УДК-517.977

Приоритетное обслуживание самолетов при заходе на посадку и пассажиров после их прилета

Тин Пхон Чжо, Ю.В. Горбачев, К.И. Гасанзаде

Аннотация

Рассмотрена многоканальная система приоритетного обслуживания самолетов при их заходе на посадку и пассажиров в аэропорту после прилета. Показана возможность выбора числа каналов при заданной допустимой вероятности отказа в обслуживании.

Ключевые слова: система массового обслуживания; контроль безопасности; оптимальное управление; летательные аппараты.

Введение

При управлении воздушным движением пассажирских самолетов при их заходе на посадку возникает ряд непредвиденных обстоятельств, таких как внезапное изменение направления ветра, превышение нормы по расходу топлива и другое, когда для избегания аварийной ситуации на борту, некоторые самолеты нужно сажать вне очереди на нужную полосу. Это указывает на вероятностный характер обслуживания самолетов в воздухе.

Аналогичная ситуация возникает в аэропорту после прилета, когда часть пассажиров также нуждается во внеочередном обслуживании. В обеих случаях вероятность отказа в приоритетном обслуживании как в воздухе, так и на земле должна быть сведена к минимуму.

В данной работе предложена новая методика расчета приоритетной системы массового обслуживания (СМО), которая позволяет определить полную группу вероятностных состояний многоканальной СМО с ожиданием в очереди.

Система приоритетного обслуживания с ожиданием при n=1

При нахождении формул вероятностного состояния СМО, начнем со случая n=1,при этом будем исходить из следующих положений.

1. Формируется полная группа событий, сумма вероятностей которых равна 1.
2. Вносится специальное обозначение для этих вероятностей

   - для бесприоритетного x_0

   - для приоритетных заявок вероятность того, что в системе присутствует важная заявка $\xi_i(t)$, а вероятность того, что в системе обыкновенная заявка $Z_i(t)$

3. Составляется разностное уравнение, а потом дифференциальное уравнение перехода из одного состояния в соседнее.

4. В самой СМО учитывается как число обслуживающих каналов n, так и длина очереди L. Для простоты примем , что L=n.

Приступим к написанию формул, для приоритетных СМО, учитывая следующие вероятные события:

$$P_{1,0}(k+1)Z_1+\xi_1=(\rho_1+\rho_2)P_0(k+1)-P_0(k)=P_0=(\lambda_1+\lambda_2)P_0+P_{1,0}\nu+P_{1,1}\nu=0$$
$$P_{1,1}=P_{1+1,1}(\nu+\mu)+P_0\lambda_2+P_0\lambda_1-P_{1,1}(\lambda_1+\lambda_2+\mu)=0$$

\- система свободна от заявок.

$x_{1,0}$ - в системе обслуживается одна простая заявка.

$x_{0,1}$ - в канале обслуживается одна приоритетная заявка.

2.При рассмотрении ситуации с очередью имеется 3 случая.

Все каналы заняты только простыми заявками

$x_{1,0,1,0}$

В канале приоритетная заявка, а в очереди простая.

$x_{0,1,1,0}$

В канале простая заявка, а в очереди приоритетная.

$x_{1,0,0,1}$

Приступим к составлению уравнений вероятностного перехода с одного состояния в другое. Очевидно, что эти состояния должны быть соседними, т.е. они отличаются на одну заявку, больше или меньше (в канале или в очереди).

Расчет вероятности начнем с оценки вероятности P_0 того, что система свободна в следующий момент $(k+1)$,пользуясь формулами имеющимися в [1,2] можно изобразить следующую схему.

$$\begin{array}{lll} & \nearrow & P_0(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t] \\ P_0(k+1) & \longrightarrow & P_{1,0}\nu\Delta t \\ & \searrow & P_{1,1}\nu\Delta t \end{array}$$

В этой схеме есть 3 слагаемых:

-первое слагаемое – состояние, когда ни одна заявка не пришла в систему

-второе слагаемое – состояние, когда в канале имеется обычная заявка и она успела обслужиться за время Δt .

-третье слагаемое – состояние когда в канале имеется важная заявка и она успела обслужиться .

