



## ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Научная статья

УДК 629.7.024

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188819>

EDN: <https://www.elibrary.ru/CBUZFO>

### Расчетно-теоретическое прогнозирование эффективных упругих характеристик углепластика для конструкции крыла летательного аппарата

Ян У Вай<sup>1</sup>, Константин Валерьевич Михайловский<sup>2</sup>✉

<sup>1, 2</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
Москва, Российская Федерация

<sup>1</sup> waiyanoo6977@gmail.com

<sup>2</sup> mikhaylovskiy@bmstu.ru✉

**Аннотация.** Выполнено расчетно-теоретическое прогнозирование эффективных упругих характеристик монослоя однонаправленного, ортогонально-армированного и квазиизотропного углепластика, применяемого в конструкции крыла. Эффективные характеристики однонаправленного углепластика определялись в рамках многомасштабного подхода с использованием аналитических моделей микромеханики композиционных материалов, а также численного моделирования представительного элемента объема в программных комплексах ANSYS Material Designer и MSC Digimat. Характеристики ортогонально-армированного и квазиизотропного углепластика рассчитывались на основе классической теории слоистых пластин и конечно-элементного моделирования в модуле ANSYS ACP PrePost. Проведено сравнение результатов, полученных аналитическими и численными методами, а также исследовано влияние схем армирования на эффективные характеристики углепластика. В рамках многомасштабного подхода исследования проводились на микро-, мезо- и макроуровне. Атомно-молекулярный уровень моделирования не рассматривался. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и оптимизации конструкций из углепластиков для различных летательных аппаратов.

**Ключевые слова:** крыло летательного аппарата, углепластик на основе углеродной ленты, прогнозирование эффективных упругих характеристик на микро-, мезо- и макроуровне, численные и аналитические модели

**Для цитирования:** Вай Ян У, Михайловский К.В. Расчетно-теоретическое прогнозирование эффективных упругих характеристик углепластика для конструкции крыла летательного аппарата // Вестник Московского авиационного института. 2026. Т. 33. № 3. С. 9–22. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188819>

# DESIGN OF THE FLYING VEHICLES ELEMENTS FROM POLYMER COMPOSITE MATERIALS

Original article

## Theoretical and Numerical Prediction of the Effective Elastic Properties of Carbon-Fiber-Reinforced Composites for the Aerial Vehicle Wing

Yan Oo Wai<sup>1</sup>, Konstantin V. Mikhaylovskiy<sup>2</sup>✉

<sup>1, 2</sup> Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russian Federation

<sup>1</sup> waiyanoo6977@gmail.com

<sup>2</sup> mikhaylovskiy@bmstu.ru ✉

### Abstract

The study executed computational-and-theoretical prediction of the effective elastic characteristics of the monolayer of the unidirectional, orthogonally reinforced and quasi-isotropic carbon fiber-reinforced plastic (CFRP) applied in the wing structure. The relevance of the research is stipulated by the widespread application of polymer composite materials in the aerospace industry due to their high specific mechanical properties, corrosion resistance, and potential for weight reduction. The CFRP application in the wing components and other primary load-bearing structures allows reducing aircraft weight while maintaining the required strength and stiffness characteristics.

The presented study addresses the problem of the effective mechanical properties predicting of the CFRP employed in the load-carrying wing structure. Employing a multi-scale approach based on the joint application of analytical models of micromechanics and numerical modeling of the representative volume element (RVE) is assumed to allow enhancing the results fidelity and assessing the spread of the characteristics being determined.

The objective of the study consists in the accuracy assessing of the analytical and numerical methods for the CFRP the effective elastic properties determining with a view to subsequent application in the light aircraft wing structure optimization. The Piper PA-28 light aircraft wing was selected as the subject of research. oray T700 carbon fibers and Etal Carbon Light epoxy resin were employed as the binding materials.

The effective characteristics determining of the unidirectional CFRP was being performed within the framework of the multi-scale approach employing the Voigt–Reuss, Eshelby, Halpin–Tsai, and Chamis analytical micromechanical models, as well as numerical simulation of a representative volume element with ANSYS Material Designer and MSC Digimat. The analysis was performed at the micro-, meso-, and macro-levels. Several loading cases, including both longitudinal and transverse tension as well as shear loading in the principal material planes, were considered to determine the effective elastic properties.

The obtained results demonstrate good concurrence of the characteristics being predicted obtained with the ANSYS Material Designer and MSC Digimat complexes. Maximum discrepancy between the computed properties does not exceed 1.4%, confirming validity of the developed finite element models, boundary conditions, and homogenization procedures. Comparison of the analytical and numerical results demonstrated that the Halpin–Tsai model ensures the closest agreement with the finite element simulations. Average deviation of the results obtained with this model does not exceed 8.1%.

Classical Laminate Theory (CLT) and finite element simulations performed in ANSYS ACP PrePost were employed for the the CFRP multilayer laminates effective elastic properties determining The study of the reinforcement schemes impact on the CFRP effective characteristics was performed. The difference between the analytical and numerical results does not exceed 0.3%. The obtained results may be handy in the design and structural analysis of the aerospace composite structures, as well as in evaluation of the stress–strain state and strength of the light aircraft wing components.

**Keywords:** aerial vehicle wing, carbon fiber-reinforced plastic (CFRP) based on carbon tape, effective elastic properties prediction at the micro-, meso- and macrostructure levels, numerical and analytical models

**For citation:** Wai Yan Oo, Mikhaylovskiy K.V. Theoretical and Numerical Prediction of the Effective Elastic Properties of Carbon-Fiber-Reinforced Composites for the Aerial Vehicle Wing. *Aerospace MAI Journal*. 2026;33(3):9-22. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188819>

### List of Figures

- Fig. 1. Multiscale approach for the carbon-fiber-reinforced plastic (CFRP) physical and mechanical properties determining: *a* – microscale, interaction at the fiber–matrix; *b* – mesoscale, representative volume element (RVE) of CFRP with account for the reinforcement scheme; *c* – macroscale – the wing structure
- Fig. 2. Loading cases applied to the representative volume element (RVE) of a CFRP lamina for the effective elastic properties determining: *a* – longitudinal tension along the fiber direction,  $E_1$ ; *b* – transverse tension perpendicular to the fiber direction,  $E_2$ ; *c* – tension in the direction normal to the reinforcement plane,  $E_3$ ; *d* – shear loading in the 1–2 plane,  $G_{12}$ ; *e* – shear loading in the 1–3 plane,  $G_{13}$ ; *f* – shear loading in the 2–3 plane,  $G_{23}$
- Fig. 3. Geometric and finite element models of the representative volume element (RVE) developed by the ANSYS Material Designer (*a*) and MSC Digimat (*b*)
- Fig. 4. Effective elastic properties variation of a CFRP lamina as a function of fiber volume fraction,  $V_f$ : 1 – Voigt–Reuss model; 2 – Halpin–Tsai model; 3 – Eshelby model; 4 – Chamis model; 5 – ANSYS Material Designer simulation results; 6 – MSC Digimat simulation results
- Fig. 5. Stress components in the principal coordinate system of an orthotropic lamina: 1 – fiber orientation (fiber direction); 2 – transverse direction
- Fig. 6. Laminate stacking sequences of the CFRP laminates: *a* –  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_s$ ; *b* –  $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$
- Fig. 7. Laminate stacking sequences with ply thicknesses and corresponding elastic property diagrams: *a* –  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_s$ ; *b* –  $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$

