На правах рукописи

Симкина Анастасия Вячеславовна

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ И ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Специальность 2.3.1.
Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2026 год

Работа выполнена в
федеральном государственном автономном образовательном учреждении
высшего образования «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Научный руководитель: **Ибрагимов Данис Наилевич**, д.ф.-м.н., без ученого звания, профессор кафедры 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» МАИ

Официальные оппоненты: **Балашов Максим Викторович**, д.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории №7 «Адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина» Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Урюпин Илья Вадимович, к.ф.-м.н., младший научный сотрудник отдела 62 «Информационные технологии управления и моделирования информационных систем» отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных» федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН

Ведущая организация: «Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт программных систем им. А. К. Айламазяна Российской академии наук»

Защита состоится «5» июня 2026 года в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.327.02 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=187668

Автореферат разослан «___» ______________ 2026 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ

Ученый секретарь диссертационного совета 24.2.327.02, д.ф.-м.н. — Рассказова Варвара Андреевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию предельных множеств 0-управляемости и достижимости линейных дискретных автономных систем с геометрическими ограничениями на управление. Алгоритмы построения предельных множеств (или их оценок) строятся на основе их аналогов за конечное число шагов. Для линейных непрерывных систем выпуклость множества достижимости вытекает из свойств интеграла Ауманна и является следствием теоремы Ляпунова о векторной мере, доказанной в 1940-м году. 1950-е гг. ознаменовались становлением современной математической теории оптимального управления. Классические исследования данных множеств связаны с системами с геометрическими (позиционными) ограничениями, которые требуют, чтобы управляющий сигнал в любой момент времени не выходил за границы допустимой области. С помощью них учитываются конструктивные возможности управляемого устройства (нельзя отклонять рули более чем на определенный угол, двигатель имеет ограниченную тягу и так далее). Впервые свойства множеств достижимости и управляемости для случая геометрических ограничений были получены в трудах Красовского Н.Н. и развиты в работах Субботина А.И., Куржанского А.Б., Черноусько Ф.Л., Ушакова В.Н., Комарова В.А., Филипповой Т.Ф. Также ими была развита теория множеств и трубок достижимости при неопределенности. При обратном времени эти трубки совпадают по своим основным свойствам с понятиями альтернированного интеграла Л.С.Понтрягина и моста Н.Н.Красовского.

Методы построения и оценивания предельного множества 0-управляемости особенно важны при решении задачи быстродействия, которая занимает одно из центральных мест в теории оптимального управления, в частности, линейная проблема быстродействия, систематическое исследование которой впервые дано в работах Гамкрелидзе Р.В. Он впервые применил для решения методы, основанные на принципе максимума Понтрягина, который дает необходимое условие оптимальности. Исследованием задач быстродействия занимались Болтянский В.Г., Моисеев Н.Н., Евтушенко Ю.Г. и др. Эта задача имеет свои особенности для дискретного времени, тогда как в непрерывном случае её решение уже давно известно из работ Болтянского В.Г. и Понтрягина Л.С. и основывается на использовании релейного управления. Для дискретных систем используется подход, основанный на применении множеств 0-управляемости. Подробные методы решения данной задачи изложены в статьях Ибрагимова Д.Н. Однако в этих работах предполагается разрешимость исходной задачи быстродействия, но не приводятся необходимые и достаточные условия выполнимости этого факта. С другой стороны, имея возможность построить предельное множество 0-управляемости или его оценку, можно определить, разрешима ли задача быстродействия в принципе для ряда начальных состояний.

Для непрерывных систем известны результаты, в которых получены разного рода количественные соотношения, позволяющие строить множества достижимости конкретных управляемых систем. Знание множеств достижимости позволяет эффективно решать сложные задачи без дополнительных затруднений, так как все фактические трудности задач сосредоточены в процессе нахождения множеств достижимости, поэтому заслуживают внимания эффективные методы аппроксимации этих множеств. Основной вопрос, который рассматривался во многих работах — какой математической конструкцией может быть охарактеризована динамика множества достижимости. Для описания эволюции множеств достижимости в фазовом пространстве системы используются четыре основных способа представления множеств в конечномерном пространстве: поточечное описание, представление в виде линий уровня гладких функций, задание опорными функциями, а также параметрическое описание границы. В случае когда множество достижимости выпукло, оно полностью определяется своей опорной функцией и его динамику отражает дифференциальное уравнение для опорной функции. Способ представления множеств достижимости, основанный на аппарате опорных функций и опорных гиперплоскостей, получил свое развитие в работах Горанова А.Ю., Благодатских В.И.

Поскольку точное построение множеств достижимости, как правило, является очень сложной задачей, были разработаны различные численные методы для их аппроксимации. Многообразие различных методик было создано для получения как можно более точных приближений, в частности, с использованием политопов с большим числом вершин или объединений большого числа точек, что рассматривалось в работах Брусникиной Н.Б., Зыкова И.В. и других. Однако такие методы могут требовать значительных вычислений, особенно для систем большой размерности. Другие методики основаны на оценке множеств с помощью областей фиксированной формы и активно применяются для дискретных систем.

