

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



Попова Анастасия Руслановна

**Моделирование нелинейных процессов деформирования
неоднородных оболочек вращения при произвольных
обобщенных перемещениях и деформациях**

Специальность 1.1.8. – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д.т.н., профессор
Дмитриев Владимир Георгиевич

Москва - 2025

Оглавление

Введение.....	5
Глава I. Математическое моделирование геометрически и физически нелинейного напряженно-деформированного состояния неоднородных оболочек вращения при статическом нагружении.....	11
§ 1.1. Деформированное состояние тонкостенных конструкций.....	17
1.1.1. Геометрически нелинейные соотношения для оболочек вращения при осесимметричном напряженно-деформированном состоянии.....	18
1.1.2. Геометрические соотношения для арок и панелей при произвольных перемещениях и углах поворота нормали.....	22
§ 1.2. Напряженное состояние. Физические соотношения для неоднородных оболочек при осесимметричном нагружении.....	22
1.2.1. Однослойные упругие оболочки из ортотропных материалов.	24
1.2.2. Многослойные оболочки вращения из композиционных материалов.....	25
1.2.3. Физические соотношения для однослойных и многослойных оболочек вращения из композиционных материалов при действии температурного поля.....	26
1.2.4. Соотношения деформационной теории пластичности для оболочек вращения при осесимметричном напряженно-деформированном состоянии.....	28
1.2.5. Физические соотношения для оболочек вращения при произвольных деформациях. Математические модели нелинейно упругих материалов	30
§ 1.3. Физические соотношения для арочных и панельных конструкций при произвольных перемещениях и углах поворота нормали.....	33

§ 1.4. Уравнения равновесия и граничные условия для оболочек вращения, арочных и панельных конструкций.....	35
1.4.1. Уравнения равновесия для тонкостенных конструкций при произвольных перемещениях и углах поворота нормали.....	35
1.4.2. Граничные условия для оболочек вращения, арок и панелей.....	36
§ 1.5. Формулировка краевой задачи для составной оболочечной конструкции.....	37
Глава II. Дискретизация исходной нелинейной краевой задачи методом конечных разностей.....	40
§ 2.1. Вычислительный эксперимент в механике тонкостенных конструкций.....	40
§ 2.2. Особенности построения разностных схем для случая произвольных значений обобщенных перемещений и деформаций тонкостенных конструкций.....	44
2.2.1. Конечно-разностная аппроксимация параметров деформированного состояния оболочек, арок и панелей.....	45
2.2.2. Конечно-разностная аппроксимация параметров напряженного состояния оболочек, арок и панелей.....	51
2.2.3. Построение разностных схем при решении физически нелинейных задач и расчете конструкций из гиперупругих материалов..	51
2.2.4. Особенности построения разностных схем для оболочек вращения, замкнутых в полюсе.....	53
§ 2.3. Конечно-разностная аппроксимация уравнений равновесия....	55
Глава III. Разработка вычислительных алгоритмов решения нелинейных краевых задач.....	57
§ 3.1. Численное решение сеточных аналогов нелинейных уравнений равновесия тонкостенных конструкций методом установления. Случай	

консервативной и «следящей» нагрузки.....	57
§ 3.2. Определение оптимальных значений параметров итерационного процесса	64
§ 3.3. Особенности построения вычислительного алгоритма при решении физически нелинейных задач.....	66
§ 3.4. Построение вычислительного алгоритма при расчете составных оболочечных конструкций.....	67
§ 3.5. Верификация разработанных математических моделей и вычислительных алгоритмов.....	68
 Глава IV. Исследование особенностей процессов деформирования тонкостенных конструкций при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций методами вычислительного эксперимента.....	72
§ 4.1. Исследование влияния параметров гиперупругого материала на характеристики конического амортизатора сжатия.....	72
§ 4.2. Напряженно-деформированное состояние замкнутой в полюсе упруго-пластической сферической оболочки при действии локального поверхностного давления.....	80
§ 4.3. Нелинейное напряженно-деформированное состояние неоднородных оболочек вращения при термомеханических воздействиях	87
4.3.1. Исследование влияния физико-механических характеристик ортотропного материала на несущую способность трехслойного сферического купола при действии внешнего поверхностного давления.....	87
4.3.2. Исследование особенностей процессов нелинейного деформирования тепловыделяющих элементов ядерных энергетических установок при термомеханических воздействиях	92
 Заключение.....	96
Литература.....	99
Приложение.....	109

Введение

Актуальность темы исследования. Тонкостенные конструкции – оболочки и пластины различного очертания - достаточно широко применяются как в современных авиакосмических системах, так и в общем и специальном машиностроении. При этом можно отметить, что среди многообразия форм тонкостенных конструкций наибольшее распространение в различных отраслях техники получили оболочки вращения. Современные требования к методам проектирования и конструирования таких конструкций, особенно в авиационной отрасли, включают в себя, в частности, не только необходимость учета особенностей геометрии оболочки, но и учета нелинейностей различного характера (геометрическая и физическая нелинейность), особенностей деформирования современных и перспективных композиционных материалов, а также требования снижения материалоемкости и массовых характеристик конструкций при обеспечении заданных параметров прочностной надежности несущих тонкостенных конструкций.

Следует отметить, что как в нашей стране, так и за рубежом к настоящему времени выполнено большое число как экспериментальных, так и теоретических работ, посвященных исследованию процессов деформирования тонкостенных конструкций при различных видах нагружения. Однако, обзор и анализ как отечественных, так и зарубежных источников и публикаций показывает, имеющиеся результаты исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин и оболочек в рамках нелинейных моделей с учетом как геометрических особенностей конструкций, так и особенностей физико-механических характеристик материалов (композиты, гиперупругие материалы), в области произвольных значений обобщенных перемещений и деформаций не охватывают многие важные как в теоретическом, так и в практическом отношении задачи или отсутствуют вовсе.

Поскольку практическая отработка поведения несущих конструкций на основе натурного физического эксперимента сопряжена, как правило, со значительными трудностями, или, в силу специфических особенностей эксплуатации вовсе невозможна, то в настоящее время для исследования особенностей дефор-

мирования пластин и оболочек при различных видах нагружения широко используется вычислительный эксперимент (ВЭ), заключающийся в исследовании реальных процессов методами вычислительной математики. Важнейшим этапом вычислительного эксперимента является разработка и развитие адекватных математических моделей, экономичных численных методов и алгоритмов и их практическая реализация в виде пакетов прикладных программ для ЭВМ. Использование таких пакетов существенно сокращает сроки проектных работ и дает возможность оптимизировать конструкцию по широкому спектру конструкционных, технологических, эксплуатационных и экономических требований. Исследование особенностей процессов деформирования тонкостенных конструкций в рамках нелинейных моделей методами ВЭ является интенсивно развивающимся разделом механики деформируемого твердого тела. Рассматриваемые в диссертации проблемы являются актуальными и представляют прикладной и научный интерес в разработке новых тонкостенных конструкций из перспективных материалов в области авиастроения, атомной энергетики и других отраслей экономики.

Объект диссертационного исследования – тонкостенные однородные и неоднородные оболочки вращения из изотропных, ортотропных и гиперупругих материалов при воздействии на них термомеханических нагрузок общего или локального характера.

Предметом исследования является численный метод определения параметров осесимметричного напряженно-деформированного состояния неоднородных оболочек вращения при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций.

Целью работы является разработка математических моделей и вычислительных алгоритмов в реализации численного моделирования нелинейных процессов деформирования неоднородных оболочек вращения при произвольных обобщенных перемещениях и деформациях.

Для выполнения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать адекватные математические модели для исследования параметров осесимметричного напряженно-деформированного состояния неоднород-

ных оболочек вращения при статических воздействиях общего и локального характера в области произвольных значений обобщенных перемещений и углов поворота;

- разработать и развить на основе метода конечных разностей корректные дискретные аналоги исходных дифференциальных уравнений с выявлением особенностей построения разностных схем и вычислительных алгоритмов при решении физически нелинейных задач, расчете оболочек из гиперупругих материалов, а также оболочек вращения, содержащих сингулярность в виде полюсной точки;

- разработать конечно-разностную процедуру дискретизации параметров НДС оболочек вращения с учетом особенностей физико-механических свойств материала и построить однотипные дискретные модели для вычисления усилий и моментов путем численного интегрирования напряжений по толщине при решении физически нелинейных задач и при расчете оболочек из нелинейно упругих материалов;

- с использованием квазидинамической формы метода установления разработать однотипный вычислительный алгоритм численного решения геометрически и физически нелинейных краевых задач статики оболочек при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций;

- практически реализовать разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы в виде пакета прикладных программ с последующим исследованием методами вычислительного эксперимента особенностей процессов деформирования оболочек вращения при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций.

Методы исследования. В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

- метод конечных разностей с аппроксимацией исходных дифференциальных операторов конечно-разностными второго порядка аппроксимации;
- квазидинамическая форма метода установления с использованием для построения итерационного процесса явной двухслойной разностной схемы второго порядка точности.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Разработаны и развиты корректные математические модели и эффективные численные алгоритмы решения геометрически и физически нелинейных краевых задач статики неоднородных оболочек вращения, позволяющие исследовать особенности процессов деформирования тонкостенных конструкций при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций.

2. Разработана математическая модель для расчета составных оболочечных конструкций, представляющая конструкцию в виде набора оболочек вращения и недеформируемых шпангоутов, что позволило упростить практическую реализацию силовых граничных условий для деформированного состояния оболочки.

3. Разработана и реализована оригинальная конечно-разностная процедура дискретизации параметров НДС купольных оболочек вращения, содержащих полюсные точки, а также построены однотипные дискретные модели для вычисления силовых факторов при решении физически нелинейных задач, а также при расчете оболочек из нелинейно упругих материалов;

4. На основе квазидинамической формы метода установления построен единый вычислительный алгоритм для численного решения геометрически и физически нелинейных краевых задач статики оболочек при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций, а также рассмотрены особенности построения итерационного процесса при действии консервативной и «следящей» нагрузки;

5. Построены вычислительные алгоритмы исследования нелинейного напряженно-деформированного состояния неоднородных оболочек вращения при термомеханических воздействиях, позволившие установить диапазон значений параметров внутреннего давления в оболочке, повышающий порог предельной температуры в оболочке ТВЭЛа на 5,9% при совместном действии температурного поля и внутреннего давления.

Достоверность результатов и адекватность разработанных математических моделей и численных алгоритмов основывается на использовании фунда-

ментальных законов механики деформируемого твердого тела и подтверждается сопоставлением с известными аналитическими и экспериментальными данными, а также сопоставлением с численными решениями существенно нелинейных краевых задач других авторов.

Практическая ценность и внедрение результатов. Разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы практически реализованы в виде пакета прикладных программ, с помощью которого методами вычислительного эксперимента были проведены исследования особенностей процессов деформирования оболочек вращения при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций.

Полученные на их основе результаты решения практических задач внедрены в расчетную практику заинтересованных организаций и используются при создании изделий новой техники, что подтверждено актом внедрения с предприятия АО «Машиностроительный завод «ЗиО-Подольск»».

Личный вклад автора. Основные положения диссертации получены лично автором, либо при непосредственном его участии, что подтверждено публикациями.

Апробация результатов работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. XXV Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. (Вятичи, 18-22 марта 2019г.)

2. X Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 26-27 ноября 2020г.)

3. XXVII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. (Вятичи, 17-21 мая 2021г.)

4. XXVIII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. (Кремёнки, 16-20 мая 2022г.)

5. XXIX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. (Кремёнки, 15-19 мая 2023г.)

6. XXX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. (Кремёнки, 20-24 мая 2024г.)

Публикации. Основное содержание диссертационной работы и ее результатов полностью отражено в 9-ти публикациях автора, в том числе двух статьях в журналах, включенных в перечень ВАК РФ, одной статье журнала, индексируемого в Scopus, шести публикациях других изданий и журналов.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения (выводов), списка литературы из 118 наименований и приложения, в котором представлены результаты практического внедрения проведенных исследований, а также распечатка текста разработанной программы SHELX на языке FORTRAN-IV. Общий объем диссертации 140 страницах, включая 51 рисунок и одну таблицу. Основной текст диссертации изложен 108 страницах, приложения представлены на 31 странице.

ГЛАВА I. Математическое моделирование геометрически и физически нелинейного напряженно-деформированного состояния неоднородных оболочек вращения при статическом нагружении

Исследование процессов деформирования тонкостенных конструкций методами вычислительного эксперимента связано с необходимостью построения корректной математической модели и разработке аналитического или численного метода решения соответствующей краевой задачи. Значительный вклад в развитие нелинейной механики тонкостенных конструкций внесли исследования и работы таких ученых, как: Н.П. Абовский, Н.А. Алфутков, С.А. Амбарцумян, В.Г. Баженов, Л.И. Балабух, В.Л. Бидерман, И.А. Биргер, В.В. Болотин, Н.В. Валишвили, В.В. Васильев, В.З. Власов, А.С. Вольмир, С.С. Гаврюшин, К.З. Галимов, Н.С. Ганиев, А.Л. Гольденвейзер, А.Г. Горшков, Э.И. Григолюк, Я.М. Григоренко, А.Н. Гузь, С.Д. Иванов, А.В. Кармишин, М.М. Корнишин, А.В. Коровайцев, А.И. Лурье, Г.В. Москвитин, Х.М. Муштари, Ю.Н. Новичков, В.В. Новожилов, И.Ф. Образцов, П.Ф. Папкович, А.К. Перцев, Б.Е. Победря, В.А. Постнов, И.Н. Преображенский, Ю.Н. Работнов, Г.Н. Савин, А.И. Станкевич, В.И. Феодосьев, А.П. Филин, Х.С. Хазанов, В.С. Чернина, К.Ф. Черных, В.И. Шалашилин, Н.Н. Шапошников, B. Almrof, F. Brogan, A. Cassell, D. Dawe, R. Gallagher, R. Hobbs, W. Koiter, K. Meissner, K. Morgan, R. Nelson, S. Toda, G. Turvey, K. Washizu, O. Zienkiewicz и др.

В настоящее время достаточно подробно исследовано напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкостенных оболочечных конструкций в рамках линейных моделей, поскольку во многих случаях имеет место аналитическое решение исходных дифференциальных уравнений в замкнутом виде, или же на основе апробированных численно-аналитических методик [1,2,3,9,12,13,14,19,20,22,37,60,65]. В таких случаях зачастую используется метод комплексного преобразования дифференциальных уравнений, позволяющий снизить порядок исходных уравнений, в результате чего решение краевой задачи выражается через элементарные или специальные функции. Также используется метод разделения переменных путем разложения компонент нагрузки и искомых

функций в ряды Фурье по окружной координате, что позволяет решать широкий класс задач о неосесимметричном НДС оболочек вращения. Ряд частных решений геометрически нелинейных краевых задач механики пластин и оболочек представлен в работах А.С. Вольмира, А.В. Кармишина, В.И. Феодосьева [20,21,89,99]. Однако область применения аналитических методов, позволяющих получать решения нелинейных краевых задач в замкнутой аналитической форме, как правило ограничена тонкостенными конструкциями достаточно простой геометрической формы, изготовленными из изотропных материалов и при определенных видах нагружения. В работе [16] Н.В. Валишвили исследовал, в частности, осесимметричное НДС сферических и конических путем сведения нелинейной краевой задачи к соответствующей системе нелинейных уравнений и задаче Коши.

В настоящее время для решения сложных нелинейных краевых задач достаточно широко используются математические модели, в которых дискретизация по пространственным переменным осуществляется методом конечных разностей (МКР) или методом конечных элементов (МКЭ) а также методы сведения двумерных задач к одномерной [1,8,15,21,27,36,60,66,70,80,93]. С учетом современных требований к методам проектирования и конструирования тонкостенных конструкций, вызывающих необходимость учета как особенностей деформирования перспективных композиционных материалов, так и особенностей процессов деформирования конструкций в области больших перемещений и деформаций, в силу ограниченности применения аналитических методов дальнейшее расширение класса решаемых нелинейных краевых задач механики оболочек связано с разработкой и развитием адекватных математических моделей и их дискретных аналогов, а также экономичных и эффективных и экономичных вычислительных алгоритмов, допускающих их практическую реализацию на ЭВМ.

Одним из путей преодоления трудностей решения нелинейных задач, связанных с проблемой выбора начального приближения, влияющего на сходимость итерационного процесса, является метод продолжения решения по параметру, который реализуется в следующих двух формах: а) непрерывное продолжение, ос-

нованное на интегрировании задачи Коши по параметру с помощью явных схем; б) дискретное продолжение, реализующее шаговые процессы по параметру с итерационным уточнением решения на каждом шаге. С помощью этого метода решен широкий класс нелинейных краевых задач механики деформируемого твердого тела в работах Э.И. Григолюка, В.И. Шалашилина, А.В. Коровайцева и др. [35,50,51,52].

Задачи сильного изгиба тонкостенных оболочечных конструкций из линейно упругого и упруго-пластичного материалов в статической и динамической постановках были решены А.В. Коровайцевым [51,52] с использованием как дискретного, так и непрерывного вариантов продолжения решения по параметру.

В работе [88] предложено использование методов продолжения решения по параметру в формах М. Лаэя, Д.Ф. Давиденко и метода наилучшей параметризации для решения задач прочности и устойчивости оболочечных конструкций с учетом ортотропии материала.

В работах [53,54] предложено использование метода непрерывного продолжения по параметру к решению физически и геометрически нелинейных задач осесимметричного статического и динамического деформирования оболочек из гиперупругих материалов при произвольных перемещениях и деформациях.

С.С. Гаврюшиным в рамках реализации метода дискретного продолжения по параметру был предложен многопараметрический подход и прием смены подпространства параметров для решения задач деформирования оболочечных конструкций при больших перемещениях [23,24].

Следует отметить, что применение метода продолжения по параметру связано с необходимостью проведения большого объема вычислений, т.к. на каждом шаге итерационного процесса решается нелинейная краевая задача.

В двух работах [56,69] высказывается общая формулировка метода продолжения решения по параметру для систем, деформируемых нелинейно, таким образом, сформировались две разные формы метода.

В работе [118], скорее всего, в первый раз применили метод конечных элементов при использовании метода продолжения решения по параметру. С учетом

того, что в основе лежит идея нагружений, идущих последовательно друг за другом, было предложено строить касательную матрицу жесткости, используя полученные на предыдущем шаге данные координат и усилий, чтобы определять приращения обобщенных координат. Метод этот фактически равнозначен интегрированию задачи Коши методом Эйлера по параметру нагружения.

Используя конечные разности высокой точности, основанные на уравнениях Маргерра, были разработаны разностные уравнения для задачи устойчивости цилиндрической панели при равномерном давлении в работах [17,106].

Высокоточные схемы конечных разностей с использованием процедуры дискретизации продолжения решения с итерационной корректировкой через измененный метод Ньютона применялись, в частности, для решения проблем нелинейного деформирования оболочек сложной конфигурации в [5,31].

Следует отметить, что для дискретизации краевых задач как методом конечных элементов, так и методом конечных разностей типично наличие большого числа неизвестных величин. Одним из способов преодоления таких проблем является процедура проецирования множества решений на подпространство меньшего размера (т.е., редукция базиса) [8,32].

Использование квазидинамических методов для решения нелинейных осесимметричных краевых задач статики теории оболочек позволило существенно расширить область исследований [55,99,108,111]. Численная реализация методов стационарирования показала их высокую сходимость и экономичность в отношении затрат машинного времени по сравнению с другими известными методами решения как линейных, так и нелинейных краевых задач.

Решение двумерных нелинейных начально-краевых задач теории пластин и оболочек связано со значительными трудностями математического характера, поэтому даже при современном уровне развития ЭВМ число исследований, выполненных в этом направлении, относительно невелико. Для решения задач такого класса наиболее широко применяются численные методы, в которых дискретизация по пространственным переменным осуществляется с помощью метода конечных разностей (МКР) или метода конечных элементов (МКЭ). Отмечается более

высокая точность и эффективность МКР при решении нелинейных двумерных краевых задач, однако, вследствие существенно большей общности и гибкости в моделировании МКЭ превосходит МКР при исследовании статического и динамического деформирования конструкций произвольного типа в рамках линейных моделей [22,27,66,113].

В общем случае деформирования может иметь место как геометрическая, так и физическая нелинейность. В.В.Новожиловым введена следующая классификация расчетных схем [6375]:

- линейные физически и геометрически (ЛФ, ЛГ);
- нелинейные физически, геометрически линейные (НФ, ГЛ);
- линейные физически, геометрически нелинейные (ЛФ, ГН);
- нелинейные физически и геометрически (НФ, НГ).

В настоящей работе рассматриваются два последних случая - физически линейные и нелинейные задачи в рамках геометрически нелинейных соотношений при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций..

Для учета физической нелинейности используются соотношения деформационной теории пластичности (теории малых упруго-пластических деформаций). Деформационная теория дает достаточно точные с точки зрения практических приложений результаты при простом нагружении, а также при нагружениях, близких к простому [44,58,89].

При построении геометрических соотношений для произвольных значений перемещений и углов поворота нормали используются декартовы координаты, что упрощает систему дифференциальных уравнений, описывающих геометрию оболочки вращения как в исходном, так и в актуальном (деформированном) состоянии. На углы поворота нормали, соответствующие углам поворота в рамках гипотез Кирхгоффа-Лява, ограничения не накладываются.

Таким образом, обзор работ и анализ методов решения нелинейных краевых задач теории пластин и оболочек показывает, что определенный класс задач о деформировании оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности исследован недостаточно подробно, либо решение вообще отсутствует. Это отно-

сится, в первую очередь, к исследованию нелинейных процессов статического деформирования неоднородных тонкостенных конструкций при произвольных перемещениях и деформациях.

В настоящей диссертации для исследования особенностей деформирования неоднородных оболочек вращения при произвольных перемещениях и деформациях разрабатываются и развиваются адекватные математические модели, а также эффективные численные методы решения дискретных уравнений, обеспечивающие построение алгоритмов решений статических краевых задач механики тонкостенных конструкций с учетом геометрической и физической нелинейности на основе однотипных разностных схем.

§ 1.1. Деформированное состояние тонкостенных конструкций

Рассмотрим оболочку вращения (рис. 1.1). В общем случае двумерного напряженно-деформированного состояния (НДС) вектор перемещения точки М эквидистантной поверхности оболочки определяется параметрами

$$U=U(\alpha_1, \alpha_2, z); \quad V=V(\alpha_1, \alpha_2, z); \quad W=W(\alpha_1, \alpha_2, z), \quad (1.1)$$

где U, V, W - проекции вектора полного перемещения точки по ортам ортогонального триэдра e_1, e_2, e_3 (рис. 1.2); α_1, α_2 - координаты основания нормали на координатной поверхности $z=0$, z - расстояние в координатном направлении α_3 .

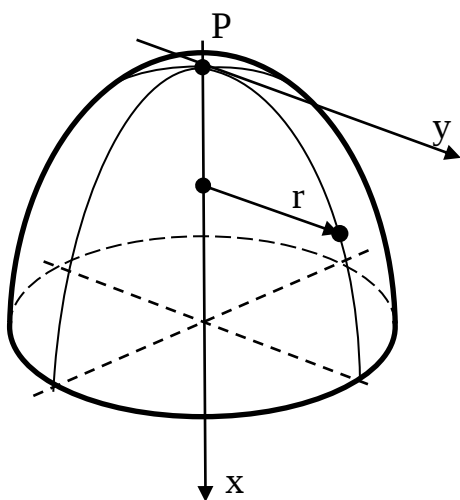


Рис. 1.1

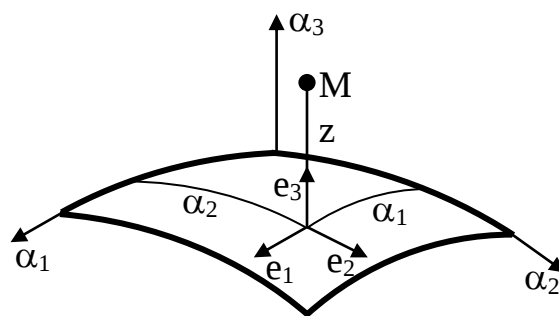


Рис. 1.2

Принимая в качестве координатной срединную поверхность оболочки, имеем: $h/2 \leq z \leq +h/2$, где h – толщина оболочки.

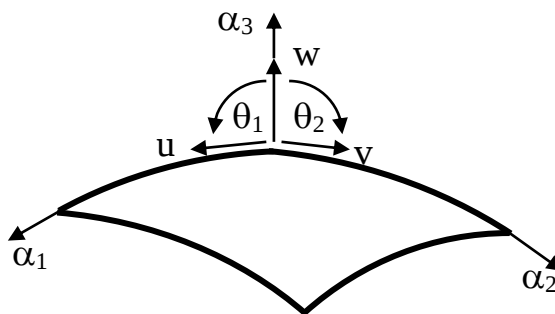


Рис. 1.3

Введем обозначения: $u=u(\alpha_1, \alpha_2)$, $v=v(\alpha_1, \alpha_2)$, $w=w(\alpha_1, \alpha_2)$ - перемещения точек координатной поверхности $z=0$; $\theta_1=\theta_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\theta_2=\theta_2(\alpha_1, \alpha_2)$ - углы поворота в соответствии с гипотезой о "жесткой" нормали. Положительные направления для обобщенных перемещений u_k показаны на рис.1.3 ($u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=w$; $k=1,2,3$).

Деформированное состояние описывается тензором деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \|\varepsilon_{ij}\|, \quad (1.2)$$

где ε_{ii} - удлинения вдоль координатных осей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\varepsilon_{ij}=\gamma_{ij}/2$ - сдвиги, γ_{ij} - углы сдвига ($i,j=1,2,3$). Интенсивность деформаций e_i определяется по формуле

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)}. \quad (1.3)$$

Ниже приняты следующие обозначения для компонент тензора деформаций: $E_{ii} = \varepsilon_{ii}$, $E_{ij} = \gamma_{ij}$.

1.1.1. Геометрически нелинейные соотношения для оболочек вращения при осесимметричном напряженно-деформированном состоянии

Рассмотрим оболочку вращения, срединная поверхность которой образована вращением плоской гладкой кривой вокруг прямой, лежащей в той же плоскости (оси вращения, рис. 1.4). При выводе как геометрических, так и физических соотношений используются традиционные предположения балочной теории: гипотеза плоских сечений и гипотеза об отсутствии нормальных напряжений в продольных сечениях. В качестве неизвестных принимаются изменения декартовых координат x, y , поскольку использование традиционных компонент тангенциального u и нормального w перемещения для рассматриваемого варианта геометрически нелинейного деформирования тонкостенных конструкций приводит к значительному усложнению структуры уравнений [13,35].

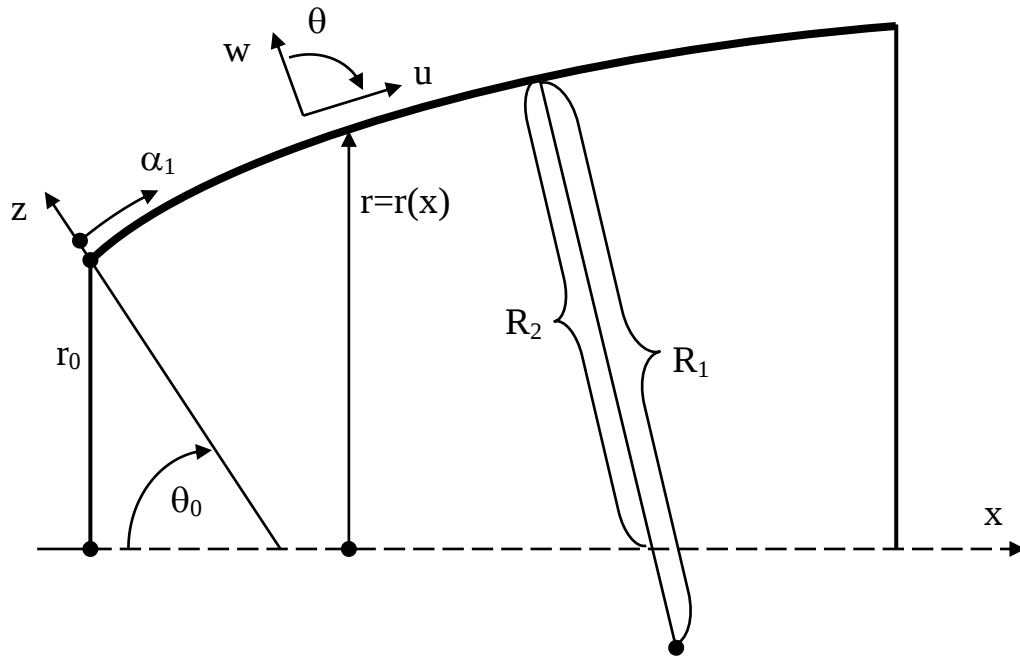


Рис. 1.4

В исходном (недеформированном) состоянии элемент образующей оболочки длиной ds_0 имеет начальные координаты x_0, y_0 , кривизны k_{10}, k_{20} и начальный угол θ_0 между осью x и нормалью к образующей (рис. 1.5).

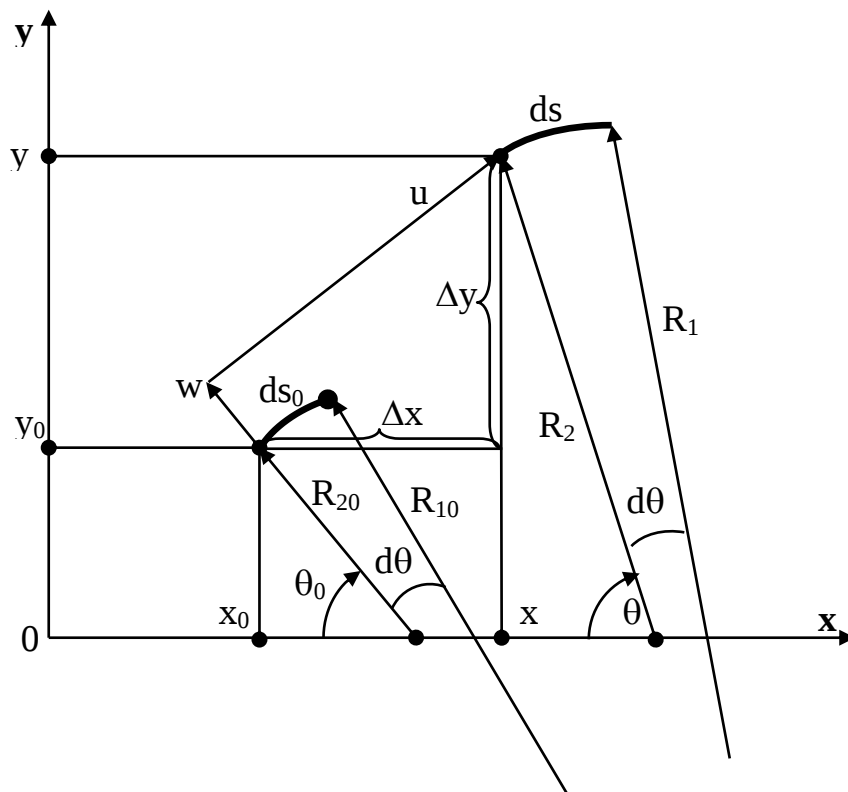


Рис. 1.5. Элемент оболочки до и после деформации

Тогда, полагая координаты x_0, y_0 заданными функциями линейной координаты вдоль образующей $x_0 = x_0(s_0)$, $y_0 = y_0(s_0)$, начальное состояние можно описать следующими геометрическими соотношениями

$$ds_0 = \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}; \quad \sin \theta_0 = \frac{dx_0}{ds_0}; \quad \cos \theta_0 = \frac{dy_0}{ds_0}; \quad (1.4)$$

$$ds_0 = R_{10} \cdot d\theta_0; \quad k_{10} = \frac{1}{R_{10}} = \frac{d\theta_0}{ds_0}; \quad k_{20} = \frac{1}{R_{20}} = \frac{\sin \theta_0}{y_0},$$

где R_{10} - начальный радиус кривизны поверхности в направлении образующей, R_{20} - начальный радиус кривизны в окружном направлении (рис. 1.4).

В деформированном состоянии элемент будет иметь длину ds , координаты x, y и кривизны k_1, k_2 . Рассматривая координаты x, y как функции линейной координаты s вдоль образующей $x = x(s)$, $y = y(s)$, для деформированного состояния можно записать соотношения, аналогичные (1.4)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}; \quad \sin \theta = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \theta = \frac{dy}{ds};$$

$$ds = R_1 \cdot d\theta; \quad k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}; \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \theta}{y}, \quad (1.5)$$

где θ - угол между нормалью к деформированной координатной поверхности и осью x . На углы поворота нормали $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, аналогичные углам поворота в рамках гипотезы о «жесткой» нормали Кирхгофа-Лява, ограничения не накладываются.

Компоненты линейной деформации оболочки вдоль образующей E_{11} и в окружном направлении E_{22} определяются выражениями

$$E_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1; \quad E_{22} = \frac{\pi \cdot y - \pi \cdot y_0}{\pi \cdot y_0} = \frac{y}{y_0} - 1. \quad (1.6)$$

Параметры изменения кривизны вдоль образующей K_{11} и в окружном направлении K_{22} определяются аналогично (1.6)

$$K_{11} = k_1 - k_{10} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta_0}{ds_0}; \quad K_{22} = k_2 - k_{20} = \frac{\sin \theta}{y} - \frac{\sin \theta_0}{y_0}. \quad (1.7)$$

Перемещения и деформации распределены по толщине оболочки линейно

$$U = u + z \cdot \Delta\theta; \quad W = w; \quad E_{11}(z) = E_{11} + z \cdot K_{11}; \quad E_{22}(z) = E_{22} + z \cdot K_{22}. \quad (1.8)$$

Геометрические параметры оболочки, описывающие ее исходную геометрию в любой точке, могут быть также определены через коэффициенты Ляме A_1, A_2 , главные кривизны k_1, k_2 и параметр ψ . Пусть образующая оболочки вращения задана зависимостью вида

$$r = r(x), \quad (1.9)$$

где $r(x)$ – расстояние от оси вращения до координатной поверхности, x – координата, направленная и отсчитываемая вдоль оси вращения (рис. 1.4). Тогда геометрические параметры оболочки определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2}; & A_2 &= r; & \psi &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{dr}{dx}; \\ k_1 &= -\frac{1}{A_1^3} \frac{d^2 r}{dx^2}; & k_2 &= \frac{1}{A_1 A_2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если функция (1.8), определяющая поверхность вращения, описывает кривую второго порядка вида $r = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, то с учетом (1.9) имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{1 + (c_1 + 2c_2 x)^2}; & A_2 &= r(x); \\ k_1 &= -\frac{2}{A_1^3} c_2; & k_2 &= \frac{1}{A_1 A_2}; & \psi &= \frac{1}{A_1 A_2} (c_1 + 2c_2 x). \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.1.2. Геометрические соотношения для арок и панелей при произвольных перемещениях и углах поворота нормали

Для арочных конструкций и панелей, работающих в условиях плоской деформации $E_{33}=0$, можно сформулировать соотношения, аналогичные (1.4)-(1.8).

Тогда для начального (недеформированного) состояния следует записать

$$\begin{aligned} ds_0 &= \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}; & \sin \theta_0 &= \frac{dx_0}{ds_0}; & \cos \theta_0 &= \frac{dy_0}{ds_0}; \\ ds_0 &= R_{10} \cdot d\theta_0; & k_{10} &= \frac{1}{R_{10}} = \frac{d\theta_0}{ds_0}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где x_0, y_0 - начальные координаты элемента недеформированной образующей длиной ds_0 , k_{10} и R_{10} - кривизна и радиус кривизны в направлении образующей, θ_0 - начальный угол между осью x и нормалью к образующей (рис. 1). В результате деформации элемент будет иметь длину ds , координаты x, y , угол поворота θ и кривизну k_1 . Рассматривая координаты x, y как функции линейной координаты s вдоль деформированной образующей $x=x(s)$, $y=y(s)$, для деформированного состояния с учетом $E_{22}=K_{22}=k_{20}=k_2=0$ имеем

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2}; & \sin \theta &= \frac{dx}{ds}; & \cos \theta &= \frac{dy}{ds}; \\ ds &= R_1 \cdot d\theta; & k_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где θ - угол поворота, аналогичный кинематическому параметру "жесткой" нормали в рамках гипотез Кирхгоффа-Лява. Ограничения на углы поворота θ также не накладываются. Компоненты деформации вдоль образующей E_{11} , а также изменение кривизны поверхности приведения K_{11} определяются как

$$E_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1; \quad K_{11} = k_1 - k_{10} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta_0}{ds_0}. \quad (1.14)$$

Компоненты деформации для волокна арки (панели) на расстоянии z от координатной поверхности с учетом принятых гипотез и допущений $z \cdot k_{10} \ll 1$ распределяются по линейному закону аналогично (1.8).

§ 1.2. Напряженное состояние. Физические соотношения для неоднородных оболочек при осесимметричном нагружении

Напряженное состояние в точке характеризуется симметричным тензором напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \|\sigma_{ij}\|, \quad (1.15)$$

где σ_{ii} - нормальные напряжения; $\sigma_{12}=\sigma_{21}, \sigma_{13}=\sigma_{31}, \sigma_{23}=\sigma_{32}$ - касательные напряжения. Интенсивность напряжений σ_i определяется по формуле

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)}, \quad (1.16)$$

где для касательных напряжений использованы обозначения $\tau_{ij}=\sigma_{ij}$.

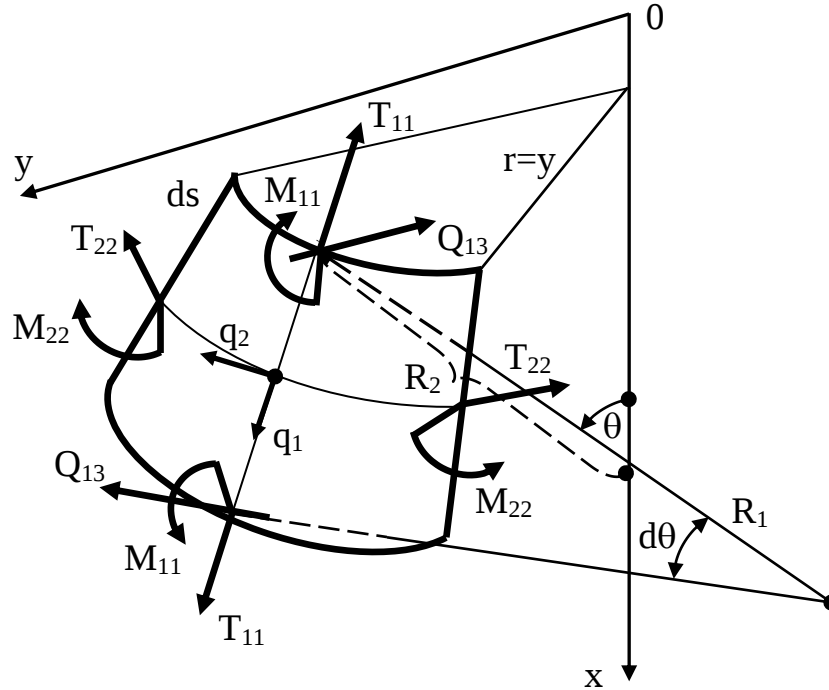


Рис. 1.6. Принятые положительные направления для силовых факторов, нагрузок, перемещений и углов поворота

Введем силовые факторы в поперечном сечении оболочки: продольную T_{11} и окружную силу T_{22} , поперечную силу Q_{13} , а также изгибающие моменты: M_{11} - в продольном направлении, M_{22} - в окружном (рис. 1.6). Для случая осесимметричного НДС внутренние усилия и моменты, приведенные к координатной поверхности оболочки, определяются через компоненты тензора напряжений по формулам

$$\begin{aligned} T_{11} &= \int_h \sigma_{11}(1 + zk_2)dz; & T_{22} &= \int_h \sigma_{22}(1 + zk_1)dz; \\ M_{11} &= \int_h \sigma_{11}(1 + zk_2)zdz; & M_{22} &= \int_h \sigma_{22}(1 + zk_1)zdz. \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $h=h(s)$ - толщина оболочки, в общем случае являющаяся функцией линейной координаты s . Формулы для усилий и моментов получаются при выполнении

операции интегрирования по толщине оболочки в (1.17) и пренебрежении членами порядка h/R_j .

Рассмотрим физические соотношения для ряда частных случаев неоднородных оболочек вращения, математические модели которых построены на гипотезах Кирхгоффа-Лява.

1.2.1. Однослойные упругие оболочки из ортотропных материалов

Для рассматриваемого варианта осесимметричного деформирования оболочек вращения в рамках модели Кирхгоффа-Лява ($\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{23}=0$) для анизотропного материала, у которого в каждой точке существуют три ортогональные плоскости упругой симметрии, перпендикулярные соответствующим координатным направлениям (ортотропного материала), уравнения обобщенного закона Гука в предположении $\sigma_{33}=0$ записываются в виде [3,9,19,48]

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}(E_{11} + \nu_{12}E_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}(E_{22} + \nu_{21}E_{11}), \quad (1.18)$$

где E_1, E_2 - модули Юнга по координатным направлениям α_1, α_2 ; ν_{12}, ν_{21} - коэффициенты Пуассона, первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй – направление действия силы. При этом

$$E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}. \quad (1.19)$$

Физико-механические характеристики материала оболочки – $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$ - в общем случае являются функциями координат α_1, α_2, z .

Для случая однослойной ортотропной оболочки, принимая в качестве координатной срединную поверхность оболочки $z=0$, из (1.17) с учетом зависимостей (1.8), (1.18), можно получить следующие выражения для усилий и моментов

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}E_{11} + B_{12}E_{22}; & M_{11} &= D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22}; \\ T_{22} &= B_{22}E_{22} + B_{21}E_{11}; & M_{22} &= D_{22}K_{22} + D_{21}K_{11}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}; \quad B_{12} = \nu_{12} B_{11}; \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}; \quad B_{21} = \nu_{21} B_{22}; \quad (1.21)$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}; \quad D_{12} = \nu_{12} D_{11}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}; \quad D_{21} = \nu_{21} D_{22}.$$

Для оболочек, изготовленных из изотропного материала, в формулах (1.20), (1.21) следует положить: $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$.

