

На правах рукописи



Комиссарова Татьяна Николаевна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА  
ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ» на кафедре динамики и прочности машин им. В.В. Болотина

Научный руководитель: - кандидат технических наук, профессор  
**Хроматов Василий Ефимович**

Официальные оппоненты: - **Сорокин Фёдор Дмитриевич**  
Доктор технических наук, профессор  
кафедры "Прикладная механика" (РК-5)  
Федерального государственного бюджетного  
общеобразовательного учреждения высшего  
профессионального образования  
«Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана (МГТУ им.  
Н.Э. Баумана)», г. Москва  
- **Попов Александр Леонидович**  
Доктор физико-математических наук,  
профессор, ведущий научный сотрудник,  
Институт проблем механики им. А. Ю.  
Ишлинского РАН

Ведущая организация: - **Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Научно-исследовательский институт механики)**

Защита состоится «11» мая 2016 г. в 14-00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) – МАИ по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3. Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) – МАИ и на сайте [http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=64092](http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=64092)

Автореферат разослан \_\_\_\_\_ 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Федотенков Г.В.

## Общая характеристика работы

**Актуальность проблемы.** Проектирование электрических аппаратов и машин, электротехнического оборудования предполагает решение комплексных задач, относящихся как к области наук об электричестве и магнетизме, так и к области механики деформируемого твердого тела. Создание оптимальных конструкций для многих объектов электротехнического и энергетического машиностроения связано с вопросами широкого использования конструктивных элементов типа стержней, пластин и оболочек, на упругие колебания которых существенное влияние оказывают магнитные поля. Данная картина взаимодействия упругих и электромагнитных явлений довольно сложна и ее можно рассматривать на основе анализа совместной системы уравнений движения упругой среды и уравнений электромагнитного поля.

Задачам колебаний тонкостенных элементов конструкций в магнитных полях посвящено достаточно большое количество публикаций. На особенности поведения упругих систем в магнитных полях указывалось еще в 1964 г. в работах отечественной школы механиков Я.Г. Пановко и И.И.Губановой и нашло подтверждение в экспериментальных исследованиях, опубликованных в трудах американского общества инженеров-механиков в 1969 г. Ф. С. Муна, Пао И-синь. Установлено хорошее соответствие между теоретическими и экспериментально полученными значениями частот колебаний стержней в поперечном однородном магнитном поле. Достаточно простых и надежных теоретических моделей, описывающих колебания пластин и оболочек в магнитном поле в то время предложено не было. Первыми работами посвященными исследованию магнитоупругих колебаний пластин и оболочек были монографии С.А. Амбрацумяна, Г.Е. Багдасаряна, М.В. Белубекяна.

Применение асимптотического метода В.В. Болотина (АМБ) позволяет рассмотреть задачи колебаний пластин с различными краевыми условиями, распределение собственных частот колебаний пологих оболочек, выполненных как из немагнитных, так и из ферромагнитных материалов в магнитных полях.

**Целью работы** является изучение колебаний тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из ферромагнитных материалов, в магнитном поле:

расчет спектров собственных частот колебаний прямоугольных ферромагнитных пластин с различными условиями закрепления краев;

исследование влияния индукции поперечного и продольного магнитного

поля на значения собственных частот и их распределение;

исследование динамической устойчивости плоской формы равновесия ферромагнитной пластины, находящейся в поперечном магнитном поле с гармонически изменяющейся индукцией внешнего магнитного поля, исследование устойчивости сжатой переменными силами пластины в магнитном поле;

исследование спектров колебаний и распределение собственных частот круговых цилиндрических ферромагнитных оболочек в магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током, протекающим по оси цилиндра.

**Методы исследования** определились спецификой изучаемых объектов. В работе использовались методы механики деформируемого твердого тела, аналитических вычислений и математического моделирования, современные математические пакеты и программные средства. В постановке задачи использовались уравнения теории упругости, теории пластин и оболочек, уравнения Максвелла. Для решения задач колебаний пластин использовался асимптотический метод В. В. Болотина. Для проведения расчетов был разработан специальный комплекс программ.

**Научная новизна.** В работе впервые получены аналитические решения для расчета частот колебаний ферромагнитных пластин с различной комбинацией краевых условий. Проведен численный анализ спектров колебаний прямоугольных ферромагнитных пластин с различными условиями закрепления краев, исследовано влияние поперечного и продольного магнитного поля на спектры частот, условия потери статической устойчивости пластин в магнитном поле. Получены соотношения для частот и асимптотической плотности частот собственных колебаний в магнитном поле круговых цилиндрических оболочек, соотношения для параметров внешнего магнитного поля, приводящего к потере статической устойчивости оболочки. Обнаружены новые эффекты, которые оказывает магнитное поле, на распределение собственных частот.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается корректной постановкой задач, применением прикладных математических методов, современных программных средств и сравнением полученных теоретических результатов с экспериментальными исследованиями, опубликованных в трудах Ф. С. Муна, Пао И-синь, Ванцяна А. А., Сафаряна Ю. С. полученными другими исследователями и приведенными в научных публикациях.

***Основные положения, выносимые на защиту.***

Получены аналитические решения для расчета частот колебаний ферромагнитных пластин с различной комбинацией краевых условий;

Приведены результаты численного анализа спектров колебаний прямоугольных ферромагнитных пластин с различными условиями закрепления краев;

Исследование динамической устойчивости плоской формы равновесия ферромагнитной пластины, находящейся в поперечном магнитном поле;

Получены соотношения для спектров и плотности частот собственных колебаний круговых цилиндрических оболочек в магнитном поле и проведен численный анализ.

