

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
"Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)"

На правах рукописи

Крупенин Александр Михайлович



**ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОИСТЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ЖИДКОСТЬЮ**

01.02.06 Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
кандидат технических наук, доцент  
Мартирозов Михаил Иванович

Москва – 2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>4</b>
1.1	Введение . . . . .	4
1.2	Обзор литературы . . . . .	6
1.3	Выводы . . . . .	16
<b>2</b>	<b>ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ</b>	<b>18</b>
2.1	Постановка задачи и описание метода исследования . . . . .	18
2.2	Сравнение аналитического и численного решения задачи о вертикальном ударе круговой трехслойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость . . . . .	25
2.2.1	Исследование сходимости численного решения от размера элемента . . . . .	25
2.2.2	Гидродинамическое давление на твердый диск . . . . .	27
2.2.3	Аналитическое решение задачи о вертикальном ударе круговой трехслойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость . . . . .	33
2.2.4	Гидроупругое решение задачи о вертикальном ударе круговой однослойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость . . . . .	39
2.3	Сравнение экспериментального и численного решений задачи о вертикальном ударе однослойной прямоугольной пластины об идеальную сжимаемую жидкость . . . . .	40
2.3.1	Описание используемого эксперимента . . . . .	40
2.3.2	Описание численного решения задачи . . . . .	43
2.3.3	Определение скорости падающей пластины . . . . .	44
2.3.4	Сравнение численного и экспериментального решений . . . . .	49
2.4	Выводы . . . . .	53
<b>3</b>	<b>ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ОБ ИДЕАЛЬНУЮ СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ СЛОИСТЫХ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ, ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ И МАЛОКИЛЕВАТОГО КЛИНА</b>	<b>56</b>
3.1	Вертикальный удар круговой пластины . . . . .	56
3.1.1	Описание конечно-элементной модели . . . . .	56
3.1.2	Результаты расчетов . . . . .	59
3.2	Вертикальный удар прямоугольной пластины . . . . .	71
3.2.1	Описание конечно-элементной модели . . . . .	72
3.2.2	Результаты расчетов . . . . .	72

3.3	Вертикальный удар малокилеватого клина . . . . .	80
3.3.1	Описание конечно-элементной модели . . . . .	81
3.3.2	Результаты расчетов . . . . .	82
3.4	Выводы по главе . . . . .	88
<b>4</b>	<b>ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ</b>	<b>90</b>
<b>5</b>	<b>СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ</b>	<b>91</b>
	<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>93</b>

# 1 ВВЕДЕНИЕ

## 1.1 Введение

**Актуальность.** В современных авиационных, ракетных и космических системах применяются транспортные средства и аппараты, вступающие в ударное взаимодействие с жидкостью в процессе эксплуатации или на аварийных режимах работы (экранопланы, спускаемые капсулы и платформы с грузами, гидросамолеты).

Для эффективного проектирования подобных конструкций необходимо учитывать различные эффекты взаимодействия их с жидкостью и применять современные решения, способствующие сохранению прочности и надежности при уменьшении массы (слоистые конструкции, композиционные материалы). Сложный характер движения жидкости в сочетании с нелинейным поведением материалов конструкции исключает возможность аналитического решения поставленной проблемы.

Применительно к задачам сброса грузов на воду на практике используются платформы преимущественно прямоугольной или круглой формы, а при ударе различных конструкций о воду форма днищ, как правило, клинообразная. Ко всему прочему, как было отмечено выше, конструкция ударных поверхностей представляет собой набор слоев из различных материалов.

**Цель работы** – исследовать динамические характеристики ряда слоистых элементов конструкций (круговая и прямоугольная пластины, малокилеватый клин), при их вертикальном ударном взаимодействии с первоначально невозмущенной поверхностью идеальной сжимаемой жидкости (воды). Исследуется начальный этап взаимодействия, когда гидродинамические давления достигают максимальных значений.

**Для достижения указанной цели поставлены и решены следующие задачи:**

- Разработать методику численного моделирования ударного взаимодействия слоистых элементов конструкций с жидкостью с учетом воздушной прослойки в связанной постановке;
- Исследовать влияние воздушной прослойки между элементом конструкции и жидкостью на процесс ударного взаимодействия элемента конструкции о поверхность жидкости;
- Исследовать влияние связности (взаимочета деформаций тела, жидкости и воздушного слоя между ними) на процесс ударного взаимодействия элемента конструкции о поверхность жидкости;
- Исследовать динамические характеристики ряда слоистых элементов конструкций (круговой, прямоугольной трехслойных пластин, трехслойного малокилеватого клина) при



их вертикальном ударе о первоначально невозмущенную поверхность идеальной сжимаемой жидкости;

**Научная новизна заключается:**

- Разработана методика решения задач ударного взаимодействия слоистых элементов конструкций с жидкостью, учитывающая влияние воздушной прослойки, между конструкцией и жидкостью, в связанной постановке;

- Исследовано влияние воздушной прослойки между элементом конструкции и жидкостью на процесс удара конструкции о поверхность жидкости;

- Исследовано влияние связности на процесс удара конструкции о поверхность жидкости;

- Решен ряд новых задач о вертикальном ударе слоистых элементов конструкций (круговая, прямоугольная пластины, малокилеватый клин) о первоначально невозмущенную поверхность идеальной сжимаемой жидкости с учетом воздушной прослойки в связанной постановке. Проведен параметрический анализ динамических характеристик слоистых элементов конструкций в зависимости от начальной скорости взаимодействия;

**На защиту выносятся следующие положения:**

- результаты исследования влияния воздушной прослойки между элементом конструкции и жидкостью на процесс удара элементов конструкций о жидкость.

- результаты исследования связности (взаимоучета деформаций тела, жидкости и воздушного слоя между ними) на процесс удара элементов конструкций о жидкость.

- результаты исследования поведения ряда слоистых элементов конструкций (круговая и прямоугольная пластины, малокилеватый клин) при их вертикальном ударе о первоначально невозмущенную поверхность идеальной сжимаемой жидкости (воды).

**Достоверность результатов.** Достоверность научных положений и выводов диссертации базируется на комплексном применении современных математических методов анализа, удовлетворительном совпадении экспериментальных, аналитических и численных результатов.

**Личный вклад автора.**

Автором разработана и верифицирована методика численного исследования ударного взаимодействия слоистых элементов конструкций с жидкостью в связанной постановке с учетом воздушной прослойки между конструкцией и жидкостью. Выполнен весь объем аналитических и численных работ. Обработаны и проанализированы результаты. Сформулированы выводы по каждому разделу работы.

**Публикации.**

Основные результаты опубликованы в работах [23-25] и [45-69], из них 5 – в изданиях, предусмотренных перечнем ВАК.

## 1.2 Обзор литературы

Теория удара тел о жидкость начала интенсивно развиваться с конца 20-х и начала 30-х годов прошлого столетия в связи с рядом интересных задач.

В первую очередь конечно это задачи о посадке гидросамолетов. Разработкой и внедрением "летающих лодок" в России занимался Д. Григорович. Первый гидросамолет конструкции Григоровича М-1 был поднят в небо 1 июня 1914 года. А уже во время первой мировой войны "летающие лодки" крепко вошли в состав вооруженных сил Российской армии и зарекомендовали себя отличными морскими разведчиками и бомбардировщиками [44].

Параллельно с задачами приводнения гидросамолетов развивалось направление десантирования грузов на грунт и воду, как с парашютом, так и без. В области безпарашютного десантирования первые опыты проводились в начале 30-х годов. В Союзе этим занимался П. И. Гроховский с группой энтузиастов. Кабину для безпарашютного десантирования называли «авиабус». Самым первым изготовили «гидроавиабус» с лодочным днищем. В первых испытаниях на Москве реке участвовали два таких аппарата, первый сначала нырнул, а потом всплыл вверх днищем, второй коснулся поверхности реки под правильным углом и, несколько раз подпрыгнув, развалился. Гроховский предлагал и что-то вроде морского авиабуса—десантную моторную лодку Г-48 для сбрасывания с ТБ-1 на бреющем полете. Лодка вмещала 14 человек и вооружалась станковым «Максимом». Опытный образец построили и испытали, но испытания оказались очень краткими. Отчет НИИ ВВС о них содержит всего одну фразу: «При сбросе на воду разбился». В сентябре 1937 года испытали систему безпарашютного сброса танка-амфибии Т-37 прямо на воду (Рис. 1). Опробовали три варианта амортизационных приспособлений. В первом случае у амфибии промяло днище и вырвало часть заклепок. Около 20 минут она держалась на воде, а потом затонула. Во втором и третьем случаях танки тонули сразу из-за трещин в корпусе. Идею сочли бесперспективной [79].

Так же в 30-е годы советский конструктор Б. П. Ушаков, разрабатывал идею крылатой субмарины (Рис. 2). Проект долго рассматривался, ни раз дорабатывался, а в итоге так и не был реализован [99].

С появлением новых технологий многие, казалось бы, фантастические идеи прошлых лет получили второе дыхание. На смену гидросамолетам пришли экранопланы [32] и экранолеты [102]. Вспомнили и о безпарашютном сбрасывании грузов [79]. В 2006 году была ис-



Рис. 1. Сброса танка-амфибии Т-37 на воду



Рис. 2. Рисунок крылатой субмарины

пытана полноразмерная модель беспилотной крылатой субмарины The Cormorant «Баклан» (Рис. 3), разработанной компанией Skunk Works [99].

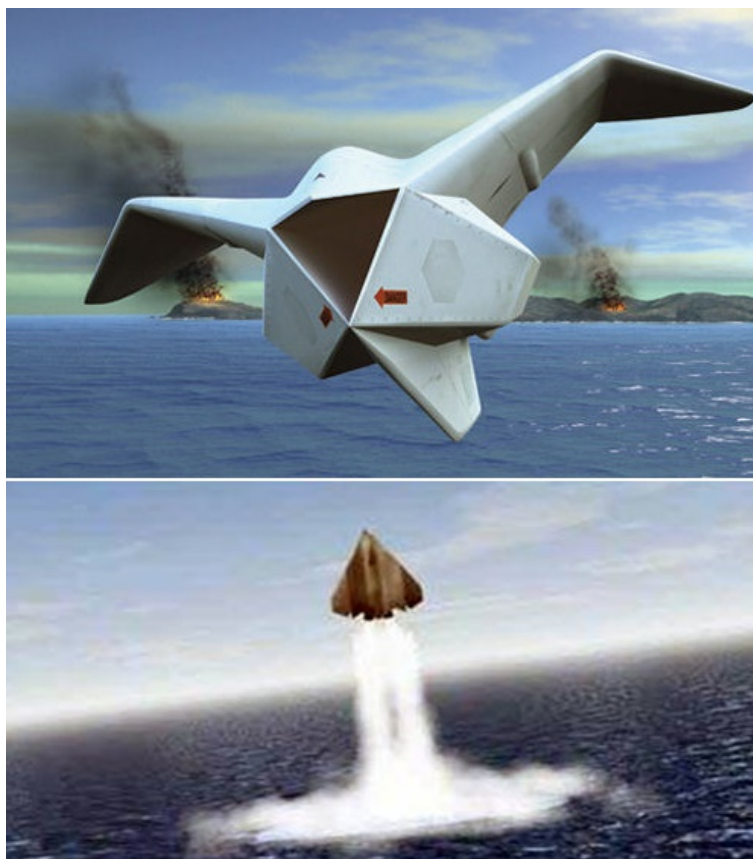


Рис. 3. Модель крылатой субмарины The Cormorant

Поразительные нововведения коснулись также и судостроения. «За последние 50 лет скорости катеров Class 1 выросли с 50 км/ч до 250 км/ч. Конструкция тоже менялась: современные катера представляют собой настоящие шедевры инженерного искусства из композитных материалов, оснащенные сверхмощными двигателями и гидравлическими системами управления» [31].

Яхты, катамараны и тримараны стали спортивнее и совершеннее. «Яхта должна иметь не только самую передовую конструкцию, но еще и высокую прочность, использовать новейшие технологии как движущую силу для достижения главной цели — предельной скорости» [109]. И даже прогулочные яхты класса «Микро» разрабатываются с особым вниманием к прочности конструкции и использованием самых современных материалов и компоновочных схем [77].

Как видно, изделия, взаимодействующие с жидкостью, являются все более востребованными в современном мире. При проектировании подобных конструкций проводятся тщательные предварительные расчеты, в том числе и расчеты удара конструкций о жидкость.

В общей постановке задача о взаимодействии конструкций с жидкостью крайне сложна и сводится в итоге к задаче о взаимодействии двух произвольных сплошных сред. Чтобы избежать чрезмерных математических трудностей, вводятся упрощения, конкретизирующие задачу, что в отдельных случаях позволяет получить точное аналитическое решение. Основным упрощением является разделение задачи на две: задача о погружении абсолютно твердого тела в жидкость, позволяющая определить гидродинамическое давление действующие на тело, и задача об отыскании напряженно-деформированного состояния деформируемого тела при действии на него, полученного гидродинамического давления.

**Погружение тел в жидкость.** При погружении произвольного тела в жидкость характер распределения гидродинамического давления по смоченной поверхности тела, а также его величина определяются многими факторами: начальной скоростью удара, углом входа, массой тела, условиями сжатия водовоздушной среды в момент контакта поверхности тела с водой, сжимаемостью жидкости, упругостью тела и другими. Во многих случаях, когда скорость движения жидкости существенно меньше скорости звука, и различные точки поверхности тела не вступают одновременно в контакт с жидкостью, сжимаемостью и весомостью жидкости можно пренебречь.

При отыскании решения задачи даже при оговоренных упрощениях возникают серьезные математические трудности, которые обусловлены нестационарным характером движения жидкости при погружении тела, нелинейностью условий на свободной поверхности, а также струйными явлениями и брызгообразованием, приводящими к разрывным движениям.

Введение движения со скачкообразным изменением скорости оправдывается большими упрощениями, которые оно вносит как в постановку задачи, так и в математические способы ее решения. Механическая картина при рассмотрении удара обычно содержит наиболее существенные и практически важные особенности движения с большими скоростями.

Общая задача об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости, исследована Л. И. Седовым [96, 97].

Получено большое количество конкретных результатов, как для плоских, так и для пространственных течений в случае жестких тел, если ставится задача об ударе плавающего тела.

Вообще говоря, явления непрерывного погружения и удара плавающих тел существенно различны, и их нельзя отождествлять. Основное различие заключается в том, что в теории удара плавающих тел игнорируется перемещение границ жидкости за время удара. Но строгое решение задачи о погружении тела даже простейшей формы не удается довести до конца.

Поэтому в большинстве практически важных задач эти трудности обходятся путем построения приближенных решений, основанных для начальных этапов погружения на аналогиях с ударом плавающих тел (с соответствующими модификациями).

Как уже отмечалось выше, большинство работ периода 30-х годов в основном относилось к задачам о посадке гидросамолетов. Поэтому все теории строились применительно к падению на воду весьма длинных призматических тел с малокилеватым днищем. В первых работах Т. Кармана и В. Пабста о посадочном ударе [112, 113, 114] считалось, что присоединенная масса во время погружения в каждый данный момент равна присоединенной массе плоской пластинки шириной  $b(t)$ , равной ширине смоченной поверхности днища.

Следовательно, погружение тела заменялось обтеканием непрерывно расширяющейся плоской пластинки, скорость расширения которой равна скорости увеличения ширины смоченной поверхности тела, а скорость обтекания равна скорости погружения. При погружении тела с большой скоростью поверхность жидкости вблизи смоченной границы тела поднимается и сильно деформируется. Сила давления тела на жидкость существенно зависит от брызговых струй, образующихся у поверхности тела.

Задача подобного рода о погружении клина с постоянной скоростью в жидкость впервые рассмотрена Г. Вагнером [116], который ввел функцию  $\alpha$ , учитывающую эффект встречного движения жидкости.

Дальнейшее развитие эта теория получила в работах [73, 85, 86]. Методом Г. Вагнера решено много практически важных задач из различных областей техники [98], его также используют при исследовании погружения упругих конструкций [29] в жидкость.

В первых попытках учесть упругие деформации в задачах о проникании тел в жидкость авторы исходили из простых физических положений [86]. В связи с исключительной аналитической трудностью решения задач взаимодействия при учете упругости конструкций большое значение приобретают методы экспериментального решения этой проблемы.

Экспериментальные данные относятся в основном к удару и погружению пластин, клина, конуса и сферы. Наиболее полно изучена задача о вертикальном входе в воду клиновидного тела, составленного из упругих пластин. Получен ряд интересных теоретических и экспериментальных результатов, которые находят практическое применение при расчете на прочность в судостроении (задача слеминга).

Несимметричное проникание клина в несжимаемое невесомое жидкое полупространство при произвольном угле атаки исследовалось Б. С. Чекиным [106] (скорость проникания постоянна). Используя метод конформных преобразований, автору удалось свести поставленную автомодельную задачу к решению некоторого нелинейного интегрального уравнения.

Решение для симметричного входа клина получено ранее З. Н. Добровольской. Аналитическое решение аналогичной автомодельной задачи для несимметричного тупого клина в случае его вертикального входа с постоянной скоростью в сжимаемую жидкость получено Я. П., Дворкиным [41].

Плоские несимметричные задачи о погружении твердых тел в идеальную жидкость рассматривали А. В. Кузнецов и А. Ш. Маневич [71], А. Ш. Маневич [78].

Задачи о входе затупленных тел в воду рассматривались многими авторами. В случае аналитического построения решений основными методами здесь являются методы теории функций комплексного переменного (плоские задачи), интегральных преобразований и метод источников, и их комбинации. Применение аналитических методов к решению этого класса задач наталкивается на значительные математические трудности, связанные с подвижностью свободных границ и нелинейностью условий на них. Поэтому авторы для упрощения задачи (при использовании аналитических методов) ограничиваются рассмотрением начальной стадии погружения, когда граничные условия сносятся на первоначально невозмущенную плоскую свободную поверхность жидкости.

Различные вопросы, относящиеся к проблеме удара и погружения жестких тел в жидкость, рассматривались также в работах [6, 16, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 33, 70, 74, 80, 88, 93, 94, 95].

При учете упругости тела задача сильно усложняется. В результате гидроупругого взаимодействия изменяется ускорение центра тяжести всей системы, погружающейся в жидкость, и характер реакций.

Отметим, что проблема взаимодействия упругих тел с жидкостью полностью еще не решена. Найденные решения построены на приближенных моделях, и полученные результаты справедливы только для начальных этапов погружения.

В последние десятилетия для исследования задач о погружении тел в жидкость активно используются численные методы. Шахверди Г. Г. в работе [108] представляет разработанные им численные методы и алгоритмы исследования процессов гидроупругого и гидроупруго-пластического удара конструкций о жидкость. Также приводит решения ряда практических задач, и сравнение их с результатами экспериментов и решениями, полученными другими авторами, показывает влияние на динамику конструкции вязкости жидкости.

В работе [107] рассматривается моделирование входа в жидкость с использованием метода граничных элементов.

В работе [110] ударное взаимодействие конструкции с жидкостью исследуется с использованием коммерческих программных кодов.

Во всех работах, представленных выше, влияние воздушной прослойки между конструкцией и жидкостью игнорировалось, хотя в ряде работ (например здесь [28] и здесь [108]) отмечалось необходимость его учета.

При падении тел на воду между телом и свободной поверхностью жидкости может образовываться прослойка воздуха, которая приводит к существенному изменению характеристик погружения. Это явление особенно проявляется при плоском ударе.

К настоящему времени выполнен ряд теоретических [5, 7, 22, 82, 83, 111, 115] и экспериментальных [8, 9, 115] исследований по учету влияния воздушной подушки на погружение в идеальную жидкость плоских тел. Теоретические работы в основном относятся к падению абсолютно жестких плоских пластин на поверхность идеальной несжимаемой жидкости.

При построении более точной математической модели удара плоского тела о жидкость необходимо учитывать также и другие обстоятельства. В реальных условиях поверхность воды покрыта сложной системой волн, поэтому толщина воздушной прослойки будет переменной и случайной величиной. Кроме того, поверхностный слой воды содержит нерастворенные пузырьки воздуха, что приводит к увеличению сжимаемости жидкости.

До настоящего времени такой модели, учитывающей отмеченные выше факторы, еще нет.

Экспериментальные данные позволяют сделать вывод, что величина максимальных гидродинамических давлений существенным образом зависит от наличия воздушной прослойки и от упругости ударяющейся конструкции (тела).

Таким образом, к настоящему моменту большинство решенных задач в области удара тел о жидкость относится к определению гидродинамических сил на твердые и деформируемые тела. И хотя эти решения имеют большое теоретическое и прикладное значение (в том числе и для численного моделирования), они игнорируют участие воздушного слоя в процессе ударного взаимодействия конструкций с жидкостью. Исследование влияния воздушной прослойки на процесс ударного взаимодействия конструкций с жидкостью в полной аэрогидроупругой (связной) постановке до сих пор не проведено.

**Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) тела.** Задачи об определении НДС тел различной формы под заданными нагрузками достаточно хорошо изучены.

В последнее время значительное распространение получили трехслойные конструкции, состоящие из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу [30]. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума



весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

Проблемой теории слоистых конструкций занимались многие авторы [3, 37, 42, 84, 91, 92, 105].

Конструкции, имеющие слоистую структуру, широко применяются в современной технике. Эти конструкции обычно состоят из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Еще одна группа слоев предназначена для защиты от тепловых, химических, радиационных и других нежелательных воздействий. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды, создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

Значительный толчок к широкому распространению многослойных конструкций был дан прогрессом в области новых композиционных материалов. Многие из этих материалов имеют слоистую структуру; созданные из них конструкции следует рассматривать как мелкослоистые. Технологические приемы, применяемые при создании конструкций из композиционных материалов (например, намотка и прямое прессование), таковы, что конструкция естественно получается состоящей из ряда слоев. Так, оболочки, изготовленные методом продольно-поперечной или перекрестной спиральной намотки, состоят из двух групп слоев с различной ориентацией армирующих элементов.

Теорию многослойных конструкций можно трактовать как результат обобщений классической теории пластин и оболочек в теории трехслойных конструкций. В ряде случаев многослойные элементы конструкций уже нельзя считать тонкими в смысле гипотез классической теории. При увеличении числа слоев и применении различных заполнителей существенную роль начинают играть эффекты, связанные с работой отдельных слоев. Кроме поперечных сдвигов и обжатия нормалей, в многослойных конструкциях часто приходится учитывать моментные эффекты в несущих слоях, локальные формы потери устойчивости и др.

Основы теории трехслойных пластин заложены еще в довоенные годы. К этому времени относятся первые работы по механике многослойных конструкций. Так, А. В. Дятлов (1938 г.) рассмотрел составные стержни с непрерывно распределенными упругими связями, а С. Г. Лехницкий (1941 г.) вычислил эффективные жесткости многослойных упругих пластин и оболочек. Обзор основных результатов можно найти, например, в работе [2]. Существенный

вклад в развитие этой теории внесли А. Я. Александров, С. А. Амбарцумян, В. В. Болотин, Л. Э. Брюккер, В. В. Васильев, К. З. Галимов, Э. И. Григолюк, Я. М. Григоренко, А. В. Дятлов, В. И. Королев, Л. М. Куршин, С. Г. Лехницкий, Х. М. Муштари, Ю. Н. Новичков, А. П. Прусаков, Г. А. Тетерс, С. П. Тимошенко, Н. Г. Ченцов, А. П. Чулков, М. Р. Bieniek, A. M. Freudenthal, J. K. Ebsiogly, A. C. Eringen, J. I. Foss, J. Mayers, L. M. Habip, E. J. Plantemma, E. Reissner, J. Solvey, , К. Р. Soldatos, M. Stein, С.-Т. Wang и многие другие.

В 1963 г. предложен подход к построению механики многослойных конструкций [10], получивший развитие в ряде дальнейших публикаций. Особенность этого подхода— максимальная алгоритмизация, достигаемая систематическим использованием вариационных принципов, тщательным выбором системы основных понятий, обозначений и структуры уравнений. Исходным пунктом по-прежнему является теория трехслойных пластин и оболочек. Эта теория обобщается таким образом, что становится справедливой при произвольном (в том числе бесконечном счетном) числе слоев. Теория развивается при достаточно общих предположениях о характере работы каждого слоя; для одних слоев можно принять гипотезу Кирхгофа-Лява, для других— гипотезу Тимошенко, для третьих— гипотезу Тимошенко, обобщенную с учетом изменения длины нормалей. Столь же общий характер носят предположения о свойствах материалов и характере нагружения. Определяющие уравнения теории оказываются дифференциальными по координатам, отсчитываемым в плоскости слоев, и разностными по третьей координате, отсчитываемой по нормали к слоям. Такая структура уравнений позволяет получить дальнейшие результаты. В частности, для некоторых типов конструкций регулярной структуры удастся отделить функции разностной переменной и получить, таким образом, эффективные аналитические решения, в которых общее число слоев входит как параметр. Когда число слоев достаточно велико, конструкцию можно рассматривать как мелкослоистую. В этом случае полученные уравнения допускают предельный переход, при котором разностная переменная становится непрерывной. В статье [11] этот предельный переход впервые проведен на основе принципа энергетической континуализации (размазывания, сглаживания); позднее принцип континуализации применен для получения определяющих уравнений механики слоистых композитов [12].