Поэтому для установившегося режима можно написать следующее уравнение:

$$P_0(k+1)-P_0(k)=P_0=(\lambda_1+\lambda_2)P_0+P_{1,0}\nu+P_{1,1}\nu=0$$

$$P_{1,0}+P_{1,1}=(\rho_1+\rho_2)P_0$$

А после принятых обозначений можно написать следующее уравнение:

$$Z_1+\xi_1=(\rho_1+\rho_2)P_0 \quad \mathbf{(1)}$$

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,0}$ т.е. обслуживания простой заявки в канале

$\nearrow p_0 \lambda_2 \Delta t$

$p_{1,0}$(k+1) $\longrightarrow p_{1,0}$ [1- $(\lambda 1+\lambda 2)\Delta t$]

$\searrow p_{1+1,0}$ [(ν+μ)Δt]

- первое слагаемое- описывает когда в систему пришла обычная заявка

-второе слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как была одна простая заявка так и осталась в момент времени к

-третье слагаемое – вероятность того что простая заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая простая заявка

Поэтому для установившегося режима можно написать следующее уравнение:

$$P_{1,0} = P_{1,0+1,0}\left(\nu+\mu\right) + P_0\lambda_2 - P_{1,0}\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu\right) = 0$$

$$Z_{1+1}\left(1+\beta\right) = Z_1\left(1+\rho_1+\rho_2\right) - P_0\rho_2 = \left[\left(\rho_1+\rho_2\right)P_0 - \xi_1\right]\left(1+\rho_1+\rho_2\right) - P_0\rho_2$$

$$Z_{1+1}\left(1+\beta\right) = \left[\frac{\left(1+\rho_1+\rho_2\right)\left(\rho_1+\rho_2\right)}{-\rho_2}\right]P_0 - \left(1+\rho_1+\rho_2\right)\xi_1$$

$$\xi_{1+1} = \frac{\xi_1\left(1+\rho_1+\rho_2\right) - P_0\rho_1}{\left(1+\beta\right)}$$

$$Z_{1+1}\left(1+\beta\right) = Z_1\left(1+\rho_1+\rho_2\right) - P_0\rho_2 \quad \textbf{(2)}$$

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,1}$

$\nearrow P_0\lambda_1\Delta t$

$p_{1,1}$(k+1) $\longrightarrow P_{1,1}\left(k\right)\left[1-\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu\right)\Delta t\right]$

$\searrow p_{1+1,1}$ (ν+μ) Δt

- первое слагаемое описывает когда в систему поступила важная заявка, когда в канале уже имелась простая заявка.

-второе слагаемое описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как были одна важная заявка и одна простая так и остались в момент времени k.

-третье слагаемое – вероятность того что важная заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая важная заявка.

Поэтому для установившегося режима можно написать следующее уравнение:

$$P_{1,1} = P_{1+1,1}\left(v+\mu\right) + P_0\lambda_2 + P_0\lambda_1 - P_{1,1}\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu\right) = 0$$

$$P_{1+1,1}\left(1+\beta\right) = P_{1,1}\left(1+\rho_2+\rho_1\right) - P_0\rho_1 = 0$$

$\xi_{1+1}(1+\beta) = \xi_1(\rho_2+\rho_1+) - P_0\rho_1$

$$\xi_{1+1}\left(1+\beta\right) = \xi_1\left(\rho_2+\rho_1+\right) - P_0\rho_1 \quad \textbf{(3)}$$

Выше мы рассмотрели все вероятностные состояния в канале ,т.е. в системе без очереди.