Начиная с основополагающих работ Куржанского А.Б., Черноусько Ф.Л. и Швеппе Ф.С., получила развитие техника аппроксимации множеств достижимости с помощью конечнопараметрических множеств, в частности эллипсоидов. В этих исследованиях были получены внешние и внутренние эллипсоидальные оценки, выражаемые через решения специальных эволюционных уравнений. Важный результат из работ Куржанского А.Б. – возможность достижения сколь угодно точных двусторонних приближений для множеств достижимости и многозначных интегралов путем пересечения внешних и объединения внутренних эллипсоидальных оценок при варьировании управляющих параметров. Основное преимущество данного подхода – получение приближенных решений с использованием относительно простых инструментов. Дальнейшее развитие эллипсоидальных методов аппроксимации, включая их распространение на отдельные классы нелинейных систем, представлено в работах Овсеевич А.И., Филипповой Т.Ф., Подкучаева В.А.. Одно из направлений развития этого подхода связано с работами Abedor J., Поляка Б.Т. и состоит в построении общей квадратичной функции Ляпунова, который приводит к построению инвариантных эллипсоидов, которые исследуются в работах Хлебникова М.В. Параллельно с эллипсоидальными оценками разрабатывались альтернативные подходы к оценке множеств достижимости с использованием другого класса конечнопараметрических множеств - параллелотопов (например, в работах Костоусовой Е.К.). Алгоритмы построения множеств достижимости, основанные на дискретных аппроксимациях, изучались в публикациях Гусейнова К.Г., Горанова А.Ю.

Проблема построения множеств достижимости для дискретных систем активно развивается в последнее время. В работах Desoer S.A., Lin W.S., Hamza M.H. показано, что множество достижимости может быть описано системой линейных неравенств. Исследование геометрических свойств множеств достижимости линейных дискретных систем с ограничениями на управление приведено в работах Colonius F., Benvenuti L., Evans M.E., Son N.K. На сегодняшний день активно развиваются методы оценки множеств достижимости для различных классов дискретных систем. Для дискретных систем, как и для непрерывных, используется подход к построению множеств достижимости с помощью эллипсоидальных аппроксимаций. В работе Ge S.S. исследуется связь множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных переключаемых систем. В статьях Corradini M.L., Hu T. приведены оценки множеств 0-управляемости линейных дискретных систем с насыщением. Также известны аналитические представления множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞-нормы.

Для предельных аналогов тематика оценивания представляет собой относительно новое направление исследований, что подтверждается ограниченным количеством публикаций в данной области. Несмотря на растущий интерес к проблеме, многие аспекты остаются недостаточно изученными, что определяет актуальность настоящего исследования. Для предельных множеств сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности. Однако большинство работ либо сосредоточены на исследовании общих свойств предельных множеств достижимости и 0-управляемости (например, работы Ge S.S., Heemels W.P., Kaba M.D.), либо рассматривают системы с неограниченным управлением (например, работы Benvenuti L., Fucheng L.). В ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе опорных функций или принципа максимума. В работах Ибрагимова Д.Н. для систем с суммарными ограничениями на скалярное управление получено описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости в виде многогранников для случая ограничений в смысле l_1-нормы. При выборе l_p-нормы с произвольным значением параметра $p \in (1; +\infty)$ сформулированы и доказаны общие свойства предельных множеств достижимости и 0-управляемости.

Объектом исследования являются линейные системы с дискретным временем и ограниченным управлением. **Предметом исследования** являются методы построения и оценивания оценивания предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограниченным управлением.

В работе поставлена следующая **цель**. Для линейных систем с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление разработать алгоритмы точного построения и внешнего оценивания предельных множеств 0-управляемости и достижимости.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**.

Для линейных систем с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление

1) *сформулировать* и доказать необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств 0-управляемости и достижимости линейной дискретной автономной системы с ограниченным управлением с компактным множеством допустимых значений управления.

2) *сформулировать* и доказать утверждения, позволяющие декомпозировать задачу построения предельного множества 0-управляемости и предельного множества достижимости;

3) *разработать* алгоритм построения внешних оценок предельных множеств 0-управляемости и предельных множеств достижимости на основе аппарата опорных полупространств;

4) *разработать* алгоритм построения внешних оценок предельных множеств 0-управляемости и предельных множеств достижимости на основе принципа сжимающих отображений;

5) *разработать* алгоритм построения внешних оценок предельных множеств 0-управляемости и предельных множеств достижимости для почти периодических систем;

6) *разработать* программу, реализующую эти алгоритмы;

7) при помощи разработанного математического аппарата *решить* ряд модельных примеров и прикладных задач.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы математического моделирования, выпуклого анализа, функционального анализа. Различные численные методы решения задач выпуклого программирования применяются для реализации программы и для проведения вычислительных экспериментов.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты по задаче построения предельных множеств 0-управляемости и достижимости являются новыми, в частности, разработаны алгоритмы построения оценок предельных множеств, позволяющие строить оценки с любой наперед заданной точностью.

Практическая ценность исследования связана с возможностью применения разработанных методов при проектировании различных систем управления (например, систем демпфирования и систем управлением движения летательных аппаратов), построения управляющих устройств для стабилизации различных объектов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: международные научные конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2020, 2023, 2024 гг.); международные научные конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2021, 2022, 2024 гг.); XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2024 г.); XXII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Дивноморское, 2023 г.); XXV международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2021 г.); Всероссийская конференция «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2025 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 работах, из которых 3 работы опубликованы в периодических изданиях, индексируемых в международных системах цитирования **Web of Science** или **Scopus** [1, 2, 4], 4 работы в изданиях, рекомендованных **ВАК** [3, 5–7], и 10 работ в других научных изданиях и материалах конференций [9–18]. Получено государственное свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [8].

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в который был определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, 4 главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 110 страниц, включая 24 рисунка, 1 таблицу и список литературы, содержащий 143 наименования.

