

Тепловые процессы в технике. 2026. Т. 18. № 4. С. 155–165  
Thermal processes in engineering, 2026, vol. 18, no. 4, pp. 155–165

Научная статья  
УДК 536.2:621.3.049.77  
URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=188541>  
EDN: <https://www.elibrary.ru/MQULOC>

## Математическое моделирование и постановка задачи тепловой топологической оптимизации аддитивных биметаллических структур с учетом анизотропии и межфазного перехода

В.П. Киселев<sup>1</sup>, А.Д. Ежов<sup>2</sup>✉

<sup>1,2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>[ezzhov@gmail.com](mailto:ezzhov@gmail.com)✉

**Аннотация.** Разработка эффективных теплоотводящих элементов для энергетических, авиационных и ракетно-космических систем требует одновременного учета направленной теплопроводности, термоупругой работоспособности и качества межматериального контакта в биметаллических структурах, изготавливаемых аддитивными методами. Современные обзоры по металлическому аддитивному производству показывают, что послойное формирование металлов сопровождается анизотропией и неоднородностью микроструктуры, а многоматериальные системы позволяют совмещать свойства, трудно достижимые в одном однородном материале [1, 2]. Целью работы является формулировка согласованной физико-математической постановки задачи тепловой топологической оптимизации биметаллических композитов с учетом тензорной теплопроводности и эффективного межфазного перехода. Предложена трехфазная параметризация материала, использующая матричную, интерфейсную и высокотеплопроводную составляющие, а также регуляризация проектного поля фильтрацией Гельмгольца и сглаженной проекцией Хевисайда. Чувствительности целевых функционалов вычисляются сопряженным методом. Результаты аналитической и численной верификации подтверждают корректность реализации линейной и нелинейной теплопроводности, граничных условий, тензорной анизотропии и слабосвязанной термоупругой проверки. Разработанная модель обеспечивает переход от релаксированного оптимизационного поля к материализованной геометрии с обязательной повторной тепловой проверкой.

**Ключевые слова:** тепловая топологическая оптимизация, биметаллические структуры, аддитивные технологии, тензорная теплопроводность, метод конечных элементов, сопряженный анализ, межфазный переход, метод подвижных асимптот

**Для цитирования.** Киселев В.П., Ежов А.Д. Математическое моделирование и постановка задачи тепловой топологической оптимизации аддитивных биметаллических структур с учетом анизотропии и межфазного перехода // Тепловые процессы в технике. 2026. Т. 18. № 4. С. 155–165. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=188541>

Original article

## Mathematical modeling and problem statement for thermal topological optimization of additive bimetallic structures accounting for anisotropy and interfacial transition

V.P. Kiselev<sup>1</sup>, A.D. Ezhov<sup>2</sup>✉<sup>1,2</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation<sup>2</sup>ezhov@gmail.com✉

**Abstract.** The design of advanced thermal management components for energy and aerospace systems increasingly relies on additively manufactured bimetallic structures that combine structural strength with tailored heat dissipation pathways. Conventional topology optimization frameworks often simplify thermal conductivity as a scalar property and reduce the intermaterial transition to an ideal surface. This paper formulates a consistent thermal topology optimization model for bimetallic structures accounting for tensor thermal conductivity and an effective interfacial transition region. The model combines a stationary heat conduction problem, finite element discretization, Helmholtz filtering, smoothed Heaviside projection, three-phase material interpolation, KS aggregation of maximum-temperature constraints, adjoint sensitivity analysis and a weakly coupled thermoelastic check. The proposed formulation provides a computational framework for transforming a relaxed density field into a materialized geometry followed by mandatory thermal rechecking.

**Keywords:** thermal topology optimization, bimetallic structures, additive manufacturing, tensor thermal conductivity, finite element method, adjoint sensitivity analysis, interfacial transition zone, method of moving asymptotes

**For citation.** Kiselev V.P., Ezhov A.D. Mathematical modeling and problem statement for thermal topological optimization of additive bimetallic structures accounting for anisotropy and interfacial transition. *Thermal processes in engineering*. 2026, vol. 18, no. 4, pp. 155–165. (In Russ.). URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=188541>

### Введение

За последнее десятилетие металлическое аддитивное производство эволюционировало от технологии быстрого прототипирования к промышленно значимому способу получения деталей сложной геометрии с локально и пространственно варьируемыми свойствами [1, 2]. Особенно важным направлением стали биметаллические и функционально-градиентные конструкции, в которых один материал обеспечивает несущую, жаропрочную, коррозионно-стойкую или износостойкую функцию, а другой повышает теплопроводность, демпфирование теплового градиента или локальную стойкость к повреждению [2, 3]. Для пары Inconel 718–CoCrMo в литературе показана возможность получения аддитивных биметаллических структур без выраженного обра-

зования хрупких интерметаллидов, с плавным переходом состава и профилем твердости в интерфейсной зоне [3]. Для проволоочно-дугового аддитивного производства также показано, что интерфейс может быть не только плоским, но и радиальным, сохраняемым вдоль направления построения [4].