Выразим все вероятности Z и ξ через $Z_{i,j}$и $\xi_{I,j}$

Из **(1)** $Z_{1=}\left(\rho_1+\rho_2\right)P_0 - \xi_1$

Из**(2)**

$$Z_{1+1}\left(1+\beta\right) = Z_1\left(1+\rho_1+\rho_2\right) - P_0\rho_2 = \left[\left(\rho_1+\rho_2\right)P_0 - \xi_1\right]\left(1+\rho_1+\rho_2\right) - P_0\rho_2$$

$$Z_{1+1}\left(1+\beta\right) = \left[\frac{\left(1+\rho_1+\rho_2\right)\left(\rho_1+\rho_2\right)}{-\rho_2}\right]P_0 - \left(1+\rho_1+\rho_2\right)\xi_1$$

$$Z_{1+1} = \frac{\left[\rho_1+\left(\rho_1+\rho_2\right)^2\right]P_0 - \left(1+\rho_1+\rho_2\right)\xi_1}{\left(1+\beta\right)}$$

Из **(3)** $\xi_{1+1} = \dfrac{\xi_1\left(1+\rho_1+\rho_2\right) - P_0\rho_1}{\left(1+\beta\right)}$

Рассмотрим вероятностные состояния в очереди:

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{0,0}$ т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди нет ни одной заявки:

$$\nearrow P_{1,0}\left(k\right)\left[1-\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu+sv\right)\Delta t\right]$$

$$P_{0,0}\left(k+1\right) \longrightarrow P_{1,0}\left(\mu+\left(s+1\right)\right)\Delta t$$

$$\searrow P_{0,1}\left(\mu\left(s+1\right)\right)\Delta t$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее.

- второе слагаемое – описывает, когда из канала обслуживания обслужилась одна из простых заявок и из очереди пришла одна простая заявка

-третье слагаемое – описывает, когда из канала обслуживания обслужилась одна из простых заявок и из очереди пришла одна важная заявка

Поэтому для установившегося режима можно написать следующее уравнение:

$$P_{0,0}\left(k+1\right)-P_{0,0}\left(k\right)=P_{0,0}=P_{0,1}\left(\mu+\left(s+1\right)\right)+P_{0,1}\left(\mu+\left(s+1\right)\right)-P_{0,0}\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu+sv\right)=0$$

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,0}$ т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди одна простая заявка:

$$P_{1,0}\left(k\right)\left[1-\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu+sv\right)\Delta t\right]$$

$$P_{1,0}\left(k+1\right) \longrightarrow P_0\left(\mu+\left(s+1\right)\right)\Delta t$$

$$P_{1+1,0}\left(\mu\left(s+1\right)\right)\Delta t$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее.

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна простая заявка

-третье слагаемое – описывает, когда из очереди ушла простая заявка и сразу же пришла одна простая заявка

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{0,1}$ т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди одна важная заявка:

$$P_{0,1}(k)\left[1-(\lambda_1+\lambda_2+\mu+sv)\Delta t\right]$$

$$P_{0,1}(k+1) \longrightarrow P_0\lambda_1\Delta t$$

$$P_{1+1,0}\left(\mu+(s+1)\right)\Delta t$$

-первое слагаемое – описывает состояние, когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее.

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна важная заявка

-третье слагаемое – описывает, когда из очереди ушла заявка и сразу же пришла одна важная заявка

Рассмотрев все вероятности, мы можем перейти к следующим формулам.

$$\xi_{1+1} = \frac{P_0\rho_1(\rho_1+\rho_2)}{1+\beta}$$

$$Z_{1+1} = \frac{\rho_2(\rho_1+\rho_2)}{1+\beta}P_0 \qquad (4)$$

$$P_0 = \frac{1}{1+(\rho_1+\rho_2)+\frac{(\rho_1+\rho_2)^2}{1+\beta}}$$

при $\rho_1 = 0,1; \rho_2 = 0,7$ имеем $\xi_{1+1} = 0,01$

Система приоритетного обслуживания с ожиданием для n=2

Приступим теперь к написанию формул для приоритетных СМО n>1. Рассмотрим случай для n=2 без очереди :

При нахождении формул вероятностного состояния СМО будем исходить из следующих положений.

1. Формируется полная группа событий, сумма вероятностей которых равна 1.
2. Вносится специальное обозначение для этих вероятностей

   - для бесприоритетных заявок - $P_i(t)$

   - для приоритетных заявок - вероятность того, что в системе присутствует важная заявка - $\xi_i(t)$, а вероятность того, что в системе обыкновенная заявка - $Z_i(t)$

3. Составляется разностное уравнение, а потом дифференциальное уравнение перехода из одного состояния в соседнее при L=n.