***Практическая значимость результатов работы.*** Полученные в работе результаты позволяют уточнить существующее представление о характере поведения тонкостенных элементов конструкций в продольном и поперечном магнитном поле. Разработанная в диссертации методика расчета спектров частот может быть использован при проектировании и расчете динамических характеристик тонкостенных элементов конструкций в магнитных полях, при проектировании магнитоуправляемых элементов электрических аппаратов и приборов.

***Апробация работы и публикации.*** Материалы диссертационной работы Т. Н. Комиссаровой (Голубевой) докладывались и обсуждались:

- на третьей международной научно-практической конференции, «Магнитоуправляемые контакты (герконы) и изделия на их основе». (Рязань: ОАО «РЗМКП», 2011);
- на международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. (Ярополец, 2011-2014);
- на международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века». (г. Севастополь, 2011);
- на международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиотехника, электротехника и энергетика» (Москва, МЭИ, 2012);
- на XIV международной конференции «Электромеханика, электротехнологии, электротехнические материалы и компоненты» (МКЭЭЭ-2006). (Алушта, 2012);

- на IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2012 г.);
- на XXI международной научно-технической конференции «Информационные средства и технологии». (Москва, 2013);
- на 11 студенческой научной конференции “Future Information technology solutions”. (Bedlewo, 2013);
- на XXVI международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов «МИКМУС». (Москва, 2014);

По теме диссертации опубликовано 16 работ. Из них 5 статей опубликованы изданиях рекомендованных ВАК.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, сводки результатов и выводов, списка литературы и приложений. Объем работы – 110 страниц, включая 32 рисунка, 6 таблиц. Список литературы включает 89 наименований.

### **Содержание работы**

**Во введении** сформулирована общая характеристика круга задач, отраженных в диссертации, и обосновывается их актуальность. Поставлена цель диссертационной работы. Проводится обзор литературных источников, посвященных вопросам поведения тонкостенных элементов конструкций в магнитных полях, в той или иной степени связанных с предметом настоящих исследований, приведено краткое описание результатов работ представителей школ магнитоупругости: С. А. Амбрацумяна, Г. Е. Багдасаряна, М. В. Белубекяна, С. О. Саркисяна, Я.Г. Пановко, Д. В. Тарлаковского и других.

**В первой главе** приводятся основные гипотезы и уравнения колебаний пластин и оболочек в магнитном поле, изложенные в монографиях С.А.Амбарцумяна, Г.Е. Багдасаряна, основные положения асимптотического метода В. В Болотина.

**Вторая глава** посвящена исследованию колебаний ферромагнитных прямоугольных пластин во внешнем поперечном магнитном поле с заданным вектором магнитной индукции  $\vec{B}(0,0,B_3)$ , перпендикулярным плоскости пластины. Пластина отнесена к триортогональной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  так, что срединная плоскость недеформированной пластины совпадает с координатной плоскостью  $Ox_1x_2$ . Уравнение колебаний для прогибов  $w(x_1, x_2, t)$  пластины толщиной  $2h$  имеет вид

$$D\Delta\Delta w + N\Delta w - C \frac{\partial \Delta w}{\partial t} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, N = \frac{2\chi h B_3^2}{\mu_0 \mu_r} \left(1 + \frac{\chi(\chi+2) \operatorname{sh}(kh)}{\mu_r \delta_1 kh} - \frac{\chi \operatorname{ch}(kh)}{\mu_r \delta_1}\right), C = \frac{2h^3 \sigma B_3^2}{3} \left(1 + \frac{\chi}{\mu_r} + \frac{\chi}{(1+\mu_r kh)}\right) \quad (2)$$

Параметры материала  $\sigma$  - коэффициент электропроводности пластины,  $\chi = (\mu_r - 1)$  - магнитная восприимчивость,  $\mu_r$  - относительная магнитная проницаемость материала пластины,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная постоянная;

С использованием АМБ получено выражение для собственных частот магнитоупругих колебаний пластины

$$\omega = \left[ \frac{1}{2\rho h} (D(k_1^2 + k_2^2)^2 - N(k_1^2 + k_2^2)) - \frac{C^2}{16\rho^2 h^2} (k_1^2 + k_2^2)^2 \right]^{1/2} + i \frac{C}{4\rho h} (k_1^2 + k_2^2). \quad (3)$$

Для диэлектрической ферромагнитной пластины демпфирующее влияние магнитного поля исчезает ( $\sigma \rightarrow 0$ ) и уравнение поперечных колебаний представляется в виде

$$D\Delta\Delta w + N\Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

Частота колебаний диэлектрической пластины определяется соотношением:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2\rho h} (D(k_1^2 + k_2^2)^2 - N(k_1^2 + k_2^2))}. \quad (5)$$

При анализе спектров частот колебаний пластин, что поперечное магнитное поле понижает собственные частоты колебаний конечно проводящих и диэлектрических пластин, изготовленных из ферромагнитных материалов. Значения частот диэлектрических пластин (штриховая кривая рис.1) и конечно проводящих (сплошная кривая рис.1) весьма близки, что соответствует опубликованным в литературе результатам экспериментальных исследований Ф. С. Муна.

