

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 539.4:678.067

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186304>

EDN: <https://www.elibrary.ru/MTCWLY>

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ СТРУКТУР ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ, СПОСОБНЫХ ЗАПАСАТЬ УПРУГУЮ ЭНЕРГИЮ

Александр Николаевич Полилов¹ ✉, Николай Алексеевич Татусь², Тянь Шиаюн³

^{1,2}Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН

Москва, Россия

³Государственная ведущая лаборатория инженерии производственных систем,
Сианьский университет

Сиань, Китай

✉¹polilovan@mail.ru

³leoxyt@hotmail.com

Аннотация. В статье показана возможность создания профилированных композитных упругих элементов с постоянной площадью поперечного сечения, обеспечивающих за счет выбранных размеров трехкратное снижение массы при заданном прогибе и, следовательно, уровне запасаемой упругой энергии. Такой же эффект достигается с применением ветвления при изготовлении элементов

конструкций, напечатанных непрерывными волокнами с сохранением суммарной площади сечения ветвей, что означает одинаковое число волокон в каждом поперечном сечении. В природе это требование равенства суммарной площади ветвей принято называть Правилом Леонардо, и применительно к волокнистым композитам оно означает отсутствие перерезанных волокон, что важно для обеспечения высокой прочности. Ветвление может обеспечить дополнительные преимущества по сравнению с профилированной балкой с постоянной площадью сечений типа констэра, так как при ветвлении можно избежать значительной разориентации волокон и сохранить габариты, собирая «ветви» в пучок. Низкая энергоемкость 3D печати или пултрузии позволяет производить композитные упругие элементы непосредственно на орбите. Проведенное экспериментально-технологическое исследование подтвердило эффективность печати профилированных и ветвящихся упругих элементов в сравнении с традиционными композитными технологиями.

Ключевые слова: композитный материал, композит, аддитивная технология, низкомодульный и высокопрочный стеклопластик, 3D принтер, равнопрочная листовая пружина, непрерывные волокна, накопленная упругая энергия, ветвящаяся и профилированная структура, правило Леонардо, космическая конструкция.

Для цитирования: Полилов А.Н., Татусь Н.А., Тянь Шиаюнгу Анализ эффективности композитных структур для космических конструкций, способных запасать упругую энергию // Труды МАИ. 2025. № 144. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186304>

MECHANICS

Original article

ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF COMPOSITE STRUCTURES FOR SPACE STRUCTURES CAPABLE OF STORING ELASTIC ENERGY

Polilov A.N.^{1✉}, Tatus N.A.², Xiaoyong Tian³

^{1,2}Mechanical Engineering Research Institute named by A.A.Blagonravov,

Russian Academy of Sciences

Moscow, Russia,

³State Key Laboratory of Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University,

Xi'an, China

✉¹polilovan@mail.ru

³leoxyt@hotmail.com

Abstract. The study confirms that the mass of profiled composite sheet elastic elements with a constant cross-sectional area can be reduced by a factor of three thanks to their optimized geometry while maintaining the same amount of stored elastic energy. A similar effect can be achieved in a branched structure 3D printed using continuous fibers, while maintaining the total cross-sectional area of the branches, meaning an equal number of fibers in each section. In nature, this requirement for equal total branch area is known as Leonardo da Vinci's rule, and when applied to fiber composites, it means the absence of cut fibers, which is important for ensuring high strength. Branching can offer additional advantages over a profiled beam of constant cross-section, as it avoids significant fiber misorientation and maintains dimensions by assembling the "branches" into a bundle. This paper examines

beams of circular, rectangular, and square cross-sections, demonstrating methods for increasing elastic energy storage and the effectiveness of branching in such structures. Achieving specified values of stored elastic energy for composite branched structures with branches of varying cross-sections is demonstrated. It is shown that for beams under various types of loads, the mass reduction of any uniformly stressed beam depends only on the type of applied load. The low energy consumption of 3D printing or pultrusion allows for the production of composite elastic elements directly in orbit. The absence of size restrictions allows for the full realization of the properties of composite structures as elastic energy accumulators. Experimental and technological studies have confirmed the effectiveness of printing profiled and branched elastic elements compared to traditional composite technologies.

Keywords: composite material, additive technology, 3D printer, uninterrupted fibers, low-modulus and high-strength GFRP – glass-fiber-reinforced-plastic, stored elastic energy, equistrong leaf spring, branchy and shaped structure, Leonardo’s rule, space structure.

For citation: Polilov A.N., Tatus N.A., Xiaoyong Tian Analysis of the effectiveness of composite structures for space structures capable of storing elastic energy // Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.) <https://trudymai.ru/published.php?ID=186304>

Введение

Преимущества полимерных волокнистых композитов общеизвестны, и поэтому изучению механики композитов посвящен огромный пласт современной научной литературы [1-9]. Но эти преимущества не сводятся только к снижению массы конструкций и к повышению удельных упруго-прочностных характеристик.

Принципиальную роль в создании эффективных упругих элементов играет способность стеклопластика накапливать примерно в 50 раз большую, чем сталь, упругую энергию на 1 кг массы. Поэтому много статей посвящено проектированию и расчету композитных упругих элементов, работающих на изгиб [10-13]. Кроме того, современные аддитивные технологии позволяют изготавливать композитные детали сложной формы непосредственно на орбите благодаря низкой энергоемкости производства.

Наивысшими упруго-прочностными свойствами обладают однонаправленные композиты, нагруженные вдоль волокон. Но применительно к композитным упругим элементам определенные преимущества даёт «квази-однонаправленное» армирование, которое позволяет получать профилированные, равнопрочные листовые рессоры, обеспечивающие значительное снижение веса. Малая разориентация волокон при профилировании оказывается даже полезна - по аналогии со свилеватой древесиной, имеющей гораздо более высокое сопротивление расщеплению по сравнению с прямослойной. Это понятно каждому, кто пытался расколоть сучковатое полено. Но возможности профилирования композитных элементов крайне ограничены, как габаритами, так и снижением продольной прочности из-за разориентации волокон. Другой путь создания упругих элементов подсказывает Природа, создающая ветвящуюся крону дерева, способную накопить большую упругую энергию, благодаря высокой изгибной податливости, что позволяет деревьям противостоять губительному воздействию урагана [14]. При ветвлении композитной структуры можно сохранить непрерывные волокна,

уменьшить их разориентацию и ограничить габариты, собирая ветви в пучок, суммарная площадь сечения которого равна площади корневого сечения.

Цель настоящей статьи в теоретическом и экспериментальном обосновании эффективности использования ветвящихся и профилированных балочных элементов класса констэра (constarea) с постоянной суммарной площадью сечения для накопления упругой энергии.

1. Биомиметика – принципы создания Природой прочных «материалов - конструкций»

1А. Примеры

Существует международный термин «Bio-inspired methods», который можно перевести, как методы, подсказанные, «навеянные» Природой, и их следует применять при создании композитных материалов-конструкций. Можно привести много примеров заимствования опыта Природы в композитном проектировании. Так, например, эффективны био-подобные узлы крепления композитных деталей с криволинейной, равнонапряженной структурой укладки волокон, «обтекающих» отверстие (*fibers flow around the hole*), аналогичной структуре древесного сучка [15,16].

Изучение строения бамбука подсказывает метод выбора рациональных размеров звеньев композитных трубных конструкций для обеспечения равного сопротивления различным видам разрушения [17,18]. В связи с перспективностью биомиметических решений проблемами биомеханики занимаются, как биологи, так и инженеры-механики [19,20].

К особенностям проектирования композитных материалов-конструкций относится возможность совместной топологической оптимизации формы изделия и структуры криволинейного армирования, согласованной с возникающим полем напряжений. С этой целью разрабатываются специальные пакеты программ для управления аддитивными технологиями на основе компьютерной оптимизации структуры армирования: CAIO + CAM – computer-aided internal optimization + computer aided manufacturing.