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность исследования, проводимого в рамках работы, приводится обзор существующих результатов по теме исследования, формулируется цель и задачи, решаемые в рамках достижения цели работы, обосновывается научная новизна и практическая значимость работы, излагается содержание глав диссертации.

В первой главе формулируется постановка задачи построения предельных множеств 0-управляемости (или их оценок) для линейной дискретной системы с геометрическими ограничениями на управление.

Рассматривается n-мерная линейная автономная дискретная система управления $(A, \mathcal{U})$ с ограниченным управлением:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\ &x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x(k), u(k) \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояния и управления соответственно, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное множество допустимых значений управления, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица системы (1.1). Предполагается, что $0 \in \operatorname{ri} \mathcal{U}$.

Определим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$, где каждое $\mathcal{X}(N)$ представляет собой множество тех начальных состояний, из которых посредством выбора допустимого управления систему (1.1) можно перевести в начало координат за N шагов:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U} \colon x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Требуется построить предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_\infty$, т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему $(A, \mathcal{U})$ можно перевести в начало координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{X}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists N \in \mathbb{N},\ u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U} \colon x(N) = 0\}.$$

С учетом (1.2) также справедливо представление

$$\mathcal{X}_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N). \tag{1.3}$$

Структура предельного множества 0-управляемости системы (1.1) определяется свойствами матрицы системы A. Процесс построения $\mathcal{X}_\infty$ связан с переходом в базис собственных и присоединенных векторов A. В связи с чем в **разделе 1.2** рассмотрены свойства системы (1.1) и множеств вида (1.2) и (1.3), связанные с различными линейными преобразованиями системы координат.

Лемма 1.1. *Пусть $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det S \neq 0$, $(A_1,\mathcal{U}_1), (A_2,\mathcal{U}_2)$ – системы вида* (1.1) *размерности n_1 и n_2 с предельными множествами 0-управляемости $\mathcal{X}_{1,\infty}$ и $\mathcal{X}_{2,\infty}$ соответственно.*

Тогда для предельного множества 0-управляемости $\mathcal{X}_\infty$ системы $\big(S \operatorname{diag}(A_1, A_2)S^{-1}, S(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)\big)$ верно представление

$$\mathcal{X}_\infty = S\left(\mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}\right).$$

Лемма 1.2. *Пусть $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$, при этом все собственные значения по модулю у матрицы A_1 не больше 1, у матрицы A_2 строго больше 1. Через $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ обозначена проекция выпуклого компакта $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ на n_2-мерное подпространство. Тогда*

1) *$\mathcal{X}_\infty$ ограничено тогда и только тогда, когда $\mathcal{U} = \{0\}^{n_1} \times \mathcal{U}_2$;*

2) *если $0 \in \operatorname{int}\mathcal{U}$, то $\mathcal{X}_\infty = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$, где $\mathcal{X}_{2,\infty}$ – предельное множество 0-управляемости системы $(A_2,\mathcal{U}_2)$.*

Леммы, доказанные в **разделе 1.2**, определяют структуру предельного множества 0-управляемости произвольной системы вида (1.1). Согласно лемме 1.2 множество $\mathcal{X}_\infty$ ограничено тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}$ содержится в собственном подпространстве, построенном на элементах вещественного жорданова базиса матрицы A, соответствующих собственным значениям, не превосходящим 1 по модулю. Если $0 \in \operatorname{int}\mathcal{U}$, то $\mathcal{X}_\infty$ является цилиндром с сечением в данном подпространстве. Для перехода в вещественный жорданов базис матрицы A можно воспользоваться леммой 1.1.

В **разделе 1.3** рассмотрен метод построения оценок множества $\mathcal{X}_\infty$, основанный на аппарате опорных полупространств и свойствах выпуклых множеств. Для этого доказывается, что для произвольной системы вида (1.1) множество $\mathcal{X}_\infty$ является выпуклым. В силу лемм 1.1 и 1.2 задачу построения предельного множества 0-управляемости можно рассматривать исключительно для систем, собственные значения матриц которых строго больше 1 по модулю. Поскольку $\mathcal{X}_\infty$ выпукло, то его замыкание можно представить в виде пересечения всех опорных к нему полупространств.

Лемма 1.3. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго больше 1, $\mathcal{X}_\infty$ определяется соотношением* (1.3).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

1. $\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{H}_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon (p,x) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right) \right\}$;

2. $x^* = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^* \in \operatorname{cl} \mathcal{X}_\infty \cap \partial \mathcal{H}_p$, *где* $u_k^* = \arg\ \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right)$.

Поскольку согласно лемме 1.1 допустимо предполагать, что матрица A приведена к вещественной жордановой форме, то для построения базовых внешних оценок $\mathcal{X}_\infty$ достаточно рассмотреть только случай, когда A имеет вид жордановой клетки.

Лемма 1.4. *Пусть для n-мерной системы $(A,\mathcal{U})$ выполнено условие*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

где $|\lambda| > 1, u_{i,\max} = \max\limits_{u \in \mathcal{U}} u_i, u_{i,\min} = \min\limits_{u \in \mathcal{U}} u_i, i = \overline{1,n}$.