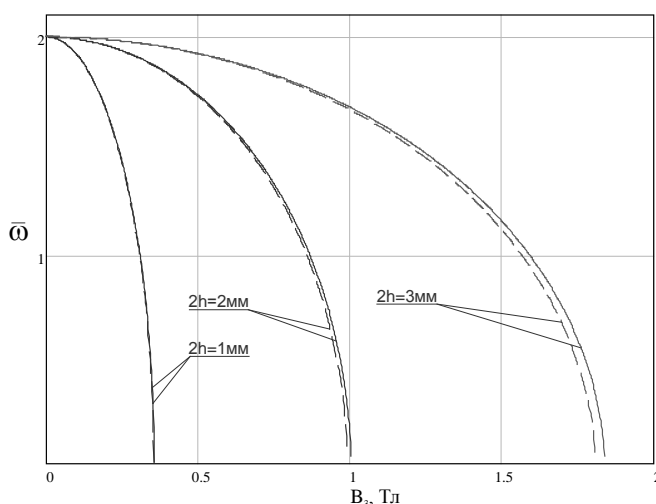


Рис. 1 Зависимость частоты колебаний железной пластины от индукции магнитного поля

Поперечное магнитное поле оказывает эффект сжимающих усилий в срединной плоскости пластины. При определенных значениях индукции магнитного поля пластина теряет устойчивость (при  $\omega = 0$ ).

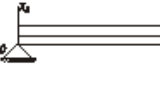
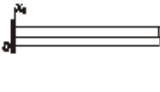
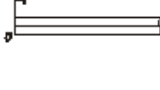
Для технически реальных значений индукции внешнего магнитного поля различия в значениях собственных частот колебаний пластин, вычисленных по модели диэлектрической пластины и конечно проводящей пластины, не существенны, и поэтому для расчета собственных частот колебаний пластин с различными краевыми условиями оказывается возможным применение асимптотического метода В. В. Болотина, основываясь на уравнениях (4) для диэлектрических пластин и соотношении (5) для частот.

Для определения волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$  для пластин с различными типами закрепления краев согласно АМБ следует воспользоваться общей процедурой условий стыковки решений

$$\begin{cases} k_1 \cdot a_1 = \arctg u_{11}(k_1, k_2) + \arctg u_{12}(k_1, k_2) + m_1 \cdot \pi, \\ k_2 \cdot a_2 = \arctg u_{21}(k_1, k_2) + \arctg u_{22}(k_1, k_2) + m_2 \cdot \pi. \end{cases} \quad (6)$$

Соответствующие функции  $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$  и коэффициенты  $C_2/C_1$ , входящие в порождающее решение, для основных типов закрепления краев пластин выведены в работе и приведены в таблице 1.

Таблица 1. Функции  $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$  и отношения коэффициентов  $C_2/C_1$  при различных граничных условиях на краю  $x_1=0$

Тип закрепления	Граничные условия	$u_{11}(k_1, k_2)$	$C_2/C_1$	Примечание
	$x_1=0; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$	0	0	-
	$x_1=0; \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$	$\frac{k_1}{\gamma_1}$	$\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + \gamma_1^2}}$	$\gamma_1 = \sqrt{k_1^2 + 2k_2^2 - N/D},$ $N = \frac{2\chi h B_z^2}{\mu_0 \mu_c} (1 + \frac{\chi(\chi+2) \text{sh}(kh)}{\mu_c \delta_1 kh}) - \frac{\chi \text{ch}(kh)}{\mu_c \delta_1}$
	$x_1=0; \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0 \end{cases}$	$\frac{k_1 (k_1^2 + (2-\nu)k_2^2)(\gamma_1^2 - \nu k_2^2)}{\gamma_1 [\gamma_1^2 - (2-\nu)k_2^2] (k_1^2 + \nu k_2^2)}$	$\frac{(k_1^2 + \nu k_2^2)}{[\gamma_1^2 - \nu k_2^2]} \frac{u_{11}(k_1, k_2)}{\sqrt{1 + u_{11}^2(k_1, k_2)}}$	$\gamma_1 = \sqrt{k_1^2 + 2k_2^2 - N/D},$ $N = \frac{2\chi h B_z^2}{\mu_0 \mu_c} (1 + \frac{\chi(\chi+2) \text{sh}(kh)}{\mu_c \delta_1 kh}) - \frac{\chi \text{ch}(kh)}{\mu_c \delta_1}$

На основе полученных АМБ соотношений для частот и форм колебаний пластин можно построить формы колебаний. Разработанная методика расчета



спектров частот магнитоупругих колебаний ферромагнитных прямоугольных пластин при различных условиях закрепления краев позволяет производить проектирование тонкостенных элементов конструкций электротехнического оборудования.

**Третья глава** посвящена исследованию колебаний прямоугольных ферромагнитных пластин в продольном магнитном поле с заданным вектором магнитной индукции  $\vec{B}(B_1, 0, 0)$ . На основе предпосылок, предложенных в работах С. А. Амбарцумяна и Г. Е. Багдасаряна уравнение колебаний пластины относительно функции прогибов  $w(x_1, x_2, t)$  имеет вид

$$\left[1 + \frac{\mu_0 \sigma h}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right] (D \Delta \Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) + N_* \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - C_* \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} = 0, \quad (7)$$

где 
$$N_* = \frac{2\chi h B_1^2}{\mu_0 \mu_r}, \quad C_* = \frac{2h\sigma}{k^2} B_1^2 \quad (8)$$

С использованием АМБ получено уравнение для нахождения собственных частот магнитоупругих колебаний ферромагнитной пластины в продольном магнитном поле:

$$\left[1 + \frac{\mu_0 \sigma h}{k} i\omega\right] (D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h \omega^2) - N_* k_1^2 + C_* i\omega k_1^2 = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения производим с помощью математического пакета. В результате получаем комплексные значения, действительная часть которых – собственные частоты колебаний пластин, мнимая часть – коэффициент демпфирования упругих колебаний.