### List of Tables

- Table 1. Physical-and-Mechanical Properties of the Toray T700 type carbon fiber
- Table 2. Physical-and-Mechanical Properties of the Etal Carbon Light type epoxy binder
- Table 3. Numerical simulation results comparison for the CFRP Lamina effective elastic properties
- Table 4. Analytical and numerical predictions comparison of the CFRP Lamina effective elastic properties
- Table 5. Effective elastic properties of the multilayer CFRP laminates obtained from analytical calculations
- Table 6. Effective elastic properties of the CFRP Laminates obtained from finite element simulations

## Введение

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) находят широкое применение в конструкциях летательных аппаратов благодаря своим удельным физико-механическим характеристикам, коррозионной стойкости и возможности снижения массы. В последние годы область применения ПКМ в авиационной технике существенно расширилась. Использование ПКМ, в частности углепластиков, в элементах крыла, фюзеляжа и других силовых узлах позволяет снизить массу конструкции при сохранении требуемых прочностных и жесткостных характеристик [1].

Углепластики представляют собой гетерогенные многофазные системы, в которых матрица обеспечивает совместную работу армирующих элементов, передачу и перераспределение нагрузок между волокнами, а наполнитель определяет основные механические характеристики и препятствует развитию повреждений и распространению трещин [2].

Физико-механические характеристики углепластиков с разными схемами армирования преимущественно определяются экспериментальными методами. Однако экспериментальные исследования требуют значительных временных, материальных и технологических затрат, особенно на ранних этапах проектирования. В связи с этим возрастает роль расчетно-теоретических и численных методов, позволяющих прогнозировать эффективные харак-

теристики углепластиков с использованием моделей различного масштабного уровня. Корректное определение анизотропных физико-механических характеристик считается одним из ключевых факторов при проектировании надежных авиационных конструкций из углепластиков [3].

В настоящее время вопросам определения эффективных характеристик углепластиков посвящено значительное количество исследований как в России, так и за рубежом. Для оценки упругих характеристик углепластиков широко применяются аналитические модели микромеханики, включая модели Фойгта–Рейсса, Эшелби, Халпина–Цая и Чамиса [4]. Данные подходы позволяют оценить эффективные характеристики материала на основе свойств компонентов и параметров армирования. Наряду с аналитическими методами, активно развиваются подходы численного моделирования представительных элементов объема (ПЭО) с использованием метода конечных элементов, реализованные в программных комплексах ANSYS Material Designer, MSC Digimat и Abaqus [5]. Применение ПЭО позволяет учитывать действительную структуру и оценивать вероятность разрушения волокон или матрицы в углепластике в зависимости от действующих нагрузок.

Несмотря на значительное количество выполненных исследований, задача определения эффективных физико-механических характеристик

углепластика для крыла актуальна из-за необходимости выбора рациональных схем армирования для силовых элементов. Требуется учитывать действительные геометрические параметры волокон, границу раздела «волокно—матрица», дефекты в матрице и возможные расслоения, оказывающие существенное влияние на прочность и устойчивость слоистых композитов при различных видах нагружения, для прогнозирования эффективных характеристик [6]. Кроме того, результаты аналитических моделей могут существенно отличаться от данных численного моделирования, поэтому требуются сопоставление и оценка применимости различных подходов [7].

В настоящей статье рассматривается задача прогнозирования эффективных физико-механических характеристик углепластика, используемого в конструкции силовой схемы крыла летательного аппарата. Предполагается, что применение многомасштабного подхода для определения эффективных характеристик углепластиков, основанного на совместном использовании аналитических моделей микромеханики и численного моделирования ПЭО, позволит повысить их достоверность и оценить разброс.

Эффективные характеристики монослоя определяются с использованием численного моделирования, включающего построение геометрических и конечно-элементных моделей ПЭО в программных комплексах ANSYS Material Designer и MSC Digimat. Расчет характеристик углепластиков осуществляется на основе классической механики композиционных материалов с использованием программного комплекса ANSYS ACP. Полученные результаты представляют практический интерес при проектировании авиационных конструкций из углепластиков и могут быть использованы при расчете элементов крыла. В рамках исследования выполнено сопоставление результатов использования аналитических моделей микромеханики и конечно-элементного моделирования, а также проведен анализ влияния схем армирования на характеристики углепластиков.

### Постановка задачи

Цель работы заключается в оценке погрешности определения эффективных упругих характеристик углепластика аналитическими и численными методами для последующего применения при оптимизации конструкции крыла.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

- разработка геометрической модели ПЭО монослоя углепластика с учетом объемной доли волокон и свойств компонентов;

- определение эффективных упругих характеристик монослоя углепластика с использованием программных комплексов ANSYS Material Designer и MSC Digimat, а также сопоставление результатов численного моделирования с аналитическими моделями;

- определение эффективных упругих характеристик многослойных углепластиков с использованием механики композиционных материалов и численного моделирования;

- исследование влияния схем армирования на упругие характеристики углепластика;

- использование полученных характеристик при расчете напряженно-деформированного состояния и оценке прочности крыла летательного аппарата.

### Объект исследования и исходные данные

В качестве объекта исследования для опробования расчетно-теоретического подхода в настоящей работе рассматривается крыло легкого самолета Piper PA-28. Выбор конструкции обусловлен широким распространением самолетов данного класса в авиации общего назначения и доступностью данных по эксплуатационным нагрузкам, позволяющих исследовать особенности работы элементов из углепластика.

Конструкция крыла включает обшивку, два лонжерона и девять нервюр, изготовленных из углепластика. Указанные элементы являются основными несущими элементами крыла, воспринимающими эксплуатационные нагрузки [8]. В нагруженных зонах конструкции возникают значительные напряжения, поэтому требуется анализ напряженно-деформированного состояния для оценки прочности [9].

Применение углепластика обеспечивает высокую прочность и жесткость конструкции при одновременном снижении ее массы. В качестве армирующего наполнителя используются углеродные волокна, а в качестве матрицы используется эпоксидное связующее. Для углепластиков характерна выраженная анизотропия упругих и прочностных характеристик вдоль и поперек армирования. Указанная особенность должна учитываться при анализе напряженно-деформированного состояния и оценке несущей способности конструкции [10].

В работе использовались углеродные волокна Toray T700, достоинством которых является рациональное соотношение уровня характеристик и стоимости с учетом их применения в конструкции крыла [11, 12]. В качестве матричного материала применялось эпоксидное связующее типа Этал Карбон Light [13]. Свойства компонентов принимались на основе справочных данных и технической документации производителей (табл. 1 и 2).