$x_{2,0}$ – система свободна от заявок;

$x_{1,0}$ – в системе обслуживается одна простая заявка;

$x_{2,0}$ – в системе обслуживаются две заявки, т.е. все каналы заняты;

$x_{0,1}$ – в канале обслуживается одна важная заявка;

$x_{1,1}$ – в канале обслуживается одна важная заявка, а другая простая.

При рассмотрении ситуации с очередями нужно иметь ввиду, когда все каналы заняты простыми заявками:

$x_{2,0,1,0}$ – в канале обслуживаются две простые заявки, а в очереди стоит одна простая заявка;

$x_{2,0,2,0}$ – в канале обслуживаются две простые заявки, и в очереди стоят две; простые заявки

$X_{2,0,0,1}$ – в канале обслуживаются две простые заявки, а в очереди стоит одна важная;

$X_{2,0,1,1}$ - канал занят простыми заявками, а в очереди стоят одна важная ,одна простая.

Рассмотрим состояние, когда в канале обслуживается одна важная заявка. Тогда в очереди не должно быть ни одной важной заявки, потому что в системе может присутствовать только одна заявка : либо в канале, либо в очереди. Поэтому для двухканальной системы n=2 с ожиданием получаются следующие вероятности состояний при l=n:

$X_{1,1,1,0}$ – в системе обслуживается одна важная и одна простая заявки, а в очереди стоит одна простая заявка;

$X_{1,1,2,0}$ - в системе обслуживается одна важная и одна простая заявки, а в очереди стоят две простые.

Приступим к составлению уравнений вероятностного перехода с одного состояния в другое. Очевидно, что эти состояния должны быть соседними, т.е. они отличаются на одну заявку , больше или меньше (в канале или в очереди).

Расчет вероятности начнем с оценки вероятности P_0 того что система свободна в следующий момент (k+1),пользуясь формулами имеющимися в [1,2] можно изобразить следующую схему.

$$P_0(k+1) \begin{cases} \nearrow \; P_0(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t] \\ \longrightarrow \; P_{1,0}\nu\,\Delta t \\ \searrow \; P_{1,1}\nu\,\Delta t \end{cases}$$

В этой схеме есть 3 слагаемых:

-первое слагаемое – состояние, когда ни одна заявка не пришла в систему;

-второе слагаемое – состояние, когда в канале имеется обычная заявка, и она успела обслужиться за время Δt;

-третье слагаемое – состояние, когда в канале имеется важная заявка и она успела обслужиться.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,0}$ т.е. обслуживания простой заявки в канале

$$P_{1,0}(k+1) \rightarrow \begin{cases} P_{1,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)\Delta t] \\ P_0\lambda_2\Delta t \\ P_{1+1,0}[(\nu+\mu)\Delta t] \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как была одна простая заявка, так и осталась в момент времени к;

- второе слагаемое - описывает, когда в систему пришла обычная заявка;

-третье слагаемое – вероятность того, что заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая простая заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{2,0}$ т.е. обслуживания двух простых заявок в канале

$$P_{2,0}(k+1) \rightarrow \begin{cases} P_{2,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu)\Delta t] \\ P_1\lambda_2\Delta t \\ P_{2,0+1,0}[(\nu+2\mu)\Delta t] \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние, когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как были две простые заявки так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в систему пришла обычная заявка, т.е. была одна простая пришла еще одна;

-третье слагаемое – вероятность того, что одна из двух простых заявок в системе обслужилась, и из очереди пришла новая простая заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{0,1}$ т.е. обслуживание важной заявки в канале

$$P_{0,1}(k+1) \rightarrow \begin{cases} P_{0,1}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)\Delta t] \\ P_0\lambda_1\Delta t \\ P_{1+0,1}(\nu+\mu)\Delta t \end{cases}$$

$P_{0,1+0,1}(\nu+\mu)\,\Delta t$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как была одна важная заявка так и осталась в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в систему пришла важная заявка;

-третье слагаемое – вероятность того что простая заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая важная заявка;

-четвертое слагаемое – вероятность того что важная заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая важная заявка.