Для диэлектрической ферромагнитной пластины ( $\sigma \rightarrow 0$ ) демпфирующее влияние магнитного поля исчезает и уравнение поперечных колебаний представляется в виде:

$$D \Delta \Delta w + N_* \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

Частота упругих колебаний диэлектрической пластины определяется по формуле:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{2\rho h} (D(k_1^2 + k_2^2)^2 - N_* k_1^2)}. \quad (11)$$

Как и в случае поперечного магнитного поля, для определения волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$  для пластин с различными типами закрепления краев согласно АМБ будем пользоваться общей процедурой условий стыковки решений. В случае

продольного магнитного поля соответствующие функции  $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$  и отношения коэффициентов  $C_2/C_1$  порождающего решения для основных типов закрепления краев пластин, также приведены в таблице 1, где  $N$  определяется по формуле (8).

Построив систему трансцендентных уравнений для определения волновых чисел, можно произвести расчет спектров частот колебаний пластин в продольном магнитном поле с любыми краевыми условиями.

Продольное магнитное поле понижает собственные частоты колебаний ферромагнитных пластин, изготовленных из диэлектрических материалов (рис. 2 – ферритовая пластина).

Значения частот диэлектрических пластин и конечно проводящих

весьма близки (штриховая кривая – модель идеального диэлектрического материала; сплошная кривая - модель конечно проводящего ферромагнетика). Будем в дальнейшем применять модель диэлектрического материала. При определенных значениях индукции магнитного поля пластина теряет устойчивость.

На основе полученных АМБ соотношений для частот и форм колебаний пластин можно построить формы колебаний. Разработанная методика расчета спектров частот магнитоупругих колебаний ферромагнитных прямоугольных пластин при различных условиях закрепления краев позволяет производить проектирование тонкостенных элементов конструкций электротехнического оборудования.

**В четвертой главе** проводится исследование динамической устойчивости ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле.

Рассмотрим упругую шарнирно-опертую по краям  $x_1 = 0, l$  прямоугольную пластину толщиной  $2h$  и свободную по смежным краям, изготовленную из упругого магнитомягкого диэлектрического ферромагнитного материала, которая

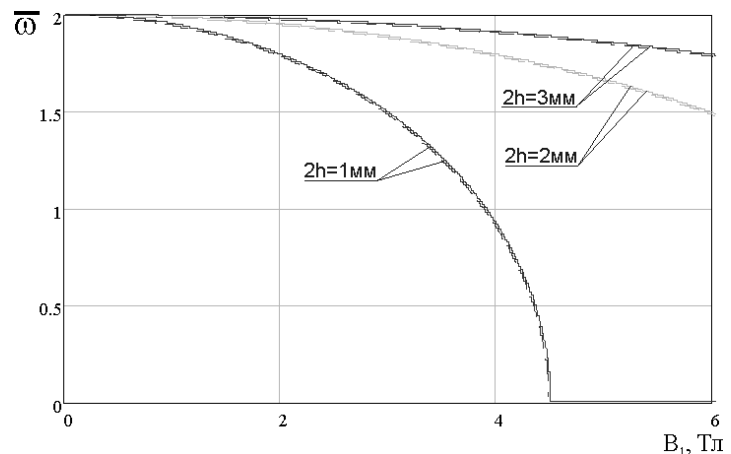


Рис. 2 Зависимость частоты колебаний  $\bar{\omega}$  ферритовой пластины от индукции магнитного поля  $B_1$

в силу нагружения и закрепления находится в состоянии цилиндрического изгиба. Пластина колеблется во внешнем переменном поперечном магнитном поле, нормальном к поверхности пластины и меняющемся по гармоническому закону:  $B_3(t) = B_0 \cos \Omega t$ . Уравнение колебаний диэлектрической ферромагнитной пластины в поперечном магнитном поле имеет вид:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (12)$$

где  $w(x_1, t)$  - прогиб пластины,  $N_1 = \frac{2\chi h B_3^2(t)}{\mu_0(1 + \mu_r k_1 h)}$  - коэффициент, зависящий от индукции магнитного поля  $B_3$  и магнитных характеристик материала пластины.

Для случая шарнирно опертой по обоим краям пластины функция прогибов для гармонических колебаний имеет вид:  $w(x_1, t) = f(t) \sin(k_1 x_1)$ , где  $k_1 = m_1 \pi / a_1$  - волновое число ( $m_1 = 1, 2, \dots$ ).

Получено следующее уравнение для функции  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{bm}^2 (1 - 2\eta_m \cos \Omega t) f = 0, \quad (13)$$

где  $\omega_{bm}^2 = \omega_m^2 (1 - B_0^2 / 2B_{\text{эд}}^2)$ ,  $2\eta_m = B_0^2 / (2B_{\text{эд}}^2 - B_0^2)$ ,  $\omega_m^2 = Dk_1^4 / 2\rho h$  - квадрат частоты колебаний пластины при отсутствии магнитного поля,  $B_{\text{кр}}^2 = Dk_1^2 \mu_0 (1 + \mu_r k_1 h) / (2\chi h)$  - значение индукции внешнего поперечного магнитного поля, при котором происходит потеря статической устойчивости в магнитном поле.

Уравнение (13) представляет собой уравнение Матье. Его решение может быть неустойчивым и устойчивым во времени в зависимости от значений как параметров  $\omega_{bm}$  и  $\eta_m$ , так и частоты возбуждения  $\Omega$ .

Для построения границ областей неустойчивости воспользуемся трансцендентным выражением, полученным Хиллом (при достаточно малых значениях параметра  $\eta_m$ ):  $\Omega = 2\omega_{bm} \sqrt{1 \pm \eta_m} / p$ .

На рис. 3 показаны результаты численного построения областей неустойчивости для основной формы колебаний ( $m_1 = 1$ ). Вдоль линий, отмеченных символами  $a_1$  и  $b_1$ , решения являются периодическими с периодом  $2\pi / \Omega$ . Площадь, ограниченная этими двумя линиями отмечена вертикальной штриховкой и является главной областью неустойчивости.