В задачах теплового проектирования ключевое значение имеет не только геометрическая свобода аддитивного производства, но и то, что технологическая история формирует направленную микроструктуру, текстуру, пористость, зоны повторного переплавления и межматериальные переходные области. Обзор Kok et al. связывает анизотропию и неоднородность металлических аддитивных деталей с направленным теплоотводом, повторным плавлением, быстрым затверде-

ванием и дефектами типа пор и непроваров [1]. Для теплофизических свойств это подтверждается прямыми измерениями: в AlSi10Mg, стареющей стали 1.2709, Cu-Ni-Si и CM247LC показана выраженная ориентационная зависимость теплопроводности или температуропроводности, связанная с текстурой, формой зерен, межзеренными границами и пористостью [5–8]. Для лазерно-наплавленных материалов системы Cu-Fe экспериментально исследованы коэффициент линейного теплового расширения и удельная теплоемкость, причем результаты зависят от бронзовой составляющей и от архитектуры чередующихся слоев [9].

Классические плотностные постановки топологической оптимизации, основанные на твердотельной изотропной интерполяции материала со штрафом (SIMP) или рациональной аппроксимации свойств материала (RAMP), хорошо разработаны для изотропных сред и теплопроводящих структур [10, 11]. Однако прямое перенесение этих постановок на аддитивные биметаллы сталкивается с несколькими ограничениями: редукцией тензорной теплопроводности к скалярному коэффициенту, заменой переходной зоны идеальной поверхностью, отсутствием явной связи между релаксированным оптимиза-

ционным полем и материализуемой геометрией, а также недостаточной термоупругой диагностикой. Модели неидеального контакта и эффективного контактного слоя показывают, что даже тонкая межфазная область может быть заменена эквивалентным контактным сопротивлением только при выполнении специальных асимптотических предпосылок [12–14]. Следовательно, при проектировании аддитивных биметаллических теплоотводящих структур интерфейс не должен рассматриваться как второстепенная деталь: он является самостоятельным объектом теплофизической параметризации и верификации.

Цель настоящей работы состоит в формулировке и численной реализации математической модели тепловой топологической оптимизации аддитивно изготавливаемых биметаллических структур с учетом анизотропии теплопроводности и эффективной межфазной области. Для достижения этой цели рассматриваются вариационная постановка стационарной теплопроводности, конечно-элементная дискретизация, трехфазная параметризация материала, регуляризация проектного поля, сопряженный анализ чувствительности и слабосвязанная термоупругая проверка.

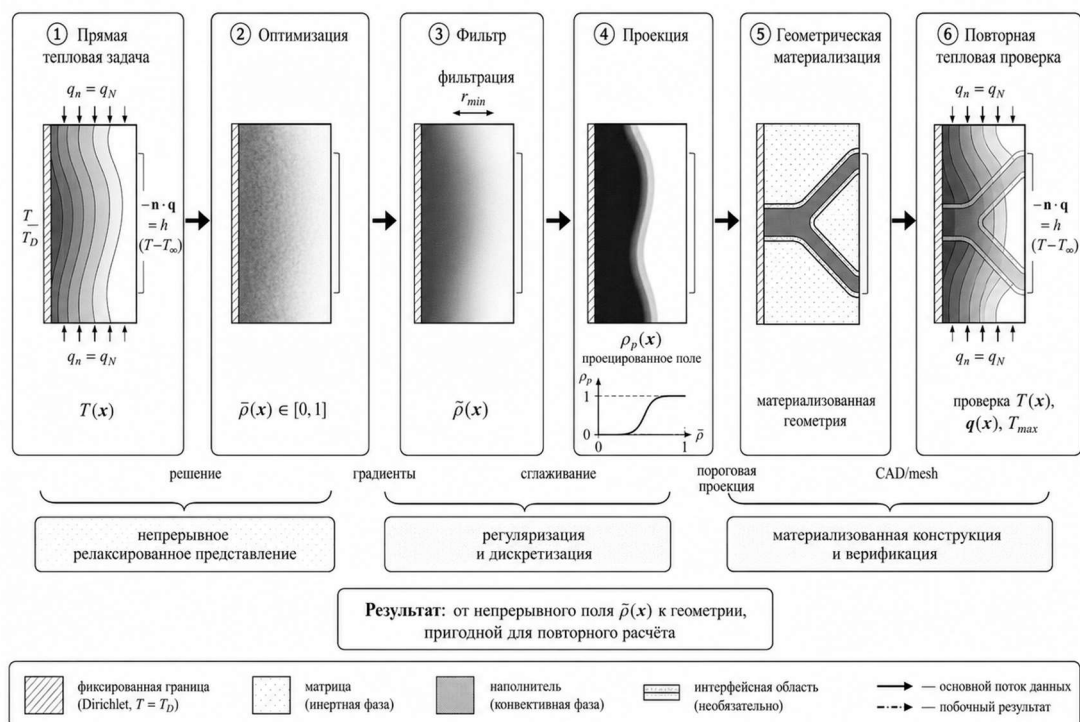


Рис. 1. Последовательность решения задачи тепловой топологической оптимизации биметаллического композита

## Материалы и методы

### Расчетная область, граница и физическая постановка

Теплофизическая задача формулируется в ограниченной связной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с липшицевой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . В расчетном домене выделяются проектируемая область  $\Omega_{des}$  и фиксированная область  $\Omega_{fix}$ , причем  $\Omega_{des} \cup \Omega_{fix} = \Omega$  и  $\Omega_{des} \cap \Omega_{fix} = \emptyset$ . Проектируемая область предназначена для пространственного распределения высокотеплопроводного наполнителя, а фиксированная область задает конструктивные элементы, источники тепла, технологические запреты или опорные зоны.

$$\Omega_{des} \cup \Omega_{fix} = \Omega, \quad \Omega_{des} \cap \Omega_{fix} = \emptyset. \quad (1)$$

Граница разбивается на непересекающиеся измеримые участки  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  и  $\Gamma_R$ , на которых задаются соответственно условия Дирихле, Неймана и Робина. Внешняя нормаль  $\mathbf{n}$  направлена наружу из области. Вектор плотности теплового потока  $\mathbf{q}$  направлен в сторону переноса энергии, а нормальная компонента  $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  считается положительной при выходе тепла из расчетной области.