Тогда $\mathcal{X}_\infty \subset (x_{1,\min}; x_{1,\max}) \times \ldots \times (x_{n,\min}; x_{n,\max})$. *Причем*

1) если $\lambda > 1$, *то*

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\min\{(-1)^{j+1} u_{i+j,\min}; (-1)^{j+1} u_{i+j,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}},$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\max\{(-1)^{j+1} u_{i+j,\min}; (-1)^{j+1} u_{i+j,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}};$$

2) если $\lambda < -1$, *то*

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\min} - u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right),$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right).$$

Лемма 1.5. *Пусть для $2n$-мерной системы $(A,\mathcal{U})$ выполнено условие*

$$A = \begin{pmatrix} rA_\varphi & I & \cdots & O \\ O & rA_\varphi & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ O & O & \cdots & rA_\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},\ A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $r > 1$, $\varphi \in [0;2\pi)$, $r_{i,\max} = \max\limits_{u\in\mathcal{U}}\sqrt{u_{2i-1}^2 + u_{2i}^2}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} : \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} < \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j,\max}}{(r-1)^{j+1}} \right\}.$$

Леммы 1.4 и 1.5 позволяют построить внешние оценки предельного множества 0-управляемости системы (1.1) в направлении каждого из собственных и присоединненых векторов. При этом для построения соответствующих опорных гиперплоскостей, ограничивающих $\mathcal{X}_\infty$, достаточно вычислить собственные значения матрицы A. В случае, если полученных ограничений на $\mathcal{X}_\infty$ недостаточно, можно воспользоваться леммой 1.3 для построения произвольной опорной гиперплоскости.

В **разделе 1.4** рассмотрен случай, когда предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_\infty$ системы $(A,\mathcal{U})$ ограничено, что в силу леммы 1.3 эквивалентно тому, что все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1. Откуда следует, что матрица A обратима и справедлив следующий результат, определяющая структуру множеств 0-управляемости системы $(A,\mathcal{U})$.

Для множеств 0-управляемости за N шагов известно следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathcal{X}(N) = A^{-1}\mathcal{X}(N-1) + (-A^{-1}\mathcal{U}).$$

Обозначим через $\mathbb{K}_n$ множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$, а через ρ_H – расстояние Хаусдорфа.

Если учесть, что $\mathcal{U}$ – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, то каждое множество вида (1.2) также является выпуклым компактом, т.к. представимо в виде алгебраической суммы линейных преобразований компактов. Тогда в метрическом пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ можно определить отображение $T\colon \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n$ следующего вида:

$$T(\mathcal{X}) = A^{-1}\mathcal{X} + (-A^{-1}\mathcal{U}). \tag{1.4}$$

С учетом соотношения (1.4), если отображение T либо $\underbrace{T\circ\ldots\circ T}_{M}$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$ являются сжимающими, предел последовательности множеств 0-управляемости (1.2) в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$, может быть определён посредством принципа сжимающих отображений. Также принцип сжимающих отображений позволяет оценить погрешность приближения предельной точки при помощи метода простой итерации. С другой стороны, предельная точка с точностью до замыкания в силу (1.3) должна совпадать с $\mathcal{X}_\infty$.

Теорема 1.1. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго больше 1, семейство $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (1.2), множество $\mathcal{X}_\infty$ определяется соотношением (1.3), отображение T имеет вид (1.4). Тогда*

1) *существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T^M = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{M}$ является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0; 1)$;*

2) $\operatorname{cl}\mathcal{X}_\infty$ *– единственная неподвижная точка отображения T в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$;*

3) *справедлива оценка*

$$\rho_H(\operatorname{cl}\mathcal{X}_\infty, \mathcal{X}(NM)) \leqslant \frac{\alpha^N}{1-\alpha}\rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}) = \frac{\alpha_p^N}{1-\alpha_p}\max_{x\in\mathcal{X}(M)}\|x\|_p = R_p.$$

Значение коэффициента сжатия α из теоремы 1.1, вообще говоря, зависит от выбора нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ и, как следствие, от ассоциированной с ней операторной нормы матрицы A^{-M}.

Теорема 1.1 позволяет строить оценки с любой наперёд заданной точностью R_p. Погрешность зависит от выбора шага квантования M и параметра p пространства $\mathbb{R}^n_p$, который определяет норму, ассоциированную с нормой пространства Хаусдорфа $\mathbb{K}_n$. В качестве параметров p рассматриваются 1 и ∞, так как в этом случае оценки будут представлять собой многогранники, что упрощает суммирование по Минковскому для подсчета множеств 0-управляемости. Параметр M влияет на подсчёт коэффициента сжатия α_p и $\max\limits_{x\in\mathcal{X}(M)}\|x\|_p$. Коэффициент сжатия α_p рассчитывается как операторная норма матрицы A^{-M} и зависит от выбора шага квантования M.

В **разделе 1.5** при помощи численного моделирования исследуется задача минимизации погрешности оценивания предельного множества при ограничении $N_{\max}$ на число множеств 0-управляемости за конечное число шагов, которые можно построить.

Во второй главе сформулирована постановка задачи построения предельных множеств достижимости (или их оценок) для системы из главы 1.

Рассматривается n-мерная линейная автономная дискретная система управления $(A,\mathcal{U})$ с ограниченным управлением вида (1.1).

Обозначим через $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ семейство множеств достижимости, где каждое $\mathcal{Y}(N)$ представляет собой множество тех состояний, в которые посредством выбора допустимого управления систему (1.1) можно перевести из начала координат за N шагов:

$$\mathcal{Y}(N) = \begin{cases}\{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U} \colon x(0) = 0, x(N) = x\}, & N \in \mathbb{N},\\ \{0\}, & N = 0.\end{cases} \qquad (2.1)$$

Требуется построить предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_\infty$, т.е. множество тех состояний, в которые систему $(A,\mathcal{U})$ можно перевести из начала координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{Y}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N},\ \exists u(0),\ldots,u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = x, x(0) = 0\}.$$

С учетом (2.1) также справедливо представление

$$\mathcal{Y}_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(N). \tag{2.2}$$

Структура предельного множества достижимости системы (1.1) определяется свойствами матрицы системы A. Подходы к получению результатов данной главы будут аналогичны подходам, использованным в предыдущей главе.