Развитая таким образом теория занимает промежуточное место между теорией многослойных пластин и оболочек, основанной на гипотезах для пакета в целом (гипотезы Кирхгофа—Лява, Тимошенко и др.), и точными подходами, основанными на уравнениях теории упругости. В теории многослойных конструкций не накладывается ограничений на суммарную толщину пакета. Поэтому она применима, например, не только к пластинам, но и к толстым плитам, пространству и полупространству. Теория естественным образом учитывает

изменения метрических свойств отсчетных поверхностей при переходе от слоя к слою, поэтому она пригодна, например, для расчета толстостенных цилиндров слоистой структуры. Уравнения этой теории в одинаковой степени применимы к расчету многослойной сферической оболочки и расчету шара слоистой структуры. Общая точка соприкосновения теории многослойных конструкций с классической теорией упругости—континуализированный вариант теории, разработанный для конструкций мелкослоистой структуры.

Проблемы использования кинематических гипотез для пакета в целом и для отдельных слоев, влияние граничных условий и геометрических параметров при построении теории упругих слоистых конструкций рассмотрены, например, в обзоре [35], содержащем подробные библиографические сведения.

Нестационарное поведение пластин и оболочек стало объектом интенсивных исследований с начала семидесятых годов прошлого века. В обзорной работе Новичкова [81] обсуждены различные постановки динамических задач для многослойных конструкций. Отмечено, что наиболее общим подходом для описания деформирования этих конструкций можно считать применение для каждого слоя уравнений динамической теории упругости с формулировкой краевых условий на лицевых и торцевых поверхностях и условий сопряжения на границах слоев. Однако такой подход оказывается достаточно сложным, его удастся реализовать лишь для неограниченных слоистых сред периодической структуры. Некоторые упрощения, приводящие к достижению результата, получаются при учете мелкослоистости среды. Для слоистых бесконечных сред удастся использовать методы акустики и линейной оптики и на основе этого получать эффективные решения. Применение этих результатов к механике слоистых конструкций почти невозможно из-за ограниченности объектов как по направлениям в поверхностях слоев, так и по направлению, перпендикулярному к срединным поверхностям слоев.

Для большинства многослойных конструкций характерно, что отдельные слои, а возможно, и все, обладают широко развитыми реологическими свойствами. Последние, в свою очередь, могут существенно влиять на процессы распространения нестационарных возмущений в механической системе, на ее деформирование. Можно указать лишь несколько работ, в которых на основе динамических уравнений теории упругости исследуется нестационарное поведение слоистых вязкоупругих конструкций.

Абросимов в рамках гипотезы Тимошенко для всего пакета предложил алгоритм численного решения, основанный на методе конечных разностей. Им рассмотрены задачи нестационарного деформирования композитных оболочек вращения при импульсных воздействиях [1].

В работах Анина и Садовского [4] приведены постановка, методика и результаты численного решения задачи о динамическом деформировании многослойной упругопластической плиты с учетом поверхностей расслоения.

Еще один подход изложен в работах Болотина и Новичкова [13]. Он предполагает, что жесткие слои деформируются упруго, а пластические деформации возникают в заполнителях. Касательные напряжения поперечного сдвига по толщине мягкого слоя предполагаются распределенными равномерно. Это позволяет учесть скольжение одного жесткого слоя относительно другого при применении модели идеального упругопластического тела для заполнителя. Принимается, что скольжение начинается одновременно по всему сечению мягкого слоя. Здесь же для описания механического поведения композитов предлагается использовать модель мелкослоистой среды, в физических уравнениях состояния которой вводятся в общем случае операторы линейной вязкоупругости.

### 1.3 Выводы

1. Согласно проведенному анализу литературных источников, проблема ударного взаимодействия конструкций с жидкостью исследовалась на протяжении многих лет и остается актуальной и по сей день.

Современные исследователи все шире используют численные методы, ибо они позволяют решать задачи такого рода в полной (связной) аэрогидроупругой постановке, когда уравнения для тела и жидкости решаются совместно.

Однако, влияние воздушной прослойки, между конструкцией и жидкостью, на процесс ударного взаимодействия в полной связной постановке до сих пор не проведено. Наличие воздушной прослойки между конструкцией и жидкостью может существенно сказаться на значении и распределении давлений на конструкцию со стороны среды. Игнорирование воздушной прослойки приводит к снижению эффективности проектирования конструкций взаимодействующих с жидкостью.

В связи с этим необходимо:

- 1) разработать методику численного моделирования ударного взаимодействия конструкций с жидкостью с учетом воздушной прослойки в связной постановке,
- 2) исследовать влияние воздушной прослойки на процесс ударного взаимодействия конструкций с жидкостью,
- 3) исследовать влияние связности на процесс ударного взаимодействия конструкций с жидкостью.

2. Согласно проведенному анализу литературных источников, слоистые конструкции становятся все более распространены в современной технике в связи с более эффективными удельными параметрами.

Поведение слоистых конструкций под действием различных нагрузок достаточно подробно изучено. Однако, и в отечественных, и в зарубежных источниках отсутствует решение задач о взаимодействии слоистых конструкций с жидкостью с учетом воздушной прослойки в связной постановке.

Учет связности, то есть взаимоучет деформаций тела, жидкости и воздушного слоя между ними, может существенно сказаться на процессе удара и погружения, и, как следствие, на динамических характеристиках и несущей способности конструкции.

Для эффективного проектирования конструкций вступающих в ударное взаимодействие с жидкостью необходимо учитывать взаимное влияние взаимодействующих сред. В связи с этим необходимо:

1) провести исследование ударного взаимодействия слоистых элементов конструкций с жидкостью. Применительно к задачам сброса грузов на воду, рассмотреть удар о воду слоистых пластин круглой и прямоугольной формы. Применительно к задачам посадки гидросамолетов, рассмотреть удар о воду слоистого малокилеватого клина.

2) рассмотреть влияние воздушной прослойки и начальной скорости взаимодействия на динамические характеристики слоистых элементов конструкций.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ

### 2.1 Постановка задачи и описание метода исследования

Согласно выводам, сделанным в предыдущей главе, в работе исследуется поведение слоистых элементов конструкций при вертикальном ударе о поверхность воды.

В данной главе ставится задача, проводится верификация математической (численной) модели.

На примере сравнения аналитического и численного решения задачи о вертикальном ударе круговой трехслойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость исследуется влияние связности.

На примере сравнения экспериментального и численного решения задачи о вертикальном ударе однослойной прямоугольной пластины об идеальную сжимаемую жидкость исследуется влияние воздушной прослойки.

**Постановка задачи.** В работе рассматривается вертикальный удар ряда слоистых элементов конструкций (круговая и прямоугольная пластины, малокилеватый клин) о первоначально невозмущенную поверхность идеальной сжимаемой жидкости (воды).

В первоначальный момент времени элемент конструкции находится на некотором расстоянии от невозмущенной поверхности воды, со всех сторон окружен воздухом, т.е. между элементом конструкции и поверхностью воды присутствует слой воздуха.

В начальный момент времени элемент конструкции приобретает начальную скорость и далее под действием гравитационных сил падает на поверхность воды. Начальная скорость пластины много меньше скорости звука в воде. Исследуется начальный этап взаимодействия, когда возникают максимальные гидродинамические давления, и характеристики реакций достигают предельных значений.

Задача решается в двухмерной плоскосимметричной (прямоугольная пластина бесконечного размаха по длине, малокилеватый клин) или осесимметричной (круговая пластина) связной постановке (т. е. происходит взаимоучет деформаций пластины, жидкости и воздушного слоя между ними). В осесимметричной постановке рассматривается симметрия относительно оси вращения пластины. В плоскосимметричной постановке рассматривается симметрия относительно центра пластины по ширине.

Пластина рассматривается как симметричного, так и несимметричного строения по толщине. Слои пластины считаются однородными и изотропными, работающими в рамках

закона Гука. Разрешающими уравнениями являются уравнения движения механики сплошной среды.

Разрешающие соотношения в лагранжевых декартовых координатах представляют собой:

уравнение сохранения массы:

$$\frac{\rho_0 V_0}{V} = \frac{m}{V}, \quad (2.1)$$

где введены следующие обозначения:

$\rho_0, V_0$  – начальная плотность и начальный объем,

$m, V$  – текущая масса и текущий объем.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{x} &= \rho F_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \ddot{y} &= \rho F_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \ddot{z} &= \rho F_z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\sigma$  – тензор напряжений,

$\sigma_{qj}$  – компоненты тензора напряжений ( $q, j = x, y, z$ ),

$\rho$  – текущая плотность,

$F_j$  – компоненты объемных сил,

$x, y, z$  – компоненты перемещений в соответствующих направлениях.

Соотношение для удельной энергии:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\rho} (\sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{yy} \dot{\epsilon}_{yy} + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz} + 2\sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + 2\sigma_{xz} \dot{\epsilon}_{xz} + 2\sigma_{yz} \dot{\epsilon}_{yz}). \quad (2.3)$$

где  $\epsilon$  – удельная энергия,

$\epsilon$  – тензор деформаций,

$\epsilon_{qj}$  – компоненты тензора деформация.

Точкой традиционно обозначается частная производная по времени.

В общем случае материалы имеют сложный отклик на динамическую нагрузку. Рассматриваемая модель материала разбивается на две части: уравнение состояния, которое выражает изменение объема и описывается шаровым тензором, и соотношение для девятатора тензора напряжений, которое выражает изменение формы:

$$\sigma_k = -p + s_k, \quad (2.4)$$

где  $\sigma_k$  – главные напряжения ( $k = 1, 2, 3$ ),

$p$  – гидростатическое давление,

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$s_k$  – девиатор тензора напряжений.

Математически задача состоит в том, что в бесконечной плоскости, нижняя часть которой заполнена водой, а верхняя воздухом, на некотором расстоянии от поверхности воды находится слоистая пластина. Пластина является либо самостоятельным элементом конструкции, либо составной частью клина (клин состоит из двух прямоугольных пластин).

**Математическая модель пластины.** В работе в качестве модели слоев пластин используются частные случаи уравнений (2.1)-(2.4) для двухмерной постановки. В соотношении (2.4) в качестве уравнения состояния для слоев пластин принимается:

$$p = K\mu, \quad (2.5)$$

где  $K$  – мгновенный модуль объемной деформации,

$\mu$  – сжатие,

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1.$$

В качестве соотношения для девиатора для слоев пластин берется:

$$ds_k = 2G(d\varepsilon_k - \frac{dV}{3V}), \quad (2.6)$$

где  $G$  – модуль сдвига.

Гипотез о распределении перемещений по толщине пластины, приводящих к разделению на мягкие и жесткие слои, не вводится.

В качестве граничных условий сопряжения между слоями пластины рассматриваются условия равенства перемещений.

В качестве граничных условий на внешней поверхности пластины рассматривается условие равенства давлений со стороны окружающей среды напряжениям в слое пластины:



$$(\sigma_{qj}^+ - \sigma_{qj}^-)n_j = 0,$$

$n_j$  - внешняя единичная нормаль,

а также на краях пластины задаются граничные условия скорости.

В качестве начальных условий задается начальная скорость пластины.

**Математическая модель воды и воздуха.** В работе в качестве моделей воды и воздуха используются частные случаи уравнений (2.1)-(2.4) для двухмерной постановки в эйлеровых координатах.

Вода рассматривается как идеальная сжимаемая жидкость. В соотношении (2.4) в качестве уравнения состояния принимается соотношение Ми-Грюнайзена, полученное с использованием уравнения Ранкина-Гюгонио:

$$p = p_H + \Gamma \rho (\epsilon - \epsilon_H), \quad (2.7)$$

где  $p_H, \epsilon_H$  - давление и удельная внутренняя энергия Гюгонио,

$$p_H = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 + \mu)}{(1 - (\beta - 1)\mu)^2},$$

$$\epsilon_H = \frac{1}{2} \frac{p_H}{\rho_0} \left( \frac{\mu}{1 + \mu} \right),$$

$c_0$  - скорость звука в покоящейся среде,

$\beta = 1.75$  - коэффициент, определяемый экспериментально,

$\Gamma$  - коэффициент Грюнайзена.

Для воздуха в качестве уравнения состояния используется модель идеального политропного газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon, \quad (2.8)$$

где  $\gamma = 1.4$  - показатель адиабаты.

Девiator тензора напряжений в соотношении (2.4) как для воды, так и для воздуха принимается равным нулю.

В качестве граничных условий между воздухом и водой, принимается условие равенства давлений.

Также, для исследования влияния воздушной прослойки, анализируется случай, когда элемент конструкции в начальный момент времени соприкасается с невозмущенной поверхностью воды.

**Описание метода исследования.** Исследование поставленной задачи проводится с помощью коммерческого программного комплекса ANSYS AUTODYN.

Задача решается методом конечных элементов. Используется явная схема интегрирования по времени.

Для моделирования пластины используются 4-х узловые элементы Лагранжа. Перемещения на элементе ищется по формуле:

$$x_j(t) = \sum_{\lambda=1}^4 \phi_\lambda x_j^\lambda(t), \quad (j = x, y)$$

где  $\phi_\lambda$  - функции формы:

$$\phi_\lambda = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_\lambda)(1 + \zeta\zeta_\lambda),$$

$x_j^\lambda(t)$  – координата  $\lambda$ -ого узла в направлении  $j$ .

В явном методе решения мы начинаем с дискретизации исследуемой области сеткой конечных элементов с заданными свойствами материалов, нагрузками, граничными и начальными условиями. Это начальное состояние мы интегрируем во времени, создавая движение в узловых точках сетки.

Движение узлов создает деформацию элементов. Деформация меняет объем элементов и плотность материала в них. Вычисляется скорость деформации, используя разные формулировки элементов. Обобщенные законы используют скорость деформации материала для получения напряжений. Напряжения трансформируются обратно в узловые силы, используя разные формулировки элементов. Внешние узловые силы считаются с граничных условий, нагрузок и контактов (взаимодействия тел). Узловые силы делятся на узловые массы для получения узловых ускорений. Ускорения явно интегрируются во времени для получения узловых скоростей. Узловые скорости явно интегрируются во времени для получения узловых перемещений. Процесс повторяется до достижения временного момента заданного пользователем.

Явный решатель использует центральную разностную схему по времени. После вычисления сил в узлах сетки (полученных из внутренних напряжений, контактов или граничных условий), узловые ускорения приравниваются силе деленной на массу, и имеют вид:

$$\ddot{b}_k = \frac{F_k}{m} + a_k, \quad (2.9)$$

где:

$\ddot{b}_k$  - компоненты узловых ускорений ( $k = 1, 2, 3$ ),

$F_k$  - компоненты сил в узлах,

$a_k$  - компоненты ускорения тела,

$m$  - масса, приписанная узлу.

Зная ускорение в момент  $\alpha$ , скорость в момент  $\alpha + \frac{1}{2}$  находится из:

$$\dot{b}_k^{\alpha+\frac{1}{2}} = \dot{b}_k^{\alpha-\frac{1}{2}} + \ddot{b}_k^{\alpha} \Delta t^{\alpha},$$

и наконец, расположение узлов в момент времени  $\alpha + 1$  вычисляется:

$$b_k^{\alpha+1} = b_k^{\alpha} + \dot{b}_k^{\alpha+\frac{1}{2}} \Delta t^{\alpha}.$$

Для уверенной стабильности и точности решения, размер временного шага, используемого при явном интегрировании, ограничивается условием Куранта. Это условие полагает, что временной шаг ограничивается так, что волна напряжений не может пройти расстояние большее, чем характеристический размер самого маленького элемента. Таким образом, критерий временного шага для стабильного решения имеет вид:

$$\Delta t \leq f \left[ \frac{h}{c} \right]_{min}, \quad (2.10)$$

где

$\Delta t$  - приращение временного шага,

$f$  - фактор стабильности временного шага ( $= 0.9$  по-умолчанию),

$h$  - характеристический размер элемента,

$c$  - скорость звука в элементе.

Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии решаются для Эйлеровой сетки, используя метод Годунова второго порядка точности. Вычислительный цикл для тел представленных в Эйлеравых координатах показан далее: начало цикла, вычисление скоростей деформаций, давлений и напряжений, вычисление импульса на поверхностях ячейки, модификация количества движения, скорости и внутренней энергии ячейки, перенос материала через ячейку. Далее, процесс повторяется.

**Описание методики исследования.** В программном комплексе элементами Лагранжа строится прямоугольная область, по ширине и толщине соответствующая размерам пластины. Область разбивается на конечные элементы так, чтобы по толщине на каждый слой пластины приходилось целое количество элементов (по ширине их всегда приходится целое количество). Каждому слою по толщине соответствует минимум три элемента. Затем элементам соответствующим каждому слою пластины присваивается соответствующий материал, из которого состоит данный слой. То есть, слоистая пластина моделируется как один слой со скачкообразно меняющимися свойствами. Таким образом между слоями задается условие равенства перемещений.

В зависимости от задачи в узлах сетки задаются начальные и граничные условия в виде соотношений для скорости. В плоскосимметричной задаче симметрия задается относительно центра пластины по ширине граничным условием в узлах на центре пластины: скорость в направлении оси  $X$  равна нулю (Рисунок 7, стр. 33). При таком граничном условии пластина остается сжимаемой по толщине.

Для моделирования воздуха и жидкости используются элементы Эйлера.

В программном комплексе элементами Эйлера строится область, часть которой заполняется жидкостью (нижняя), а часть воздухом (верхняя). Область элементов Эйлера строится так, чтобы ее ширина была вдвое больше ширины (радиуса) пластины, глубина жидкости равна ширине (радиусу) пластины. Верхняя часть области элементов Эйлера складывается из расстояния между пластиной и жидкостью, а также еще некоторого расстояния так, чтобы воздух окружал пластину со всех сторон (около половины ширины (радиуса) пластины).

На нижней границе области задается условие убегания волн (граничное условие Transmit, случай бесконечной глубины), математически оно выражается как равенство давлений нулю.

При построении сетки важным моментом для стабильности решения является выбор размера конечных элементов. При моделировании ударного взаимодействия конструкций с жидкостью с учетом воздушной прослойки, скорость звука в материале пластины и воздухе может отличаться больше, чем на порядок. Из формулы (2.10) видно, что шаг по времени обратно пропорционален скорости звука в среде. Для большей стабильности решения нужно стараться строить сетку так, чтобы шаг интегрирования для разных частей модели как можно меньше различался.

Следует отметить, что решение во всех случаях ищется с учетом гравитационных сил.

В связи с наличием разнообразных моделей описания поведения материалов и сложностью отклика материалов на импульсное воздействие, необходимо проверять достоверность

получаемых численно результатов. Для этого проводят верификацию численных моделей, сравнивая полученные численно результаты с аналитическими решениями и экспериментальными данными.

## **2.2 Сравнение аналитического и численного решения задачи о вертикальном ударе круговой трехслойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость**

Как уже ранее отмечалось, в общей постановке задача о взаимодействии упругих конструкций с жидкостью крайне сложна, поэтому вводятся упрощения, конкретизирующие задачу, что в отдельных случаях позволяет получить точное аналитическое решение. Основным упрощением является разделение задачи на две: задача о погружении твердого тела в жидкость, позволяющая определить гидродинамическое давление действующее на тело, и задача об отыскании напряженно-деформированного состояния тела, под действием ранее найденной гидродинамической нагрузки.

В этом подразделе рассматривается задача о вертикальном ударе круговой трехслойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость с аналитическим решением, а также проводится сравнение с решением этой же задачи, полученным численно.

Предварительно сделаем ряд вспомогательных изысканий.

### **2.2.1 Исследование сходимости численного решения от размера элемента**

Как известно, если взять слишком грубую конечно-элементную сетку, то результаты решения будут неудовлетворительные. Проверим сходимость результатов от размера сетки.

Рассмотрим задачу о вертикальном ударе круговой пластины об идеальную сжимаемую жидкость (воду). Задача решается численно, методом конечных элементов. Задача решается в осесимметричной связанной постановке.

В программном комплексе моделируется область радиусом 120 см и высотой 500 см. Водой заполнены 400 см снизу, а остальное заполнено воздухом. В данном случае на границе области задается условие полного отражения возмущений, так как рассматривается промежуток времени, за который отраженная от границы области волна возмущений не успевает вернуться обратно к пластине.

Пластина моделируется элементами Лагранжа, область элементами Эйлера. Математические модели пластины, воздуха и воды представлены выше в подразделе 2.1.

В начальный момент времени пластина лежит на невозмущенной поверхности воды. Радиус пластины 60 см, толщина 6 см. В качестве материала пластины взята стандартная сталь (уравнением состояния принято соотношение (2.5), мгновенный модуль объемной деформации  $K = 1.59 \cdot 10^{11}$  Па, плотность  $\rho = 7830$  кг/м<sup>3</sup>). В начальный момент времени пластина приобретает вертикальную скорость 5 м/с (начальная скорость задается в каждом узле пластины). Край круговой пластины свободный.

Вид модели приведен на рисунке 4.

Рассмотрены три вида дискретизации пластины и области. Размеры сетки сведены в таблицу 1. Сетка равномерная.

Результаты приведены в таблице 2. За эталон давления взято значение при размере сетки области 0.25 см.

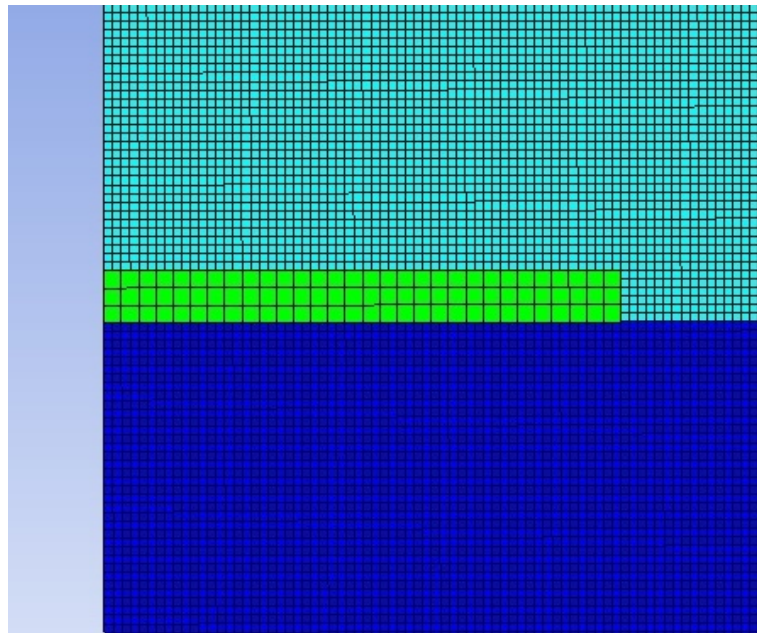


Рис. 4. Вид модели круговой пластины

Таблица 1. Размер сетки пластины и области в см

Пластина	Область
2	1
1	0.5
0.5	0.25

Из таблицы 2 видно, что с уменьшением размера сетки максимальные давления сходятся. Также видно, что уменьшается время достижения максимальных давлений, это объясняется тем, что с уменьшением размера сетки, уменьшается шаг интегрирования по времени,

Таблица 2. Результаты расчетов

Размер сетки области (см)	Время достижения максимальных давлений (мс)	Максимальные давления (Па)	Отклонения максимальных давлений (%)
1	$18.067 \cdot 10^{-3}$	9891000	3.448
0.5	$9.8389 \cdot 10^{-3}$	10257000	0.244
0.25	$4.5167 \cdot 10^{-3}$	10232000	0

и время достижения максимальных давлений стремится к нулю, что хорошо согласуется с аналитикой (смотри далее в пункте 2.2.2).

### 2.2.2 Гидродинамическое давление на твердый диск

В работе [87] рассматривается осесимметричная задача о вертикальном ударе абсолютно твердого диска о поверхность идеальной сжимаемой жидкости. В момент времени  $t = 0$  происходит удар твердого диска радиуса  $r$  по свободной поверхности идеальной сжимаемой жидкости, занимающей нижнее полупространство. Предполагается, что начальная скорость много меньше скорости звука в невозмущенной жидкости. Решение ищется методом интегральных преобразований. В результате получена зависимость гидродинамической силы, действующей на диск, от времени. В безразмерных переменных она имеет вид:

$$F(\tau) = \pi r^2 \rho_w c \left( v(\tau) - \int_0^\tau v(\chi) d\chi + \frac{1}{4} \int_0^\tau v(\chi)(\tau - \chi) d\chi \right), \quad (2.11)$$

где  $\tau$  - безразмерное время

$$\tau = \frac{ct}{r},$$

$r$  - радиус диска,

$\rho_w$  - плотность жидкости,

$c$  - скорость звука невозмущенной жидкости,

$F$  - сила, действующая на диск со стороны жидкости,

$v$  - скорость диска.