Таблица 1. Физико-механические характеристики углеродных волокон типа Toray T700

| Наименование характеристики                                         | Единица измерения | Значение |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------|----------|
| Плотность, $\rho$                                                   | кг/м <sup>3</sup> | 1800     |
| Модуль упругости вдоль оси волокна (ось $X$ ), $E_1$                | ГПа               | 230      |
| Модули упругости в поперечном направлении (ось $Y, Z$ ) $E_2 = E_3$ | ГПа               | 23       |
| Модуль сдвига в плоскости $XY$ , $G_{12}$                           | ГПа               | 9        |
| Модуль сдвига в плоскости $YZ$ , $G_{23}$                           | ГПа               | 8,21     |
| Модуль сдвига в плоскости $XZ$ , $G_{13}$                           | ГПа               | 9        |
| Коэффициент Пуассона в плоскости $XY$ , $\nu_{12}$                  | —                 | 0,2      |
| Коэффициент Пуассона в плоскости $YZ$ , $\nu_{23}$                  | —                 | 0,4      |
| Коэффициент Пуассона в плоскости $XZ$ , $\nu_{13}$                  | —                 | 0,2      |
| Диаметр волокна, $d_f$                                              | мкм               | 7        |
| Прочность при растяжении вдоль оси волокна, $\sigma_{1f}$           | МПа               | 4900     |

Таблица 2. Физико-механические характеристики эпоксидного связующего типа Этал Карбон Light

| Наименование характеристики                    | Единица измерения | Значение |
|------------------------------------------------|-------------------|----------|
| Плотность, $\rho$                              | кг/м <sup>3</sup> | 1160     |
| Модуль упругости, $E$                          | ГПа               | 3,78     |
| Коэффициент Пуассона, $\nu$                    | —                 | 0,35     |
| Прочность при растяжении, $\sigma_t$           | МПа               | 80       |
| Прочность при сжатии, $\sigma_c$               | МПа               | 110      |
| Предел прочности при сдвиге, $\tau_{12}$       | МПа               | 60       |
| Предельное относительное удлинение, $\epsilon$ | %                 | 4        |

Объемная доля матрицы в монослое углепластика составляла 40–50 %, что соответствует объемной доле волокон 50–60 %.

#### Методика исследования

Для определения эффективных физико-механических характеристик монослоя рассматривается ПЭО. Геометрическая модель ПЭО формировалась с учетом диаметра волокон, их расположения, объемной доли и свойств эпоксидной матрицы. Далее строилась конечно-элементная модель, используемая для расчета эффективных упругих характеристик.

Эффективные характеристики углепластика для крыла определялись в рамках многомасштабного подхода (рис. 1). На микроуровне рассматривался ПЭО для определения характеристик монослоя. На мезоуровне полученные данные по монослою

использовались при расчете углепластика с разными схемами армирования для крыла. Обычно используются следующие соотношения для разных масштабных уровней: микроуровень ( $< 0,1$  мм), мезоуровень (0,1 мм – 1,0 см) и макроуровень конструкции крыла [14].

Расчет эффективных характеристик выполняется в программных комплексах ANSYS Material Designer и MSC Digimat. В каждом программном комплексе проводится моделирование ПЭО с последующим определением упругих характеристик монослоя. Для этого исследуются характерные расчетные случаи нагружения ПЭО: растяжение вдоль волокон, растяжение в поперечных направлениях и сдвиг в главных плоскостях материала [15]. Схемы нагружения, используемые для определения эффективных характеристик ПЭО, представлены на рис. 2.

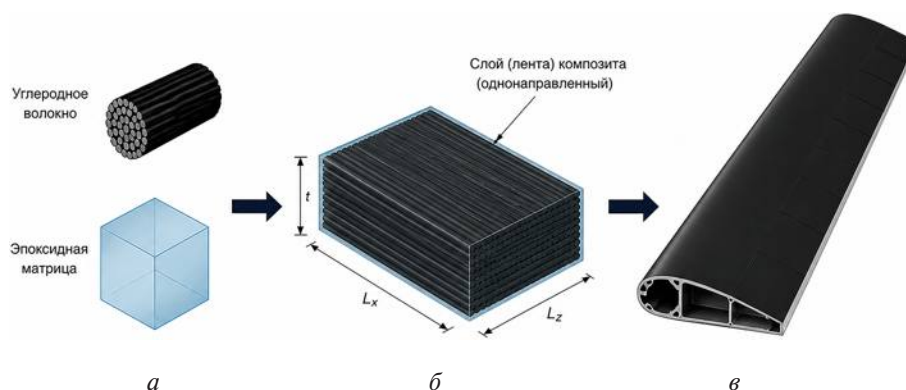


Рис. 1. Многомасштабный подход к определению физико-механических характеристик углепластика:  
 а — микроуровень, взаимодействие на уровне волокна и матрицы;  
 б — мезоуровень, ПЭО углепластика с учетом схемы армирования;  
 в — макроуровень, конструкция крыла

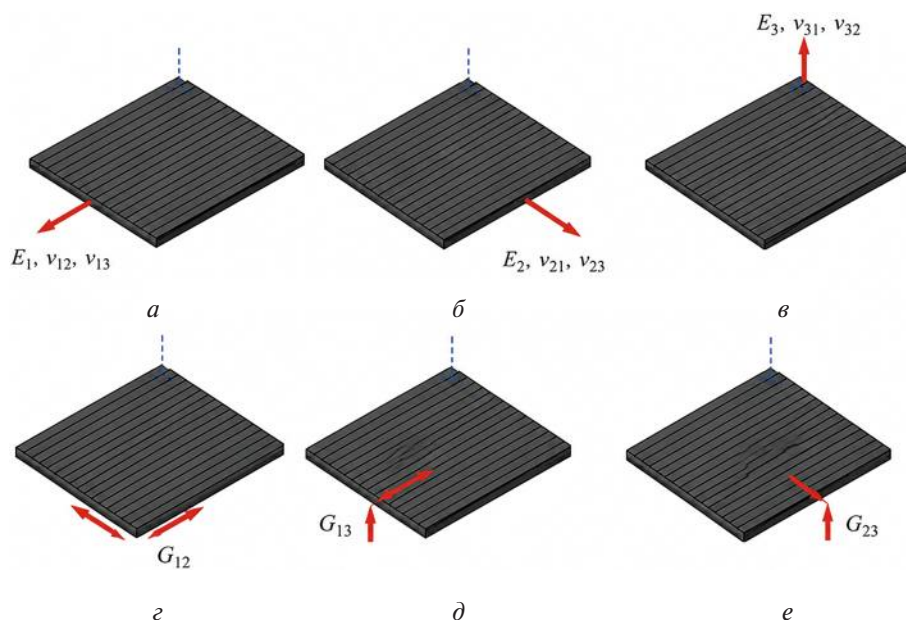


Рис. 2. Схемы нагружения ПЭО монослоя углепластика для определения эффективных упругих характеристик:  
 а — растяжение вдоль волокон,  $E_1$ ; б — растяжение поперек волокон,  $E_2$ ;  
 в — растяжение в направлении, перпендикулярном плоскости армирования,  $E_3$ ;  
 г — сдвиг в плоскости 1–2,  $G_{12}$ ; д — сдвиг в плоскости 1–3,  $G_{13}$ ;  
 е — сдвиг в плоскости 2–3,  $G_{23}$

Для обеспечения корректного сравнения результатов в различных программных комплексах использовались одинаковые геометрические параметры ПЭО, физико-механические характеристики компонентов материала и объемная доля волокон.