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \quad (i \neq j). \quad (2)$$

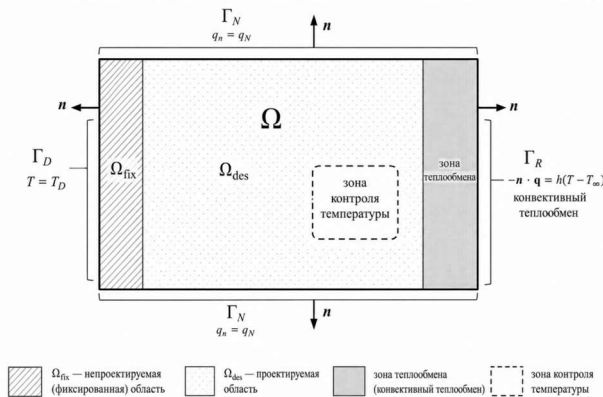


Рис. 2. Расчетная область и разбиение границы

Физически рассматривается стационарный теплоперенос в биметаллической структуре, где эффективная теплопроводность формируется пространственным распределением матричного материала, высокотеплопроводного наполнителя и переходной области. В отличие от идеализированной двухфазной схемы, межматериальный переход трактуется как расчетная область конеч-

ной толщины с эффективными свойствами. Такая трактовка согласуется с литературой по аддитивным биметаллам, где интерфейс часто имеет протяженную область смешения, диффузии, дефектности или градиента состава [2, 3, 15, 16].

### Математическая модель стационарной теплопроводности

В общем случае теплопроводность среды задается симметричным положительно определенным тензором второго ранга  $\Lambda(\mathbf{x}, T)$ . В изотропном частном случае тензор редуцируется к  $\lambda \mathbf{I}$ . Для аддитивных металлов тензорная форма особенно существенна, поскольку направленная текстура, вытянутые зерна и ориентированные дефекты могут приводить к различию теплопроводности вдоль и поперек направления построения [5–8].

$$\Lambda = \Lambda^T, \quad \mathbf{v}^T \Lambda \mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}. \quad (3)$$

Стационарная задача выводится из локального закона сохранения энергии при отсутствии конвективного переноса.

$$\nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad \text{в } \Omega. \quad (4)$$

Закон Фурье в тензорной форме имеет вид

$$\mathbf{q} = -\Lambda \nabla T \quad (5)$$

и приводит к уравнению стационарной теплопроводности с объемным источником  $\mathbf{Q}$ :

$$-\nabla \times (\Lambda \nabla T) = \mathbf{Q} \quad \text{в } \Omega. \quad (6)$$

Для изотропной среды получается частный случай

$$-\nabla \times (\lambda \nabla T) = \mathbf{Q}. \quad (7)$$

Граничные условия принимаются в стандартной форме:

$$T = T_D \quad \text{на } \Gamma_D, \quad (8)$$

$$-\mathbf{n} \times (\Lambda \nabla T) = q_N \quad \text{на } \Gamma_N, \quad (9)$$

$$-\mathbf{n} \times (\Lambda \nabla T) = h(T - T_\infty) \quad \text{на } \Gamma_R, \quad (10)$$

где  $h$  – коэффициент теплоотдачи,  $T_\infty$  – температура окружающей среды, а  $q_N > 0$  соответствует заданному выходу тепла из области. Интегральная мощность теплоотвода через участок  $\Gamma_{sink}$  определяется выражением

$$\Phi = \int_{\Gamma_{sink}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (11)$$

Если теплопроводность зависит от координат и температуры, то изотропное уравнение раскрывается как

$$-\lambda \nabla^2 T - \nabla \lambda \times \nabla T = Q, \quad (12)$$

$$\nabla \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \nabla T + \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}}. \quad (13)$$

При отсутствии явной пространственной зависимости  $\partial \lambda / \partial \mathbf{x} = 0$  оно упрощается:

$$-\lambda \nabla^2 T - \frac{d\lambda}{dT} \|\nabla T\|^2 = Q. \quad (14)$$

В тензорной постановке компонентная запись имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = Q, \quad (15)$$

что подчеркивает необходимость учитывать пространственную неоднородность и температурную зависимость компонент  $\Lambda_{ij}$  при линейаризации нелинейной задачи.

### Вариационная формулировка и конечно-элементная дискретизация

Для численной реализации вводится пространство тестовых функций, обращающихся в нуль на участке  $\Gamma_D$ :

$$V = \{v \in H^1(\Omega): v = 0 \text{ на } \Gamma_D\}. \quad (16)$$

Слабая форма задачи состоит в поиске  $T \in H^1(\Omega)$ , удовлетворяющего условию Дирихле на  $\Gamma_D$ , такого что для всех  $v \in V$  выполняется

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla v)^T \Lambda \nabla T = \\ & = \int_{\Omega} v Q + \int_{\Gamma_N} v q_N + \int_{\Gamma_R} v h \Delta T_R, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\Delta T_R = T_{\infty} - T$  задает температурный напор в условии Робина.

