlin: Springer-Verlag, 1980.
  155. Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N. Homogenization of Thermoelasticity Processes in Composite Materials with Periodic Structure of Heterogeneities. // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 93, No. 8, p. 575 – 596 (2013) / DOI 10.1002/zamm.201200032
  156. Shabana Y.M. and Noda N., "Numerical evaluation of the thermomechanical effective properties of a functionally graded material using the homogenization

- method," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, no. 11-12, p. 3494–3506, 2008.
157. Smyshlyaev V.P. and Cherednichenko K.D., "On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, no. 6-7, p. 1325–1357, 2000.
  158. Sokolkin Yu.V. и Tashkinov A.A., «Statistical models of deformation and failure of composites,» *Mechanics of Composite Materials*, т. 20, № 5, pp. 585-590, 1985.
  159. Stroeven M. and Stroeven P., "Computer-simulated internal structure of materials," *Acta Stereologica*, vol. 15, no. 3, pp. 247-252, 1996.
  160. Takano N. and Zako M., "Integrated design of graded microstructures of heterogeneous materials," *Archive of Applied Mechanics* , vol. 70, no. 8-9, pp. 585-596, 2000.
  161. Tamuro I., Tomota Y. and Ozura H., "Proc. Third International Conference of Strength of Metal and Alloys," in *Strength and ductility of Fe-Ni-C alloys composed of austenite and martensite with various strength*, Cambridge, 1973.
  162. Tarn J.-Q., "Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 46-47, p. 8189–8206, 2001.
  163. Titeux I., Sanchez-Palencia E., *Junction of thin plates // European Journal of Mechanics: A/Solids*, vol. 19, no. 3, pp. 377–400, 2000.
  164. Wagner G.J., Jones R.E., Templeton J.A. and Parks M.L., "An atomistic-to-continuum coupling method for heat transfer in solids," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, no. 41-42, p. 3351–3365, 2008.
  165. Weissenbek E., Pettermann H.E. and Suresh S., "Elasto-plastic deformation of compositionally graded metal-ceramic composites," *Acta Materialia*, vol. 45, no. 8, p. 3401–3417, 1997.
  166. Williamson R.L., Rabin B.H. and Drake J.T., "Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces. Part I. Model description and

- geometrical effects," *Journal of Applied Physics*, vol. 74, no. 2, pp. 1310-1320 , 1993.
167. Woo J. and Meguid S.A., "Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 42-43, p. 7409–7421, 2001.
  168. Xiang MZ., Cui JZ., Li BW. and Tian X., "Atom-continuum coupled model for thermo-mechanical behavior of materials in micro-nano scales," *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, vol. 55, no. 6, pp. 1125-1137, 2012.
  169. Yin H.M., Sun L.Z. and Paulino G.H., "Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions," *Acta Materialia*, vol. 52, no. 12, p. 3535–3543, 2004.
  170. Zhikov V.V., Kozlov S.M. and Oleĭnik O.A., *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Berlin: Springer Verlag, 1994.
  171. Zohdi T.I., "Homogenization Methods and Multiscale Modeling," in *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Wiley, 2004, pp. 407-430.
  172. Zuiker J.R. and Dvorak G., "The effective properties of functionally graded composites—I. Extension of the Mori-Tanaka method to linearly varying fields," *Composites Engineering*, vol. 4, no. 1, p. 19–35, 1994.