Вдоль линий, отмеченных символами  $a_2$  и  $b_2$ , решения являются периодическими с периодом  $4\pi / \Omega$ . Они ограничивают вторую область

неустойчивости для основной формы колебаний, отмеченной горизонтальной штриховкой. Поперечное переменное магнитное поле может приводить к динамической потере устойчивости, что необходимо учитывать при проектировании упругих элементов в магнитном поле.

Также рассмотрена устойчивость диэлектрической ферромагнитной пластины под действием переменных продольных сил в поперечном магнитном поле.

Уравнение колебаний шарнирно-опертой по всем краям диэлектрической пластины, находящейся в постоянном поперечном магнитном поле с индукцией  $B_3$  и нагруженную сжимающими усилиями  $P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t$  переменными во времени, имеет вид:

$$D\Delta\Delta w + N\Delta w + P(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (14)$$

здесь  $N = \frac{2\chi h B_3^2}{\mu_0(1 + \mu_r kh)}$  - коэффициент, зависящий от индукции магнитного поля  $B_3$  и магнитных характеристик материала пластины,  $k^2 = (k_1^2 + k_2^2)$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  - волновые числа.

Получено уравнение, которому должна удовлетворять функция  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_m^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_m} - \frac{B_3^2}{B_{кр}^2}\right) f = 0, \quad (15)$$

где  $\omega_m^2 = D(k_1^2 + k_2^2)^2 / 2\rho h$  - квадрат частоты колебаний пластины при отсутствии магнитного поля,  $B_{кр}^2 = D(k_1^2 + k_2^2)\mu_0(1 + \mu_r kh) / 2\chi h$  - значение индукции внешнего поперечного магнитного поля, приводящего к потере статической устойчивости ненагруженной пластины;  $P_m = D(k_1^2 + k_2^2)^2 / k_1^2$  - значение критического усилия при потере статической устойчивости пластины в отсутствие магнитного поля. Из (15) в случае, когда пластина сжимается статической силой  $P_0$ , ее критическое

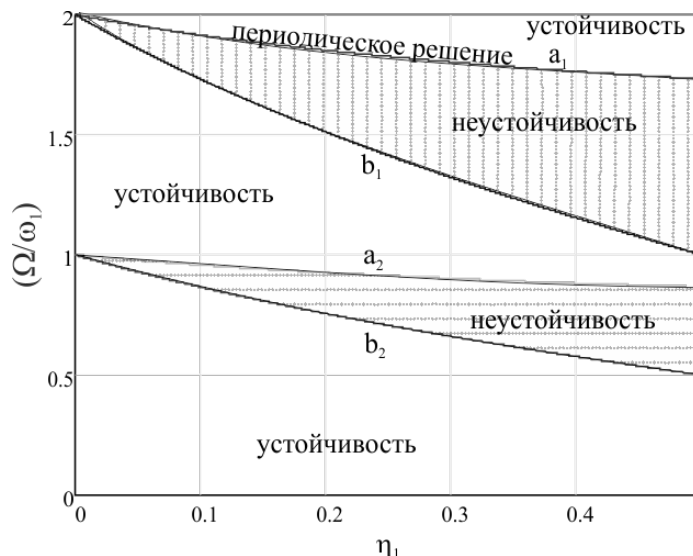


Рис. 3 Теоретические области неустойчивости пластины в осциллирующем магнитном поле

значение равно:

$$P_{0кр} = P_{mn} \left( 1 - \frac{B_3^2}{B_{кр}^2} \right) \quad (16)$$

На рис. 4 представлен график зависимости относительной критической статической силы  $P_{0кр} / P_{mn}$  от индукции внешнего поперечного магнитного поля при различных толщинах пластины ( $2h = 0,5$  мм, 1 мм, 1,5 мм).

Как видно из графика при увеличении индукции магнитного поля относительная критическая статическая сила уменьшается. Большее влияние магнитное поле оказывает на тонкие пластины. В случае диэлектрического материала магнитное поле может существенно сузить область статической устойчивости пластин.

Уравнение (15) представляет собой уравнение Матье. На рис. 5 приведен график зависимости ширины главной области динамической неустойчивости  $\theta = (\Omega^+ - \Omega^-) / 2\omega_{mn}$  от величины магнитной индукции внешнего магнитного поля при  $m, n = 1$ ,  $2h = 1,0$  мм и коэффициенте возбуждения при отсутствии магнитного поля  $P_1 / 2P_{mn} = 0.3$ .

В случае диэлектрического ферромагнитного материала, магнитное поле увеличивает ширину главной области динамической неустойчивости. Магнитное поле понижает устойчивость пластины

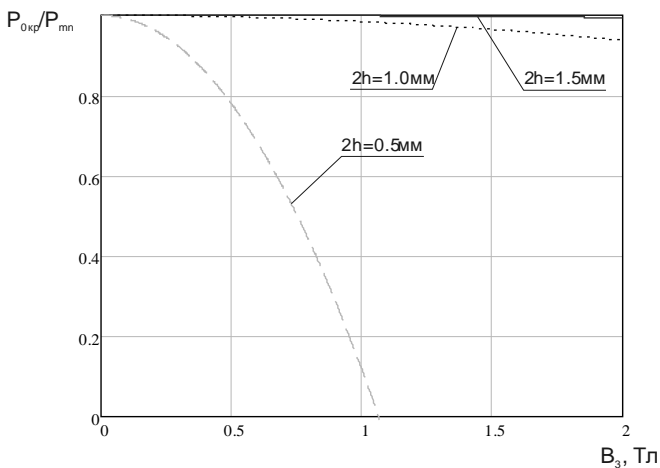


Рис. 4 Зависимость относительной критической статической силы  $P_{0кр} / P_{mn}$  от индукции внешнего поперечного магнитного поля  $B_3$