Лемма 2.1. *Пусть $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(A_1,\mathcal{U}_1), (A_2,\mathcal{U}_2)$ – системы вида* (1.1) *размерности n_1 и n_2 с предельными множествами достижимости $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ и $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ соответственно.*

Тогда для предельного множества достижимости $\mathcal{Y}_\infty$ системы $\big(S\,\mathrm{diag}(A_1,A_2)S^{-1}, S(\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2)\big)$ верно представление

$$\mathcal{Y}_\infty = S\left(\mathcal{Y}_{1,\infty}\times\mathcal{Y}_{2,\infty}\right).$$

Лемма 2.2. *Пусть $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $A = \mathrm{diag}(A_1,A_2)$, при этом все собственные значения по модулю у матрицы A_1 не меньше 1, у матрицы A_2 строго меньше 1. Через $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ обозначена проекция выпуклого компакта $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ на n_2-мерное подпространство. Тогда*

1) *$\mathcal{Y}_\infty$ ограничено тогда и только тогда, когда $\mathcal{U} = \{0\}^{n_1}\times\mathcal{U}_2$;*

2) *если $0 \in \mathrm{int}\,\mathcal{U}$, то $\mathcal{Y}_\infty = \mathbb{R}^{n_1}\times\mathcal{Y}_{2,\infty}$, где $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ – предельное множество достижимости системы $(A_2,\mathcal{U}_2)$.*

В **разделе 2.3** рассмотрен метод построения оценок множества $\mathcal{Y}_\infty$, основанный на аппарате опорных полупространств и свойствах выпуклых множеств.

В силу лемм 2.1 и 2.2 задачу построения предельного множества достижимости можно рассматривать исключительно для систем, собственные значения матриц которых строго меньше 1. Поскольку $\mathcal{Y}_\infty$ выпукло, то его замыкание можно представить в виде пересечения всех опорных к нему полупространств.

Лемма 2.3. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго меньше 1, $\mathcal{Y}_\infty$ определяется соотношением* (2.2).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ выполнены следующие соотношения:

1. $\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{H}_p = \left\{x \in \mathbb{R}^n : (p,x) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} \max\limits_{u_k\in\mathcal{U}} \left((A^k)^T p, u_k\right)\right\}$;

2. $x^* = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k u_k^* \in \mathrm{cl}\,\mathcal{Y}_\infty \cap \partial\mathcal{H}_p$, *где* $u_k^* = \arg\max\limits_{u_k\in\mathcal{U}} \left((A^k)^T p, u_k\right)$.

Лемма 2.4. *Пусть для n-мерной системы $(A,\mathcal{U})$ выполнено условие*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

Тогда $\mathcal{Y}_\infty \subset [x_{1,\min}; x_{1,\max}] \times \ldots \times [x_{n,\min}; x_{n,\max}]$.

1) если $\lambda \geqslant 0$, *то*

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{u_{i+j,\min}}{(1-\lambda)^{j+1}},\ x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{u_{i+j,\max}}{(1-\lambda)^{j+1}};$$

2) если $\lambda < 0$, *то*

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(1+|\lambda|)^{j+1}} - \frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2(1-|\lambda|)^{j+1}} \right),$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\max} + u_{i+j,\min}}{2(1+|\lambda|)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2(1-|\lambda|)^{j+1}} \right),$$

где $u_{i,\max} = \max\limits_{u\in\mathcal{U}} u_i$, $u_{i,\min} = \min\limits_{u\in\mathcal{U}} u_i$, $i = \overline{1,n}$.

Лемма 2.5. *Пусть для $2n$-мерной системы $(A,\mathcal{U})$ выполнено условие*

$$A = \begin{pmatrix} rA_\varphi & I & \cdots & O \\ O & rA_\varphi & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ O & O & \cdots & rA_\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},\ A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $r > 1$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $r_{i,\max} = \max\limits_{u\in\mathcal{U}} \sqrt{u_{2i-1}^2 + u_{2i}^2}$, $i = \overline{1,n}$. *Тогда*

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} \colon \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \leqslant \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j,\max}}{(1-r)^{j+1}} \right\}.$$

В **разделе 2.4** рассматривается подход к построению внешних оценок на основе принципа сжимающих отображений.

Для множеств достижимости за N шагов известно следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathcal{Y}(N) = A\mathcal{Y}(N-1) + \mathcal{U}.$$

В метрическом пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ можно определить отображение

$T\colon \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n$ следующего вида:

$$T(\mathcal{Y}) = A\mathcal{Y} + \mathcal{U}. \tag{2.3}$$

С учетом соотношения (2.3), если отображение T либо $\underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{M}$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$ являются сжимающими, предел последовательности множеств достижимости (2.1) в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$, может быть определён посредством принципа сжимающих отображений.

Теорема 2.1. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго меньше 1, семейство $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношением* (2.1), *множество $\mathcal{Y}_\infty$ определяется соотношением* (2.2), *отображение T имеет вид* (2.3).