Зависимость (2.11) справедлива в промежутке времени  $t = r/c$ .

В случае бесконечной массы диска можно принять, что скорость не изменяется по времени, тогда сила примет вид [28, 87, 108]:

$$F(\tau) = \pi r^2 \rho_w c v_0 \left( 1 - \tau + \frac{\tau^2}{8} \right). \quad (2.12)$$

Найдем выражение для гидродинамической силы в случае конечной массы диска.

В случае конечной массы диска гидродинамическая сила выражается через неизвестную функцию скорости диска. Для отыскания скорости диска воспользуемся уравнением сохранения количества движения:

$$M \frac{cdv}{rd\tau} = -F(\tau) = -\pi r^2 \rho_w c \left( v(\tau) - \int_0^\tau v(\chi) d\chi + \frac{1}{4} \int_0^\tau v(\chi)(\tau - \chi) d\chi \right). \quad (2.13)$$

Пусть

$$b = \frac{M}{\pi r^3 \rho_w}.$$

Тогда из (2.13) получим (вынося минус из-под второго интеграла):

$$b \frac{dv}{d\tau} + v = \int_0^\tau v(\chi) d\chi + \frac{1}{4} \int_0^\tau v(\chi)(\chi - \tau) d\chi. \quad (2.14)$$

Пусть

$$\int_0^\tau v(\chi) d\chi = Y(\tau) - Y(0).$$

Тогда (2.14) примет вид:

$$b \frac{dv}{d\tau} + v = Y(\tau) - Y(0) + \frac{1}{4} \left( \int_0^\tau v(\chi)\chi d\chi - \tau \int_0^\tau v(\chi) d\chi \right). \quad (2.15)$$

Проинтегрируем по частям первый интеграл в правой части уравнения (2.15):

$$b \frac{dv}{d\tau} + v = Y(\tau) - Y(0) + \frac{1}{4} \left( [Y(\chi)\chi]_0^\tau - \int_0^\tau Y(\chi) d\chi - \tau(Y(\tau) - Y(0)) \right). \quad (2.16)$$

Пусть

$$\int_0^\tau Y(\chi) d\chi = U(\tau) - U(0).$$



Тогда получим:

$$b \frac{dv}{d\tau} + v = Y(\tau) - Y(0) + \frac{1}{4} (Y(\tau)\tau - U(\tau) + U(0) - \tau(Y(\tau) - Y(0))), \quad (2.17)$$

$$b \frac{dv}{d\tau} + v = Y(\tau) - Y(0) + \frac{1}{4} (-U(\tau) + U(0) + \tau Y(0)). \quad (2.18)$$

Дифференцируя (2.18) дважды по  $\tau$ , перенося все в левую сторону и деля на  $b$ , получим:

$$\frac{d^3v}{d\tau^3} + \frac{1}{b} \frac{d^2v}{d\tau^2} - \frac{1}{b} \frac{dv}{d\tau} + \frac{1}{4b} v = 0. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и имеет решение в элементарных функциях [17, 101]. Характеристическим уравнением уравнения (2.19) будет:

$$k^3 + \frac{1}{b}k^2 - \frac{1}{b}k + \frac{1}{4b} = 0. \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) является кубическим уравнением. Приведем его к каноническому виду [15]:

$$\lambda^3 + 3D_5\lambda + 2D_6 = 0, \quad (2.21)$$

где

$$\lambda = k + \frac{D_2}{3D_1},$$

$$D_1 = 1, D_2 = \frac{1}{b}, D_3 = -\frac{1}{b}, D_4 = \frac{1}{4b},$$

$$3D_5 = \frac{3D_1D_3 - (D_2)^2}{3(D_1)^2},$$

$$2D_6 = \frac{2(D_2)^3}{27(D_1)^3} - \frac{D_2D_3}{3(D_1)^2} + \frac{D_4}{D_1}.$$

Число действительных корней уравнения зависит от знака дискриминанта:

$$D = (D_6)^2 + (D_5)^3.$$

Выразим дискриминант через  $b$ :

$$D = \frac{27b + 8}{1728b^3} > 0 \text{ (так как } b > 0 \text{)}.$$

Так как дискриминант больше нуля, то уравнение (2.21) имеет один действительный ( $\lambda_1$ ) и два комплексных сопряженных корня ( $\lambda_2, \lambda_3$ ). Тогда корни уравнения (2.20) будут:

$$k_{1,2,3} = \lambda_{1,2,3} - \frac{D_2}{3D_1}.$$

Полное решение уравнения (2.19) имеет вид:

$$v(\tau) = C_1 e^{k_1 \tau} + e^{\alpha \tau} (C_2 \cos(\beta \tau) + C_3 \sin(\beta \tau)), \quad (2.22)$$

где

$$\alpha = \frac{k_2 + k_3}{2},$$

$$\beta = \left| \frac{k_2 - k_3}{2i} \right|,$$

$C_{1,2,3}$  — константы интегрирования,

$i$  — мнимая единица.

В размерных единицах (2.22) будет иметь вид:

$$v(t) = C_1 e^{\frac{k_1 ct}{r}} + e^{\frac{\alpha ct}{r}} \left( C_2 \cos\left(\frac{\beta ct}{r}\right) + C_3 \sin\left(\frac{\beta ct}{r}\right) \right). \quad (2.23)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_0, \\ \frac{dv(0)}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2v(0)}{dt^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $v_0$  - начальная скорость.

Из (2.23) и (2.24) найдем константы интегрирования  $C_{1,2,3}$ .

Чтобы найти гидродинамическую силу, действующую на диск, в случае конечной массы подставим (2.22) в (2.11), получим:

$$F(\tau) = \pi r^2 \rho_w c [v(\tau) + \left(\frac{\tau}{4} - 1\right)(C_1 A_1(\tau) + C_2 A_2(\tau) + C_3 A_3(\tau)) - \frac{1}{4}(C_1 A_4(\tau) + C_2 A_5(\tau) + C_3 A_6(\tau))], \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(\tau) &= \int_0^\tau e^{k_1 \chi} d\chi, \\ A_2(\tau) &= \int_0^\tau e^{\alpha \chi} \cos(\beta \chi) d\chi, \\ A_3(\tau) &= \int_0^\tau e^{\alpha \chi} \sin(\beta \chi) d\chi, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} A_4(\tau) &= \int_0^\tau \chi e^{k_1 \chi} d\chi, \\ A_5(\tau) &= \int_0^\tau \chi e^{\alpha \chi} \cos(\beta \chi) d\chi, \\ A_6(\tau) &= \int_0^\tau \chi e^{\alpha \chi} \sin(\beta \chi) d\chi. \end{aligned}$$

Интегралы (2.26) интегрируются в элементарных функциях [15]. Переходя после интегрирования к размерному времени, получим гидродинамическую силу, действующую на диск конечной массы, в размерном виде:

$$F(t) = \pi r^2 \rho_w c [v(t) + \left(\frac{ct}{4r} - 1\right)(C_1 A_1(t) + C_2 A_2(t) + C_3 A_3(t)) - \frac{1}{4}(C_1 A_4(t) + C_2 A_5(t) + C_3 A_6(t))]. \quad (2.27)$$

Проанализируем полученные результаты.

Уже из формулы (2.11) видно, что давление на твердый диск в начальный момент времени зависит только от свойств жидкости и начальной скорости диска. Также давление одинаково на всей поверхности соприкосновения диска с жидкостью.

На рисунке 5 изображено сравнение давлений действующих на диски, сделанные из разных материалов. Из рисунка видно, что на рассматриваемом временном интервале давления от времени зависят линейно. Масса диска влияет только на угол наклона прямой. Чем меньше масса, тем быстрее со временем убывает давление. Максимальное давление возникает в начальный момент времени и для всех пластины одинаково.

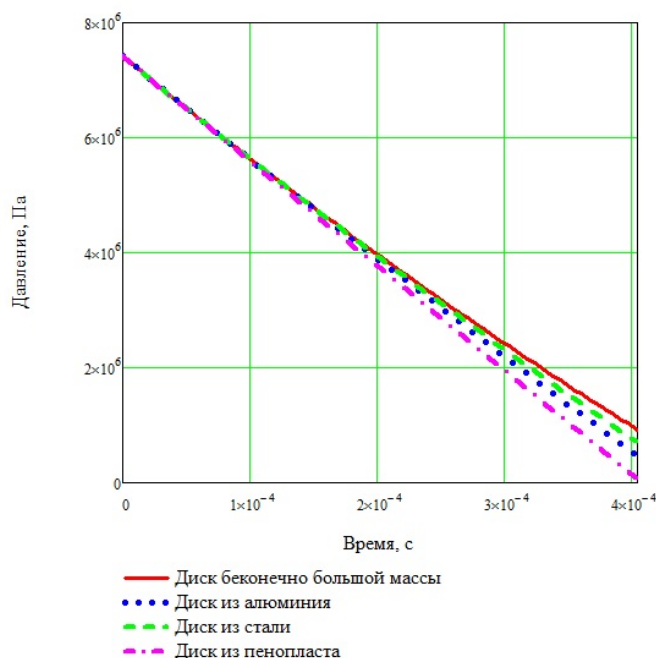


Рис. 5. Сравнение давлений действующих на диски из разных материалов

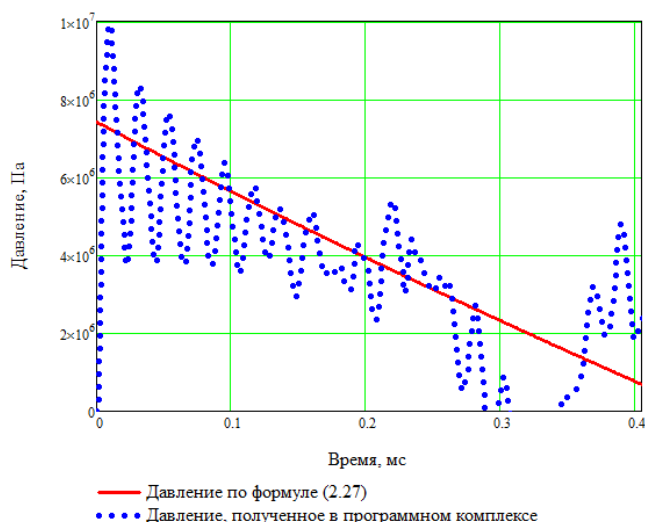


Рис. 6. Сравнение давлений в центре пластины полученных по формуле 2.27 с полученными в программном комплексе

На рисунке 6 представлено сравнение давлений в центре пластины, полученных по формуле (2.27), с давлениями, полученными в программном комплексе, для пластины из

пункта 2.2.1. Напомню, что в расчете по формуле (2.27) пластина считается твердой, а в пункте 2.2.1 пластина рассматривается упругой и имеет место гидроупругое взаимодействие с водой. Как видно из рисунка, давления близки, однако, пик давлений, полученных в программном комплексе, больше почти на 28% (для программного комплекса взяты давления для сетки области размером 5 мм).

### 2.2.3 Аналитическое решение задачи о вертикальном ударе круговой трехслойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость

В данном пункте приводится решение задачи об ударе трехслойной круглой пластины (Рисунок 7) о поверхность идеальной сжимаемой жидкости. В принятой приближенной постановке решение строится с использованием метода Бубнова и интегрального преобразования Лапласа. Пластина является дном некоторого цилиндрического сосуда. Первоначальная скорость удара  $v_0$  считается малой в сравнении со скоростью звука в жидкости. Гидродинамическое давление на начальной стадии погружения определяется приближенно на основании известного решения В.Б. Поручикова для жесткого диска, полученного в предыдущем пункте.

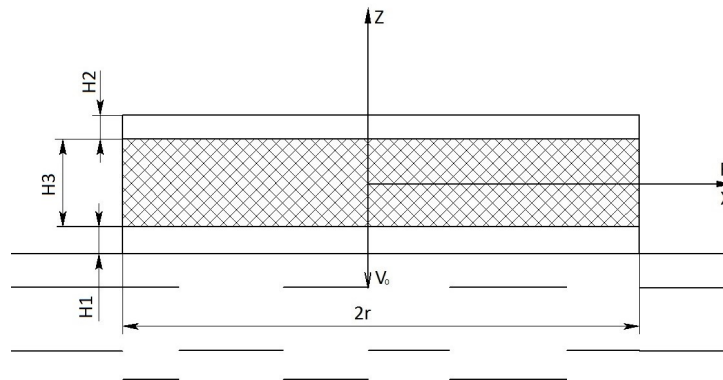


Рис. 7. Вид трехслойной пластины

Для вывода уравнений движения пластины использовался принцип Остроградского-Гамильтона.

Рассмотрим трехслойную пластину несимметричного строения по толщине с жестким трансверсально-изотропным сжимаемым заполнителем в цилиндрической системе координат, основная плоскость которой совпадает со срединной плоскостью заполнителя.

Обозначим через  $r$  – радиус пластины,  $H_k$  – толщину  $k$ -ого слоя ( $k = 1, 2, 3$ ),  $H = H_1 + H_2 + H_3$  – полную толщину пластины;  $u^k, w^k$  – соответственно меридиональное перемещение и

прогиб  $k$ -ого слоя;  $H_3 r_R$  – абсолютный сдвиг поверхностей контакта заполнителя с внешними слоями;  $E_k$  – модуль упругости  $k$ -ого слоя,  $G$  – модуль поперечного сдвига заполнителя,  $E_0$  – модуль упругости заполнителя в поперечном направлении. Введем безразмерные толщины  $d_k$  и жесткости  $\gamma_k$ , а также приведенные модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  по формулам:

$$d_k = \frac{H_k}{H}, \quad \gamma_k = \frac{E_k H_k}{1 - \nu_k^2} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{E_k H_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1},$$

$$\nu = \sum_{k=1}^3 \frac{E_k H_k \nu_k}{1 - \nu_k^2} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{E_k H_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}, \quad E = \frac{1 - \nu^2}{H} \sum_{k=1}^3 \frac{E_k H_k}{1 - \nu_k^2}.$$

При выводе уравнений предполагается, что для внешних слоев справедливы гипотезы Кирхгофа о прямой недеформируемой нормали. Коэффициент Пуассона материала заполнителя, характеризующий сокращение размеров в плоскости изотропии при растяжении в поперечном направлении принимается равным нулю.

Распределение нормальных перемещений по толщине заполнителя аппроксимируется линейной функцией поперечной координаты  $z$ :

$$w^3 = \frac{w^1 + w^2}{2} + \frac{z}{H_3} (w^1 - w^2) = w^+ + \frac{2z}{H_3} w^-,$$

где

$$w^+ = \frac{w^1 + w^2}{2}, \quad w^- = \frac{w^1 - w^2}{2}.$$

Тогда меридиональные смещения точек слоев  $u^k$  с учетом формул выше могут быть представлены в виде:

$$u^1 = u + \frac{H_3}{2} r_R - \left( z - \frac{H_3}{2} \right) \frac{\partial w^+}{\partial R} - \left( z - \frac{H_3}{4} \right) \frac{\partial w^-}{\partial R},$$

$$u^2 = u - \frac{H_3}{2} r_R - \left( z + \frac{H_3}{2} \right) \frac{\partial w^+}{\partial R} + \left( z + \frac{H_3}{4} \right) \frac{\partial w^-}{\partial R},$$

$$u^3 = u + z r_R - \frac{z^2}{H_3} \frac{\partial w^-}{\partial R}.$$

Вводя функции перемещения  $\chi$  и  $\psi$  на основании [36, 39] получаем следующую разрешающую систему уравнений, описывающую поведение круглой пластины при ее ударе о поверхность жидкости:

$$D \left[ \left(1 - \frac{\vartheta H^2}{\beta} \Delta\right) \Delta \Delta \chi + \delta_1 \Delta \Delta \psi \right] + C_1 \left(1 - \frac{H^2}{\beta} \Delta\right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + C_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + C_1 \frac{d^2 w^-}{dt^2} = -p,$$

$$D \left[ \left(\vartheta_2 - \frac{\vartheta_3 H^2}{\beta} \Delta\right) \Delta \Delta \chi - \delta_2 \Delta \Delta \psi \right] - \frac{E_0}{H} \delta_3 \psi + C_3 \left(1 - \frac{H^2}{\beta} \Delta\right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + C_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + C_3 \frac{d^2 w^-}{dt^2} = -p,$$

$$M \frac{d^2 U}{dt^2} = G - \int_0^{2\pi} \int_0^r p(t) R dR d\eta.$$

Здесь:

$$C_1 = \sum_{k=1}^3 \rho_k H_k, \quad C_2 = \rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + \frac{1}{3} \rho_3 H_3, \quad C_3 = \rho_1 H_1 - \rho_2 H_2,$$

$$D = \frac{EH^3 \theta_0}{12(1 - \nu^2)}, \quad C_4 = C_1 \theta_4 - C_3(\theta_1 + \theta_2), \quad C_5 = C_3 \theta_4 - C_2(\theta_1 + \theta_2),$$

$$\theta_0 = \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3, \quad \theta_1 = 3(c_{22} - c_{12}^2), \quad \theta_2 = 3(c_{23} - c_{12}c_{13}),$$

$$\theta_3 = 3(c_{33} - c_{13}^2), \quad c_{22} = d_3^2(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{3}\gamma_3), \quad c_{12} = d_3(\gamma_1 - \gamma_2),$$

$$c_{23} = d_3(\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2), \quad c_{13} = \gamma_1 d_1 - \gamma_2 d_2, \quad c_{33} = \frac{4}{3}(\gamma_1 d_1^2 + \gamma_2 d_2^2),$$

$$\beta = \frac{12Gd_3(1 - \nu^2)}{E\theta_1}, \quad \vartheta = \frac{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2}{\theta_0 \theta_1}, \quad \delta_1 = \theta_4 - \vartheta_1(\theta_4 + \theta_5),$$

$$\delta_2 = \vartheta_1 \theta_6 - \vartheta_2 \theta_4, \quad \delta_3 = \frac{4(\theta_1 + \theta_2)}{d_3}, \quad \vartheta_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_0},$$

$$\vartheta_2 = \frac{\theta_4 + \theta_5}{\theta_0}, \quad \theta_4 = 3(c_{24} - c_{12}c_{14}), \quad \vartheta_3 = \frac{\theta_1 \theta_5 - \theta_2 \theta_4}{\theta_0 \theta_1},$$

$$\theta_5 = 3(c_{34} - c_{13}c_{14}), \quad \theta_6 = 3(c_{44} - c_{14}^2), \quad c_{14} = \frac{1}{d_3}(c_{23} + \frac{1}{2}c_{22}),$$

$$c_{24} = d_3(c_{13} + \frac{1}{2}c_{12}), \quad c_{34} = \frac{4}{3}(\gamma_1 d_1^2 - \gamma_2 d_2^2) + \frac{1}{2}d_3 c_{13}, \quad c_{44} = \frac{d_3^2}{4}(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{5}\gamma_3) + c_{23} + c_{33},$$

где  $\rho_k$  – удельная плотность материала  $k$ -ого слоя,  $M$  – масса всей системы,  $U$  – перемещение всей системы, как твердого тела.

Третье уравнение описывает приближенное движение центра масс системы под действием внешней гидродинамической силы  $p$ , приложенной к первому слою пластины, прогиб которого равен  $w^1 = w^+ + w^-$  (под первым слоем подразумевается слой, соприкасающийся с поверхностью жидкости при ударе). В любой момент времени после соударения абсолютное перемещение произвольной точки пластины  $W$  равно:

$$W = U(t) + w^k(r, z, t),$$

где  $w^k(r, z, t)$  – прогиб  $k$ -ого слоя, обусловленный упругой деформацией пластины (положительный значения отсчитываются внутрь жидкости и совпадают с направлением перемещения пластины  $U(t)$ ).

Прогибы слоев, а также изгибающие моменты  $N_R, L_R$  и моменты поперечного сдвига  $T_R$  в цилиндрическом сечении пластины выражаются через функции перемещений в виде:

$$w^+ = \left(1 - \frac{H^2}{\beta} \Delta\right) \chi + \theta_4 \psi, \quad w^- = -(\theta_1 + \theta_2) \psi, \quad T_R = -D \vartheta_1 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} + \frac{\nu \partial \chi}{R \partial R} \right),$$

$$N_R = -D \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\nu \partial}{R \partial R} \right) \left[ \left(1 - \vartheta_1 - \frac{\vartheta H^2}{6\beta} \Delta\right) \chi + \delta_1 \psi \right],$$

$$L_R = D \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\nu \partial}{R \partial R} \right) \left[ \left(\vartheta_2 - \frac{\vartheta_3 H^3}{\beta} \Delta\right) \chi + \delta_2 \psi \right].$$

Ограничиваясь начальным этапом взаимодействия, давление  $p$  можно представить в форме:

$$p = \frac{F(t)}{\pi r^2},$$

где  $F(t)$  – определяется формулой (2.27).

Для свободно опертой по контуру круглой пластины граничные условия при  $R = r$  имеют вид:

$$w^+ = w^- = N_R = T_R = L_R = 0.$$

Условия для функций  $\chi$  и  $\psi$  приближенно могут быть представлены в форме:

$$\chi = \Delta \chi = \Delta \Delta \chi = \psi = \Delta \psi = 0.$$



В начальный момент времени при  $t = 0$ :

$$w^+ = w^- = \frac{\partial w^+}{\partial t} = \frac{\partial w^-}{\partial t} = 0, \quad \frac{dU}{dt} = v_0.$$

Система уравнений интегрируется методом Бубнова с использованием преобразования Лапласа по времени  $t$ . При этом функции перемещений  $\chi$  и  $\psi$  представляются в виде разложения Фурье-Бесселя, удовлетворяющего граничным условиям задачи:

$$\chi = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(t) I_0(\beta_j R),$$

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t) I_0(\beta_j R),$$

где  $I_0(\beta_j R)$ –функция Бесселя первого рода,  $\beta_j$  – корень уравнения  $I_0(\beta_j r) = 0$ .

На рисунке 8 представлено сравнение аналитического решения поставленной задачи, с решением полученным в программном комплексе для случая  $\frac{dU}{dt} = const$ .

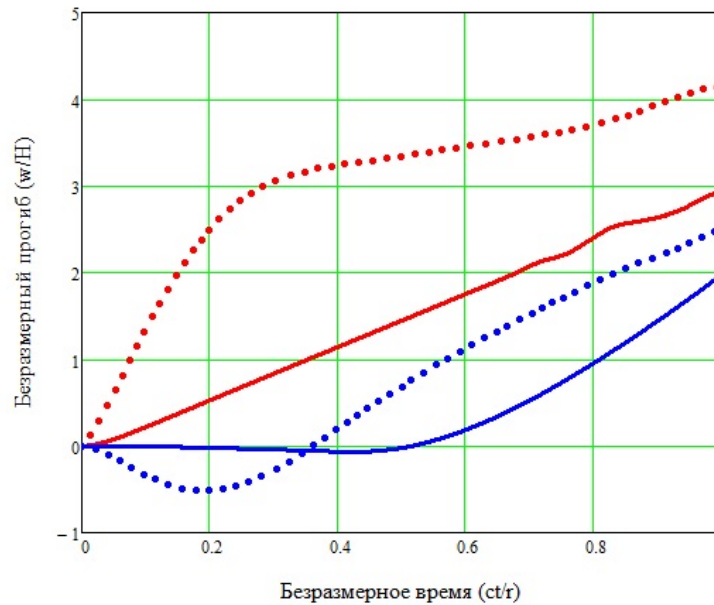


Рис. 8. Сравнение прогибов слоев, полученных из аналитического решения задачи (точки) и в программном комплексе (сплошная линия). Красным цветом показаны прогибы первого слоя, синим – второго.

Параметры расчетов:

$$\tau = \frac{ct}{r}, \quad W^k = \frac{w^k}{H}, \quad k = 1, 2, \quad E_1 = E_2, \quad E_3 = E_0, \quad \gamma_1 = 0.697, \quad \gamma_2 = 0.298,$$

$$d_1 = 0.07, d_2 = 0.03, \frac{H}{2r} = 0.1, \frac{v_0}{c} = 0.00666, \frac{E_1}{E_0} = 1.97 \cdot 10^3, \frac{E_1}{G} = 5.52 \cdot 10^3,$$

$$\frac{E_0}{G} = 2.8, \rho_1 = \rho_2, \frac{\rho_1}{\rho} = 2.7, \frac{\rho_3}{\rho} = 0.15, \frac{M}{\rho r^3} = 2.8.$$

Из рисунка видно, что прогибы полученные из аналитического решения и в программном комплексе, качественно совпадают, однако, количественно прогибы полученные в программном комплексе, учитывающие гидроупругое взаимодействие между пластиной и жидкостью, существенно меньше.