Конечно-элементная аппроксимация выполняется на тетраэдральной сетке  $\mathcal{T}_h = \{K_e\}_{e=1}^{N_{el}}$ . Для линейных  $P1$ -элементов температура аппроксимируется как

$$T_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{nod}} N_j(\mathbf{x}) T_j. \quad (18)$$

Локальная матрица теплопроводности элемента записывается через матрицу градиентов  $B_e$ :

$$\mathbf{A}_e = \int_{\Omega_e} B_e^T \Lambda_e B_e d\Omega. \quad (19)$$

Граничное условие Робина дает вклад в матрицу, а объемный источник и поток Неймана – в правую часть:

$$\mathbf{A}_{R,e} = \int_{\Gamma_{R,e}} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \quad (20)$$

$$\mathbf{b}_{Q,e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T Q d\Omega, \quad (21)$$

$$\mathbf{b}_{N,e} = \int_{\Gamma_{N,e}} \mathbf{N}^T q_N d\Gamma. \quad (22)$$

Сборка по элементам приводит к глобальной системе

$$\mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{b}. \quad (23)$$

Условия Дирихле накладываются точной редукцией системы без штрафных функций, что сохраняет симметрию и обеспечивает строгое выполнение заданной температуры. При температурной зависимости свойств решается нелинейная система с невязкой

$$\mathbf{R}(\mathbf{T}) = \mathbf{A}(\mathbf{T}) \mathbf{T} - \mathbf{b}(\mathbf{T}) = \mathbf{0} \quad (24)$$

и касательной матрицей

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{T}}. \quad (25)$$

### Параметризация материала и регуляризация проектного поля

В проектируемой области вводится плотностная переменная  $\rho(\mathbf{x}) \in [0,1]$ . Для подавления перемежающегося расположения материалов и задания минимального характерного размера используется фильтр Гельмгольца, широко применяемый в топологической оптимизации для регуляризации проектного поля [17].

$$-\alpha^2 \nabla^2 \tilde{\rho} + \tilde{\rho} = \rho, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (26)$$

После фильтрации применяется сглаженная проекция Хевисайда, позволяющая переводить размытое поле в более выраженное бинарное распределение материала [18]:

$$\bar{\rho} = \frac{\tanh(\beta \eta) + \tanh(\beta(\tilde{\rho} - \eta))}{\tanh(\beta \eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}, \quad (27)$$

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\tilde{\rho}} = \frac{\beta[1 - \tanh^2(\beta(\tilde{\rho} - \eta))]}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}. \quad (28)$$

Интерполяция теплофизических свойств может выполняться по SIMP- или RAMP-схеме. Для скалярной и тензорной теплопроводности SIMP-запись имеет вид

$$\lambda(\bar{\rho}) = \lambda_{\min} + \bar{\rho}^p (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}), \quad (29)$$

$$\Lambda(\bar{\rho}) = \Lambda_{\min} + \bar{\rho}^p (\Lambda_{\max} - \Lambda_{\min}). \quad (30)$$

В RAMP-подходе применяется рациональная интерполяция:

$$\lambda(\bar{\rho}) = \lambda_{\min} + \frac{\bar{\rho}}{1 + q(1 - \bar{\rho})} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}), \quad (31)$$

$$\Lambda(\bar{\rho}) = \Lambda_{\min} + \frac{\bar{\rho}}{1 + q(1 - \bar{\rho})} (\Lambda_{\max} - \Lambda_{\min}). \quad (32)$$

Для биметаллической структуры используется трехфазная параметризация, где расчетная среда представляется как суперпозиция матрицы,

интерфейсной области и наполнителя. Весовые функции удобно задавать полиномами Бернштейна:

$$w_0 = (1 - \bar{\rho})^m, \quad w_1 = m\bar{\rho}(1 - \bar{\rho})^{m-1}, \quad w_2 = \bar{\rho}^m. \quad (33)$$

$$\omega_i = \frac{w_i}{\sum_{k=0}^2 w_k}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (34)$$

$$\Lambda_{eff} = \omega_0 \Lambda_0 + \omega_1 \Lambda_{int} + \omega_2 \Lambda_2. \quad (35)$$

Здесь  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_{int}$  и  $\Lambda_2$  соответствуют матрице, эффективному контактному слою и наполнителю. Такая схема не утверждает существование отдельной термодинамической фазы в каждом реальном материале, а задает дополнительную расчетную область с эффективными свойствами. Аналогичный переход от физически тонкой межфазной области к эффективному интерфейсу обобщается в моделях теплопроводности композитов с неидеальным контактом [12–14].