Последние два можно объединить и записать как $P_{1+0,1}(\nu+\mu)\,\Delta t$, т.е. обслужилась одна любая заявка, а пришла с очереди важная

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,1}$ т.е. обслуживание важной и простой заявок в канале

$P_{1,1}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu)\Delta t]$

$P_{1,1}(k+1)$ → $P_0\lambda_1\Delta t$

→ $P_0\lambda_2\Delta t$

→ $P_{0,1+0,1}(\nu+\mu)\,\Delta t$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как были одна важная заявка и одна простая так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое - описывает, когда в систему поступила важная заявка и когда в канале уже имелась простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда в канал поступила простая заявка, когда в канале уже имелась обычная заявка;

-четвертое слагаемое – вероятность того, что важная заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая важная заявка.

Теперь рассмотрим вероятностные состояния в очереди:

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{0,0}$ т.е. канал занят заявками, а в очереди нет ни одной заявки.

Для начала рассмотрим очередь, когда система занята только простыми заявками $P_{2,0,x,y}$ Для удобства мы опустим первые два индекса , так как они указывают на состояние в канале ,а мы рассматриваем очередь, то примем что ниже используемые два индекса x,y ($P_{2,0,x,y}$) – это состояние в очереди

$$P_{0,0}(k+1) \begin{cases} \nearrow P_{0,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t] \\ \rightarrow P_{1,0}(2\mu+(s+1))\Delta t \\ \searrow P_{0,1}(2\mu+(s+1))\Delta t \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания два простых заявок, так и осталось в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда из канала обслуживания обслужилась одна из простых заявок и из очереди пришла одна простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из канала обслуживания обслужилась одна из простых заявок, и из очереди пришла одна важная заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,0}$ т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди одна простая заявка:

$$P_{1,0}(k+1) \begin{cases} \nearrow P_{1,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t] \\ \rightarrow P_{0}(2\mu+(s+1))\Delta t \\ \searrow P_{1+1,0}(2\mu+(s+1))\Delta t \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания два простых заявок и в очереди одна простая заявка, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из очереди ушла простая заявка и сразу же пришла одна простая заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{2,0}$ т.е. канал занят простыми заявками, и очередь занята простыми заявками:

$$P_{2,0}(k+1) \begin{cases} \nearrow P_{2,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t] \\ \longrightarrow P_1\lambda_2\Delta t \\ \searrow P_{2+1,0}(2\mu+(s+1))\ \Delta t \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние, когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания две простые заявки, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое - описывает когда в очередь пришла одна простая заявка, т.е была одна и пришла вторая простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из очереди ушла простая заявка и на место ее пришла новая простая заявка;

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{0,1}$ т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди есть одна важная заявка:

$$P_{0,1}(k+1) \begin{cases} \nearrow P_{0,1}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t] \\ \longrightarrow P_0\lambda_1\Delta t \\ \searrow P_{1+1,0}(2\mu+(s+1))\ \Delta t \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания два простых заявок и в очереди одна важная заявка, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна важная заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из очереди ушла заявка и сразу же пришла одна важная заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,1}$, т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди есть одна важная и одна простая заявки:

$P_{1,1}$ (k)[1-(λ_1+ λ_2+2μ+sν)Δt]

$P_{1,1}$(k+1) $\to$ $P_0\lambda_1\Delta t$

$\to$ $P_0\lambda_2\Delta t$

$\to$ $P_{1,0+1,0}(\nu+\mu)\ \Delta t$

-первое слагаемое – описывает состояние, когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась, т.е. как были одна важная заявка и одна простая заявки в очереди, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь поступила важная заявка, когда в очереди уже имелась простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда в очередь поступила простая заявка, когда в очереди уже имелась обычная;

-четвертое слагаемое – описывает вероятность того что простая заявка из очереди перешла в канал обслуживания и в очередь пришла новая простая заявка.

Теперь рассмотрим вариант, когда канал обслуживания занят одной простой и одной важной заявками.