На рисунке 9 показано сравнение давлений, действующих в центре пластины, полученных по формуле (2.27) и в программном комплексе.

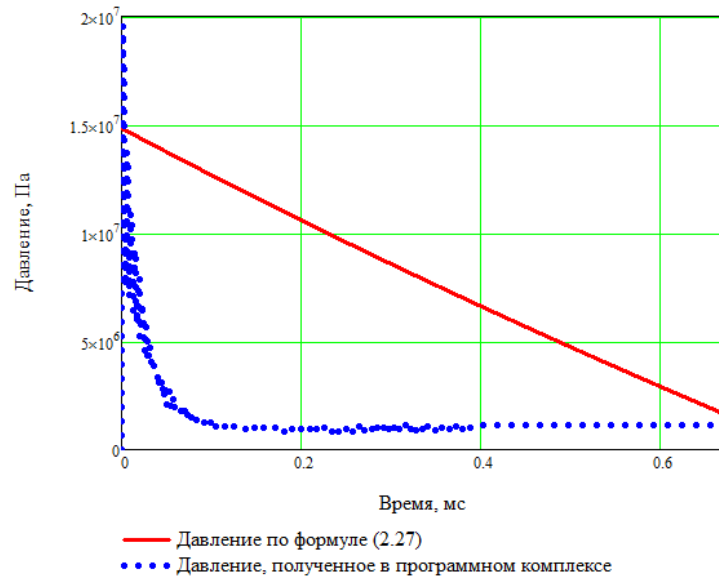


Рис. 9. Сравнение давлений, полученных по формуле 2.27 (сплошная линия) и в программном комплексе (точки)

Как видно, давления в случае учета гидроупругого взаимодействия убывают значительно быстрее. Все дело в деформациях пластины. В пункте 2.2.2 проводилось сравнение со стальным диском, который при взятой скорости соударения можно считать абсолютно жестким, поэтому давления качественно хорошо совпадают с аналитическим решением.

В данном примере трехслойную пластину абсолютно жесткой считать нельзя, она деформируется, и за счет этого давления падают быстрее. Максимальные давления возникают также в начальный момент времени, и разница между полученным максимальным давлением в программном комплексе и по формуле (2.27) составляет почти 25%. Напомню, что в пункте 2.2.2 разница составляла 28%.

Таким образом, на основании сравнения аналитического и численного решений задач о вертикальном ударе абсолютно твердой круговой и деформируемой круговой трехслойной пластин об идеальную сжимаемую жидкость проведено исследование влияния связности на процесс ударного взаимодействия конструкций с жидкостью.

Показано, что в случае когда тело можно считать абсолютно твердым, решение для гидродинамических давлений близко к аналитическому. В случае же, когда тело является деформируемым, необходимо учитывать гидроупругое взаимодействия тела с жидкостью, и решать задачу в связной постановке.

#### **2.2.4 Гидроупругое решение задачи о вертикальном ударе круговой однослойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость**

В предыдущем пункте приведено сравнение аналитического и численного решений для задачи об ударе круговой трехслойной пластины об идеальную сжимаемую жидкость. Показано, что для пластин, которые нельзя считать абсолютно жесткими, разница между несвязным и гидроупругим решениями может быть существенной.

Для большей уверенности в правильности решения, получаемого в программном комплексе, в данном пункте проводится сравнение гидроупругих решений для задачи о вертикальном ударе однослойной круговой пластины об идеальную сжимаемую жидкость, полученных в программном комплексе и в работе [108].

Рассматривается осесимметричная гидроупругая задача о падении на поверхность жидкости круглой пластины опертой на жесткий контур. В работе [108] приведено решение для параметров: радиус пластины 60 см, толщина 1 см,  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>. Начальная скорость 50 м/с (начальная скорость задается в каждом узле пластины). Погружение происходит с постоянной скоростью 50 м/с (на крае пластины задается граничное условие скорости).

В программном комплексе элементами Эйлера моделируется область радиусом 120 см и глубиной 70 см. Область заполнена жидкостью. Размер элементов области 1 мм. Количество элементов моделирующих область 840000.

Пластина моделируется элементами Лагранжа. Размер элементов пластины 2.5 мм. Количество элементов моделирующих пластину 960. В начальный момент времени пластина лежит на поверхности жидкости.

На рисунке 10 приведено сравнение решений (безразмерного прогиба в центре пластины от безразмерного времени), полученных по разработанной методике и в работе [108].

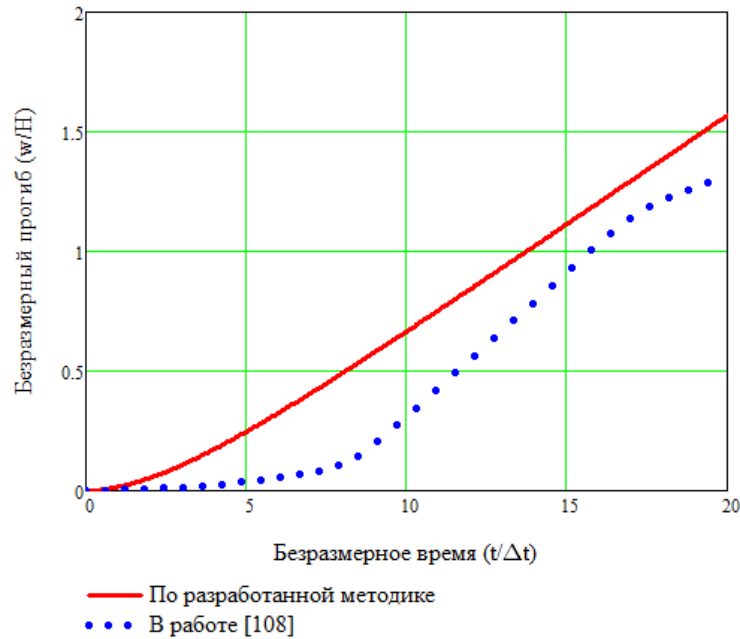


Рис. 10. Сравнение прогибов в центре пластины, полученных по разработанной методике (сплошная линия) и в работе [108] (точки)

Из рисунка видно, что решения хорошо совпадают. Разница при  $t/\Delta t = 20$  составляет 13%.

## 2.3 Сравнение экспериментального и численного решений задачи о вертикальном ударе однослойной прямоугольной пластины об идеальную сжимаемую жидкость

В этом подразделе приводится сравнение экспериментального (из работы [9], пункт 2.3.1) и численного решения задачи о вертикальном ударе однослойной прямоугольной пластины об идеальную сжимаемую жидкость.

### 2.3.1 Описание используемого эксперимента

В статье [9] приводятся результаты и описание экспериментального исследования плоского удара прямоугольных пластин о воду. На поверхности пластины устанавливались электромагниты, общая мощность которых достаточна для подъема пластины. С помощью крана и электромагнитов пластина поднималась на заданную высоту, после чего электромагниты выключались, и пластина падала на поверхность воды. В средней части пластины на поверхности взаимодействующей с водой смонтированы мембранные датчики давлений. В процессе

испытаний менялась высота падения пластины. Пластины изготавливались из пенопласта ПС-1 с кажущейся плотностью  $200 \text{ кг/м}^3$  (другие характеристики материала в статье не указаны).

Для численного моделирования пластины необходимы ее геометрические и механические характеристики. Размеры пластины в плане  $1.65 \text{ м} \times 0.55 \text{ м}$  (толщина пластин в [9] не указана). Вес пластины  $40 \text{ кг}$ . Недостающий геометрический параметр пластины (толщина) легко найти, зная массу, плотность, длину и ширину:

$$H = \frac{M}{\rho S}, \quad (2.28)$$

где  $M$  - масса,  $\rho$  - плотность материала,  $S$  - площадь пластины,  $H$  - толщина пластины.

$$H = \frac{40}{200 \cdot 0.907} = 0.22 \text{ м}.$$

Недостающие для моделирования характеристики материала найти сложнее. В работе [89] приведены модуль упругости и модуль сдвига для пенопласта ПС-1 с кажущейся плотностью  $100 \text{ кг/м}^3$ . В работе [100] приведен модуль упругости для интересующего нас пенопласта. Чтобы найти модуль сдвига, сделаем допущение, что оба пенопласта обладают одинаковым коэффициентом Пуассона.

$E_{100} = 5.88 \cdot 10^7 \text{ Па}$  - модуль упругости на сжатие для пенопласта с кажущейся плотностью  $100 \text{ кг/м}^3$ .

$E_{200} = 9.8 \cdot 10^7 \text{ Па}$  - модуль упругости на сжатие для пенопласта с кажущейся плотностью  $200 \text{ кг/м}^3$ .

$G_{100} = 2.45 \cdot 10^7 \text{ Па}$  - модуль сдвига пенопласта с кажущейся плотностью  $100 \text{ кг/м}^3$ .

Тогда коэффициент Пуассона  $\nu$  равен:

$$\nu = \frac{E_{100}}{2G_{100}} - 1 = 0.2.$$

Модуль сдвига для пенопласта с кажущейся плотностью в  $200 \text{ кг/м}^3$  равен:

$$G_{200} = \frac{E_{200}}{2(1 + \nu)} = 4.083 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Для моделирования эксперимента в программном комплексе необходим мгновенный модуль объемной деформации  $K$ .

$$K = \frac{E_{200}}{3(1 - 2\nu)} = 5.444 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

В результате испытаний в [9] получены значения максимальных гидродинамических давлений (в кг/см<sup>2</sup>) и время их действия в центре пластины от высоты падения. Переведенные в Паскали, значения давлений и время их действия сведены в таблицу 3.

Таблица 3. Результаты эксперимента

Номер эксперимента	Высота падения, м	Ударные давления, Па	Время действия давлений, мс
1	0.5	$1.382 \cdot 10^5$	9
2	0.9	$1.509 \cdot 10^5$	8
3	1.0	$1.813 \cdot 10^5$	8.5
4	1.2	$2.234 \cdot 10^5$	8
5	1.3	$1.813 \cdot 10^5$	8
6	2.3	$2.46 \cdot 10^5$	6.5

На рисунке 11 показана ксерокопия страницы статьи с фрагментом осциллограммы испытаний.

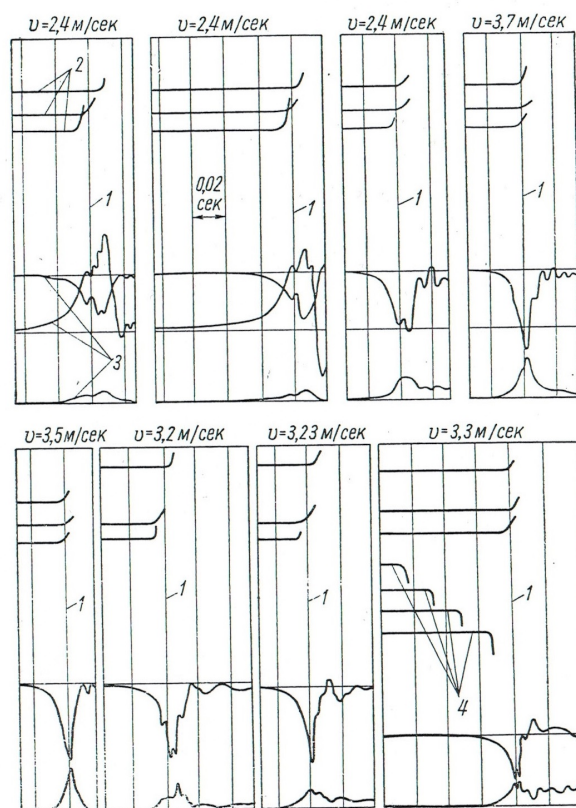


Рис. 6. Выкопировки из осциллограмм:

1 — момент соприкосновения пластины с поверхностью воды; 2 — датчики замеров горизонтальности падения пластины; 3 — ударные давления; 4 — датчики замеров скорости падения пластины

Рис. 11. Фрагмент осциллограммы испытаний

В [9] делается вывод о том, что зависимость между ударными давлениями и скоростью

удара близка к линейной.

Однако, в статье [9] получено по одному результату для каждого случая высоты падения пластины, поэтому ни о какой статистической выборке не может идти и речи. Полученные результаты представляют исключительно научную ценность, как позволяющие ориентировочно оценить уровень нагрузок, действующих на пластины со стороны воды.

### 2.3.2 Описание численного решения задачи

В программном комплексе в плоскосимметричной постановке моделируется вертикальное падение однослойной упругой прямоугольной пластины на идеальную сжимаемую жидкость. Полное моделирование падения пластины ресурсоемко, поэтому моделировалось падение пластины с высоты в 0.1 м с заданной начальной скоростью, которая вычисляется в зависимости от высоты падения (процесс расчета скорости приведен в пункте 2.3.3). В дальнейшем пластина под действием гравитационного ускорения продолжает падение до встречи с жидкостью. Также моделируется случай, когда пластина лежит на поверхности воды и в начальный момент времени приобретает скорость.

В программном комплексе моделируется область шириной 4 м и высотой 7 м. Область заполняется элементами Эйлера  $0.01 \text{ м} \times 0.01 \text{ м}$  (400 элементов по ширине и 700 элементов по высоте). Воздух занимает 1 м верхней части моделируемой области (в численном решении с учетом воздушной прослойки воздух занимает 1.1 м). Количество элементов Эйлера, моделирующих жидкость и воздух, равно 280000. Характеристики воды и воздуха приведены в подразделе 2.1.

Пластина моделируется элементами Лагранжа размерами  $0.028 \text{ м} \times 0.028 \text{ м}$  (8 элементов по высоте и 20 элементов по ширине). Количество элементов, моделирующих пластину, равно 160. Края пластины свободные. Характеристики пластины приведены в пункте 2.3.1.

На рисунке 12 представлен фрагмент конечно-элементной модели с учетом воздушной прослойки. Цифрой 1 на рисунке 12 отмечена контрольная точка (геометрический центр нижней поверхности пластины), в которой снимаются параметры гидродинамических давлений.

На рисунке 13 представлен фрагмент конечно-элементной модели без воздушной прослойки. На рисунке 14 представлена вся область моделирования.

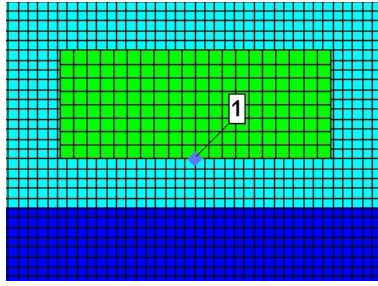


Рис. 12. Фрагмент конечно-элементной модели с учетом воздушной прослойки

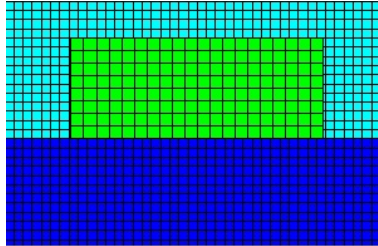


Рис. 13. Фрагмент конечно-элементной модели без воздушной прослойки

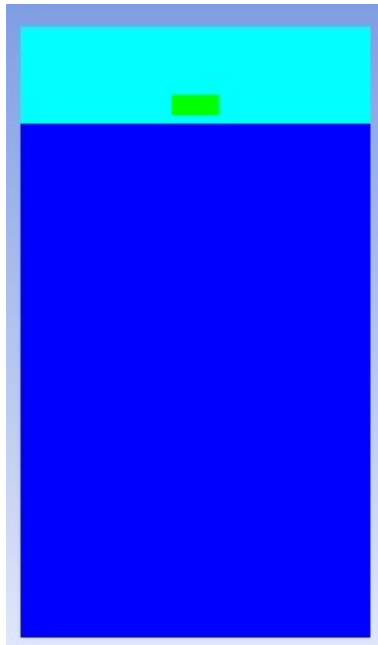


Рис. 14. Вид всей области моделирования

### 2.3.3 Определение скорости падающей пластины

В [9] автором высказано предположение, что для определения скорости соударения пластины о жидкость по начальной высоте падения, формулой, полученной для тела, свободно падающего под действием гравитационных сил, пользоваться нельзя (в силу наличия сопротивления воздуха). Для определения скорости падения пластины рассмотрим уравнение свободного падения тела с учетом аэродинамического сопротивления воздуха:



$$M\dot{v} = Mg - C_x \frac{\rho_{air} v^2}{2} S, \quad (2.29)$$

где  $M$  - масса, падающей пластины,

$g$  - ускорение свободного падения,

$C_x$  - коэффициент сопротивления воздуха,

$\rho_{air}$  - плотность воздуха,

$v$  - скорость, падающей пластины,

$S$  - площадь пластины в плане.

Второе слагаемое в правой части уравнения есть сила аэродинамического сопротивления воздуха.

Разделим уравнение (2.29) на  $M$  и введем обозначения:

$$b = C_x \frac{\rho_{air} S}{2M}, \quad (2.30)$$

$$k^2 = \frac{g}{b}. \quad (2.31)$$

Параметр  $b$  характеризует относительный вклад силы сопротивления воздуха. Чем меньше  $b$ , тем меньше воздух влияет на падающее тело.

Тогда (2.29) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = -b(v^2 - k^2), \quad (2.32)$$

где  $t$  - время.

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{(v^2 - k^2)} = -b dt. \quad (2.33)$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{-k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{\sqrt{-k^2}}\right) = C_1 - bt. \quad (2.34)$$

где  $C_1$  - постоянная интегрирования.

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{-k^2}}\right), \quad (2.35)$$

где  $v_0$  - начальная скорость.

Выражение для  $v$  будет иметь вид:

$$v(t) = \sqrt{-k^2} \operatorname{tg}(\sqrt{-k^2}(C_1 - bt)). \quad (2.36)$$

Интегрируя по времени, получим:

$$x(t) = \frac{1}{b} \ln(\cos(\sqrt{-k^2}(C_1 - bt))) + C_2, \quad (2.37)$$

где  $C_2$  - постоянная интегрирования,

$x(t)$  - перемещение.

$$C_2 = x_0 - \frac{1}{b} \ln\left(\cos(\sqrt{-k^2}C_1)\right) = x_0 - \frac{1}{b} \ln\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{-k^2}}\right)\right)\right), \quad (2.38)$$

где  $x_0$  - начальное перемещение.

Найдем скорость в зависимости от пройденного перемещения. Для этого выразим время из (2.37) и подставим его в (2.36). Получаем следующие выражения:

$$t(x) = \frac{\sqrt{-k^2}C_1 + \arccos(e^{-b(C_2-x)})}{b\sqrt{-k^2}}, \quad (2.39)$$

$$v(x) = \sqrt{-k^2} \operatorname{tg}(-\arccos(e^{-b(C_2-x)})). \quad (2.40)$$

Напомним, что скорость в зависимости от перемещения в случае свободного падения тела без учета аэродинамического сопротивления воздуха, имеет вид:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2g(x_0 - x)}. \quad (2.41)$$

На рисунке 15 приведен график зависимости скорости соударения от начальной высоты падения.

Расчетные характеристики:  $M = 40$  кг,  $C_x = 1.28$ ,  $\rho_{air} = 1.225$  кг/м<sup>3</sup>,  $S = 0.907$  м<sup>2</sup>.

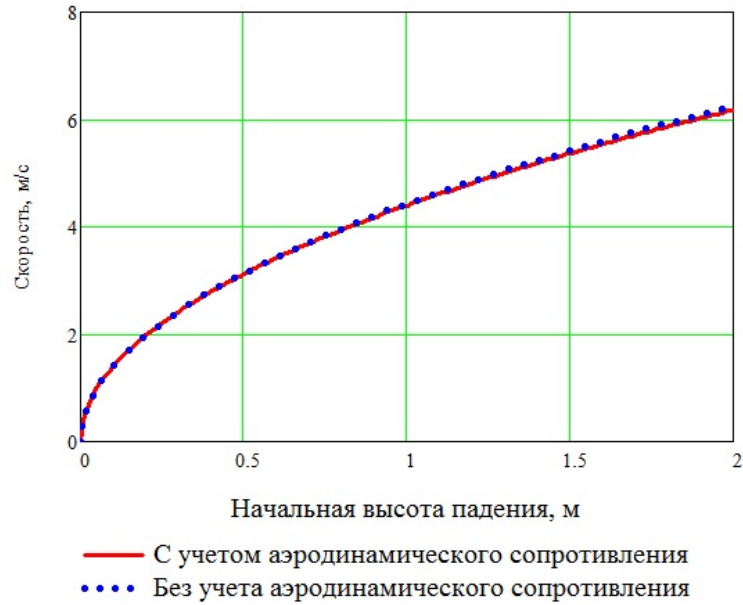


Рис. 15. Скорость соударения в зависимости от начальной высоты падения

Из рисунка видно, что на рассматриваемых высотах отклонения незначительные, а при сбросе грузов с парашютом скорость падения вообще постоянная. Однако, в приведенных выше формулах не учитывается деформирование водной поверхности воздушной подушкой.

Рассмотрим подробнее параметр  $b$ . Из (2.30) видно, что в знаменателе стоит масса, падающего тела ( $M = \rho HS$ ). Тогда для абсолютно твердого тела (и для упругого тела в первом приближении) формула (2.30) примет вид:

$$b = C_x \frac{\rho_{air}}{2\rho H}.$$

Откуда видно, что в первом приближении влияние силы сопротивления воздуха на движение падающего тела не зависит от площади тела, а только лишь от высоты тела и его плотности. Таким образом, чем больше плотность и высота, падающего тела, тем меньше воздух влияет на его движение.

Отметим, что в приведенных выше формулах присутствует компонента  $\sqrt{-k^2}$ , которая является величиной комплексной. Покажем, на примере формулы (2.37), что результат итоговых вычислений строго действителен.

Для начала рассмотрим параметр  $C_1$ . Вспомним [76], что арктангенс комплексного числа  $z = x + iy$  имеет вид:

$$\operatorname{arctg}(z) = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right),$$

где  $\operatorname{Ln}$  - комплексный логарифм [76], равный (без учета многозначности комплексного

логарифма):

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z),$$

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Возвращаясь к формуле (2.35), имеем:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{-k^2}}\right) = \frac{1}{ik} \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{ik}\right) = \frac{1}{ik} \left( -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + (iv_0/ik)}{1 - (iv_0/ik)}\right) \right) = -\frac{1}{2k} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + (v_0/k)}{1 - (v_0/k)}\right).$$

Как видим, аргументом комплексного логарифма является действительное число, а значит комплексный логарифм вырождается в обычный натуральный логарифм, и  $C_1$  является строго действительной величиной, а  $\operatorname{arctg}(v_0/\sqrt{-k^2}) = iX$ , где  $X = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+(v_0/k)}{1-(v_0/k)}\right)$  тоже является действительной величиной.

Рассмотрим теперь параметр  $C_2$ , предварительно вспомнив [76], чему равен комплексный косинус:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Возвращаясь к формуле (2.38), имеем:

$$C_2 = x_0 - \frac{1}{b} \ln\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{-k^2}}\right)\right)\right) = x_0 - \frac{1}{b} \ln\left(\cos(iX)\right) = x_0 - \frac{1}{b} \ln\left(\frac{e^{-X} + e^X}{2}\right).$$

Таким образом,  $C_2$  также является действительной величиной.

Рассмотрим теперь формулу (2.37):

$$x(t) = \frac{1}{b} \ln\left(\cos\left(\sqrt{-k^2}(C_1 - bt)\right)\right) + C_2 = \frac{1}{b} \ln\left(\cos(ik(C_1 - bt))\right) + C_2.$$

Так как  $C_1$  и  $C_2$  величины действительные, то формула примет вид:

$$x(t) = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{e^{-k(C_1-bt)} + e^{k(C_1-bt)}}{2}\right) + C_2.$$

Таким образом, перемещения, рассчитанные по формуле (2.37), являются строго действительными. Аналогично проверяются и все остальные формулы.

По полученным выше формулам рассчитываются начальные характеристики для численного моделирования падающей пластины с высоты 0.1 м. В численном решении значения

начальных скоростей соударения рассмотрено для 18 случаев. Вычисленные характеристики занесены в таблицу 4. За начальную скорость в численном эксперименте без учета воздушной прослойки принималась скорость соударения.