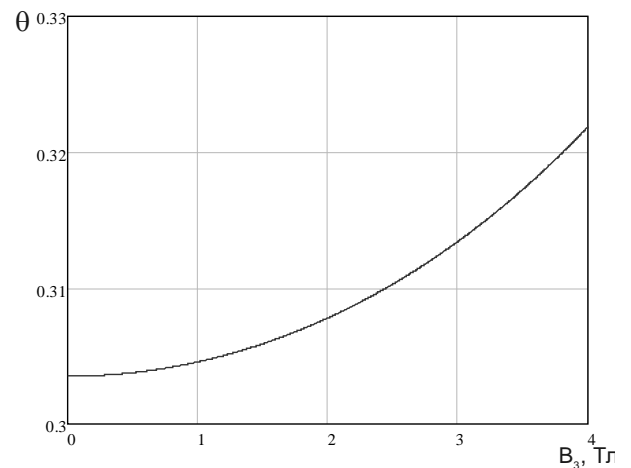


Рис. 5. Зависимость ширины главной области динамической неустойчивости  $\theta$  от величины магнитной индукции внешнего магнитного поля  $B_3$

**Пятая глава** посвящена исследованию колебаний цилиндрических ферромагнитных оболочек в магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током, протекающим по оси оболочки.

Уравнения колебаний тонкой упругой круговой цилиндрической ферромагнитной оболочки постоянной толщины  $2h$ , конечной длины  $l$  и радиусом кривизны срединной поверхности  $R$  в магнитном поле осевого постоянного линейного тока  $J$ , протекающим по оси цилиндра, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\mu_0 \chi}{R} \left( \frac{I}{2\pi R} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{3\nu}{Rh^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{3}{Rh^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + D \left[ \Delta \Delta w + \frac{3w}{R^2 h^2} \right] + 2\mu_0 \chi h \left( \frac{I}{2\pi R} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{w}{R^2} \right) - 2\rho h \omega^2 w = 0 \end{cases} \quad (17)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$  - цилиндрическая жесткость,  $\chi = (\mu_r - 1)$  - магнитная восприимчивость.

Оболочка находится в магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током  $J$ , протекающим по оси цилиндра. В этом случае возникает азимутальное магнитное поле и индукция внешнего магнитного поля  $\vec{B}(0; B_2; 0)$  определяется соотношением:  $B_2 = \mu_0 J / 2\pi R$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/А<sup>2</sup> - магнитная постоянная.

Выражение для безразмерных собственных частот магнитоупругих колебаний круговой цилиндрической оболочки в магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током, протекающим по оси цилиндра имеет вид

$$\varpi = \sqrt{\left[ \frac{c^2}{3(1-\nu^2)} \left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + n^2 \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^4 \left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + n^2 \right)^{-2} \right] + \frac{2c\bar{B}_2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} (1-n^2)} \quad (18)$$

где  $\varpi = \omega / \Omega_R$  - безразмерная частота,  $\Omega_R = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - частота безмоментных

колебаний оболочки, безразмерная характеристика индукции магнитного поля:

$\bar{B}_2 = \frac{N}{|N_*|}$ ,  $N = 2\mu_0 \chi h \left( \frac{J}{2\pi R} \right)^2$ ,  $N_* = \frac{4Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$  - критическое значение усилия для

продольно сжатой цилиндрической оболочки, безразмерные характеристики цилиндрической оболочки:  $c = h/R$ ;  $b = l/R$  ( $m = 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

На рис. 6 представлены зависимости частот круговой цилиндрической оболочки от числа полувольт  $n$  в окружном направлении при  $m=1$  при различных значениях безразмерной индукции внешнего магнитного поля  $\bar{B}_2$ . Кривые 1 соответствуют случаю  $\bar{B}_2 = 0$  – отсутствие магнитного поля; кривые 2 –  $\bar{B}_2 = 0,02$ ; кривые 3 –  $\bar{B}_2 = 0,04$ .

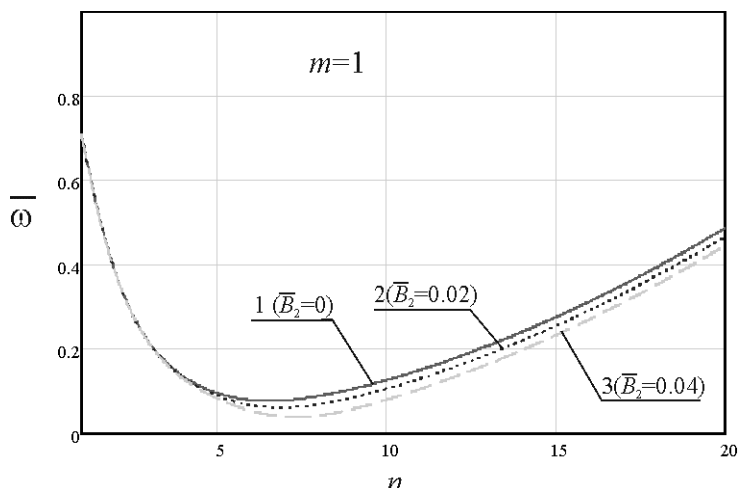


Рис. 6 Зависимость частот круговой цилиндрической оболочки от числа полувольт  $n$  в окружном направлении ( $m=1$ ) при различных значениях безразмерного параметра  $\bar{B}_2$  индукции азимутального магнитного поля

Минимальному значению частоты колебаний цилиндрической оболочки при отсутствии магнитного поля соответствует значение  $n=7$  – полувольт в окружном направлении. Увеличение значения проходящего тока и соответственно индукции внешнего магнитного поля приводит к снижению частот колебаний.