1.2.2. Многослойные оболочки вращения из композиционных материалов

Рассмотрим многослойную оболочку, из разнородных слоев толщиной h_m (m – индекс слоя: $1 \leq m \leq M$, M – число слоев), жестко связанных между собой в единый пакет (рис. 1.7). Индекс "m" используется как для нумерации слоев, так и для обозначения расчетных параметров и физико-механических характеристик слоя.

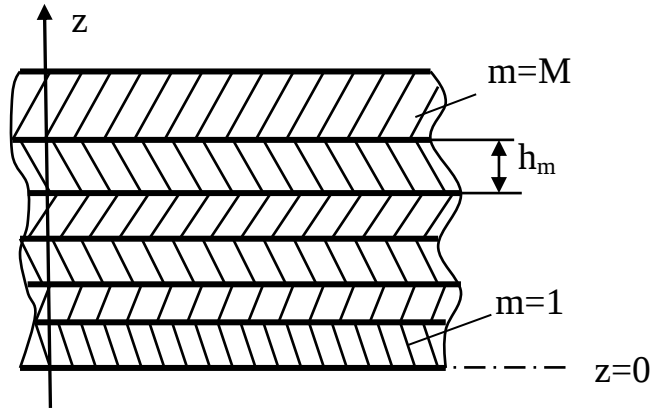


Рис. 1.7

Для всего пакета в целом принимаются условия жесткого контакта слоев без взаимного отрыва и проскальзывания. В качестве координатной поверхности может быть принята срединная поверхность одного из слоев, поверхность контакта слоев или линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений. Силовые факторы в многослойном пакете выражаются через компоненты деформации координатной поверхности по формулам [9,19,48]

$$T_{11} = B_{11} E_{11} + B_{12} E_{22} + A_{11} K_{11} + A_{12} K_{22};$$

$$T_{22} = B_{21} E_{11} + B_{22} E_{22} + A_{21} K_{11} + A_{22} K_{22}; \quad (1.22)$$

$$M_{11} = A_{11}E_{11} + A_{12}E_{22} + D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22};$$

$$M_{22} = A_{21}E_{11} + A_{22}E_{22} + D_{21}K_{11} + D_{22}K_{22},$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{m=1}^M \frac{E_1^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m - z_{m-1}); & B_{12} &= \sum_{m=1}^M \frac{E_1^{(m)} \cdot \nu_{12}^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m - z_{m-1}); \\ B_{22} &= \sum_{m=1}^M \frac{E_2^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m - z_{m-1}); & B_{21} &= B_{12}; \\ A_{11} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{E_1^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m^2 - z_{m-1}^2); & A_{12} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{E_1^{(m)} \cdot \nu_{12}^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m^2 - z_{m-1}^2); \\ A_{22} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{E_2^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m^2 - z_{m-1}^2); & A_{21} &= A_{12}; \\ D_{11} &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{E_1^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m^3 - z_{m-1}^3); & D_{12} &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{E_1^{(m)} \cdot \nu_{12}^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m^3 - z_{m-1}^3); \\ D_{22} &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{E_2^{(m)}}{[1 - \nu_{12}^{(m)} \cdot \nu_{21}^{(m)}]} (z_m^3 - z_{m-1}^3); & D_{21} &= D_{12}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Формулы (1.23) получены в предположении постоянства упругих характеристик материала $E_1^{(m)}, \nu_{12}^{(m)}, E_2^{(m)}, \nu_{21}^{(m)}$ в пределах m -го слоя.

1.2.3. Физические соотношения для однослойных и многослойных оболочек вращения из композиционных материалов при действии температурного поля

Здесь и далее рассматривается действие стационарного температурного поля в рамках гипотез Дюамеля - Неймана без учета температурных коэффициентов линейного сдвига материала. Тогда уравнения (1.18) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} [E_{11} + \nu_{12}E_{22} - (\beta_1 + \nu_{12}\beta_2)T]; \\ \sigma_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} [E_{22} + \nu_{21}E_{11} - (\beta_2 + \nu_{21}\beta_1)T], \end{aligned} \quad (1.24)$$

где β_1, β_2 - температурные коэффициенты линейного расширения материала, $T=T(s,z)$ - изменение температуры.

Для однослойной ортотропной оболочки, принимая в качестве координатной срединную поверхность оболочки $z=0$, соотношения термоупругости можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}E_{11} + B_{12}E_{22} - T_{1T}; & M_{11} &= D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22} - M_{1T}; \\ T_{22} &= B_{22}E_{22} + B_{21}E_{11} - T_{2T}; & M_{22} &= D_{22}K_{22} + D_{21}K_{11} - M_{2T}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned} T_{1T} &= E_1(\beta_1 + \nu_{12}\beta_2) \int_{-h/2}^{h/2} Tdz; & M_{1T} &= E_1(\beta_1 + \nu_{12}\beta_2) \int_{-h/2}^{h/2} Tzdz; \\ T_{2T} &= E_2(\beta_2 + \nu_{21}\beta_1) \int_{-h/2}^{h/2} Tdz; & M_{2T} &= E_2(\beta_2 + \nu_{21}\beta_1) \int_{-h/2}^{h/2} Tzdz. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Для большинства практических задач в соответствии с (1.8) можно принять линейное распределение температуры T по толщине оболочки

$$T = a + b \cdot z, \quad (1.27)$$

где

$$a = \frac{T_1 + T_2}{2}; \quad b = \frac{T_2 - T_1}{h}, \quad (1.28)$$

и где T_1 и T_2 - температура на внутренней $z = -h/2$ и наружной $z = +h/2$ поверхностях оболочки соответственно. С учетом (1.27), (1.28) температурные слагаемые (1.26) запишутся в виде

$$\begin{aligned} T_{1T} &= E_1(\beta_1 + \nu_{12}\beta_2) \cdot ah; & M_{1T} &= E_1(\beta_1 + \nu_{12}\beta_2) \cdot \frac{bh^3}{12}; \\ T_{2T} &= E_2(\beta_2 + \nu_{21}\beta_1) \cdot ah; & M_{2T} &= E_2(\beta_2 + \nu_{21}\beta_1) \cdot \frac{bh^3}{12}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

При действии температурного поля физико-механические характеристики материала оболочки меняются, что учитывается использованием их соответствующих значений в формулах (1.25)-(1.29) [9,19,48].

Силовые факторы в многослойной тонкостенной конструкции из композитов при действии температурного поля $T=T(s,z)$ выражаются через компоненты

тангенциальной и изгибной деформации координатной поверхности следующим образом

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}E_{11} + B_{12}E_{22} + A_{11}K_{11} + A_{12}K_{22} - T_{1T}; \\ T_{22} &= B_{21}E_{11} + B_{22}E_{22} + A_{21}K_{11} + A_{22}K_{22} - T_{2T}; \\ M_{11} &= A_{11}E_{11} + A_{12}E_{22} + D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22} - M_{1T}; \\ M_{22} &= A_{21}E_{11} + A_{22}E_{22} + D_{21}K_{11} + D_{22}K_{22} - M_{2T}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Входящие в соотношения упругости (1.30) жесткостные коэффициенты $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$ и температурные составляющие $T_{1T}, T_{2T}, M_{1T}, M_{2T}$ определяются через физико-механические характеристики слоев и их толщины аналогично (1.23), (1.26), (1.29).

1.2.4. Соотношения деформационной теории пластичности для оболочек вращения при осесимметричном напряженно-деформированном состоянии

В рамках соотношений деформационной теории пластичности рассматриваемая среда полагается изотропной, а среднее напряжение σ и объемная деформация θ связаны линейной зависимостью

$$\sigma = K\theta, \quad (1.31)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (1.32)$$

и где K - модуль объемного сжатия; E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона при упругих деформациях. Изменение формы элемента среды происходит за счет деформаций сдвига, при этом девиаторы деформаций и напряжений пропорциональны. Пластические деформации в оболочке возникают при условии текучести Мизеса $\sigma_i \geq \sigma_T$ ($e_i \geq \varepsilon_T$); σ_T, ε_T - предел текучести и деформация текучести при одномерной деформации растяжения - сжатия. Процесс активного нагружения определяется условием $d\sigma_i > 0$ ($de_i > 0$); при $d\sigma_i < 0$ ($de_i < 0$) начинается разгрузка материала, которая полагается линейно-упругой [44, 58, 89].

В рамках соотношений деформационной теории пластичности полагается, что пластические деформации в оболочке возникают при условии текучести Мизеса $\sigma_i \geq \sigma_T$ ($e_i \geq \varepsilon_T$); σ_T, ε_T - предел текучести и деформация текучести при одномерной деформации растяжения - сжатия. Выражения для интенсивностей деформаций e_i (1.3) и напряжений σ_i (1.16) для рассматриваемого случая осесимметричной деформации оболочек вращения имеют вид [3-5]

$$e_i = \frac{2}{3} \sqrt{E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2 - E_{11}E_{22} - E_{22}E_{33} - E_{33}E_{11}};$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}. \quad (1.33)$$

Процесс активного нагружения определяется условием $d\sigma_i > 0$ ($de_i > 0$); при $d\sigma_i < 0$ ($de_i < 0$) начинается разгрузка материала, которая полагается линейно-упругой [3-5]. В области активного нагружения зависимости между напряжениями и деформациями записываются в виде

$$\sigma_{11} = \left(K + \frac{4E_c}{9} \right) E_{11} + \left(K - \frac{2E_c}{9} \right) (E_{22} + E_{33});$$

$$\sigma_{22} = \left(K + \frac{4E_c}{9} \right) E_{22} + \left(K - \frac{2E_c}{9} \right) (E_{11} + E_{33}); \quad (1.34)$$

где $E_c = \sigma_i / e_i$ - секущий модуль диаграммы $\sigma_i(e_i)$, K - модуль объемного сжатия

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (1.35)$$

Зависимость $\sigma_i(e_i)$ аппроксимируется диаграммой с линейным упрочнением (рис. 1.8).

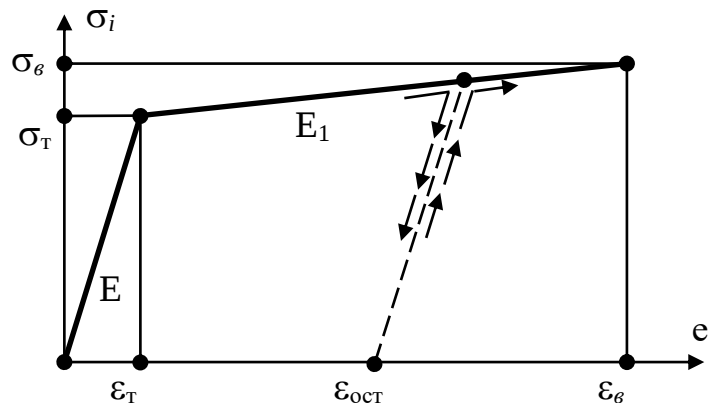


Рис. 1.8. Диаграмма $\sigma_i(e_i)$ с линейным упрочнением

Тогда секущий модуль равен

$$E_c = \frac{\sigma_T}{e_i} + E_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{e_i}\right), \quad (1.36)$$

где E_1 - касательный модуль при $\sigma_i > \sigma_T$ ($e_i > e_T$) (рис. 1.8).

Деформация E_{33} определяется из условия $\sigma_{33} = 0$ следующим образом

$$E_{33}^{up} = -\frac{\nu}{1-\nu}(E_{11} + E_{22}); \quad E_{33}^{pl} = -\frac{9K - 2E_c}{9K + 4E_c}(E_{11} + E_{22}), \quad (1.37)$$

где E_{33}^{up} и E_{33}^{pl} - обжатие при упругих и пластических деформациях соответственно. При разгрузке напряжения выражаются через деформации как

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^* + \frac{E}{1-\nu^2}[(E_{11} - E_{11}^*) + \nu(E_{22} - E_{22}^*)]; \quad (1.38)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^* + \frac{E}{1-\nu^2}[(E_{22} - E_{22}^*) + \nu(E_{11} - E_{11}^*)].$$

Звездочкой в (1.38) отмечены напряжения и деформации в момент начала разгрузки. Усилия T_{11}, T_{22} и моменты M_{11}, M_{22} вычисляются путем интегрирования напряжений (1.34),(1.38) по толщине оболочки в соответствии с (1.17).

1.2.5. Физические соотношения для оболочек вращения при произвольных деформациях. Математические модели нелинейно упругих материалов

Для формулировки закона состояния упругого тела в рамках физически нелинейной теории упругости, как правило, используется потенциальная энергия деформации, рассматриваемая как скалярная функция инвариантов тензоров либо мер деформации [1]. При этом модели материалов, для которых потенциальная энергия существует как неотрицательная функция инвариантов тензоров либо мер деформации, принято называть упругими по Грину или гиперупругими материалами [24,52,115]. Существуют различные модели упругих материалов при больших деформациях, которые можно подразделить на три основные группы – слабосжимаемые материалы, несжимаемые материалы и сильносжимаемые (пористые, или пенные) материалы.

Для слабосжимаемых материалов простейшими являются модели Синьорини и Мурнагана, модель Блейтца и Ко, разработанная для резиноподобных слабосжимаемых материалов и упрощенная в дальнейшем в форме модели Ноулса-Стернберга и др.

Резиноподобные конструкционные материалы подразделяют, в свою очередь, как правило, на две группы: несжимаемые, к которым относится подавляющее большинство сплошных резин, и сильносжимаемые пористые или пенные материалы. Материалы первой группы отличаются с точки зрения математической формулировки уравнений состояния дополнительной связью в виде условия несжимаемости среды. К моделям первой группы относятся одноконстантная модель Трелоара (неогуковская модель), являющаяся линейным приближением закона состояния гиперупругого материала, что дает возможность построения ряда аналитических решений задач о деформации гиперупругой среды. Более сложной является модель Муни-Ривлина, реализуемая в большинстве практических приложений в двухконстантной форме. Модель Муни-Ривлина высшего порядка, содержащая три константы, реализуется в форме Синьорини или в форме Йео [115]. Более общий случай, реализованный в модели Джеймса-Грина-Симпсона третьего порядка, используется в большинстве программных приложений, реализующих метод конечных элементов.

В настоящей работе при выводе физических соотношений для тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов предполагается, что материал является изотропным и несжимаемым. В таком случае упругий потенциал, характеризующий физические свойства гиперупругого материала, является функцией трех главных инвариантов тензора деформации Коши-Грина, которые обычно представляются функциями главных кратностей удлинений $W=W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. В настоящей работе рассматривается два варианта упругих потенциалов для несжимаемых материалов [115]:

- одноконстантная неогуковская модель

$$W = C_{11} \cdot (I_1 - 3); \quad (1.39)$$

- двухконстантная модель Муни-Ривлина

$$W = C_{21} \cdot (I_1 - 3) + C_{22} \cdot (I_2 - 3), \quad (1.40)$$

где C_{11}, C_{21}, C_{22} – параметры материала, I_1, I_2 – инварианты тензора деформаций Коши-Грина

$$\text{для } I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \quad (1.41)$$

и где $\lambda_i = 1 + E_{ii}$, ($i=1,2,3$) – главные кратности удлинений. Для несжимаемого материала напряжения σ_{ii} выражаются через функции упругого потенциала следующим образом

$$\sigma_{ii} = -p + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}, \quad (1.42)$$

где p – гидростатическое давление. Из условия несжимаемости материала $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$ с учетом статической гипотезы теории оболочек $\sigma_{33} = 0$ можно получить выражение для кратности удлинения в направлении нормали к координатной поверхности оболочки

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (1.43)$$

и гидростатического давления p

$$p = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}. \quad (1.44)$$

Тогда с учетом (1.42)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}; \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

После соответствующих преобразований можно получить следующие выражения для напряжений σ_{11} и σ_{22} :

- неогуковская модель

$$\sigma_{11} = 2 \cdot C_{11} \cdot \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right); \quad (1.46)$$

$$\sigma_{22} = 2 \cdot C_{11} \cdot \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right);$$

- модель Муни-Ривлина

$$\sigma_{11} = 2 \cdot C_{21} \cdot \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + 2 \cdot C_{22} \cdot \left(\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right); \quad (1.47)$$

$$\sigma_{22} = 2 \cdot C_{21} \cdot \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + 2 \cdot C_{22} \cdot \left(\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_2^2} \right).$$

Силовые факторы определяются далее интегрированием напряжений (1.46), (1.47) по толщине оболочки h с учетом (1.8) и (1.17).

§ 1.3. Физические соотношения для арочных и панельных конструкций при произвольных перемещениях и углах поворота нормали

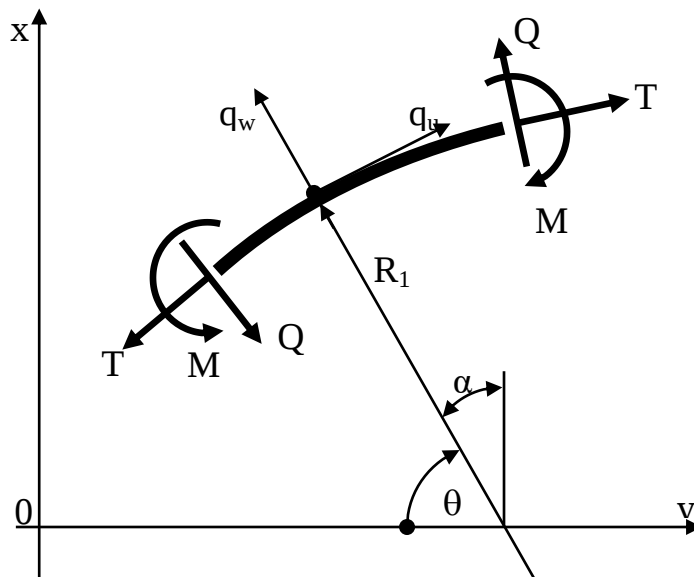


Рис. 1.9

По аналогии с § 1.2 для арок и панелей также введем силовые факторы в поперечном сечении: продольную T , поперечную силу Q и изгибающий момент M (рис. 1.9).

Для случая однослойной конструкции из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν имеем

$$T = B_{11} E_{11}; \quad M = D_{11} K_{11}, \quad (1.48)$$

где для арочной конструкции:

$$B_{11} = E \cdot F; \quad D_{11} = E \cdot J; \quad (1.49)$$

и где для упругих панелей при их цилиндрическом изгибе:

$$B_{11} = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2}; \quad D_{11} = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}. \quad (1.50)$$

В соотношениях (1.49), (1.50) F и J - площадь и момент инерции поперечного сечения арки относительно ее главной центральной оси, h - толщина панели. Для случая многослойной конструкции формулы для усилий и моментов (1.22) приобретают вид

$$T = B_{11}E_{11} + A_{11}K_{11}; \quad M = A_{11}E_{11} + D_{11}K_{11}. \quad (1.51)$$

Жесткостные коэффициенты A_{11}, B_{11}, D_{11} в формулах (1.51) по аналогии с (1.23) определяются через упругие характеристики слоев и их толщины как:

- для арочной конструкции:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} b \cdot E_m dz; & A_{11} &= \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} b \cdot E_m z dz; \\ D_{11} &= \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} b \cdot E_m z^2 dz; \end{aligned} \quad (1.52)$$

- для панельной конструкции:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} dz; & A_{11} &= \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{E_m \cdot z}{1 - \nu_m^2} dz; \\ D_{11} &= \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{E_m \cdot z^2}{1 - \nu_m^2} dz, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где в случае прямоугольного сечения $b=b(z)$ – ширина арки (в частном случае $b=\text{const}$), E_m, ν_m - модули Юнга и коэффициенты Пуассона m -го слоя. Полагая физико-механические характеристики материала m -го слоя неизменными в пределах слоя и отсчитывая координату z от нижней (свободной) поверхности первого слоя поверхности панели ($m=1$, рис. 1.7), формулы (1.52), (1.53) можно привести к виду

- для арочной конструкции:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{m=1}^M b \cdot E_m \cdot (z_m - z_{m-1}); & A_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M b \cdot E_m \cdot (z_m^2 - z_{m-1}^2); \\ D_{11} &= \frac{1}{3} \sum_{m=1}^M b \cdot E_m \cdot (z_m^3 - z_{m-1}^3); \end{aligned} \quad (1.54)$$

- для панельных конструкций:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \sum_{m=1}^M \frac{E_m \cdot (z_m - z_{m-1})}{1 - v_m^2}; & A_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{E_m \cdot (z_m^2 - z_{m-1}^2)}{1 - v_m^2}; \\
D_{11} &= \frac{1}{3} \sum_{m=1}^M \frac{E_m \cdot (z_m^3 - z_{m-1}^3)}{1 - v_m^2}.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Для конструкций из гиперупругих материалов после соответствующих преобразований в (1.39)-1.47) с учетом $E_{22}=0$ имеем следующие соотношения для компонент напряженного состояния:

- неогоуковская модель

$$\sigma_{11} = 2 \cdot C_{11} \cdot \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right); \tag{1.56}$$

- модель Муни-Ривлина

$$\sigma_{11} = 2 \cdot (C_{21} + C_{22}) \cdot \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right). \tag{1.57}$$

Физические соотношения для однослойных и многослойных конструкций при действии температурного поля (1.24)-(1.30), а также соотношения деформационной теории пластичности (1.31)-(1.38) для случая арочных и панельных конструкций при их цилиндрическом изгибе преобразуются аналогичным образом.

§ 1.4. Уравнения равновесия и граничные условия для оболочек вращения, арочных и панельных конструкций

1.4.1. Уравнения равновесия для тонкостенных конструкций при произвольных перемещениях и углах поворота нормали

На оболочку действует заданная локально или по всей поверхности распределенная осесимметричная нагрузка $q=q(s)$ с компонентами: $q_1=q_1(s)$ и $q_2=q_2(s)$ (рис. 1.6). Для случая действия консервативной нагрузки $q_1=q_x(s)$, $q_2=q_y(s)$, а для нагрузки «следающего» типа $q_1=q_u(s)$, $q_2=q_w(s)$. Положительные направления для компонент нагрузки q_1, q_2 показаны на рис. 1.6. Уравнения равновесия деформированного элемента оболочки вращения имеют вид [13,35,39]

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{d}{ds} (y \cdot T_{11}) - \frac{\cos \theta}{y} \cdot T_{22} + k_1 \cdot Q_{13} + q_1 &= 0; \\ \frac{1}{y} \frac{d}{ds} (y \cdot Q_{13}) - k_1 \cdot T_{11} - k_2 \cdot T_{22} + q_2 &= 0; \\ Q_{13} &= \frac{1}{y} \frac{d}{ds} (y \cdot M_{11}) - \frac{\cos \theta}{y} \cdot M_{22}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Для арочных и панельных конструкций в условиях плоской деформации введем также $q_1=q_1(s)$ и $q_2=q_2(s)$ – компоненты интенсивности распределенной нагрузки $q=q(s)$ (рис. 1.9).

Уравнения равновесия элемента арки (панели) имеют вид, аналогичный (1.58)

$$\frac{dT}{ds} + k_1 Q + q_1 = 0; \quad \frac{dQ}{ds} - k_1 T + q_2 = 0; \quad Q = \frac{dM}{ds}. \quad (1.59)$$

Соотношения (1.1)-(1.59) дополняются граничными условиями на краях $s=s_0$ и $s=s_L$.

1.4.2. Граничные условия для оболочек вращения, арок и панелей

Сформулируем наиболее важные в практическом отношении граничные условия на краях $s=s_0$ и $s=s_L$ (рис. 1.10). Не теряя общности, ограничимся граничными условиями на крае $s=s_0$ в виде жесткого защемления и шарнирного закрепления.

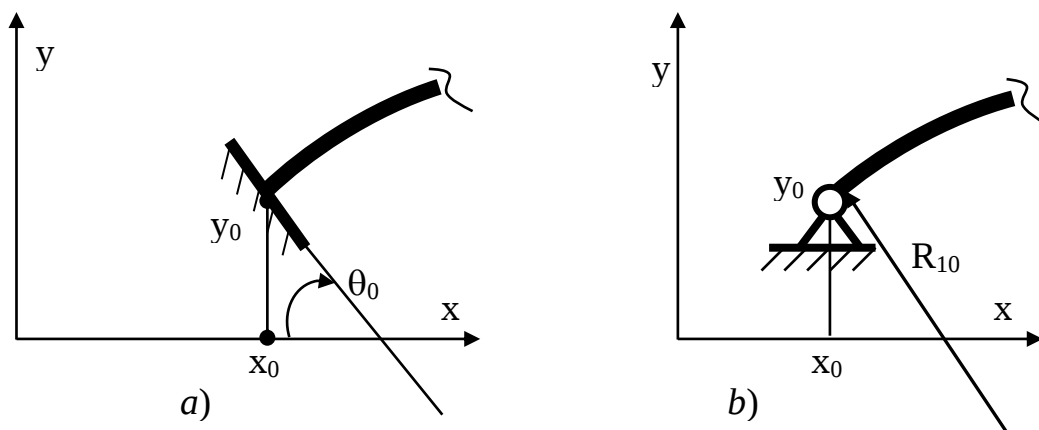


Рис. 1.10

Для оболочек вращения на крае $s=s_0$:

- жесткое защемление (рис. 1.10a)

$$x(s_0) = x_0; \quad y(s_0) = y_0; \quad \theta(s_0) = \theta_0; \quad (1.60)$$

- шарнирное закрепление (рис. 1.10b)

$$x(s_0) = x_0; \quad y(s_0) = y_0; \quad M_{11}(s_0) = 0. \quad (1.61)$$

Граничные условия на крае $s=s_L$ формулируются аналогично (1.60),(1.61).

Для арочных и панельных конструкций граничные условия на крае $s=s_0$ имеют вид:

- жесткое защемление (рис. 1.10a)

$$x(s_0) = x_0; \quad y(s_0) = y_0; \quad (1.62)$$

$$\theta(s_0) = \theta_0;$$

- шарнирное закрепление (рис. 1.10b)

$$x(s_0) = x_0; \quad y(s_0) = y_0; \quad (1.63)$$

$$k_1(s_0) = k_{10} = 1/R_{10}.$$

Как и для оболочек вращения, граничные условия для арочных и панельных конструкций на крае $s=s_L$ формулируются аналогично (1.62),(1.63).

§ 1.5. Формулировка краевой задачи для составной оболочечной конструкции

Составные тонкостенные конструкции обычно представляют собой набор оболочек вращения, соединенных между собой достаточно жесткими кольцевыми элементами – шпангоутами. Кроме того, шпангоут (или диск) может быть использован на одном из торцов оболочки для передачи краевых нагрузок.

В настоящей работе рассматривается НДС оболочки вращения с присоединенным к ней по одному из торцов жестким недеформируемым шпангоутом или диском (рис. 1.11). Предполагается, что смещение шпангоута (диска) представляет собой только перемещение x_m как жесткого целого вдоль оси оболочки x . На оболочку через шпангоут может передаваться осевая нагрузка F_x , положительное направление для которой показано на рис. 1.11. Такая формулировка краевой за-

дачи позволяет упростить практическую реализацию граничных условий на контуре оболочки, заданных в естественной форме.

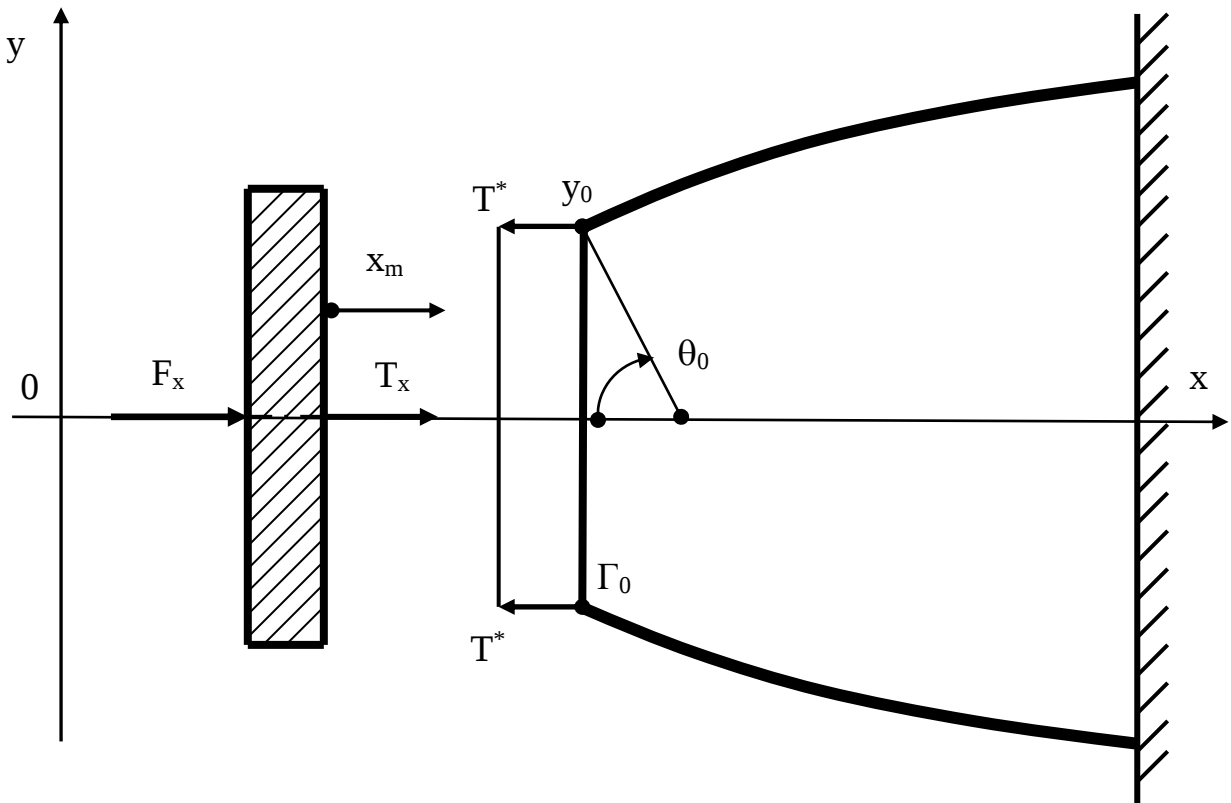


Рис. 1.11

Уравнение равновесия недеформируемого диска в проекции на ось x с учетом принятых положительных направлений для нагрузок и силовых факторов (рис. 1.6, 1.11) имеет вид

$$F_x + T_x = 0, \quad (1.64)$$

где F_x - осевая нагрузка на диск, T_x - реакция оболочки, которая вычисляется интегрированием по контуру Γ_0 (рис. 1.11)

$$T_x = 2 \cdot \pi \cdot y_0 \cdot T^*, \quad (1.65)$$

где в соответствии с принятыми положительными направлениями для силовых факторов (рис. 1.6)

$$T^* = T_{11} \sin \theta_0 - Q_{11} \cos \theta_0. \quad (1.66)$$

Кинематические граничные условия для жестко связанных между собой оболочки и диска на контуре Γ_0 формулируются в виде (рис. 1.11)

$$(x)_{\Gamma_0} = (x_0)_{\Gamma_0} + x_m; \quad (y)_{\Gamma_0} = (y_0)_{\Gamma_0}; \quad (\theta)_{\Gamma_0} = (\theta_0)_{\Gamma_0}. \quad (1.67)$$

ГЛАВА II. Дискретизация исходной нелинейной краевой задачи методом конечных разностей

§ 2.1. Вычислительный эксперимент в механике тонкостенных конструкций

Используемая для описания напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций разрешающая система исходных нелинейных дифференциальных уравнений (1.4)-(1.63) в виду ее сложности не допускает аналитических решений даже в относительно простых расчетных случаях. В настоящее время для теоретического исследования процессов статического и динамического деформирования тонкостенных конструкций широко используется вычислительный эксперимент (ВЭ), заключающийся в исследовании реальных процессов методами вычислительной математики [1,10,21,22,27,87].

Вычислительный эксперимент включает в себя несколько этапов. На первом этапе разрабатывается математическая модель исследуемой конструкции. При построении модели учитывается, какие параметры конструкции являются определяющими в данном исследовании, а какими можно пренебречь. Физическая модель описывается с помощью математической модели - системы дифференциальных или интегральных уравнений, которые обычно выражают законы сохранения основных физических величин. Первый этап вычислительный эксперимент был реализован в предыдущей главе настоящей работы.

На втором этапе ВЭ разрабатывается дискретная модель исходной интегродифференциальной задачи, а также вычислительный алгоритм для соответствующего численного метода решения задачи. Вычислительный алгоритм должен обеспечивать решение задачи с заданной точностью $\delta > 0$ за конечное число действий $n(\delta)$. Разработанная математическая модель, сформулированная в функциях от непрерывных координат, сводится к конечномерной, что связано с необходимостью преобразования дифференциальной задачи к чисто алгебраической форме, обеспечивающей возможность реализации решения на ЭВМ. Это достигается путем построения соответствующей разностной схемы (РС). При построении РС

осуществляется дискретизация исходной континуальной задачи, что позволяет перейти от бесконечного множества чисел, представляющих функции непрерывных аргументов, к конечному множеству параметров как функциям дискретного аргумента. В теории тонкостенных конструкций для построения разностных схем наиболее широко используется метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР).

Третий и четвертый этапы заключаются в программировании вычислительного алгоритма и проведении расчетов на ЭВМ. Пятый этап - это анализ полученных численных результатов и возможное последующее уточнение математической модели конструкции.

Вычислительный эксперимент, затраты на проведение которого существенно меньше затрат на натурный физический эксперимент, позволяет еще на стадии проектирования проводить оптимизацию конструкций по различным параметрам. Кроме того, во многих случаях бывает невозможно при помощи экспериментального оборудования воспроизвести реальные условия работы оболочечных конструкций.

Метод конечных элементов представляет собой один из видов вариационно-разностных методов [27,41,6676,92]. В МКЭ аппроксимируется само решение задачи при помощи базисных функций. Дискретизация МКЭ начинается с разбиения конструкции с помощью некоторой сетки на неперекрывающиеся подобласти конечных размеров - конечные элементы (КЭ), взаимосвязанные между собой в узловых точках. Выбор формы и размеров КЭ зависит от геометрических и структурных особенностей конструкции, при этом используемая конечно-элементная сетка должна обеспечивать простоту формы КЭ, возможно меньшую размерность и требуемую точность расчета. Точность решения задачи МКЭ в пределах каждого КЭ и, следовательно, по всей конструкции зависит от числа степеней свободы конечного элемента, равного произведению числа узловых точек на число неизвестных в каждой из точек конечно-элементной схемы. Повысить точность решения можно либо увеличением числа КЭ, либо увеличением числа узловых точек.

При расчете конструкций, обладающих большими размерами и сложной геометрией, используется метод суперэлементов.

С математической точки зрения МКЭ представляет собой развитие классических методов Ритца, Бубнова-Галеркина. Специфика заключается в выборе координатных функций, носящих локальный характер, и в формировании функционала. Метод конечных элементов является, таким образом, вариантом метода Ритца со специфическим образом построенными конечномерными подпространствами [27,66,80,93].

В МКР (методе сеток) область непрерывного изменения аргументов исходной континуальной задачи заменяется дискретным множеством точек, называемым сеткой или сеточной областью и наложенным определенным образом на расчетную область. Выбор типа сетки - равномерная, неравномерная, косоугольная, ортогональная простая, скрещивающаяся и т.д. - определяется спецификой решаемой задачи. Аппроксимация на сетке исходной краевой задачи приводит к системе разностных (сеточных) уравнений. Разностные аналоги уравнений равновесия (движения) оболочки получаются из условия минимума разностного аналога соответствующего функционала, из условия удовлетворения сеточных функций интегральному тождеству и т.д. [1,11,86].

Как МКЭ, так и МКР обладают своими специфическими преимуществами и недостатками. Преимущества МКЭ связаны в основном с меньшей, чем в МКР, чувствительностью к форме внешней или внутренней границы оболочки, что делает МКЭ более предпочтительным при расчете нерегулярных конструкций сложной формы. Эффективность МКР связана с использованием простейших формул численного дифференцирования, а также минимального количества узлов численного интегрирования при аппроксимации соответствующих функционалов в вариационных уравнениях. В настоящей работе для дискретизации тонкостенных конструкций используется МКР.

Применение МКЭ или МКР для решения прикладных задач теории оболочек приводит к системе алгебраических уравнений высокого порядка вида

$$AU - B = 0, \tag{2.1}$$

где U - искомый вектор обобщенных перемещений. Поскольку использование прямых (точных) методов для решения системы (2.1) в задачах механики пластин и оболочек связано со значительными трудностями математического характера и имеет весьма ограниченную область практического приложения, то обычно используются итерационные методы, полученные на основе различных явных и неявных разностных схем. В итерационных методах решение системы (2.1) находится как предел последовательных приближений $U^{(n)}$: $U^{(n)} \rightarrow U$ при $n \rightarrow \infty$; n - номер приближения (итерации). Поскольку за конечное число итераций этот предел не достигается, то итерационный процесс продолжается до выполнения одного или нескольких условий вида

$$|U^{(n)} - U^{(n+1)}| < \Delta U; \quad (2.2)$$

$$\left| \frac{U^{(n)} - U^{(n+1)}}{U^{(n+1)}} \right| < \delta(U); \quad (2.3)$$

$$|AU^{(n)} - B| < \Delta R, \quad (2.4)$$

где $\Delta U, \delta(U), \Delta R$ - заданные абсолютная, относительная погрешность и невязка уравнений (2.1). Эффективность различных численных методов обычно оценивается по числу итераций $n(\delta)$, необходимых для удовлетворения условий (2.2)-(2.4), а также по затратам машинного времени и памяти ЭВМ.

Недостатки явных схем связаны, в основном, с зависимостью числа итераций $n(\delta)$ от числа неизвестных K , т.к. при сгущении сетки ограничения, налагаемые критерием устойчивости, приводят к уменьшению шага по времени. Численным методам, построенным на неявных схемах, указанные недостатки не характерны, и сходимость достигается за относительно небольшое число итераций. Однако, значительные трудности практической реализации вычислительных алгоритмов для сложных задач с разрывами полей параметров НДС в рамках соотношений нелинейных моделей тонкостенных конструкций существенно ограничивают область применения неявных схем [1,16,22,36,59].

Практическая реализация вычислительных алгоритмов, построенных на явных схемах, не вызывает таких затруднений даже при решении сложных, нелинейных многосвязных задач при меньших затратах времени и памяти ЭВМ. В связи с этим для решения сеточных аналогов исходных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейное деформирование тонкостенных конструкций, в диссертации разрабатываются эффективные и экономичные численные методы, построенные на основе явных разностных схем.

§ 2.2. Особенности построения разностных схем для случая произвольных значений обобщенных перемещений и деформаций тонкостенных конструкций

При численном решении краевой задачи (1.4)-(1.63) для дискретизации по пространственным переменным используется метод конечных разностей (МКР) [3,6]. В области изменения аргумента s вводятся две сетки: основная с целочисленными индексами i и вспомогательная с индексами $i \pm 1/2$, узлы которой располагаются посередине между узлами основной сетки $i \pm 1$ (рис. 2.1).

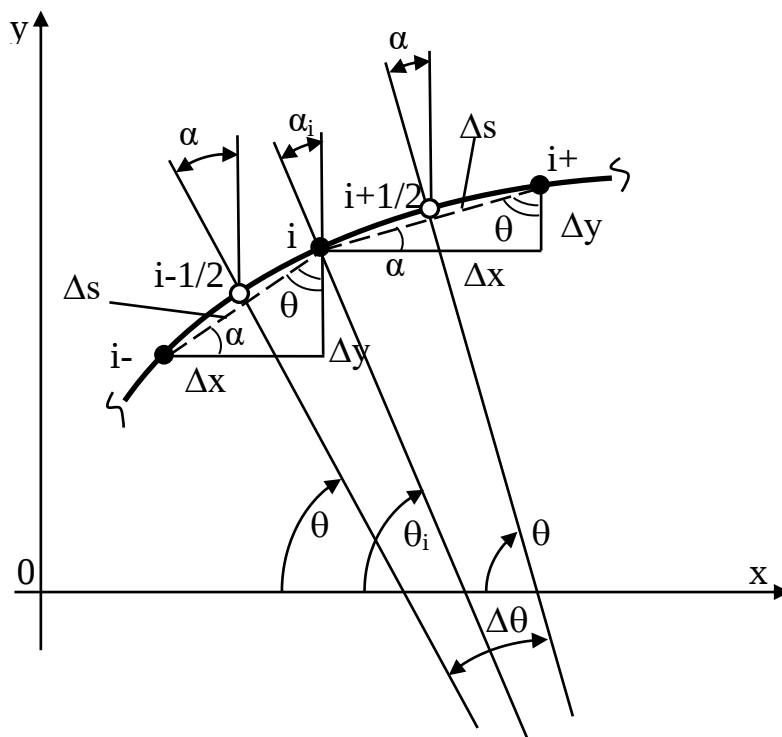


Рис. 2.1. Конечно-разностная аппроксимация геометрии оболочки

Для аппроксимации частных производных в исходных дифференциальных соотношениях используются разностные операторы второго порядка точности (Δs^2). Начальная геометрия задается сеточными функциями $(x_0)_i, (y_0)_i$, которые соотносятся с узлами основной сетки. При этом сеточные функции $(x_0)_i, (y_0)_i$ задаются из условия постоянства шага $\Delta s_0 = \text{const}$ для всей расчетной области оболочки $0 \leq s_0 \leq S_L$

$$\Delta s_0 = \frac{S_L}{N-1}, \quad (2.5)$$

где N – число точек дискретизации: $1 \leq i \leq N$. Геометрия оболочки в деформированном состоянии задается сеточными функциями x_i, y_i , которые также соотносятся с узлами основной сетки.

При конечно-разностной аппроксимации параметров напряженно-деформированного состояния и далее используется следующее эмпирическое правило: *при построении РС не следует зря раскрывать скобки и пользоваться формулой дифференцирования произведения* [10]. Использование этого правила позволяет избежать ненужного усложнения структуры конечно-разностных аналогов исходных дифференциальных уравнений.

Искомые функции обобщенных перемещений аппроксимируются кусочно-линейными с интерполяцией функций внутри ячейки через значения $u_k(i)$ в узлах основной сетки.