#### Теоретические модели определения эффективных упругих характеристик

Для оценки эффективных упругих характеристик монослоя применяются аналитические модели микромеханики, основанные на различных предпо-

ложениях о распределении напряжений и деформаций между компонентами [16]. В настоящей работе рассматриваются модели Фойгта–Рейсса, Эшелби, Халпина–Цая и Чамиса, позволяющие определять эффективные упругие характеристики монослоя углепластика на микроуровне. Выбор указанных моделей обусловлен их широким применением при инженерном анализе композиционных материалов, относительной простотой реализации и возможностью сопоставления аналитических результатов с данными численного моделирования [17].

Расчет выполняется для следующих эффективных характеристик: продольного и поперечного модулей упругости, коэффициентов Пуассона и модулей сдвига. Использование нескольких аналитических моделей позволяет оценить влияние различных подходов на прогнозируемые характеристики и сопоставить результаты с результатами конечно-элементного моделирования [18]. При моделировании предполагались линейно-упругое поведение компонентов материала, идеальная адгезия между волокном и матрицей, а также отсутствие технологических дефектов и повреждений.

Модель Фойгта–Рейсса используется для оценки эффективных упругих характеристик композиционного материала на основе предположений об однородности полей деформаций и напряжений в компонентах. Данная модель позволяет определить верхнюю и нижнюю границы эффективных характеристик углепластика [19].

Продольный модуль упругости определяется по правилу смесей:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m. \quad (1)$$

Поперечный модуль упругости определяется по обратному правилу смесей:

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f V_m}. \quad (2)$$

Коэффициент Пуассона рассчитывается по выражению

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m. \quad (3)$$

Модуль сдвига определяется зависимостью

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_m V_f + G_f V_m}. \quad (4)$$

Модель Эшелби учитывает взаимодействие армирующих волокон с матрицей и позволяет более точно оценивать эффективные упругие характеристики композиционного материала. Данный подход основан на решении задачи о включении в упругой среде и применяется при анализе монослоев ПКМ.

Продольный модуль упругости в рамках модифицированной модели Эшелби определяется выражением

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m + \frac{4(V_f + V_m)^2 V_m V_f}{\frac{V_m}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m}}. \quad (5)$$

Поперечный модуль упругости определяется выражением

$$E_2 = E_m \left[ 1 + \frac{V_f \left( \frac{E_f}{E_m} - 1 \right)}{1 + \left( \frac{E_f}{E_m} - 1 \right)} \right]. \quad (6)$$

Коэффициент Пуассона определяется зависимостью

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m + \frac{(\nu_f - \nu_m) \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right) V_f V_m}{\frac{V_m}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m}}. \quad (7)$$

Модуль сдвига рассчитывается по формуле

$$G_{12} = \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{V_m}{2G_m}}. \quad (8)$$

Модель Халпина–Цая применяется для оценки эффективных упругих характеристик композиционного материала с учетом геометрии армирующих волокон и структуры. Данный подход обеспечивает более точное описание поперечных и сдвиговых характеристик монослоя по сравнению с классическим правилом смесей [20].

Продольный модуль упругости определяется по правилу смесей:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m. \quad (9)$$

Поперечный модуль упругости определяется выражением

$$E_2 = E_m \frac{1 + V_f \xi \eta}{1 - V_f \eta}, \quad (10)$$

$$\text{где } \eta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + \xi}.$$

Коэффициент Пуассона рассчитывается по формуле

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m. \quad (11)$$

Модуль сдвига определяется выражением

$$G_{12} = G_m \frac{1 + V_f \xi_g \eta_g}{1 - V_f \eta_g}, \quad (12)$$

$$\text{где } \eta = \frac{\frac{G_f}{G_m} - 1}{\frac{G_f}{G_m} + \xi}.$$

Модель Чамиса представляет собой полуэмпирический подход к определению эффективных упругих характеристик монослоя. Данный подход учитывает влияние объемной доли армирующих волокон на упругие характеристики и широко применяется при инженерном анализе конструкций из ПКМ [21].

Продольный модуль упругости определяется выражением

$$E_1 = E_{f11}V_f + E_mV_m. \quad (13)$$

Поперечный модуль упругости рассчитывается по формуле

$$E_2 = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f} \left( 1 - \frac{E_m}{E_{f22}} \right)}. \quad (14)$$

Коэффициент Пуассона определяется зависимостью

$$\nu_{12} = \nu_{f12}V_f + \nu_mV_m. \quad (15)$$

Модуль сдвига определяется выражением

$$G_{12} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f} \left( 1 - \frac{G_m}{G_{f12}} \right)}. \quad (16)$$

Для приведенных зависимостей и выражений приняты следующие обозначения:  $E_1$  и  $E_2$  — продольный и поперечный модули упругости монослоя;  $E_m$  — модуль упругости матрицы;  $E_f$ ,  $E_{f11}$  и  $E_{f22}$  — модули упругости углеродного волокна;  $G_f$  и  $G_{f12}$  — модули сдвига углеродного волокна;  $V_m$  и  $V_f$  — объемные доли матрицы и волокна;  $\xi$  и  $\xi_g$  — параметры армирования;  $K_m$  и  $K_f$  — объемные модули упругости матрицы и волокна;  $\nu_f$ ,  $\nu_m$  и  $\nu_{f12}$  — коэффициенты Пуассона компонентов;  $G_m$  — модуль сдвига матрицы;  $\eta$  и  $\eta_g$  — вспомогательные параметры моделей Халпина—Цая.

Использование нескольких подходов дает возможность сопоставить аналитические и численные результаты [22].

### Численное моделирование монослоя композиционного материала

Моделирование проводилось с использованием программных комплексов ANSYS Material Designer [23] и MSC Digimat [24]. Геометрическая модель ПЭО формировалась с учетом расположения волокон, объемной доли армирования и свойств компонентов. Для построения конечно-элементной модели применялись тетраэдры второго порядка. Размер конечных элементов выбирался с учетом

достижения сетчато-независимого решения. Геометрические и конечно-элементные модели ПЭО, построенные в указанных программных комплексах, представлены на рис. 3.