Таблица 4. Характеристики численного решения

Номер эксперимента	Высота падения, м	Начальная скорость, м/с	Скорость соударения, м/с	Время полного падения, с	Время падения с 0.1 м, с
1	0.5	2.792	3.12	0.32	0.034
2	0.9	3.938	4.174	0.429	0.025
3	1.0	4.174	4.397	0.453	0.023
4	1.2	4.608	4.81	0.496	0.021
5	1.3	4.81	5.003	0.517	0.02
6	1.4	5.003	5.188	0.536	0.02
7	2.3	6.467	6.608	0.689	0.015
8	2.7	7.012	7.14	0.747	0.014
9	3.0	7.39	7.511	0.788	0.013
10	3.5	7.974	8.085	0.852	0.012
11	4.0	8.511	8.614	0.912	0.012
12	4.5	9.01	9.105	0.968	0.011
13	5.0	9.476	9.565	1.022	0.011
14	-	20	21.773	-	0.005
15	-	30	29.202	-	0.0033
16	-	40	37.187	-	0.0025
17	-	50	45.437	-	0.002
18	-	100	88.004	-	0.001

#### 2.3.4 Сравнение численного и экспериментального решений

В ANSYS AUTODYN в рассматриваемых точках нет как таковой функции давлений действующих на тело, поэтому выше и ниже под давленями, действующими на пластины, понимается напряжения на внешней поверхности слоев, взаимодействующих с водой, действующие по нормали к поверхности пластин.

Также в рассматриваемых точках программный комплекс выдает их полные перемещения. Для деформируемой пластины полные перемещения выражаются в виде:

$$u_p = u_{att} + u_{def},$$

где

$u_p$  — полные перемещения,

$u_{att}$  — перемещения тела, как абсолютно твердого,

$u_{def}$  — перемещения деформаций.

Однако, в связи с тем, что  $u_{att}$  нам неизвестно, просто отнять от полных перемещений перемещения тела, как абсолютно твердого, и за вычетом получить перемещения деформаций (как раз, интересующие нас больше всего) не выйдет. Перемещения деформаций — это отклонения тела от первоначальной (недеформируемой) формы, то есть была балка прямая, стала кривая, вот это отклонение от первоначальной прямизны и есть перемещения деформаций. Поэтому перемещения деформаций ищутся следующим образом: какая-то точка выбирается нулем, и от ее перемещений отнимаются перемещения всех остальных точек. Получившиеся перемещения и выражают отклонения формы тела от первоначальной.

В данной работе за нуль выбирается точка в центре пластины (клина). Для несущих слоев выбирается точка на их внешних поверхностях, а для заполнителя выбирается — на его средней линии. Затем от перемещений центральной точки вычитаются перемещения остальных точек на той же поверхности. Поскольку пластина падает сверху вниз, то на графике, если остальные точки двигаются быстрее центральной, перемещения будут отрицательные, а если медленней — то положительные. То есть график будет выгибаться в ту же сторону, что и пластина.

Результаты моделирования сведены в таблицы 5 и 6. Из таблицы 5 видно, что давления, полученные в численном решении с учетом воздушной прослойки, близки с давлениями, полученными в [9]. Давления же без учета воздушной прослойки значительно выше.

На рисунке 16 изображены результаты из таблицы 5.

Из численного решения без учета воздушной прослойки видно, что гидродинамические давления зависят от скорости соударения линейно. Наличие воздушной прослойки приводит к колебанию пластины и поверхности воды до удара, т.е. к их неравномерному взаимодействию (номера 3,4,5,6,7 в таблице 5), и тем больше, чем меньше скорость, падающей пластины. Также из рисунка 16 видно, что при увеличении скорости взаимодействия влияние воздушной прослойки уменьшается.

Скорость удара, определяемая по полученным выше формулам, для случая с учетом воздушной прослойки несколько завышена. Таким образом, если скорость удара принять меньшей, то и график зависимости гидродинамических давлений от скорости, будет стремиться к линейному, что совпадает с результатами в [9].

Здесь хотелось бы остановиться подробнее на вопросе об определении скорости удара, в случае учета воздушной прослойки между пластиной и жидкостью. На рисунке 17 представлена зависимость гидродинамических давлений и скорости (с коэффициентом 50) в центре

Таблица 5. Сравнение численного и экспериментального решений

Номер эксперимента	Скорость соударения, м/с	Давление в [3], $\cdot 10^5$ Па	Расчетные давления с учетом воздушной прослойки, $\cdot 10^5$ Па	Разница расчетных давлений с учетом воздушной прослойки и экспериментом, %	Расчетные давления без учета воздушной прослойки, $\cdot 10^5$ Па
1	3.12	1.382	1.534	9.9	6.33
2	4.174	1.509	1.801	16.2	7.558
3	4.397	1.813	2.152	15.75	7.704
4	4.81	2.234	2.125	-5.13	8.584
5	5.003	1.813	2.279	20.5	8.67
6	5.188	-	2.127	-	8.75
7	6.608	2.46	3.089	20.4	10.877
8	7.14	-	2.711	-	11.736
9	7.511	-	3.2	-	12.344
10	8.085	-	3.756	-	13.29
11	8.614	-	4.12	-	14.161
12	9.105	-	4.466	-	14.958
13	9.565	-	4.604	-	15.717
14	21.773	-	18.173	-	36.208
15	29.202	-	29.819	-	45.3
16	37.187	-	44.778	-	56.523
17	45.437	-	58.525	-	69.234
18	88.004	-	136	-	140.28

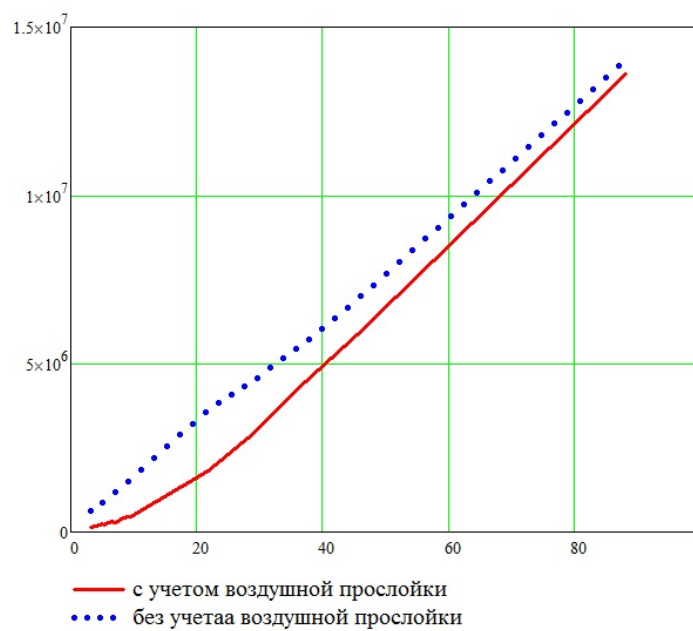


Рис. 16. Зависимость гидродинамических давлений от скорости соударения

пластины от времени для номера эксперимента 7. Из рисунка видно, что давление и скорость изменяются плавно и, в случае наличия воздушной прослойки, как такового удара вообще не происходит.

Если сравнить рисунок 17 с рисунком 11, то видно, что и качественно расчетная зависимость гидродинамических давлений совпадает с экспериментальной.

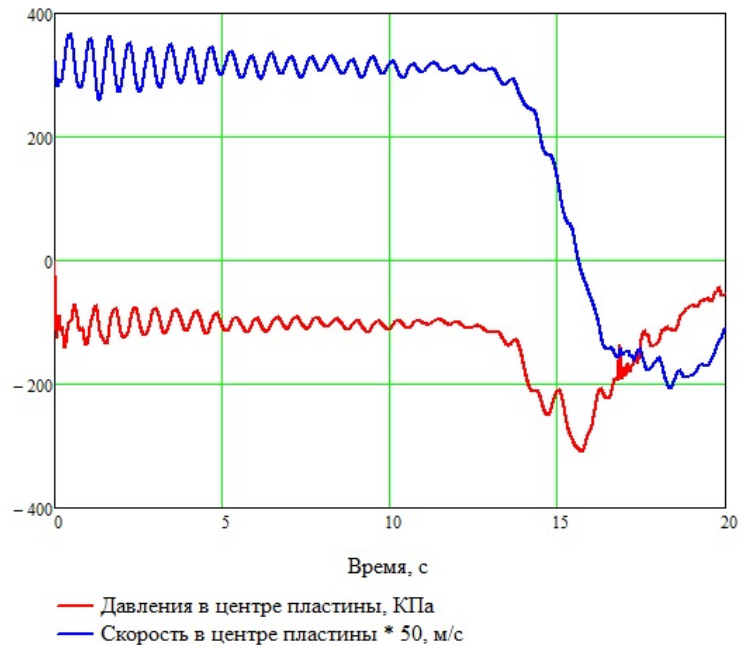


Рис. 17. Зависимость гидродинамических давлений и скорости в центре пластины от времени

В таблице 6 представлено сравнение времен действия ударных давлений, полученных в эксперименте и в расчете. Время действия ударных давлений очень хорошо совпадает.

Таблица 6. Сравнение расчетного и экспериментального времени действия ударных давлений

Номер эксперимента	Высота падения, м	Время действия экспериментальных давлений, мс	Время действия расчетных давлений, мс
1	0.5	9	9
2	0.9	8	8.6
3	1.0	8.5	8.5
4	1.2	8	7.8
5	1.3	8	7.5
6	2.3	6.5	6.6

Таким образом, проведено сравнение численного и экспериментального решений задачи о вертикальном сбросе однослойной упругой пластины прямоугольной формы на воду. Рассмотрено влияние на гидродинамические давления скорости соударения пластины и жидко-



сти, а также влияние воздушной прослойки на величину максимальных гидродинамических давлений.

В результате получено, что в программном комплексе возможно адекватно моделировать сбросы грузов на воду. Значения максимальных величин гидродинамических давлений и времени их действия близки к экспериментальным. Гидродинамические давления зависят от скорости взаимодействия по линейному закону, что тоже хорошо согласуется экспериментом [9].

На основании сравнения численных решений для случая с воздушной прослойкой и без нее рассмотрено влияние воздушной прослойки на процесс ударного взаимодействия конструкций с жидкостью. Показано, что на малых скоростях взаимодействия влияние воздушной прослойки существенно сказывается на величине максимальных давлений. Максимальные давления при учете воздушной прослойки меньше в 3-4 раза. С ростом скорости взаимодействия влияние воздушной прослойки уменьшается.

Также показано, что при учете воздушной прослойки давления и скорость пластины изменяются плавно. Понятия скорости соударения при учете воздушной прослойки неопределено.

## 2.4 Выводы

1. В второй главе проведена постановка задачи взаимодействия слоистых элементов конструкций с жидкостью с учетом воздушной прослойки в связанной постановке.

2. На основании метода конечных элементов разработана методика решения задач взаимодействия конструкций с жидкостью, учитывающая влияние воздушной прослойки между телом и жидкостью, в связанной постановке.

3. На примере задачи об ударе однослойной стальной круговой пластины о первоначально невозмущенную поверхность идеальной сжимаемой жидкости проведено исследование сходимости результатов решения в зависимости от размера конечно-элементной сетки.

4. Для задачи об ударе абсолютно твердого диска о поверхность идеальной сжимаемой жидкости доведено до конца (для случая конечной массы диска) аналитическое решение Поручикова для гидродинамической силы, действующей на диск. Получено, что максимальное гидродинамическое давление зависит только от свойств жидкости и начальной скорости диска и распределено равномерно по всей поверхности соприкосновения диска с жидкостью.

Проведено сравнение гидродинамического давления для дисков из разных материалов. Гидродинамическая сила от времени зависит линейно. Масса диска влияет только на угол

наклона прямой. Чем меньше масса, тем быстрее со временем убывает давление. Максимальное давление возникает в начальный момент времени и для всех дисков одинаково.

Проведено сравнение давлений для однослойной стальной круговой пластины, которую в первом приближении можно считать абсолютно твердой, найденных по формуле для абсолютно твердого диска, и полученных по разработанной методике. Показано, что ударные давления, полученные по разработанной методике, хорошо согласуются с аналитическим решением.

5. Используя решение для гидродинамической силы действующей на абсолютно твердый диск для случая диска конечной массы, найдено аналитическое решение задачи об ударе трехслойной круговой пластины о поверхность идеальной сжимаемой жидкости.

Прогибы, полученные аналитически и по разработанной методике, качественно совпадают. Однако, количественно прогибы, полученные по разработанной методике, учитывающие гидроупругое взаимодействие между пластиной и жидкостью, существенно меньше. Происходит это потому, что трехслойную пластину абсолютно жесткой считать нельзя, она деформируется, и за счет этого давления быстро убывают. Пик гидродинамических давлений возникает также в начальный момент времени и хорошо совпадает с аналитическим значением.

6. На основании сравнения аналитического и численного решений задач о вертикальном ударе абсолютно твердой круговой и деформируемой трехслойной круговой пластин об идеальную сжимаемую жидкость проведено исследование влияния связности на процесс ударного взаимодействия конструкций с жидкостью.

Показано, что в случае когда тело можно считать абсолютно твердым, решение для гидродинамических давлений близко к аналитическому. В случае же, когда тело является деформируемым, необходимо учитывать гидроупругое взаимодействия тела с жидкостью, и решать задачу в связанной постановке.

7. Проведено сравнение решений для осесимметричной задачи об ударе однослойной прямоугольной пластины об идеальную сжимаемую жидкость, полученных по разработанной методике и в работе [108]. Решения хорошо совпадают.

8. Проведено сравнение экспериментального и численного (по разработанной методике) решений задачи о вертикальном ударе однослойной прямоугольной пластины об идеальную сжимаемую жидкость. При численном решении рассмотрено два случая: с учетом и без учета воздушной прослойки. Рассмотрено влияние на гидродинамические давления скорости взаимодействия пластины и жидкости, а также влияние воздушной прослойки на величину максимальных гидродинамических давлений.

Показано, что ударные давления, полученные по разработанной методике, с учетом воздушной прослойки как количественно, так и качественно хорошо согласуются с экспериментальными. Время действия ударных давлений также хорошо совпадает с экспериментальным. Давления в случае без воздушной прослойки существенно выше экспериментальных.

Также показано, что максимальные гидродинамические давления зависят от скорости взаимодействия пластины с жидкостью по линейному закону.

9. На основании сравнения численных решений для случая с воздушной прослойкой и без нее рассмотрено влияние воздушной прослойки на процесс ударного взаимодействия конструкций с жидкостью.

Показано, что на малых скоростях взаимодействия влияние воздушной прослойки существенно сказывается на величине максимальных давлений. Максимальные давления при учете воздушной прослойки меньше в 3-4 раза. С ростом скорости взаимодействия влияние воздушной прослойки уменьшается.

Также показано, что при учете воздушной прослойки давления и скорость пластины изменяются плавно. Понятия скорости соударения при учете воздушной прослойки неопределено, поэтому в дальнейшем все зависимости будут строиться от начальной скорости.

10. В результате получено, что по разработанной методике возможно адекватно моделировать ударное взаимодействие слоистых элементов конструкций с жидкостью с учетом воздушной прослойки в связанной постановке.

### 3 ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ОБ ИДЕАЛЬНУЮ СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ СЛОИСТЫХ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ, ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ И МАЛОКИЛЕВАТОГО КЛИНА

В предыдущей главе поставлена задача работы и верифицирована численная методика исследования.

В данной главе на ряде примеров продемонстрированы результаты исследования динамических характеристик слоистых элементов конструкций, при их ударном взаимодействии с идеальной сжимаемой жидкостью.

#### 3.1 Вертикальный удар круговой пластины

В данном пункте рассматривается вертикальный задача об ударе трехслойной симметричной по толщине круговой пластины об идеальную сжимаемую жидкость (воду).

Применительно к рассматриваемому вопросу можно привести следующие, полученные другими авторами, результаты, полезные при численном моделировании.

В работе [19] исследована задача об ударе круглого диска радиуса  $r$  о несжимаемую жидкость бесконечной глубины и конечной глубины  $d$ . Там показано, что при  $d > 1.1r$  влияние дна незначительно.

При ударе затупленных тел о поверхность жидкости, граница контакта будет расширяться со сверхзвуковой скоростью. В таких условиях необходимо учитывать сжимаемость жидкости [28].

В работе [14] показано для диска, падающего в цилиндрический бассейн радиуса  $R$ , что при  $R > 2r$  влияние стенок незначительно.

##### 3.1.1 Описание конечно-элементной модели

Трехслойная симметричная по толщине круговая пластина (Рисунок 18) диаметром  $2r$  вертикально падает на идеальную сжимаемую жидкость. Толщина несущих слоев:  $H_1$  и  $H_2$ , толщина заполнителя:  $H_3$ . Далее везде под первым слоем понимается несущий слой соприкасающийся с водой, под вторым слоем – несущий слой не соприкасающийся с водой. Задача решается в осесимметричной постановке.

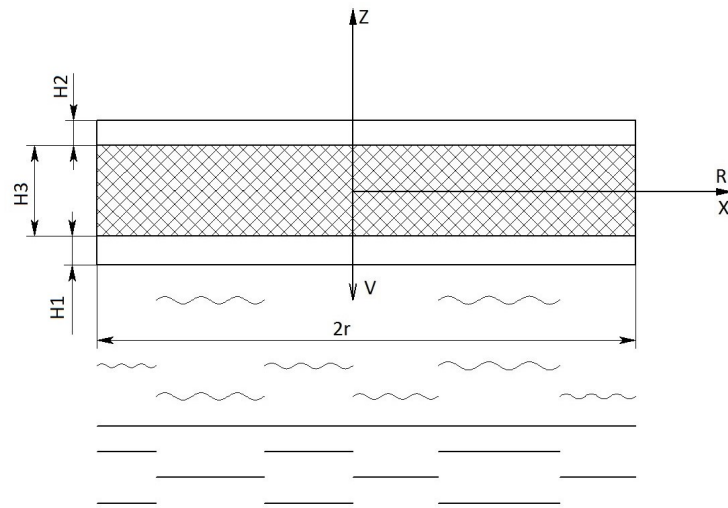


Рис. 18. Модель трехслойной симметричной по толщине пластины в начальный момент времени

В программном комплексе моделируется область радиусом 2000 мм и высотой 1600 мм. Водой заполнено 105 см снизу, остальное заполнено воздухом. Область моделируется элементами Эйлера. Размер элемента области 2.5 мм. Количество элементов, моделирующих область, 512000. На нижней границе области задается условие свободного убегания волн, что соответствует случаю бесконечной глубины.

Пластина моделируется элементами Лагранжа. Размер элемента пластины 10 мм. Количество элементов, моделирующих пластину, 2000. Расчет проводится при  $r = 1000$  мм,  $H1 = H2 = 40$  мм,  $H3 = 120$  мм. Сначала моделируется пластина толщиной  $H = 200$  мм из материала несущих слоев (Д16Т), а потом внутренние элементы, соответствующие заполнителю, заполняются материалом заполнителя (фторопласт-4). Таким образом, на границе слоев между слоями трехслойной пластины задается условие равенства перемещений. Пластина свободно падает на жидкость (край круговой пластины свободный).

В начальный момент времени пластина, находящаяся на расстоянии 5 см от невозмущенной поверхности воды, приобретает начальную скорость. Начальная скорость задается в каждом узле пластины.

На рисунке 19 представлен фрагмент конечно-элементной модели.

Для несущих слоев используется материал Д16Т, а для заполнителя фторопласт-4. Характеристики материалов, приведенные в таблице 7, взяты из [30].

Рассматриваются четыре случая: с учетом воздушной прослойки и без для пластин с грузом и без него.

В случае отсутствия воздушной прослойки пластина в первоначальный момент време-

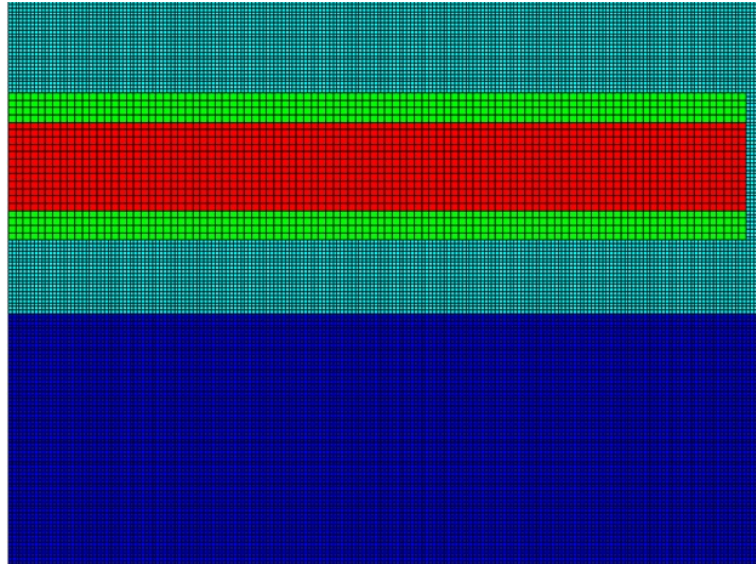


Рис. 19. Фрагмент конечно-элементной модели

ни соприкасается с невозмущенной поверхностью жидкости. Для этого случая начальная скорость является скоростью соударения.

Для случая с грузом, ко второму слою пластины жестко прикреплен груз. На рисунке 20 представлен фрагмент конечно-элементной модели пластины с грузом.

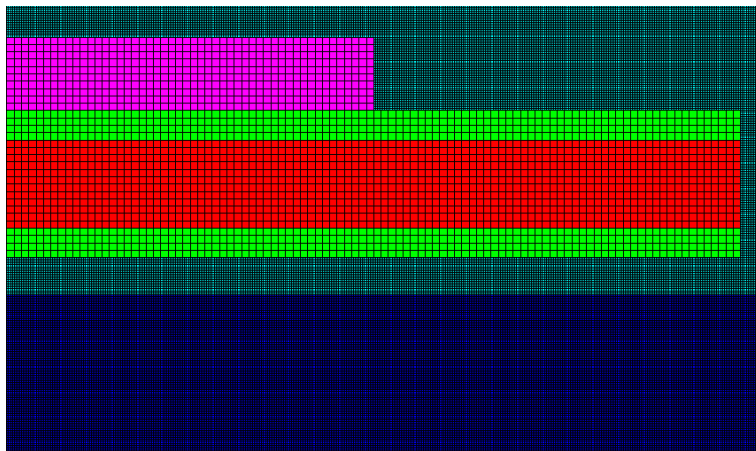


Рис. 20. Фрагмент конечно-элементной модели для случая с грузом

Расчеты проводятся для скоростей соударения: 5, 10, 15, 20 м/с.

Таблица 7. Характеристики материалов

Характеристики	Д16Т	Фторопласт-4
$K$ , МПа	92140	4700
$G$ , МПа	30750	90
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2700	2150

### 3.1.2 Результаты расчетов

На рисунках 21-24 показаны прогибы первого и второго слоя пластины в зависимости от времени и радиуса при начальной скорости 5 м/с.