Очевидно, что таких состояний два при n=2 . При этом мы не должны забывать, что в системе не может быть больше одной важной заявки.

Рассмотрим следующее событие, относящееся к вероятности состояния $P_{1,1,1,0}$ т.е. канал занят одной простой и одной важной заявками, а в очереди одна простая заявка:

$P_{1,0}$ (k)[1-(λ_1+ λ_2+2μ+sν)Δt]

$P_{1,0}$(k+1) $\longrightarrow$ P_0 (2μ+(s+1)) Δt

$\to$

$$P_{0,1+1,0}\ (2\mu+(s+1))\ \ \Delta t$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания одна простая заявка и одна важная и в очереди одна простая заявка, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из канала обслуживания обслужилась скорее всего важная заявка и в очереди из двух ожидающих простых заявок осталась одна, так как другая перешла в канал обслуживания.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,1,2,0}$ т.е. канал занят одной простой и одной важной заявками, а в очереди одна простая заявка:

$$P_{2,0}(k+1) \begin{cases} \nearrow\ P_{2,0}\ (k\ )[1-(\lambda_1+\ \lambda_2+n\mu+s\nu)\Delta t] \\ \longrightarrow\ P_1\ \lambda_2\ \Delta t \\ \searrow\ P_{2,0+1}(n\mu+(s+1))\ \ \Delta t \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания одна простая заявка и одна важная заявка и в очереди две простые заявки так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна простая заявка;

- третье слагаемое – описывает, когда в канале обслужилась как бы важная заявка и в очередь пришла одна заявка, так как освободилось одно место в очереди.

В итоге, рассуждая аналогическим образом для оставшихся вероятностных состояний можно получить следующую группу формул, необходимую для расчета приоритетной СМО при n=2, $\rho_1 = 0{,}1$, $\rho_2 = 0{,}7$

Зная P_0 , мы можем определить окончательно значение Z_{2+1} , $Z_{2+2}, \zeta_{2+1}, \zeta_{2+2}$ и определить выигрыш $B_{отк} = \frac{Z_{2+2}}{\zeta_{2+2}}$ в отказе обслуживания важных и обычных заявок.

$$Z_{2+1} = 0{,}003 * 0{,}47 = 1{,}41 * 10^{-3}$$

$$Z_{2+2} = 1{,}867 * 10^{-3} * 0{,}47 = 0{,}877 * 10^{-3} \qquad (5)$$

$$\zeta_{2+1} = 0{,}467 * 10^{-3} * 0{,}47 = 0{,}219 * 10^{-3}$$

$$\zeta_{2+2} = 0{,}373 * 10^{-3} * 0{,}47 = 0{,}175 * 10^{-3}$$

Система приоритетного обслуживания при $n = 3$

Наконец, рассмотрим случай когда $n = 3$. Пока нет очереди, рассмотрим следующие состояния. Приступим к написанию формул для приоритетных СМО.

(1) x_0 - система свободна, не одной заявки нет в системе;

(2) $x_{1,0}$ - в системе обслуживается одна простая заявка;

(3) $x_{2,0}$ - два канала заняты простыми заявками;

(4) $x_{3,0}$ - все три каналы заняты простыми заявками;

(5) $x_{0,1}$ - в канале обслуживается одна приоритетная (важная) заявка;

(6) $x_{1,1}$ - в канале одна важная заявка, а другая простая;

(7) $x_{2,1}$ - в канале две простые заявки и одна важная;

При рассмотрении ситуации с очередями нужно иметь ввиду случаи, когда все каналы заняты только простыми заявками.