2.2.1. Конечно-разностная аппроксимация параметров деформированного состояния оболочек, арок и панелей

Геометрические соотношения (1.4), описывающие исходное состояние оболочки, аппроксимируются следующим образом (рис. 2.1)

$$\begin{aligned} (\Delta s_0)_{i-1/2} &= \Delta s_1 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}; & (\Delta s_0)_{i+1/2} &= \Delta s_2 = \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2}; \\ (\Delta s_0)_i &= \frac{(\Delta s_0)_{i-1/2} + (\Delta s_0)_{i+1/2}}{2}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta s_1}; \quad \theta_1 = (\theta_0)_{i-1/2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1; \quad \sin \alpha_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta s_2}; \quad \theta_2 = (\theta_0)_{i+1/2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_2;$$

$$(k_{10})_i = \frac{(\theta_0)_{i+1/2} - (\theta_0)_{i-1/2}}{(\Delta s_0)_i}; \quad (k_{20})_{i-1/2} = \frac{\sin \theta_1}{(y_0)_{i-1/2}}; \quad (k_{20})_{i+1/2} = \frac{\sin \theta_2}{(y_0)_{i+1/2}},$$

где

$$\Delta x_1 = (x_0)_i - (x_0)_{i-1}; \quad \Delta y_1 = (y_0)_i - (y_0)_{i-1};$$

$$\Delta x_2 = (x_0)_{i+1} - (x_0)_i; \quad \Delta y_2 = (y_0)_{i+1} - (y_0)_i. \quad (2.7)$$

Для описания деформированного состояния через сеточные функции узловых перемещений x_i и y_i с аппроксимацией соотношений (1.5) конечно-разностными операторами, аналогичными (2.6),(2.7) (рис. 2.1)

$$\Delta s_{i-1/2} = \Delta s_1 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}; \quad \Delta s_{i+1/2} = \Delta s_2 = \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2}; \quad \Delta s_i = \frac{\Delta s_{i-1/2} + \Delta s_{i+1/2}}{2};$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta s_1}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta s_2}; \quad \theta_1 = \theta_{i-1/2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1; \quad \theta_2 = \theta_{i+1/2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_2;$$

$$(k_1)_i = \frac{\theta_{i+1/2} - \theta_{i-1/2}}{\Delta s_i}; \quad (k_2)_{i-1/2} = \frac{\sin \theta_1}{y_{i-1/2}}; \quad (k_2)_{i+1/2} = \frac{\sin \theta_2}{y_{i+1/2}}, \quad (2.8)$$

где

$$\Delta x_1 = x_i - x_{i-1}; \quad \Delta y_1 = y_i - y_{i-1};$$

$$\Delta x_2 = x_{i+1} - x_i; \quad \Delta y_2 = y_{i+1} - y_i. \quad (2.9)$$

На рис. (2.2)-(2.8) показаны различные варианты аппроксимации образующей оболочки вращения, которые использовались при разработке вычислительного алгоритма для описания геометрических параметров как в исходном, так и деформированном состоянии оболочки.

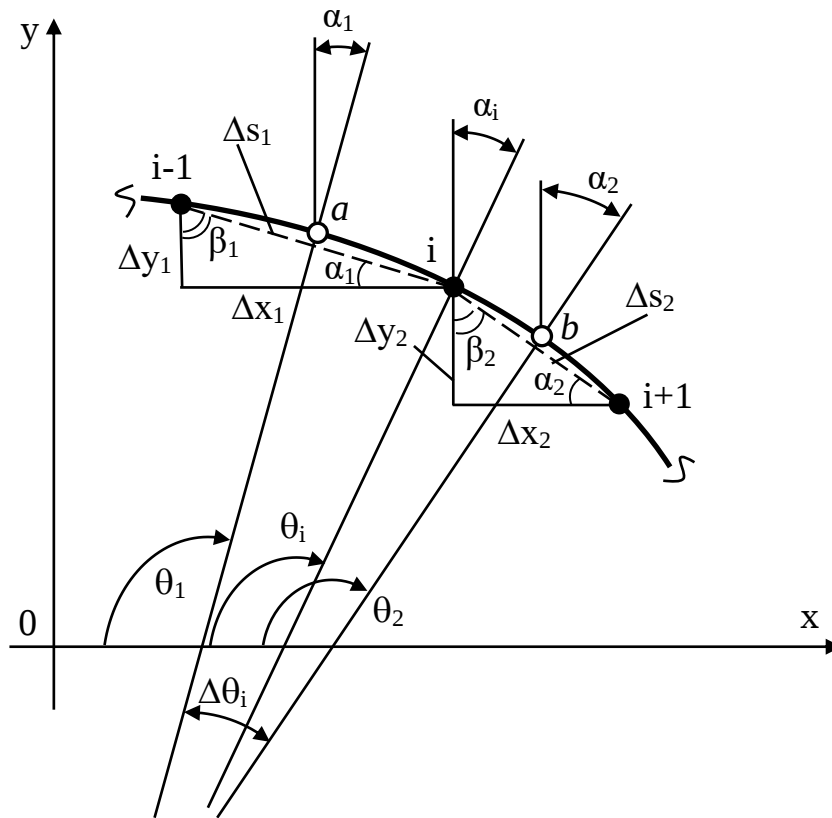


Рис. 2.2. Конечно-разностная аппроксимация геометрии оболочки
при $\Delta x_1 > 0$; $\Delta y_1 < 0$ и $\Delta x_2 > 0$; $\Delta y_2 < 0$

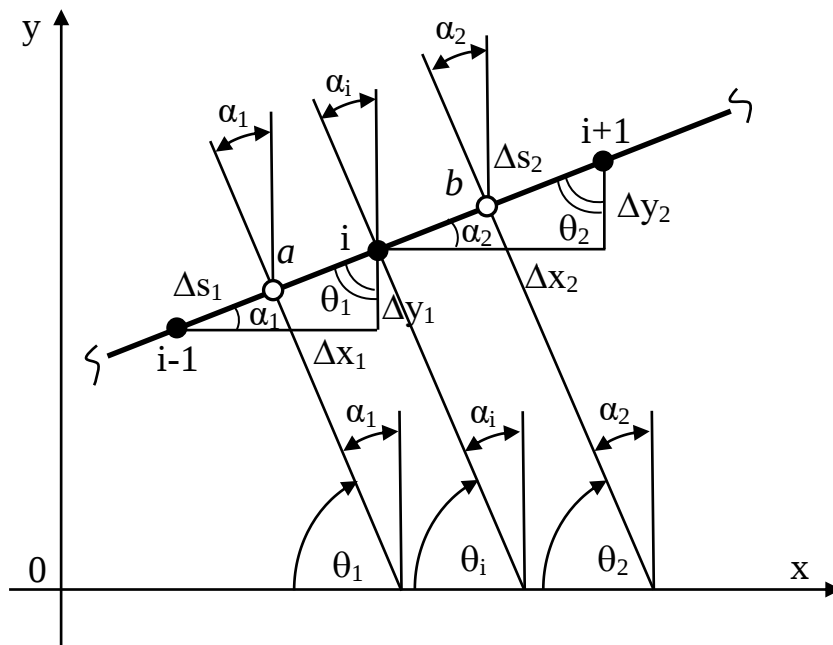


Рис. 2.3. Конечно-разностная аппроксимация геометрии оболочки
при $\Delta x_1 > 0$; $\Delta y_1 > 0$ и $\Delta x_2 > 0$; $\Delta y_2 > 0$

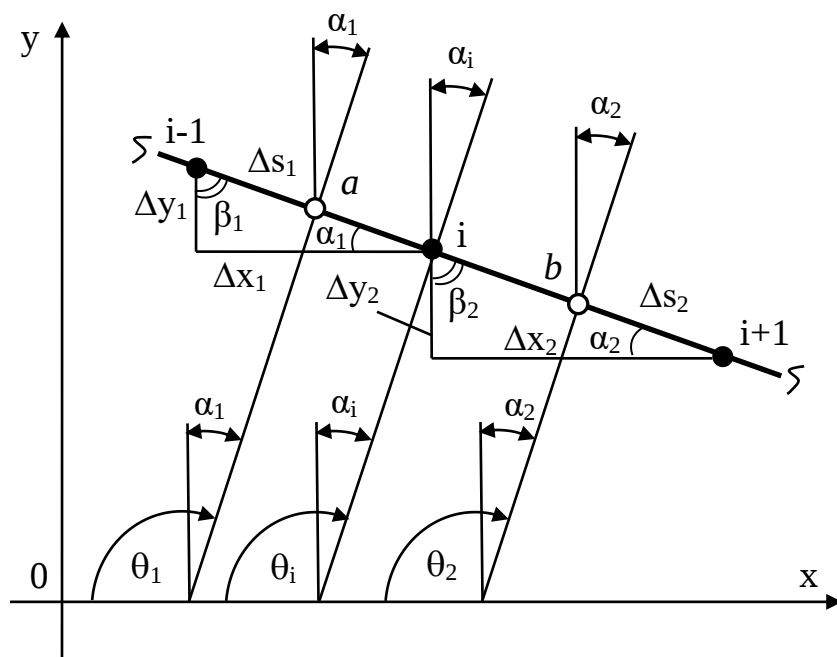


Рис. 2.4. Конечно-разностная аппроксимация геометрии оболочки
при $\Delta x_1 > 0$; $\Delta y_1 < 0$ и $\Delta x_2 > 0$; $\Delta y_2 < 0$

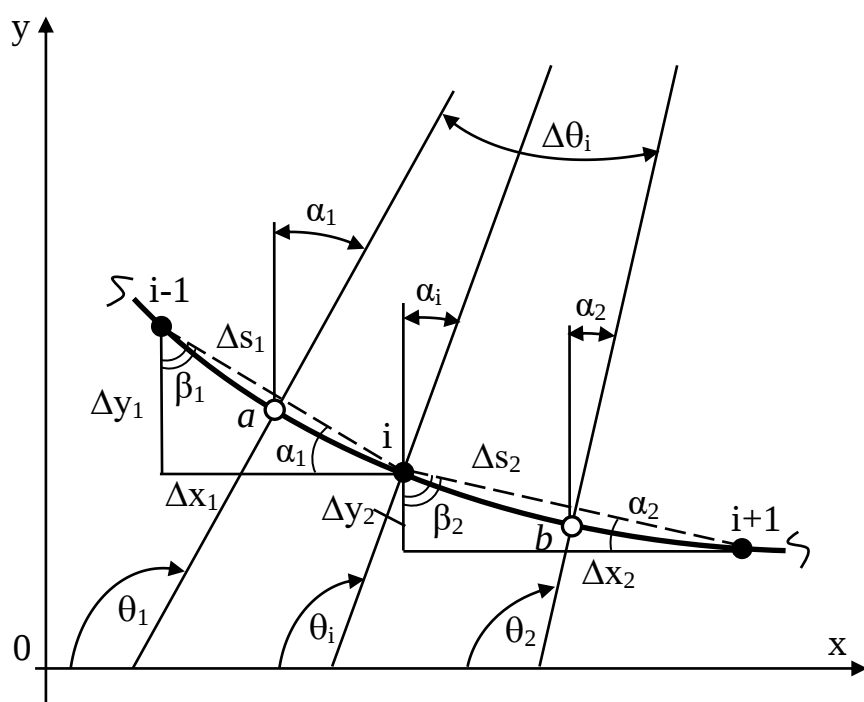


Рис. 2.5. Конечно-разностная аппроксимация геометрии оболочки
при $\Delta x_1 > 0$; $\Delta y_1 < 0$ и $\Delta x_2 > 0$; $\Delta y_2 < 0$

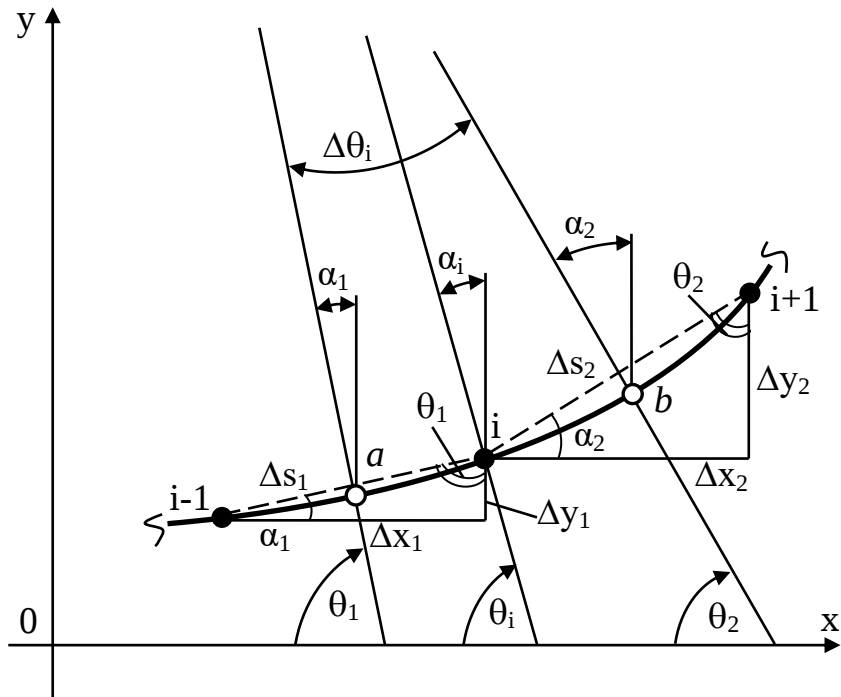


Рис. 2.6. Конечно-разностная аппроксимация геометрии оболочки
при $\Delta x_1 > 0$; $\Delta y_1 > 0$ и $\Delta x_2 > 0$; $\Delta y_2 > 0$

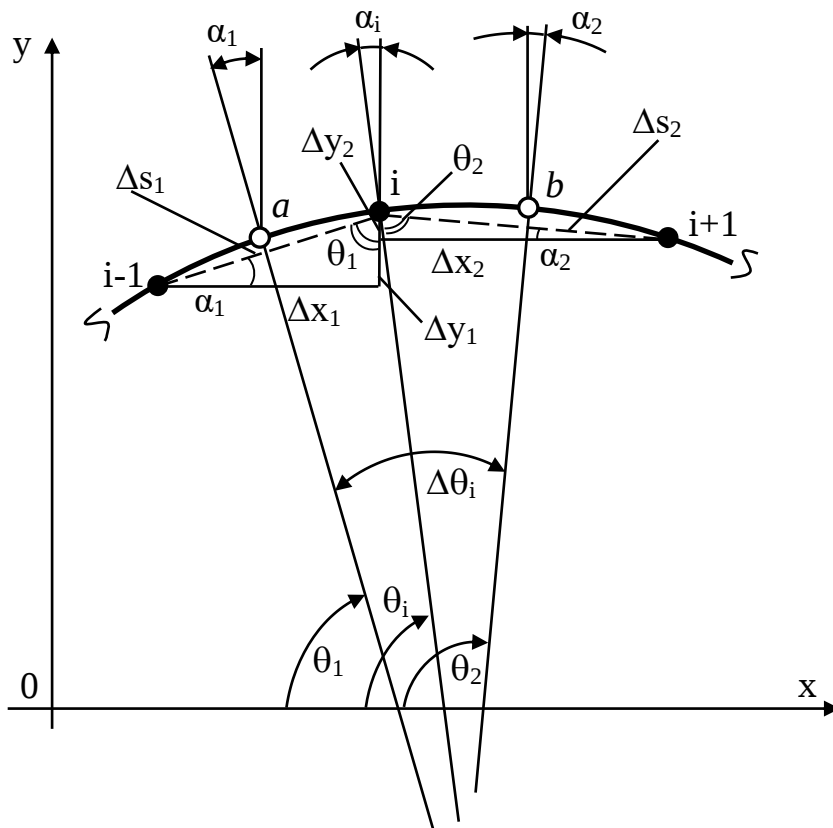


Рис. 2.7. Конечно-разностная аппроксимация геометрии оболочки
при $\Delta x_1 > 0$; $\Delta y_1 > 0$ и $\Delta x_2 > 0$; $\Delta y_2 < 0$

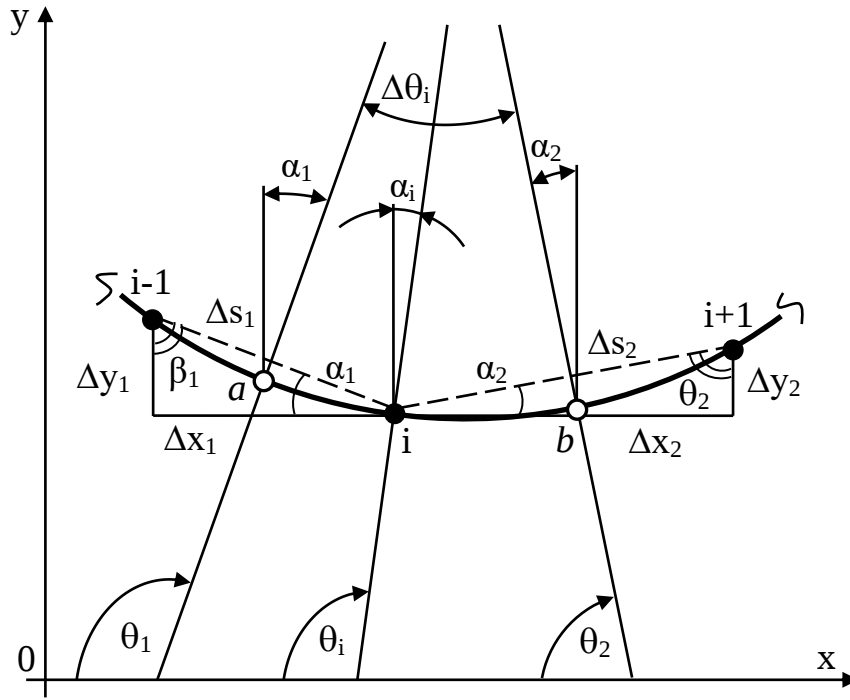


Рис. 2.8. Конечно-разностная аппроксимация геометрии оболочки
при $\Delta x_1 > 0$; $\Delta y_1 < 0$ и $\Delta x_2 > 0$; $\Delta y_2 > 0$

Параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) соотносятся с узлами как основной, так и вспомогательной сетки. Сеточные функции компонент деформаций и изменения кривизн в (1.6) и (1.7) аппроксимируются как

$$(E_{11})_{i\pm 1/2} = \frac{\Delta s_{i\pm 1/2} - (\Delta s_0)_{i\pm 1/2}}{(\Delta s_0)_{i\pm 1/2}}; \quad (E_{22})_i = \frac{y_i}{(y_0)_i} - 1; \quad (2.10)$$

$$(K_{11})_i = (k_1)_i - (k_{10})_i; \quad (K_{22})_{i\pm 1/2} = (k_2)_{i\pm 1/2} - (k_{20})_{i\pm 1/2}.$$

Как следует из соотношений (2.6)-(2.9), для описания как исходного, так и деформированного состояния используются однотипные конечно-разностные аппроксимации.

Геометрические соотношения для арок и панелей (1.12)-(1.14) аппроксимируются аналогично (2.6)-(2.10).

2.2.2. Конечно-разностная аппроксимация параметров напряженного состояния оболочек, арок и панелей

Параметры напряженного состояния тонкостенных конструкций - напряжения, усилия и моменты - аппроксимируются в тех же точках основной и вспомогательной сеток, что и соответствующие параметры деформированного состояния:

- T_{11} - в точках вспомогательной сетки $(i \pm 1/2)$;
- T_{22} - в узловых точках основной сетки i ;
- M_{11} - в узловых точках основной сетки i ;
- M_{22} - в точках вспомогательной сетки $(i \pm 1/2)$;
- Q_{13} - в точках вспомогательной сетки $(i \pm 1/2)$.

Сеточные функции физико-механических характеристик материала оболочки и толщины задаются в тех точках основной и вспомогательной сеток, где аппроксимируются соответствующие силовые факторы.

2.2.3. Построение разностных схем при решении физически нелинейных задач и расчете конструкций из гиперупругих материалов

При расчете оболочек с учетом физической нелинейности оболочка разбивается на заданное число слоев L по толщине (рис. 2.9). Сеточные функции интенсивности деформаций и напряжений (1.33) соотносятся с серединой l -го слоя; l - индекс слоя: $l=1,2,...,L$. Толщина каждого слоя определяется как: $\Delta h = h_i / L$. Поскольку разностная схема строится в форме метода перемещений, то условие текучести Мизеса используется в виде $(e_i)_l \geq \varepsilon_T$, где $(e_i)_l$ - сеточная функция интенсивности деформаций l -го слоя для i -ой узловой точки. Напряжения полагаются постоянными в пределах толщины слоя.

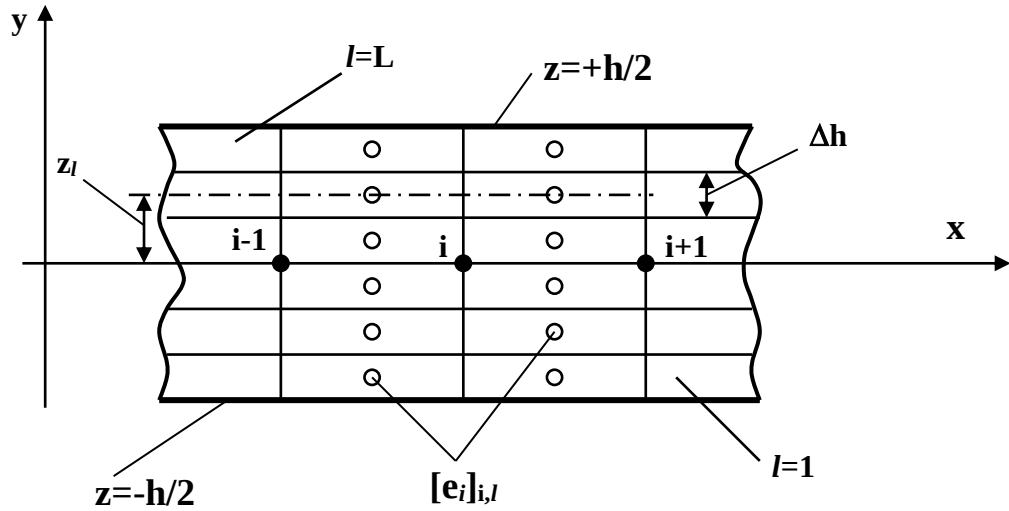


Рис. 2.9

Силовые факторы определяются численным интегрированием напряжений по толщине оболочки в (1.17) следующим образом

$$\begin{aligned}
 T_{11}(i \pm 1/2) &= \sum_{l=1}^L \sigma_{11}(i \pm 1/2, l) \cdot \Delta h; \\
 T_{22}(i) &= \sum_{l=1}^L \sigma_{22}(i, l) \cdot \Delta h; \\
 M_{11}(i) &= \sum_{l=1}^L \sigma_{11}(i, l) \cdot z_l \cdot \Delta h; \\
 M_{22}(i \pm 1/2) &= \sum_{l=1}^L \sigma_{22}(i \pm 1/2, l) \cdot z_l \cdot \Delta h,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

где z_l - координата середины l -го слоя (рис. 2.9).

Как следует из (2.11), сеточные функции компонент деформаций и напряжений (1.34)-(1.38), а также интенсивностей деформаций (1.33) вычисляются как в узлах основной сетки с целочисленными индексами i , так и вспомогательной сетки с дробными индексами $i \pm 1/2$.

При расчете тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов, описываемых соотношениями (1.39)-(1.47), оболочка (арка, панель) также разбивается на заданное число слоев L по первоначальной толщине h_0 . Напряжения σ_{11} и

σ_{22} в соотношениях (1.46),(1.47) вычисляются в середине текущего слоя и полагаются постоянными по толщине слоя. Усилия и моменты в тонкостенных конструкциях из гиперупругих материалов вычисляются численным интегрированием сеточных функций напряжений по толщине, аналогично (2.11). Однако, при расчете тонкостенных конструкциях из нелинейно упругих материалов в силу больших деформаций при выполнении интегрирования необходимо учитывать изменение первоначальной толщины h_0 в процессе деформирования. Деформация обжатия E_{33} может быть определена из (1.43) через главные кратности удлинений λ_1, λ_2 как

$$E_{33} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} - 1, \quad (2.12)$$

где

$$\lambda_1 = 1 + E_{11}; \quad \lambda_2 = 1 + E_{22}. \quad (2.13)$$

Учитывая, что

$$E_{33} = \frac{h - h_0}{h_0},$$

можно определить толщину h для деформированного состояния тонкостенной конструкции

$$h = h_0 \cdot (1 + E_{33}). \quad (2.14)$$

2.2.4. Особенности построения разностных схем для оболочек вращения, замкнутых в полюсе

При расчете замкнутых оболочек возникают проблемы построения численных решений дифференциальных уравнений равновесия (1.58), поскольку в полюсной точке P имеет место сингулярность в силу $r=0$ (рис. 2.10). В настоящей работе при расчете оболочек вращения с полюсной точкой при построении разностной схемы вводится законтурная (фиктивная) узловая точка основной сетки с индексом $i=1$, а полюсная точка P соотносится с узловой точкой вспомогательной сетки $i=1+1/2$ (рис. 2.11). Такой подход в сочетании с использованием условий

симметрии решений в т. Р при вычислении параметров НДС в соответствии с разд. 2.2.2 позволяет избежать отмеченных математических трудностей.

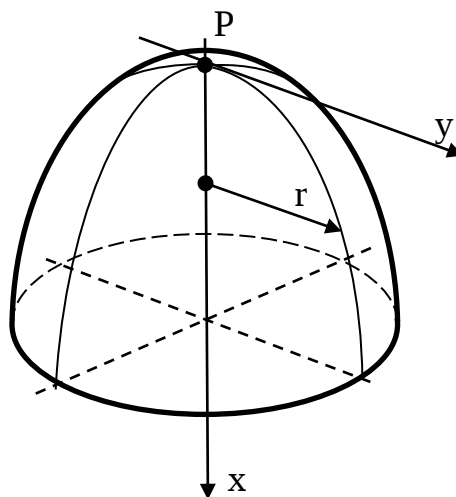


Рис. 2.10. Замкнутая в полюсе оболочка

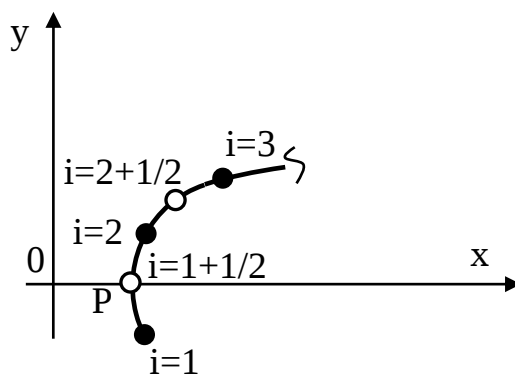


Рис. 2.11. Конечно-разностное моделирование полюсной точки

§ 2.3. Конечно-разностная аппроксимация уравнений равновесия

Для аппроксимации уравнений равновесия (1.58) используются центральные конечные разности. Сеточных аналоги уравнений равновесия (1.58), аппроксимированные относительно узловой точки основной сетки i , имеют вид

$$\frac{1}{y_i} \frac{(y \cdot T_{11})_{i+1/2} - (y \cdot T_{11})_{i-1/2}}{\Delta s_i} - \left(\frac{\cos \theta}{y} \cdot T_{22} \right)_i + \\ + (k_1)_i \cdot \frac{(Q_{13})_{i-1/2} + (Q_{13})_{i+1/2}}{2} + (q_1)_i = 0; \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{y_i} \frac{(y \cdot Q_{13})_{i+1/2} - (y \cdot Q_{13})_{i-1/2}}{\Delta s_i} - (k_1)_i \cdot \frac{(T_{11})_{i-1/2} + (T_{11})_{i+1/2}}{2} - (k_2 \cdot T_{22})_i + (q_2)_i = 0,$$

где

$$(Q_{13})_{i-1/2} = \frac{1}{y_{i-1/2}} \frac{(y \cdot M_{11})_i - (y \cdot M_{11})_{i-1}}{\Delta s_{i-1/2}} - \left(\frac{\cos \theta}{y} \cdot M_{22} \right)_{i-1/2}; \quad (2.16)$$

$$(Q_{13})_{i+1/2} = \frac{1}{y_{i+1/2}} \frac{(y \cdot M_{11})_{i+1} - (y \cdot M_{11})_i}{\Delta s_{i+1/2}} - \left(\frac{\cos \theta}{y} \cdot M_{22} \right)_{i+1/2},$$

и где $(q_1)_i, (q_2)_i$ - сеточные функции компонент поверхностной нагрузки.

Сеточные уравнения стационарной задачи (2.15) могут быть представлены в операторном виде как

$$[L_{\Delta s}(U_k)]_i + (q_k)_i = 0, \quad (2.17)$$

где $[L_{\Delta s}(U_k)]_i$ - соответствующие конечно-разностные операторы для вектора U_k сеточных функций перемещений; $(k=1,2)$.

При конечно-разностной аппроксимации граничных условий не имеет смысла использовать разностные операторы более высокого порядка, чем при аппроксимации основных уравнений, т.к. порядок аппроксимации k всей РС определяется как $k=\min(k_1, k_2)$, где k_1 и k_2 - порядок аппроксимации основных уравнений и краевых условий соответственно ($k_1 \neq k_2$) [10,28,84,86]. В связи с этим для аппроксимации граничных условий (1.60)-(1.63) используются те же разностные

операторы (2.6)-(2.9), что использовались для аппроксимации основных уравнений.

Параметры НДС оболочки как в начальном, так и деформированном состоянии аппроксимируются одностипными разностными операторами (2.6)-(2.9), поэтому, как и в дифференциальной формулировке задачи (1.58), при $(q_1)_i=(q_2)_i=0$ начальное состояние, описываемое соотношениями (2.6),(2.7), является точным решением сеточных уравнений (2.15), что подтверждает корректность разработанной разностной схемы.

ГЛАВА III. Разработка вычислительных алгоритмов

Решения нелинейных краевых задач

Конечно-разностные аналоги геометрически и физически нелинейных уравнений (1.4)-(1.67) содержат в общем случае $K=2 \times N$ неизвестных. Решение сеточных аналогов уравнений равновесия (2.15) строится на основе адаптации квазидинамической формы метода установления (стабионирования) с использованием явной двухслойной разностной схемы по времени второго порядка аппроксимации (схема Эйлера) [10,11,38,39,80,108,111,116].

§ 3.1. Численное решение сеточных аналогов нелинейных уравнений равновесия тонкостенных конструкций методом установления.

Случай консервативной и «следящей» нагрузки

При использовании метода установления для решения стационарных задач строится соответствующий нестационарный процесс, установление которого с течением времени в равновесном состоянии и определяет решение исходной стационарной задачи. Заменяя систему алгебраических уравнений (2.1) нестационарными вида

$$AU - B = \frac{d^2 U}{d\tau^2} + \varepsilon \frac{dU}{d\tau}, \quad (3.1)$$

и аппроксимируя уравнения (3.1) на равномерной сетке с шагом $\Delta\tau$ с заменой производных по времени центральными конечными разностями, получаем итерационный процесс нахождения $U^{(n+1)}$

$$U^{(n+1)} = \frac{4}{2 + \varepsilon\Delta\tau} U^{(n)} - \frac{2 - \varepsilon\Delta\tau}{2 + \varepsilon\Delta\tau} U^{(n-1)} + \frac{2\Delta\tau^2}{2 + \varepsilon\Delta\tau} [AU^{(n)} - B], \quad (3.2)$$

где $\varepsilon > 0$ - скалярный множитель, n - номер итерации, τ - время, которое, вообще говоря, может рассматриваться как фиктивное.

Таким образом, если для некоторой функции $U=U(x_1, x_2, \tau)$, являющейся решением системы (3.1), существуют пределы

$$\tilde{U}(x_1, x_2) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} U(x_1, x_2, \tau); \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial U(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (3.3)$$

то функция $\tilde{U} = \tilde{U}(x_1, x_2)$ является решением исходной стационарной задачи (2.1).

Значения итерационных параметров – шага по времени $\Delta\tau$ и скалярного множителя ε – должны удовлетворять требованиям сходимости итерационного процесса и минимума арифметических операций $n(\delta)$ для получения решения исходной стационарной задачи (2.1) с заданной точностью δ . Оптимальные значения параметров ε и $\Delta\tau$ определяются по формулам [11]

$$\varepsilon = 2\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}; \quad \Delta\tau = \frac{2}{\sqrt{\mu_1 + \mu_2}}, \quad (3.4)$$

где μ_1 и μ_2 – соответственно минимальное и максимальное собственные числа матрицы A .

При переходе к эволюционной задаче нестационарные уравнения могут быть записаны в форме, отличной от (3.1), например, в форме метода простой итерации

$$AU - B = \varepsilon \frac{dU}{d\tau}. \quad (3.5)$$

Однако, запись уравнений метода установления в виде (3.1) соответствует по форме оптимальному линейному итерационному процессу, что существенно повышает его экономичность и эффективность [10]. Эффективность численного метода обычно оценивается по числу итераций $n(\delta)$, требуемых для получения решений с заданной точностью δ и зависящих от скорости сходимости итерационного процесса $v_q = \ln(1/q)$. Параметр q для метода установления в виде (3.5) оценивается как

$$q = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (3.6)$$

а для метода установления в форме (3.1) при оптимальных значениях итерационных параметров q равно [10]

$$q = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}. \quad (3.7)$$

При численном решении статических задач теории оболочек отношение μ_2/μ_1 обычно велико, поэтому метод установления в форме (3.1) позволяет сократить число итераций $n(\delta)$ примерно в $\sqrt{\mu_2/\mu_1}$ раз по сравнению с численными методами, для которых справедлива оценка (3.6) [10].

Рассмотрим адаптацию метода установления для решения статических задач нелинейной механики оболочек с учетом построения разностной схемы МКР. При переходе к эволюционной задаче уравнения (2.15) заменяются на нестационарные уравнения, совпадающие по форме с уравнениями движения оболочки в вязкой среде [38,39,80,108]. Тогда для случая действия консервативной нагрузки с компонентами q_x, q_y , используя операторную форму (2.17), следует записать

$$[L_{\Delta s}(U_1)]_i + (q_x)_i = m \cdot \ddot{x}_i + \varepsilon_1 \cdot \dot{x}_i; \quad (3.8)$$

$$[L_{\Delta s}(U_2)]_i + (q_y)_i = m \cdot \ddot{y}_i + \varepsilon_2 \cdot \dot{y}_i,$$

где $m=\rho h$, ρ - плотность, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - параметры удельной вязкости искусственной среды. Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

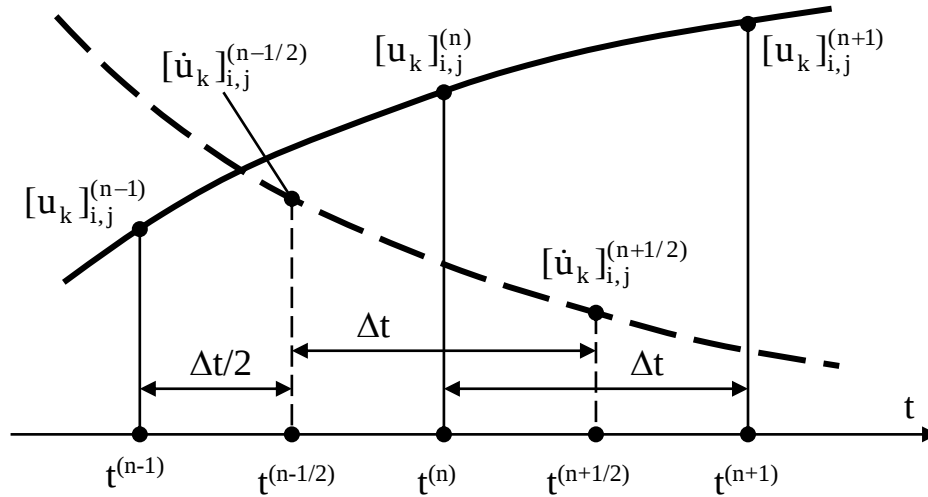


Рис. 3.1

При численном решении квазидинамических уравнений (3.8) в области непрерывного изменения времени $t \geq 0$ вводится основная сетка с целочисленными индексами n , постоянным шагом Δt и временными слоями

$$t^{(n)} = \Delta t \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.9)$$

а также вспомогательная сетка с дробными индексами $(n \pm 1/2)$ и временными слоями $t^{(n \pm 1/2)}$ (рис. 3.1). При этом сеточные функции перемещений x_i, y_i соотносятся с узлами основной сетки $t^{(n)}$, а сеточные функции скоростей $\dot{x}_i, \dot{y}_i$ - с узлами вспомогательной $t^{(n \pm 1/2)}$. На рис. 3.1 используются обозначения: $(u_1)_i = x_i$, $(u_2)_i = y_i$; $(k=1, 2)$. Дифференциальные операторы для скоростей $\dot{x}_i, \dot{y}_i$ аппроксимируются центральными конечными разностями со вторым порядком аппроксимации $O(\Delta t^2)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^{(n-1/2)} &= \frac{x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}}{\Delta t}; & \dot{x}_i^{(n+1/2)} &= \frac{x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}}{\Delta t}; \\ \dot{y}_i^{(n-1/2)} &= \frac{y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}}{\Delta t}; & \dot{y}_i^{(n+1/2)} &= \frac{y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда уравнения (3.8) при аппроксимации на временном слое $t^{(n)}$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} [L_{\Delta s}(U_1)]_i + (q_x)_i &= m \cdot \frac{\dot{x}_i^{(n+1/2)} - \dot{x}_i^{(n-1/2)}}{\Delta t} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\dot{x}_i^{(n+1/2)} + \dot{x}_i^{(n-1/2)}}{2}; \\ [L_{\Delta s}(U_2)]_i + (q_y)_i &= m \cdot \frac{\dot{y}_i^{(n+1/2)} - \dot{y}_i^{(n-1/2)}}{\Delta t} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\dot{y}_i^{(n+1/2)} + \dot{y}_i^{(n-1/2)}}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из уравнений (3.11) вытекают в явном виде выражения для скоростей $\dot{x}_i^{(n+1/2)}, \dot{y}_i^{(n+1/2)}$ на временном слое $t^{(n+1/2)}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^{(n+1/2)} &= \frac{2 \cdot m - \varepsilon_1 \cdot \Delta t}{2 \cdot m + \varepsilon_1 \cdot \Delta t} \cdot \dot{x}_i^{(n-1/2)} + \frac{2 \Delta t \cdot \{[L_{\Delta s}(U_1)]_i + (q_x)_i\}}{2 \cdot m + \varepsilon_1 \cdot \Delta t}; \\ \dot{y}_i^{(n+1/2)} &= \frac{2 \cdot m - \varepsilon_2 \cdot \Delta t}{2 \cdot m + \varepsilon_2 \cdot \Delta t} \cdot \dot{y}_i^{(n-1/2)} + \frac{2 \Delta t \cdot \{[L_{\Delta s}(U_2)]_i + (q_y)_i\}}{2 \cdot m + \varepsilon_2 \cdot \Delta t}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее путем интегрирования определяются сеточные функции перемещений x_i, y_i на временном слое $t^{(n+1)}$

$$\mathbf{x}_i^{(n+1)} = \mathbf{x}_i^{(n)} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{x}}_i^{(n+1/2)}; \quad \mathbf{y}_i^{(n+1)} = \mathbf{y}_i^{(n)} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{y}}_i^{(n+1/2)}. \quad (3.13)$$

Как показали проведенные исследования, для случая действия «следящей» нагрузки с компонентами $q_1=q_u, q_2=q_w$ (рис. 1.6) при построении вычислительной процедуры для ускорения сходимости и сокращения затрат машинного времени целесообразно строить итерационный процесс относительно перемещений локального базиса u, w с последующим пересчетом в системе координат x, y (рис. 1.4). В таком случае эволюционные уравнения метода установления в дискретной форме имеют вид

$$[L_{\Delta s}(U_k)]_i + (q_k)_i = (m \cdot \ddot{u}_k)_i + (\varepsilon_k \dot{u}_k)_i, \quad (3.14)$$

где $(u_1)_i=u_i, (u_2)_i=w_i, (q_1)_i=(q_u)_i, (q_2)_i=(q_w)_i$. После соответствующих преобразований, аналогичных (3.10)-(3.13), имеем в явном виде выражения для скоростей $[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}$ на временном слое $t^{(n+1/2)}$ и сеточные функции перемещений $[u_k]_i^{(n+1)}$ на временном слое $t^{(n+1)}$

$$[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \frac{[2m - \varepsilon_k \Delta t]_i}{[2m + \varepsilon_k \Delta t]_i} \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \frac{2\Delta t \cdot [L_{\Delta s}(U_k) + q_k]_i^{(n)}}{[2m + \varepsilon_k \Delta t]_i}; \quad (3.15)$$

$$[u_k]_i^{(n+1)} = [u_k]_i^{(n)} + \Delta t \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}.$$

Сеточные функции перемещений x_i, y_i узловых точек в системе координат x, y пересчитываются через сеточные функции компонент перемещений u_i, w_i следующим образом (рис. 1.4)

$$x_i = (x_0)_i + \Delta x_i; \quad (3.16)$$

$$y_i = (y_0)_i + \Delta y_i,$$

где

$$\Delta x_i = u_i \cdot \sin(\theta_0)_i - w_i \cdot \cos(\theta_0)_i; \quad (3.17)$$

$$\Delta y_i = u_i \cdot \cos(\theta_0)_i + w_i \cdot \sin(\theta_0)_i.$$

Таким образом, разностная аппроксимация нестационарных уравнений (3.8), (3.14) приводит к итерационному процессу (3.12), (3.13), (3.15) нахождения решения исходной стационарной задачи (2.17). Использование метода установления позволяет свести решение исходной нелинейной статической задачи (2.17) к

решению квазидинамической (3.8),(3.14), что значительно упрощает построение и практическую реализацию вычислительного алгоритма решения статической задачи. Следует отметить, что, очевидно, первой работой, в которой для решения задач статики теории оболочек использовался нестационарный метод, была работа В.И. Феодосьева, опубликованная в 1963 г. [99]. Автором отмечалась высокая эффективность применения нестационарного подхода для решения задач статической устойчивости оболочек. В зарубежной литературе при использовании метода, аналогичного рассматриваемой здесь форме метода установления, используется термин “динамическая релаксация” (dynamic relaxation) [80,111,116,117,118].