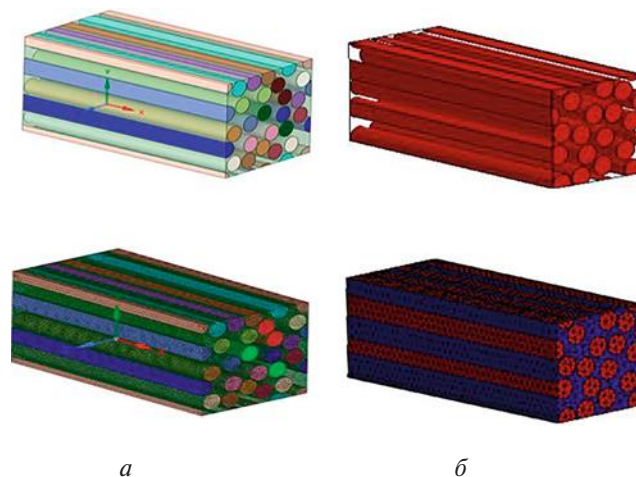


Рис. 3. Геометрические и конечно-элементные модели ПЭО, построенные с использованием программных комплексов ANSYS Material Designer (a) и MSC Digimat (б)

Результаты численного моделирования эффективных упругих характеристик монослоя приведены в табл. 3.

Полученные результаты показывают хорошую согласованность прогнозируемых характеристик в программных комплексах ANSYS Material Designer и MSC Digimat. Максимальное различие между определенными характеристиками не превышает 1,4%, что свидетельствует о корректности построенных конечно-элементных моделей, используемых граничных условий и параметров гомогенизации.

Зависимости эффективных упругих характеристик монослоя от объемной доли волокон  $V_f$ , полученные на основе аналитических моделей и результатов численного моделирования, представлены на рис. 4.

Сравнение результатов, полученных на основе аналитических моделей и данных численного моделирования, представлено в табл. 4.

Сравнение аналитических и численных результатов показало, что модель Халпина—Цая обеспечивает наиболее близкое соответствие результатам конечно-элементного моделирования при определении эффективных упругих характеристик монослоя. Среднее отклонение результатов данной модели от результатов численного моделирования не превышает 8,1%.

Таблица 3. Сравнение результатов численного моделирования эффективных упругих характеристик монослоя углепластика

| Наименование характеристики        | Единица измерения | ANSYS Material Designer | MSC Digimat | Различие, % |
|------------------------------------|-------------------|-------------------------|-------------|-------------|
| Продольный модуль упругости, $E_1$ | ГПа               | 116,9                   | 118,5       | 1,37        |
| Поперечный модуль упругости, $E_2$ | ГПа               | 8,522                   | 8,572       | 0,58        |
| Поперечный модуль упругости, $E_3$ | ГПа               | 8,615                   | 8,542       | 0,85        |
| Модуль сдвига, $G_{12}$            | ГПа               | 3,131                   | 3,151       | 0,63        |
| Модуль сдвига, $G_{23}$            | ГПа               | 2,903                   | 2,887       | 0,55        |
| Модуль сдвига, $G_{31}$            | ГПа               | 3,176                   | 3,154       | 0,69        |
| Коэффициент Пуассона, $\nu_{12}$   | —                 | 0,266                   | 0,263       | 1,14        |
| Коэффициент Пуассона, $\nu_{13}$   | —                 | 0,264                   | 0,263       | 0,38        |
| Коэффициент Пуассона, $\nu_{23}$   | —                 | 0,461                   | 0,456       | 1,1         |
| Плотность, $\rho$                  | кг/м <sup>3</sup> | 1480                    | 1480        | 0           |

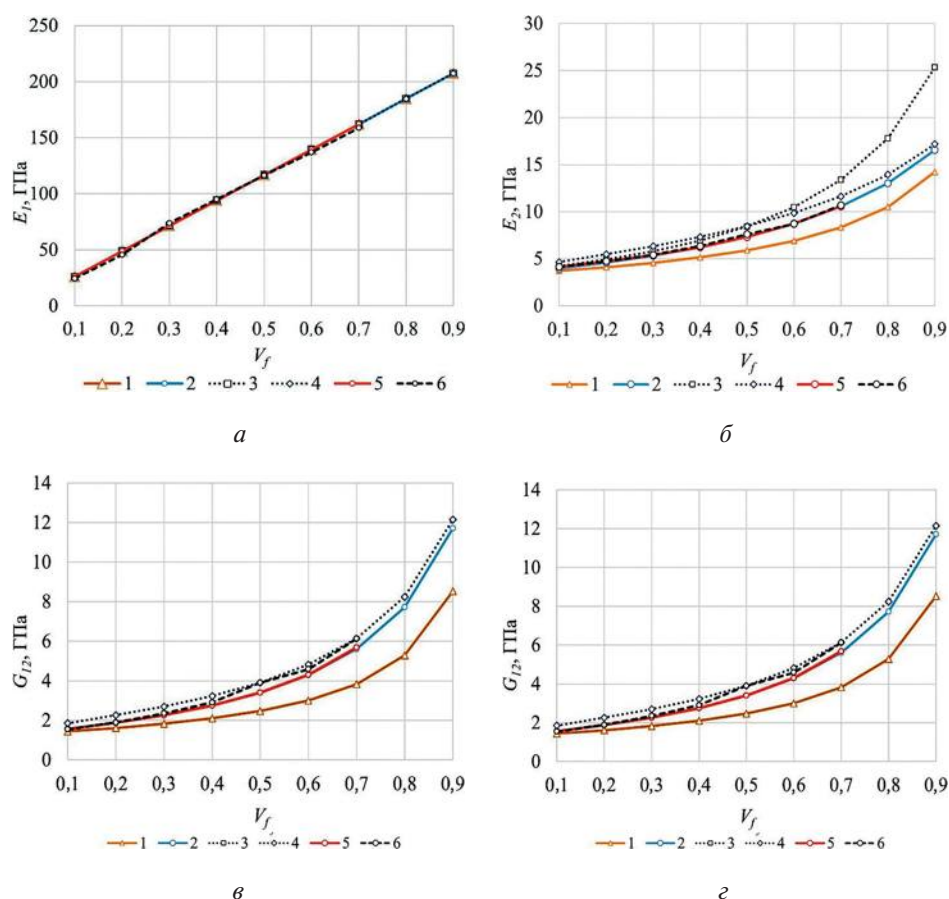


Рис. 4. Зависимости эффективных упругих характеристик монослоя от объемной доли волокон  $V_f$ :  
 1 – модель Фойгта–Рейсса; 2 – модель Халпина–Цая;  
 3 – модель Эшелби; 4 – модели Чамиса;  
 5 – расчет в ANSYS Material Designer; 6 – расчет в MSC Digimat

Таблица 4. Сравнение аналитических и численных результатов определения эффективных упругих характеристик монослоя углепластика

| Наименование характеристики                                                                                | Ф_Р   | Х_Ц   | М_Э   | М_Ч   | ANSYS  | MSC Digimat |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|--------|-------------|
| $E_1$ , ГПа                                                                                                | 116,7 | 116,7 | 116,7 | 116,7 | 116,92 | 118,56      |
| $E_2$ , ГПа                                                                                                | 5,89  | 8,129 | 8,42  | 8,554 | 8,522  | 8,571       |
| $\nu_{12}$                                                                                                 | 0,325 | 0,3   | 0,3   | 0,3   | 0,266  | 0,263       |
| $G_{12}$ , ГПа                                                                                             | 2,469 | 3,396 | 3,396 | 3,905 | 3,131  | 3,152       |
| $\rho_c$ , кг/м <sup>3</sup>                                                                               | 1480  | 1480  | 1480  | 1480  | 1480   | 1480        |
| Примечание: Ф_Р – модель Фойгта–Рейсса; Х_Ц – модель Халпина–Цая; М_Э – модель Эшелби; М_Ч – модель Чамиса |       |       |       |       |        |             |

### Расчет и анализ эффективных упругих характеристик углепластика

Для определения характеристик углепластика в зависимости от схемы армирования используется механика композиционных материалов, которая в том числе учитывает анизотропию монослоев, их толщины и ориентацию. Данный подход позволяет определять эквивалентные упругие характеристики углепластика с последующим применением их для расчета конструкции [25].