1Б. Ветвление кроны дерева

В своих записных книжках (печатных научных журналов тогда не было) Леонардо да Винчи подметил следующее правило: «В кроне яблони сумма квадратов диаметров ветвей постоянна в любом горизонтальном сечении, т.е. одинакова до и после ветвления». Если для наглядности представить структуру древесины в виде непрерывных волокон, исходящих от корней и продолжающихся через ствол в ветви, то «правило Леонардо» означает одинаковое число волокон в стволе и в ветвях. В живой Природе, это правило выполняется лишь приблизительно [21-23], но создавая волокнистую композитную структуру, можно добиваться сохранения непрерывности и постоянной объемной доли волокон, и тогда «правило Леонардо» означает постоянство площади поперечных сечений в профилированной балке констэра [24,25] или постоянство суммарной площади ветвей в ветвящейся структуре [14]. Преимущества такой структуры состоят в возможности обеспечить равнопрочность при ограниченных габаритах и при почти однонаправленном армировании «ветвей».

1В. профилирование ветвей

Ещё Галилео Галилей, которого называли «величайшим учёным всех времён и народов», говорил о «божественной» форме балки, равнопрочной под действием собственного веса. Добавим – и под действием инерционных сил, что важно в невесомости, ведь инерционная масса в космосе соответствует гравитационной массе на Земле. Но Галилей не смог приблизиться к описанию формы равнопрочной тяжелой балки, так как дифференциальное исчисление было «открыто» позже – Ньютоном, родившимся в год смерти Галилея («эстафета гениев»). Позднее ряд задач о равнопрочных «тяжелых» балках удалось решить [26,27], но Природа, чувствуящая каким-то образом нагрузку и приспособляющаяся к ней, создает равнопрочные материалы-конструкции без всякого интегро-дифференциального исчисления, исходя из принципа минимума затрат. В данном случае – затрат материала, но это – отражение наиболее общего принципа механики – «принципа наименьшего действия», согласно которому реализуется то состояние или то движение, которое соответствует стационарному значению (минимуму) некоторого функционала, например, энергии.

2. Профилированные равнопрочные балки...

Замечание. Для наглядности в разделах 2-4 рассматриваются консольные балки постоянной длины l , нагруженные концевой силой P (рис.1) Отметим, что изложенные ниже задачи решаются в традиционной «четырежды линейной» постановке. Во-первых, гипотеза о физической линейности позволяет использовать закон Гука для малых деформаций. Во-вторых, изгибающий момент считается независимым от прогиба, хотя плечо приложенной силы несколько уменьшается. В-

третьих, используется гипотеза плоских сечений без учета влияния касательных напряжений, и, в-четвёртых, кривизна балки представляется второй производной от прогиба v : $k = v'' / (1 + v'^2)^{-3/2} \approx v''$.

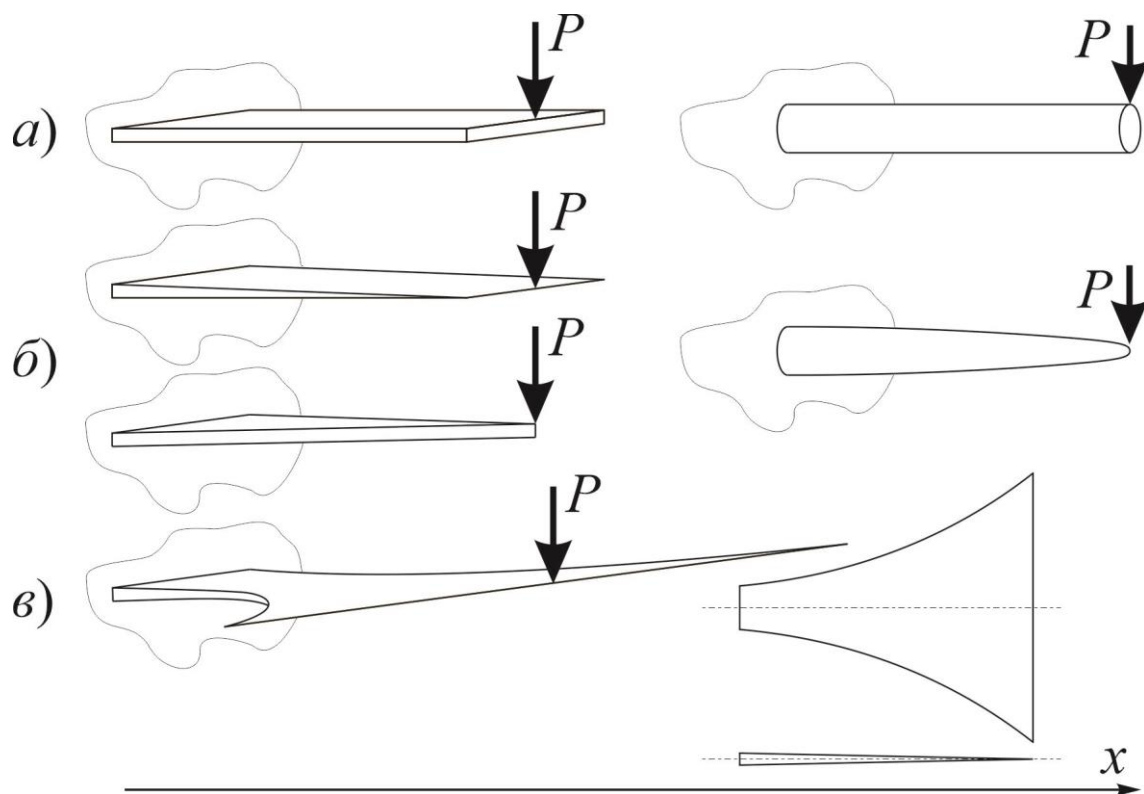


Рис.1 Консольные балки, нагруженные концевой силой: а) с постоянными размерами сечений, б) равнопрочные, в) равнопрочная балка констэра с постоянной площадью прямоугольных поперечных сечений: общий вид и проекции

2А... с переменным круговым сечением

Для кругового сечения имеется всего 2 параметра проектирования: диаметр корневого сечения $d(0)$ и показатель α_1 степенного закона его убывания:

$$d(\bar{x}) = d(0)(1 - \bar{x})^{\alpha_1}; \quad \bar{x} = x/l. \quad (1)$$

Условия прочности и равнопрочности означают возможность выдержать заданную нагрузку P_* , при этом в любом сечении максимальное изгибное напряжение одинаково и оно не должно превышать допустимого значения σ_* :

$$\frac{32P_*l}{\pi d^3(0)} = \frac{32P_*(l-x)}{\pi d^3(\bar{x})} \leq \sigma_* \Rightarrow d(0) = 2 \left(\frac{4P_*l}{\pi\sigma_*} \right)^{1/3}; \quad \alpha_1 = \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Максимальная накопленная упругая энергия найдётся по теореме Кастильяно, как половина произведения предельной силы на прогиб свободного конца балки:

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \frac{1}{2} P_* v(l) = \frac{32P_*^2 l^3}{\pi E d^4(0)} \int_0^1 \frac{(1-\bar{x})^2 d\bar{x}}{(1-\bar{x})^{4\alpha_1}} = \frac{32P_*^2 l^3 \delta_U}{3\pi E d^4(0)} = \\ &= \frac{\delta_U}{6E} \left(\frac{\pi P_*^2 \sigma_*^4 l^5}{4} \right)^{1/3}; \quad \delta_U = \frac{1}{1-4\alpha_1/3} = \frac{9}{5}. \end{aligned} \quad (3)$$

Масса такой равнопрочной балки (рис. 1б) легко находится через плотность ρ :

$$m = \frac{\pi}{4} \rho d^2(0) l \int_0^1 (1-\bar{x})^{2\alpha_1} d\bar{x} = m_0 \delta_m; \quad \delta_m = \frac{1}{1+2\alpha_1} = \frac{3}{5}. \quad (4)$$

В (4) и ниже индексом $_0$ отмечены значения массы, энергии, размеров, относящихся к балке с постоянными размерами сечений (в данном случае (4) - с круговым сечением), имеющей заданную прочность и ту же предельную упругую энергию, что и рассчитываемая профилированная балка.