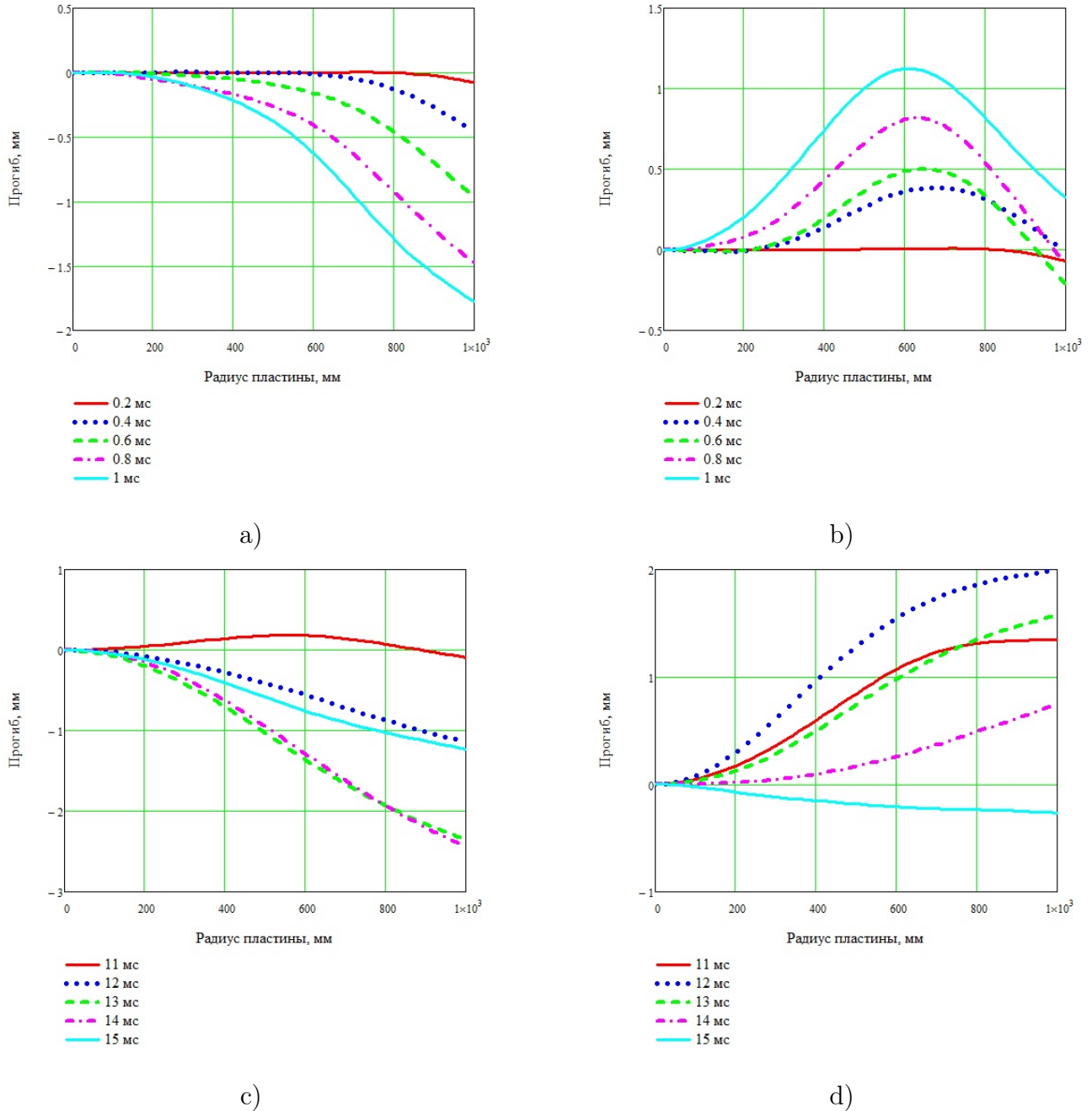
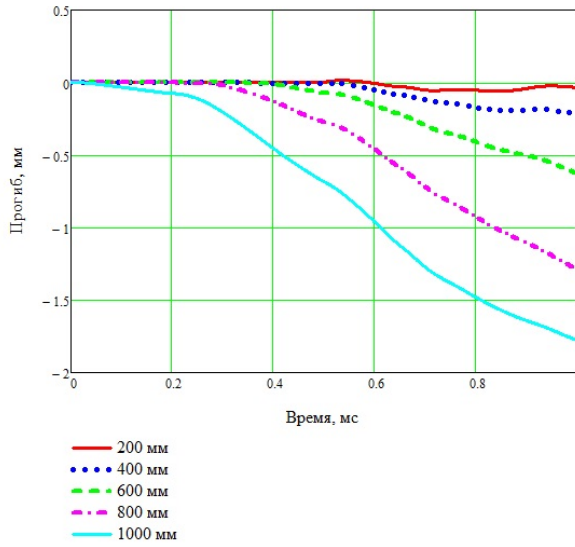


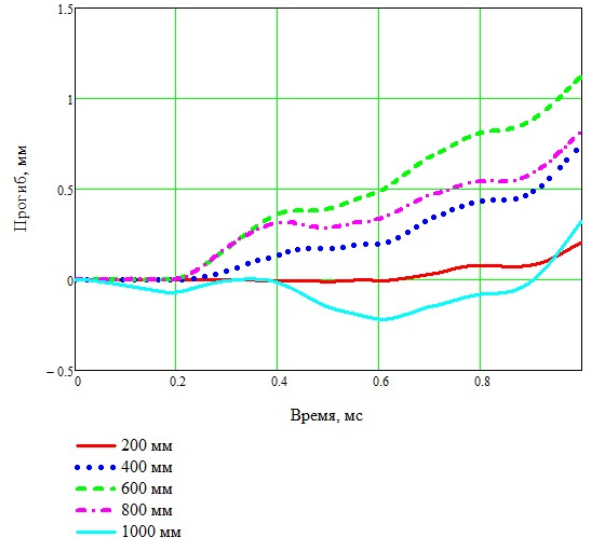
Рис. 21. Прогибы первого слоя по радиусу пластины при начальной скорости 5 м/с: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, в) с воздушной прослойкой без груза, г) с воздушной прослойкой и с грузом.

Из рисунков видно, что в случае отсутствия груза средняя часть пластины тормозится больше, чем крайняя, и пластина принимает куполообразную форму.

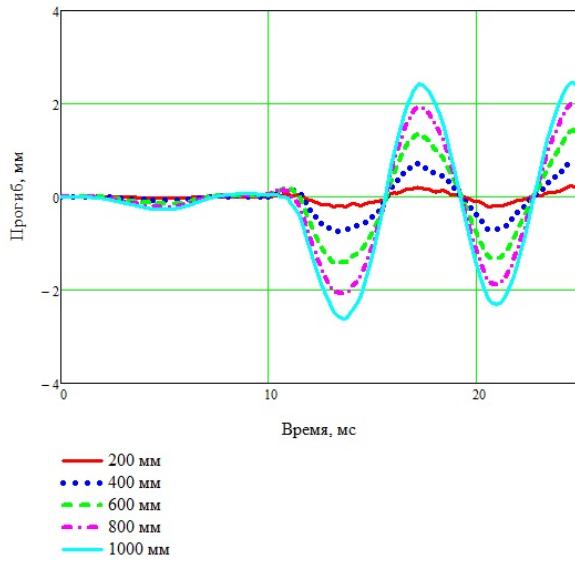
Для случаев с грузом, пластина выгибается волной против направления движения, что



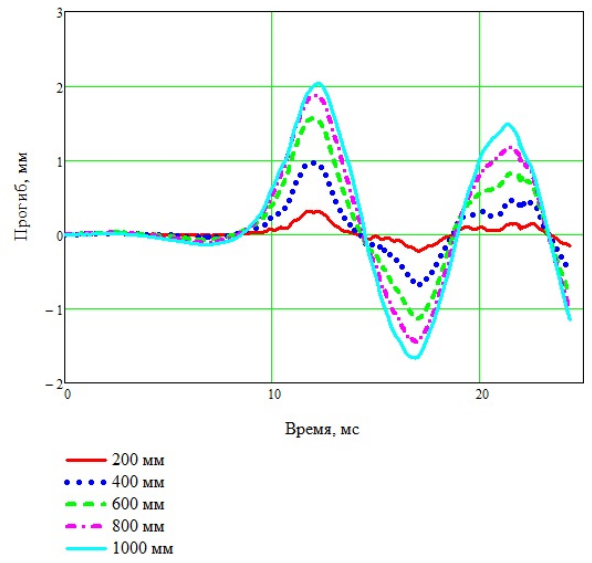
a)



b)



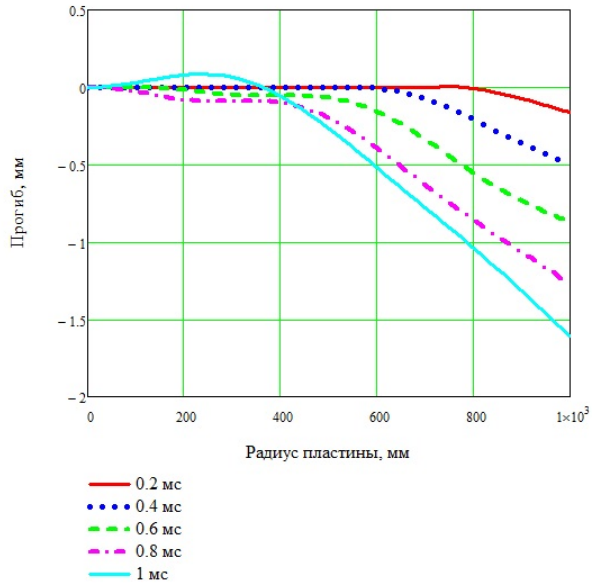
c)



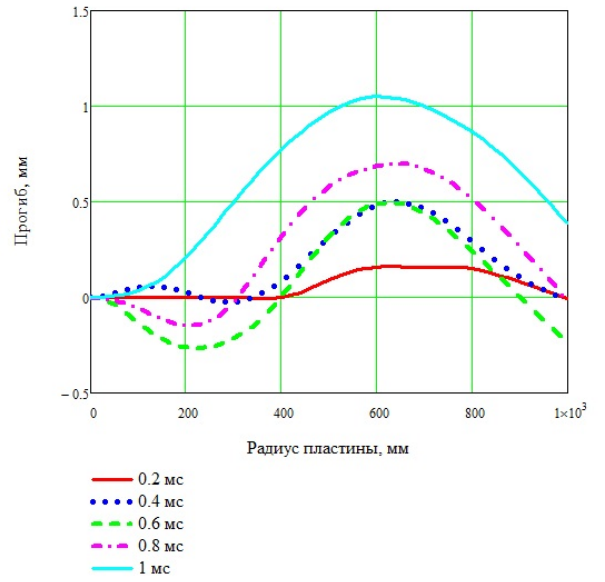
d)

Рис. 22. Прогибы первого слоя пластины от времени при начальной скорости 5 м/с: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, в) с воздушной прослойкой без груза, г) с воздушной прослойкой и с грузом.

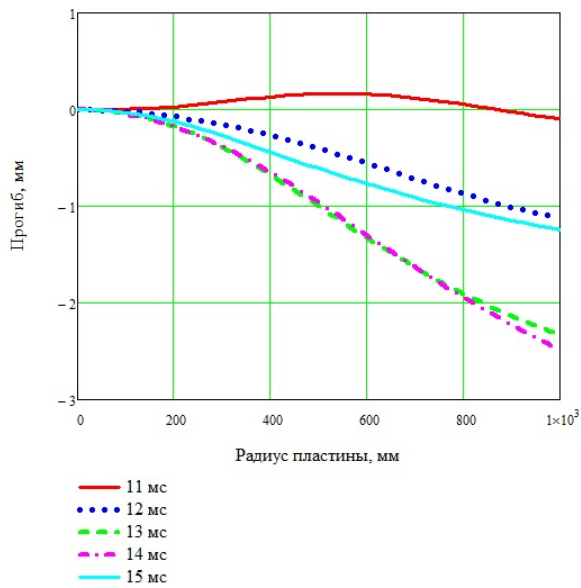




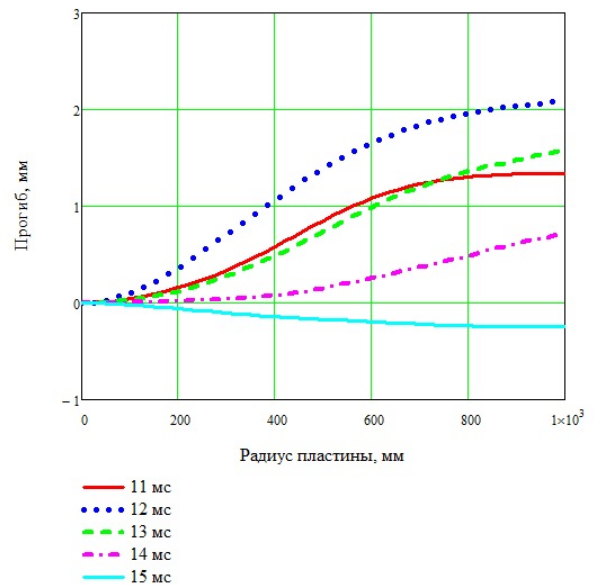
a)



b)

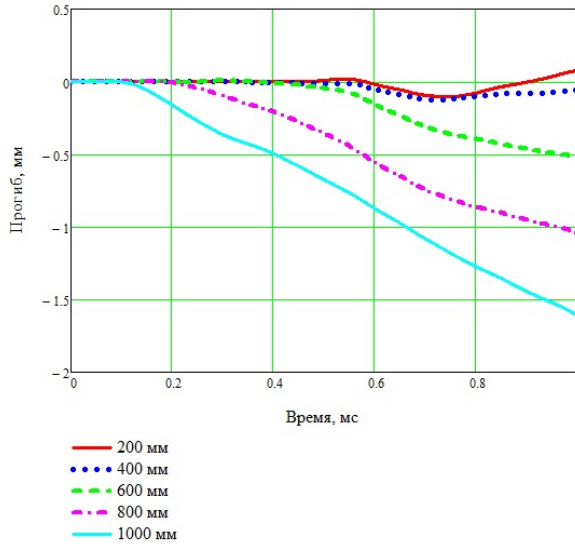


c)

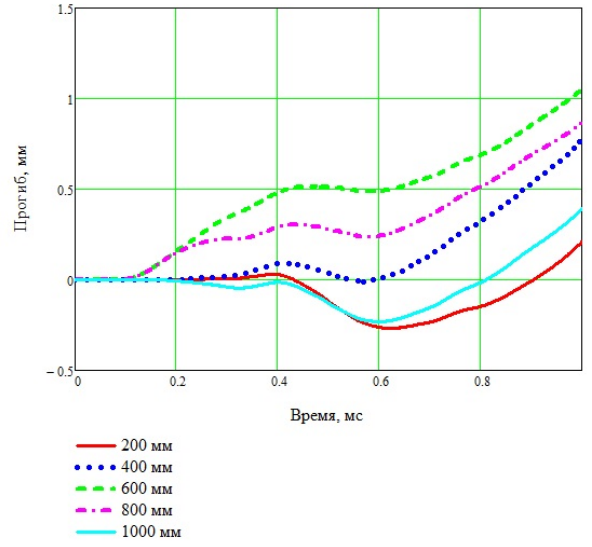


d)

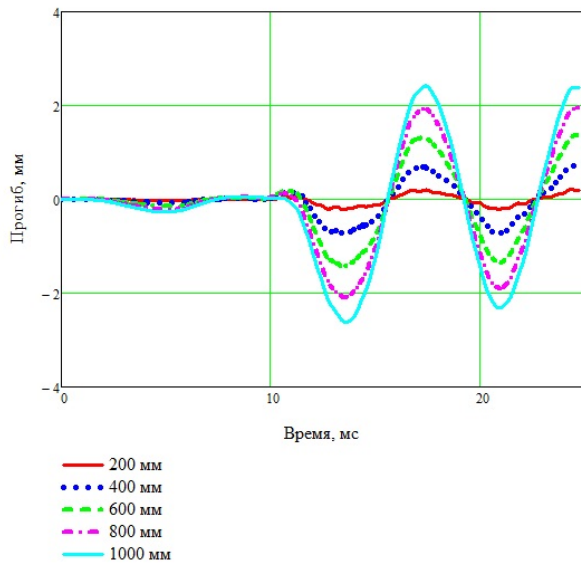
Рис. 23. Прогобы второго слоя по радиусу пластины при начальной скорости 5 м/с: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, в) с воздушной прослойкой без груза, г) с воздушной прослойкой и с грузом.



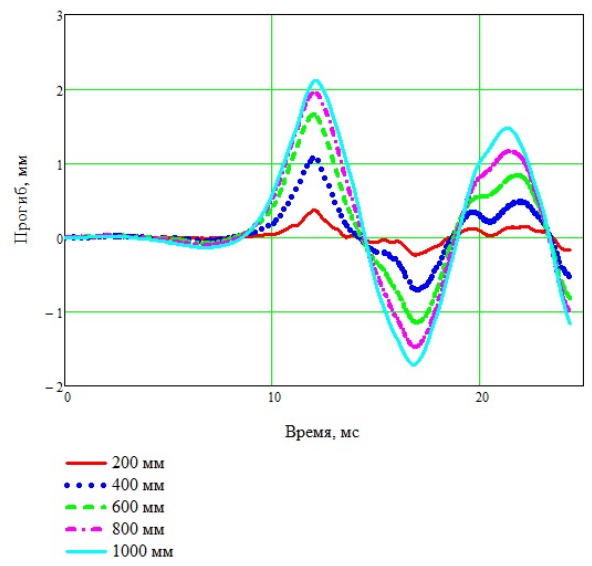
a)



b)



c)



d)

Рис. 24. Прогiby второго слоя от пластины времени при начальной скорости 5 м/с: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, с) с воздушной прослойкой без груза, д) с воздушной прослойкой с грузом.

является следствием инерции тяжелого груза.

Хорошо видно сильное различие в поведении пластины при учете воздушной прослойки, как для случая с грузом, так и без него. Пластина совершает колебательные движения вокруг невозмущенного положения, что для случая без воздушной прослойки не наблюдается.

Также хорошо видно, что второй слой пластины не в точности повторяет поведение первого, и имеет ярко выраженный изгиб, как по, так и против направления движения.

На рисунке 25 приведено сравнение максимальных прогибов пластины в зависимости от начальной скорости для разных случаев. Видно, что прогибы на рассматриваемом диапазоне скоростей имеют линейную зависимость от начальной скорости. Прогибы пластины в случае без груза и без воздушной прослойки и в случае с грузом и с учетом воздушной прослойкой очень близки. Можно сделать вывод, что, чем больше жесткость системы пластина-среда, тем меньше прогибы.

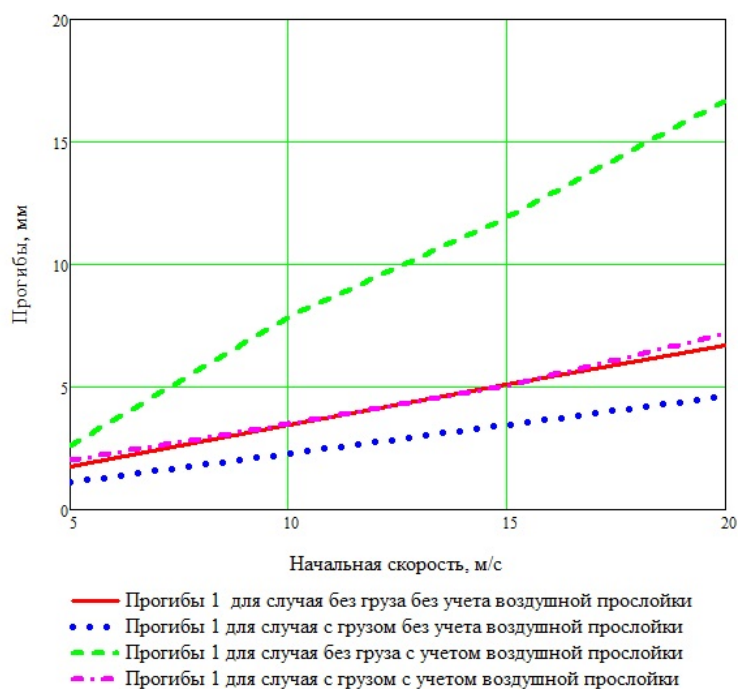


Рис. 25. Сравнение максимальных прогибов пластины в зависимости от начальной скорости

Чтобы определить сжатие слоев нужно от перемещения одного слоя отнять перемещение другого, предварительно приведя их к одной системе координат. Нужно отнимать от перемещения убегающих слоев перемещение догоняющих слоев, тогда сжатие будет традиционно выражаться отрицательными значениями, а растяжение положительными.

В таблицу 8 занесены показатели максимальных сжатия и растяжения пластины по оси  $Z$  (в поперечном направлении) в зависимости от начальной скорости, а также деформации пластины (сжатие отнесенное к первоначальной толщине пластины  $\frac{\Delta H}{H}$ ).

Таблица 8. Сжатие заполнителя

Расчетный случай	Начальная скорость, м/с	Максимальное сжатие, мм	Деформации сжатия	Максимальное растяжение, мм	Деформации растяжения
Без груза, без воздушной прослойки	5	0.171	$8.55 \cdot 10^{-4}$	0.175	$8.75 \cdot 10^{-4}$
	10	0.349	$17.45 \cdot 10^{-4}$	0.339	$16.95 \cdot 10^{-4}$
	15	0.533	$26.65 \cdot 10^{-4}$	0.465	$23.25 \cdot 10^{-4}$
	20	0.722	$36.1 \cdot 10^{-4}$	0.658	$32.9 \cdot 10^{-4}$
С грузом, без воздушной прослойки	5	0.262	$13.1 \cdot 10^{-4}$	0.158	$7.9 \cdot 10^{-4}$
	10	0.523	$26.15 \cdot 10^{-4}$	0.307	$15.35 \cdot 10^{-4}$
	15	0.782	$39.1 \cdot 10^{-4}$	0.435	$21.75 \cdot 10^{-4}$
	20	1.04	$52 \cdot 10^{-4}$	0.595	$29.75 \cdot 10^{-4}$
Без груза, с воздушной прослойкой	5	0.0662	$3.31 \cdot 10^{-4}$	0.0521	$2.61 \cdot 10^{-4}$
	10	0.177	$8.85 \cdot 10^{-4}$	0.19	$9.5 \cdot 10^{-4}$
	15	0.751	$37.55 \cdot 10^{-4}$	0.811	$40.55 \cdot 10^{-4}$
	20	1.013	$50.65 \cdot 10^{-4}$	0.933	$46.65 \cdot 10^{-4}$
С грузом, с воздушной прослойкой	5	0.115	$5.75 \cdot 10^{-4}$	0.06	$3 \cdot 10^{-4}$
	10	0.6	$30 \cdot 10^{-4}$	0.7	$35 \cdot 10^{-4}$
	15	1.145	$57.25 \cdot 10^{-4}$	1.386	$69.3 \cdot 10^{-4}$
	20	1.673	$83.65 \cdot 10^{-4}$	2.467	$123.35 \cdot 10^{-4}$

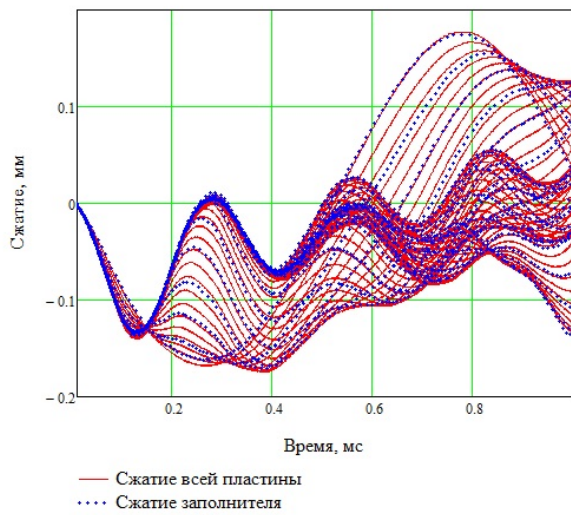
На рисунке 26 показана зависимость сжатия пластины в поперечном направлении от времени для разных случаев. Сплошной линией показано сжатие всей пластины, точками — только заполнителя. Как видно из графиков, сжатие подвергается в основном заполнитель.

На рисунке 27 показано сравнение максимального сжатия заполнителя в поперечном направлении в зависимости от начальной скорости для разных случаев. Можно сделать вывод, что сжатие на рассматриваемом участке скоростей от начальной скорости зависит линейно. Наличие груза существенно сказывается на сжатии пластины в направлении оси  $Z$ .

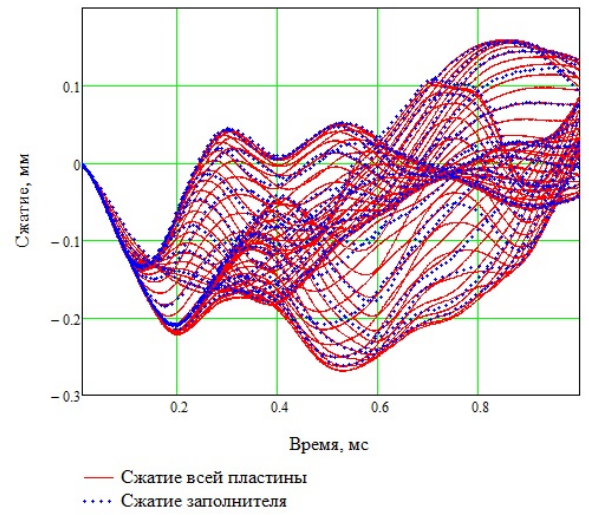
Как уже отмечалось выше давление на пластину со стороны воды можно найти, как напряжения, действующие по нормали к поверхности пластины. Однако, если пластина изгибается относительно слабо, то есть если направляющие косинусы нормали близки к единице, то можно без особой ошибки принять за давления, напряжения, действующие по глобальной оси  $Z$ . На рисунке 28 показаны направляющие косинусы (в процентах от единицы) поверхности пластины в зависимости от времени при начальной скорости 20 м/с (как видно из рисунка 25, пластина при такой скорости изгибается максимально сильно).

Из рисунка 28 видно, что все косинусы близки к единице, и в дальнейшем за давления принимаются напряжения на поверхности пластины, взаимодействующей с водой, действующие по оси  $Z$ .