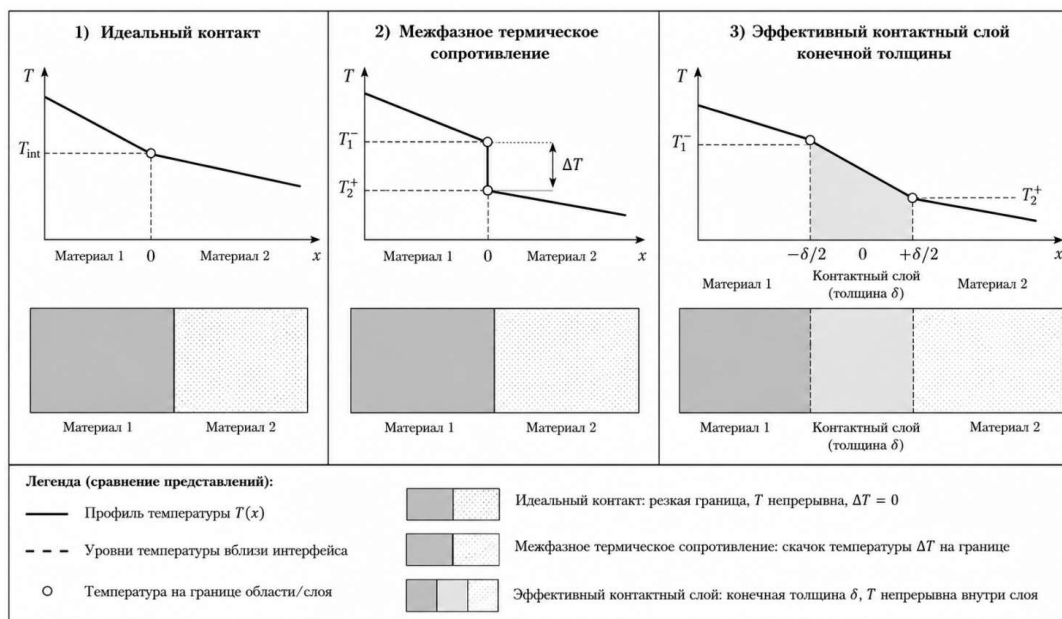


Рис. 3. Три способа представления межматериального перехода

Таблица 1. Способы представления межматериального перехода в тепловой модели

| Уровень                              | Физический смысл                                                 | Математическая запись               | Когда применим                                                                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Идеальная граница                    | Нет температурного скачка и нет собственной толщины перехода     | $T_1^- = T_2^+$                     | Совместимые материалы, малая роль интерфейса                                                      |
| Контактное термическое сопротивление | Интерфейс имеет нулевую толщину, но создает скачок температуры   | $\Delta T = R_{int} q_n$            | Тонкая зона, которую можно асимптотически свернуть в границу [12–14]                              |
| Эффективный контактный слой          | Переходная область имеет конечную толщину и эффективные свойства | Отдельная область с $\Lambda_{int}$ | Аддитивные биметаллы с выраженной зоной смешения, пористости или градиента состава [2, 3, 15, 16] |

### Целевые функционалы и ограничения оптимизации

В качестве критериев тепловой эффективности используются среднеинтегральная температура на контрольной поверхности, максимальная температура и потоковый критерий. Для области контроля  $\Gamma_{ctrl}$  соответствующие функционалы записываются как

$$J_{avg} = \frac{1}{A_{ctrl}} \int_{\Gamma_{ctrl}} T d\Gamma, \quad (36)$$

$$J_{max} = \max_{\mathbf{x} \in \Gamma_{ctrl}} T(\mathbf{x}), \quad (37)$$

$$J_{flux} = \frac{1}{\Phi} \int_{\Gamma_{ctrl}} T d\Gamma. \quad (38)$$

Объемное ограничение на количество высоко-теплопроводного материала задается не исходным, а отфильтрованным и спроецированным полем:

$$g_V(\rho) = \frac{\int_{\Omega_{des}} \bar{\rho} d\Omega}{V_{des}} - V_{max} \leq 0. \quad (39)$$

Ограничение на максимальную температуру является негладким. Для градиентной оптимизации оно заменяется гладким агрегатором Крейсельмейера–Штайнхаузера (KS-агрегатором), применяемым в задачах оптимизации при наличии максимальных ограничений [19]:

$$KS(\mathbf{T}) = \frac{1}{p} \ln \left( \sum_{i=1}^N \exp(pT_i) \right), \quad (40)$$

$$\max_i T_i \leq KS(\mathbf{T}) \leq \max_i T_i + \frac{\ln N}{p}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial J}{\partial T_i} = \frac{\exp(pT_i)}{\sum_{j=1}^N \exp(pT_j)}. \quad (42)$$

После вычисления градиентов задача может решаться методом подвижных асимптот, предложенным Svanberg и широко применяемым в плотностной топологической оптимизации [20].

### Сопряженный анализ чувствительности

Дискретная прямая задача записывается в виде  $\mathbf{R}(\mathbf{T}, \rho) = \mathbf{0}$ . Полная производная целевого функционала по проектной переменной имеет вид

$$\frac{dJ}{d\rho} = \frac{\partial J}{\partial \rho} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{T}} \frac{d\mathbf{T}}{d\rho}. \quad (43)$$

Дифференцирование уравнения состояния дает

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} \frac{d\mathbf{T}}{d\rho} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho} = \mathbf{0}. \quad (44)$$

Исключение  $d\mathbf{T}/d\rho$  напрямую потребовало бы решения системы для каждой проектной переменной. Сопряженный метод заменяет это одной сопряженной задачей:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = - \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{T}} \right)^T. \quad (45)$$

После этого градиент цели записывается как

$$\frac{dJ}{d\rho} = \frac{\partial J}{\partial \rho} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho}. \quad (46)$$

Полная цепочка дифференцирования свойств по исходному проектному полю учитывает фильтр и проекцию:

$$\frac{d\Lambda}{d\rho} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{d\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{\rho}}{d\rho}. \quad (47)$$

### Термоупругая проверка работоспособности

После решения тепловой задачи температурное поле может быть передано в слабосвязанную линейную термоупругую постановку. Тензор малых деформаций и тепловая деформация записываются как

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \int_{T_0}^T \alpha \tau d\tau \mathbf{I}. \quad (49)$$

Для изотропной линейно-упругой среды напряжения имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_{Lame} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} - (3\lambda_{Lame} + 2\mu) \boldsymbol{\varepsilon}^{th}, \quad (50)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda_{Lame} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (51)$$

Такая проверка не заменяет полноценную термомеханическую оптимизацию, но позволяет исключать решения, которые эффективны по температуре и одновременно недопустимы по термическим напряжениям. Для биметаллов это особенно существенно, поскольку различие коэффициентов линейного теплового расширения может создавать локальные напряжения в переходной зоне [3, 4, 9].