Коэффициент снижения массы, как было показано в [8, 9]:

$$\delta_\Sigma = \frac{\delta_m}{\delta_U} = \frac{1-4\alpha_1/3}{1+2\alpha_1} = \frac{1}{3}. \quad (5)$$

Из (2)-(3) видно, что максимально возможная накопленная энергия однозначно определяется через предельную нагрузку, и её нельзя задать заранее, так как не удаётся с помощью двух параметров проектирования $d(0)$ и α_1 одновременно

удовлетворить трем условиям: по прочности, равнопрочности и заданной энергии $U_* = U_{\max}$. Необходимо добавить ещё один параметр проектирования: длину l или число n одинаковых конических равнопрочных балок, на каждую из которых будет приходиться нагрузка P_*/n (рис. 2). Тогда из (2)-(4) можно найти оптимальные значения числа балок n , диаметра $d_n(0)$ массы m

$$n = \frac{32Pl}{\pi d_n^3(0)\sigma_*}; d_n(0) = \frac{P_* l^2 \sigma_* \delta_U}{3EU_*}; m = \frac{\rho\pi n}{4} d_n^2(0)l\delta_m = \frac{24\rho EU_*}{\sigma_*^2} \delta_\Sigma. \quad (6)$$

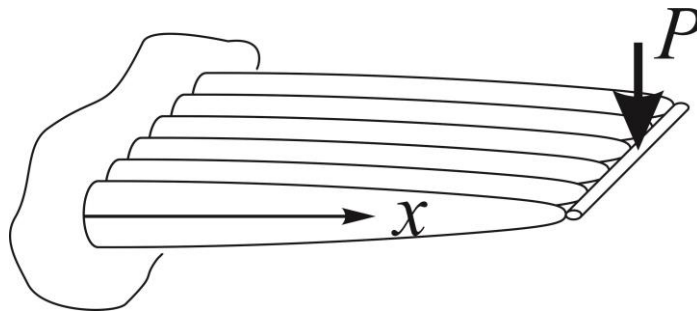


Рис. 2. Нагружение нескольких профилированных равнопрочных балок
круглого сечения

Выражения (5) и (6) показывают и ~~доказывают~~, что профилирование с выполнением условия равнопрочности приводит к трёхкратному снижению массы (или объема) балки по сравнению с балкой, имеющей постоянные размеры сечения.

Пример в п. 2А рассмотрен лишь в качестве иллюстрации: балку с подобным профилированием не удаётся напечатать непрерывными волокнами с помощью 3D принтера, а изменение сечения с помощью механической обработки недопустимо, так как разрушает волокна и приводит к снижению прочности.

2Б... с переменным квадратным сечением

Все выкладки и выводы п. 2А сохраняются для сечений в виде квадрата со стороной $d(\bar{x})$ с точностью до замены: момента сопротивления $\pi d^3(\bar{x})/32$ на $d^3(\bar{x})/6$, момента инерции $\pi d^4(\bar{x})/64$ на $d^4(\bar{x})/12$ и площади корневого сечения с $\pi d^2(0)/4$ на $d^2(0)$. Степень $1/3$ из (2) и коэффициент снижения массы (5) остаются теми же, а в выражении для минимальной массы (6) числовой коэффициент 24 заменяется на 18, то есть квадратное сечение с теми же габаритами эффективнее кругового по массе на 33%. Такой же вывод получается при сравнении прямоугольного сечения с эллиптическим.

2В... с переменными эллиптическими сечениями постоянной площади

Эффективно создать равнопрочную балку с переменным эллиптическим сечением с размерами $w(\bar{x})$ и $t(\bar{x})$, зависящими от координаты, но с постоянной площадью $w(\bar{x})t(\bar{x}) = w(0)t(0) = \text{const}$. Это условие означает одинаковое количество волокон в каждом сечении. Такая схема армирования может быть реализована при 3D печати непрерывными волокнами. Различие в ширине и толщине эллиптических сечений означает наличие четырёх независимых параметров проектирования: размеров корневого сечения $w(0)$; $t(0)$ и показателей α ; β :

$$w(\bar{x}) = w(0)(1 - \bar{x})^\alpha; \quad t(\bar{x}) = t(0)(1 - \bar{x})^\beta; \quad \bar{x} = x/l \in [0;1]. \quad (7)$$

Выбор этих параметров позволяет удовлетворить четырем условиям: по прочности, равнопрочности, упругой энергии и постоянной площади сечения (балка констэра – *constarea*).

Для переменного эллиптического сечения рассуждения и расчеты совпадают со случаем (см. п. 2Г) прямоугольных сечений с точностью до числовых коэффициентов. Традиция работы с металлами делала эллиптическое сечение некоторой трудно реализуемой экзотикой, однако использование 3D печати полимерных композитов с непрерывными волокнами позволяет сравнительно легко создавать стержни (балки, пластины) с произвольно меняющимися размерами сечений при сохранении их постоянной площади.

Условия прочности и равнопрочности аналогичны (2)

$$\frac{32P_*l}{\pi w(0)t^2(0)} = \frac{32P_*(l-x)}{\pi w(\bar{x})t^2(\bar{x})} \leq \sigma_* \Rightarrow \alpha + 2\beta = 1. \quad (8)$$

Условие сохранения площади сечения даёт:

$$\pi w(0)t(0) = \pi w(\bar{x})t(\bar{x}) \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -1; \beta = 1. \quad (9)$$

Требуемые размеры корневого сечения найдутся из условий прочности (8) и заданной энергии (3), (10):

$$\begin{aligned} U_* &= \frac{32P_*^2 l^3}{\pi E w(0)t^3(0)} \int_0^1 \frac{(1-\bar{x})^2 d\bar{x}}{(1-\bar{x})^{\alpha+3\beta}} = \frac{32P_*^2 l^3 \delta_U}{3\pi E w(0)t^3(0)}; \\ \delta_U &= \frac{U_{equistrong}}{U_{constsection}} = \frac{1}{1-\alpha/3-\beta} = 3; \\ w(0)t^3(0) &= \frac{32P_*^2 l^3 \delta_U}{3\pi E U_*}; \quad w(0)t^2(0) = \frac{32P_* l}{\pi \sigma_*} \Rightarrow \\ t(0) &= \frac{P_* \sigma_* l^2}{3E U_*} \delta_U; \quad w(0) = \frac{32(3E U_*)^2}{\pi \sigma_*^3 P_* l^3 \delta_U^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Минимально необходимая масса равнопрочного листа с эллиптическими сечениями найдётся по аналогии с (4), и она совпадает с (6):

$$m = \frac{\pi}{4} \rho w(0) t(0) l \int_0^1 \bar{x}^{\alpha+\beta} d\bar{x} = m_0 \delta_m; \quad \delta_m = \frac{1}{1+\alpha+\beta} = 1;$$

$$m = \frac{24 \rho E U_*}{\sigma_*^2} \delta_\Sigma; \quad \delta_\Sigma = \frac{\delta_m}{\delta_U} = \frac{1-\alpha/3-\beta}{1+\alpha+\beta} = \frac{1}{3}.$$
(11)

2Г... с прямоугольными сечениями типа констэра

Выражения для прямоугольного (индекс *r* - *rectangular*) и для эллиптического сечения (индекс *e* – *elliptic*) различаются только числовыми множителями:

$$I_e = \pi w t^3 / 64 \approx 0.05 w t^3 \rightarrow I_r = w t^3 / 12 \approx 0.083 w t^3;$$

$$W_e = \pi w t^2 / 32 \approx 0.1 w t^2 \rightarrow W_r = w t^2 / 6 \approx 0.167 w t^2;$$

$$S_e = \pi w t / 4 \approx 0.78 w t \rightarrow S_r = w t.$$
(12)