Программная реализация метода установления на ЭВМ относительно проста (рис. 3.2). В соответствии с используемой ВРС строится разностный шаблон вычисления левых частей уравнений равновесия (2.17) и далее организуется послойный цикл вычисления сеточных функций скоростей и перемещений по формулам (3.12),(3.13),(3.15) для тех узловых точек сетки, в которых должны быть удовлетворены соответствующие уравнения равновесия. Процесс счета начинается с момента времени $t^{(0)}=0$ при некотором первоначальном (в частном случае - нулевом) приближении для перемещений и нулевых значениях скоростей. Шаг итерационного процесса заканчивается после удовлетворения заданным граничным условиям на внешнем и внутренних контурах оболочки. Итерационный процесс выполняется до достижения заданной степени установления процесса, когда характерные значения параметров НДС перестают меняться в пределах заданной точности, а максимальные погрешности в удовлетворении уравнений равновесия, определяемые в соответствии с (2.2)-(2.4) по величине невязки уравнений равновесия (2.17), становятся меньше некоторой наперед заданной величины δ . Иногда выполняется некоторое заданное число итераций $n_{\max}$, а затем анализируется погрешность полученных результатов решения статической задачи.



Рис. 3.2. Блок-схема программной реализации метода установления

При использовании метода установления нет необходимости формировать и хранить в памяти ЭВМ матрицы коэффициентов A, B и неизвестных U в (2.1). Для программной реализации метода на ЭВМ достаточно описать только массивы перемещений и скоростей, которые обновляются на последующих временных слоях $t^{(n+1/2)}$ и $t^{(n+1)}$ по формулам (3.12), (3.13), (3.15) в результате пошагового интегрирования уравнений (3.8), (3.14). Целесообразно предусмотреть вывод на печать в процессе счета из одной или нескольких характерных узловых точек ряда параметров НДС оболочки - усилий, моментов, перемещений и скоростей, а также максимальных и средних (по всем узлам) погрешностей в удовлетворении уравнений равновесия, максимальных и средних перемещений и соответствующих скоростей. Это позволит проконтролировать сходимость итерационного процесса и оценить погрешность полученного решения.

Метод установления позволяет построить единый итерационный процесс для решения как линейных, так и нелинейных краевых задач, а также уравнений, полученных на основе различных гипотез. Принятая форма уравнений (3.8), (3.14) соответствует некоторой физической модели эволюционного процесса с диссипацией энергии и установлением в стационарном состоянии, что является важным фактором, поскольку для нелинейных задач, в отличие от линейных [124], в большинстве случаев метод не опирается на доказательства сходимости и единственности решения [94]. Кроме того, введение демпфирующих членов ϵ_k приводит к самокоррекции метода [6, 11, 99].

§ 3.2. Определение оптимальных значений параметров итерационного процесса

Параметры итерационного процесса - удельные вязкости среды ϵ_k и шаг по времени Δt - определяются из условия ускорения сходимости и устойчивости разностной схемы [10, 86]. Оценочные формулы с учетом структуры уравнений (3.8), (3.14) могут быть записаны в виде [39, 108]

$$\varepsilon_k = 2a_{\varepsilon,(k)} \sqrt{\frac{m \cdot \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}; \quad \Delta t_k = 2a_{t,(k)} \sqrt{\frac{m}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (3.18)$$

где $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ - наименьшие и наибольшие собственные числа для соответствующих разностных операторов в уравнениях (3.8),(3.14); $a_{\varepsilon,(k)}$ и $a_{t,(k)}$ - близкие к единице поправочные коэффициенты ($k=1,2$). Шаг по времени Δt для всей разностной схемы определяется из условия вида: $\Delta t = \min \Delta t_k$. Для нелинейных задач точное определение границ спектров разностных операторов связано со значительными математическими трудностями, поэтому $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ оцениваются в рамках линейных соотношений при соответствующих упрощениях в исходных уравнениях. Оценочные формулы для $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ для случая однослойной ортотропной оболочки, физические соотношения для которой имеют вид (1.20),(1.21), можно представить следующим образом:

- наименьшие собственные числа

$$\begin{aligned} \mu_{1,(1)} &= 4 \frac{B_{11}}{\Delta s_0^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0}; \\ \mu_{1,(2)} &= 16 \frac{D_{11}}{\Delta s_0^4} \sin^4 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0} + k_{10}^2 B_{11} + k_{20}^2 B_{22}; \end{aligned} \quad (3.19)$$

- наибольшие собственные числа

$$\begin{aligned} \mu_{2,(1)} &= 4 \frac{B_{11}}{\Delta s_0^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0}; \\ \mu_{2,(2)} &= 16 \frac{D_{11}}{\Delta s_0^4} \cos^4 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0} + k_{10}^2 B_{11} + k_{20}^2 B_{22}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где k_{10}, k_{20} - характерные значения параметров кривизны оболочки. Для тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов жесткостные параметры B_{11}, B_{22} и D_{11} определяются как:

- неогоуковская модель

$$B_{11} = C_{11} \cdot h_0; \quad B_{22} = B_{11}; \quad D_{11} = C_{11} \cdot \frac{h_0^3}{3}; \quad (3.21)$$

- модель Муни-Ривлина

$$B_{11} = C_{21} \cdot h_0; \quad B_{22} = B_{11}; \quad D_{11} = C_{21} \cdot \frac{h_0^3}{3}. \quad (3.22)$$

Оптимальные значения (с точки зрения затрат машинного времени и устойчивости разностной схемы) итерационных параметров - ε_k и Δt – определяются путем пробных пусков на ЭВМ.

§ 3.3. Особенности построения вычислительного алгоритма при решении физически нелинейных задач

При решении физически нелинейных задач возникают трудности, связанные с вычислением деформации обжатия E_{33}^{III} в пластической зоне, поскольку в соотношениях (1.37) для E_{33}^{III} входит секущий модуль E_c , для вычисления которого в соответствии с (1.33), (1.36) обжатие E_{33}^{III} должно быть известно. В ряде работ для определения E_{33}^{III} строится некоторый внутренний итерационный процесс, не связанный с основным методом, используемым для решения исходных краевой задачи [89], или же обжатием в пластической зоне пренебрегается: $E_{33}^{III} = 0$ [20, 21]. При построении итерационного процесса на основе квазидинамической формы метода установления имеет место сходимость вида

$$\begin{aligned} x_i^{(n-1)} &\rightarrow x_i^{(n)} \rightarrow x_i^{(n+1)}; \\ y_i^{(n-1)} &\rightarrow y_i^{(n)} \rightarrow y_i^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

и, следовательно, для интенсивностей деформаций и напряжений имеем

$$\begin{aligned} [e_i]_{i,l}^{(n-1)} &\rightarrow [e_i]_{i,l}^{(n)} \rightarrow [e_i]_{i,l}^{(n+1)}; \\ [\sigma_i]_{i,l}^{(n-1)} &\rightarrow [\sigma_i]_{i,l}^{(n)} \rightarrow [\sigma_i]_{i,l}^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Таким образом, при вычислении E_{33}^{III} на $(n+1)$ -ом шаге можно использовать значение $[e_i]_{i,l}^{(n)}$ с предыдущего n -го шага итерационного процесса и не строить специальный внутренний итерационный процесс.

§ 3.4. Построение вычислительного алгоритма при расчете составных оболочечных конструкций

При построении численных решений статических задач по методу установления для оболочки вращения, жестко связанной с недеформируемым шпангоутом (§1.5), квазидинамическое уравнение для шпангоута с учетом реакции оболочки T_x , заданной нагрузки – осевой силы F_x , можно представить в виде

$$M\ddot{x}_m + \varepsilon_m \dot{x}_m - (F_x + T_x) = 0, \quad (3.25)$$

где M – масса шпангоута, являющаяся в данном случае условной величиной – параметром итерационного процесса, не имеющая, в отличие от динамических задач, строго физического смысла, ε_m – параметр искусственной вязкости для шпангоута. Аппроксимация уравнения (3.25) на временной сетке $t^{(n)}$ (3.9) с постоянным шагом Δt (рис. 3.1) приводит к дискретному уравнению вида

$$M \frac{\dot{x}_m^{(n+1/2)} - \dot{x}_m^{(n-1/2)}}{\Delta t} + \varepsilon_m \frac{\dot{x}_m^{(n-1/2)} + \dot{x}_m^{(n+1/2)}}{2} - (F_x + T_x)^{(n)} = 0. \quad (3.26)$$

Используя процедуры, аналогичные (3.12), получаем скорость $\dot{x}_m^{(n+1/2)}$ на временном слое $t^{(n+1/2)}$

$$\dot{x}_m^{(n+1/2)} = \frac{2M - \Delta t \cdot \varepsilon_m}{2M + \Delta t \cdot \varepsilon_m} \cdot \dot{x}_m^{(n-1/2)} + \frac{2\Delta t \cdot (F_x + T_x)^{(n)}}{2M + \Delta t \cdot \varepsilon_m}, \quad (3.27)$$

и далее путем интегрирования – перемещение $x_m^{(n+1)}$ на временном слое $t^{(n+1)}$

$$x_m^{(n+1)} = x_m^{(n)} + \Delta t \cdot \dot{x}_m^{(n+1/2)}. \quad (3.28)$$

Таким образом, имеем итерационный процесс решения статических задач для составных конструкций, аналогичный (3.11)-(3.13). Кинематические граничные условия жесткого контакта (1.67) и реакция оболочки (1.65) на контуре Γ_0 (рис. 1.11) вычисляются в дискретной форме в соответствии с разностными шаблонами (2.6)-(2.10). Поскольку для произвольной оболочки вращения определение значения параметра искусственной вязкости ε_m связано со значительными трудностями математического характера, то оптимальное значение ε_m определяется путем пробных пусков на ЭВМ. Для первоначального приближения полагается,

что вязкость ε_m равна величине искусственной вязкости для оболочки в направлении координаты x : $\varepsilon_m = \varepsilon_1$. Результаты проведенных исследований показали достаточную эффективность такой оценки.

§ 3.5. Верификация разработанных математических моделей и вычислительных алгоритмов

Для верификации разработанных математических моделей и вычислительных алгоритмов решения существенно нелинейных краевых задач рассматривалась цилиндрическая оболочка из неогуковского материала с константой $C_{11} = 0,192$ МПа [115]. Геометрические параметры оболочки в недеформированном состоянии: $R_0/h_0 = 50$; $L_0 = 10 \cdot R_0$, где h_0, R_0 и L_0 - соответственно толщина, радиус и длина оболочки. Оболочка нагружена внутренним давлением интенсивностью $q_2 = 0,02 \cdot C_{11}$. Рассмотрено два случая закрепления торцов оболочки $x=0$; $x=L_0$: жесткое защемление (1.60) и шарнирное закрепление (1.61).

Результаты исследований, полученные на основе разработанных моделей вычислительных алгоритмов (модель МА), сопоставлялись с результатами, полученными с помощью алгоритма метода дифференцирования по параметру (модель МВ [50-54]). В модели МВ соотношения исходной нелинейной краевой задачи дифференцируются по некоторому заранее выбранному параметру продолжения решения, в результате чего формируется совокупность взаимосвязанных квазилинейной краевой и нелинейной начальной задач в скоростях искомых переменных по параметру, а их решение строится последовательно итерационным способом. При этом, в отличие от модели МА, в модели МВ уравнения формулируются для исходного недеформированного состояния оболочки.

В силу симметрии задачи при проведении исследований расчетная область принималась равной $0 \leq x \leq L_0/2$. Число точек дискретизации на расчетной области для модели МА составило $N=87$, а для по модели МВ $N=170$. Для модели МА силовые факторы определялись численным интегрированием напряжений по тол-

щине h , изменение которой в процессе деформирования учитывалось в соответствии с (2.12)-(2.14), при этом оболочка разбивалась по толщине на $L=7$ слоев. Для модели МВ для определения усилий и моментов в предположении линейного распределения деформаций по толщине оболочки были получены аналитические выражения, связывающие усилия и изгибающие моменты с компонентами деформаций и изменениями кривизны.

Результаты исследований представлены на рис. 3.3-3.4, где вариант а) соответствует шарнирному закреплению, а вариант б) – защемлению краев оболочки. Штриховыми линиями представлены результаты по модели МА, а сплошными линиями – по модели МВ.

Координата меридиана оболочки представлена в долях начального радиуса R_0 : $X=x/R_0$, начало координат принято в среднем сечении цилиндра $x=L_0/2$. На рис. 3.3-3.6 приняты обозначения безразмерных усилий и моментов соответственно: $T_1=T_{11}/(C_{11} \cdot h_0)$; $T_2=T_{22}/(C_{11} \cdot h_0)$; $M_1=M_{11}/(C_{11} \cdot h_0^2)$; $M_2=M_{22}/(C_{11} \cdot h_0^2)$. На рис. 3.6 координата Y точек деформированного меридиана цилиндра также представлена в долях радиуса R_0 .

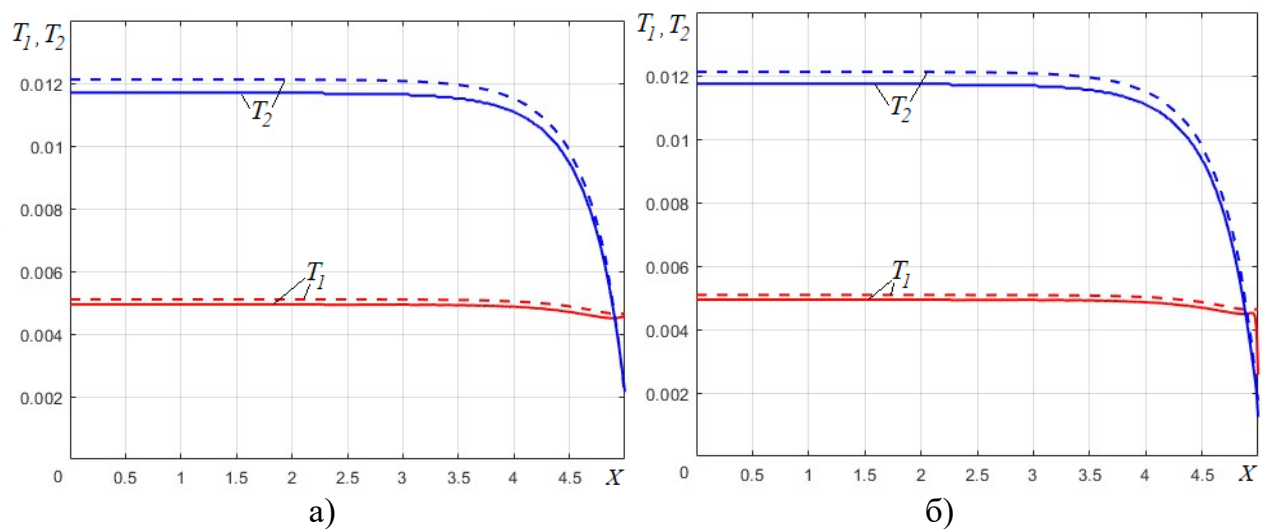


Рис. 3.3. Распределение меридиональных T_1 и окружных T_2 усилий

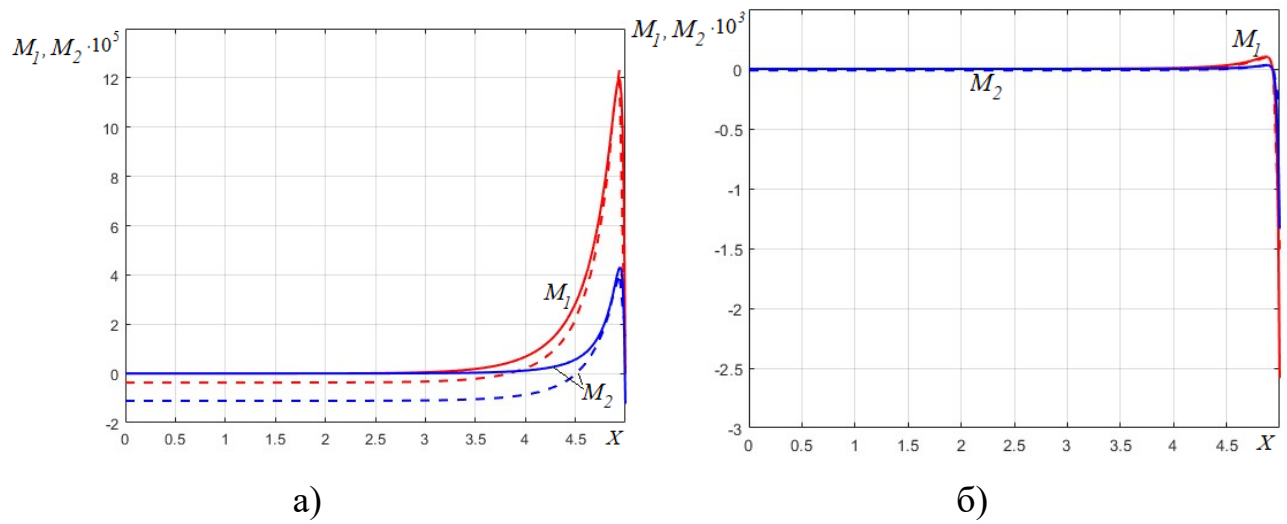


Рис. 3.4. Распределение меридиональных M_1 и окружных M_2 моментов

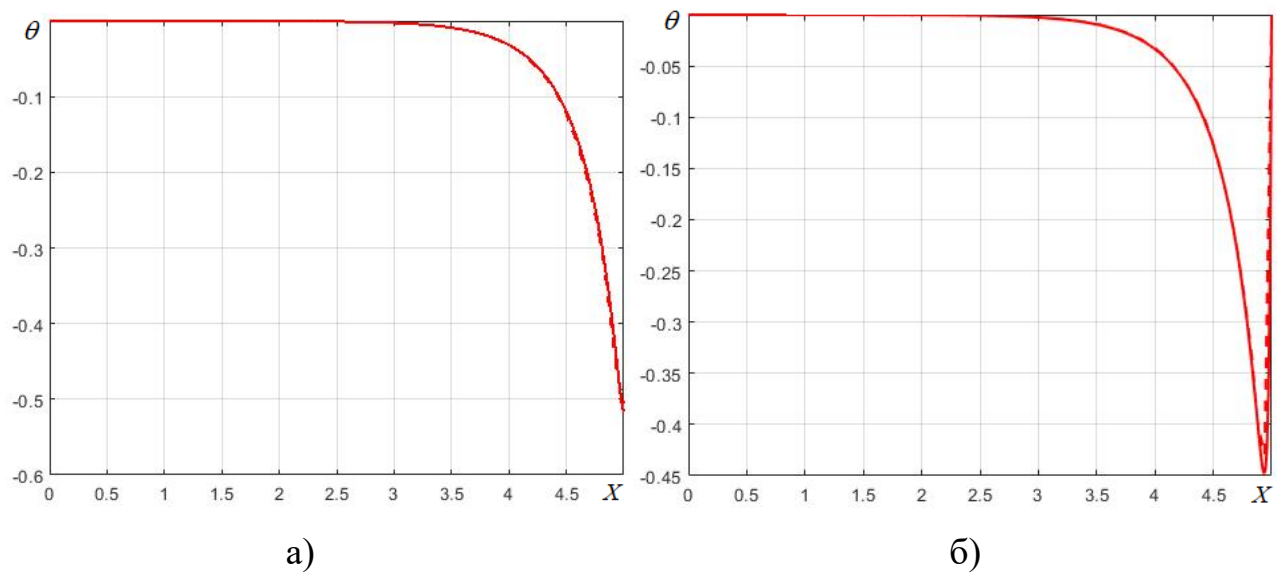


Рис. 3.5. Распределение по меридиану оболочки углов поворота нормали

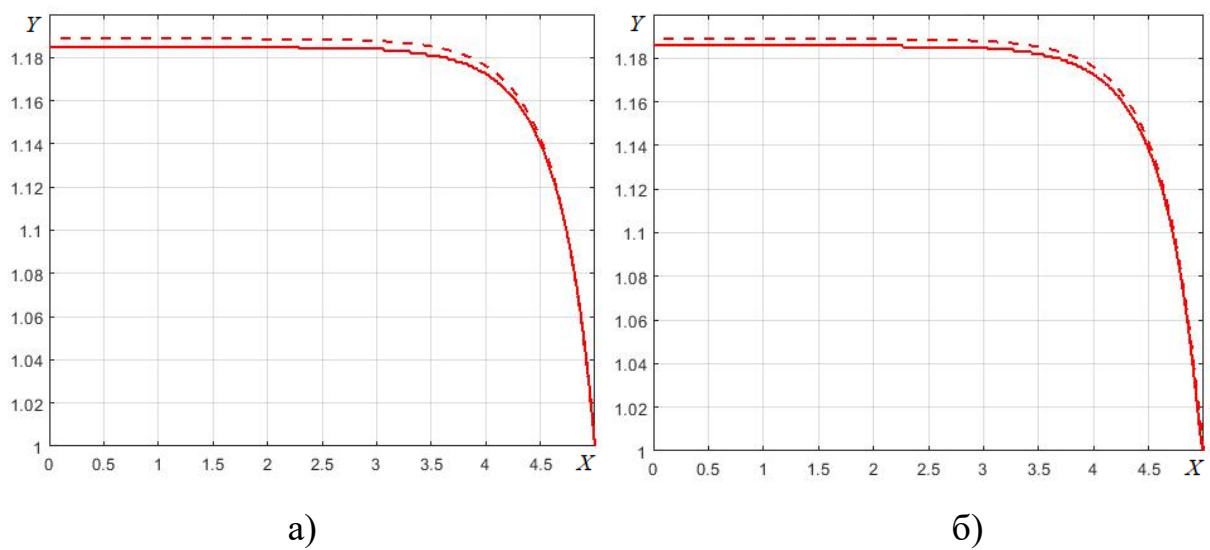


Рис. 3.6. Форма меридиана оболочки

Таким образом, хорошая корреляция результатов решения существенно нелинейных краевых задач, сформулированных на основе различных математических моделей, подтверждает достоверность как разработанных математических моделей, так и вычислительных алгоритмов решения полученных нелинейных сеточных аналогов исходных дифференциальных уравнений.

Результаты проведенных исследований показали, что расчет оболочек с учетом изменения начальной геометрии даже в относительно простых случаях дает результаты, существенно отличающиеся от результатов, полученных на основе классических подходов как в рамках моделей Кирхгоффа-Лява, так и Тимошенко. Так, например, при расчете цилиндрической оболочки с начальным радиусом R_0 при действии равномерного внутреннего/внешнего давления интенсивностью $\pm q$ величина окружного усилия T_{22} в безмоментной области в рамках классических моделей составляет $T_{22} = \pm q \cdot R_0$. Расчет оболочки на основе разработанных математических моделей, сформулированных для актуального состояния оболочки вращения, дает величину окружного усилия $T_{22} = \pm q \cdot (R_0 \pm \Delta y)$, что подтверждает необходимость исследования особенностей деформирования тонкостенных конструкций в области больших перемещений и углов поворота на основе моделей, учитывающих изменение начальной геометрии.

**ГЛАВА IV. Исследование особенностей процессов деформирования
тонкостенных конструкций при произвольных значения
обобщенных перемещений и деформаций
методами вычислительного эксперимента**

**§ 4.1. Исследование влияния параметров гиперупругого материала
на характеристики конического амортизатора сжатия**

Конические амортизаторы сжатия достаточно широко применяются в различных областях техники и промышленности. Такие амортизаторы изготавливаются обычно из резиноподобных нелинейно упругих (гиперупругих) материалов. В качестве основных характеристик амортизаторов сжатия обычно используются три безразмерных геометрических параметра: r_0/H_0 , h_0/H_0 , α_0 (рис. 4.1), а также значения соответствующих констант используемого материала [11]. В настоящей работе амортизатор сжатия рассматривается как составная конструкция, состоящая из усеченного конуса и жестко связанного с ним по краю меньшего радиуса r_0 недеформируемого круглого диска, через который на амортизатор передается сжимающая сила F (рис. 4.1).

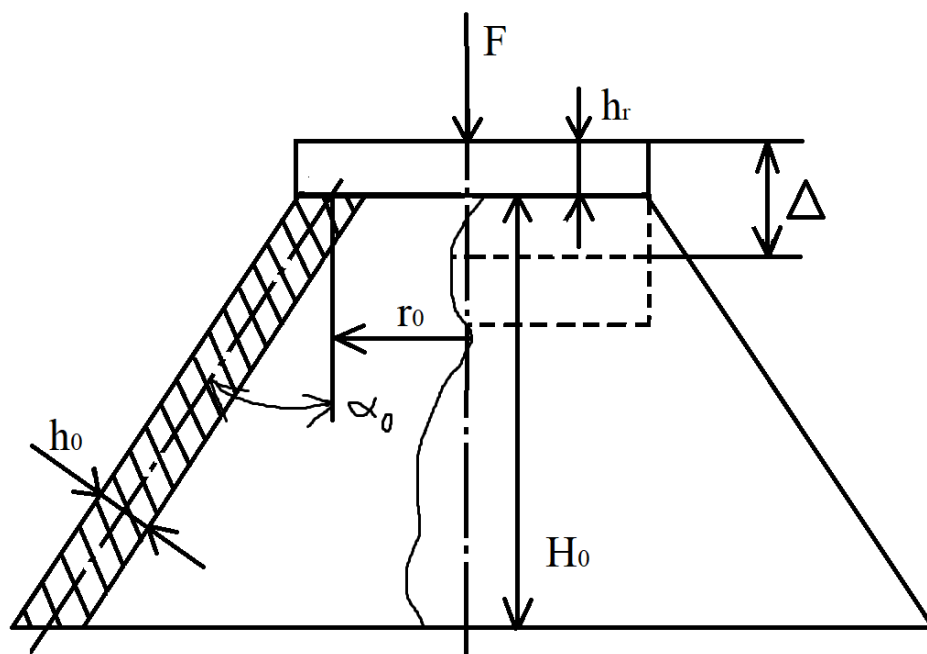


Рис. 4.2. Конический амортизатор сжатия

На опорном крае большего радиуса конуса R_0 реализуются граничные условия жесткого защемления (1.60). Исследуется влияние параметров гиперупругого материала на величину жесткости конического амортизатора сжатия путем построения монотонной зависимости « Δ - F », где Δ - величина осадки верхнего основания конуса с последующем определением их критических значений Δ^* и F^* . На рис. 4.2 показана типичная диаграмма осадка-сжимающая сила для рассматриваемого конического амортизатора, где Δ^* и F^* являются характерными точками диаграммы, значения которых используются на стадии эскизного проектирования конического амортизатора сжатия [102].

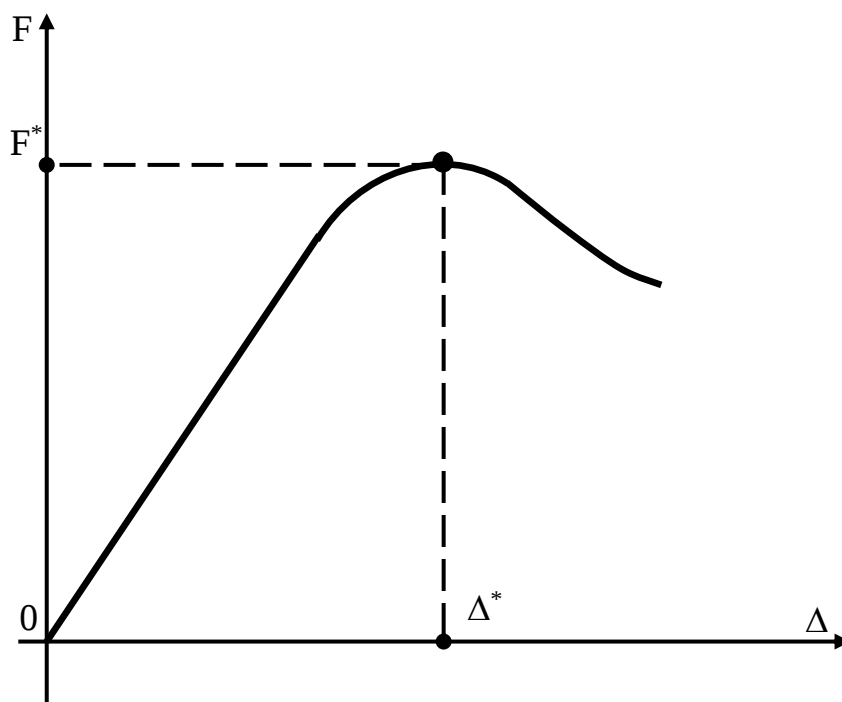


Рис. 4.2. Диаграмма осадка-сжимающая сила конического амортизатора

Рассматривался конический амортизатор со следующими геометрическими параметрами: $r_0/H_0=0,333$, $h_0/H_0=0,1$, $\alpha_0=30^0$. Толщина недеформируемого диска принималась равной $h_r=2 \cdot h_0$.

Для описания характеристик гиперупругого материала использовались две модели:

- одноконстантная неогуковская модель (1.46)

$$\sigma_{11} = 2 \cdot C_{11} \cdot \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right); \quad (4.1)$$

$$\sigma_{22} = 2 \cdot C_{11} \cdot \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right);$$

- двухконстантная модель Муни-Ривлина (1.47)

$$\sigma_{11} = 2 \cdot C_{21} \cdot \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + 2 \cdot C_{22} \cdot \left(\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right); \quad (4.2)$$

$$\sigma_{22} = 2 \cdot C_{21} \cdot \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + 2 \cdot C_{22} \cdot \left(\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_2^2} \right).$$

Значения констант материала принимались равными: $C_{11}=191999$ Па, $C_{21}=210587,3$ Па, $C_{22}=1504,767$ Па [115].

Вычислительный эксперимент проводился для числа точек дискретизации по образующей оболочки $N=53$, при этом для численного интегрирования напряжений (4.1),(4.2) оболочка разбивалась по толщине на $L=9$ слоев. Изменение начальной толщины оболочки h_0 в процессе деформирования учитывалось в соответствии с (2.12)-(2.14).

Результаты проведенного вычислительного эксперимента представлены на рис. 4.3-4.7 и Табл. 4.1. Нагрузочный параметр r_f определялся по отношению действующей силы F к величине F_{cr}

$$r_f = \frac{F}{F_{cr}}, \quad (4.3)$$

где для корректности сопоставления результатов F_{cr} условно определялась через величину константы C_{11} как

$$F_{cr} = C_{11} \cdot \pi \cdot r_0^2. \quad (4.4)$$

На рис. 4.3 показана диаграмма « Δ - F », которая представлена в безразмерной форме через параметр r_f и отношение осадки верхнего основания конуса Δ к начальной толщине оболочки h_0 , а на рис. 4.4 представлена диаграмма, характеризующая связь отношения F/Δ и нагрузочного параметра r_f .

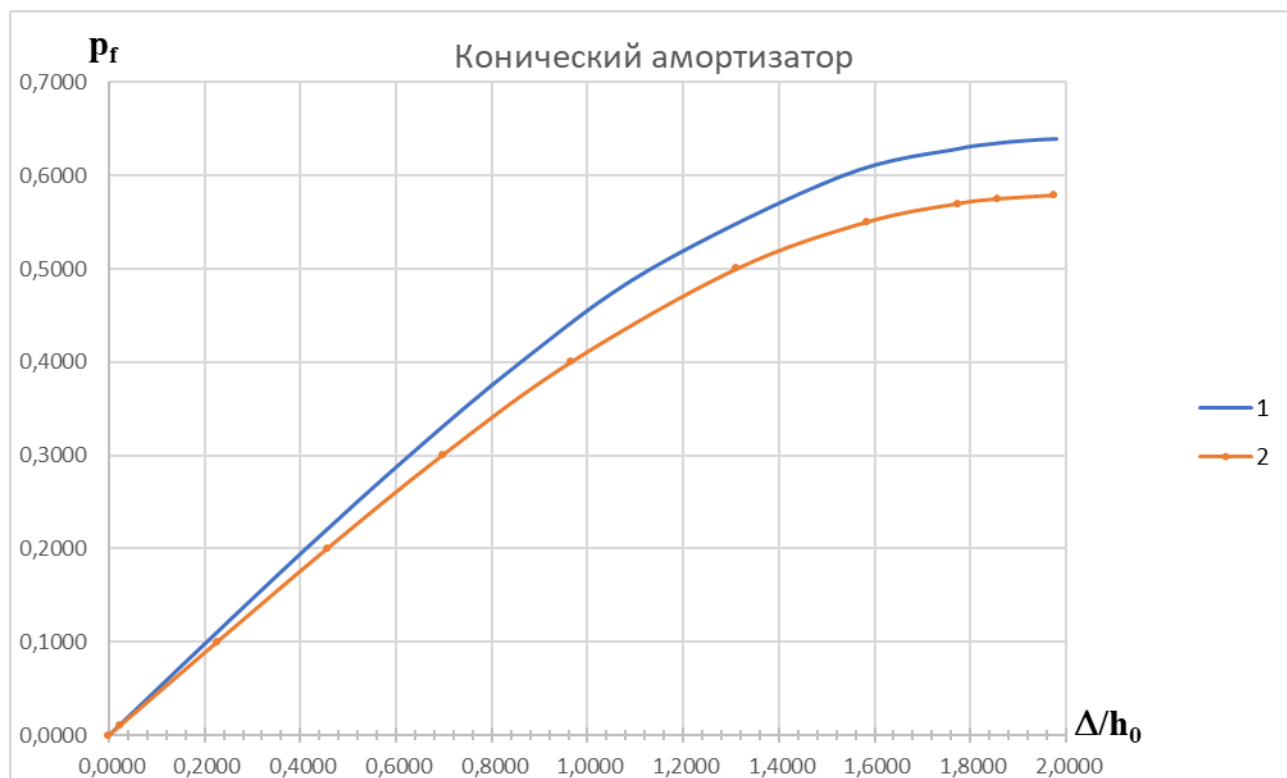
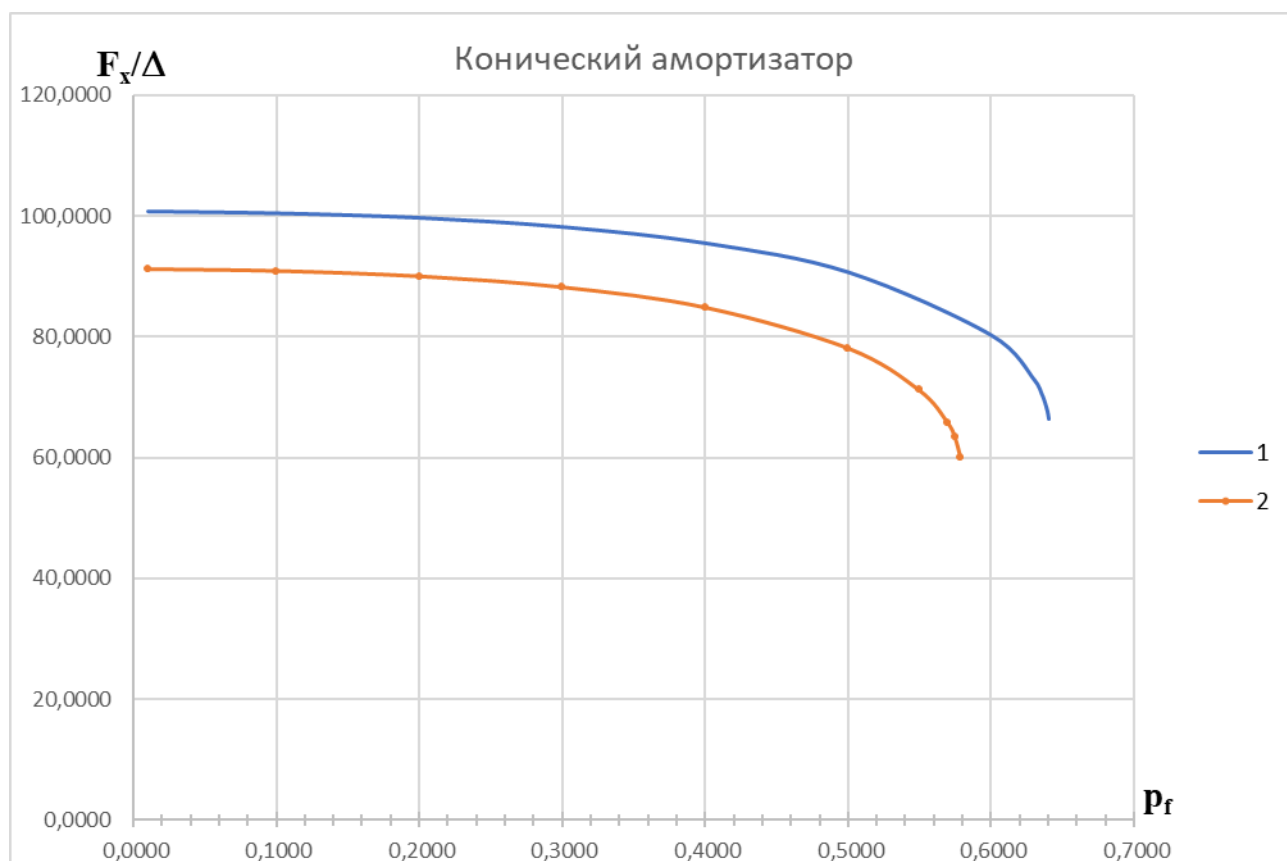


Рис. 4.3. Диаграмма «осадка-сжимающая сила»

Рис. 4.4. Диаграмма « F/Δ - p_f »

Кривые 1 на рис. 4.3,4.4 соответствуют модели Муни-Ривлина, а кривые 2 – неогуковской модели нелинейно упругого материала. При определении осадки Δ конического амортизатора использовалась математическая модель для составной оболочечной конструкции, описанная в § 1.5,3.3, так, что в результате решения совместной задачи «конус- недеформируемый диск» при действии осевой сжимающей силы F величина осадки Δ была равна осевому смещению круглого диска x_m : $x_m = \Delta$ (рис. 1.11, 4.1). Как видно из рис. 4.3,4.4, полученные на основе разработанных математических моделей и вычислительных алгоритмов решения существенно нелинейных задач диаграммы деформирования конического амортизатора сжатия как для модели Муни-Ривлина, так и для неогуковской модели соответствуют известным экспериментальным и теоретическим результатам [102].

Значения нагрузочного параметра p_f и осадки Δ , соответствующих критической точке потери устойчивости при $F=F^*$ и $\Delta=\Delta^*$ (рис. 4.2-4.4) соответственно составили:

- одноконстантная неогуковская модель (1.46)

$$p_f^* = 0,579; \quad \Delta^* = 0,198 \cdot H_0; \quad (4.5)$$

- двухконстантная модель Муни-Ривлина (1.47)

$$p_f^* = 0,64; \quad \Delta^* = 0,198 \cdot H_0. \quad (4.6)$$

В Табл. 4.1 представлены значения максимальных деформаций и напряжений в коническом амортизаторе для рассматриваемых моделей гиперупругого материала при соответствующих значениях параметра p_f^* . Значения максимальных деформаций E_{11} и E_{22} , представленных в Табл. 4.1, относятся к срединной (координатной) поверхности конуса $z=0$. Интересно отметить, что для обоих вариантов моделей гиперупругого материала максимальные напряжения σ_{11} и σ_{22} , для критической точки диаграммы « Δ - F » возникали в точке образующей конуса с начальными координатами $x_0=0,077 \cdot H_0$, максимальные деформации E_{11} - в точке с координатами $x_0=0,35 \cdot H_0$, а максимальные деформации E_{22} - в точке с координатами $x_0=0,46 \cdot H_0$.