### Результаты

Аналитическая и численная проверка модели выполнена на последовательности канонических задач, каждая из которых добавляет один физический или вычислительный механизм. В линейной изотропной постановке с условиями Дирихле отклонение температуры имеет порядок машинной погрешности, а тепловой баланс замыкается до  $10^{-15}$  Вт. При введении объемного источника воспроизводится параболический профиль температуры с отклонением менее 0,1 %. Условия Неймана и Робина проверяются по интегральному тепловому балансу и асимптотике охлаждения.

Задача с кусочно-однородным интерфейсом двух доменов подтверждает непрерывность температуры и скачок градиента при сохранении постоянного теплового потока. Тензорная теплопроводность с недиагональными компонентами воспроизводится с отклонением до 1,2 % по компонентам вектора плотности потока. Нелинейная зависимость  $\lambda(T)$  решается методом Ньютона, а восстановленный тепловой поток совпадает с аналитическим интегралом в пределах заданной сеточной точности.

Таблица 2. Матрица верификации расчетного контура

| Задача                       | Проверяемый механизм                   | Эталон / критерий                                                                   |
|------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Стержень с условиями Дирихле | Линейная теплопроводность              | Аналитическое решение, баланс энергии                                               |
| Объемный источник            | Правая часть метода конечных элементов | Параболический профиль температуры                                                  |
| Условия Неймана и Робина     | Граничные интегралы                    | Интегральный поток через границу                                                    |
| Двухдоменная задача          | Межфазная непрерывность потока         | Непрерывность $T$ , скачок $\nabla T$                                               |
| Тензорная теплопроводность   | Анизотропный закон Фурье               | Направление и модуль $\mathbf{q}$                                                   |
| Нелинейная $\lambda(T)$      | Касательная матрица                    | Сходимость Ньютона и тепловой баланс                                                |
| Материализация геометрии     | Переход поле $\rho$ – геометрия        | Повторная тепловая проверка восстановленной геометрии эффективного контактного слоя |

В оптимизационных расчетах KS-агрегатор с параметром  $p \in [16; 64]$  обеспечивает гладкую аппроксимацию максимума температуры. Много-стартовая стратегия снижает риск выбора локаль-

но неустойчивой топологии. Трехфазная интерполяция предотвращает прямое образование «серых» зон между матрицей и наполнителем, поскольку область промежуточных значений проектной переменной получает физический смысл эффективного межфазного перехода.

### Обсуждение

Полученные результаты показывают, что учет тензорной теплопроводности и явное выделение межфазной области принципиально важны для расчетного проектирования аддитивных биметаллов. В литературе по аддитивным биметаллам переходная зона обычно анализируется через микроструктуру, распределение элементов, твердость и механические испытания [2, 3, 15, 16]. В задачах теплопроводности эта зона может входить в модель тремя способами: как идеальная граница, как поверхность с контактным термическим сопротивлением или как эффективный контактный слой с конечной толщиной. Работы Nan et al., Hasselman and Johnson и Hashin показывают, что эти способы неэквивалентны и дают разные предельные модели эффективной теплопроводности [12–14].

Для тепловой топологической оптимизации важна не только физическая корректность прямой задачи, но и устойчивость вычислительного контура. Фильтр Гельмгольца и проекция Хевисайда задают минимальный масштаб и уменьшают численную сеточную зависимость [17, 18]. KS-агрегатор заменяет негладкий максимум температуры гладкой функцией, но требует аккуратного выбора параметра  $p$ : слишком малые значения размывают экстремум, а слишком большие ухудшают обусловленность сопряженной системы [19]. MMA обеспечивает практическую схему решения ограниченной нелинейной задачи с большим числом проектных переменных [20].

Ограничения разработанной постановки связаны со стационарностью теплопереноса, слабой связью с термоупругостью и феноменологическим заданием свойств интерфейсной области. Переход к нестационарным режимам потребует включения теплоемкости и температуропроводности в оптимизационный функционал. Полностью связанная термоупругая задача должна учитывать изменение контактного состояния, остаточных напряжений и возможное повреждение интерфейса. Кроме того, свойства эффективного кон-



тактного слоя должны калиброваться по экспериментальным данным: для ряда аддитивных биметаллов прямых измерений теплофизических свойств именно переходной зоны пока недостаточно, поэтому часть параметров приходится получать через обратную идентификацию или через гомогенизацию.

### Заключение

Сформулирована математическая модель тепловой топологической оптимизации аддитивно изготавливаемых биметаллических структур с учетом тензорной теплопроводности и эффективного межфазного перехода. Модель объединяет стационарную теплопроводность, конечно-элементную дискретизацию, трехфазную параметризацию материала, фильтрацию Гельмгольца, сглаженную проекцию Хевисайда, KS-агрегацию температурного ограничения и сопряженное вычисление чувствительностей.

Показано, что выделение интерфейсной области позволяет связать наблюдаемую переходную зону аддитивного биметалла с расчетным эффективным контактным слоем, свойства которого могут калиброваться по экспериментальным данным или через обратную идентификацию. Такой подход расширяет стандартную двухфазную SIMP-постановку и делает ее пригодной для случаев, когда тепловое сопротивление, пористость или градиент состава в межматериальной зоне существенно влияют на теплоперенос.