Тогда

1) *существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T^M = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{M}$ является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0;1)$;*

2) $\operatorname{cl}\mathcal{Y}_\infty$ *– единственная неподвижная точка отображения T в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$;*

3) *справедлива оценка*

$$\rho_H(\operatorname{cl}\mathcal{Y}_\infty, \mathcal{Y}(NM)) \leqslant \frac{\alpha^N}{1-\alpha}\rho_H(\mathcal{Y}(M), \{0\}) = \frac{\alpha_p^N}{1-\alpha_p}\max_{x\in\mathcal{Y}(M)} \|x\|_p = R_p.$$

В третьей главе рассмотрен частный случай системы, описанной в главе 1. В данном случае рассматривается линейная дискретная почти периодическая n-мерная система. Почти периодическими называются системы, матрицы которых обладают только комплексно-сопряженными собственными значениями. Ставится задача построения оценок предельных множеств 0-управляемости и достижимости для таких систем. На основе принципа декомпозиции задача построения предельных множеств разбивается на $\frac{n}{2}$ аналогичных задач размерности 2. Предполагается, что все собственные значения A являются комплексно-сопряженными, т.е. $n = 2m$, существуют невырожденная матрица $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и числа $r_1, \ldots, r_m > 0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in [0; 2\pi)$ такие, что

$$A = S\begin{pmatrix} r_1A_{\varphi_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & r_mA_{\varphi_m}\end{pmatrix}S^{-1},\ A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Для системы (1.1) решается задача построения и оценивания предельных множеств достижимости $\mathcal{Y}_\infty$ и 0-управляемости $\mathcal{X}_\infty$ в случае, если данные множества являются ограниченными (1.3) и (2.3).

Рассмотрим случай, когда собственные значения матрицы A удовлетворяют следующему условию:

$$\lambda_{1,2} = r\mathrm{e}^{\pm\mathbf{i}\varphi} \in \mathbb{C},\ r > 0,\ \varphi = 2\pi\frac{K'}{K''},\ K' \in \mathbb{Z},\ K'' \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

При помощи теоремы 3.1 множества $\mathcal{Y}_\infty$ и $\mathcal{X}_\infty$ могут быть построены в явном виде только в случае (3.2).

Теорема 3.1. *Пусть размерность системы $n = 2$ и собственные значения матрицы A системы* (1.1) *удовлетворяют условию* (3.2). *Тогда*

1) если $0 < r < 1$, то

$$\mathcal{Y}_\infty = \frac{1}{1 - r^{K''}}\ \operatorname{int}\sum_{k=0}^{K''-1} A^k\mathcal{U} = \frac{1}{1 - r^{K''}}\ \operatorname{int}\mathcal{Y}(K''),$$

2) если $r > 1$, то

$$\mathcal{X}_\infty = \frac{-1}{1 - r^{-K''}}\ \operatorname{int}\sum_{k=1}^{K''} A^{-k}\mathcal{U} = \frac{1}{1 - r^{-K''}}\ \operatorname{int}\mathcal{X}(K'').$$

Лемма 3.1. *Пусть размерность системы $n = 2$, $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ и $\det S \neq 0$, для любого $\varphi \in [0; 2\pi)$ через $\mathcal{Y}_\infty(\varphi)$ и $\mathcal{X}_\infty(\varphi)$ обозначены предельные множества достижимости* (2.2) *и 0-управляемости* (1.3) *соответственно системы $(SrA_\varphi S^{-1}, \mathcal{U})$.*

Тогда для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in [0; 2\pi)$

1) если $0 < r < 1$, то

$$\rho_H\left(\operatorname{cl}\mathcal{Y}_\infty(\varphi_1), \operatorname{cl}\mathcal{Y}_\infty(\varphi_2)\right) \leqslant \frac{2r\|S\|_2}{1 - r}\left|\sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right| \max_{x \in \operatorname{cl} S^{-1}\mathcal{Y}_\infty(\varphi_2)} \|x\|;$$

2) если $r > 1$, то

$$\rho_H\left(\operatorname{cl}\mathcal{X}_\infty(\varphi_1), \operatorname{cl}\mathcal{X}_\infty(\varphi_2)\right) \leqslant \frac{2\|S\|_2}{r - 1}\left|\sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right| \left(\max_{x \in \operatorname{cl} S^{-1}\mathcal{X}_\infty(\varphi_2)} \|x\| + \max_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} \|u\|\right).$$

Теорема 3.2. *Пусть для системы* (1.1) *выполняется условие* (3.1), *$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклые компакты такие, что*

$$S^{-1}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_m, \tag{3.3}$$

выбраны числа $\hat{\varphi}_i = 2\pi\frac{K_i'}{K_i''} \in [0; 2\pi)$, $K_i' \in \mathbb{Z}$, $K_i'' \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, m}$. Тогда

1) если $r_1, \ldots, r_m < 1$, то

$$\mathcal{Y}_\infty \subset S\bigotimes_{i=1}^{m}\left(\hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty} + \mathcal{B}_{R_i}(0)\right),\ \hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty} = \frac{1}{1 - r^{K_i''}}\sum_{k=0}^{K_i''-1} r_i^k A_{k\hat{\varphi}_i}\mathcal{U}_i,$$

$$R_i = \frac{2r_i}{1-r_i}\left|\sin\left(\frac{\varphi_i-\hat{\varphi}_i}{2}\right)\right| \max_{y\in\hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty}} \|y\|,$$