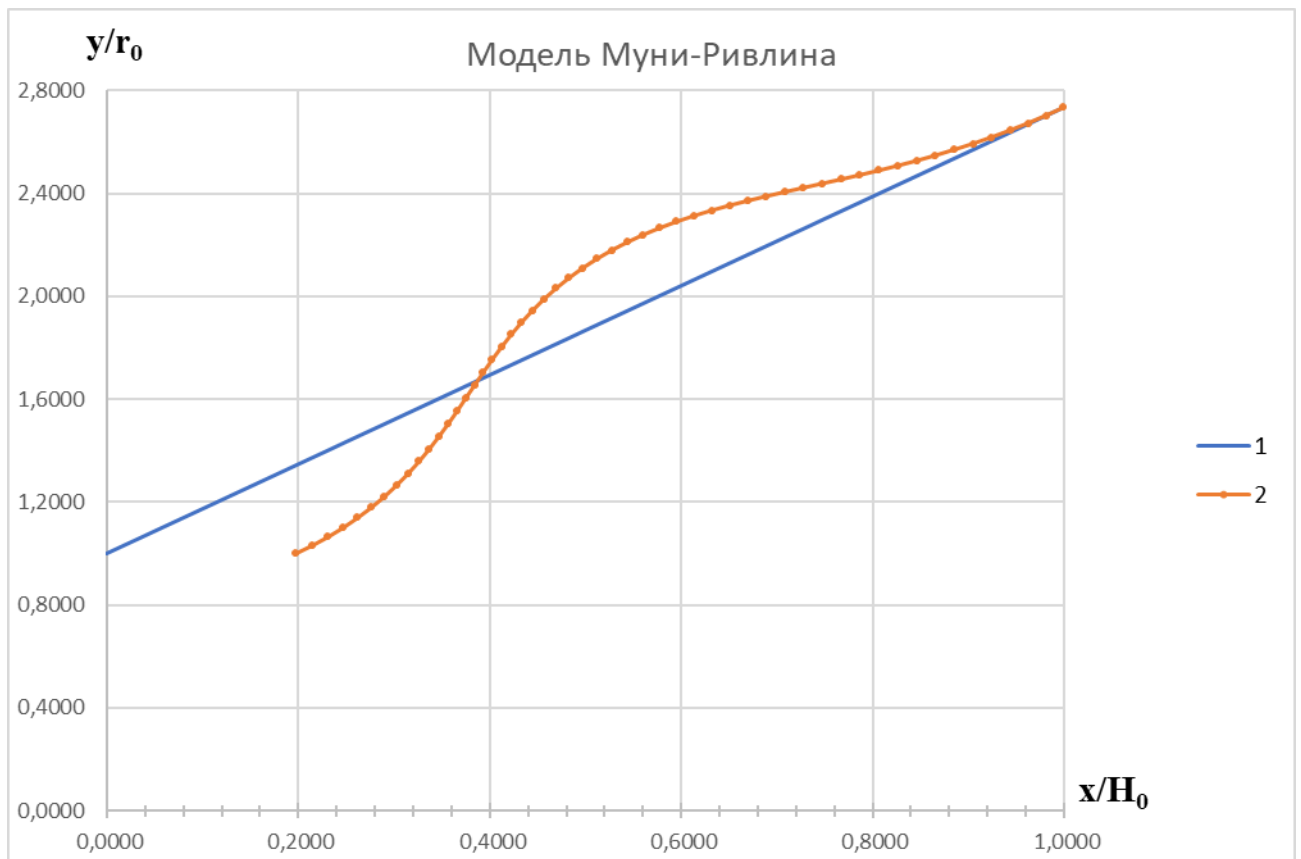


Рис. 4.5. Исходное и деформированное состояние амортизатора

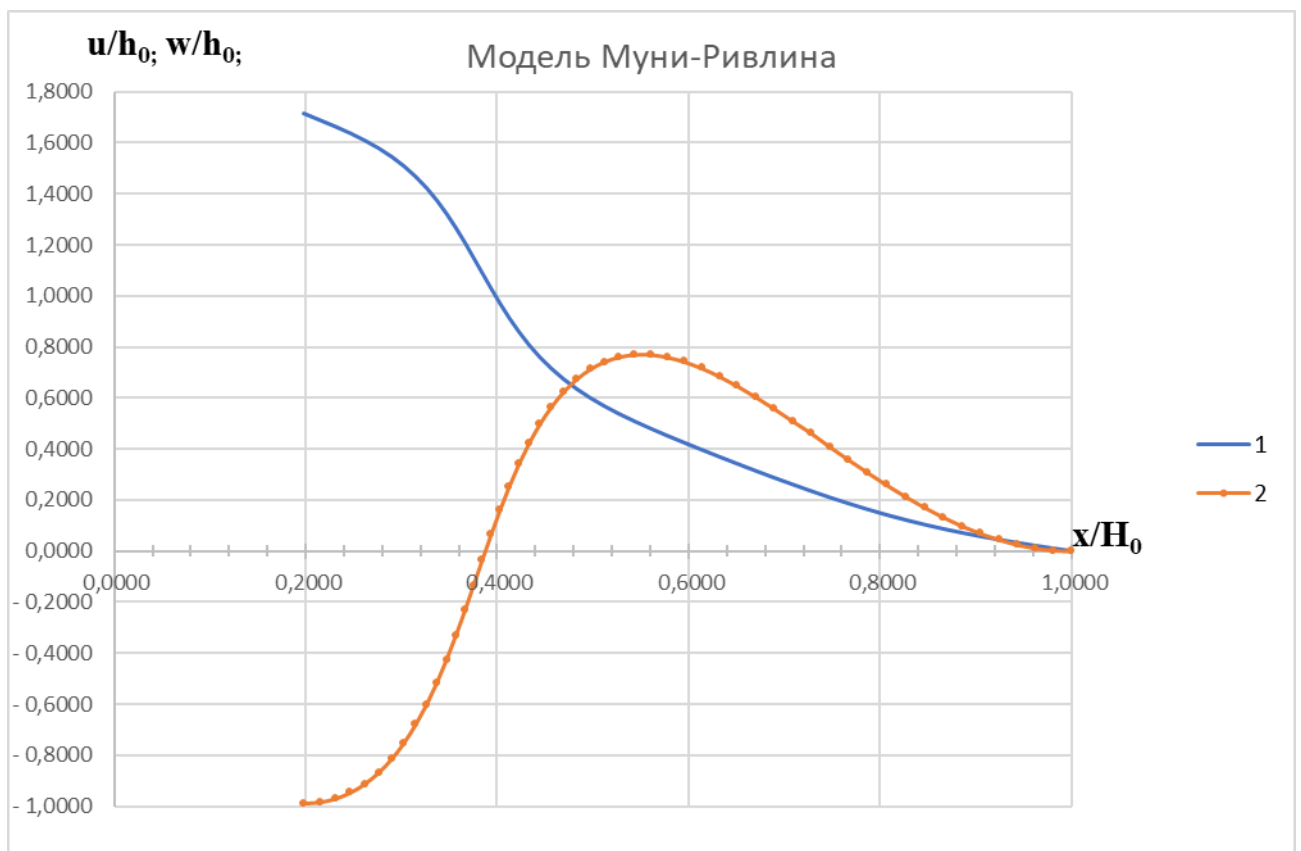


Рис. 4.6. Эпюры тангенциальных u и нормальных w перемещений при $p_f = p_f^*$

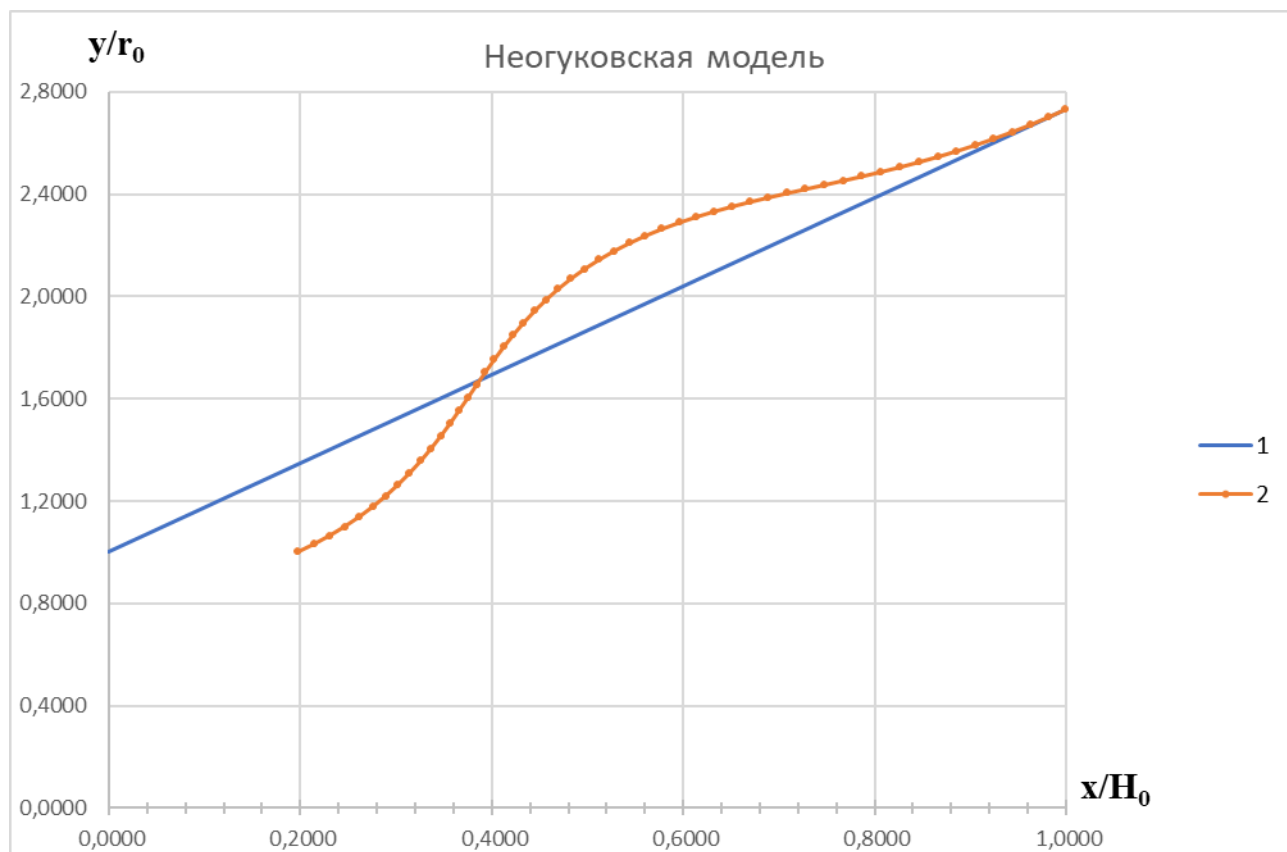


Рис. 4.7. Исходное и деформированное состояние амортизатора

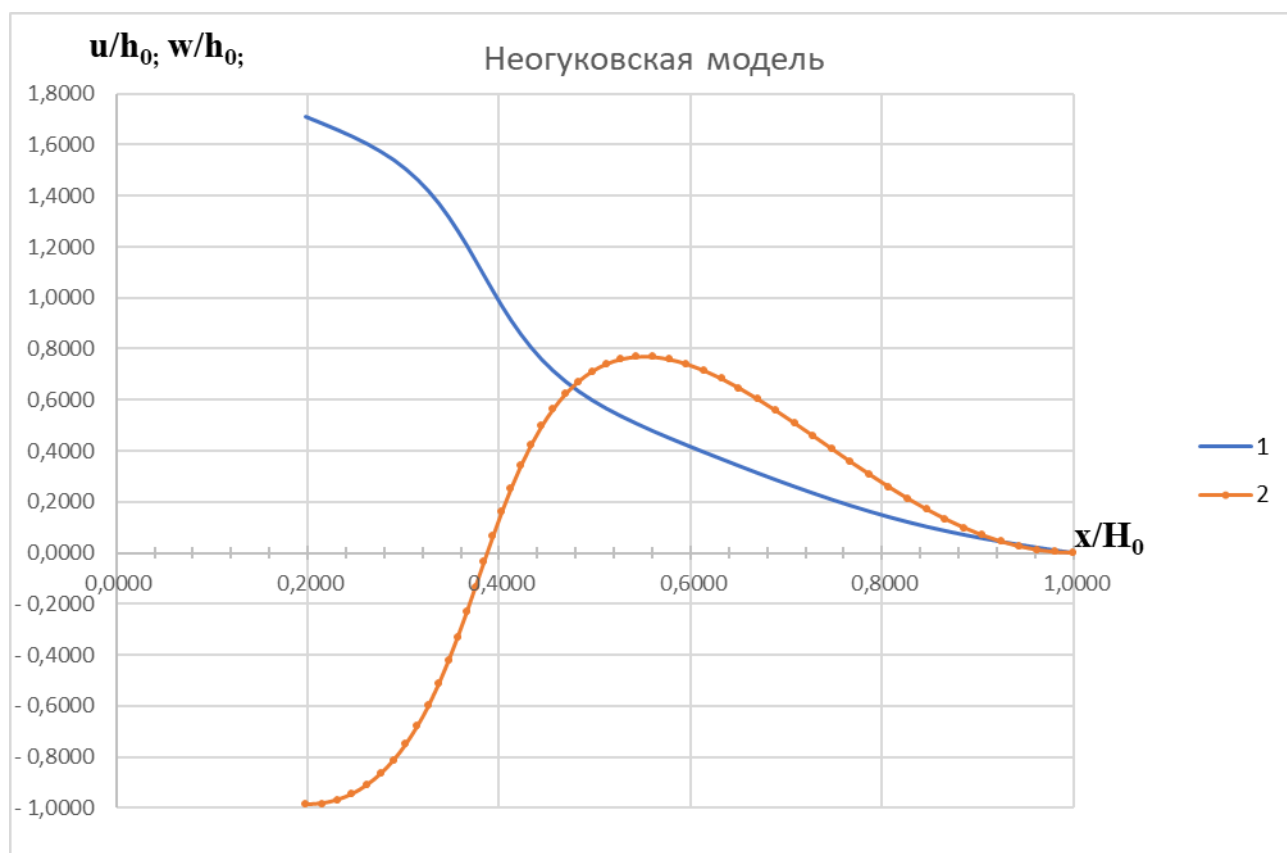


Рис. 4.8. Эпюры тангенциальных u и нормальных w перемещений при $p_f = p_f^*$

Таблица 4.1

	$E_{11}(\max)$	$E_{22}(\max)$	$\sigma_{11}(\max)$	$\sigma_{22}(\max)$
Одноконстантная неогуковская модель: $p_f^* = 0,579$	-14,75 %	14,98 %	$-3,03 \cdot C_{11}$	$-1,97 \cdot C_{11}$
Двухконстантная модель Муни- Ривлина: $p_f^* = 0,64$	-14,75 %	15,02 %	$-3,35 \cdot C_{11}$	$-2,17 \cdot C_{11}$

На рис. 4.5-4.8 показаны формы деформированной поверхности конического амортизатора при значениях нагрузочного параметра $p_f = p_f^*$. Кривые на рис. 4.5,4.6 соответствуют модели Муни-Ривлина, а кривые на рис. 4.7,4.8 – неогуковской модели нелинейно упругого материала. На рис. 4.5,4.7 прямые 1 соответствуют исходному (начальному) состоянию образующей конической оболочки, а кривые 2 – деформированному состоянию в актуальных координатах x, y . На рис. 4.6,4.8 показано распределение компонент тангенциальных u и нормальных w перемещений вдоль образующей оболочки при $p_f = p_f^*$.

Как следует из представленных результатов проведенного вычислительного эксперимента, как одноконстантная неогуковская модель нелинейно упругого материала, так и двухконстантная модель Муни-Ривлина дают или близкие, или полностью совпадающие значения параметров НДС конического амортизатора сжатия.

Таким образом, разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы для исследования особенностей процессов деформирования оболочек вращения из гиперупругих материалов позволяют определять характерные точки диаграммы « Δ -F» и жесткостные характеристики амортизаторов, значения которых могут быть использованы в дальнейшем на стадии эскизного проектирования конического амортизатора сжатия.

§ 4.2. Напряженно-деформированное состояние замкнутой в полюсе упруго-пластической сферической оболочки при действии локального поверхностного давления

Рассматривается замкнутая в полюсе А сферическая оболочка постоянной толщины h с начальным радиусом кривизны $R_{10}=R_{20}=R_0$, изготовленная из изотропного конструкционного материала - сплава АМГ6-Т (рис. 4.9). При проектировании таких тонкостенных конструкций в качестве оценки остаточной несущей способности зачастую используется величина остаточного прогиба w , полученного в результате упруго-пластического деформирования оболочки [21,59,89]. Исследуется влияние области приложения поверхностной нагрузки «следающего» типа на остаточную прочность (несущую способность) сферической оболочки.

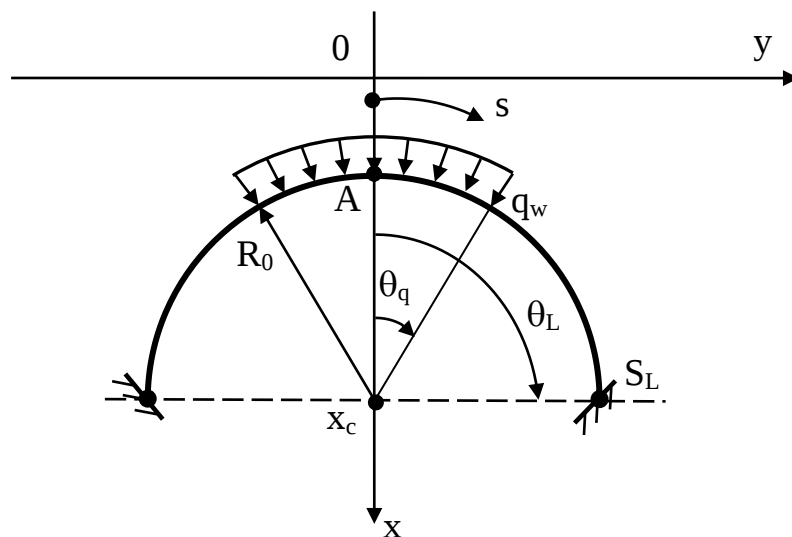


Рис. 4.9. Замкнутая в полюсе сферическая оболочка

Геометрические параметры оболочки: $R_0/h=150$; $x_c=R_0$; $\theta_L=90^\circ$. На контуре оболочки $s=S_L$ рассматривались граничные условия жесткого защемления (1.60). Рассматривается действие внешней поверхностной нагрузки «следающего» типа q_w , распределенная локально или по всей поверхности оболочки. Интенсивность поверхностной нагрузки q_w определялась с использованием безразмерного параметра p_q по отношению к критическому внешнему давлению q_{cr} для замкнутой сферы толщиной h радиусом кривизны $R=R_0$ [20,89]

$$q_w = p_q \cdot q_{cr}; \quad q_{cr} = \frac{2 \cdot E}{\sqrt{3 \cdot (1 - \nu^2)}} \left(\frac{h}{R} \right)^2. \quad (4.7)$$

В силу симметрии рассматриваемой краевой задачи расчетная область представляла собой $\frac{1}{2}$ часть сферической оболочки в пределах $0 \leq \theta \leq \theta_L$. Число точек дискретизации полагалось равным $N=57$. При этом по толщине оболочка разбивалась на $L=7$ слоев. Характеристики сплава Амгб-Т принимались следующими (рис. 4.10): $\sigma_\theta/\sigma_T=1,33$, $\varepsilon_\theta/\varepsilon_T=4,2$, $E_1=0,1 \cdot E$ [89].

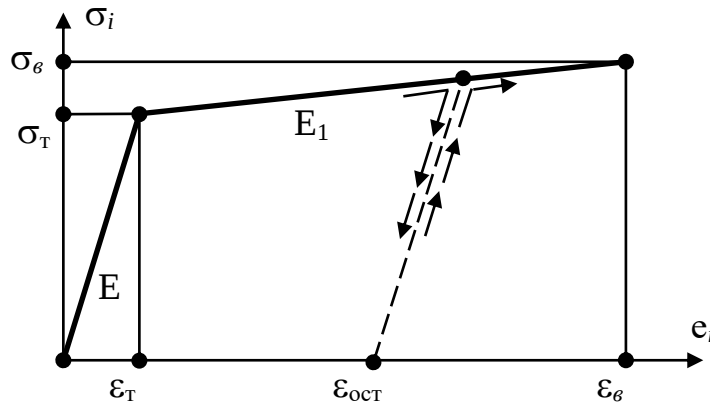


Рис. 4.10. Диаграмма $\sigma_i(e_i)$ с линейным упрочнением

Как показали проведенные исследования, оптимальная (с точки зрения затрат машинного времени) сходимость и устойчивость итерационного процесса при любой степени геометрической и физической нелинейности реализовывалась при значениях поправочных коэффициентов в (3.18), близких к единице: $0,55 \leq a_{t,(k)} \leq 0,75$; $1,35 \leq a_{\varepsilon,(k)} \leq 2,5 a_{\varepsilon,(k)}$, что свидетельствует о достаточной точности оценочных формул (3.18), (3.19), полученных в рамках линейной задачи. При исследовании устойчивости замкнутой в полюсе сферической оболочки в рамках упругой модели для случая распределенного по всей поверхности внешнего давления для граничных условий жесткого защемления на контуре $s=S_L$ оболочка теряла устойчивость при значении параметра $p_q=0,8373$, а для случая шарнирного закрепления края $s=S_L$ - при значении нагрузочного параметра $p_q=0,8359$, что свидетельствует о достоверности как разработанных математических моделей, так и вычислительных алгоритмов решения нелинейных краевых задач, т.к. значение

$p_q=1$ в (4.7) соответствует величине критического давления для полностью замкнутой сферической оболочки в рамках упругой постановки [20,89]. На рис. 4.11 показаны кривые деформирования в виде зависимостей «нагрузочный параметр p_q – прогиб w в полюсе А сферы».

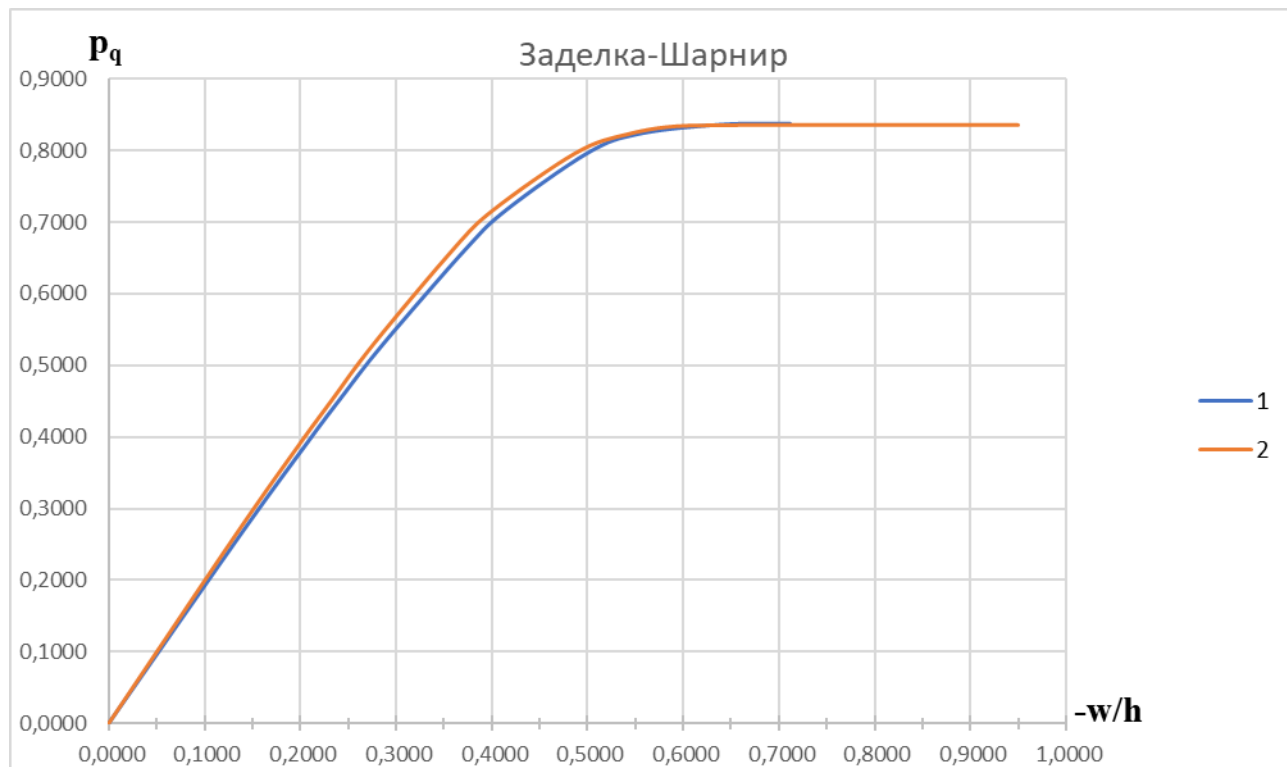


Рис. 4.11. Кривые деформирования для случая защемленного (кривая 1) и шарнирно закрепленного края $s=S_L$ оболочки (кривая 2)

Исследование влияния области нагружения на несущую способность и остаточную прочность сферической оболочки проводилось для диапазона изменения области нагружения $\pi/8 \leq \theta_q \leq \pi/2$. Как показали проведенные исследования, в процессе деформирования пластические деформации возникали и распространялись как в зоне краевого эффекта вблизи защемленного края $s=S_L$, так и в окрестности полюсной точки А. При проведении вычислительного эксперимента определялась предельная (разрушающая) нагрузка, при которой происходило исчерпание несущей способности по всей толщине оболочки h в одном или нескольких сечениях $s=\text{const}$ с последующим лавинообразным распространением разрушенных сечений по всей образующей сферы. Кроме того, определялись значения

остаточных обобщенных перемещений оболочки при нагружении внешним давлением до величины, составляющей 0,99 от соответствующей предельной (разрушающей) для данной области нагружения θ_q и последующей разгрузкой.

Благодаря использованию квазидинамической формы метода установления для построения итерационного процесса решения геометрически и физически нелинейной краевой задачи при определении остаточных параметров НДС оболочки задача решалась за один пуск на ЭВМ в два этапа. На первом этапе определялось НДС для соответствующего значения поверхностного давления и параметра θ_q , а на втором этапе при полном снятии нагрузки $q_w=0$ в результате разгрузки определялось остаточное НДС сферической оболочки. При этом результаты первого этапа – перемещения, деформации и напряжения – использовались в качестве начальных на втором этапе. На рис. 4.12 показаны эпюры прогибов оболочки w при $p_q=0,508$ и остаточных прогибов ($p_q=0$) для $\theta_q=\pi/2$ (разрушающей нагрузке соответствовало значение параметра $p_q=0,5083$), а на рис. 4.13 показано распределение зоны упругих (зеленый цвет) и пластических (красный цвет) деформаций при $p_q=0,508$ для $\theta_q=\pi/2$. Эпюры прогибов w при $p_q=0,384$ и остаточных прогибов ($p_q=0$) для $\theta_q=\pi/8$ (разрушающей нагрузке соответствовало значение параметра $p_q=0,3845$) представлены на рис. 4.14, а распределение зон упругих и пластических деформаций при $p_q=0,384$ для $\theta_q=\pi/8$ показано на рис. 4.15.

Зависимость остаточного прогиба w в полюсной точке А от области нагружения θ_q сферической оболочки представлена на рис. 4.16, а зависимость величины разрушающей нагрузки от области нагружения θ_q сферической оболочки показана на рис. 4.17. Интересно отметить, что начиная со значения $\theta_q=0,5\cdot\theta_L$ при дальнейшем увеличении области нагружения θ_q изменение как разрушающей нагрузки, так и остаточного прогиба носит практически линейный характер.

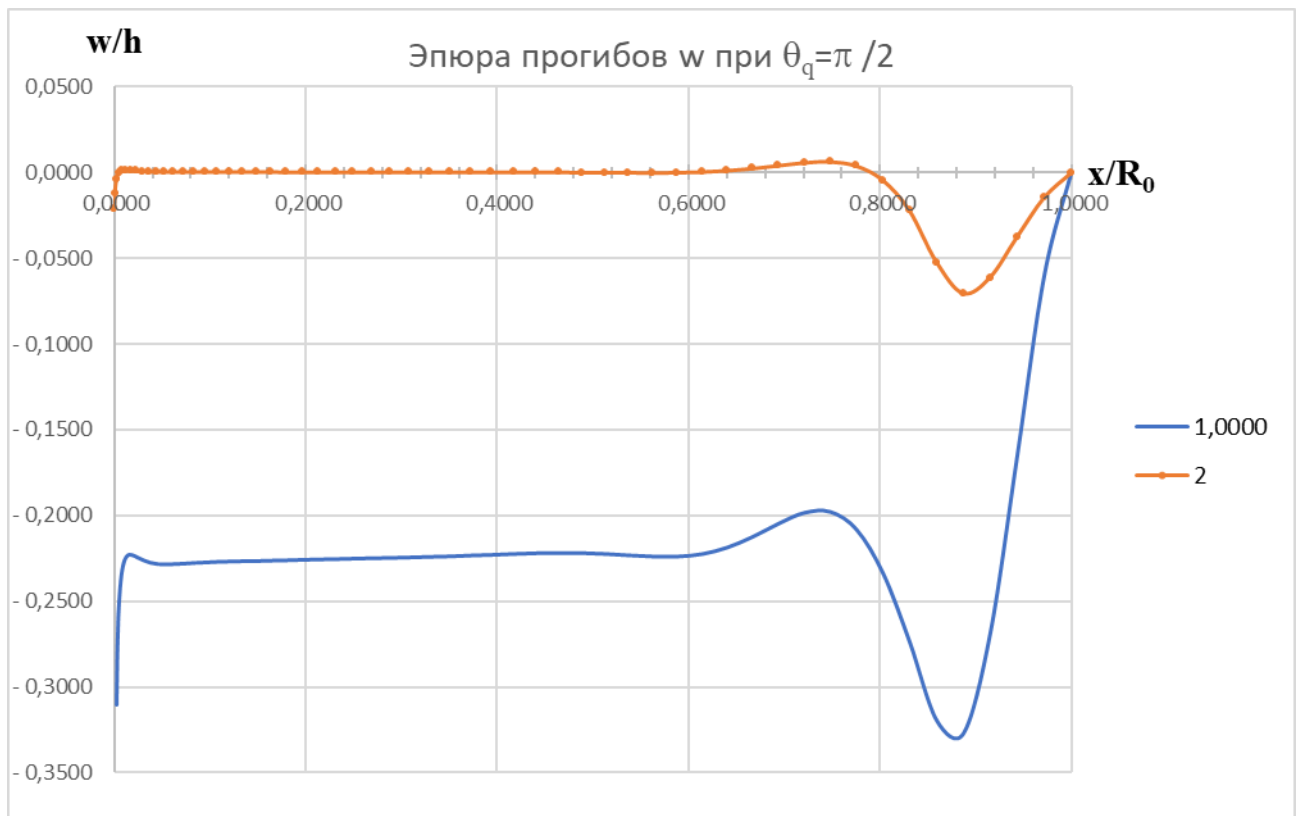


Рис. 4.12. Эпюры прогибов w сферической оболочки для $\theta_q = \pi/2$ при $p_q = 0,508$ (кривая 1) и остаточных прогибов (кривая 2)

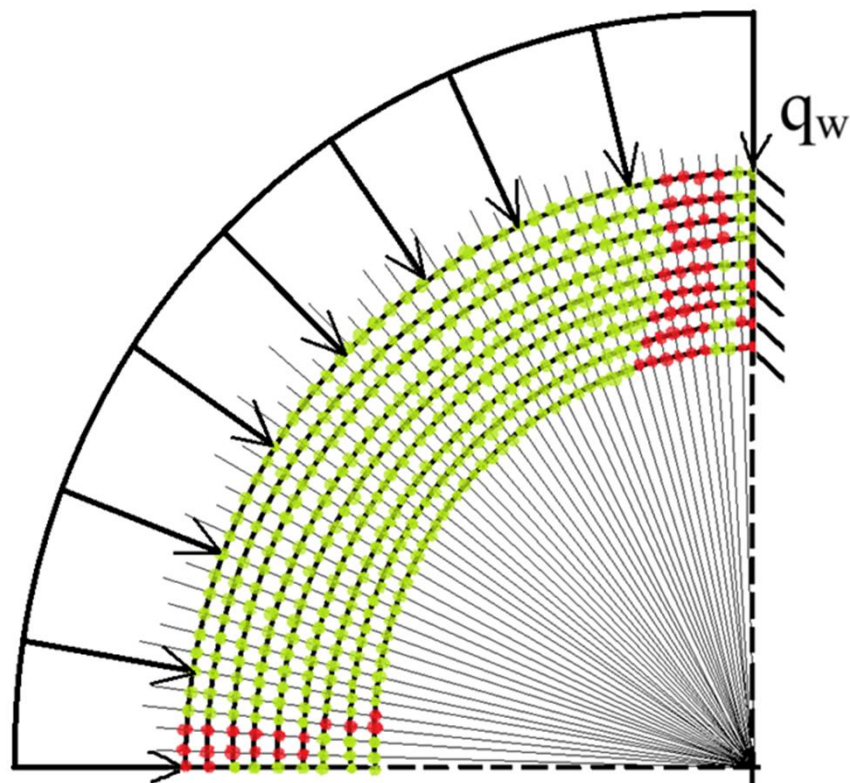


Рис. 4.13. Распределение упругих (зеленый цвет) и пластических деформаций (красный цвет) для $\theta_q = \pi/2$ при $p_q = 0,508$

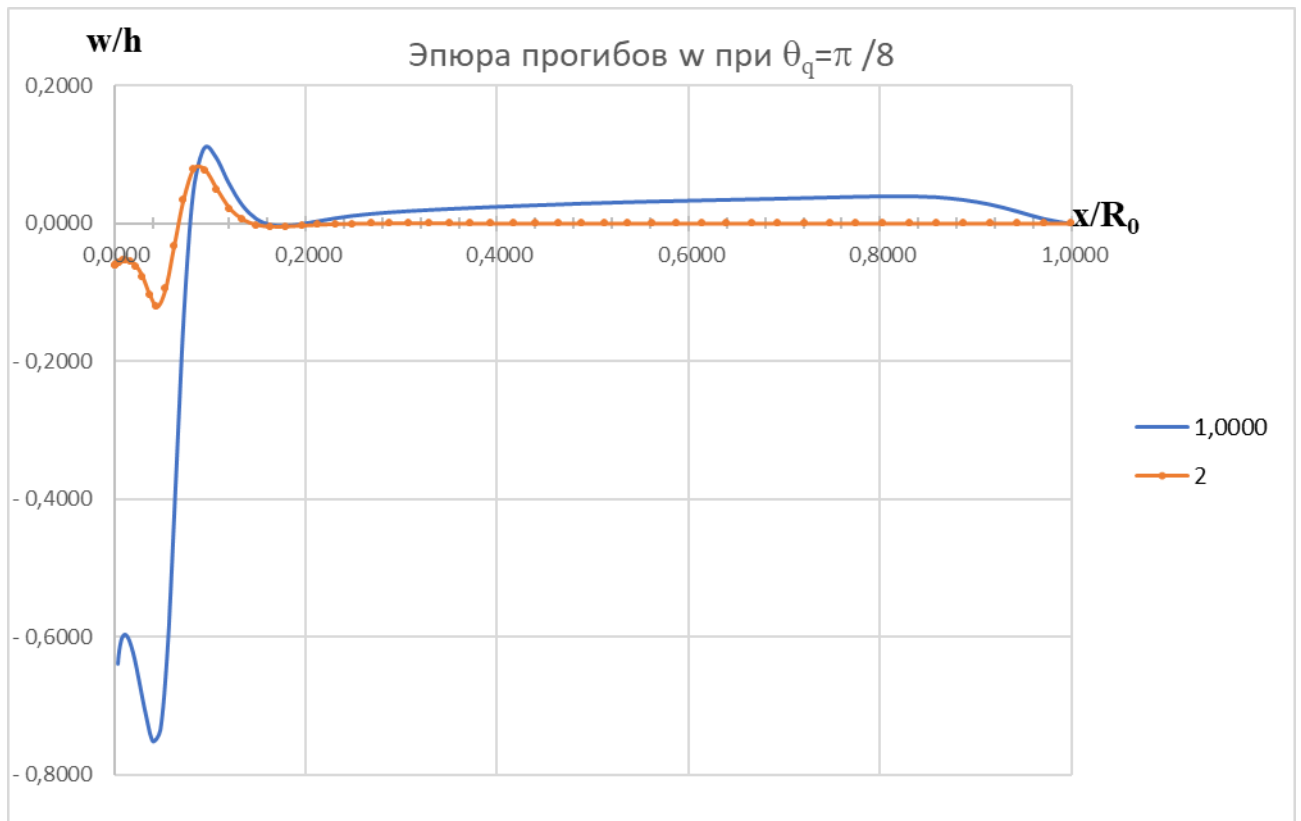


Рис. 4.14. Эпюры прогибов w сферической оболочки для $\theta_q = \pi/8$ при $p_q = 0,384$ (кривая 1) и остаточных прогибов (кривая 2)

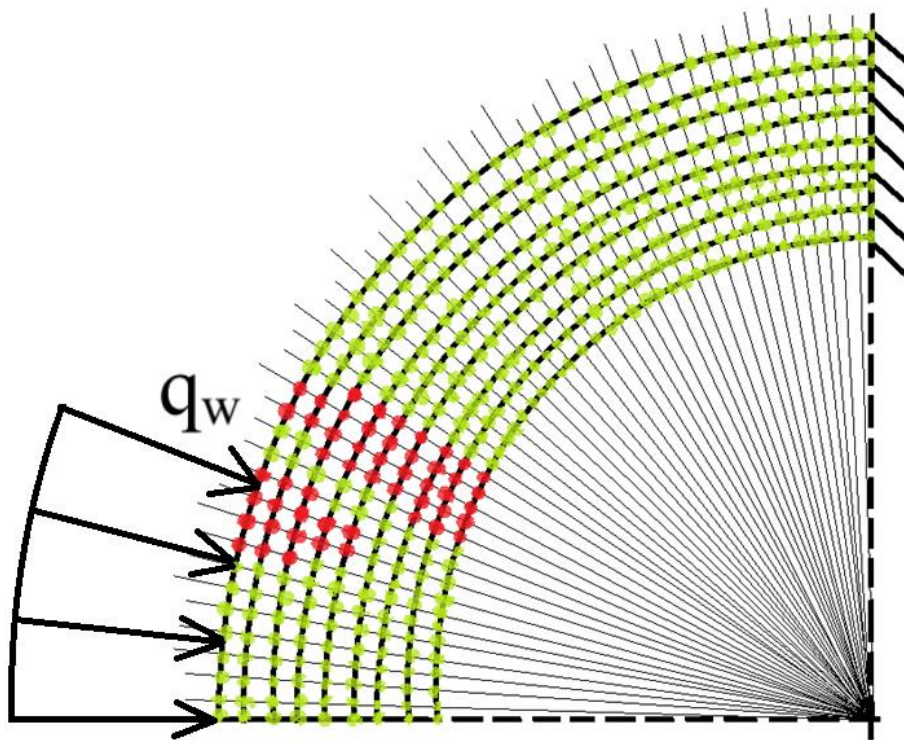


Рис. 4.15. Распределение упругих (зеленый цвет) и пластических деформаций (красный цвет) для $\theta_q = \pi/8$ при $p_q = 0,384$

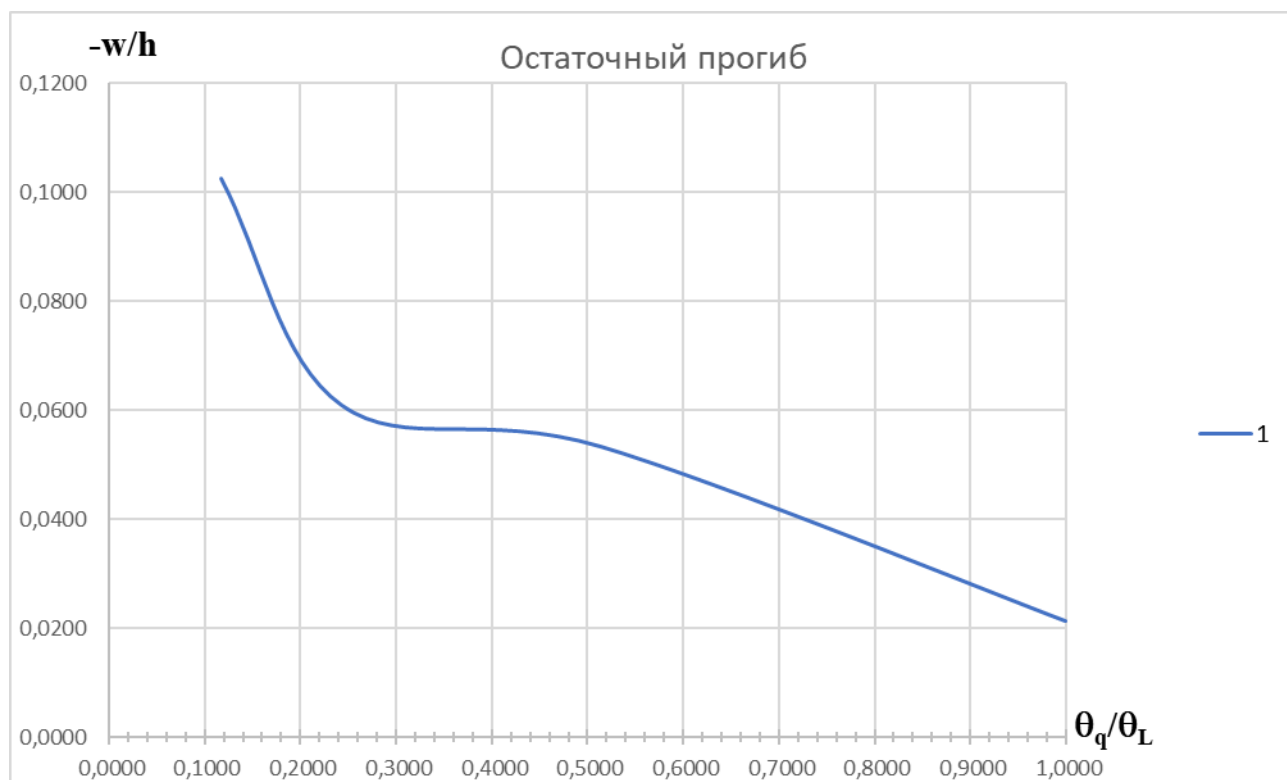


Рис. 4.16. Зависимость остаточного прогиба w в полюсной точке А от области нагружения θ_q сферической оболочки



Рис. 4.17. Зависимость величины разрушающей нагрузки от области нагружения θ_q сферической оболочки

Таким образом, результаты проведенного вычислительного эксперимента показали, что разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы решения геометрически и физически нелинейных краевых задач позволяют определять как предельные (разрушающие) нагрузки, так и оценивать остаточную несущую способность тонкостенных конструкций.

§ 4.3. Нелинейное напряженно-деформированное состояние неоднородных оболочек вращения при термомеханических воздействиях

4.3.1. Исследование влияния физико-механических характеристик ортотропного материала на несущую способность трехслойного сферического купола при действии внешнего поверхностного давления

Рассматривается неоднородная трехслойная сферическая оболочка купольного типа постоянной толщины h с начальным радиусом кривизны $R_{10}=R_{20}=R_0$ (рис. 4.18). На опорном контуре оболочки $s=S_L$ реализуются граничные условия жесткого защемления (1.60).

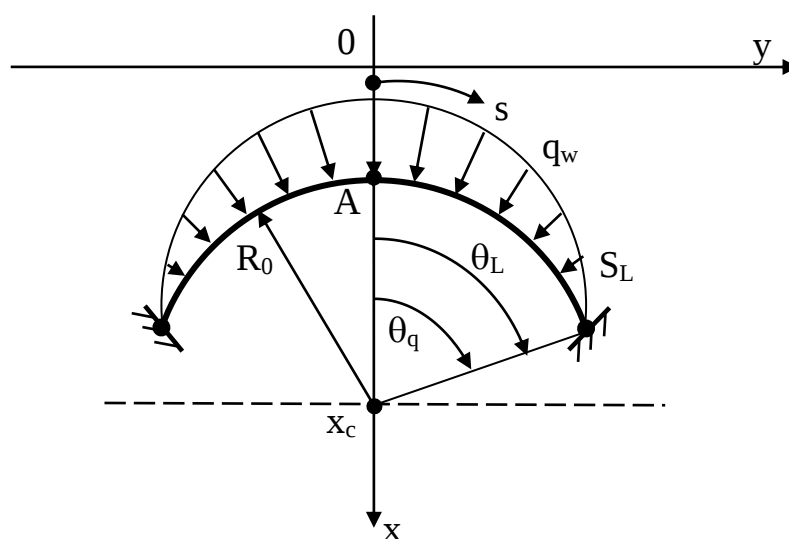


Рис. 4.18. Сферическая оболочка купольного типа с полюсной точкой А

Толщина каждого слоя составляет $\Delta h = h/3$, при этом наружные слои ($m=1,3$) изготовлены из ортотропного материала, а срединный (внутренний, $m=2$) слой - из изотропного конструкционного материала: сплава Амг6-Т (рис. 4.19, m – номер слоя).