Существенное влияние магнитное поле оказывает только на низшие частоты. При  $m \geq 2$  магнитное поле частоты не изменяет. Магнитное поле понижает собственные частоты колебаний круговой цилиндрической оболочки. Магнитное поле также понижает минимальное значение частоты (рис. 6). При повышении  $\bar{B}_2$  возрастает  $n$  – число полувольт в окружном направлении. Форма колебаний в окружном направлении становится более сложной.

При определенных значениях индукции внешнего магнитного поля  $B_2$  собственные частоты колебаний оболочки с определенными длинами полувольт обращаются в нуль. Приняв в (18)  $\bar{\omega} = 0$ , получим соотношение для индукции внешнего магнитного поля, при котором цилиндрическая оболочка теряет статическую устойчивость

$$B_{кр}^2 = \frac{E\mu_0 c^2}{3\chi(1-\nu^2)} \left[ \left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + n^2 \right)^2 + \frac{3(1-\nu^2)}{c^2} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^4 \left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + n^2 \right)^{-2} \right] [n^2 - 1]^{-1} \quad (19)$$

На основе соотношений для собственных частот колебаний круговых цилиндрических оболочек в азимутальном магнитном поле и теории

распределения частот выведена формула для асимптотической плотности частот колебаний цилиндрических оболочек

$$\frac{n(\Omega)}{n_c} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2}} \cdot K\left(\sqrt{\frac{\omega+1}{2}}\right), & 0 < \omega < 1 \\ \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\omega+1}} \cdot K\left(\sqrt{\frac{2}{\omega+1}}\right), & \omega > 1 \end{cases} \quad (20)$$

где  $K(\omega)$  - эллиптический интеграл 1-го рода в форме

$$\text{Лежандра, } n_c = \frac{a_1 a_2}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} -$$

плотность Куранта, соответствующая

эквивалентной пластине со сторонами  $a_1 = l$ ,  $a_2 = \pi R$ .

Сравнительные графики эмпирической и асимптотической плотностей частот представлены на рис. 7: шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки с параметрами

$h/R = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  при действии магнитного поля  $\overline{B}_2 = 0,02$ .

Как показал численный анализ, изменение индукции магнитного поля не приводит к существенному изменению собственных частот (рис. 7). Изменение азимутального магнитного поля не приводит и к изменению эмпирической плотности собственных частот колебаний цилиндрических оболочек. Аналогичная картина наблюдается и при нагружении цилиндрических оболочек гидростатическим давлением по боковой поверхности, которое не оказывает влияние на плотность собственных частот.

**В приложении** содержится описание программного комплекса, позволяющего в автоматическом режиме производить расчет спектров частот колебаний диа-, пара- и ферромагнитных пластин с произвольными граничными условиями и пологих оболочек в поперечном и продольном магнитных полях. С учетом различных комбинаций входных данных программный комплекс сочетает в себе

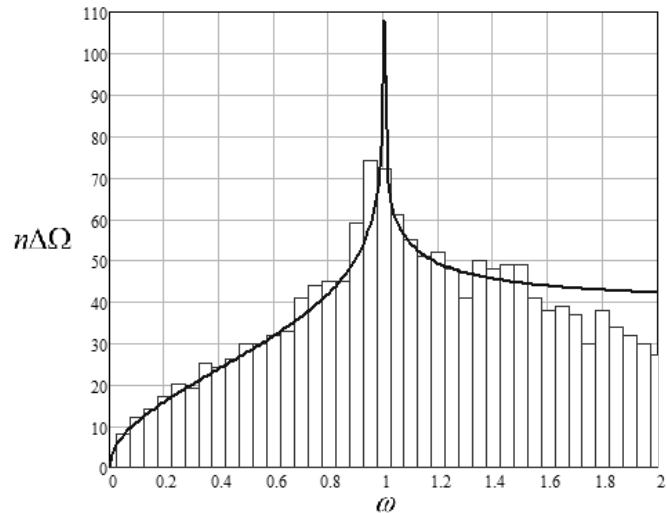


Рис. 7 Асимптотическая и эмпирическая плотность частот шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки с параметрами  $h/R = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  при действии безразмерной величины магнитного поля с  $\overline{B}_2 = 0.02$



двадцать задач об определении частот колебаний прямоугольных пластин с различными краевыми условиями в поперечном и продольном магнитном поле, выполненных из немагнитных (диамагнитных и парамагнитных) и ферромагнитных материалов, и четыре задачи о колебаниях цилиндрических и сферических оболочек в магнитных полях.

### **Выводы и результаты работы**

1. На основе асимптотического метода В.В. Болотина построены решения типа динамических краевых эффектов для прямоугольных ферромагнитных пластин с произвольной комбинацией условий закрепления краев в поперечном и продольном магнитном поле.
2. Проведено исследование спектров частот колебаний ферромагнитных пластин с конечной электропроводностью и диэлектрических пластин. Для широкого изменения параметров индукции магнитного поля установлено незначительное расхождение в результатах расчета собственных частот колебаний диэлектрических и проводящих пластин в поперечном и продольном магнитном поле и качественное совпадение с результатами экспериментальных исследований, опубликованных в литературе.
3. Приведены примеры расчета спектров собственных частот колебаний пластин с различными условиями закрепления краев в магнитном поле. Установлено, что поперечное магнитное поле понижает собственные частоты колебаний пластин. Поперечное магнитное поле оказывает эффект сжимающих усилий в срединной плоскости. Получены соотношения для индукции магнитного поля, при котором возможна потеря статической устойчивости. Аналогичное явление наблюдается у пластин в продольном магнитном поле.
4. Проведено исследование устойчивости плоской формы равновесия ферромагнитной пластины, находящейся в поперечном магнитном поле с гармонически изменяющейся индукцией внешнего магнитного поля, исследование устойчивости сжатой переменными силами пластины в магнитном поле. Установлено, что в случае диэлектрического ферромагнитного материала, магнитное поле увеличивает ширину главной области динамической неустойчивости и понижает устойчивость пластины
5. Получены соотношения для частот собственных колебаний и асимптотические плотности круговых цилиндрических оболочек, для параметров внешнего магнитного поля, приводящего к потере статической устойчивости

оболочки. Магнитное поле приводит к понижению собственных частот колебаний оболочек, выполненных как из ферромагнитных, так и немагнитных материалов.