Разработанная схема верификации охватывает линейную и нелинейную теплопроводность, граничные условия, тензорную анизотропию, межфазную непрерывность потока, работу агрегатора ограничений и материализацию геометрии. Повторная тепловая проверка материализованной геометрии является обязательным этапом, поскольку релаксированное оптимизационное поле и реальная геометрия наполнителя могут иметь различный тепловой отклик.

### Список источников

1. Kok Y., Tan X.P., Wang P. et al. Anisotropy and heterogeneity of microstructure and mechanical properties in metal additive manufacturing: A critical review // *Materials & Design*. 2018. Vol. 139. pp. 565–586. DOI: 10.1016/j.matdes.2017.11.021
2. Bandyopadhyay A., Zhang Y., Oniuke B. Additive manufacturing of bimetallic structures // *Virtual and Physical Prototyping*. 2022. Vol. 17. № 2. pp. 256–294. DOI: 10.1080/17452759.2022.2040738
3. Groden C., Champagne V., Bose S. et al. Inconel 718-CoCrMo bimetallic structures through directed energy deposition-based additive manufacturing // *Materials Science in Additive Manufacturing*. 2022. Vol. 1. № 3. DOI: 10.18063/msam.v1i3.18
4. Squires L., Roberts E., Bandyopadhyay A. Radial bimetallic structures via wire arc directed energy deposition-based additive manufacturing // *Nature Communications*. 2023. Vol. 14. DOI: 10.1038/s41467-023-39230-w
5. Strumza E., Yeheskel O., Hayun S. The effect of texture on the anisotropy of thermophysical properties of additively manufactured AlSi10Mg // *Additive Manufacturing*. 2019. Vol. 29. DOI: 10.1016/j.addma.2019.06.013
6. Jarfors A.E.W., Matsushita T., Siafakas D. et al. On the nature of the anisotropy of Maraging steel (1.2709) in additive manufacturing through powder bed laser-based fusion processing // *Materials & Design*. 2021. Vol. 204. DOI: 10.1016/j.matdes.2021.109608
7. Zhou Y., Zeng X., Yang Z. et al. Effect of crystallographic textures on thermal anisotropy of selective laser melted Cu-2.4Ni-0.7Si alloy // *Journal of Alloys and Compounds*. 2018. Vol. 743. pp. 258–261. DOI: 10.1016/j.jallcom.2018.01.335
8. Kim K., Koo J., Park E. et al. Anisotropic Thermal Conductivity of Nickel-Based Superalloy CM247LC Fabricated via Selective Laser Melting // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11. № 11. DOI: 10.3390/app11114843
9. Makarenko K.I., Dubinin O.N., Shishkovsky I.V. Linear Thermal Expansion and Specific Heat Capacity of Cu-Fe System Laser-Deposited Materials // *Metals*. 2023. Vol. 13. № 3. DOI: 10.3390/met13030451
10. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-05086-6
11. Gersborg-Hansen A., Bendsoe M.P., Sigmund O. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2006. Vol. 31. pp. 251–259. DOI: 10.1007/s00158-005-0584-3
12. Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R. et al. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance // *Journal of Applied Physics*. 1997. Vol. 81. № 10. pp. 6692–6699. DOI: 10.1063/1.365209
13. Hasselman D.P.H., Johnson L.F. Effective Thermal Conductivity of Composites with Interfacial Thermal Barrier Resistance // *Journal of Composite Materials*. 1987. Vol. 21. № 6. pp. 508–515. DOI: 10.1177/002199838702100602
14. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in conduction // *Journal of Applied Physics*. 2001. Vol. 89. № 4. pp. 2261–2267. DOI: 10.1063/1.1337936
15. Zhang X., Li L., Liou F. Additive manufacturing of stainless steel-copper functionally graded materials via Inconel 718 interlayer // *Journal of Materials Research and Technology*. 2021. Vol. 15. pp. 2045–2058. DOI: 10.1016/j.jmrt.2021.09.027