Из условий (8)–(10) легко найти требуемые ширину и толщину корневого сечения, а через них выразить массу равнопрочной балки:

$$w(0) t^3(0) = \frac{2 P_*^2 l^3 \delta_U}{E U_*}; \quad w(0) t^2(0) = \frac{6 P_* l}{\sigma_*} \Rightarrow$$

$$t(0) = \frac{P_* \sigma_* l^2 \delta_U}{3 E U_*}; \quad w(0) = \frac{6 (3 E U_*)^2}{\sigma_*^3 P_* l^3 \delta_U^2} \Rightarrow$$

$$m = \rho w(0) t(0) l \delta_m = \frac{18 \rho E U_*}{\sigma_*^2} \delta_\Sigma; \quad \delta_\Sigma = \frac{\delta_m}{\delta_U} = \frac{1-\alpha/3-\beta}{1+\alpha+\beta} = \frac{1}{3} \leftarrow \alpha + 2\beta = 1.$$
(13)

В (13) ещё раз подтвержден важный вывод, который обобщен в разд. 5: любая идеальная равнопрочная (при нагружении концевой силой) балка имеет в три раза меньшую массу, чем балка с постоянными размерами, удовлетворяющая тем же условиям по прочности и накопленной упругой энергии. Из (13), (11) видно, что при заданных прочности и жёсткости (!) балка с прямоугольными сечениями на треть легче, чем с эллиптическими или с круговыми.

2Д. Учёт ограничений по габаритам

Недостатком «идеальной» балки констэры является неограниченный рост ширины, что невозможно реализовать в «наземной» конструкции, например, в

автомобиле, где для сохранения габаритов, по сути, используется треугольная рессора, разрезанная на прямоугольные полосы разной длины. Но в конструкциях космического базирования ограничения по размерам гораздо менее строгие, и вполне возможно изготовить очень широкий упругий элемент, призванный поглощать энергию соударения, например, прибывающего корабля и орбитальной станции. Покажем, насколько ограничение по ширине (рис. 3) снижает эффективность накопления энергии равнопрочной балкой. Если ограничиться шириной $w^* = w(1 - \bar{a})$; $\bar{a} = a/l$, то необходимо на конце балки оставить участок длины a с постоянными размерами:

$$\begin{aligned} w(\bar{x}) &= w(1 - \bar{a}) = w^* = w(0) / \bar{a}; \\ t(\bar{x}) &= t(1 - \bar{a}) = t(0)\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = w(0) / w^*; \quad 1 - \bar{x} \leq \bar{a}. \end{aligned} \quad (14)$$

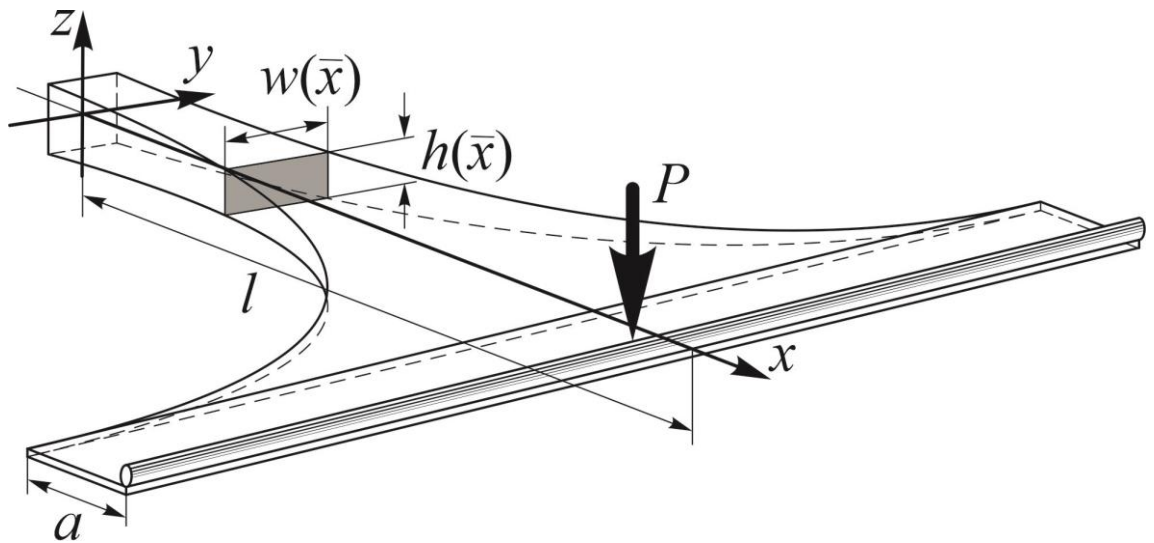


Рис. 3. Равнопрочная балка констрэ с концевыми участками

Условие прочности будет выполняться с запасом, а накопленная упругая энергия уменьшится:

$$\begin{aligned} U_* &= \frac{6P^2 l^3}{Ew(0)t^3(0)} \left[\int_0^{1-\bar{a}} \frac{(1-\bar{x})^2 d\bar{x}}{(1-\bar{x})^{\alpha+3\beta}} + \int_{1-\bar{a}}^1 \frac{(1-\bar{x})^2 d\bar{x}}{\bar{a}^{\alpha+3\beta}} \right] = U_0 \delta_U^*; \\ \delta_U^* &= \delta_U - (\delta_U - 1)\bar{a}^{3/\delta_U} = \delta_U \left[1 - (\alpha/3 + \beta)(\bar{a})^{3-\alpha-3\beta} \right] = 3 - 2\bar{a}. \end{aligned} \quad (15)$$

Например, если допустимо лишь двукратное увеличение ширины по сравнению с шириной корневого сечения, то $\bar{a}=0.5$, и профилирование сможет обеспечить снижение массы не в 3, а только в два раза. Заметим, что задача при «неидеальных» концах балки становится более сложной и связанной: коэффициент формы по энергии (15) становится зависящим не только от показателей степени, но и от допустимой ширины w^* , которая в свою очередь, через коэффициент формы, согласно (13) будет влиять на необходимые размеры корневого сечения.

Другой путь ограничения габаритов балки типа констэра состоит в её ветвлении, что позволяет собрать «ветви» в равнопрочный пучок с постоянной площадью сечения, а значит, примерно с теми же, что и в «корне», суммарными шириной и толщиной.

3. Ветвящиеся равнопрочные структуры...

3А. ...с круговыми сечениями

Рассмотрим цилиндрическую балку, которая (рис. 4) по правилу Леонардо разветвилась на N одинаковых балок с той же суммарной площадью:

$$d^2 = Nd_{N1}^2 \Rightarrow d_{N1} = d / \sqrt{N}. \quad (16)$$

В (16) d_{N1} – диаметр каждой «ветви-балки» после 1-го (второй индекс) ветвления. Расстояние от свободного края балки находится из (16) и из условия равенства напряжений в заделке исходной балки и в новых N балках в месте ветвления:

$$\frac{Pl}{\pi d^3} = \frac{Pl_{N1}}{N\pi d_{N1}^3} \Rightarrow \text{из (16)} \quad l_{N1} = l / \sqrt{N}. \quad (17)$$

В результате ветвления возрастают податливость и накопленная упругая энергия:

$$U_{N1} = \frac{P^2 l^3}{2E} \left\{ \frac{1}{I} \int_0^{1-\bar{l}_{N1}} (1-\bar{x})^2 d\bar{x} + \frac{1}{I_{N1}} \int_{1-\bar{l}_{N1}}^1 (1-\bar{x})^2 d\bar{x} \right\} = U_0 [1 + (N-1) \bar{l}_{N1}^3];$$

$$U_0 = \frac{P^2 l^3}{6EI}; \quad I = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_{N1} = N \frac{\pi d_{N1}^4}{64} = \frac{I}{N}; \quad \bar{l}_{N1} = \frac{l_{N1}}{l} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$
(18)