В рамках данной теории каждый монослой рассматривается как ортотропный линейно-упругий материал. Предполагается, что деформации конструкции являются малыми. Кроме того, принимается гипотеза Кирхгофа–Лява, согласно которой нормали к срединной поверхности пластины после деформации сохраняют прямолинейность и перпендикулярность к этой поверхности. Поперечные нормальные напряжения и деформации сдвига по толщине монослоя не учитываются. Локальная система координат ортотропного слоя и компоненты напряжений представлены на рис. 5 [26].

Для ортотропного монослоя в условиях плоского напряженного состояния связь между напряжени-

ями и деформациями определяется обобщенным законом Гука:

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\}, \quad (17)$$

где

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Здесь  $[Q]$  – матрица жесткости ортотропного монослоя.

Далее определяются интегральные жесткостные характеристики [27, 28] и выполняется расчет напряженно-деформированного состояния при действии внешних нагрузок [29]. На основе матрицы податливости определяются эффективные характеристики многослойного углепластика.

Эффективные упругие характеристики монослоя, полученные на микроуровне, использовались в качестве исходных данных при расчете многослойного углепластика на мезоуровне. На данном этапе рассматривалась пластина из углепластика, нагруженная растягивающей нагрузкой. Геометрические размеры пластины принимались равными  $1 \times 1$  м. Толщина каждого монослоя составляла  $h = 0,2$  мм. Для исследования влияния схемы армирования на эффективные упругие характеристики углепластика были проанализированы следующие схемы армирования:  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$  и  $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ , которые применяются в конструкциях крыла рассматриваемого типа [30, 31]. Схемы армирования показаны на рис. 6.

Расчет эффективных упругих характеристик многослойного углепластика проводился в программной среде Mathcad на основе теории слоистых пластин (Classical Laminite Theory, CLT) [32, 33].

В табл. 5 представлены эффективные упругие характеристики, полученные аналитическим методом.

Дополнительно конечно-элементное моделирование многослойной пластины выполнялось в

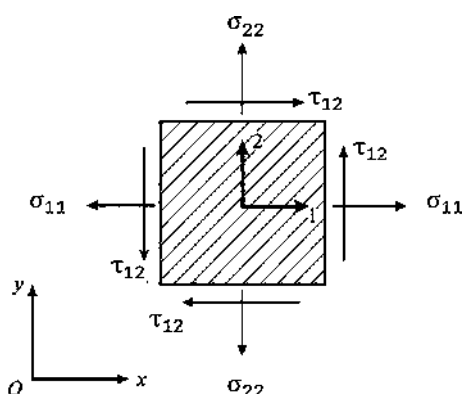


Рис. 5. Компоненты напряжений в главной системе координат ортотропного монослоя:

1 – направление укладки волокон;  
2 – поперечное направление

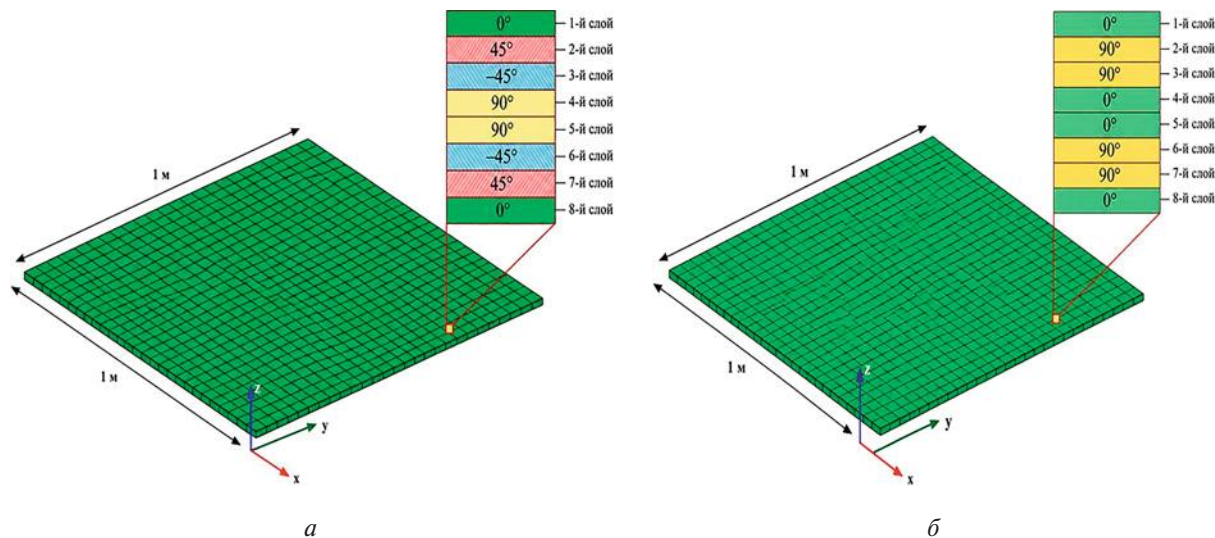


Рис. 6. Схемы армирования углепластика: *a* –  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ ; *б* –  $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$

Таблица 5. Эффективные упругие характеристики многослойных углепластиков, полученные аналитическим методом

| Наименование характеристики        | Единица измерения | $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_s$ | $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$ |
|------------------------------------|-------------------|-------------------------------------|---------------------------|
| Продольный модуль упругости, $E_1$ | ГПа               | 44,29                               | 62,96                     |
| Поперечный модуль упругости, $E_2$ | ГПа               | 44,29                               | 62,96                     |
| Модуль сдвига, $G_{12}$            | ГПа               | 16,75                               | 3,131                     |
| Коэффициент Пуассона, $\nu_{12}$   | —                 | 0,322                               | 0,036                     |

программном комплексе ANSYS ACP PrePost. В программном комплексе задавались последовательность укладки монослоев, ориентация и толщина. Диаграммы упругих характеристик представлены на рис. 7.