6. Разработан программный комплекс, в котором на основании выведенных аналитических соотношений для расчета спектров собственных частот колебаний пластин с различными краевыми условиями и пологих оболочек, находящихся в магнитных полях, решаются двадцать задач об определении частот колебаний прямоугольных пластин с различными краевыми условиями в поперечном и продольном магнитном поле, выполненных из немагнитных (диамагнитных и парамагнитных) и ферромагнитных материалов.

7. Разработанная методика расчета спектров частот магнитоупругих колебаний ферромагнитных прямоугольных пластин при различных условиях закрепления краев позволяет производить проектирование тонкостенных элементов конструкций электротехнического оборудования, нашла применение для расчета вибрационных характеристик магнитоуправляемых контактов (герконов).

8. Полученные в диссертации результаты использованы и внедрены в учебном процессе на кафедре «Динамика и прочность машин», для научных исследований на кафедре «Электрических и электронных аппаратов», в ЗАО "Аэрокосмический мониторинг и технологии"

### **Публикации по теме диссертации Комиссаровой (Голубевой) Т.Н.**

#### *Публикации в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ*

1. Голубева Т.Н., Хроматов В.Е. Влияние магнитного поля на колебания элементов конструкций энергетического оборудования // Новое в Российской электроэнергетике. Ежемесячный электронный журнал. 2012. № 3.
2. Хроматов В. Е., Голубева Т. Н. О влиянии магнитных полей на колебания и устойчивость пластин из ферромагнитного материала // Вестник машиностроения. 2012. № 9. С. 12-16
3. Голубева Т. Н., Коробков Ю.С., Хроматов В.Е. Влияние продольного магнитного поля на спектры частот колебаний ферромагнитных пластин // Электротехника. 2013. №3. С. 44-49
4. Голубева Т. Н. Динамическая устойчивость ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле.// Справочник. Инженерный журнал. 2013. №5. С. 20-24.
5. Хроматов В.Е., Голубева Т.Н., Колебания и устойчивость ферромагнитной

цилиндрической оболочки в магнитном поле// Вестник Московского авиационного института. 2013. № 3. Т. 20. С. 212-219.

*Публикации в прочих изданиях*

6. Комиссарова Т. Н. Влияние магнитного поля на колебания контактных сердечников герконов // Тезисы докладов XV международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиотехника, электротехника и энергетика» М.: Издательство МЭИ. 2009. С 278-279.
7. Хроматов В.Е., Голубева Т.Н. Влияние магнитного поля на колебания контактных сердечников герконов//Магнитоуправляемые контакты (герконы) и изделия на их основе (Reed Switches and Products on Basis Thereof) / Сборник трудов третьей Международной научно-практической конференции, 27-30 сентября 2011 г./ Proceedings of the 3rd International Science and Practical Conference. 27.09-30.09.2011. Рязань: ОАО «РЗМКП», 2011 – с. 201-205
8. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. Влияние магнитного поля на колебания ферромагнитных пластин // Сборник трудов XVIII международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века», г. Севастополь, 2011. Т. 1. с. 179-183.
9. Хроматов В.Е., Голубева Т.Н. Колебания и устойчивость ферромагнитных пластин в магнитных полях // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 24–29 сентября 2012 г.) Нижний Новгород: «Наш дом», 2012. с. 967-975
10. Голубева Т. Н., Радин В. П., Хроматов В. Е. Влияние магнитного поля на колебания и динамическую устойчивость пластин // Труды XIV Международной конференции «Электромеханика, Электротехнологии, Электромеханические материалы и компоненты», Крым, г. Алушта, 2012, с 319-320
11. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. О колебаниях ферромагнитных круговых цилиндрических оболочек в магнитном поле // Материалы XIX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2013. С. 67-68
12. Demin A. A., Golubeva T. N., Demina A. S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field // 11<sup>th</sup> Students' Science Conference "Future Information technology solutions", Bedlewo, 3-6 October 2013, p. 61-66

13. Голубева Т. Н., Корешкова Н. С., Демин А. А. Разработка программного обеспечения для исследования колебаний и устойчивости пластин и оболочек в магнитном поле // Труды XXI международной научно-технической конференции «Информационные средства и технологии», М. Изд-во МЭИ, 2013. Т. 1. с. 116-119.
14. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. Программное обеспечение для расчета спектров частот колебаний пластин и оболочек в магнитных полях // Материалы XX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2014. С. 67-68
15. Голубева Т.Н., Дёмина А.С., Сверчков Д.Р. Колебания и устойчивость контактных сердечников герконов из ферромагнитного материала в магнитном поле. Материалы XXVI Международной инновационно-ориентированной конференции молодых учёных и студентов «МИКМУС-2014». 17 – 19 декабря 2014 г., Москва, с. 82
16. Комиссарова Т. Н. О колебаниях и устойчивости ферромагнитных пластин при воздействии магнитных полей // Материалы XXII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2016. С. 67-68