(1) $x_{3,0,1,0}$ - в канале три простые заявки, а в очереди одна;

(2) $x_{3,0,2,0}$ - в канале три простые заявки, а в очереди две;

(3) $x_{3,0,3,0}$ - в канале обслуживаются три простые заявки, а три заявки стоят в очереди;

(4) $x_{3,0,0,1}$ - в канале обслуживаются три простые заявки, в очереди стоит одна важная;

(5) $x_{3,0,1,1}$ - в канале обслуживаются три простые заявки, в очереди стоят одна важная, одна простая;

(6) $x_{3,0,2,1}$ - в канале обслуживаются три простые заявки, в очереди стоят одна важная, две простые заявки;

Дальше рассмотрим состояние, когда имеется одна важная заявка в канале обслуживания. Тогда в очереди не должно быть ни одной заявки, потому что в системе присутствует только одна заявка либо в канале, либо в очереди. Поэтому для трехканальной системы $n = 3$, не имеющей очереди, получаются такие вероятности состояния при $l = n$.

(7) $x_{2,1,1,0}$ - в канале две обычные заявки и одна важная, а в очереди стоит одна простая.

(8) $x_{2,1,2,0}$ - в канале две обычные заявки и одна важная, а в очереди стоят две простые.

(9) $x_{2,1,3,0}$ - в каналах две обычные заявки и одна важная, а в очереди стоят три простые.

Приступаем к составлению уравнений вероятностного перехода из одного состояния в другое. Ясно, что эти состояния должны быть соседними, т.е. они отличаются на одну заявку, больше или меньше (в канале или в очереди).

После принятых обозначений можно написать первую формулу :

$$(Z_1 + \xi_1) = (\rho_1 + \rho_2)P_0 \quad (6)$$

Для установившегося состояния можно написать следующие уравнения

$$P_{1,0}(k+1) - P_{1,0}(k) = P_{1,0+1,0}(\nu + \mu) + P_0\lambda_2 - P_{1,0}(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) = 0$$

$$P_{1,0+1,0}(1+\beta) = P_{1,0}(\rho_1 + \rho_2 + \mu) - P_0\rho_2$$

$$Z_{1+1}(1+\beta) = Z_1(1+\rho_1 + \rho_2) - P_0\rho_2 \; \mathbf{(7)}$$

$$P_{2,0}(k+1) - P_{2,0}(k) = P_{2,0} = P_{2,0+1,0}(\nu + 2\mu) + P_1\lambda_2 - P_{2,0}(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu) = 0$$

$$P_{2,0+1,0}(2+\beta)=P_{2,0}(\rho_1+\rho_2+2\mu)-P_1\rho_2$$

$$Z_{2+1}(2+\beta)=Z_2(2+\rho_1+\rho_2)-P_1\rho_2 \quad \textbf{(8)}$$

$$P_{1,1}(k+1)-P_{1,1}(k)=P_{1,1}=P_{0,1+0,1}(\nu+\mu)+P_0\lambda_2+P_0\lambda_1-P_{1,1}(\lambda_1+\lambda_2+2\mu)=0$$

$$P_{0,1+0,1}(1+\beta)+P_0\rho_2+P_0\rho_1-P_{1,1}(\rho_1+\rho_2+2)=0$$

$$\xi_{1+1}(1+\beta)=\xi_1(\rho_2+\rho_1+2)-P_0\left(\rho_2+\rho_1\right) \quad \textbf{(9)}$$

$$P_{1,1}(k+1)-P_{1,1}(k)=P_{1,1}=P_{0,1+0,1}(\nu+\mu)+P_0\lambda_2+P_0\lambda_1-P_{1,1}(\lambda_1+\lambda_2+2\mu)=0$$

$$P_{0,1+0,1}(1+\beta)+P_0\rho_2+P_0\rho_1-P_{1,1}(\rho_2+\rho_1+2)=0$$

$$\xi_{1+1}(1+\beta)=\xi_1(\rho_2+\rho_1+2)-P_0\left(\rho_2+\rho_1\right) \quad \textbf{(10)}$$

Теперь Рассматривая вероятностные состояния в очереди рассмотрим событие, относящееся к вероятности того, что все каналы заняты простыми заявками, а в очереди есть одна важная заявка, далее и рассуждая аналогичным для $n=2$ образом, можно получить следующую формулу, позволяющую рассчитать вероятность отказа в приоритетном обслуживании при $\rho_1=0,1;\rho_2=0,7$ приоритетной СМО для $n=3$

$$\xi_{3+3}=1,862*10^{-5} \quad (11)$$

Сравнивая формулы (4),(5), (8), найденные для $n=1,n=2,n=3$, можно построить заключительный график, иллюстрирующий важную зависимость вероятности ξ_{n+n} отказ в обслуживании приоритетных заявок в зависимости от числа каналов.