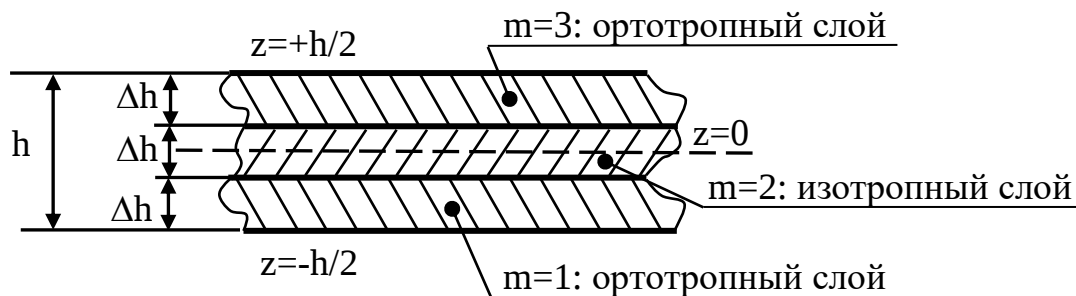


Рис. 4.19. Трехслойная неоднородная оболочка

В качестве слоя из ортотропного материала рассматривается монослой из углепластика с объемным содержанием волокон $v_f = 0,6$ и с характеристиками: $E_{11} = 1,8 \cdot 10^5$ МПа; $E_{22} = 0,16 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_{12} = 0,0257$; $\rho = 1350$ кг/м³; $\sigma_b = 0,8 \cdot 10^5$ МПа [9,19]. Характеристики сплава Амг6-Т: $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $\rho = 2750$ кг/м³; $\sigma_T = 0,145 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_b = 0,195 \cdot 10^5$ МПа [89]. Для описания физико-механических характеристик трехслойной неоднородной оболочки используются соотношения разд. 1.2.2.

Рассматривалось два следующих варианта применения ортотропного материала: а) модуль Юнга в меридиональном направлении E_1 больше модуля Юнга в окружном направлении E_2 : $E_1 = E_{11}$; $E_2 = E_{22}$; $\nu_{12} = 0,0257$; $E_1/E_2 = 11,25$; б) модуль Юнга в меридиональном направлении E_1 меньше модуля Юнга в окружном направлении E_2 : $E_1 = E_{22}$; $E_2 = E_{11}$; $\nu_{12} = 0,289$; $E_1/E_2 = 0,089$. Для оценки эффективности применения углепластиковых слоев в неоднородной конструкции исследовалось НДС однослойной сферической оболочки с принятыми геометрическими параметрами, выполненной из изотропного сплава Амг6-Т.

На тонкостенную конструкцию действует внешняя поверхностная нагрузка «следающего» типа q_w , распределенная вдоль меридиана сферической оболочки по следующему закону (рис. 4.18)

$$q_w = q_{\max} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\theta}{\theta_L}\right), \quad (4.8)$$

где $\theta_q = \theta_L$, т.е., поверхностная нагрузка q_w распределена по всему меридиану сферической оболочки. Максимальное значение нагрузки $q_{\max}$ определялось аналогично (4.7) по отношению к критическому внешнему давлению q_{cr} для замкнутой сферы толщиной h радиусом кривизны $R=R_0$

$$q_{\max} = p_q \cdot q_{cr}; \quad q_{cr} = \frac{2 \cdot E}{\sqrt{3 \cdot (1 - \nu^2)}} \left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad (4.9)$$

где значения E и соответствовали характеристикам сплава АмГб-Т.

При проведении исследований в силу симметрии задачи рассматривалась $\frac{1}{2}$ часть сферической оболочки для диапазона $0 \leq \theta \leq \theta_L$ (рис. 4.18). На расчетной области число точек дискретизации было принято равным $N=71$, при этом в зоне краевого эффекта на заземленном кран оболочки число узловых точек составило $N_L=9$. При этом по толщине оболочка разбивалась на $L=7$ слоев. Характеристики сплава АмГб-Т принимались следующими (рис. 4.10): $\sigma_\theta/\sigma_T=1,33$, $\varepsilon_\theta/\varepsilon_T=4,2$, $E_1=0,1 \cdot E$ [89].

Результаты проведенных исследований показали, что в случае неоднородной конструкции распределение упругих постоянных ортотропного материала в окружном и меридиональном направлении оказывает существенное влияние на НДС сферической оболочки. Максимальные напряжения в материалах достигали соответствующих пределов прочности при следующих значениях нагрузки:

- для случая $E_1=E_2$: при $p_q=5320$;
- для случая $E_1>E_2$: при $p_q=0,6640$;
- для случая $E_1<E_2$: при $p_q=0,1472$.

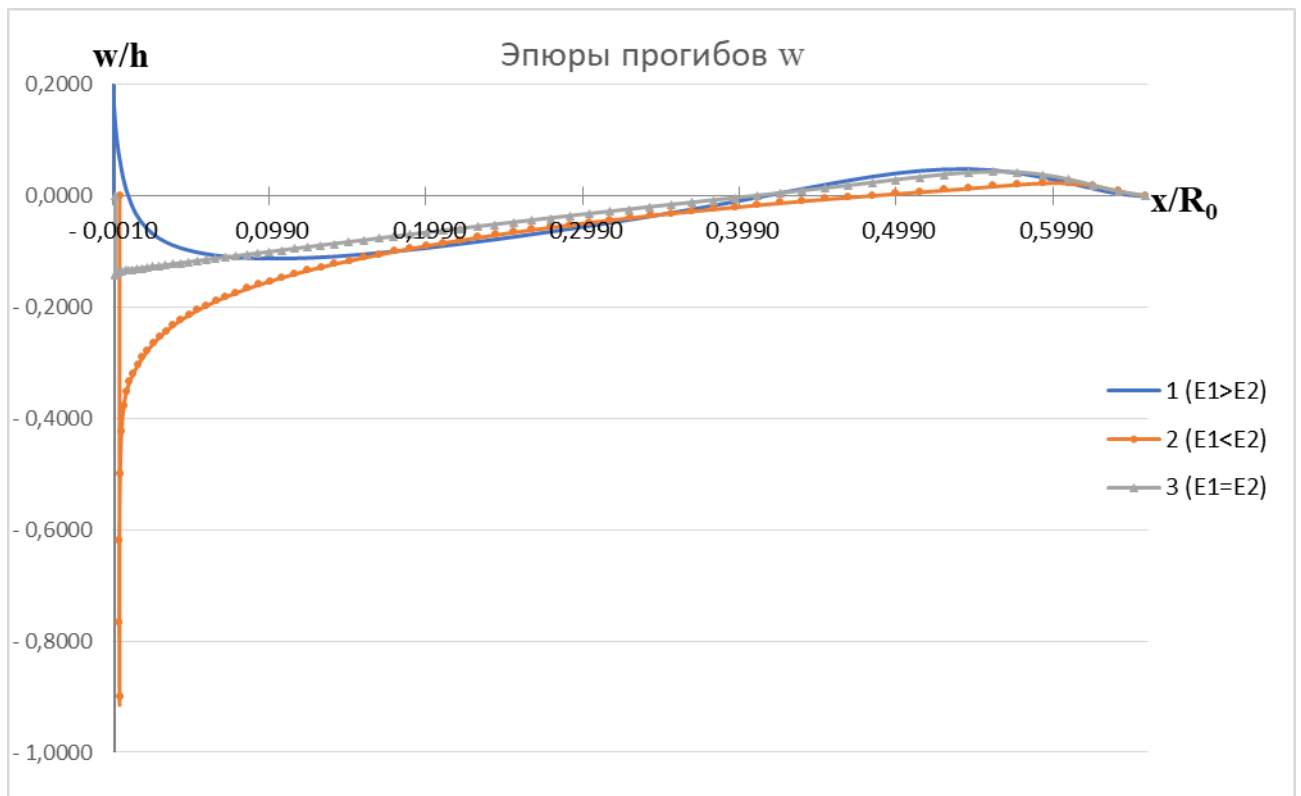


Рис. 4.20. Эпюры прогибов w для однослойной изотропной ($E_1 = E_2$) и трехслойной неоднородной ($E_1 < E_2$; $E_1 > E_2$) оболочки при $p_q = 0,1471$

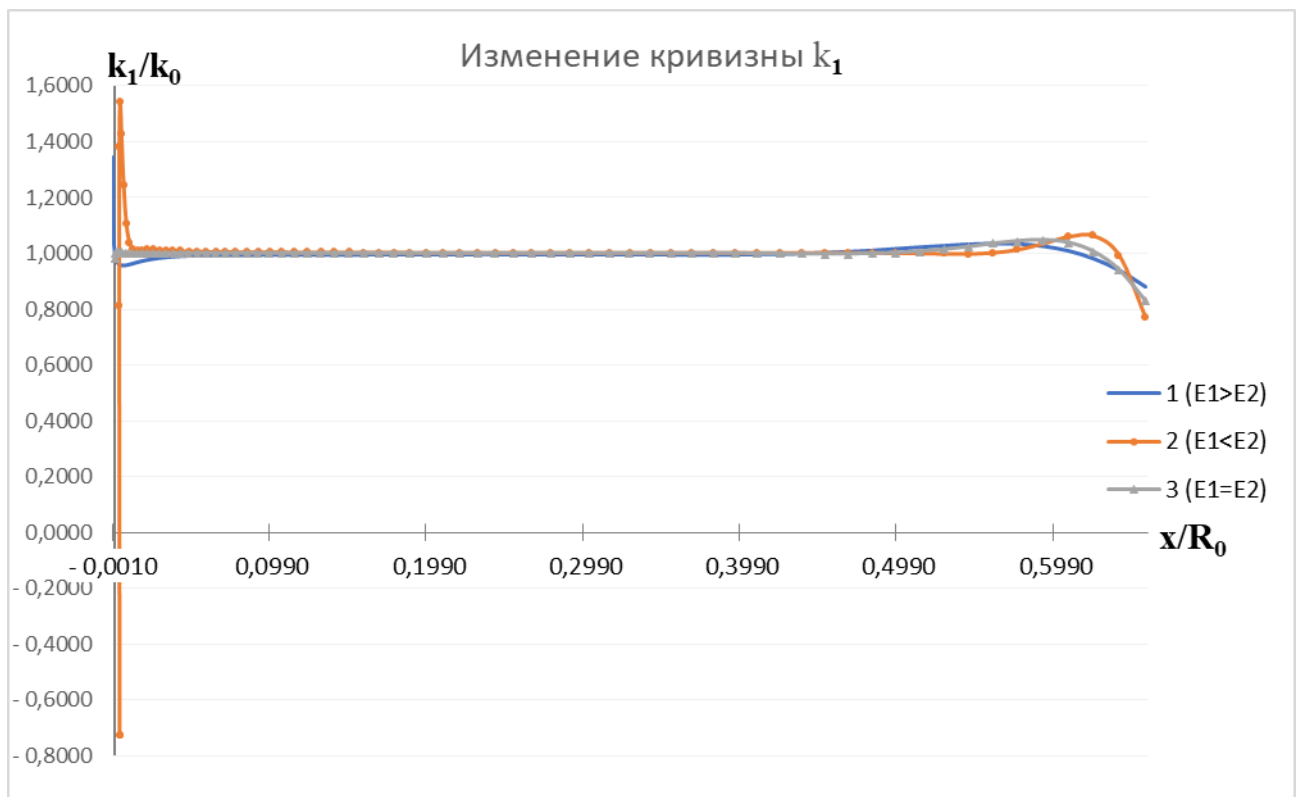


Рис. 4.21. Изменение кривизны k_1 для однослойной изотропной ($E_1 = E_2$) и трехслойной неоднородной ($E_1 < E_2$; $E_1 > E_2$) оболочки при $p_q = 0,1471$

На рис. 4.20,4.21 показано сравнение результатов исследований для рассматриваемых вариантов однородных и неоднородных оболочек, полученных для одинакового значения нагрузочного параметра $p_q=0,1471$. На рис. 4.20 показано распределение прогибов w вдоль меридиана оболочки, а на рис. 4.21 – изменение кривизны k_1 по отношению к исходному значению $k_{10}=1/R_0$, соответствующему недеформированному состоянию оболочки.

Максимальные значения прогибов в полюсной точке w_A при $p_q=0,1471$ соответственно составили:

- для случая $E_1=E_2$: $w_A=-0,143$;
- для случая $E_1>E_2$: $w_A=0,202$;
- для случая $E_1<E_2$: $w_A=-0,901$.

Интересно отметить, что для неоднородных оболочек для случая, когда главные направления упругости ортотропного монослоя координированы таким образом, что модуль Юнга в меридиональном направлении E_1 меньше модуля Юнга в окружном E_2 ($E_1<E_2$), кривизна k_1 в окрестности полюсной точки A меняет знак (рис. 4.21).

Таким образом, использование неоднородной трехслойной конструкции вместо однослойной изотропной оболочек при одинаковых геометрических параметрах путем рационального координирования упругих характеристик ортотропного монослоя по отношению к координатным направлениям сферической оболочки позволяет повысить несущую способность тонкостенной конструкции в 1,25 раза, снизив при этом весовые характеристики в 1,26 раза.

4.3.2. Исследование особенностей процессов нелинейного деформирования тепловыделяющих элементов ядерных энергетических установок при термомеханических воздействиях

Тепловыделяющие элементы (ТВЭЛы) являются основными элементами конструкций ядерных энергетических установок различного функционального назначения. Объемное тепловыделение в материалах ТВЭЛов (UO_2 , UC, UN) обусловлено превращением кинетической энергии осколков деления тяжелых элементов (например, урана) в тепловую. Форма и геометрические размеры ТВЭЛов зависят от назначения ядерного реактора. Наиболее распространенной формой ТВЭЛа считается цилиндрическая. Длинный тепловыделяющий цилиндр (чаще всего кругового сечения) помещается в металлическую оболочку, которая взаимодействует с теплоносителем. В некоторых конструктивных схемах используют сферические ТВЭЛы (ядерное топливо в металлической оболочке). Прочностная надежность ТВЭЛов определяется величиной и характером распределения температурных напряжений вследствие объемного тепловыделения [57,98].

ТВЭЛ является наиболее ответственным узлом активной зоны ядерного реактора, и нормальная работа реактора (режим, длительность кампании) в наибольшей степени определяется работоспособностью ТВЭЛа. В ядерном реакторе ТВЭЛы располагаются обычно отдельными группами, заключенными в защитные кожуха. Такая конструкция носит название кассеты с тепловыделяющими элементами. ТВЭЛы жестко закреплены в концевых частях кассеты и отделяются друг от друга с помощью различных дистанционирующих деталей. ТВЭЛы ядерного реактора работают в сложных и тяжелых условиях — при высоких тепловых нагрузках и температурах, больших температурных градиентах, высоких механических напряжениях, наличии деформаций растяжения и при действии многочисленных неблагоприятных факторов, ухудшающих механические и физические характеристики материала.

Рассматривается тепловыделяющий элемент, конструктивно представляющий собой длинную цилиндрическую оболочку, под действием температурного поля и внутреннего давления. В соответствии с типовым конструктивным исполнением ТВЭЛов, на краях оболочки $x=0, L_0$ рассматривались граничные условия жесткого защемления (1.60). Материал оболочки – сплав на основе циркония ZrC (карбид циркония) со следующими характеристиками: модуль Юнга $E=3 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu=0,3$; коэффициент линейного расширения $\beta_t=5,2 \cdot 10^{-6}$ 1/град; термические разрушающие напряжения $\sigma_t=93$ МПа [57,98]. Геометрические параметры цилиндрической оболочки: $R_0/h=100$, $L_0/R_0=25$. Параметр относительной длины оболочки Z , определяемый как [89]

$$Z = \frac{L \sqrt[4]{1 - \nu^2}}{\sqrt{Rh}}, \quad (4.10)$$

соответственно составил $Z=244,17$ (длинная оболочка: $Z>20$). Исследовались особенности процессов нелинейного деформирования оболочки ТВЭЛа как при раздельном действии температурного поля и внутреннего давления, так и при их совместном действии. При решении термической задачи температурное поле в (1.27), (1.28) задавалось на внутренней стороне оболочки $z=-h/2$: $T_1(-h/2)>0$, а на внешней стороне $z=+h/2$ температурное поле принималось равным нулю: $T_2(+h/2)=0$. Интенсивность внутреннего давления q_w задавалось при помощи нагрузочного коэффициента p_q аналогично (4.7) по отношению к критическому внешнему давлению q_{cr} для шарнирно опертой цилиндрической оболочки [89]

$$q_w = p_q \cdot q_{cr}; \quad q_{cr} = p_q \frac{\pi \sqrt{6}}{9Z} \frac{E}{\sqrt{1 - \nu^2}} \left(\frac{h}{R} \right)^2. \quad (4.11)$$

При проведении исследований в силу симметрии рассматривалась $1/2$ часть оболочки длиной $l_0=L_0/2$ с числом точек дискретизации $N=91$. Результаты проведенных исследований представлены на рис. 4.22 и рис. 4.23. На рис. 4.22 показаны эпюры прогибов w в оболочке ТВЭЛа при $T_1=100^\circ \text{C}$, $T_1=300^\circ \text{C}$ и $T_1=490^\circ \text{C}$. На рис. 4.23 показана зависимость температуры, соответствующе $\sigma_{\max}=\sigma_t$, от параметра p_q .



Рис. 4.22. Эпюры прогибов w при $T_1=100^\circ\text{C}$, $T_1=300^\circ\text{C}$ и $T_1=490^\circ\text{C}$

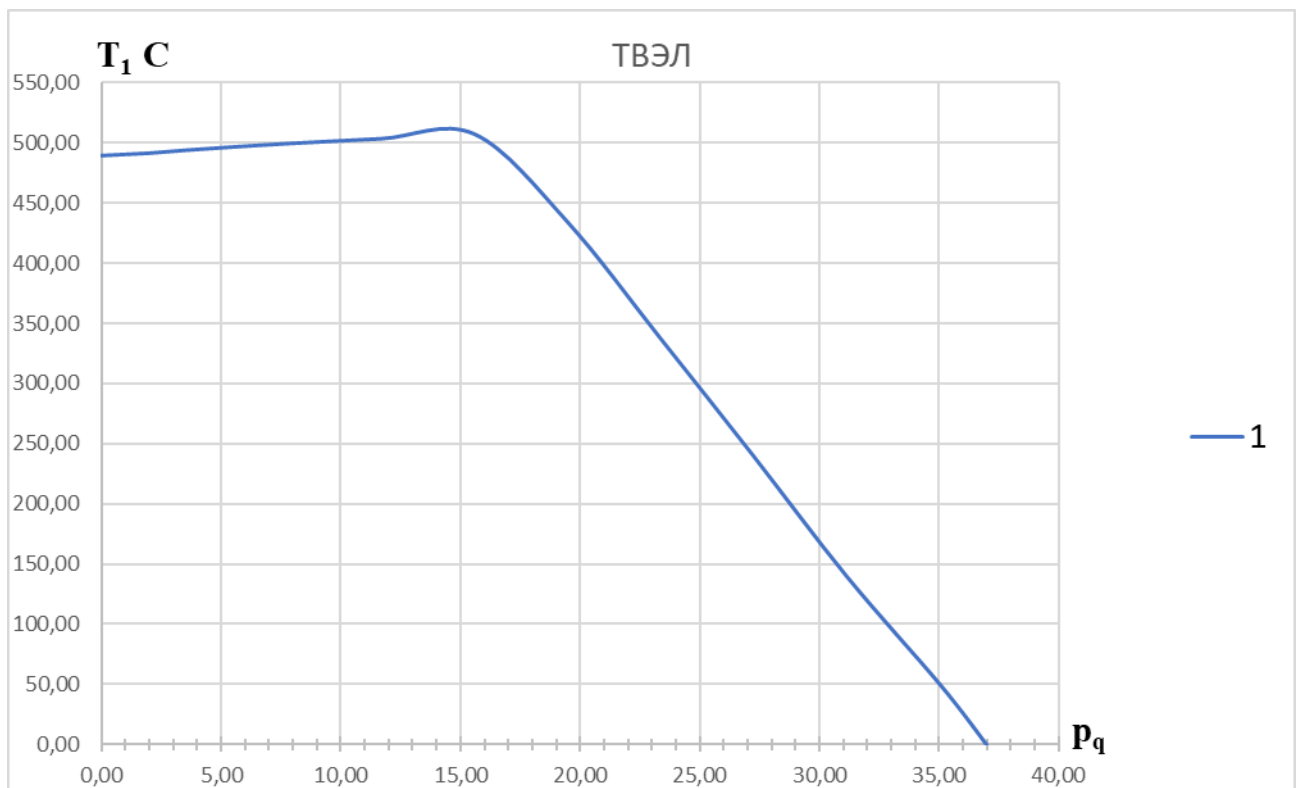


Рис. 4.23. Зависимость температуры T_1 , соответствующе $\sigma_{\max}=\sigma_t$, от параметра p_q .

Результаты проведенных исследований показали, что при действии температурного поля максимальные напряжения в оболочке возникали в заделке и достигали предельной величины $\sigma_{\max} = \sigma_t$ при значении температуры $T_1 = 490^\circ \text{C}$, что достаточно хорошо коррелирует с известными экспериментальными данными [57,98]. При этом несущая способность оболочки определялась продольными напряжениями сжатия $\sigma_{11} < 0$. При действии только внешнего давления q_w определяющими являлись окружные растягивающие напряжения $\sigma_{22} > 0$, которые достигали величины $\sigma_{\max} = \sigma_t$ при значении нагрузочного параметра $p_q = 36,97$. Как показали результаты проведенного ВЭ, при совместном действии температурного поля и внутреннего результирующее НДС от действия сжимающих продольных напряжений $\sigma_{11} < 0$, обусловленных температурным воздействием, и растягивающих напряжений $\sigma_{22} > 0$, вызванных внутренним давлением, для диапазона значений параметра $0 < p_q \leq 16$ в результате перераспределения напряжений при термомеханическом воздействии приводит к повышению предельной температуры (соответствующей $\sigma_{\max} = \sigma_t$) до величины $T_1 = 515^\circ \text{C}$ с последующим снижением практически по линейной зависимости при повышении до p_q величины $p_q = 36,97$, соответствующей $T_1 = 0$. Как при совместном действии температурного поля и внутреннего давления, так и при их раздельном действии максимальные напряжения возникали или в заделке (температурное воздействие), или в непосредственной близости к ней (внутреннее давление и температурное поле).

Таким образом, результаты проведенных исследований позволили выявить особенности НДС цилиндрических оболочек ТВЭЛов при термомеханических воздействиях и установить диапазон значений параметров внутреннего давления в оболочке, позволяющий повысить предельную температуру в оболочке ТВЭЛа на 5,9% при совместном действии температурного поля и внутреннего давления.

Заключение

По результатам проведенных исследований могут быть сформулированы следующие выводы.

1. Разработаны и развиты адекватные математические модели и эффективные численные алгоритмы решения геометрически и физически нелинейных краевых задач статики неоднородных оболочек вращения, позволяющие исследовать напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций. Для расчета составных оболочечных конструкций разработана математическая модель, представляющая составную конструкцию в виде набора оболочек вращения и недеформируемых шпангоутов, что позволило упростить практическую реализацию силовых граничных условий для деформированного состояния оболочки.

2. При построении дискретных моделей разработаны оригинальные конечно-разностные аналоги исходных дифференциальных уравнений, позволяющие исследовать особенности нелинейного деформирования оболочек на основе однотипных конечно-разностных операторов второго порядка точности как для исходного, так и деформированного состояния, а также разработана оригинальная процедура дискретизации параметров НДС оболочек вращения, содержащих полюсные точки, и построены однотипные дискретные модели для вычисления силовых факторов при решении физически нелинейных задач, а также при расчете оболочек из нелинейно упругих материалов..

3. На основе адаптации квазидинамической формы метода установления для решения полученной системы сеточных уравнений построен единый вычислительный алгоритм для численного решения геометрически и физически нелинейных краевых задач статики оболочек при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций. Рассмотрены особенности построения итерационного процесса при действии консервативной и «следящей» нагрузки, а также получены формулы для оценки оптимальных (с точки зрения сходимости и устойчивости разностной схемы) значений параметров итерационного процесса.

4. Достоверность как разработанных математических моделей, так и их дискретных аналогов и вычислительных алгоритмов подтверждается сопоставлением полученных численных результатов с известными аналитическими и экспериментальными данными, а также сопоставлением с численными решениями существенно нелинейных краевых задач других авторов.

5. Разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы практически реализованы в виде пакета прикладных программ «SHELX» на языке FORTRAN-IV, с помощью которого методами вычислительного эксперимента были проведены исследования особенностей процессов деформирования оболочек вращения при произвольных значениях обобщенных перемещений и деформаций, в том числе:

- в рамках неогуковской модели нелинейно упругого материала и модели Муни-Ривлина исследовано влияние параметров гиперупругого материала на жесткостные характеристики конического амортизатора сжатия и определены характерные точки диаграммы «осадка-сжимающая сила», значения которых могут быть использованы на стадии эскизного проектирования амортизатора;

- с использованием соотношений деформационной теории пластичности исследовано влияние области нагружения «следящей» нагрузки на несущую способность и остаточное напряженно-деформированное состояние замкнутой в полюсе сферической оболочки, изготовленной из изотропного конструкционного материала. Определена зависимость остаточного прогиба в полюсной точке сферы и предельной (разрушающей) нагрузки от области нагружения оболочки;

- исследовано влияние физико-механических характеристик монослоя из углепластика на параметры НДС трехслойной неоднородной сферической оболочки купольного типа при неравномерно распределенном по образующей внешнем давлении и показана возможность повысить несущую способность оболочки в 1,25 раза при снижении весовые характеристики в 1,26 раза по сравнению с однородной конструкцией из изотропного материала.

6. Для цилиндрических конструкций тепловыделяющих элементов ядерных реакторов предложены математические модели нагружения цилиндрических обо-

лочек и проведено численное моделирование процессов деформирования. Исследованы особенности НДС при термомеханических воздействиях и установлен диапазон значений параметров внутреннего давления в оболочке, позволяющий повысить предельную температуру в оболочке ТВЭЛа на 5,9% при совместном действии температурного поля и внутреннего давления.

Литература

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. - М.: Наука, 1978. - 288 с.
2. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. - М.: Машиностроение, 1991. - 336 с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. - 360 с.
4. Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. - М.: Наука, 1988. - 208 с.
5. Аронсон А.Я., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И., Оглобля А.И. Нелинейное деформирование оболочек спиральных камер гидротурбин в упругой среде. - Проблемы прочности. - 1985. - № 4. - С. 97-102.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1968. - 560 с.
7. Баженов В.Г., Игоничева Е.В. О взаимном влиянии неосесимметричных форм выпучивания тонких цилиндрических оболочек при продольном ударном нагружении. - В кн. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, 1983, вып. 24, с. 47-54.
8. Баженов В.А., Заблоцкий С.В. Нелинейный анализ устойчивости цилиндрических и конических панелей на основе метода редукции базиса. - Сопротивление материалов и теория сооружений: Сб. статей. - Киев, 1985. №47. С. 5-13.
9. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1988. - 224 с.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Физматлит. Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 632 с.
11. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х томах. - М.: Гос. изд. физ-мат. лит. 1959. Т.1 - 464 с., 1962. Т. 2 - 640 с.
12. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций: Статика. - М.: Машиностроение, 1977. - 488 с.
13. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. - М.: Физматлит, 1992. - 392 с.

- 14.Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.: Машиностроение, 1980. - 375 с.
- 15.Булгакова М.В. Вариационно-разностный метод расчета гибких оболочек на устойчивость с учетом поперечного сдвига. – Численные методы в исследовании строительных конструкций. М., 1986, с. 30-34.
- 16.Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976. - 278 с.
- 17.Ворович И.И., Яценко М.Н. Об одной форме потери устойчивости цилиндрической панели. - Теория оболочек и пластин: Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. - М.: Наука, 1973. - С. 104-109.
- 18.Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. - М.: Мир, 1987. - 542 с.
- 19.Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1988. - 272 с.
- 20.Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем.-М.: Наука, 1967.-984 с.
- 21.Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т. Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. - М.: Машиностроение, 1989. - 248 с.
- 22.Гаврюшин С.С., Коровайцев А.В. Методы расчета элементов конструкций на ЭВМ. - М.: Изд-во ВЗПИ, 1991. - 159 с.
- 23.Гаврюшин С.С. Алгоритмы исследования больших прогибов гибких оболочек методами продолжения и их численная реализация // Труды XVI Межд. конф. по теории оболочек и пластин. Н.-Новгород, 1993. – с. 80-89.
- 24.Гаврюшин С.С. Анализ и синтез тонкостенных элементов робототехнических устройств с предписанным законом деформирования // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2011. №12. С. 22-32.
- 25.Гавриленко Г.Д. Численный подход к исследованию несущей способности оболочек с локальной вмятиной. – Теор. и прикладная механика, 2003, № 7, с. 76-78.

26. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. - Казань, 1975. - 328 с.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. - М.: Мир, 1984. - 428 с.
28. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1973. - 400 с.
29. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1976. - 510 с.
30. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Якушин С.А. Расчет тонкостенных конструкций МКЭ с учетом геометрической и физической нелинейности. - Пробл. прочн. и пластичности. 2002, № 64, с.184 – 193.
31. Гоцуляк Е.А., Ермишев В.Н. Напряженно-деформированное состояние многоугольной тороидальной камеры. – Сопротивление материалов и теория сооружений: Киев. 1984, № 45, с. 9-12.
32. Гоцуляк Е.А. Выбор базиса в методе редукции при решении нелинейных задач устойчивости оболочек. – Сопротивление материалов и теория сооружений: Киев. 1985, № 47, с. 16-21.
33. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. - Л.: Судостроение, 1974. - 208 с.
34. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. - М.: Наука, 1978. - 360 с.
35. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. - М.: Наука, 1988. - 232 с.
36. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. - Киев: Вища школа, 1983. - 286 с.
37. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. - М.: Наука, 1992. - 336 с.
38. Дмитриев В.Г., Преображенский И.Н. Деформирование гибких оболочек с вырезами. - Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1988, № 1, с. 177-184.
39. Дмитриев В.Г. Численный анализ особенностей упруго-пластического деформирования неоднородных оболочек вращения в области больших перемеще-

- ний и углов поворота нормали. - Ученые записки ЦАГИ. 2023. № 1. Том LIV. С. 76-88.
- 40.Енджиевский Л.В. Нелинейные деформации ребристых оболочек. - Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1982. – 296 с.
- 41.Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. - М.: Мир, 1986. - 318 с.
- 42.Зубчанинов В.Г., Зубчанинов Д.В., Гультяев В.И. Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при сложном нагружении за пределом упругости. - Механика оболочек и пластин: сб. докладов 20 Межд. конф. по теории пластин и оболочек. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2002, с. 146 – 150.
- 43.Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Расчет оболочек с упругим заполнителем. - М.: Наука, 1987. - 260 с.
- 44.Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.
- 45.Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512 с.
- 46.Каюк Я.Ф. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. - Киев: Наук. думка, 1987. - 208 с.
- 47.Кибец А.И., Лаптев П.В., Ломунов В.К., Жигалов Д.В. Численное моделирование больших формоизмерений упругопластической цилиндрической оболочки при осевом сжатии. - Прикл. проблемы прочности и пластичности. 2001, №63, с. 132-137, 195-196, 203.
- 48.Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. - М.: Машиностроение, 1990. - 512 с.
- 49.Корнишин М.М., Сулейманова М.М. Геометрически и физически нелинейный изгиб непологих оболочек различной формы при совместном действии температуры и внешних сил. - Пробл. прочности, 1983, № 12, с. 80-83.
- 50.Коровайцев А.В. Расчет упругих оболочек вращения при больших осесимметричных перемещениях. / Расчет на прочность, жесткость, устойчивость и колебания. М: 1983. № 23. с. 290-295.

- 51.Коровайцев А.В. Исследование осесимметричного напряженно-деформированного состояния оболочек вращения при больших перемещениях // Известия АН СССР. МТТ. - 1980. - №1. - С.170.
- 52.Коровайцев А.В. О численном решении нелинейных задач динамики элементов упругих конструкций при больших нелинейностях //Тр. XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. - Таллин. - 1983. - С.84-89.
- 53.Коровайцева Е.А. Сравнительный анализ статического деформирования мягких оболочек канонических форм меридиана при раздувании // Труды МАИ. – 2022. – № 123.
- 54.Коровайцева Е. А. Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек // Вестник СамГТУ, Сер. Физ.-мат. науки. – Самара. – 2021. – Т. 25, № 3. – С. 556– 570.
- 55.Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. - Саратов. 1976. - 214 с.
- 56.Курдюмов А.А. К теории физически и геометрически нелинейных задач изгиба и устойчивости пластин и оболочек. – Тр. Ленинградского кораблестр. Института. 1961. Вып. 34. С. 55-62.
- 57.Ланин А.Г., Федик И.И. Термопрочность материалов. – Подольск, НИИ НПО «Луч», 2005, 309 с.
- 58.Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975. - 387 с.
- 59.Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций / А.В. Кармишин, А.И. Жуков, В.Г. Колосов и др. - М.: Машиностроение, 1990. - 288 с.
- 60.Методы расчета оболочек: В 5 т. Т 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов, Вик. Н. Чехов, К.И. Шнеренко. - Киев: Наук. думка, 1980. - 635 с.
- 61.Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. - Казань: Таткнигоиздат, 1957. - 432 с.

- 62.Нестационарная аэроупругость тонкостенных конструкций / А.В. Кармишин, Э.Д. Скурлатов, В.Г. Старцев, В.А. Фельдштейн. - М.: Машиностроение, 1982. - 239 с.
- 63.Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. - Л.-М.: Гостехиздат, 1948. -212 с.
- 64.Новожилов В.В. Вопросы механики сплошной среды. - Л.: Судостроение, 1989. - 400 с.
- 65.Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. - Л.: Политехника, 1991. - 656 с.
- 66.Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М.: Высшая школа, 1985. - 392 с.
- 67.Общая нелинейная теория упругих оболочек. / Кабриц С.А., Михайловский Е.И., Товстик П.Е., Черных К.Ф., Шамина В.А. - СПб: Изд-во СПб-ГУ. 2002. – 386 с.
- 68.Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. - Киев: Наук. думка, 1973. - 248 с.
69. Петров В.В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах. - Науч. доклады высш. школы. Строительство. 1959. № 1,с. 27-35.
- 70.Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.
- 71.Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1977. - 280 с.
- 72.Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Под ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханта: Пер. с англ. - М.: Наука, 1991. - 424 с.
- 73.Преображенский И.Н. Об исследованиях устойчивости тонкостенных оболочек с вырезами (обзор). Ч. 1,2. - Пробл. прочности, 1982, № 1, с. 21-32; № 2, с.74-81.

74. Преображенский И.Н., Дмитриев В.Г. Вычислительный эксперимент в механике машиностроительных конструкций. - Проблемы машиностроения и автоматизации, 1992, № 2, с. 64-68.
75. Приказчиков В.Г. Интегро-интерполяционный метод построения разностных уравнений в задачах колебаний пластины. - Ученые записки ЦАГИ, 1973, IV, № 4, с. 73-76.
76. Пространственные конструкции в Красноярском крае: Сб. научн. трудов - Красноярск, № 17, 1985. - 213 с.
77. Прочность ракетных конструкций: / В.И. Моссаковский, А.Г. Макаренков, П.И. Никитин и др. - М.: Высш. школа, 1990. - 359 с.
78. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. - М: Машиностроение, 1968. Том 1. - 832 с.
79. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела.- М.: Наука, 1988.- 712 с.
80. Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ.- Л.: Судостроение, 1974. В 2-х т. Т.1 - 308 с. Т.2 - 312 с.
81. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев, В.П. Майборода и др. - М.: Машиностроение, 1989. - 520 с.
82. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М: Мир, 1972. - 418 с.
83. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. – 532 с.
84. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений.- М.: Наука, 1978. - 592 с.
85. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432с.
86. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989. - 616 с.
87. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

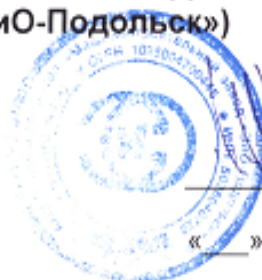
88. Семенов А.А., С.С. Леонов С.С. Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций // Ученые записки Казанского университета. Сер. физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 61, книга 2. – с. 230-249.
89. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В. Кармишин, В.А. Лясковец, В.И. Мяченков, А.Н. Фролов. - М.: Машиностроение, 1975. - 376 с.
90. Старовойтов Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 343 с.
91. Старожилова О.В., Кузнецов С.А. Математическое моделирование нелинейного поведения гибких оболочек: Тез. докл. 2 Всерос. симп. по прикладной и промышленной математике. - Обзорение прикл. и промышленной математике. 2001. 8, №1, с. 234-335.
92. Строительная механика летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др. - М.: Машиностроение, 1986. -536 с.
93. Сувернев В.Г., Кабанов В.В., Железнов Л.П. Конечный элемент и алгоритм для расчета на прочность оболочек вращения с вырезами. - В кн. "Теория и расчет элементов тонкостенных конструкций". М., 1986, с. 96-106.
94. Тараканов С.И. О сходимости метода “динамическая релаксация” в задачах нагружения упругих оболочек вращения. - Вестник МГУ: Мат. мех. № 5, 1984, с. 90-93.
95. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. - Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. - 212 с.
96. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1955. - 576 с.
97. Тонкостенные оболочечные конструкции: Теория, эксперимент и проектирование. - М.: Машиностроение, 1980. - 607 с.
98. Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – М.: Энергоатомиздат, 1985, 278 с.

- 99.Феодосьев В.И. Об одном способе решения задач устойчивости деформируемых систем. - Прикл. математика и механика, 1963, **27**, № 2, с. 256-275.
- 100.Филин А.П. Элементы теории оболочек. - Л.: Стройиздат, 1987. - 384 с.
- 101.Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). – М.: Эдиторал УРСС, 1999. – 224 с.
- 102.Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1986,- 336 с.
- 103.Шклярчук Ф.Н., Кочемасова Е.И., Тютюнников Н.П. Решение задачи о деформировании анизотропной безмоментной цилиндрической оболочки. - Мех. композиц. матер. и конструкций. 2002. 8, №4, с. 447-455.
- 104.Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек. – Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1968. № 1, с. 56-62.
- 105.Шаповалов Л.А. Уравнения эластики тонкой оболочки при неосесимметричной деформации. - Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1978. № 3, с. 62-72.
- 106.Яценко М.Н. Об устойчивости цилиндрической панели под действием равномерно распределенного давления. - Прикл. вопросы физики: Сб. статей. Ростов-на-Дону, 1974. - С. 73-79.
- 107.Almroth B.O., Brogan F.A., Marlowe M.B. Stability Analysis of Cylinders with Circular Cutouts. - AIAA Journal, 1973, v. **11**, № 11, pp. 1582-1584.
- 108.Dmitriev V. Applied Mathematic Technologies in Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Constructions. Chapter 4. Book Mathematics Applied to Engineering and Management Sciences. Edited by Mangey Ram and S. B. Singh. CRC Press Taylor & Francis Group. BocaRaton, 2019, pp. 71-116. DOI: [10.1201/9781351123303-4](https://doi.org/10.1201/9781351123303-4)
- 109.Evkin A.Y., Kalamkarov A.L. Analysis of large deflection equilibrium states of composite shells of revolution. Pt.1. General model and singular perturbation analysis. - Int. J. Solids and Struct. 2001. 38, № 50-51, pp. 8961-8974.

- 110.Evkin A.Y., Kalamkarov A.L. Analysis of large deflection equilibrium states of composite shells of revolution. Pt.2. Applications and numerical results. - Int. J. Solids and Struct. 2001. 38, № 50-51, pp. 8975-8987.
- 111.Frieze P.A., Hobbs R.E., Dowling P.J. Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto-plastic analysis of plates. - Computers & Structures, 1978, v. 8, № 2, pp. 301-310.
- 112.Hilburger Mark W., Starnes James H. Effects of imperfections on the buckling response of compression-loaded composite shells. - Int. J. Non-Linear Mech. 2002. 37, № 4-5, pp. 623-643.
- 113.Nelson R.Bauld, James G. Goree, Lih-Shyng Tzeng. A comparison of finite-difference and finite-element methods for calculating free edge stresses in composites. - Computers & Structures, 1985, v.20, № 5, pp. 897-914.
- 114.Ory H., Reinmerdes H.G., Schmid T., Rittweger A., Gomez Garcia J. Imprefection sensitivity of an orthotropic sphecial shell under external pressure. - Int. J. Non-Linear Mech. 2002. 37, № 4-5, pp. 669-686.
- 115.Rodríguez–Martínez J.A., Fernández–Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation // [International Journal of Engineering Science](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004), 2015, vol. 93, pp. 31–45. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2015.04.004](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004)
- 116.Tong Pin. An adaptive dynamic relaxation method for static problems. - Comput. Mech. '86: Theory and Appl. Proc. Int. Conf., Tokyo, 1986, v. 1, pp. II/89-II/101.
- 117.Turvey G.J., Der Avanessian N.G.V. Elastic large deflection of circular plates using graded finite-differences. - Comput. & Struct. 1986, v. 23, № 6, pp. 763-774.
- 118.Turner M.J., Dill E.H., Martin H.C., Melosh R.J. Large deflections of structures subjected to heating and external loads. – J. Aero/Space Sci. 1960. V. 27. № 1. PP. 97-106, 127.