Для каждого варианта определялись эффективные характеристики, включая модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона. Результаты численного моделирования, полученные в ANSYS ACP PrePost, приведены в табл. 6.

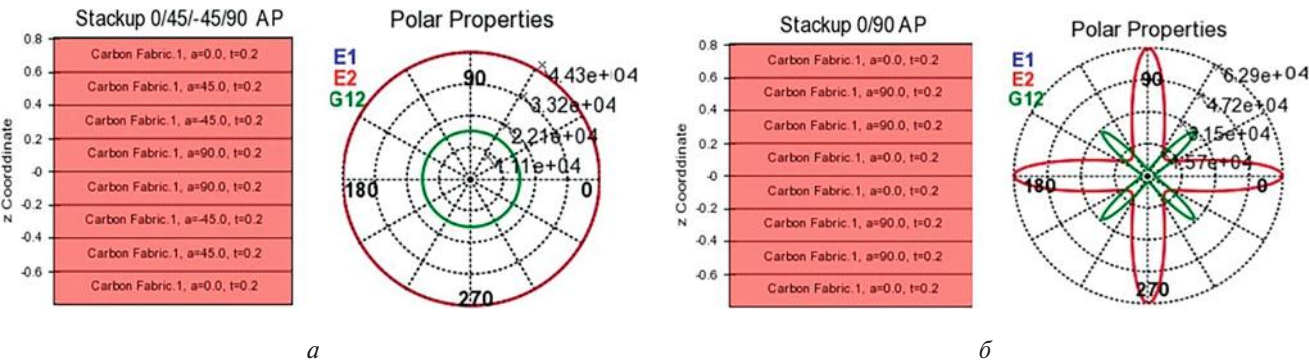


Рис. 7. Схема армирования с толщинами и диаграммы упругих характеристик: *a* –  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ ; *б* –  $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$

Таблица 6. Эффективные упругие характеристики углепластиков, полученные методом конечно-элементного моделирования

| Наименование характеристики        | Единица измерения | $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_s$ | $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$ |
|------------------------------------|-------------------|-------------------------------------|---------------------------|
| Продольный модуль упругости, $E_1$ | ГПа               | 44,28                               | 62,95                     |
| Поперечный модуль упругости, $E_2$ | ГПа               | 44,28                               | 62,95                     |
| Модуль сдвига, $G_{12}$            | ГПа               | 16,75                               | 3,126                     |
| Коэффициент Пуассона, $\nu_{12}$   | —                 | 0,322                               | 0,036                     |

Сравнение результатов аналитического расчета по теории слоистых пластин и численного моделирования в ANSYS ACP PrePost показало хорошее совпадение. Различие между значениями эффективных характеристик не превышает 0,3%. Для углепластика со схемой армирования  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]$ , характерно большее значение сдвиговой жесткости вследствие наличия слоев  $\pm 45^\circ$ , тогда как схема армирования  $[0^\circ, 90^\circ]_2$  обеспечивает повышенные продольные и поперечные модули упругости.

## Выводы

Выполнено расчетно-теоретическое прогнозирование эффективных упругих характеристик монослоя и многослойного углепластика, используемого в конструкции крыла летательного аппарата.

Рассмотрен многомасштабный подход, включающий моделирование на микроуровне, мезоуровне и макроуровне. Предложенный подход позволил определить эффективные упругие характеристики многослойных углепластиков и оценить погрешности применения численных методов, а также различных расчетных моделей.

Выполнено численное моделирование на микроуровне монослоя углепластика с использованием программных комплексов ANSYS Material Designer и MSC Digimat, и проведено сравнение с результатами, полученными с использованием аналитических моделей Фойгта–Рейсса, Эшелби, Халпина–Цая и Чамиса. Максимальное расхождение между данными в программных комплексах составило 1,4%. Установлено, что модель Халпина–Цая обеспечивает наилучшее согласование с результатами конечно-элементного моделирования в программных комплексах, а наибольшее отклонение результатов не превышает 8,1%.

Данные конечно-элементного моделирования многослойных углепластиков в программном комплексе ANSYS ACP PrePost хорошо согласуются с результатами аналитических расчетов. Различие между определенными эффективными характеристиками не превышает 0,3%.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и расчете авиационных конструкций из углепластиков, а также при оценке напряженно-деформированного состояния и прочности элементов крыла легких летательных аппаратов.

## Конфликт интересов / Conflict of Interests

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no relevant conflict of interests

## Список источников / References

1. Берлин А.А., Ассовский И.Г. (ред.). Перспективные материалы и технологии для ракетно-космической техники: Сборник статей. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2007. 456 с.  
Berlin AA, Assovsky IG (eds) *Promising materials and technologies for aerospace engineering. Collection of articles*. Moscow: Torus Press; 2007. 456 p. (In Russ.).
2. Донецкий К.И., Быстрикова Д.В., Караваев Р.Ю. и др. Полимерные композиционные материалы для создания элементов трансмиссий авиационной техники (обзор) // Труды ВИАМ. 2020. № 3 (87). С. 82–93. DOI: 10.18577/2307-6046-2020-0-3-82-93  
Donetskiy KI, Bystrikova DV, Karavaev RYu, et al. Application of polymeric composite materials for creation of elements of transmissions of aviation engineering (review). *Trudy VIAM*. 2020(3): 82–93. (In Russ.).
3. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к определению эффективных свойств композита с учетом повреждаемости // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 5. С. 59–65.  
Sovetova YuV, Sidorenko YuN, Skripnyak VA. Multiscale approach to estimation of effective properties of a composite with regard to its damaging. *Fizicheskaya mezomekhanika*. 2013;16(5):59–65 (In Russ.).
4. Wang Y, Huang ZM. Analytical micromechanics models for elastoplastic behavior of long fibrous composites: a critical review and comparative study. *Materials*. 2018;11(10):1919. DOI: 10.3390/ma11101919
5. Yu S, Zhang D, Qian K. Numerical analysis of macro-scale mechanical behaviors of 3D orthogonal woven composites using a voxel-based finite element model. *Applied Composite Materials*. 2019;26(7):65–83. DOI: 10.1007/s10443-018-9707-z
6. Белоусов И.С., Железнов Л.П., Бурнышева Т.В. Моделирование испытаний на сжатие слоистых композитов с дефектами в виде расслоения // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 1. С. 93–104.  
Belousov IS, Zheleznov LP, Burnysheva TV. Compression Test Simulation of Layered Composites with Delamination. *Aerospace MAI Journal*. 2024;31(1):93–104. (In Russ.).