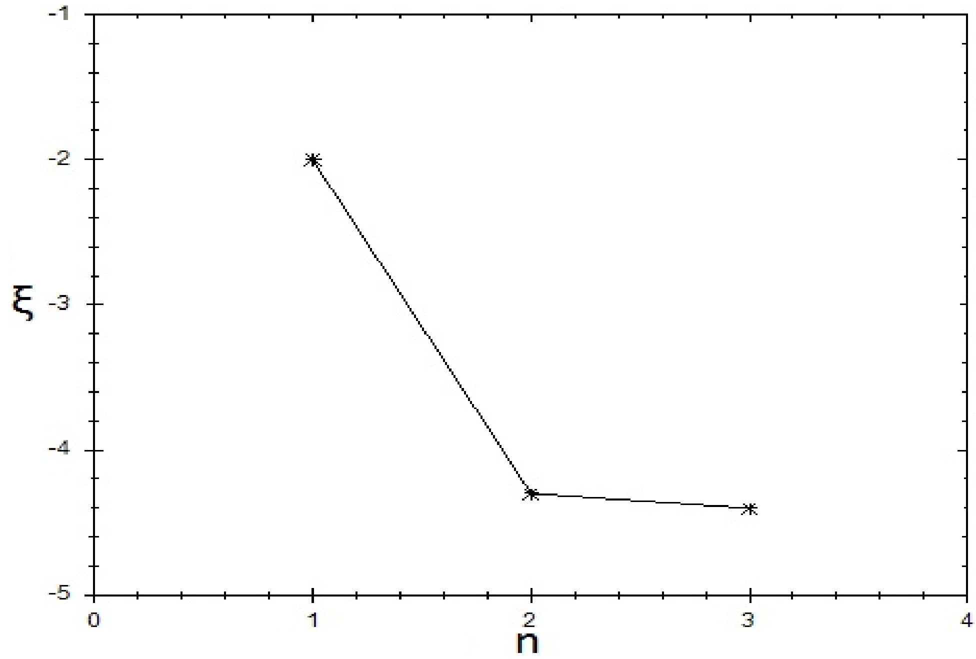

Рис.1. График зависимости вероятности отказа в приоритетном обслуживании от числа каналов

График показывает, что при заданной вероятности отказа можно начинать требуемое бчило каналов. Например, если рассмотреть случай много канального обслуживания пассажиров в аэропорту, то при вероятности $P_{n+n} = 10^{-4}$ получается, что пассажиры после аварийного принято будет быстро обслужены (как только освободится один из каналов) при $n = 5$

Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Получены формулы расчета вероятностей для многоканальной СМО с ожиданием, когда в системе (в канале или в очереди) одновременно может присутствовать только одна приоритетная заявка
2. Показано, что при n=1 и n>1 найденные формулы отличаются друг от друга.

3. Полученная аналитическая зависимость вероятности отказа в обслуживании приоритетной заявки от числа каналов позволяет назначить их минимальное количество, при котором эта вероятность не превышает заданного значения.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций.- М : Сов. Радио 1972.

2. Клейрок Л Вычислительные системы с очередями. М : Мир, 1979

3. Лебедев Г.Н, Тин Пхон Чжо, “Оценка эффективности организации взаимопомощи в многоканальных компьютерных и человеко-машинных системах массового обслуживания”. Труды IX всероссийская научно-технической конференции «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования» Тамбов, 2009 г.

Сведения об авторах

Тин Пхон Чжо, докторант Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.т.н.
Тел.: 8(925)046-0630; e-mail: thethtweaung@gmail.com

Горбачев Юрий Василевич, доцент кафедры Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.т.н.
Тел.: +7 (903) 793-0368

Гасанзаде К.И., студент Московского авиационного института (национального исследовательского университета).
Тел.: 8(915)173-4104; e-mail: hasanzade.kanan@gmail.com