Приложение

**АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ ЗАВОД «ЗИО-ПОДОЛЬСК»
(АО «ЗиО-Подольск»)**



«УТВЕРЖДАЮ»

Технический директор
М. Ю. Хижов

**Акт внедрения
научно-технического мероприятия**

Результаты исследований Поповой Анастасии Руслановны в рамках диссертационной работы на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 1.1.8 – «Механика деформируемого твёрдого тела» на тему: «Моделирование нелинейных процессов деформирования неоднородных оболочек вращения при произвольных обобщенных перемещениях и деформациях».

(наименование мероприятия, его шифр по плану)

1. Объект, на котором внедрено мероприятие

Департамент оборудования атомного машиностроения. Отдел прочностных расчётов.

2. Краткое описание и преимущество внедренного мероприятия

Результаты исследований используются в расчётной практике при проектировании теплотехнического оборудования энергетического машиностроения.

Заместитель технического
директора - директор по науке,
д.т.н., заслуженный
изобретатель РФ


(подпись и дата)

В. М. Терехов
(инициалы, фамилия)

Начальник отдела
инновационного развития


(подпись и дата)

М. З. Усманов
(инициалы, фамилия)

Ответственный исполнитель
мероприятия


(подпись и дата)

А. Р. Попова
(инициалы, фамилия)

```

PROGRAM SHELX
COMMON /A/X(175), Y(175), F(175), SNT(175), CST(175), CSF(175), DS(175),
*RK1(175), RK2(175), RKL/B/U(175), W(175), VU(175), VW(175)
*/C/X0(175), Y0(175), F0(175), SF0(175), CF0(175), DS0(175), RK10(175),
*RK20(175), RLO/D/DT, D1, D2, D3, D4/E/KSL, H, A11, A12, A21, A22, B11, B12,
*B21, B22, D11, D12, D21, D22, DM12, DM21/Q/QN(175), EM, EPX, EPY, KX, KY
*/N/N, N1, NL, NR/L/LB, IP, KN, KMN/F/KFN, T11(175), T22(175), Q13(175),
*BM11(175), BM22(175), E11(175), E22(175), RK11(175), RK22(175), DX(175),
*DY(175)/P/PI, PI2/ET/AT, BT, B1T, B2T, D1T, D2T/EE/E, D, ET, EPR, ST, SPR, E1,
*EKD, ERD, DH, IP1, ZX(11), C11, C21, C22, C31, C32, C33/ES/EIZ(175, 11),
*EXX(175, 11), EYY(175, 11), EZZ(175, 11), SIZ(175, 11), SXX(175, 11),
*SYX(175, 11), EIC(175, 11), E1C(175, 11), E2C(175, 11), E3C(175, 11),
*SIC(175, 11), S1C(175, 11), S2C(175, 11)
DIMENSION QW(3), PF(3), KNN(3), EX(3), EY(3), DXY(3), HZ(3)
OPEN (3, FILE='DATE', STATUS='OLD', FORM='FORMATTED')
READ(3, 1) RO, BT0, DL, AKT, AXU, AYW, RO, BT1, BT2, T1H, T2H, PDW,
*HZ(3), EX(3), EY(3), DXY(3), QW(1), PF(1),
*HZ(2), EX(2), EY(2), DXY(2), QW(2), PF(2),
*HZ(1), EX(1), EY(1), DXY(1), QW(3), PF(3),
*ST, EPR, SPR, ROE, ADH, AVM
READ(3, 72) N, NL, NR, IP, IL1, IL2, KVM, KFN, KSL, KLN
READ(3, 73) KNN(1), KNN(2), KNN(3), KMM, KS
1  FORMAT(6E10.0)
72  FORMAT(10I5)
73  FORMAT(5I10)
OPEN (5, FILE='SOLVE')
PI=3.14159265358979
PI2=0.5*PI
RKO=1./RO
N1=N-1
H=HZ(1)
IF (KFN.GT.2) GO TO 48
E1=EX(1)
E2=EY(1)
DM12=DXY(1)
DM21=E1*DM12/E2
D12=1.-DM12*DM21
B11=E1*H/D12
B22=E2*H/D12
D11=E1*H*H*H/(12.*D12)
D22=E2*H*H*H/(12.*D12)
AT=0.5*(T1H+T2H)
BT=(T2H-T1H)/H
B1T=E1*H*(BT1+DM12*BT2)
B2T=E2*H*(BT2+DM21*BT1)
D1T=E1*H*H*H*(BT1+DM12*BT2)/12.
D2T=E2*H*H*H*(BT2+DM21*BT1)/12.
GO TO 50
48  IF (KFN.GT.3) GO TO 122
I1=KSL/2
I2=I1+1
B1=0.
DO 64 I=1, I2
IF (I.NE.I2) B1=B1+HZ(I)
IF (I.EQ.I2) B1=B1+0.5*HZ(I)
64  CONTINUE
ZX(1)=-B1
I2=KSL+1
DO 65 I=2, I2
65  ZX(I)=ZX(I-1)+HZ(I-1)
A11=0.
A12=0.
A21=0.

```

```

A22=0.
B11=0.
B12=0.
B21=0.
B22=0.
D11=0.
D12=0.
D21=0.
D22=0.
H=0.
DO 66 I=1, KSL
B1=ZX(I+1)
B2=ZX(I)
Z1=B1-B2
Z2=B1*B1-B2*B2
Z3=B1*B1*B1-B2*B2*B2
H=H+HZ(I)
E1=EX(I)
E2=EY(I)
DM12=DM12+DXY(I)
DM21=DM21+E1*DM12/E2
D12=1.-DM12*DM21
A11=A11+E1*Z2/D12
A12=A12+E1*DM12*Z2/D12
A21=A21+E2*DM21*Z2/D12
A22=A22+E2*Z2/D12
B11=B11+E1*Z1/D12
B12=B12+E1*DM12*Z1/D12
B21=B21+E2*DM21*Z1/D12
B22=B22+E2*Z1/D12
D11=D11+E1*Z3/D12
D12=D12+E1*DM12*Z3/D12
D21=D21+E2*DM21*Z3/D12
66 D22=D22+E2*Z3/D12
A11=0.5*A11
A12=0.5*A12
A21=0.5*A21
A22=0.5*A22
D11=D11/3.
D12=D12/3.
D21=D21/3.
D22=D22/3.
GO TO 50
122 DH=H/KSL
ZX(1)=-0.5*(H-DH)
DO 123 K=2, KSL
123 ZX(K)=ZX(K-1)+DH
IF(KFN.EQ.4)GO TO 422
CC1=191999.034
CC2=210587.307
CC3=1504.76719
C11=CC1/98100.
CCQ=QW(1)
QW(1)=CCQ*C11
IF(KFN.NE.5)GO TO 328
B11=C11*H
B22=B11
D11=C11*H*H*H/12.
D22=D11
GO TO 50
328 IF(KFN.NE.6)GO TO 329
C21=CC2/98100.
C22=CC3/98100.

```

```

B11=C21*H
B22=B11
D11=C21*H*H*H/12.
D22=D11
GO TO 50
329 C31=CC1/98100.
C32=CC2/98100.
C33=CC3/98100.
B11=C31*H
B22=B11
D11=C31*H*H*H/12.
D22=D11
GO TO 50
422 IP1=IP-1
E=EX(1)
D=DXY(1)
ET=ST/E
E1=(SPR-ST)/(EPR-ET)
G=0.5*E/(1.+D)
D12=1.-D*D
B11=E*H/D12
B22=B11
D11=E*H*H*H/(12.*D12)
D22=D11
EKD=E/(3.*(1.-2.*D))
ERD=E/(1.-D*D)
DO 124 I=1, N
DO 124 K=1, KSL
EIZ(I, K)=0.
EXX(I, K)=0.
EYY(I, K)=0.
EZZ(I, K)=0.
SIZ(I, K)=0.
SXX(I, K)=0.
SYY(I, K)=0.
EIC(I, K)=0.
E1C(I, K)=0.
E2C(I, K)=0.
E3C(I, K)=0.
S1C(I, K)=0.
S2C(I, K)=0.
124 CONTINUE
50 EAL=700000.
DAL=0.3
B3A=1.-DAL*DAL
B4A=SQRT(B3A)
B5=SQRT(3.*B3A)
IF(KVM.NE.1)GO TO 87
RL0=RK0
RK20(N)=RK0
DX0=DL/N1
DO 2 I=1, N
X(I)=DX0*(I-1)
Y(I)=R0
2 CONTINUE
FL=PI2
FR=PI2
FLS=SIN(FL)
FLC=COS(FL)
B1=DL
IF(NR.EQ.3)B1=2.*DL
ZL=B1*SQRT(B4A)/SQRT(R0*H)

```

```

TCR=EAL*H*H/(B1*R0)
FCR=2.*PI*R0*TCR
QCR=PI*SQRT(6.)*EAL*H*H/(9.*ZL*B4A*R0*R0)
WQS=R0*R0/(EAL*H)
WTS=DAL*H/B5
IF(KFN.LT.4)WRITE(5,8)
IF(KFN.EQ.4)WRITE(5,138)
IF(KFN.GE.5)WRITE(5,338)
WRITE(5,9)
WRITE(5,716)R0,R0,DL,H
B2=R0/H
B3=1.
B4=DL/R0
BZ1=2.5*SQRT(R0*H)
BZ2=BZ1
WRITE(5,92)ZL,BZ1,BZ2,RK0
WRITE(5,93)B2,B2,B3,B4
IF(NR.NE.3)GO TO 110
RK20(N)=RK0
GO TO 110
87 IF(KVM.NE.2)GO TO 95
H0=DL
BTL=PI*BT0/180.
FLS=SIN(BTL)
FLC=COS(BTL)
DL=DL/FLS
DX0=DL/N1
B3=DX0*FLS
B4=DX0*FLC
X(1)=0.
Y(1)=R0
DO 89 I=2,N
X(I)=B3*(I-1)
Y(I)=Y(I-1)+B4
89 CONTINUE
FL=BTL
FR=BTL
ZL=H0*SQRT(B4A)/SQRT(R0*H)
TCR=EAL*H*H/(H0*R0)
FCR=2.*PI*R0*TCR
IF(KFN.GT.4)FCR=PI*R0*R0*CC1/98100.
QCR=PI*SQRT(6.)*EAL*H*H/(9.*ZL*B4A*R0*R0)
WQS=R0*R0/(EAL*H)
WTS=DAL*H/B5
IF(KFN.LT.4)WRITE(5,88)
IF(KFN.EQ.4)WRITE(5,188)
IF(KFN.GE.5)WRITE(5,388)
WRITE(5,9)
WRITE(5,6)Y(1),Y(N),H0,DL,H,BT0
B3=FLS/Y(1)
B4=FLS/Y(N)
RLO=B3
RK20(N)=B4
WRITE(5,91)RLO,N,RK20(N)
BZ1=2.5*SQRT(Y(1)*H)
BZ2=2.5*SQRT(Y(N)*H)
WRITE(5,92)ZL,BZ1,BZ2,RK0
B1=Y(1)/H
B2=Y(N)/H
B3=Y(N)/Y(1)
B4=DL/R0
WRITE(5,93)B1,B2,B3,B4
GO TO 110

```

```

95  IF (KFN. LT. 4) WRITE (5, 98)
    IF (KFN. EQ. 4) WRITE (5, 198)
    IF (KFN. GE. 5) WRITE (5, 398)
    WRITE (5, 9)
    IF (KVM. EQ. 5) GO TO 105
    BTL=PI*BT0/180.
    BTS=PI*DL/180.
    IF (NR. EQ. 3) BTS=PI2-BTL
    DF=BTS/N1
    DX0=R0*DF
    FL=BTL
    FR=BTL+BTS
    FLS=SIN (FL)
    FLC=COS (FL)
    X(1)=0.
    Y(1)=R0*SIN (BTL)
    XC=R0*COS (BTL)
    B3=BTL
    DO 94 I=2, N
    B3=B3+DF
    X(I)=XC-R0*COS (B3)
    Y(I)=R0*SIN (B3)
94  CONTINUE
    RLO=SIN (BTL) /Y (1)
    RK20 (N)=SIN (BTL+BTS) /Y (N)
    B5=Y (1)
    GO TO 107
105 BT0=0.
    BTL=0.
    BTS=PI*DL/180.
    IF (NR. EQ. 3) BTS=PI2
    DF=2. *BTS/ (2*N-3)
    DX0=R0*DF
    FL=0.
    FR=BTS
    XC=R0
    B3=0. 5*DF
    X(2)=R0* (1. -COS (B3))
    Y(2)=R0*SIN (B3)
    X(1)=X(2)
    Y(1)=-Y(2)
    DO 104 I=3, N
    B3=B3+DF
    X(I)=R0* (1. -COS (B3))
    Y(I)=R0*SIN (B3)
104 CONTINUE
    RLO=0.
    RK20 (N)=SIN (BTS) /Y (N)
    B5=0.
107 IF (NR. NE. 3) GO TO 108
    FR=PI2
    RK20 (N)=RK0
108 B1=SQRT (3. *B3A)
    B2=R0*R0
    QCR=2. *EAL*H*H/ (B1*B2)
    TCR=0. 5*QCR*R0
    FCR=PI*R0*R0*QCR
    WQS=0. 5*B2* (1. -DAL) / (EAL*H)
    B1=BT0+DL
    WRITE (5, 10) B5, R0, H, BT0, DL, B1
    DL=R0*BTS
    B1=PI2-BTL-BTS
    WRITE (5, 91) RLO, N, RK20 (N)

```

```

BZ1=2.5*SQRT(B5*H)
BZ2=2.5*SQRT(Y(N)*H)
B1=XC/R0
WRITE(5,97)DL,BZ1,BZ2,B1
B1=B5/H
B2=R0/H
B3=0.
IF(KVM.EQ.3)B3=Y(1)/R0
WRITE(5,96)B2,B1,B3,RK0
110 RH=R0*H/981000000.
B1=SIN(PI2*DX0/DL)*SIN(PI2*DX0/DL)
B3=B1*B1
B2=DX0*DX0
B4=B2*B2
A1U=4.*B11*B1/B2
A1W=16.*D11*B3/B4+RK0*RK0*B22
B1=COS(PI2*DX0/DL)*COS(PI2*DX0/DL)
B3=B1*B1
A2U=4.*B11*B1/B2
A2W=16.*D11*B3/B4+RK0*RK0*B22
EUU=2.*SQRT(RH*A1U*A2U/(A1U+A2U))
EWW=2.*SQRT(RH*A1W*A2W/(A1W+A2W))
DTU=2.*SQRT(RH/(A1U+A2U))
DTW=2.*SQRT(RH/(A1W+A2W))
DT=DTU
IF(DTW.LE.DTU)DT=DTW
EEX=AXU*EUU
EEY=AYW*EWW
DT=AKT*DT
B1=2.*RH
B2=DT*EEX
D1=(B1-B2)/(B1+B2)
D2=2.*DT/(B1+B2)
B2=DT*EEY
D3=(B1-B2)/(B1+B2)
D4=2.*DT/(B1+B2)
CALL GEOM(FL,FR)
DO 3 I=1,N1
DS0(I)=DS(I)
IF(I.EQ.1)GO TO 3
F0(I)=F(I)
3 CONTINUE
F0(1)=FL
F(1)=F0(1)
F0(N)=FR
F(N)=F0(N)
IF(NL.NE.2)GO TO 102
B1=ASIN((Y(2)-Y(1))/DS(1))
B2=PI2-B1
RK1(1)=2.*(B2-FL)/DS(1)
GO TO 106
102 IF(NL.NE.3)GO TO 106
RK1(1)=2.*F0(2)/DS0(1)
106 IF(NR.NE.2)GO TO 103
B1=ASIN((Y(N)-Y(N1))/DS(N1))
B2=PI2-B1
RK1(N)=2.*(FR-B2)/DS(N1)
103 RKL=RLO
RK2(N)=RK20(N)
DO 4 I=1,N
X0(I)=X(I)
Y0(I)=Y(I)
RK10(I)=RK1(I)

```

```

      IF (I. NE. N) RK20(I) = RK2(I)
      SFO(I) = SIN(F0(I))
      CFO(I) = COS(F0(I))
      U(I) = 0.
      W(I) = 0.
      VU(I) = 0.
      VW(I) = 0.
      QN(I) = 0.
4      NM2 = 2 * (N - 2)
      BK2 = NM2
8      FORMAT(10X, '*** ELASTIC KIRHGOFF-LOVE CYLINDRICAL SHELL ***')
338     FORMAT(10X, '*** NON-LINEAR ELASTIC MATERIAL KIRHGOFF-LOVE CYLINDRI
      *CAL SHELL ***')
138     FORMAT(10X, '*** ELASTO-PLASTIC KIRHGOFF-LOVE CYLINDRICAL SHELL ***
      *')
88      FORMAT(10X, '*** ELASTIC KIRHGOFF-LOVE CONE SHELL ***')
188     FORMAT(10X, '*** ELASTO-PLASTIC KIRHGOFF-LOVE CONE SHELL ***')
388     FORMAT(10X, '*** NON-LINEAR ELASTIC MATERIAL KIRHGOFF-LOVE CONE SHE
      *LL ***')
98      FORMAT(10X, '*** ELASTIC KIRHGOFF-LOVE SPHERICAL SHELL ***')
198     FORMAT(10X, '*** ELASTO-PLASTIC KIRHGOFF-LOVE SPHERICAL SHELL ***')
398     FORMAT(10X, '*** NON-LINEAR ELASTIC MATERIAL KIRHGOFF-LOVE SPHERICAL
      * SHELL ***')
10      FORMAT(2X, 'ro=', F6.2, ' * Ro=', F6.2, ' * h=', F5.3, ' [cm] * Bto=',
      *F4.1, ' * Bt=', F4.1, ' * Btn=', F4.1, ' [grad]')
91      FORMAT(2X, 'For i=1: k2(ro)=', F6.4, ' & i=', I3, ': k2(Rn)=', F6.4, ' [1
      */cm]')
92      FORMAT(2X, 'Z=', F6.2, ' * Lz(Ro)=', F6.3, ' * Lz(Rn)=', F6.3, ' [cm] * k
      *o=1/Ro=', F6.4, ' [1/cm]')
97      FORMAT(2X, 'Lo=', F6.2, ' * Lf(ro)', F6.3, ' * Lf(Rn)=', F6.3, ' [cm] * X
      *c=', F4.2, ' * Ro * Yc=0')
93      FORMAT(2X, 'Ro/h=', F6.2, ' * Rn/h=', F6.2, ' * Rn/Ro=', F5.2, ' * Lo/Ro=
      *, F5.2)
96      FORMAT(2X, 'Ro/h=', F6.2, ' * ro/h=', F6.2, ' * ro/Ro=', F5.2, ' * ko=1/R
      *o=', F6.4, ' [1/cm]')
6       FORMAT(2X, 'Ro=', F6.2, ' * Rn=', F6.2, ' * Ho=', F6.2, ' * Lo=', F6.2, ' *
      * h=', F5.3, ' [cm] * Bto=Btn=', F4.1, ' [grad]')
716     FORMAT(2X, 'Ro=', F6.2, ' * Rn=', F6.2, ' * Lo=', F6.2, ' * h=', F5.3, ' [c
      *m] * Bto=Btn=90 [grad]')
      WRITE(5, 11)
11      FORMAT(2X, '*** Shell materials properties:')
14      FORMAT(2X, 'Bxx=', E9.3, ' * Byy=', E9.3, ' [kG/cm] * Dxx=', E9.3, ' * Dy
      *y=', E9.3, ' [kG*cm]')
      IF (KFN.GT. 2) GO TO 41
      B1 = E1/E2
      WRITE(5, 12) RO, E1, E2, B1
      WRITE(5, 232) DM12, DM21
232     FORMAT(2X, 'Puasson coefficients: Dxy=', F6.4, ' * Dyx=', F6.4)
      WRITE(5, 14) B11, B22, D11, D22
      B1 = ST/E1
      B2 = EPR/B1
      WRITE(5, 127) B1, EPR, B2
      B1 = SPR/ST
      WRITE(5, 128) ST, SPR, B1
      IF (KFN.NE. 2) GO TO 75
      WRITE(5, 49) BT1, BT2
      WRITE(5, 67) B1T, B2T, D1T, D2T
      WRITE(5, 71) T1H, T2H
49      FORMAT(2X, '*** Temperature coefficients: Btx=', E9.3, ' * Bty=',
      *E9.3, ' [1/grad C]')
67      FORMAT(2X, 'Bxt=', E10.3, ' * Byt=', E10.3, ' * Dxt=', E10.3, ' * Dyt=',
      *E10.3)
71      FORMAT(2X, 'Temperature field: T(-h/2)=', F7.2, ' [grad C] * T(+h/2)=

```

```

* , F7. 2, ' [grad C]')
GO TO 75
41 IF (KFN. NE. 3) GO TO 125
I2=KSL+1
WRITE (5, 68) KSL, ZX(1), I2, ZX(I2)
WRITE (5, 69)
68 FORMAT (2X, '*** Multilayers construncions: K=', I1, ' layers: z(1)=',
*F6. 3, ' * z(' , I1, ')=' , F5. 3)
76 FORMAT (2X, 'Dxx=' , E9. 3, ' * Dyy=' , E9. 3, ' * Dxy=' , E10. 3, ' * Dyx=' ,
*E10. 3)
69 FORMAT (3X, 'k          Ex          Ey          Dxy          Dyx          h          E
*x/Ey          h/H')
DO 70 I=1, KSL
I2=KSL-I+1
B1=EX(I2)/EY(I2)
B2=HZ(I2)/H
B3=EX(I2)*DXY(I2)/EY(I2)
70 WRITE (5, 74) I2, EX(I2), EY(I2), DXY(I2), B3, HZ(I2), B1, B2
74 FORMAT (2X, I2, 3X, E9. 3, 3X, E9. 3, 3X, F6. 4, 3X, F6. 4, 3X, F5. 3, 3X, F6. 3, 3X,
*F5. 3)
WRITE (5, 47) A11, A22, A12, A21
47 FORMAT (2X, 'Axx=' , E10. 3, ' * Ayy=' , E10. 3, ' * Axy=' , E10. 3, ' * Ayx=' ,
*E10. 3)
WRITE (5, 76) D11, D22, D12, D21
GO TO 75
125 IF (KFN. NE. 4) GO TO 322
B1=E1/E
126 FORMAT (2X, 'E=' , E9. 3, ' * G=' , E9. 3, ' [kG/cm2] * E1/E=' , F4. 2, ' * Dm='
*, F4. 2)
WRITE (5, 126) E, G, B1, D
B1=EPR/ET
WRITE (5, 127) ET, EPR, B1
B1=SPR/ST
WRITE (5, 128) ST, SPR, B1
I1=KSL/2+1
WRITE (5, 129) KSL, DH, ZX(1), I1, ZX(I1), KSL, ZX(KSL)
127 FORMAT (2X, 'Et=' , F6. 4, ' * Epr=' , F6. 4, ' * Epr/Et=' , F5. 2)
128 FORMAT (2X, 'St=' , F7. 2, ' * Spr=' , F7. 2, ' [kG/cm2] * Spr/St=' , F4. 2)
129 FORMAT (2X, 'Layers: K=' , I2, ' * dH=' , F4. 2, ' * z(1)=', F6. 3, ' * z(' ,
*I1, ')=' , F4. 1, ' * z(' , I2, ')=' , F5. 3, ' [cm]')
GO TO 75
322 IF (KFN. EQ. 5) WRITE (5, 325) CC1, CCQ
IF (KFN. EQ. 6) WRITE (5, 326) CC2, CC3, CCQ
IF (KFN. EQ. 7) WRITE (5, 327) CC1, CC2, CC3
I1=KSL/2+1
WRITE (5, 129) KSL, DH, ZX(1), I1, ZX(I1), KSL, ZX(KSL)
325 FORMAT (2X, 'Neo-Hookean parameters: C11=' , F10. 3, ' [Pa] * Cq/C11=' ,
*F6. 4)
326 FORMAT (2X, 'Mooney-Rivlin parameters: C21=' , F10. 3, ' * C22=' , F10. 5, '
*[Pa] * Cq/C11=' , F6. 4)
327 FORMAT (2X, 'Yeoh parameters: C31=' , F10. 3, ' * C32=' , F10. 3, ' * C33=' ,
*F10. 5, ' [Pa]')
75 WRITE (5, 78)
78 FORMAT (2X, '*** Boundary conditions:')
IF (NL. LE. 0) WRITE (5, 155)
IF (NL. EQ. 1) WRITE (5, 55)
IF (NL. EQ. 2) WRITE (5, 56)
IF (NL. EQ. 3) WRITE (5, 109)
IF (NR. EQ. 1) WRITE (5, 57) N
IF (NR. EQ. 2) WRITE (5, 58) N
IF (NR. EQ. 3) WRITE (5, 59) N
155 FORMAT (2X, 'Edge i=1: Edge ring: X=Xm * Y=Yo * F=Bto')
55 FORMAT (2X, 'Edge i=1: Clamped X=Xo * Y=Yo * F=Bto')

```

```

57  FORMAT(2X,'Edge i=',I3,' : Clamped X=Xo(N) * Y=Yo(N) * F=Btn')
56  FORMAT(2X,'Edge i=1: Hinged X=Xo * Y=Yo * Mxx=0')
109 FORMAT(2X,'*** Sfera polus in point i=1+1/2: Xc=Ro * Yc=0')
58  FORMAT(2X,'Edge i=',I3,' : Hinged X=Xo(N) * Y=Yo(N) * Mxx=0')
59  FORMAT(2X,'Edge i=',I3,' : Symmetric conditions')
42  FORMAT(2X,'For Pq=',F7.3,' : W/h=',F8.4,' * W=',E12.4,' [cm] * Tyy=
    *,F8.2,' [kG/cm]')
    WRITE(5,84)
    WRITE(5,85)
    WRITE(5,63)QCR
    IF(NL.LE.0)WRITE(5,86)TCR,FCR
84  FORMAT(2X,'*** Analitical results for isotropic free hinged shell
    *for r=Ro:')
85  FORMAT(2X,'Critical loads for static problem for E=700000 [kG/cm2]
    * * D=0.3:')
63  FORMAT(5X,'Surface load: q(cr)=-',E9.3,' [kG/cm2]')
86  FORMAT(5X,'Edge load: Txx(cr)=-',E9.2,' [kG/cm] * Fx(cr)=-',E9.3,'
    * [kG]')
    WRITE(5,13)
    B1=BZ1/DX0
    B2=BZ2/DX0
    WRITE(5,16)N,DX0,B1,B2
    B1=A2U/A1U
    B2=A2W/A1W
    WRITE(5,22)A1U,A2U,B1
    WRITE(5,43)A1W,A2W,B2
    WRITE(5,23)DTU,DTW,EUU,EW
    WRITE(5,15)AKT,AXU,AYW,NM2
    WRITE(5,51)DT,EEX,EEY
    WRITE(5,44)
    WRITE(5,39)
44  FORMAT(/2X,'*** Initial geometrical parameters:')
39  FORMAT(2X,' .....
    * .....
    IF(KVM.LT.3)WRITE(5,52)
    IF(KVM.GE.3)WRITE(5,111)
    B5=X0(N)
    IF(KVM.GE.3)B5=R0
52  FORMAT(3X,' i      Xo      Yo      Fo/Pi  k1o(i)  k2o(i+1/2)  dSo
    *  Xo/Xo(N)      Yo/Ro')
111 FORMAT(3X,' i      Xo      Yo      Fo/Pi  k1o(i)  k2o(i+1/2)  dSo
    *  Xo/Ro      Yo/Ro')
    DO 53 I=1,N
    B1=0.
    IF(I.NE.N)B1=DS0(I)
    B2=X0(I)/B5
    B3=Y0(I)/R0
    B4=F0(I)/PI
53  WRITE(5,54)I,X0(I),Y0(I),B4,RK10(I),RK20(I),B1,B2,B3
    IF(NL.GT.0)GO TO 139
    B3=ADH*H
    B4=0.002*ROE*PI*R0*B3*B3
    GM=B4/981000.
    B1=AVM*EUU
    D1M=(2.*GM-DT*B1)/(2.*GM+DT*B1)
    D2M=2.*DT/(2.*GM+DT*B1)
    VG=0.
    XG=0.
    IF(NL.LT.0)XGM=PF(1)
    B2=R0/B3
    WRITE(5,39)
    WRITE(5,216)
    WRITE(5,255)B3,ADH,B2

```

```

WRITE(5,160)B1,AVM
255  FORMAT(3X,'Geometrical  : a=',F5.2,' [cm] * a/h=',F5.1,' * Ro/a=',
      *F5.1)
159  FORMAT(/2X,'*** Ring load on step k=',I1,' : Fx=',E11.4,' [kG] * Pf
      *=',E9.3)
160  FORMAT(3X,'Viscosities : Evm=',E9.3,' * Avm=',F5.2,' Evm=Avm*Eu')
259  FORMAT(4X,' Edge load on shell at x=Xo: Txx=',E11.4,' [kG/cm]')
54   FORMAT(2X,I3,F8.3,F8.3,F8.5,F8.5,F11.5,3F10.4)
9    FORMAT(2X,'*** Shell geometrical parameters:')
12   FORMAT(2X,'Density R0=',F6.1,' [kg/m3] * Ex=',E9.3,' * Ey=',E9.3,'
      * [kG/cm2] * Ex/Ey=',F6.3)
13   FORMAT(2X,'*** Analitical parameters of FD scheme:')
16   FORMAT(2X,'N=',I3,' * dSo=',F5.3,' [cm] * Lz(ro)/dSo=',F4.1,' * Lz
      *(Rn)/dSo=',F4.1)
22   FORMAT(2X,'mu=',E9.3,' * Mu=',E9.3,' * Mu/mu=',E9.3)
43   FORMAT(2X,'mw=',E9.3,' * Mw=',E9.3,' * Mw/mw=',E9.3)
23   FORMAT(2X,'DTu=',E9.3,' * DTw=',E9.3,' [sec] * Eu=',E9.3,' * Ew=',
      *E9.3)
51   FORMAT(2X,'DT=',E9.3,' [sec] * Evu=',E9.3,' * Evw=',E9.3)
15   FORMAT(2X,'Akt=',F5.3,' * Axu=',F4.2,' * Ayw=',F4.2,' * Unknowns
      *K=',I4)
25   FORMAT (2X,'Iterations n(max)=',I10,' * n(max)/K=',F9.2,' * Kmm=',
      *I5)
139  WRITE(5,39)
      DO 77 KK=1,KLN
      EPX=0.
      EPY=0.
      BMM=KMM
      B1=ABS(QW(KK)/QCR)
      WRITE(5,62)KK,QW(KK),B1
      WRITE(5,84)
62   FORMAT(/2X,'*** Surface load on step load k=',I1,' : Qn=',E11.4,' [
      *kG/cm2] * Pq=',F7.4)
      B2=QW(KK)*WQS
      B3=B2/H
      B4=QW(KK)*R0
      IF(KVM.GE.3)B4=0.5*B4
      WRITE(5,42)B1,B3,B2,B4
      IF(KVM.NE.5)GO TO 271
      IF(IL1.NE.1)GO TO 271
      B1=0.5*DF
      B2=QW(KK)
      QN(2)=B2
      DO 270 I=3,N
270  QN(I)=B2*COS(PI2*(B1+DF*(I-2))/BTS)
      I2=2
      I3=3
      B2=1.
      WRITE(5,82)I2,N,B2
      WRITE(5,83)QN(2),I3,QN(I3),N1,QN(N1),N,QN(N)
      GO TO 273
271  DO 79 I=IL1,IL2
79   QN(I)=QW(KK)
      B1=DX0*(IL2-IL1)
      IF(IL1.EQ.2)B1=B1+DX0
      IF(IL1.GT.2)B1=B1+0.5*DX0
      IF(NR.NE.3)GO TO 80
      IF(IL2.LT.N)B1=B1+0.5*DX0
      GO TO 81
80   IF(IL2.EQ.N1)B1=B1+DX0
      IF(IL2.LT.N1)B1=B1+0.5*DX0
81   B2=B1/DL
      I2=N1

```

```

      IF (NR.EQ.3) I2=N
      WRITE(5,82) IL1, IL2, B2
82    FORMAT(2X, '*** Surface load distribution from i=', I3, ' to i=', I3, '
      *: Lq/Lo=', F5.3)
      WRITE(5,83) QN(2), IL1, QN(IL1), IL2, QN(IL2), I2, QN(I2)
273   IF (NL.GT.0) GO TO 359
      WRITE(5,39)
      IF (NL.LT.0) GO TO 358
      FZ=FCR*PF(KK)
      WRITE(5,159) KK, FZ, PF(KK)
      B1=-0.5*FZ/(PI*R0)
      WRITE(5,259) B1
      GO TO 359
358   FZ=0.
      WRITE(5,159) KK, FZ, PF(KK)
359   KMN=KNN(KK)
83    FORMAT(2X, ' Qn(2)=', E11.4, ' * Qn(', I3, ')=', E11.4, ' * Qn(', I3, ')=',
      *E11.4, ' * Qn(', I3, ')=', E11.4)
      B1=KMN/BK2
      WRITE(5,31)
      WRITE(5,25) KMN, B1, KMM
      L1=KS
      TT=0.
      DO 7 KN=1, KMN
      EM=1.
      IF (KK.GT.1) GO TO 114
      IF (KN.GE.KMM) GO TO 114
      EM=SIN(PI2*KN/BMM)
114   TT=TT+DT
      LB=KN-L1
      IF (LB.NE.0) GO TO 5
      B1=KN/BK2
      WRITE(5,31)
      WRITE(5,32) KN, TT, B1, EM
5     CALL SOLVE
      CALL GEOM(FL, FR)
      IF (NL.GT.0) GO TO 218
      B1=T11(1)*FLS
      B2=Q13(1)*FLC
      BFQ=2.*PI*R0*(B1-B2)
      IF (NL.LT.0) GO TO 231
      VG=D1M*VG+D2M*(EM*FZ+BFQ)
      XG=XG+DT*VG
      GO TO 235
231   XG=EM*XGM
235   X(1)=X0(1)+XG
      U(1)=XG*FLS
      W(1)=-XG*FLC
      IF (LB.NE.0) GO TO 218
      WRITE(5,216)
      WRITE(5,39)
      B3=XG/H
      B4=XG/H0
      WRITE(5,217) XG, VG, B4, B3
      WRITE(5,39)
      B3=EM*FZ
      WRITE(5,222) B3, BFQ, B1, B2
      WRITE(5,39)
      B1=1.
      IF (XG.NE.0.) B1=FZ/XG
      B2=1.
      IF (XG.NE.0.) B2=BFQ/XG
      B3=BFQ/FCR

```

```

      B4=EM*FZ/BFQ
      WRITE(5,223)B1,B2,B3,B4
      WRITE(5,39)
216   FORMAT(/5X,'*** Edge ring parameters:')
217   FORMAT(2X,'Xm=',F7.4,' [cm] * vXm=',E11.4,' [cm/sec] * Xm/Ho=',
*F7.4,' * Xm/ho=',F9.5)
223   FORMAT(2X,'Fx/Xm=',E11.4,' * Tx/Xm=',E11.4,' * Tx/Fcr=',F6.3,' *
*Fx/Tx=',F8.3)
222   FORMAT(2X,'Fx=',E11.4,' * Tx=',E11.4,' [kG] * Txx=',E11.4,' * Qxz
*=',E11.4,' [kG/cm]')
218   IF(LB.NE.0)GO TO 40
      WRITE(5,24)
      B4=H*H
      BXX=0.
      DO 117 I=1,N
        I1=I-1
        B5=ABS(BXX)
        IF(I.EQ.N)GO TO 115
        IF(I.EQ.1)B1=T11(I)/H
        IF(I.NE.1)B1=0.5*(T11(I1)+T11(I))/H
        GO TO 116
115   B1=T11(I1)/H
116   B2=ABS(BM11(I))
        B2=6.*B2/B4
        IF(B1.LT.0.)B3=B1-B2
        IF(B1.GE.0.)B3=B1+B2
        B1=ABS(B3)
        IF(B5.GE.B1)GO TO 117
        BXX=B3
        IX=I
117   CONTINUE
        BYY=0.
        DO 120 I=1,N1
          I2=I+1
          B5=ABS(BYY)
          B1=0.5*(T22(I)+T22(I2))/H
          B2=ABS(BM22(I))
          B2=6.*B2/B4
          IF(B1.LT.0.)B3=B1-B2
          IF(B1.GE.0.)B3=B1+B2
          B1=ABS(B3)
          IF(B5.GE.B1)GO TO 120
          BYY=B3
          IY=I
120   CONTINUE
118   FORMAT(/2X,'*** Max. stresses in point:')
119   FORMAT(2X,'*** Sxx=',F10.2,' [kG/cm2] in point i=',I3,' * Sxx/St=
*,F7.3,' * Sxx/C11=',E10.3)
121   FORMAT(2X,'*** Syy=',F10.2,' [kG/cm2] in point i=',I3,' +1/2 * Syy/
*St=',F7.3,' * Syy/C11=',E10.3)
24   FORMAT(/25X,'*** Solution results ***')
      IF(KVM.GE.3)WRITE(5,17)
      IF(KVM.LT.3)WRITE(5,112)
      B6=X0(N)
      IF(KVM.GE.3)B6=R0
17   FORMAT(/4X,' i      X/Ro      Y/Ro      dX/h      dY/h      F/Pi
*      k1      k2')
112  FORMAT(/4X,' i X/Xo(N)      Y/Ro      dX/h      dY/h      F/Pi
*      k1      k2')
      DO 18 I=1,N
        B1=F(I)/PI
        B2=X(I)/B6
        B3=Y(I)/R0

```

```

      B4=DX(I)/H
      B5=DY(I)/H
18     WRITE(5,19) I, B2, B3, B4, B5, B1, RK1(I), RK2(I)
19     FORMAT(2X, I3, 2F8.4, 2F11.5, F11.5, 2F11.5)
      WRITE(5,20)
20     FORMAT(/4X, ' i          U/h          W/h          dF/Pi          k1/ko          k2/k2o
*          dS/dSo')
      DO 21 I=1, N
      B1=U(I)/H
      B2=W(I)/H
      B3=(F(I)-F0(I))/PI
      B4=RK1(I)/RK0
      B5=0.
      IF(I.NE.1) B5=RK2(I)/RK20(I)
      B6=0.
      IF(I.NE.N) B6=DS(I)/DS0(I)
21     WRITE(5,34) I, B1, B2, B3, B4, B5, B6
34     FORMAT(2X, I3, 3F11.4, 2F10.4, F12.6)
      WRITE(5,36)
36     FORMAT(/2X, ' X/Lxo      Txx(i+1/2)          Tyy(i)          Mxx(i)          Myy(i+1
*/2)      Qxz(i+1/2)')
      B1=X0(N)
      DO 37 I=1, N
      B2=X(I)/B1
37     WRITE(5,38) B2, T11(I), T22(I), BM11(I), BM22(I), Q13(I)
      WRITE(5,118)
      B1=BXX/ST
      B2=ST
      IF(KFN.GT.4) B2=C11
      B3=BXX/B2
      WRITE(5,119) BXX, IX, B1, B3
      B1=BYY/ST
      B3=BYY/B2
      WRITE(5,121) BYY, IY, B1, B3
38     FORMAT(2X, F5.3, 5E13.4)
      L1=L1+KS
40     EPXY=EPX
      I3=1
      IF(EPX.GE.EPY) GO TO 26
      EPXY=EPY
      I3=2
26     IF(EPXY.GE.PDW) GO TO 27
7     CONTINUE
77    CONTINUE
      IF(EPXY.LT.PDW) GO TO 30
27     IF(I3.EQ.1) WRITE(5,28) KN, EPXY, PDW
      IF(I3.EQ.2) WRITE(5,29) KN, EPXY, PDW
      IF(I3.EQ.3) WRITE(5,99) KN, EPXY, PDW
28     FORMAT(/5X, '*** Programme was ended on step n=', I5, ' because  EpsX
*>Pgr: EpsX=', F7.1, ' * Pgr=', F5.1)
29     FORMAT(/5X, '*** Programme was ended on step n=', I5, ' because  EpsY
*>Pgr: EpsY=', F7.1, ' * Pgr=', F5.1)
99     FORMAT(/5X, '*** Programme was ended on step n=', I5, ' because  EpsF
*>Pgr: EpsF=', F7.1, ' * Pgr=', F5.1)
30     WRITE(5,33)
31     FORMAT(/2X, '*****')
32     FORMAT(2X, 'Current : n=', I10, ' : t=', E9.3, ' : n/Km=', F9.2, ' : Em=
*', F5.3, ' :')
33     FORMAT(/35X, 'The end')
      WRITE(5,35)
35     FORMAT(21X, 'Copyright (C) Dmitriev & C, Ltd. * 2010 *')
100    STOP

```

```

END
SUBROUTINE GEOM(FL,FR)
COMMON /A/X(175),Y(175),F(175),SNT(175),CST(175),CSF(175),
*DS(175),RK1(175),RK2(175),RKL/N/N,N1,NL,NR/P/PI,PI2
DO 1 I=1,N1
  B1=X(I+1)-X(I)
  B2=Y(I+1)-Y(I)
1  DS(I)=SQRT(B1*B1+B2*B2)
  IF(NL.NE.3)GO TO 20
  DS(1)=2.*Y(2)
  X(1)=X(2)
  Y(1)=-Y(2)
20 DO 8 I=2,N1
  I1=I-1
  I2=I+1
  DX1=X(I)-X(I1)
  DY1=Y(I)-Y(I1)
  DX2=X(I2)-X(I)
  DY2=Y(I2)-Y(I)
  DS1=DS(I1)
  DS2=DS(I)
  DSZ=0.5*(DS1+DS2)
  IF(NL.NE.3)GO TO 30
  IF(I.NE.2)GO TO 24
  TA1=0.
  SNT(1)=0.
  CST(1)=1.
  RK2(1)=0.
  IF(DX2.GT.0.)GO TO 18
  IF(DX2.LT.0.)GO TO 17
  TA2=0.
  F(I)=0.
  SNT(I)=0.
  CST(I)=1.
  CSF(I)=1.
  GO TO 19
17 SA2=DY2/DS2
  AL2=ASIN(SA2)
  TA2=AL2-PI2
  F(I)=0.5*TA2
  SNT(I)=SIN(TA2)
  CST(I)=COS(TA2)
  CSF(I)=COS(F(I))
  GO TO 19
18 SA2=DY2/DS2
  AL2=ASIN(SA2)
  TA2=PI2-AL2
  F(I)=0.5*TA2
  SNT(I)=SIN(TA2)
  CST(I)=COS(TA2)
  CSF(I)=COS(F(I))
19 F(I1)=-F(I)
  DTA=TA2
  RK1(I1)=2.*F(I)/DS(I1)
  RK1(I)=DTA/DSZ
  RK2(I)=2.*SNT(I)/(Y(I)+Y(I2))
  GO TO 8
24 IF(DX1.GT.0.)GO TO 30
  IF(DX1.EQ.0.)GO TO 25
  SA1=DY1/DS1
  AL1=ASIN(SA1)
  TA1=AL1-PI2
  GO TO 26