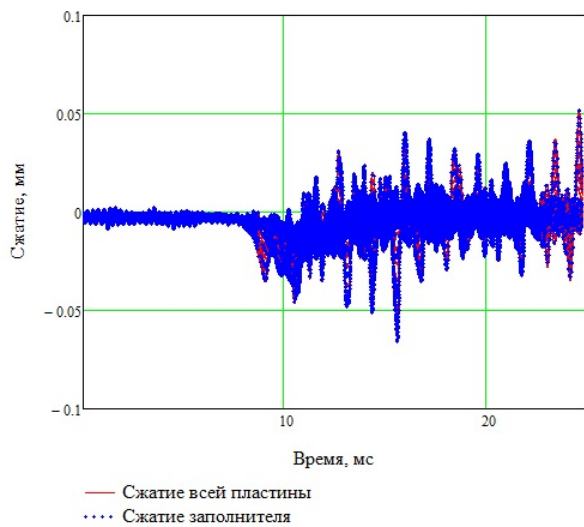
На рисунке 29 приведены напряжения по оси  $Z$  в разных слоях пластины при начальной



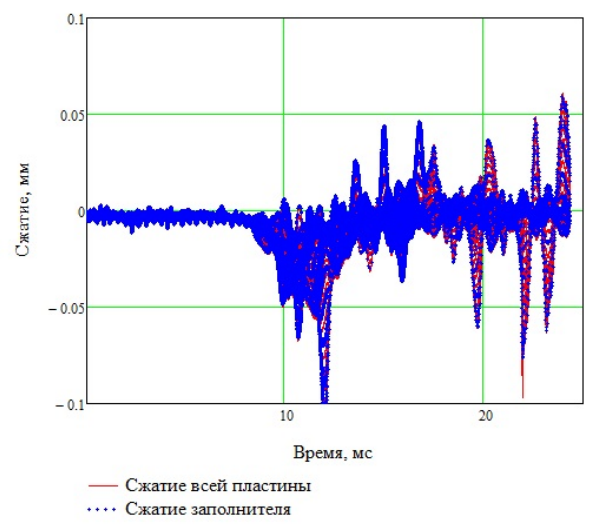
a)



b)



c)



d)

Рис. 26. Сжатие пластины в зависимости от времени: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, в) с воздушной прослойкой без груза, г) с воздушной прослойкой с грузом.

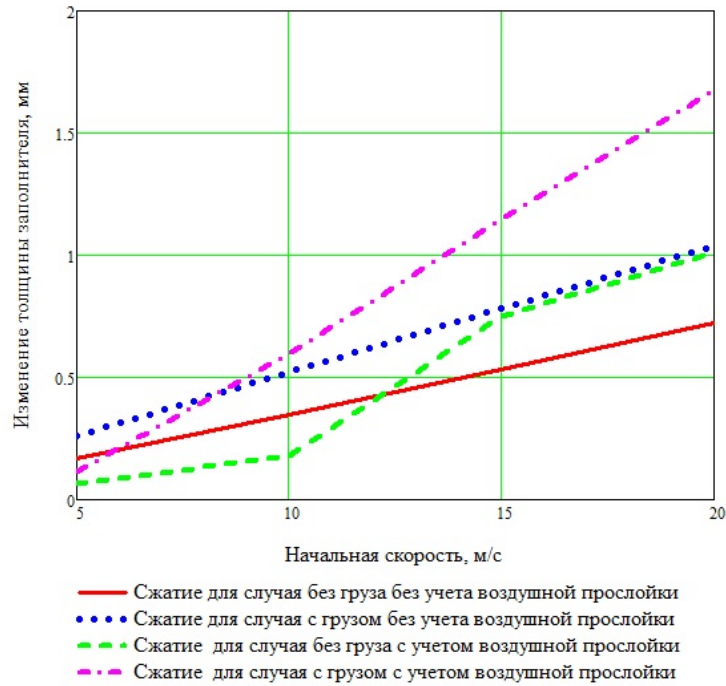


Рис. 27. Сжатия заполнителя в поперечном направлении от начальной скорости

скорости 20 м/с. Напряжения на внешней границе 1 слоя есть давления. Как видно, в случае без воздушной прослойки максимальные давления возникают в начальный момент времени и постепенно затухают. Максимальны давления для случая с грузом и без одинаковы.

В случае с воздушной прослойкой, давления нарастают постепенно, имеют явно выраженный пик, а затем затухают. Также из рисунка видно, что высокие напряжения по оси  $Z$  возникают в заполнителе (как сжимающие так и растягивающие).

Хорошо видно, что с грузом, как для случая с воздушной прослойкой, так и без нее, напряжения во втором слое пластины значительно выше, чем без груза.

На рисунке 30 показаны напряжений в радиальном направлении.

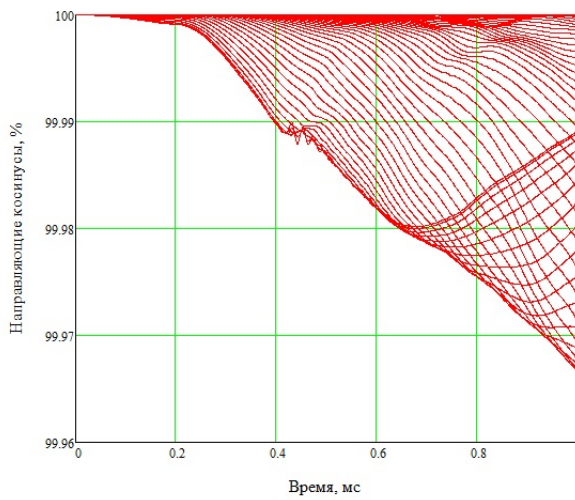
Из рисунка видно, что максимальные растягивающие напряжения возникают на внешней границе второго слоя, а максимальные сжимающие — на внешней границе первого. Однако, на внешней и внутренней границах второго слоя, также возникают весьма высокие сжимающие напряжения.

Также видно, что при наличии воздушной прослойки радиальные напряжения возрастают более, чем в два раза.

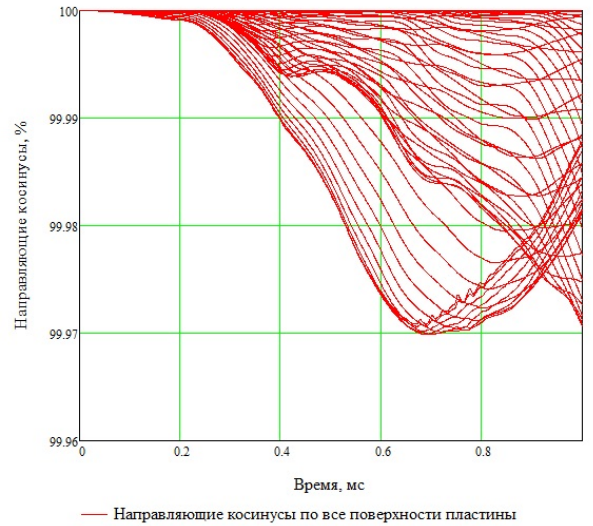
Радиальные напряжения во втором слое, также как и напряжения по оси  $Z$ , при наличии груза возрастают. В целом при наличии груза второй слой становится более напряженным.

На рисунке 31 показаны напряжения по Мизесу в зависимости от времени. Из рисунка видно, что для всех случаев максимальные эквивалентные напряжения возникают на внеш-

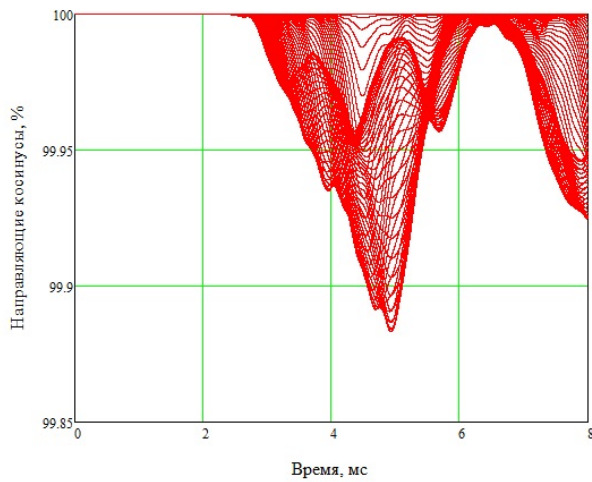




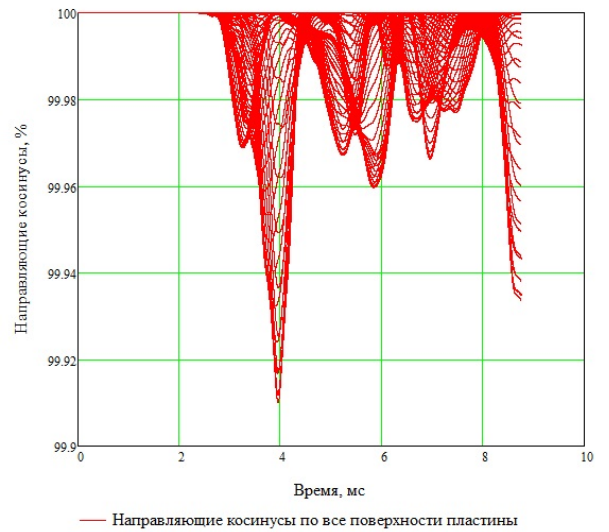
а)



b)



с)



d)

Рис. 28. Направляющие косинусы в зависимости от времени: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, в) с воздушной прослойкой без груза, д) с воздушной прослойкой с грузом.

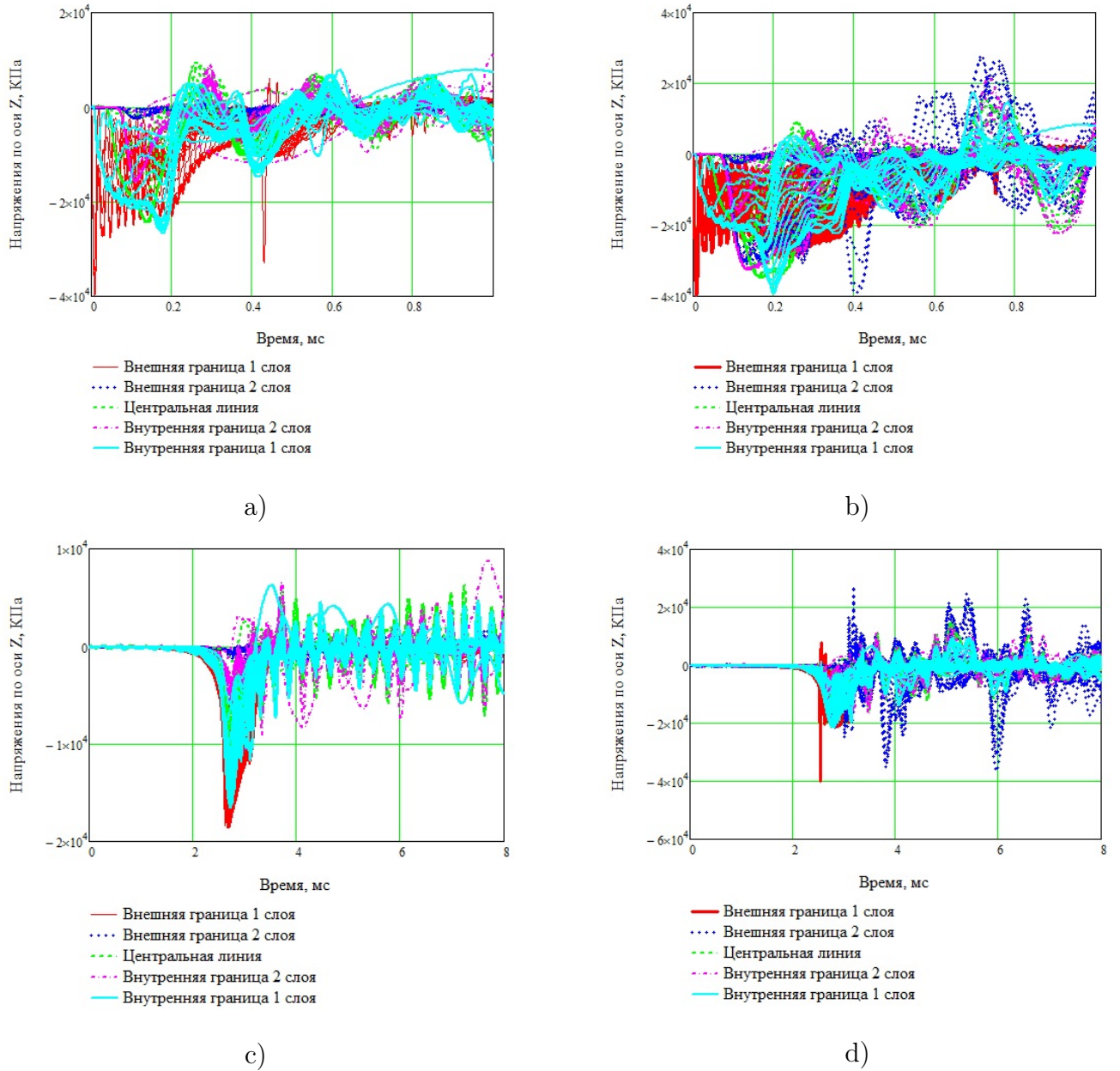


Рис. 29. Напряжения по оси Z от времени: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, в) с воздушной прослойкой без груза, г) с воздушной прослойкой с грузом.



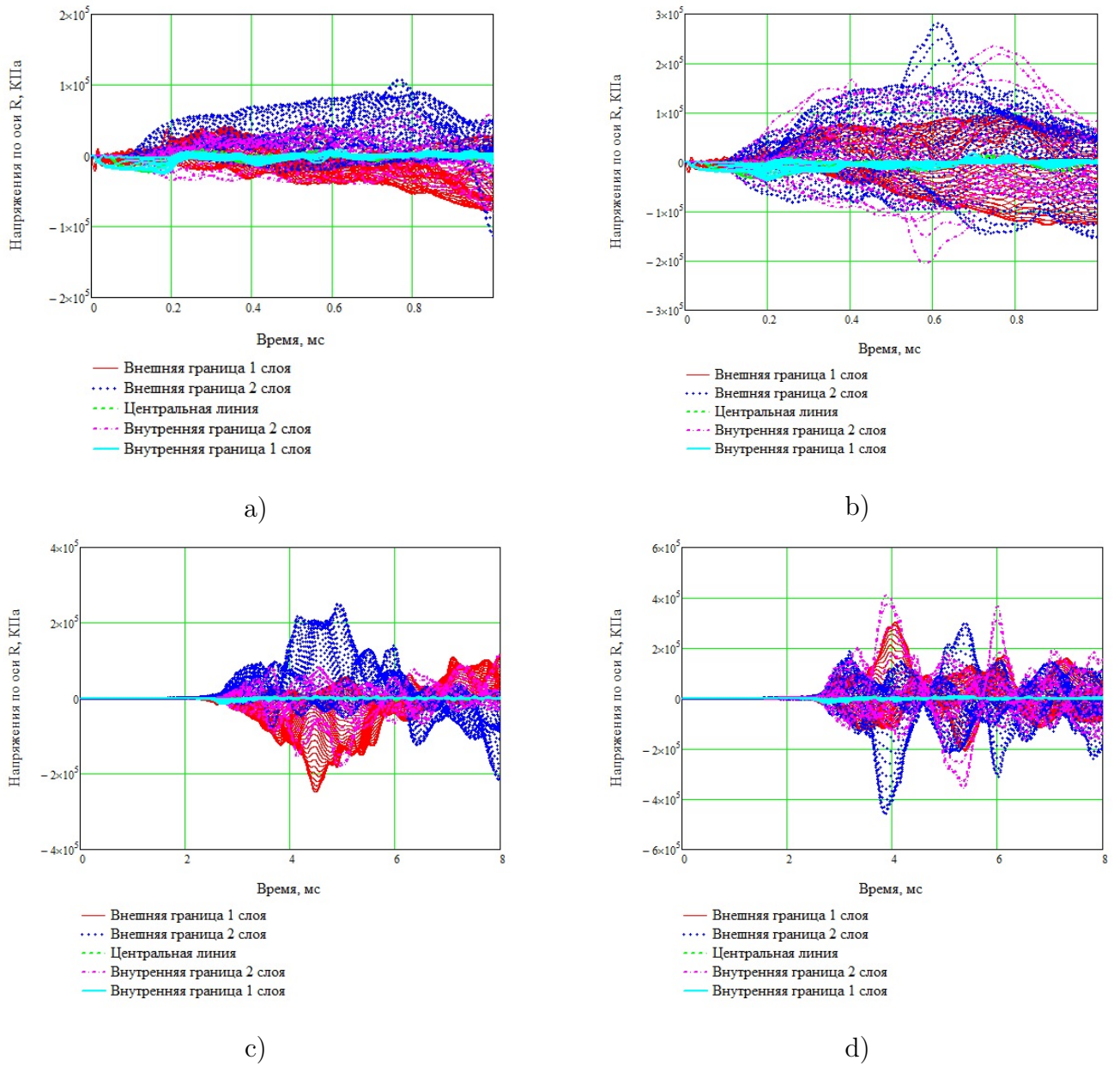
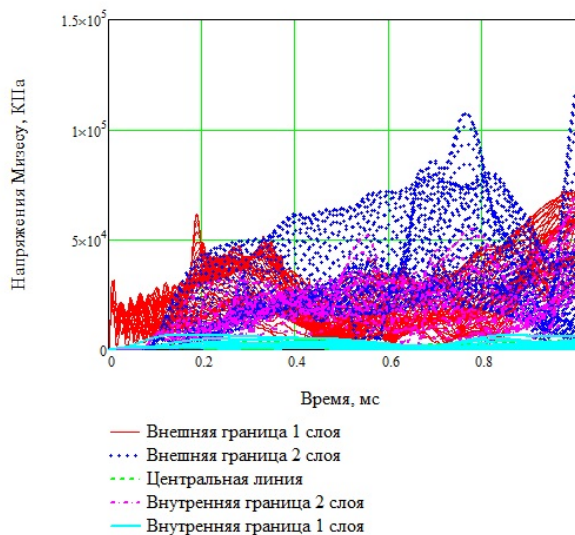
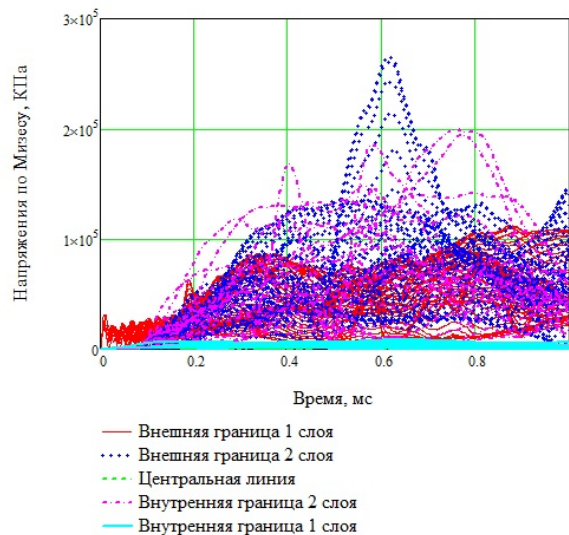


Рис. 30. Напряжения по оси R от времени: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, в) с воздушной прослойкой без груза, г) с воздушной прослойкой с грузом.



а)



б)



в)



г)

Рис. 31. Напряжения по Мизесу от времени: а) без воздушной прослойки и без груза, б) без воздушной прослойки с грузом, в) с воздушной прослойкой без груза, г) с воздушной прослойкой с грузом.

ней границе второго слоя, однако, достаточно высокие напряжения возникают и на внешней границе первого.

При наличии груза второй слой существенно более напряжен, чем первый, что позволяет внести в конструкцию пластины асимметрию по толщине.

На рисунке 32 показано сравнение максимальных напряжений по Мизесу для разных случаев в зависимости от начальной скорости. Как видно, напряжения от начальной скорости, на рассматриваемом диапазоне скоростей, зависят линейно. Видно, что наличие груза и воздушной прослойки существенно влияет на максимальные напряжения.

При относительно малых начальных скоростях взаимодействия (5 м/с) максимальные эквивалентные напряжения достигаются для случая с грузом и без воздушной прослойкой. Однако, напряжения для случая с грузом и с воздушной прослойкой в зависимости от начальной скорости растут существенно быстрее.

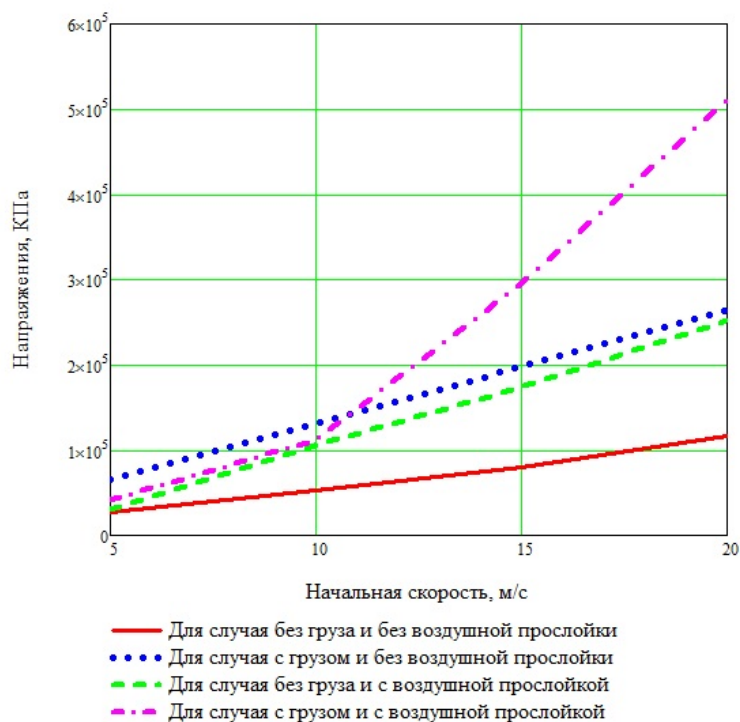


Рис. 32. Максимальные напряжения в зависимости от начальной скорости

В итоге, при решении задач ударного взаимодействия слоистых элементов конструкций с жидкостью необходимо учитывать, как наличие воздушной прослойки, так и груза.

### 3.2 Вертикальный удар прямоугольной пластины

В данном пункте рассматривается вертикальный удар трехслойной симметричной по толщине прямоугольной пластины об идеальную сжимаемую жидкость (воду).

Применительно к рассматриваемому вопросу можно привести следующие, полученные другими авторами, результаты, полезные при численном моделировании.

В работе [43] М. В. Келдыш исследовал задачу об ударе жесткой пластины шириной  $2r$  о несжимаемую жидкость конечной глубины  $d$ . Им было показано, что при  $d > 5r$  влияние дна уже незначительно.

### 3.2.1 Описание конечно-элементной модели

Трехслойная симметричная по толщине прямоугольная пластина (Рисунок 18) шириной  $2r$  вертикально падает на сжимаемую жидкость. Толщина несущих слоев:  $H1$  и  $H2$ , толщина заполнителя:  $H3$ .

В программном комплексе моделируется область шириной 2000 мм и высотой 3100 мм. Водой заполнено 200 см снизу, остальное заполнено воздухом. Область моделируется элементами Эйлера. Размер элемента области 2.5 мм. Количество элементов, моделирующих область, 992000. На нижней границе области задается условие свободного убегания волн, что соответствует случаю бесконечной глубины.

Пластина моделируется элементами Лагранжа. Размер элемента пластины 10 мм. Количество элементов, моделирующих пластину, 2000. Расчет проводится при  $r = 1000$  мм,  $H1 = H2 = 40$  мм,  $H3 = 120$  мм. Сначала моделируется пластина толщиной  $H = 200$  мм из материала несущих слоев (Д16Т), а потом внутренние элементы, соответствующие заполнителю, заполняются материалом заполнителя (фторопласт-4). Таким образом, на границе слоев между слоями трехслойной пластины задается условие равенства перемещений. Пластина свободно падает на жидкость (граничные условия на краю свободные).

В начальный момент времени пластина, находящаяся на расстоянии 5 см от невозмущенной поверхности воды, приобретает начальную скорость. Начальная скорость задается в каждом узле пластины.

На рисунке 33 представлен фрагмент конечно-элементной модели.

Для несущих слоев использован материал Д16Т, а для заполнителя фторопласт-4. Характеристики материалов, приведенные в таблице 7.

Расчеты проводились для начальных скоростей : 5, 10, 15, 20 м/с.

### 3.2.2 Результаты расчетов

На рисунках 34-37 показаны прогибы первого и второго слоя пластины в зависимости от времени и ширины при начальной скорости 10 м/с.