7. Wiggers P, Hain M. Micro-meso-macro modelling of composite materials. In book: *Oñate E, Owen R. (eds) Computational Plasticity. Computational Methods in Applied Sciences*. Dordrecht: Springer. 2007;7:105-122. DOI: 10.1007/978-1-4020-6577-4\_7
8. Вай Ян У, Михайловский К.В. Оптимизация параметров крыла из полимерного композиционного материала легкого самолета и анализ возможных областей появления дефектов. Часть 1. Расчет оптимальной конструктивно-силовой схемы // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2025. № 9. С. 103–112.  
Wai Yan Oo, Mikhaylovskiy KV. Parameter optimization of a light aircraft wing made of the polymer composite material and analysis of the possible appearing defects. Part I. Computation of the optimal structural and power scheme. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2025(9):103–112. (In Russ.).
9. Тудупова Т.А., Бобрович С.В. Расчетно-экспериментальная оценка ресурсных характеристик композитных панелей крыла самолета транспортной категории // Вестник Московского авиационного института. 2020. Т. 27. № 4. С. 21-29. DOI: 10.34759/vst-2020-4-21-29  
Tudupova AN, Bobrovich AV. Computational and experimental evaluation of fatigue life characteristics of the transport category aircraft composite wing panels. *Aerospace MAI Journal*. 2020;27(4):21-29. (In Russ.).
10. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. и др. Представительный объем и эффективные материальные характеристики периодических и статистически однородно армированных волоконных композитов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2023. № 1. С. 103–110. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.10  
Pestrenin VM, Pestrenina IV, Landik LV, et al. Representative Volume and Effective Material Characteristics of Periodic and Statistically Uniformly Reinforced Fiber Composites. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2023(1):103-110. (In Russ.).
11. Torayca™ T700S Carbon Fiber Data Sheet, <https://toray-cfe.com/wp-content/uploads/2025/02/Torayca-T700S-Technical-Data-Sheet.pdf>
12. Torayca™ Carbon Fiber Resources, <https://www.toraycma.com/resources/>
13. Эпоксидный компаунд «Этал Карбон Light» (60 мин), <https://graphite-pro.ru/materials/эпоксидный-компаунд-этал-257-карбон-light>.  
*Epoxу compound “Etal Carbon Light” (60 min)*.
14. Kassem GA. *Micromechanical material models for polymer composites through advanced numerical simulation techniques*. PhD thesis. Aachen Higher Technical School of Rhineland-Westphalia in Aachen; 2009. 146 p. (In German).
15. Муйземнек А.Ю., Иванова Т.Н., Карташова Е.Д. Сопоставление результатов экспериментального и расчетного определения эффективных характеристик упругих свойств полимерных слоистых композитов из угле- и стеклотканей // Вестник ПНИПУ. Механика. 2021. № 2. С. 88–105. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.09  
Muzyemnek AYU, Ivanova TN, Kartashova ED. A Comparison of Experimental and Computation Results of Finding Effective Characteristics of Elastic Properties of Polymer Layered Composites from Carbon and Glass Fabrics. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2021(2):88-105. (In Russ.).
16. Ferretti P, Santi GM, Leon-Cardenas C, et al. Representative volume element (RVE) analysis for mechanical characterization of fused deposition modeled components. *Polymers*. 2021;13(20):3555. DOI: 10.3390/polym13203555
17. El Moumen A, Kanit T, Imad A. Numerical evaluation of the representative volume element for random composites. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2021;86:104181. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2020.104181
18. Chen F, Yao W, Jiang W. A macro-meso correlation model for numerical simulation of CFRP tensile notched strength. *Mathematical Problems in Engineering*. 2020;2020:5812912. DOI: 10.1155/2020/5812912
19. Giner E, Vercher A, Marco M, et al. Estimation of the reinforcement factor  $\xi$  for calculating the transverse stiffness  $E_2$  with the Halpin-Tsai equations using the finite element method. *Composite Structures*. 2015;124:402–408. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.01.008
20. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 470 с.  
Likhachev VA, Malinin VG. *Structural and analytical theory of strength*. St. Petersburg: Nauka; 1993. 470 p. (In Russ.).
21. Rayhan SB, Rahman MM. Modeling elastic properties of unidirectional composite materials using Ansys Material Designer. *Procedia Structural Integrity*. 2020;28(5):1892-1900. DOI: 10.1016/j.prostr.2020.11.012
22. Первушин Ю.С., Жернаков В.С. Проектирование и прогнозирование механических свойств однонаправленного слоя из композиционного материала: Учеб. пособие. Уфа: УГАТУ, 2002. 127 с.  
Pervushin YuS, Zhernakov VS. *Design and prediction of mechanical properties of a unidirectional layer of composite material*. Ufa: UGATU; 2002. 127 p. (In Russ.).
23. Hexagon Digimat, <https://hexagon.com/products/digimat>
24. Gay D, Hoa SV, Tsai SW. *Composite materials: design and applications*. Boca Raton: CRC Press; 2002. 552 p.
25. Zagainov GI, Lozino-Lozinski GE. (eds) *Composite materials in aerospace design*. London: Chapman & Hall, 1996. 460 p.
26. Kaw AK. *Mechanics of composite materials*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 1997. 352 p.

27. Кусяков А.Ш. Моделирование композитных пластин и оболочек: Монография. Пермь: Изд-во ПГНИУ, 2020. 188 с.  
Kusyakov ASH. *Modeling of composite plates and shells*. Perm: PGNIU; 2020. 188 p. (In Russ.).
28. Зиновьев П.А., Смердов А.А. Оптимальное проектирование композитных материалов: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 103 с.  
Zinoviev PA, Smerdov A. *Optimal design of composite materials*. Moscow: BMSTU; 2006. 103 p. (In Russ.).
29. Staab GH. *Laminar composites*. Boston: Butterworth-Heinemann; 1999. 328 p.
30. Вай Ян У, Михайловский К.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния панелей из полимерных композиционных материалов легкого самолета при ударном воздействии от столкновения с птицей // Инженерный журнал: наука и инновации. 2026. № 3(171):6.  
Wai Yan Oo, Mihajlovskiy KV. Simulation of the Stress–Strain State of Polymer Composite Panels of a Light Aircraft under Bird Strike Impact. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2026(3):6. (In Russ.).
31. Вай Ян У, Михайловский К.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния панели из полимерных композиционных материалов при воздействии однократной ударной нагрузки и оценка областей возникновения дефектов // Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 1. С. 112–123.  
Wai Yan Oo, Mikhailovsky KV. Stress–Strain State Modeling of a Panel from Composite Materials under the Impact of One-Time Sock Loading and Assessment of the Defect Areas Occurrence. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(1):112–123. (In Russ.).
32. Хеин З.М., Ёе Т.Х., Киреев В.А. Сравнение методик определения упругих и прочностных характеристик полимерных композиционных материалов // Труды МФТИ. 2018. Т. 10. № 2(38). С. 136–145.  
Hein ZM, Ye TH, Kireev VA. Comparison of methods of determination of elastic and strength characteristics in polymer composite materials. *Trudy MFTI*. 2018;10(2):136–145. (In Russ.).
33. Müzel SD, Bonhin EP, Guimarães NM, et al. Application of the finite element method in the analysis of composite materials: a review. *Polymers*. 2020;12(4):818. DOI: 10.3390/polym12040818

Статья поступила в редакцию / Received 24.06.2026  
Одобрена после рецензирования / Revised 06.08.2026  
Принята к публикации / Accepted 06.08.2026