2) если $r_1,\ldots,r_m > 1$, то

$$\mathcal{X}_\infty \subset S\bigotimes_{i=1}^{m}\left(\hat{\mathcal{X}}_{i,\infty}+\mathcal{B}_{R_i}(0)\right),\ \hat{\mathcal{X}}_{i,\infty} = \frac{1}{1-r^{-K_i''}}\sum_{k=1}^{K_i''} -r_i^{-k}A_{-k\hat{\varphi}_i}\mathcal{U}_i,$$

$$R_i = \frac{2}{r_i-1}\left|\sin\left(\frac{\varphi_i-\hat{\varphi}_i}{2}\right)\right|\left(\max_{x\in\hat{\mathcal{X}}_{i,\infty}}\|x\| + \max_{u\in\mathcal{U}_i}\|u\|\right).$$

В условии теоремы 3.2 нет указаний на то, как выбрать множества $\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^2$, хотя из построения следует, что точность будет тем выше, чем меньше данные множества по включению. Это приводит к тому, что оптимальным будет выбор в качестве $\mathcal{U}_i$ проекции $S^{-1}\mathcal{U}$ на двухмерное подпространство соответствующее $(2i-1)$-й и $(2i)$-й координатам. Однако при проведении численных расчетов можно выбрать большее по включению множество, но обладающее более удобной структурой, например, многогранник или эллипсоид.

В **разделе 3.3** при помощи численного моделирования исследуется задача минимизации погрешности внешней оценки предельного множества при ограниченных вычислительных ресурсах, что позволяет определить оптимальное значение параметра, характеризующего наиболее точную оценку.

В четвертой главе представлено описание программы на C++, реализующей алгоритмы, разработанные в главах 1, 2 и 3. Также представлены решения прикладных задач.

В качестве демонстрации эффективности методов, разработанных в разделах 2 и 3, рассмотрена математическая модель высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности. Для данной системы управления построим предельные множества достижимости.

Сейсмические возмущения или ветер вызывают колебания сооружения, которые влияют на устойчивость и в конечном счете приводят к его разрушению. В этой связи возникает задача гашения колебаний сооружения посредством дополнительно прикладываемых сил, рассчитанных на основе приобретенных изменений. В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, предполагается одномерная последовательность упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием. Предполагается, что масса основания намного превышает массы остальных материальных точек, поэтому влиянием движения секций сооружения на движение основания можно пренебречь. В дальнейшем будем считать, что массы всех материальных точек одинаковы, а упругие и демпфирующие связи моделируются линейными элементами с одинаковыми коэффициентами упругости и демпфирования.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{cases} m_0\ddot{\xi}_1(t) &= -\,2b\dot{\xi}_1(t) - 2c\xi_1(t) + b\dot{\xi}_2(t) + c\xi_2(t) + U_1(t),\\ \vdots & \\ m_0\ddot{\xi}_i(t) &= -\,2b\dot{\xi}_i(t) - 2c\xi_i(t) + b\dot{\xi}_{i-1}(t) +\\ & \quad + c\xi_{i-1}(t) + b\dot{\xi}_{i+1}(t) + c\xi_{i+1}(t) + U_i(t),\\ \vdots & \\ m_0\ddot{\xi}_m(t) &= -\,2b\dot{\xi}_m(t) - 2c\xi_m(t) + b\dot{\xi}_{m-1}(t) + c\xi_{m-1}(t) + U_m(t), \end{cases} \tag{4.1}$$

где ξ_i – координата i-й материальной точки относительно основания, U_i – управляющая сила, приложенная к i-й материальной точке, m_0 – масса материальной точки, b и c – коэффициенты демпфирования и упругости межсекционных связей соответственно. Управляющее воздействие считается ограниченным: $U(t) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{U}_0$ – компакт.

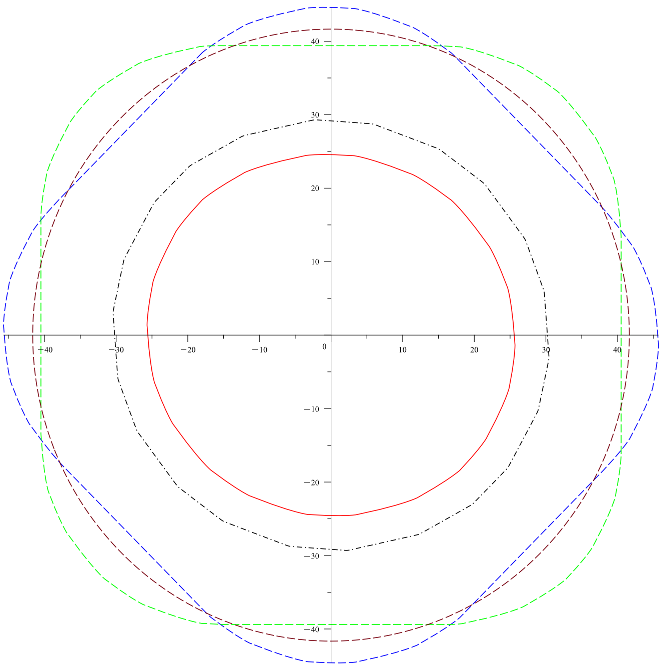

Рис. 1. Красным цветом представлено множество достижимости $\mathcal{Y}(30)$, коричневым цветом оценка $\mathcal{Y}_\infty$ на основе аппарата опорных полупространств, синим ($p = 1$) и зеленым ($p = \infty$) оценки $\mathcal{Y}_\infty$ на основе принципа сжимающих отображений, черным цветом оценка $\mathcal{Y}_\infty$ из главы 3.