Из (18) выводится коэффициент возрастания упругой энергии, и этот коэффициент равен единице в крайних случаях при $N=1$ и при $N \rightarrow \infty$:

$$\delta_U = U_{N1} / U_0 = 1 + (N-1) N^{-3/2} \xrightarrow{N \rightarrow 1; N \rightarrow \infty} 1.$$
(19)

Из (19) легко определить оптимальное число «ветвей», при котором коэффициент роста упругой энергии максимален, и это число ветвей, на которое дереву выгодней всего ветвиться для роста податливости кроны - в данной постановке задачи - в точности равно трём:

$$d\delta_v / dN = 0 \Rightarrow 2N^{3/2} - 3N^{1/2}(N-1) = 0 \Rightarrow N_{opt} = 3.$$
(20)

Глядя на деревья в саду, можно заметить, что ветвление часто происходит именно на три ветви. При $N=3$; $\bar{l}_{31} = 1/\sqrt{3} \Rightarrow U_{31}/U_0 = 1 + 2/3^{3/2} \approx 1,38$.

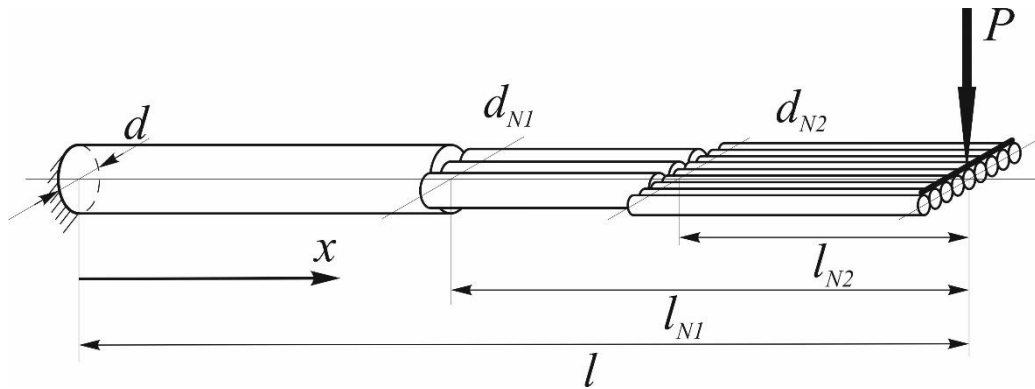


Рис. 4. Схема ветвление цилиндра с круговым сечением на равнопрочные цилиндрические «ветви»

Повышение накопленной упругой энергии при двух равнопрочных ветвлениях, сначала на три, а затем – на 9 (3 узла по 3 ветви) ветвей подсчитывается следующим образом:

$$U_{32} = \frac{P^2 l^3}{2E} \left\{ \frac{1}{I} \int_0^{1-\bar{l}_{31}} (1-\bar{x})^2 d\bar{x} + \frac{1}{I_{31}} \int_{1-\bar{l}_{31}}^{1-\bar{l}_{32}} \dots + \frac{1}{I_{32}} \int_{1-\bar{l}_{32}}^1 \dots \right\} =$$

$$= U_0 [1 + 2\bar{l}_{31}^3 + 6\bar{l}_{32}^3] = 1,61U_0; \quad I = 3I_{31} = 9I_{32}; \quad \bar{l}_{32} = \bar{l}_{31}^2 = 1/3.$$

Суммарная энергия, накопленная в ветвящейся упругой системе с n узлами ветвления, при условии образования N ветвей в каждом узле и выполнении при этом критерия равнопрочности (17), определяется выражением:

$$U_{Nn} = U_0 \left[1 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1 - N^{-1}) N^{-i/2} \right\} \right]. \quad (21)$$

Для «оптимального» числа ветвей $N=3$ выражение (21) есть сумма геометрической прогрессии $a_1(1 - q^n)/(1 - q)$ с начальным членом $a_1 = 2/3\sqrt{3}$ и знаменателем $q = 1/\sqrt{3}$. При возрастании числа «равнопрочных» ветвлений коэффициент увеличения накопленной упругой энергии стремится к конечному пределу: $\delta_U = U_{3n}/U_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + a_1/(1 - 1/\sqrt{3}) = 2/[3(\sqrt{3} - 1)] \approx 1,91$.

Этот предельный коэффициент меньше полученного для идеальной равнопрочной балки, что эквивалентно не плавному, а ступенчатому изменению размеров балки констрэра (рис. 3, 4). Чтобы повысить коэффициент накопленной энергии надо на каждом участке ветвления применять равнопрочное изменение размеров прямоугольных или эллиптических сечений. Круговая форма сечения этого не позволяет – не хватает числа параметров проектирования. Если формально представить себе, что можно проводить непрерывное фрактальное ветвление (на

нецелое число ветвей), то мы получим тот же трехкратный рост накопленной энергии. Из условия (17) при сохранении суммарной площади (16): $N(\bar{x}) = \bar{x}^{-2} \Rightarrow I(\bar{x}) = IN^{-1}(\bar{x})$, и энергия «идеально» ветвящейся балки:

$$U_{N(\bar{x})} = \frac{P^2 l^3}{2EI} \int_0^1 \bar{x}^2 N(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{P^2 l^3}{2EI} = 3U_0. \quad (22)$$

3Б. ...с прямоугольными сечениями

Ветвящуюся структуру можно создать, разрезав балку констэра по ширине, и получатся «ветви» с линейно убывающей толщиной, а суммарная ширина ветвей будет равна текущей ширине констэры. Такой метод подобен изготовлению традиционной стальной, многолистовой рессоры с листами разной длины, что (без учёта межлистового трения) эквивалентно замене равнопрочной треугольной балки на ступенчатую.

При разделении листа констэры на «ветви» сохраняются все условия по прочности, равнопрочности и накопленной энергии, а преимущества состоят в сохранении допустимых габаритов при собирании «ветвей» в пучок и в возможности создания почти однонаправленного армирования без нежелательной разориентации волокон.

3В. ...с эллиптическими сечениями

Разделить на части эллиптическое сечение так же просто, как прямоугольное, нельзя, поэтому необходим алгоритм печати (см. разд. 4) ветвящейся структуры с переменными размерами осей эллиптических сечений ветвей, обеспечивающими постоянство суммарной площади поперечного сечения и выполнение условия равнопрочности (равнонапряжённости) во всей конструкции.

4. Ветвящаяся профилированная конструкция с равнопрочным изменением размеров сечений

Поскольку изготовление балки с непрерывным (фрактальным) ветвлением (22) технически неосуществимо, для максимального накопления упругой энергии предлагается к ветвлению добавить равнопрочное изменение размеров прямоугольных или эллиптических сечений между узлами ветвления. Данный подход обеспечивает жесткость и прочность, аналогичные балке констэра, но при этом обладает двумя ключевыми преимуществами: сохраняется допустимая общая ширина пучка ветвей и в каждой отдельной ветви достигается практически однонаправленное продольное армирование

Хотя пример на рис. 5 может показаться неочевидным, принцип, ясный для прямоугольного сечения, оказывается полностью применим и к эллиптическому: для сохранения постоянной суммарной площади поперечного сечения S в узле ветвления необходимо обеспечить неизменность толщины материала t и суммарной ширины w пучка ветвей (рис. 5).