16. Bai Y., Zhang J., Zhao C. et al. Dual interfacial characterization and property in multi-material selective laser melting of 316L stainless steel and C52400 copper alloy // *Materials Characterization*. 2020. Vol. 167. DOI: 10.1016/j.matchar.2020.110489
17. Lazarov B.S., Sigmund O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2011. Vol. 86. № 6. pp. 765–781. DOI: 10.1002/nme.3072
18. Guest J.K., Prevost J.H., Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004. Vol. 61. № 2. pp. 238–254. DOI: 10.1002/nme.1064
19. Kreisselmeier G., Steinhauser R. Systematic control design by optimizing a vector performance index // *International Federation of Active Controls Symposium on Computer-Aided Design of Control Systems*. Zurich, 1979. pp. 113–117.
20. Svanberg K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987. Vol. 24. № 2. pp. 359–373. DOI: 10.1002/nme.1620240207
21. Onuik B., Heer B., Bandyopadhyay A. Additive manufacturing of Inconel 718-copper alloy bimetallic structure using laser engineered net shaping (LENS) // *Additive Manufacturing*. 2018. Vol. 21. pp. 133–140. DOI: 10.1016/j.addma.2018.02.007
22. Yilmaz O., Celik H. Electrical and thermal properties of the interface at diffusion-bonded and soldered 304 stainless steel and copper bimetal // *Journal of Materials Processing Technology*. 2003. Vol. 141. № 1. pp. 67–76. DOI: 10.1016/S0924-0136(03)00029-3
23. Григорьянц А.Г., Фунтиков В.А., Мисюров А.И. и др. Формирование биметаллических структур методом коаксиального лазерного плавления // *Научные технологии в машиностроении*. 2019. № 3(93). С. 32–38. DOI: 10.30987/article\_5c7434f381d6e0.50316394
24. ISO/ASTM 52900:2021. Additive manufacturing - General principles - Fundamentals and vocabulary. Geneva: International Organization for Standardization, 2021.
4. Squires L, Roberts E, Bandyopadhyay A. Radial bimetallic structures via wire arc directed energy deposition-based additive manufacturing. *Nature Communications*. 2023;14. DOI: 10.1038/s41467-023-39230-w
5. Strumza E, Yeheskel O, Hayun S. The effect of texture on the anisotropy of thermophysical properties of additively manufactured AlSi10Mg // *Additive Manufacturing*. 2019;29. DOI: 10.1016/j.addma.2019.06.013
6. Jarfors AEW, Matsushita T, Siafakas D et al. On the nature of the anisotropy of Maraging steel (1.2709) in additive manufacturing through powder bed laser-based fusion processing. *Materials & Design*. 2021;204. DOI: 10.1016/j.matdes.2021.109608
7. Zhou Y, Zeng X, Yang Z et al. Effect of crystallographic textures on thermal anisotropy of selective laser melted Cu-2.4Ni-0.7Si alloy. *Journal of Alloys and Compounds*. 2018;743:258–261. DOI: 10.1016/j.jallcom.2018.01.335
8. Kim K, Koo J, Park E et al. Anisotropic Thermal Conductivity of Nickel-Based Superalloy CM247LC Fabricated via Selective Laser Melting. *Applied Sciences*. 2021; 11(11). DOI: 10.3390/app11114843
9. Makarenko KI, Dubinin ON, Shishkovsky IV. Linear Thermal Expansion and Specific Heat Capacity of Cu-Fe System Laser-Deposited Materials. *Metals*. 2023;13(3). DOI: 10.3390/met13030451
10. Bendsoe MP, Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Berlin; Heidelberg: Springer; 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-05086-6
11. Gersborg-Hansen A, Bendsoe MP, Sigmund O. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2006;31:251–259. DOI: 10.1007/s00158-005-0584-3
12. Nan C-W, Birringer R, Clarke DR et al. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance. *Journal of Applied Physics*. 1997; 81(10):6692–6699. DOI: 10.1063/1.365209
13. Hasselman DPH, Johnson LF. Effective Thermal Conductivity of Composites with Interfacial Thermal Barrier Resistance. *Journal of Composite Materials*. 1987;21(6): 508–515. DOI: 10.1177/002199838702100602
14. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in conduction. *Journal of Applied Physics*. 2001;89(4):2261–2267. DOI: 10.1063/1.1337936
15. Zhang X, Li L, Liou F. Additive manufacturing of stainless steel-copper functionally graded materials via Inconel 718 interlayer. *Journal of Materials Research and Technology*. 2021;15:2045–2058. DOI: 10.1016/j.jmrt.2021.09.027
16. Bai Y, Zhang J, Zhao C et al. Dual interfacial characterization and property in multi-material selective laser melting of 316L stainless steel and C52400 copper alloy. *Materials Characterization*. 2020;167. DOI: 10.1016/j.matchar.2020.110489
17. Lazarov BS, Sigmund O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2011;86(6):765–781. DOI: 10.1002/nme.3072

### References

1. Kok Y, Tan XP, Wang P et al. Anisotropy and heterogeneity of microstructure and mechanical properties in metal additive manufacturing: A critical review. *Materials & Design*. 2018;139:565–586. DOI: 10.1016/j.matdes.2017.11.021
2. Bandyopadhyay A, Zhang Y, Onuik B. Additive manufacturing of bimetallic structures. *Virtual and Physical Prototyping*. 2022;17(2):256–294. DOI: 10.1080/17452759.2022.2040738
3. Groden C, Champagne V, Bose S et al. Inconel 718-CoCrMo bimetallic structures through directed energy deposition-based additive manufacturing. *Materials Science in Additive Manufacturing*. 2022;1(3). DOI: 10.18063/msam.v1i3.18

18. Guest JK, Prevost JH, Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004;61(2): 238–254. DOI: 10.1002/nme.1064
19. Kreisselmeier G, Steinhauser R. *Systematic control design by optimizing a vector performance index*. International Federation of Active Controls Symposium on Computer-Aided Design of Control Systems. Zurich; 1979. pp. 113–117.
20. Svanberg K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987;24(2): 359–373. DOI: 10.1002/nme.1620240207
21. Oniuke B, Heer B, Bandyopadhyay A. Additive manufacturing of Inconel 718-copper alloy bimetallic structure using laser engineered net shaping (LENS). *Additive Manufacturing*. 2018;21:133–140. DOI: 10.1016/j.addma.2018.02.007
22. Yilmaz O, Celik H. Electrical and thermal properties of the interface at diffusion-bonded and soldered 304 stainless steel and copper bimetal. *Journal of Materials Processing Technology*. 2003;141(1):67–76. DOI: 10.1016/S0924-0136(03)00029-3
23. Grigor'yants AG, Funtikov VA, Misyurov AI et al. Formation of bimetallic structures by coaxial laser melting. *Naukoemkie tekhnologii v mashinostroenii*. 2019;3(93): 32–38. (In Russ.). DOI: 10.30987/article\_5c7434f381d6e0.50316394
24. ISO/ASTM 52900:2021. *Additive manufacturing – General principles – Fundamentals and vocabulary*. Geneva: International Organization for Standardization. 2021.