Предполагается, что управление кусочно-постоянное. Это позволяет рассмотреть дискретную систему вида (1.1), эквивалентную непрерывной системе (4.1) с точки зрения предельных множеств достижимости. А следовательно, для их построения можно воспользоваться теоретическими результатами данной работы.

Пусть высота здания составляет 10 этажей, т.е. $m = 10$. Также пусть, $\delta = 1$, $m_0 = 600000$, $b = 600000$, $c = 2400000$. Можно условно принять $u_{\max} = 1$, поскольку в силу определения (2.2) предельные множества достижимости, соответствующие различным значениям $u_{\max}$, будут пропорциональны друг другу.

Матрица A имеет 10 пар комплексно-сопряженных собственных значений. Из этого следует, что справедливо разложение (3.1). При этом спектральный радиус A строго меньше 1, т.е. в силу леммы 2.3 искомое множество $\mathcal{Y}_\infty$ ограничено, а для его оценивания можно воспользоваться теоремой 3.2. На рисунке 1 для сравнения на графике представлены оценки из лемм 2.1, 2.4 и оценка из теоремы 3.2 для 1-ой подсистемы.

В заключении подводятся итоги работы, описываются перспективы дальнейших исследований.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств 0-управляемости и достижимости для линейных систем с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление [1, 7].

2. Алгоритм построения оценок предельных множеств 0-управляемости и достижимости, основанный на аппарате опорных полупространств [3,5,10,14,15].

3. Алгоритм построения сходящейся последовательности внешних оценок предельных множеств 0-управляемости и достижимости на основе принципа сжимающих отображений [1, 2, 6, 9, 11, 12, 16, 17].

4. Алгоритм построения внешней оценки предельных множеств 0-управляемости и достижимости для почти периодических систем [4, 13, 18].

5. Программа, реализующая полученные алгоритмы, при помощи которой решены задачи построения предельных множеств в задаче демпфирования высотного сооружения в зоне сейсмической активности и нормализации уровня глюкозы в плазме крови [8].

Соответствие паспорту специальности

Результаты диссертационной работы соответствуют пунктам 1, 2, 5 паспорта специальности 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Публикации в изданиях, индексируемых в Scopus и Web of Science

1. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // АиТ. 2023. № 2. С. 3–34.
2. *Simkina A.V., Ibragimov D.N., Kibzun A.I.* On the Method of Numerical Simulation of Limit Reachable Sets for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Control // Вестник ЮурГУ ММП. 2024. Т. 17. № 3. С. 46–56.
3. *Simkina A.V.* On the External Estimation of the Limit Reachable Set for the Linear Discrete-Time System Based on Support Hyperplanes // Advances in Systems Science and Applications. 2024. V. 24. No. 4. P. 66–81.
4. *Ибрагимов Д.Н., Симкина А. В.* О методе декомпозиции при построении внешних оценок предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных почти периодических дискретных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2025. Т. 26. № 10. С. 515–524.

Публикации в журналах из перечня ВАК и программа для ЭВМ

5. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // Труды МАИ. 2022. № 126.
6. *Симкина А. В.* Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 4. С. 115-–128.
7. *Симкина А. В.* Оценка предельного множества 0-управляемости системы управления движением спутника // Труды МАИ. 2026. № 146.
8. *Симкина А.В.* Программа для аппроксимации предельных множеств 0-управляемости для двумерных линейных систем с дискретным временем с ограниченным управлением // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2025666816, 15.06.2025.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

9. *Симкина А. В.* Оценка предельного множества управляемости для линейной дискретной системы управления с ограниченным управлением на основе принципа сжимающих отображений // 22-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва. Тезисы. — М.: Перо, 2023, С. 273.
10. *Симкина А. В.* Методы построения и оценивания предельных множеств достижимости для линейных дискретных систем на основе аппарата опорных полупространств и свойств выпуклых множеств // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023). -– М.: МАИ; 2023, С. 514–516.

11. *Симкина А. В.* Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции L Гагаринские чтения 2024. -— М.: Перо, 2024, С. 477–478.
12. *Симкина А. В.* Внешняя оценка предельного множества достижимости для линейной дискретной системы управления с ограниченным управлением на основе принципа сжимающих отображений // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления. – М.: ИПУ РАН, 2024. С. 95-99.
13. *Симкина А. В.* Метод уточнения внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с комплексно-сопряженными собственными значениями // 23-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Тезисы. -– М.: Перо, 2024, С. 260–261.
14. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* Метод оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», 23-27 ноября 2020 года. Тезисы. – М.: Перо, 2020, С. 460–461.
15. *Берендакова А.В.*, Оценка асимптотического множества управляемости линейной дискретной системы на основе методов декомпозиции // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции XLVII Гагаринские чтения 2021. – М: Перо, 2021, С. 759–760.
16. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* Метод уточнения общей оценки предельного множества 0-управляемости двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. – М.: МАИ, 2021, С. 185–187.
17. *Ибрагимов Д.Н., Берендакова А.В.* Метод построения асимптотических множеств управляемости линейных дискретных автономных систем с ограниченным управлением на основе аппарата опорных полупространств // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции XLVIII Гагаринские чтения 2022. – М: Перо, 2022, С. 424.
18. *Симкина А.В.* Оптимальная аппроксимация предельных множеств достижимости линейных дискретных систем при ограниченных вычислительных ресурсах // Материалы всерос. конф., посвященной памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова 2025. -– Ижевск: Удмуртский университет, 2025, С. 139–142.