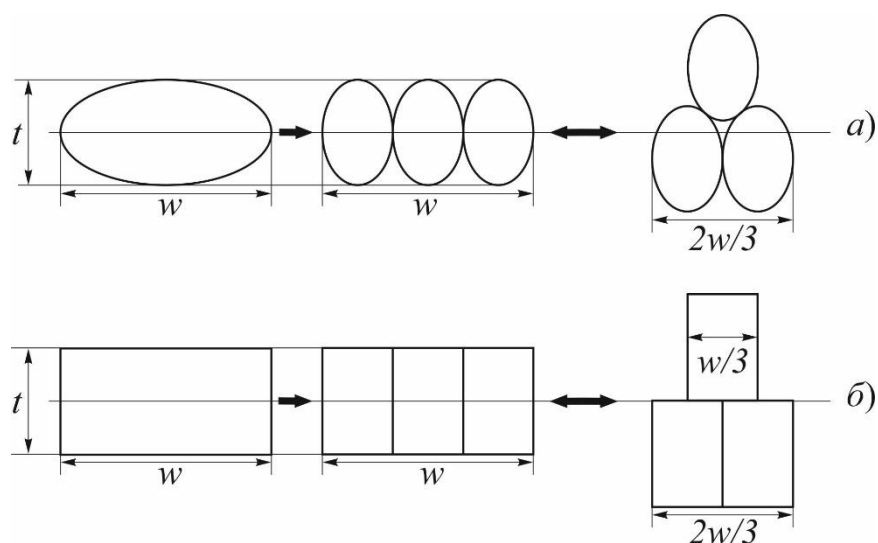


Рис. 5. Иллюстрация ветвления балки констэра с сохранением суммарной площади и равнопрочности

При ветвлении балок класса констэра на произвольное число ветвей ключевые характеристики сечения сохраняются неизменными: суммарная площадь S , момент сопротивления W и момент инерции I . Это гарантирует выполнение условий равнопрочности, прочности и момента инерции (жёсткости) системы до узла ветвления (индекс «-») и после него (индекс «+»).

$$\begin{aligned} S(\bar{x}_N^-) &= w(\bar{x}_N^-)t(\bar{x}_N^-) = Nw_N(\bar{x}_N^+)t_N(\bar{x}_N^+) = S_N(\bar{x}_N^+); \\ W(\bar{x}_N^-) &= w(\bar{x}_N^-)t^2(\bar{x}_N^-)/6 = Nw_N(\bar{x}_N^+)t_N^2(\bar{x}_N^+)/6 = W_N(\bar{x}_N^+) \Rightarrow \\ t(\bar{x}_N^+) &= t_N(\bar{x}_N^-); w(\bar{x}_N^-) = Nw_N(\bar{x}_N^+) \Rightarrow \\ I(\bar{x}_N^-) &= w(\bar{x}_N^-)t^3(\bar{x}_N^-)/12 = Nw_N(\bar{x}_N^+)t_N^3(\bar{x}_N^+)/12 = I(\bar{x}_N^+). \end{aligned} \quad (23)$$

5. Возможное снижение массы профилированных балок при разных типах нагрузок

Представим, что приложенный к консольной балке изгибающий момента меняется по степенному закону:

$$M(\bar{x}) = M(0)(1-\bar{x})^\gamma. \quad (24)$$

Концевая сила соответствует $\gamma=1$, равномерная нагрузка - $\gamma=2$, линейно распределённая нагрузка - $\gamma=3$ (Рис. 6).

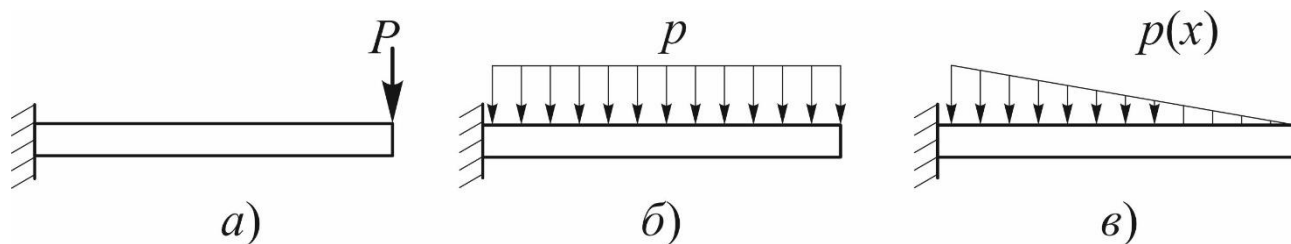


Рис. 6. Виды нагружения: а – концевая сила $\gamma=1$; б – равномерная $\gamma=2$ и линейно меняющаяся ($\gamma=3$) распределенная нагрузка

Упругая энергия, запасаемая в балке с изменяющимися по закону (7) размерами сечений, зависит от изменяющегося по длине изгибающего момента (24):

$$U_* = \frac{6}{E} \int_0^l \frac{M^2(\bar{x})}{w(\bar{x})t^3(\bar{x})} d\bar{x}. \quad (25)$$

На основе заданных условий по прочности и накапливаемой упругой энергии рассчитываются размеры корневого сечения, а также коэффициенты возрастания энергии δ_U и снижения массы δ_m :

$$\begin{aligned} 1. \sigma_* &= \frac{6M(0)}{w(0)t^2(0)}; \quad 2. U_* = \frac{6M^2(0)l}{Ew(0)t^3(0)} \int_0^1 (1-\bar{x})^{2\gamma-\alpha-3\beta} d\bar{x} = \frac{6M^2(0)l}{Ew(0)t^3(0)} \times \frac{1}{1+2\gamma-\alpha-3\beta}; \\ \text{из 1.-2.} \Rightarrow t(0) &= \frac{\sigma_* M(0)l}{U_* E (1+2\gamma-\alpha-3\beta)} = t_0 \delta_U; \quad w(0) = \frac{6U_*^2 E^2 (1+2\gamma-\alpha-3\beta)^2}{\sigma_*^3 M(0)l^2} = w_0 \delta_U^2 \Rightarrow (26) \\ \delta_U &= \frac{1+2\gamma}{1+2\gamma-\alpha-3\beta}; \quad \delta_m = \frac{1}{1+\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Здесь $w_0; t_0$ - это размеры сечения обычной прямоугольной балки (без профилирования), которая обладает требуемой прочностью и способностью накапливать ту же упругую энергию.

Выполнение условия равнопрочности

$$\frac{6M(0)(1-\bar{x})^\gamma}{w(\bar{x})t^2(\bar{x})} = \frac{6M(0)}{w(0)t^2(0)} = \text{const} \Rightarrow \alpha + 2\beta = \gamma \quad (27)$$

позволяет рассчитать массу профилированной балки через массу эквивалентной прямоугольной:

$$m = \rho w(0)t(0)l\delta_m = \rho w_0 t_0 l \frac{\delta_m}{\delta_U} = m_0 \delta_\Sigma. \quad (28)$$

Из условия (27) $\alpha = \gamma - 2\beta$:

$$\delta_\Sigma = \frac{\delta_m}{\delta_U} = \frac{1+2\gamma-\alpha-3\beta}{(1+2\gamma)(1+\alpha+\beta)} = \frac{1}{1+2\gamma}. \quad (29)$$

Результат (29) означает, что коэффициент снижения массы любой (идеальной) равнонапряженной балки зависит только от типа приложенной нагрузки: для сосредоточенной силы масса снижается в три раза, для распределённой нагрузки – в 5, для растущей от свободного края к корню-заделке – в 7 раз.

6. Технология изготовления ветвящихся и профилированных балок 3D печатью непрерывными волокнами

Современные технологии позволяют получать изделия сложной формы с оптимальными траекториями укладки непрерывных волокон [28-30].

Траектории волокон в балке констэра

Изменение по длине размеров «идеальной» балки констэра описывается степенными зависимостями (7). Чтобы учесть в расчёте прогиба влияние как формы балки, так и разориентации волокон, требуется принять конкретную модель их пространственного распределения.