```

```

25  TA1=0.
26  IF (DX2. GE. 0. ) GO TO 27
    SA2=DY2/DS2
    AL2=ASIN(SA2)
    TA2=AL2-PI2
    SNT(I)=SIN(TA2)
    CST(I)=COS(TA2)
    GO TO 29
27  IF (DX2. GT. 0. ) GO TO 28
    TA2=0.
    SNT(I)=0.
    CST(I)=1.
    GO TO 29
28  SA2=DY2/DS2
    AL2=ASIN(SA2)
    TA2=PI2-AL2
    SNT(I)=SIN(TA2)
    CST(I)=COS(TA2)
29  DTA=TA2-TA1
    F(I)=0. 5*(TA1+TA2)
    CSF(I)=COS(F(I))
    RK1(I)=DTA/DSZ
    RK2(I)=2. *SNT(I) / (Y(I)+Y(I2))
    GO TO 8
30  SA1=DY1/DS1
    SA2=DY2/DS2
    SB1=ABS(SA1)
    SB2=ABS(SA2)
    IF (Y(I1). NE. Y(I)) GO TO 2
    IF (Y(I). NE. Y(I2)) GO TO 2
    AL1=ASIN(SA1)
    AL2=ASIN(SA2)
    TA1=PI2-AL1
    TA2=PI2-AL2
    DTA=TA2-TA1
    F(I)=0. 5*(TA1+TA2)
    SNT(I)=SIN(TA2)
    CST(I)=COS(TA2)
    CSF(I)=COS(F(I))
    RK1(I)=DTA/DSZ
    RK2(I)=2. *SNT(I) / (Y(I)+Y(I2))
    IF (I. NE. 2) GO TO 21
    SNT(1)=SIN(TA1)
    CST(1)=COS(TA1)
    RK2(1)=2. *SNT(1) / (Y(I1)+Y(I))
    GO TO 8
21  IF (I. NE. N1) GO TO 8
    IF (NR. NE. 3) GO TO 8
    F(N)=PI2
    SNT(N)=SNT(N1)
    CST(N)=-CST(N1)
    CSF(N)=0.
    RK1(N)=-2. *AL2/DS2
    RK2(N)=RK2(N1)
    GO TO 8
2   IF (DY1. LT. 0. ) GO TO 5
    IF (DY2. LE. 0. ) GO TO 4
    IF (SA2. GT. SA1) GO TO 3
    AL1=ASIN(SA1)
    AL2=ASIN(SA2)
    TA1=PI2-AL1
    TA2=PI2-AL2
    AL1=-AL1

```

```

AL2=-AL2
DTA=TA2-TA1
F(I)=0.5*(TA1+TA2)
SNT(I)=SIN(TA2)
CST(I)=COS(TA2)
CSF(I)=COS(F(I))
RK1(I)=DTA/DSZ
RK2(I)=2.*SNT(I)/(Y(I)+Y(I2))
IF(I.NE.2)GO TO 22
SNT(1)=SIN(TA1)
CST(1)=COS(TA1)
RK2(1)=2.*SNT(1)/(Y(I1)+Y(I))
GO TO 8
22 IF(I.NE.N1)GO TO 8
   IF(NR.NE.3)GO TO 8
   F(N)=PI2
   SNT(N)=SNT(N1)
   CST(N)=-CST(N1)
   CSF(N)=0.
   RK1(N)=-2.*AL2/DS2
   RK2(N)=RK2(N1)
   GO TO 8
3  AL1=ASIN(SA1)
   AL2=ASIN(SA2)
   TA1=PI2-AL1
   TA2=PI2-AL2
   DTA=TA2-TA1
   F(I)=0.5*(TA1+TA2)
   SNT(I)=SIN(TA2)
   CST(I)=COS(TA2)
   CSF(I)=COS(F(I))
   RK1(I)=DTA/DSZ
   RK2(I)=2.*SNT(I)/(Y(I)+Y(I2))
   IF(I.NE.2)GO TO 8
   SNT(1)=SIN(TA1)
   CST(1)=COS(TA1)
   RK2(1)=2.*SNT(1)/(Y(I1)+Y(I))
   GO TO 8
4  AL1=ASIN(SA1)
   B1=-SA2
   AL2=ASIN(B1)
   TA1=PI2-AL1
   TA2=PI2+AL2
   AL1=-AL1
   DTA=TA2-TA1
   F(I)=0.5*(TA1+TA2)
   SNT(I)=SIN(TA2)
   CST(I)=COS(TA2)
   CSF(I)=COS(F(I))
   RK1(I)=DTA/DSZ
   RK2(I)=2.*SNT(I)/(Y(I)+Y(I2))
   IF(I.NE.2)GO TO 8
   SNT(1)=SIN(TA1)
   CST(1)=COS(TA1)
   RK2(1)=2.*SNT(1)/(Y(I1)+Y(I))
   GO TO 8
5  IF(DY2.GE.0.)GO TO 7
   IF(SB1.GT.SB2)GO TO 6
   B1=-SA1
   AL1=ASIN(B1)
   B1=-SA2
   AL2=ASIN(B1)
   TA1=PI2+AL1

```

```

    TA2=PI2+AL2
    DTA=TA2-TA1
    F(I)=0.5*(TA1+TA2)
    SNT(I)=SIN(TA2)
    CST(I)=COS(TA2)
    CSF(I)=COS(F(I))
    RK1(I)=DTA/DSZ
    RK2(I)=2.*SNT(I)/(Y(I)+Y(I2))
    IF(I.NE.2)GO TO 8
    SNT(1)=SIN(TA1)
    CST(1)=COS(TA1)
    RK2(1)=2.*SNT(1)/(Y(I1)+Y(I))
    GO TO 8
6   B1=-SA1
    AL1=ASIN(B1)
    B1=-SA2
    AL2=ASIN(B1)
    TA1=PI2+AL1
    TA2=PI2+AL2
    DTA=TA2-TA1
    F(I)=0.5*(TA1+TA2)
    SNT(I)=SIN(TA2)
    CST(I)=COS(TA2)
    CSF(I)=COS(F(I))
    RK1(I)=DTA/DSZ
    RK2(I)=2.*SNT(I)/(Y(I)+Y(I2))
    IF(I.NE.2)GO TO 23
    SNT(1)=SIN(TA1)
    CST(1)=COS(TA1)
    RK2(1)=2.*SNT(1)/(Y(I1)+Y(I))
    GO TO 8
23  IF(I.NE.N1)GO TO 8
    IF(NR.NE.3)GO TO 8
    F(N)=PI2
    SNT(N)=SNT(N1)
    CST(N)=-CST(N1)
    CSF(N)=0.
    RK1(N)=-2.*AL2/DS2
    RK2(N)=RK2(N1)
    GO TO 8
7   B1=-SA1
    AL1=ASIN(B1)
    AL2=ASIN(SA2)
    TA1=PI2+AL1
    TA2=PI2-AL2
    AL2=-AL2
    DTA=TA2-TA1
    F(I)=0.5*(TA1+TA2)
    SNT(I)=SIN(TA2)
    CST(I)=COS(TA2)
    CSF(I)=COS(F(I))
    RK1(I)=DTA/DSZ
    RK2(I)=2.*SNT(I)/(Y(I)+Y(I2))
    IF(I.NE.2)GO TO 8
    SNT(1)=SIN(TA1)
    CST(1)=COS(TA1)
    RK2(1)=2.*SNT(1)/(Y(I1)+Y(I))
8   CONTINUE
    IF(NL.EQ.3)GO TO 10
    B1=(Y(2)-Y(1))/DS(1)
    IF(B1.LT.0.)GO TO 9
    ALF=ASIN(B1)
    TA2=PI2-ALF

```

```

      IF(NL.GT.1)GO TO 13
      RK1(1)=2.*(TA2-FL)/DS(1)
      GO TO 10
13    F(1)=TA2
      RKL=SIN(F(1))/Y(1)
      GO TO 10
9     B1=-B1
      ALF=ASIN(B1)
      TA2=PI2+ALF
      IF(NL.GT.1)GO TO 14
      RK1(1)=2.*(TA2-FL)/DS(1)
      GO TO 10
14    F(1)=TA2
      RKL=SIN(F(1))/Y(1)
10    IF(NR.EQ.3)GO TO 12
      B1=(Y(N)-Y(N1))/DS(N1)
      IF(B1.LT.0.)GO TO 11
      ALF=ASIN(B1)
      TA1=PI2-ALF
      IF(NR.NE.1)GO TO 15
      RK1(N)=2.*(FR-TA1)/DS(N1)
      GO TO 12
15    F(N)=TA1
      RK2(N)=SIN(F(N))/Y(N)
      GO TO 12
11    B1=-B1
      ALF=ASIN(B1)
      TA1=PI2+ALF
      IF(NR.NE.1)GO TO 16
      RK1(N)=2.*(FR-TA1)/DS(N1)
      GO TO 12
16    F(N)=TA1
      RK2(N)=SIN(F(N))/Y(N)
12    RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE SOLVE
COMMON /A/X(175), Y(175), F(175), SNT(175), CST(175), CSF(175), DS(175),
*RK1(175), RK2(175), RKL/B/U(175), W(175), VU(175), VW(175)
*/C/X0(175), Y0(175), F0(175), SF0(175), CF0(175), DS0(175), RK10(175),
*RK20(175), RLO/D/DT, D1, D2, D3, D4/E/KSL, H, A11, A12, A21, A22, B11, B12,
*B21, B22, D11, D12, D21, D22, DM12, DM21/Q/QN(175), EM, EPX, EPY, KX, KY
*/N/N, N1, NL, NR/L/LB, IP, KN, KMN/F/KFN, T11(175), T22(175), Q13(175),
*BM11(175), BM22(175), E11(175), E22(175), RK11(175), RK22(175),
*DX(175), DY(175)/P/PI, PI2/ET/AT, BT, B1T, B2T, D1T, D2T/EE/E, D, ET, EPR,
*ST, SPR, E1, EKD, ERD, DH, IP1, ZX(11), C11, C21, C22, C31, C32, C33
*/ES/EI2(175, 11), EXX(175, 11), EYY(175, 11), EZZ(175, 11), SIZ(175, 11),
*SXX(175, 11), SYY(175, 11), EIC(175, 11), E1C(175, 11), E2C(175, 11),
*E3C(175, 11), SIC(175, 11), S1C(175, 11), S2C(175, 11)
DIMENSION DPW(11), EPW(11), EEM(11), SSM(11), EEC(11), SSC(11),
*EXC(11), EYC(11), EZC(11), SXC(11), SYC(11), EIT(175, 11), EXT(175, 11),
*EYT(175, 11), SIT(175, 11), SXT(175, 11), SYT(175, 11), ESP(175, 11)
IF(LB.NE.0)GO TO 1
EPSX=0.
EPSY=0.
1  IN=N1
   IF(NR.EQ.3)IN=N
   DO 2 I=1,N
   IF(I.NE.1)GO TO 51
   E22(I)=0.
   IF(NL.LE.1)GO TO 51
   IF(NL.NE.2)GO TO 50
   E11(I)=(DS(I)-DS0(I))/DS0(I)
   B2=RKL-RLO
   RK11(I)=-DM12*B2
   RK1(I)=RK10(I)+RK11(I)
   RK22(I)=RK2(I)-RK20(I)
   GO TO 2
50  E11(I)=(DS(I)-DS0(I))/DS0(I)
   E22(I)=0.
   RK11(I)=RK1(I)-RK10(I)
   RK22(I)=0.
   GO TO 2
51  IF(I.EQ.N)GO TO 52
   E11(I)=(DS(I)-DS0(I))/DS0(I)
   IF(I.NE.1)E22(I)=(Y(I)-Y0(I))/Y0(I)
   RK11(I)=RK1(I)-RK10(I)
   RK22(I)=RK2(I)-RK20(I)
   GO TO 2
52  IF(NR.NE.1)GO TO 56
   E11(I)=0.
   E22(I)=0.
   RK11(I)=RK1(I)-RK10(I)
   RK22(I)=0.
   GO TO 2
56  IF(NR.NE.2)GO TO 57
   E11(I)=0.
   E22(I)=0.
   B2=RK2(N)-RK20(N)
   RK11(N)=-DM12*B2
   RK1(N)=RK10(N)+RK11(N)
   GO TO 2
57  E11(N)=E11(N1)
   E22(N)=(Y(N)-Y0(N))/Y0(N)
   RK11(N)=RK1(N)-RK10(N)
   RK22(N)=RK22(N1)
2  CONTINUE
   IF(KFN.GE.4)GO TO 47
   IF(KFN.EQ.3)GO TO 42

```

```

DO 40 I=1, N
  I1=I-1
  IF (I. NE. 1) GO TO 37
  IF (NL. NE. 3) GO TO 53
  T22(I)=0.
  BM11(I)=D11*RK11(I)
  GO TO 40
53  T22(I)=B22*DM21*E11(I)
  BM11(I)=0.
  IF (NL. LE. 1) BM11(I)=D11*RK11(I)
  GO TO 40
37  IF (I. NE. N) GO TO 38
  IF (NR. EQ. 3) GO TO 38
  T22(I)=B22*DM21*E11(I1)
  BM11(I)=0.
  IF (NR. EQ. 1) BM11(I)=D11*RK11(I)
  GO TO 40
38  T22(I)=B22*(E22(I)+0.5*DM21*(E11(I1)+E11(I)))
  BM11(I)=D11*(RK11(I)+0.5*DM12*(RK22(I1)+RK22(I)))
40  CONTINUE
  DO 41 I=1, N1
  I2=I+1
  IF (I. NE. 1) GO TO 54
  IF (NL. NE. 3) GO TO 54
  T11(I)=B11*E11(I)
  BM22(I)=0.
  GO TO 41
54  T11(I)=B11*(E11(I)+0.5*DM12*(E22(I)+E22(I2)))
  BM22(I)=D22*(RK22(I)+0.5*DM21*(RK11(I)+RK11(I2)))
41  CONTINUE
  IF (KFN. EQ. 1) GO TO 59
  DO 48 I=1, N
  T22(I)=T22(I)-B2T*AT
  BM11(I)=BM11(I)-D1T*BT
  IF (I. EQ. N) GO TO 48
  T11(I)=T11(I)-B1T*AT
  BM22(I)=BM22(I)-D2T*BT
48  CONTINUE
  GO TO 59
42  DO 45 I=1, N
  I1=I-1
  IF (I. NE. 1) GO TO 39
  B2=RK22(I)
  IF (NL. LE. 1) B2=0.
  T22(I)=B21*E11(I)+A22*B2+A21*RK11(I)
  BM11(I)=0.
  IF (NL. LE. 1) BM11(I)=A11*E11(I)+D11*RK11(I)
  GO TO 45
39  IF (I. NE. N) GO TO 49
  IF (NR. EQ. 3) GO TO 49
  B2=RK22(I1)
  IF (NR. EQ. 1) B2=0.
  T22(I)=B21*E11(I1)+A22*B2+A21*RK11(I)
  BM11(I)=0.
  IF (NR. EQ. 1) BM11(I)=A11*E11(I1)+D11*RK11(I)
  GO TO 45
49  B1=0.5*(E11(I1)+E11(I))
  B2=0.5*(RK22(I1)+RK22(I))
  T22(I)=B22*E22(I)+B21*B1+A22*B2+A21*RK11(I)
  BM11(I)=A11*B1+A12*E22(I)+D11*RK11(I)+D12*B2
45  CONTINUE
  DO 46 I=1, N1
  I2=I+1

```

```

B1=0.5*(RK11(I)+RK11(I2))
B2=0.5*(E22(I)+E22(I2))
T11(I)=B11*E11(I)+B12*B2+A11*B1+A12*RK22(I)
BM22(I)=A22*B2+A21*E11(I)+D22*RK22(I)+D21*B1
46  CONTINUE
    GO TO 59
47  DO 127 I=1,N1
    I2=I+1
    T11(I)=0.
    BM22(I)=0.
    IF(I.NE.1)GO TO 61
    IF(NL.NE.3)GO TO 61
    B3=RK11(I)
    B4=0.
    GO TO 62
61  B3=0.5*(RK11(I)+RK11(I2))
    B4=0.5*(E22(I)+E22(I2))
62  IF(KFN.EQ.4)GO TO 181
    BL1=1.+E11(I)
    BL2=1.+B4
    E33=1./(BL1*BL2)-1.
    H33=H*(1.+E33)
    DH3=H33/KSL
    ZX(1)=-0.5*(H33-DH3)
    DO 272 K=2,KSL
    ZX(K)=ZX(K-1)+DH3
    DO 180 K=1,KSL
    E1Z=E11(I)+ZX(K)*B3
    E2Z=B4+ZX(K)*RK22(I)
    BL1=1.+E1Z
    BL2=1.+E2Z
    E1Z=BL1*BL1
    E2Z=BL2*BL2
    E3Z=1./(E1Z*E2Z)
    B1=E1Z-E3Z
    B2=E2Z-E3Z
    IF(KFN.NE.5)GO TO 112
    R11=2.*C11*B1
    R22=2.*C11*B2
    GO TO 114
112  IF(KFN.NE.6)GO TO 113
    R11=2.*C21*B1+2.*C22*(E1Z*E2Z-1./E1Z)
    R22=2.*C21*B2+2.*C22*(E1Z*E2Z-1./E2Z)
    GO TO 114
113  B3=E1Z+E2Z+E3Z-3.
    B4=C31+2.*C32*B3+3.*C33*B3*B3
    R11=2.*B1*B4
    R22=2.*B2*B4
114  T11(I)=T11(I)+R11*DH3
    BM22(I)=BM22(I)+R22*DH3*ZX(K)
180  CONTINUE
    GO TO 127
181  DO 130 K=1,KSL
    DP=D
    EP=E
    EI=EIZ(I,K)
    SI=SIZ(I,K)
    IF(EL.GT.EPR)GO TO 123
    E1Z=E11(I)+ZX(K)*B3
    E2Z=B4+ZX(K)*RK22(I)
    EEZ=E1Z*E1Z+E2Z*E2Z-E1Z*E2Z
    IF(EI.GT.ET)GO TO 121
    E3Z=-D*(E1Z+E2Z)/(1.-D)

```

```

EE=2.*SQRT (EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
IF (EE. GT. ET) GO TO 111
R11=ERD*(E1Z+D*E2Z)
R22=ERD*(E2Z+D*E1Z)
SIR=SQRT (R11*R11+R22*R22-R11*R22)
EIZ (I, K)=EE
SIZ (I, K)=SIR
GO TO 125
111 EIZ (I, K)=EE
EC=ST/EE+E1*(1.-ET/EE)
E3Z=-(9.*EKD-2.*EC)*(E1Z+E2Z)/(9.*EKD+4.*EC)
EI=2.*SQRT (EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
B1=EE/ET
B2=EI/ET
129 FORMAT (2X, '*** n=', I5, ' * i=', I3, '+1/2 * k=', I2, ': Ei (e)=' , F6. 4, '
** Ei (p)=' , F6. 4, ' * Si=' , F6. 4)
IF (EI. GE. EE) EIZ (I, K)=EI
EC=ST/EI+E1*(1.-ET/EI)
DPL=(9.*EKD-2.*EC)/(18.*EKD+2.*EC)
DP=DPL
EP=2.*EC/(3.*(1.-DPL))
R11=(EKD+4.*EC/9.)*E1Z+(EKD-2.*EC/9.)*(E2Z+E3Z)
R22=(EKD+4.*EC/9.)*E2Z+(EKD-2.*EC/9.)*(E1Z+E3Z)
SIR=SQRT (R11*R11+R22*R22-R11*R22)
B5=SIR/ST
WRITE (5, 129) KN, I, K, B1, B2, B5
SIZ (I, K)=SIR
EXX (I, K)=E1Z
EYY (I, K)=E2Z
EZZ (I, K)=E3Z
SXX (I, K)=R11
SYY (I, K)=R22
GO TO 125
121 E3Z=EZZ (I, K)
EE=2.*SQRT (EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
EC=ST/EE+E1*(1.-ET/EE)
E3Z=-(9.*EKD-2.*EC)*(E1Z+E2Z)/(9.*EKD+4.*EC)
EE=2.*SQRT (EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
IF (EE. LT. EI) GO TO 122
EIZ (I, K)=EE
EC=ST/EE+E1*(1.-ET/EE)
DPL=(9.*EKD-2.*EC)/(18.*EKD+2.*EC)
DP=DPL
EP=2.*EC/(3.*(1.-DPL))
R11=(EKD+4.*EC/9.)*E1Z+(EKD-2.*EC/9.)*(E2Z+E3Z)
R22=(EKD+4.*EC/9.)*E2Z+(EKD-2.*EC/9.)*(E1Z+E3Z)
SIR=SQRT (R11*R11+R22*R22-R11*R22)
SIZ (I, K)=SIR
IF (EE. GE. EPR) GO TO 105
EXX (I, K)=E1Z
EYY (I, K)=E2Z
EZZ (I, K)=E3Z
SXX (I, K)=R11
SYY (I, K)=R22
GO TO 125
122 DP=D
EP=E
E3Z=-D*(E1Z+E2Z)/(1.-D)
EE=2.*SQRT (EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
B1=E1Z-EXX (I, K)
B2=E2Z-EYY (I, K)
R11=SXX (I, K)+ERD*(B1+D*B2)
R22=SYY (I, K)+ERD*(B2+D*B1)

```

```

SIR=SQRT(R11*R11+R22*R22-R11*R22)
GO TO 125
105 B1=EE/EPR
    B2=SIR/SPR
    WRITE(5,106)KN,I,K,B1,B2
106 FORMAT(2X,'*** DAMAGE: n=',I5,' * point i=',I3,' +1/2 * k=',I2,' *
    *Ei/Epr=',F5.3,' * Si/Spr=',F5.3)
206 FORMAT(2X,'*** DAMAGE: n=',I5,' * point i=',I3,' k=',I2,' * Ei/Epr
    *=',F5.3,' * Si/Spr=',F5.3)
123 DP=0.
    EP=0.
    R11=0.
    R22=0.
125 T11(I)=T11(I)+R11*DH
    BM22(I)=BM22(I)+R22*DH*ZX(K)
    IF(LB.NE.0)GO TO 126
    IF(I.NE.IP1)GO TO 126
    DPW(K)=DP
    EPW(K)=EP
    EEM(K)=EIZ(I,K)/ET
    SSM(K)=SIZ(I,K)/ST
    EEC(K)=EE/ET
    SSC(K)=SIR/ST
    EXC(K)=E1Z/ET
    EYC(K)=E2Z/ET
    EZC(K)=E3Z/ET
    SXC(K)=R11/ST
    SYC(K)=R22/ST
126 IF(KN.NE.KMN)GO TO 130
    EIT(I,K)=EE/ET
    EXT(I,K)=E1Z/ET
    EYT(I,K)=E2Z/ET
    SIT(I,K)=SIR/ST
    SXT(I,K)=R11/ST
    SYT(I,K)=R22/ST
130 CONTINUE
127 CONTINUE
    DO 227 I=1,N
    I1=I-1
    T22(I)=0.
    BM11(I)=0.
    IF(I.NE.1)GO TO 64
    IF(NL.GT.2)GO TO 63
    B3=E11(I)
    B4=0.
    IF(NL.EQ.2)B4=RK22(I)
    GO TO 67
63 IF(NL.EQ.3)GO TO 227
64 IF(I.NE.N)GO TO 66
    IF(NR.NE.1)GO TO 65
    B3=E11(I1)
    B4=0.
    GO TO 67
65 B3=E11(I1)
    B4=RK22(I1)
    GO TO 67
66 B3=0.5*(E11(I1)+E11(I))
    B4=0.5*(RK22(I1)+RK22(I))
67 IF(KFN.EQ.4)GO TO 184
    BL1=1.+B3
    BL2=1.+E22(I)
    E33=1./(BL1*BL2)-1.
    H33=H*(1.+E33)

```

```

DH3=H33/KSL
ZX(1)=-0.5*(H33-DH3)
DO 275 K=2, KSL
275 ZX(K)=ZX(K-1)+DH3
DO 183 K=1, KSL
E1Z=B3+ZX(K)*RK11(I)
E2Z=E22(I)+ZX(K)*B4
BL1=1.+E1Z
BL2=1.+E2Z
E1Z=BL1*BL1
E2Z=BL2*BL2
E3Z=1./(E1Z+E2Z)
B1=E1Z-E3Z
B2=E2Z-E3Z
IF(KFN.NE.5)GO TO 115
R11=2.*C11*B1
R22=2.*C11*B2
GO TO 117
115 IF(KFN.NE.6)GO TO 116
R11=2.*C21*B1+2.*C22*(E1Z+E2Z-1./E1Z)
R22=2.*C21*B2+2.*C22*(E1Z+E2Z-1./E2Z)
GO TO 117
116 B3=E1Z+E2Z+E3Z-3.
B4=C31+2.*C32*B3+3.*C33*B3*B3
R11=2.*B1*B4
R22=2.*B2*B4
117 T22(I)=T22(I)+R22*DH3
BM11(I)=BM11(I)+R11*DH3*ZX(K)
183 CONTINUE
GO TO 227
184 DO 230 K=1, KSL
EI=EIC(I, K)
SI=SIC(I, K)
IF(EI.GT.EPR)GO TO 223
E1Z=B3+ZX(K)*RK11(I)
E2Z=E22(I)+ZX(K)*B4
EEZ=E1Z+E1Z+E2Z+E2Z-E1Z+E2Z
IF(EI.GT.ET)GO TO 221
E3Z=-D*(E1Z+E2Z)/(1.-D)
EE=2.*SQRT(EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
IF(EE.GT.ET)GO TO 211
R11=ERD*(E1Z+D*E2Z)
R22=ERD*(E2Z+D*E1Z)
SIR=SQRT(R11*R11+R22*R22-R11*R22)
EIC(I, K)=EE
SIC(I, K)=SIR
GO TO 225
211 EIC(I, K)=EE
EC=ST/EE+E1*(1.-ET/EE)
E3Z=-(9.*EKD-2.*EC)*(E1Z+E2Z)/(9.*EKD+4.*EC)
EI=2.*SQRT(EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
IF(EI.GE.EE)EIC(I, K)=EI
EC=ST/EI+E1*(1.-ET/EI)
R11=(EKD+4.*EC/9.)*E1Z+(EKD-2.*EC/9.)*(E2Z+E3Z)
R22=(EKD+4.*EC/9.)*E2Z+(EKD-2.*EC/9.)*(E1Z+E3Z)
SIR=SQRT(R11*R11+R22*R22-R11*R22)
SIC(I, K)=SIR
E1C(I, K)=E1Z
E2C(I, K)=E2Z
E3C(I, K)=E3Z
S1C(I, K)=R11
S2C(I, K)=R22
GO TO 225

```

```

221  E3Z=E3C(I, K)
      EE=2.*SQRT(EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
      EC=ST/EE+E1*(1.-ET/EE)
      E3Z=-(9.*EKD-2.*EC)*(E1Z+E2Z)/(9.*EKD+4.*EC)
      EE=2.*SQRT(EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
      IF(EE.LT.E1)GO TO 222
      EIC(I, K)=EE
      EC=ST/EE+E1*(1.-ET/EE)
      R11=(EKD+4.*EC/9.)*E1Z+(EKD-2.*EC/9.)*(E2Z+E3Z)
      R22=(EKD+4.*EC/9.)*E2Z+(EKD-2.*EC/9.)*(E1Z+E3Z)
      SIR=SQRT(R11*R11+R22*R22-R11*R22)
      SIC(I, K)=SIR
      IF(EE.GE.EPR)GO TO 205
      E1C(I, K)=E1Z
      E2C(I, K)=E2Z
      E3C(I, K)=E3Z
      S1C(I, K)=R11
      S2C(I, K)=R22
      GO TO 225
222  E3Z=-D*(E1Z+E2Z)/(1.-D)
      EE=2.*SQRT(EEZ+E3Z*E3Z-E2Z*E3Z-E3Z*E1Z)/3.
      B1=E1Z-E1C(I, K)
      B2=E2Z-E2C(I, K)
      R11=S1C(I, K)+ERD*(B1+D*B2)
      R22=S2C(I, K)+ERD*(B2+D*B1)
      SIR=SQRT(R11*R11+R22*R22-R11*R22)
      GO TO 225
205  B1=EE/EPR
      B2=SIR/SPR
      WRITE(5, 206)KN, I, K, B1, B2
223  R11=0.
      R22=0.
225  T22(I)=T22(I)+R22*DH
      BM11(I)=BM11(I)+R11*DH*ZX(K)
230  CONTINUE
227  CONTINUE
59   IF(NL.EQ.2)BM11(1)=0.
      IF(NR.EQ.2)BM11(N)=0.
      I3=1
      IF(NL.NE.3)GO TO 55
      I3=2
      T22(1)=0.
      BM22(1)=0.
      Q13(1)=0.
55   DO 3 I=I3, N1
      I2=I+1
      B1=0.5*(Y(I)+Y(I2))
      Q13(I)=(Y(I2)*BM11(I2)-Y(I)*BM11(I))/(B1*DS(I))-CST(I)*BM22(I)/B1
3     CONTINUE
      IF(NR.NE.3)GO TO 60
      T11(N)=T11(N1)
      BM22(N)=BM22(N1)
      Q13(N)=-Q13(N1)
60   DO 18 I=2, IN
      I1=I-1
      B1=0.5*(Y(I1)+Y(I))
      IF(I.EQ.N)GO TO 30
      B2=0.5*(Y(I)+Y(I+1))
      DSZ=0.5*(DS(I1)+DS(I))
      URX=(B2*T11(I)-B1*T11(I1))/(DSZ*Y(I))-CSF(I)*T22(I)/Y(I)+
      *0.5*RK1(I)*(Q13(I1)+Q13(I))
      URY=(B2*Q13(I)-B1*Q13(I1))/(DSZ*Y(I))-0.5*RK1(I)*(T11(I1)+T11(I))-
      *0.5*(RK2(I1)+RK2(I))*T22(I)+EM*QN(I)

```

```

VU(I)=D1*VU(I)+D2*URX
VW(I)=D3*VW(I)+D4*URY
GO TO 31
30  URX=0.
    URY=-2.*B1*Q13(N1)/(DS(N1)*Y(I))-RK1(I)*T11(I1)-0.5*(RK2(I1)+
    *RK2(I))*T22(I)+EM*QN(I)
    VU(I)=0.
    VW(I)=D3*VW(I)+D4*URY
31  P1=ABS(URX)
    IF(EPX.GT.P1)GO TO 4
    EPX=P1
    KX=KN
4    P2=ABS(URY)
    IF(EPY.GT.P2)GO TO 5
    EPY=P2
    KY=KN
5    IF(LB.NE.0)GO TO 18
    IF(EPSX.GT.P1)GO TO 6
    EPSX=P1
    IX=I
6    IF(EPSY.GT.P2)GO TO 7
    EPSY=P2
    IY=I
7    IF(I.NE.IP)GO TO 18
    WRITE(5,8)I
8    FORMAT(/7X,'**** Node point i=',I3)
    WRITE(5,9)
16  FORMAT(2X,' : .....
*.....')
9    FORMAT(2X,' .....
*.....')
    WRITE(5,10)T11(I1),T11(I)
    WRITE(5,16)
    I2=I+1
    B1=0.
    IF(I.NE.N)B1=T22(I2)
    WRITE(5,32)T22(I1),T22(I),B1
    WRITE(5,16)
    B1=0.
    IF(I.NE.N)B1=BM11(I2)
    WRITE(5,11)BM11(I1),BM11(I),B1
    WRITE(5,16)
    WRITE(5,36)BM22(I1),BM22(I)
    WRITE(5,16)
    WRITE(5,12)Q13(I1),Q13(I)
    WRITE(5,16)
10  FORMAT(2X,' : Txx(i-1/2)=',E11.4,' * Txx(i+1/2)=',E11.4)
32  FORMAT(2X,' : Tyy(i-1)=',E11.4,' * Tyy(i)=',E11.4,' * Tyy(i+1)=',
    *E11.4)
11  FORMAT(2X,' : Mxx(i-1)=',E11.4,' * Mxx(i)=',E11.4,' * Mxx(i+1)=',
    *E11.4)
12  FORMAT(2X,' : Qxz(i-1/2)=',E11.4,' * Qxz(i+1/2)=',E11.4)
36  FORMAT(2X,' : Myy(i-1/2)=',E11.4,' * Myy(i+1/2)=',E11.4)
13  FORMAT(2X,' : U/h=',F9.3,' * W/h=',F9.3,' * dX/h=',F9.3,' * dY/h=
    *,F9.3)
    WRITE(5,14)U(I),X(I),VU(I),URX
    WRITE(5,16)
    WRITE(5,15)W(I),Y(I),VW(I),URY
14  FORMAT(2X,' : U=',E11.4,' * X=',E11.4,' * dU/dt=',E11.4,' * Lu
    *=',E11.4)
15  FORMAT(2X,' : W=',E11.4,' * Y=',E11.4,' * dW/dt=',E11.4,' * Lw
    *=',E11.4)
    WRITE(5,16)

```

```

B1=U(I)/H
B2=W(I)/H
B3=DX(I)/H
B4=DY(I)/H
WRITE(5,13)B1,B2,B3,B4

WRITE(5,16)
P1=100.*URX/EPX
P2=100.*URY/EPY
WRITE(5,17)P1,P2
WRITE(5,16)
IF(KFN.NE.4)GO TO 18
WRITE(5,68)
68  FORMAT(/3X,'k  Ei(max)/Et      Ei/Et      Dk      Exx/Et      Eyy/
      *Et      Ezz/Et')
69  FORMAT(3X,'k  Si(max)/St      Si/St      Ek      Sxx/St      Syy/
      *St')
DO 70 I3=1,KSL
K=KSL-I3+1
70  WRITE(5,71)K,EEM(K),EEC(K),DPW(K),EXC(K),EYC(K),EZC(K)
71  FORMAT(2X,I2,2F12.3,F9.3,F10.3,2F12.3)
72  FORMAT(2X,I2,2F12.3,E12.3,2F10.3)
WRITE(5,69)
DO 73 I3=1,KSL
K=KSL-I3+1
73  WRITE(5,72)K,SSM(K),SSC(K),EPW(K),SXC(K),SYC(K)
17  FORMAT(2X,' : Errors : Epsu=',F8.3,' [%] * Epsw=',F8.3,' [%]')
18  CONTINUE
DO 20 I=2,N
IF(I.NE.N)GO TO 28
IF(NR.NE.3)GO TO 20
W(I)=W(I)+DT*VW(I)
GO TO 20
28  U(I)=U(I)+DT*VU(I)
W(I)=W(I)+DT*VW(I)
20  CONTINUE
DO 27 I=2,N
B1=SF0(I)
B2=CF0(I)
DX(I)=0.
DY(I)=0.
IF(I.NE.N)GO TO 26
IF(NR.NE.3)GO TO 27
DY(I)=W(I)
Y(I)=Y0(I)+DY(I)
GO TO 27
26  DX(I)=B1*U(I)-B2*W(I)
DY(I)=B2*U(I)+B1*W(I)
X(I)=X0(I)+DX(I)
Y(I)=Y0(I)+DY(I)
27  CONTINUE
IF(LB.NE.0)GO TO 19
WRITE(5,74)
B1=0.
I1=1
DO 75 I=1,N1
B2=ABS(E11(I))
IF(B2.LT.B1)GO TO 75
B1=B2
I1=I
B3=0.5*(E22(I)+E22(I+1))
BL1=1.+E11(I)
BL2=1.+B3

```

```

E33=1. / (BL1*BL2) -1.
75  CONTINUE
    WRITE (5, 76) I1, E11 (I1), B3, E33
    B1=0.
    I1=1
    DO 77 I=1, N
    B2=ABS (E22 (I))
    IF (B2. LT. B1) GO TO 77
    B1=B2
    I1=I
    IF (I. EQ. 1) B3=E11 (1)
    IF (I. NE. 1) B3=E11 (I-1)
    IF (I. NE. N) B4=E11 (I)
    IF (I. EQ. N) B4=E11 (I-1)
    B3=0. 5*(B3+B4)
    BL1=1. +B3
    BL2=1. +E22 (I)
    E33=1. / (BL1*BL2) -1.
77  CONTINUE
    WRITE (5, 78) I1, E22 (I1), B3, E33
21  FORMAT (/2X, '*** Maximum errors on current step in node points:')
74  FORMAT (/2X, '*** Maximum deformations on current step in points:')
76  FORMAT (2X, 'Deformations in point i=', I3, '+1/2: Exx=', F9.4, ' * Eyy=
*, F9.4, ' * Ezz=', F9.4)
78  FORMAT (2X, 'Deformations in point i=', I3, ': Eyy=', F9.4, ' * Exx=',
*, F9.4, ' * Ezz=', F9.4)
    WRITE (5, 21)
    B1=100. *EPSX/EPX
    B2=100. *EPSY/EPY
    WRITE (5, 9)
    WRITE (5, 25) B1, IX
    WRITE (5, 16)
    WRITE (5, 35) B2, IY
25  FORMAT (2X, ' : Epsu=', F8.3, ' [%] - at node point i=', I2)
35  FORMAT (2X, ' : Epsw=', F8.3, ' [%] - at node point i=', I2)
    WRITE (5, 16)
19  IF (KN. NE. KMN) GO TO 34
    WRITE (5, 22)
22  FORMAT (/2X, '*** Maximum abs. errors of all iteration process:')
    WRITE (5, 9)
    WRITE (5, 23) EPX, KX
    WRITE (5, 16)
    WRITE (5, 24) EPY, KY
23  FORMAT (2X, ' : EPU=', E11.4, ' - on step n=', I5)
24  FORMAT (2X, ' : EPW=', E11.4, ' - on step n=', I5)
    WRITE (5, 16)
    IF (KFN. NE. 4) GO TO 34
152 FORMAT (/10X, '*** Intensity of deformation Ei/Et:')
161 FORMAT (/10X, '*** Deformations Exx/Et:')
164 FORMAT (/10X, '*** Deformations Eyy/Et:')
167 FORMAT (/10X, '*** Intensity of stresses Si/St:')
170 FORMAT (/10X, '*** Stresses Sxx/St:')
173 FORMAT (/10X, '*** Stresses Syy/St:')
142 FORMAT (/5X, '*** Naximum values of Intensity of Deformations & Stre
*sses:')
176 FORMAT (2X, 'Intensity of Defirmation Ei(max)=', F6.3, '*Et in point i
*=', I3, '+1/2 * layer k=', I2)
186 FORMAT (2X, 'Intensity of Stresses Si(max)=', F6.3, '*St in point i=',
*I3, '+1/2 * layer k=', I2)
    B1=0.
    B2=0.
    DO 174 I=1, N1
    DO 174 K=1, KSL

```

```

      IF(B1.GT.EIZ(I,K))GO TO 143
      B1=EIZ(I,K)
      I1=I
      I2=K
143   IF(B2.GT.SIZ(I,K))GO TO 174
      B2=SIZ(I,K)
      I3=I
      I4=K
174   CONTINUE
      WRITE(5,142)
      B1=B1/ET
      WRITE(5,176)B1,I1,I2
      B2=B2/ST
      WRITE(5,186)B2,I3,I4
      DO 177 K6=1,6
      IF(K6.NE.1)GO TO 159
      DO 158 I=1,N1
      DO 158 K=1,KSL
158   ESP(I,K)=EIT(I,K)
      WRITE(5,152)
      GO TO 175
159   IF(K6.NE.2)GO TO 162
      DO 160 I=1,N1
      DO 160 K=1,KSL
160   ESP(I,K)=EXT(I,K)
      WRITE(5,161)
      GO TO 175
162   IF(K6.NE.3)GO TO 165
      DO 163 I=1,N1
      DO 163 K=1,KSL
163   ESP(I,K)=EYT(I,K)
      WRITE(5,164)
      GO TO 175
165   IF(K6.NE.4)GO TO 168
      DO 166 I=1,N1
      DO 166 K=1,KSL
166   ESP(I,K)=SIT(I,K)
      WRITE(5,167)
      GO TO 175
168   IF(K6.NE.5)GO TO 171
      DO 169 I=1,N1
      DO 169 K=1,KSL
169   ESP(I,K)=SXT(I,K)
      WRITE(5,170)
      GO TO 175
171   DO 172 I=1,N1
      DO 172 K=1,KSL
172   ESP(I,K)=SYT(I,K)
      WRITE(5,173)
175   I7=1
153   I=I7
      I1=I+1
      I2=I+2
      I3=I+3
      I4=I+4
      I5=I+5
      I6=I+6
      B1=0.
      B2=0.
      B3=0.
      B4=0.
      B5=0.
      B6=0.

```

```

B7=0.
WRITE(5,154) I, I1, I2, I3, I4, I5, I6
154  FORMAT(/3X,'k',I2,'+1/2',I2,'+1/2',I2,'+1/2',I2,'+
*1/2',I2,'+1/2',I2,'+1/2',I2,'+1/2')
DO 155 K1=1,KSL
K=KSL-K1+1
B1=ESP(I,K)
IF(I1.GE.N)GO TO 155
B2=ESP(I1,K)
IF(I2.GE.N)GO TO 155
B3=ESP(I2,K)
IF(I3.GE.N)GO TO 155
B4=ESP(I3,K)
IF(I4.GE.N)GO TO 155
B5=ESP(I4,K)
IF(I5.GE.N)GO TO 155
B6=ESP(I5,K)
IF(I6.GE.N)GO TO 155
B7=ESP(I6,K)
155 WRITE(5,156) K, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7
156  FORMAT(2X,I2,7F10.4)
I7=I7+7
IF(I7.LT.N)GO TO 153
177 CONTINUE
34  RETURN
END

```