Для проведения аналитического исследования целесообразно использовать принцип «размазывания», при котором учитывается лишь ориентация бесконечно тонкого волокна в каждом сечении. Траектории волокон согласуются с формой профилирования балки (7) и определяются начальными координатами $y(0)$, $z(0)$ в корневом сечении:

$$y(\bar{x}) = y(0)(1 - \bar{x})^\alpha; \quad z(\bar{x}) = z(0)(1 - \bar{x})^\beta; \quad \bar{x} = x/l; \quad \alpha = -1; \quad \beta = 1. \quad (30)$$

Производные функций (30) соответствуют тангенсам углов φ_1 и φ_2 , определяющих наклон волокон в плоскостях xu и xz соответственно:

$$\frac{d\bar{y}(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{\bar{y}(0)}{(1-\bar{x})^2} = \varphi_1; \quad \frac{d\bar{z}(\bar{x})}{d\bar{x}} = -\bar{z}(0) = \varphi_2; \quad \bar{y} = \frac{y}{l}; \quad \bar{z} = \frac{z}{l}. \quad (31)$$

Как показано на Рис. 7, угол разориентации φ (между осью волокна 1 и осью x) вычисляется через проекции элемента волокна (dx , dy , dz) на координатные оси.

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+A}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{A}; \quad A = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2. \quad (32)$$

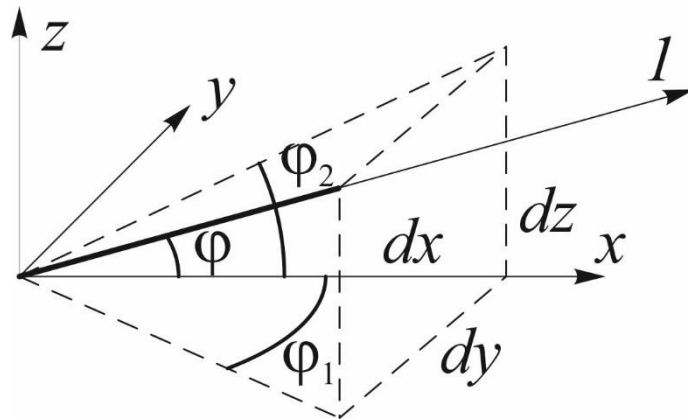


Рис. 7. Схема вычисления локального угла разориентации «волокна»

После определения угла разориентации из соотношения (32) можно приближенно рассчитать локальное значение модуля Юнга E_x , который зависит от координат x , $y(x)$, $z(x)$, связанных с начальными координатами каждого волокна $y(0)$, $z(0)$ соотношениями (30):

$$E_x(x, y, z, \varphi) \approx E_1^0 \cos^4 \varphi = \frac{E_1^0}{(1+A)^2}. \quad (33)$$

Траектории (30) можно использовать для управления головкой 3D принтера при печати профилированных балок.

Заключение

Оценка эффективности применения композитов в упругих элементах конструкций космического базирования основана на анализе различных эффектов.

Прямой эффект: низкая плотность и модуль упругости стеклопластиков позволяют значительно снизить массу конструкции и увеличить запас упругой энергии по сравнению с металлическими аналогами. **Технологический эффект** заключается в возможности создания профилированных и ветвящихся упругих элементов, а также изделий со сложной геометрией композитными технологиями - пултрузией, пулформингом и 3D-печатью - непосредственно в открытом космосе, благодаря низкой энергоемкости этих производственных процессов, что особенно критично в условиях космического пространства. Конструкционный эффект от использования ветвящейся структуры заключается в сокращении габаритов упругого элемента в виде пучка ветвей по сравнению с широкой балкой типа «констэра», кроме того, такая конструкция сохраняет однонаправленность траекторий волокон в отдельных ветвях.

Выводы

Использование ветвящихся и профилированных композитных элементов особенно эффективно для упругих систем космического назначения, где отсутствуют строгие габаритные ограничения, характерные для наземных применений (например, в автомобильных подвесках). Способность таких элементов накапливать значительную упругую энергию обеспечивает защиту конструкций от повреждений при ударных воздействиях. Применение низкомодульных высокопрочных стеклопластиков позволяет достичь 20-кратного снижения массы упругих элементов по сравнению со стальными аналогами.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Соглашение № 075-15-2025-646 от 20.08.2025 г.

Список источников

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. 2-е изд. М.: "Наука". - 1988. - 712с.
2. Васильев В.В. и др. Композиционные материалы: Справочник. - М.: Машиностроение, 1990. -512 с.
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Серия "Библиотека расчетчика". - М.: Машиностроение - 1984. - 264 с.
4. Gordon. J.E. The New Science of Strong Materials. Or Why You Don't Fall through the Floor. Princeton university press - 2018. - 328 p. - ISBN 9780691180984.
5. Малинин Н.Н. Надёжность, прочность, красота. - М.: Academia. - 2016. - 288 с.
6. Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов (2-е издание). - М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2016. - 376 с.
7. Gibson R. F. Principles of composite material mechanics. Third Edition. CRC Press Content. - 2011. - 683 p.
8. Раскутин А.Е., Соколов И.И. Углепластики и стеклопластики нового поколения // Труды ВИАМ. - 2013. - № 4. - С. 9-15.
9. Баженов С.Л., Берлин А.А., Кульков А.А., Ошмян В.Г. Полимерные композиционные материалы. Прочность и технология. - Долгопрудный. "Интеллект". - 2010. - 352 с.

10. Пархиловский И.Г. Автомобильные листовые рессоры - М.: Машиностроение. - 1978. -232 с.
11. Осипенко М.А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами, искривленными по дуге окружности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2013. - № 1. - С. 142-152.
12. Русланцев А.Н., Думанский А.М., Алимов М.А. Модель напряженно-деформированного состояния криволинейной слоистой композитной балки. Труды МАИ. - 2017. - № 96. - С. 1-15.
13. Боровков А.И., Мамчиц Д.В., Немов А.С., Новокшенов А.Д. Задачи моделирования и оптимизации панелей переменной жесткости и конструкций из слоистых композитов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 2018. - № 1. - С. 113-122.
14. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Проектирование разветвляющихся или профилированных композитных элементов по аналогии со структурой кроны дерева // Проблемы машиностроения и надежности машин - 2017. - № 4. - С. 76-84.
15. Cho H.R., Rowlands R.E. Optimizing fiber direction in perforated orthotropic media to reduce stress concentration// Journal of Composite Materials. - 2009. - Vol. 43. - № 10. - pp. 1177 - 1198.
16. Spickenheuer A., Schulz M., Gliesche K., Heinrich G. Using tailored fibre placement technology for stress adapted design of composite structures// Plast. Rubber Compos. - Macromol. Eng. - 2008. - Vol. 37. - № 5. - pp. 227-232.
17. Wegst U.G.K., Ashby M.F. The structural efficiency of orthotropic stalks, stems and tubes// J. Mater. Sci. - 2007. - Vol. 42. - pp. 9005-9014.

18. Schulgasser K., Witztum A. On the strength of herbaceous vascular plant stems//Annals of Botany. - 1997. - Vol. 80. - pp. 35-44.
19. Осипенко М.А., Няшин Ю.И. Об оптимизации упругого элемента протеза стопы // Российский журнал биомеханики. - 2011. - Т. 15. - № 2. - С. 16-23.
20. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Биомеханика прочности волокнистых композитов. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2018. - 328 с. - ISBN 978-5-9221-1760-9.
21. Eloy C. Leonardo's rule, self-similarity and wind-induced stresses in trees // arXiv: 1105.2591v2 [physics. Bio-ph]. - 15 Nov. 2011.
22. Minamino R., Tateno M. Tree branching: Leonardo da Vinci's rule versus biomechanical models // Open Access available online. Plos one/ www. Plosone. Org, April 2014. - Vol. 9. - Issue 4. - e 9535.
23. Eloy C., Fournier M., Lacointe A., Moulia B. Wind loads and competition for light sculpt trees into self-similar structures // Nat. Commun. 2017.— 8 - 1014.
24. Полилов А.Н., Татусь Н.А., Шабалин В.В. Особенности проектирования упругих элементов в виде профилированных композитных балок // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2011. - № 6. - С. 34-41.
25. Полилов А.Н., Татусь Н.А., Плитов И.С. Оценка влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2013. - № 5. - С. 58 - 67.
26. Черепанов Г.П. Равнопрочный тяжелый брус: решение проблемы Галилея // Физическая мезомеханика. - 2016. - Т. 19. - № 1. - С. 84-88.

27. Власов Д.Д., Полилов А.Н., Склёмина О.Ю., Татусь Н.А. Нелинейные задачи изгиба (от балки Галилея до композитной панели). М.: Изд-во АСВ. 2024. 452 с. ISBN 978-54323-0522-0
28. Даулбаев Ч.Б., Дмитриев Т.П., Султанов Ф.Р., Мансуров З.А., Алиев Е.Т. Получение трехмерных наноразмерных объектов на установке "3d-принтер + электроспиннинг" // Инженерно-физический журнал. - 2017. - Т. 90. - № 5. - С. 1175-1178.
29. Григорьев С.Н., Красновский А.Н. Направления развития технологий изготовления изделий из полимерных композиционных материалов способом намотки // Вестник МГТУ Станкин. 2011. № 3. С. 95-98.
30. Вешкин Е.А. Особенности безавтоклавного формования низкопористых ПКМ // Труды ВИАМ. - 2016. - № 2 (38). - С. 7-13.

References

1. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruемого tverdogo tela [Mechanics of Solids]. izd. Moscow, Nauka, 1988, 712 p. (in Russian)
2. Vasil'ev V.V. et al. Kompozicionnye materialy: Spravochnik [Composite Materials: Handbook]. Moscow, Mashinostroenie, 1990, 512 p. (in Russian)
3. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov V.G. Raschet mnogoslojnyh plastin i obolochek iz kompozicionnyh materialov. Seriya "Biblioteka raschetchika" [Calculation of multi-layered plates and shells of composite materials. Series "Calculator Library"]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 264 p. (in Russian)
4. Gordon J.E. The New Science of Strong Materials Or Why You Don't Fall through the Floor. Princeton University Press, 2018, 328 p. - ISBN 9780691180984.

5. Malinin N.N. Nadyozhnost', prochnost', krasota [Reliability, strength, beauty]. Moscow, Academia, 2016, 288 p. (in Russian)
6. Polilov A.N. Eksperimental'naya mekhanika kompozitov (2-e izdanie) [Experimental Mechanics of Composites (2nd edition)]. Moscow, Bauman MSTU, 2016, 376 p. (in Russian)
7. Gibson R. F. Principles of composite material mechanics. Third Edition. CRC Press Content, 2011, 683 p.
8. Raskutin A.E., Sokolov I.I. Ugleplastiki i stekloplastiki novogo pokoleniya [New generation of carbon and fiberglass] Trudy VIAM. 2013, no. 4, pp. 9-15.
9. Bazhenov S.L., Berlin A.A., Kul'kov A.A., Oshmyan V.G. Polimernye kompozicionnye materialy. Prochnost' i tekhnologiya [Polymer composite materials. Strength and technology]. Dolgoprudnyj, Intellect, 2010, 352 p. (in Russian)
10. Parhilovskij I.G. Avtomobil'nye listovye resory [Automobile leaf springs]. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 232 p. (in Russian)
11. Osipenko M.A. A contact problem for bending of two-leaf spring with the leaves curved along the circular arc. PNRPU Mechanics Bulletin. 2013, no. 1, pp. 142-152.
12. Ruslancev A.N., Dumanskij A.M., Alimov M.A. Model' napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya krivolinejnoj sloistoj kompozitnoj balki [The stressed-deformed state model of curvilinear composite beam]. Trudy MAI. 2017, no. 96, pp. 1-15.
13. Borovkov A.I., Mamchits D.V., Nemov A.S. and Novokshenov A.D. Problems of Modeling and Optimization of Variable-Hardness Panels and Structures Made of Layered Composites. Mechanics of Solids, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 93–100.

14. Polilov A.N., Tatus N.A. Designing branching or shaped composite elements by analogy with the structure of treetops. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017, vol. 46, no. 4, pp. 385-393.
15. Cho H.R., Rowlands R.E. Optimizing fiber direction in perforated orthotropic media to reduce stress concentration. *Journal of Composite Materials*. 2009, vol. 43, no. 10, pp. 1177 - 1198.
16. Spickenheuer A., Schulz M., Gliesche K., Heinrich G. Using tailored fibre placement technology for stress adapted design of composite structures. *Plast. Rubber Compos. Macromol. Eng.* 2008, vol. 37, no. 5, pp. 227-232.
17. Wegst U.G.K., Ashby M.F. The structural efficiency of orthotropic stalks, stems and tubes. *J. Mater. Sci.* 2007, vol. 42, pp. 9005-9014.
18. Schulgasser K., Witztum A. On the strength of herbaceous vascular plant stems. *Annals of Botany*. 1997, vol. 80, pp. 35-44.
19. Osipenko M.A., Niashin Iu.I. Ob optimizatsii uprugogo elementa proteza stopy. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*. 2011, vol. 15, no. 2, pp. 16-23.
20. Polilov A.N., Tatus N.A. Biomekhanika prochnosti voloknistykh kompozitov [Strength biomechanics of fibrous composites]. Moscow, FIZMATLIT, 2018, 328 p., ISBN 978-5-9221-1760-9. (in Russian)
21. Eloy C. Leonardo's rule, self-similarity and wind-induced stresses in trees. arXiv: 1105.2591v2 [physics. Bio-ph]. 15 Nov. 2011.
22. Minamino R., Tateno M. Tree branching: Leonardo da Vinci's rule versus biomechanical models. Open Access available online. *Plos one/www.Plosone. Org*, April 2014, vol. 9, issue 4, e 9535.

23. Eloy C., Fournier M., Lacointe A., Moulia B. Wind loads and competition for light sculpt trees into self-similar structures. *Nat. Commun.*, 2017. 8, 1014.
24. Polilov A.N., Tatus N.A., Shabalin V.V. Peculiarities of constructing elastic elements in the form of shaped composite beams. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2011, vol. 40, no. 6, pp. 532-537.
25. Polilov A.N., Tatus N.A., Plitov I.S. Estimating the effect of misorientation of fibers on stiffness and strength of profiled composite elements. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2013, vol. 42, no. 5, pp. 390-397.
26. Cherepanov G.P. Equistrong heavy beam: solving the problem of Galileo Galilei. *Fizicheskaya mekhanika*. 2016, vol. 19, no. 1. pp. 84-88.
27. Vlasov D.D., Polilov A.N., Sklemina O.Yu., Tatus' N.A. *Nelineinije zadachi izgiba (ot balki Galileja do kompozitnoi paneli)* [Non-linear bending problems (From Galileo's beam to composite panel)]. Moscow. Izd-vo ACB. 2024. 452 c. ISBN 978-54323-0522-0. (in Russian)
28. Daulbaev C.B., Dmitriev T.P., Sultanov F.R., Mansurov Z.A., Aliev E.T. Obtaining Three-Dimensional Nanosize Objects on a "3D Printer + Electrospinning" Machine. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2017, vol. 90, no. 5, pp. 1115-1118.
29. Grigor'ev S.N., Krasnovskij A.N. *Napravleniya razvitiya tekhnologij izgotovleniya izdelij iz polimernyh kompozicionnyh materialov sposobom namotki* [Directions of development of manufacturing techniques of products from polymeric composite materials in the way of winding]. *Vestnik MGTU Stankin*. 2011, no. 3, pp. 95-98.
30. Veshkin E.A. *Osobennosti bezavtoklavnogo formovaniya nizkoporistykh PKM*. *Trudy VIAM*. 2016, no. 2 (38), pp. 7-13.