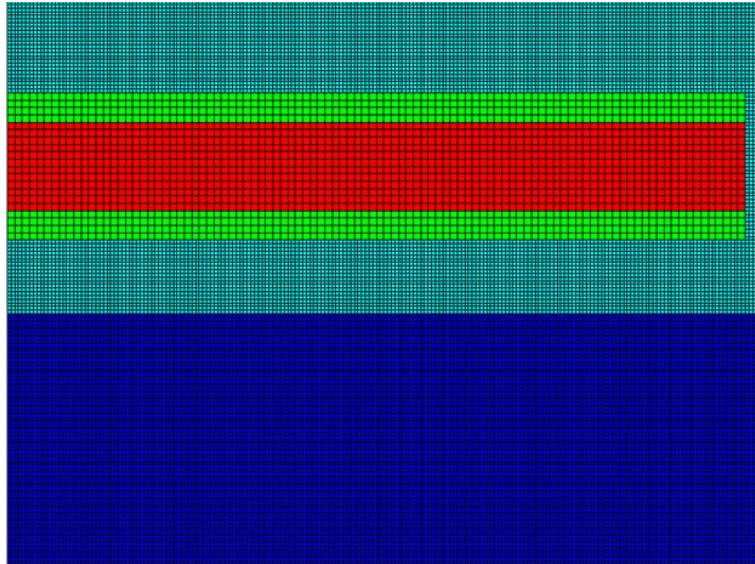


Рис. 33. Фрагмент конечно-элементной модели

Из рисунков видно, что, для расчетного случая без воздушной прослойки, средняя часть пластины тормозиться больше, чем крайняя, и пластина принимает вогнутую форму, а для случая с воздушной прослойкой, что пластина совершает колебательные движения около невозмущенного положения.

На рисунке 38 приведены максимальные прогибы пластины в зависимости от начальной скорости. Из рисунка видно, что максимальные прогибы имеют линейную зависимость от начальной скорости.

На рисунке 39 показана зависимость сжатия пластины по оси  $Z$  от времени. Сплошной линией показано сжатие всей пластины, точками — только заполнителя. Как видно из графиков, сжатию подвергается в основном заполнитель.

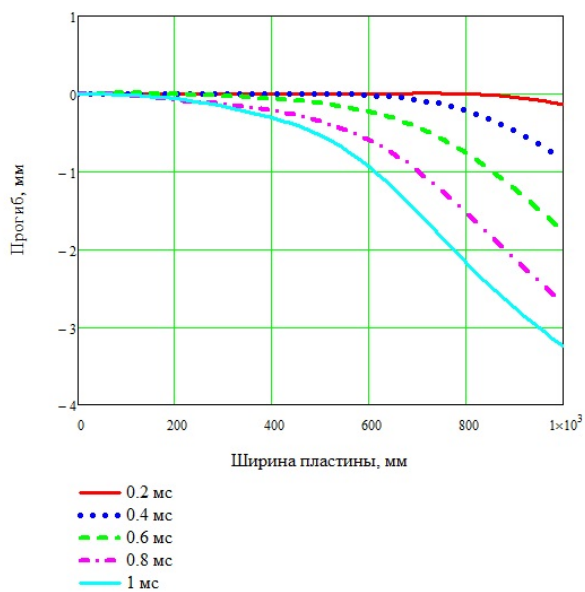
В таблицу 9 занесены показатели максимальных сжатия и растяжения пластины в поперечном направлении (по оси  $Z$ ) в зависимости от начальной скорости, а также деформации пластины (сжатие отнесенное к первоначальной высоте пластины  $\frac{\Delta H}{H}$ ).

На рисунке 40 показано максимальное сжатие заполнителя в поперечном направлении в зависимости от начальной скорости. Сплошной линией показано сжатие, точками — растяжение. Как видно из графиков, на рассматриваемом участке начальных скоростей сжатие и растяжение от начальной скорости зависят линейно.

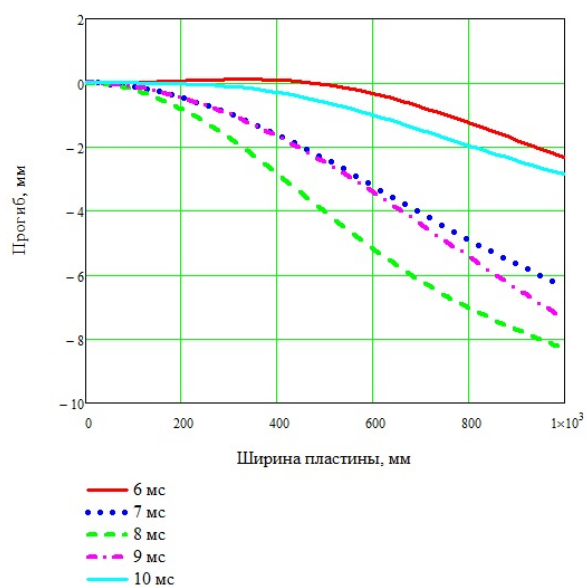
На рисунке 41 показаны направляющие косинусы (в процентах от единицы) поверхности пластины в зависимости от времени при начальной скорости 20 м/с (как видно из рисунка 38, пластина при такой скорости изгибается максимально сильно).

Из рисунка 41 видно, что все косинусы близки к единице, и в дальнейшем за давления



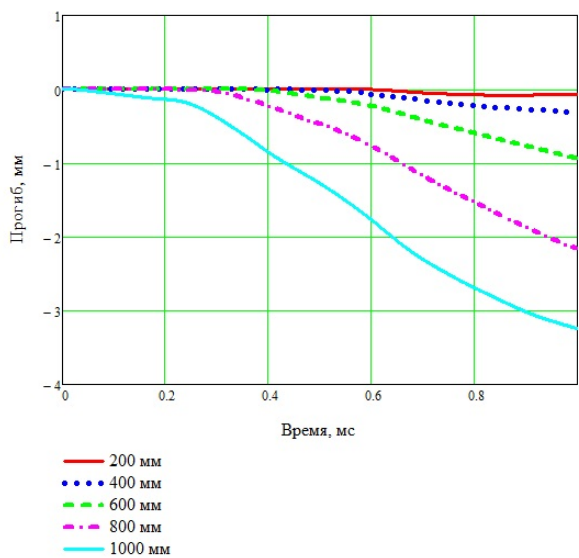


а)

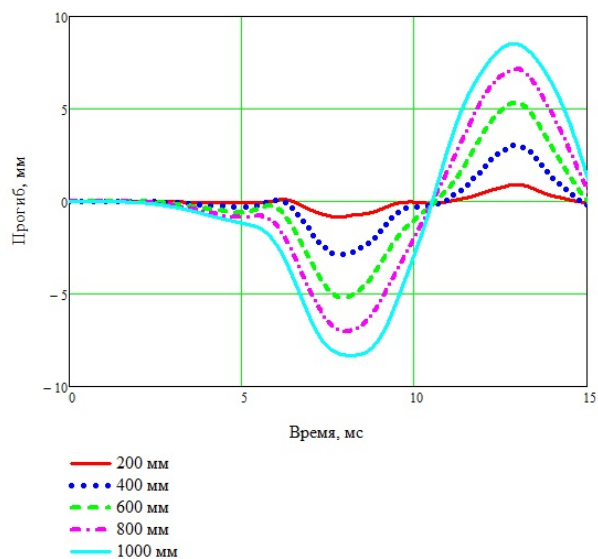


б)

Рис. 34. Прогобы первого слоя по ширине пластины: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

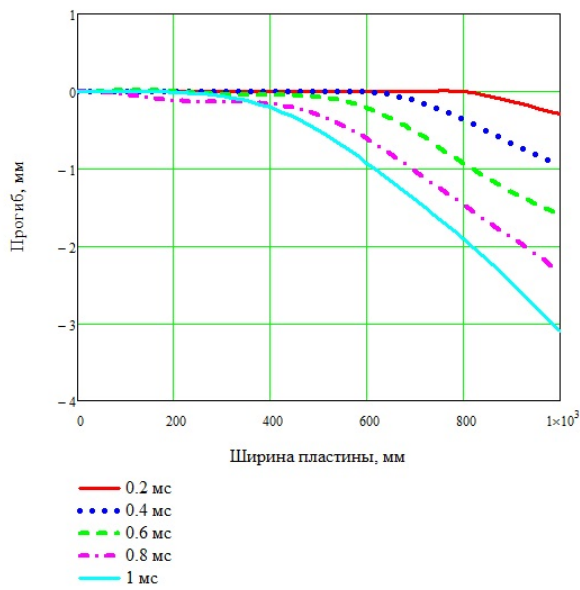


а)

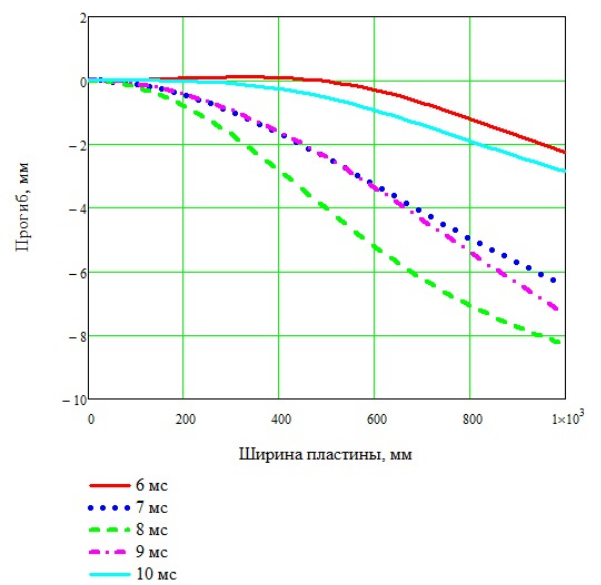


б)

Рис. 35. Прогобы первого слоя от времени: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

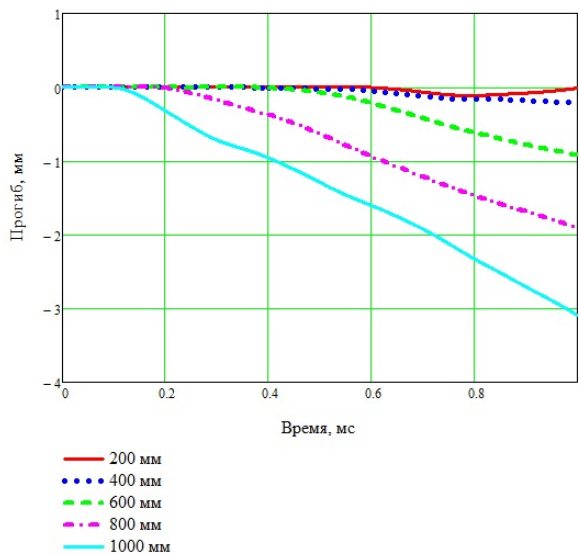


а)

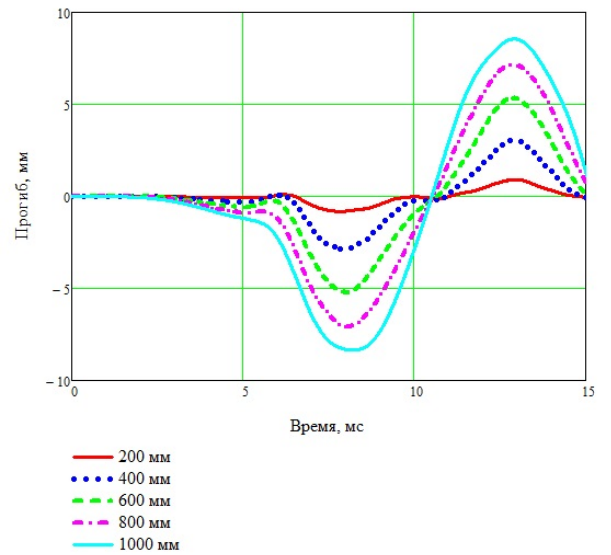


б)

Рис. 36. Прогибы второго слоя по ширине пластины: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

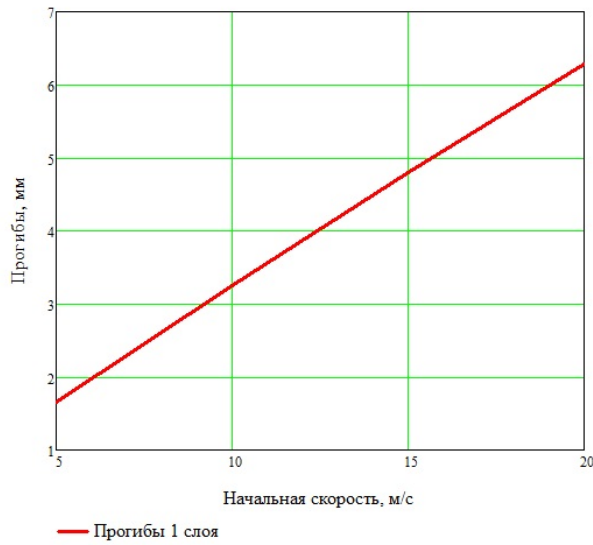


а)

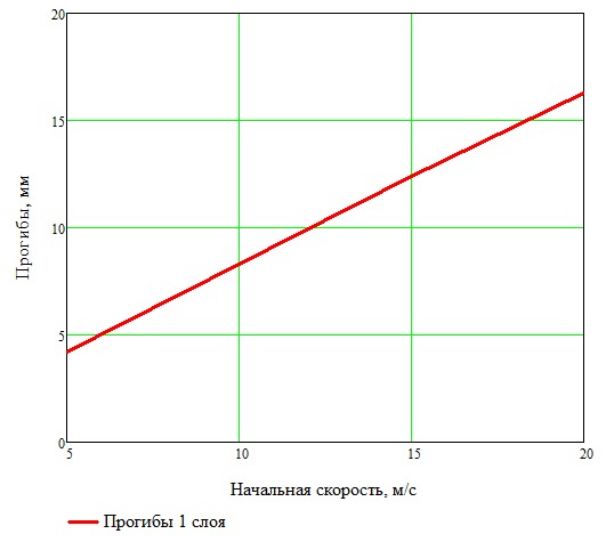


б)

Рис. 37. Прогибы второго слоя от времени: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

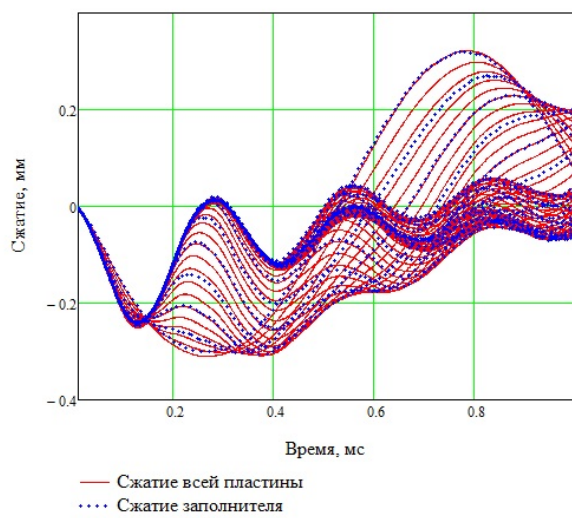


а)

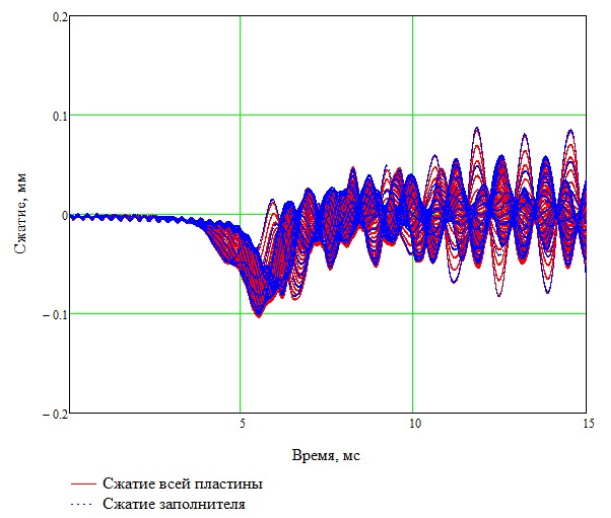


б)

Рис. 38. Максимальные прогибы пластины в зависимости от начальной скорости: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.



а)



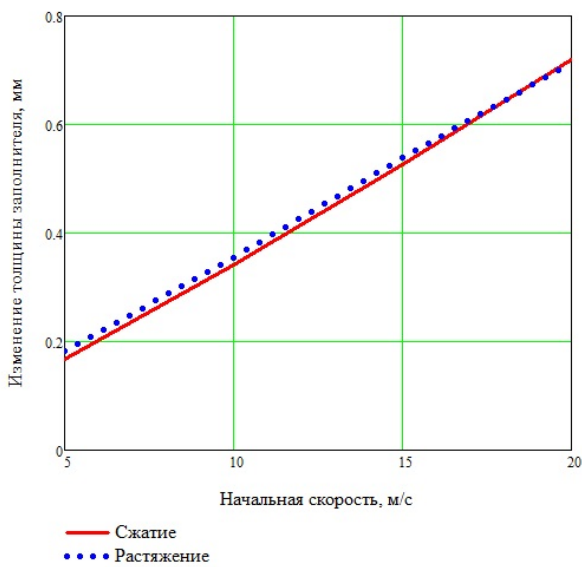
б)

Рис. 39. Сжатие пластины по оси Z от времени: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

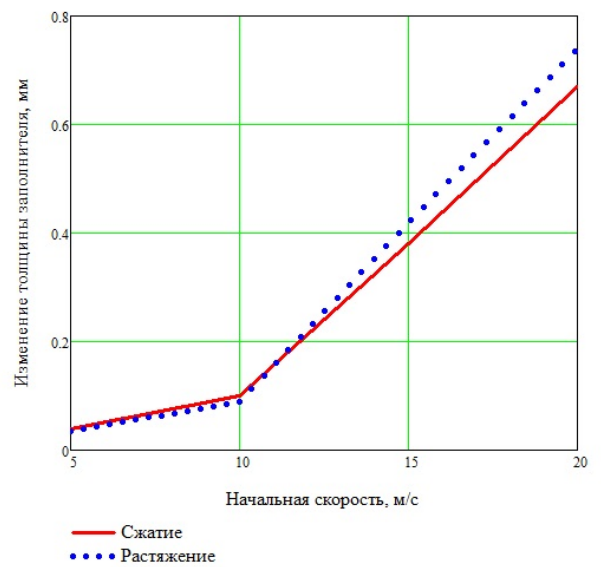


Таблица 9. Сжатие заполнителя

Расчетный случай	Начальная скорость, м/с	Максимальное сжатие, мм	Деформации сжатия	Максимальное растяжение, мм	Деформации растяжения
Без воздушной прослойки	5	0.167	$8.35 \cdot 10^{-4}$	0.183	$9.15 \cdot 10^{-4}$
	10	0.342	$17.1 \cdot 10^{-4}$	0.354	$17.7 \cdot 10^{-4}$
	15	0.527	$26.35 \cdot 10^{-4}$	0.540	$27.0 \cdot 10^{-4}$
	20	0.719	$35.95 \cdot 10^{-4}$	0.713	$35.65 \cdot 10^{-4}$
С воздушной прослойкой	5	0.04	$2 \cdot 10^{-4}$	0.035	$1.75 \cdot 10^{-4}$
	10	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	0.09	$4.5 \cdot 10^{-4}$
	15	0.38	$19 \cdot 10^{-4}$	0.42	$21 \cdot 10^{-4}$
	20	0.67	$33.5 \cdot 10^{-4}$	0.74	$37 \cdot 10^{-4}$



а)



б)

Рис. 40. Сжатие заполнителя по оси Z от начальной скорости: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

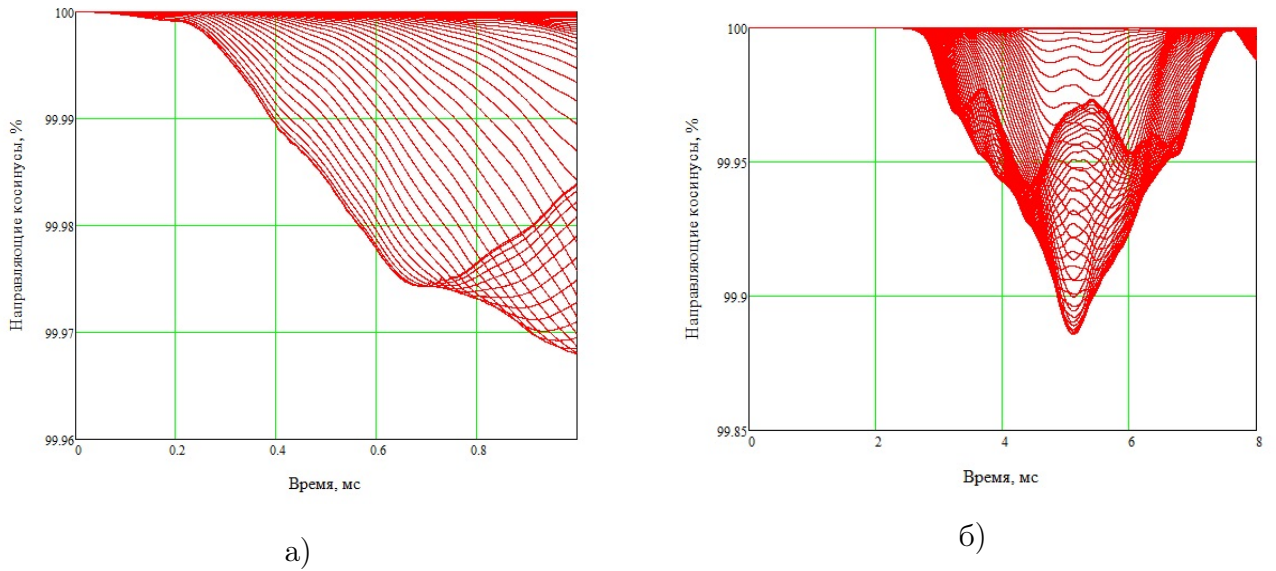


Рис. 41. Направляющие косинусы при начальной скорости 20 м/с: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

принимаются напряжения на поверхности пластины, взаимодействующей с водой, действующие по оси  $Z$ .

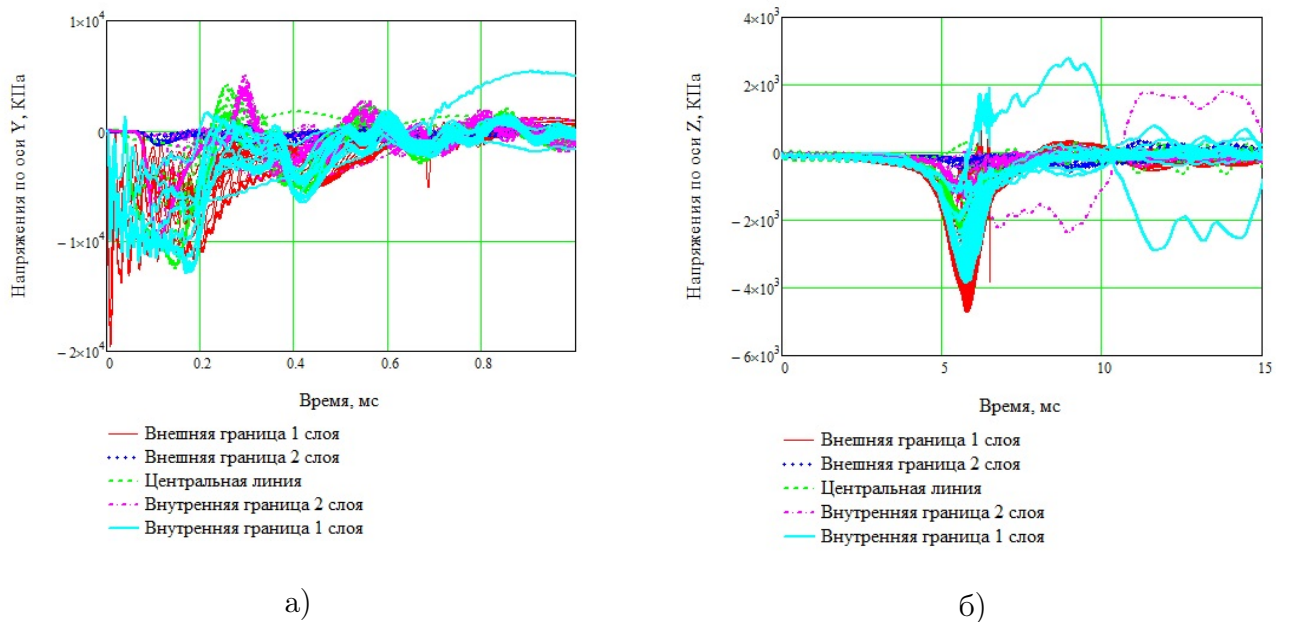


Рис. 42. Напряжения по оси  $Z$  при начальной скорости 10 м/с: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

На рисунке 42 приведены напряжения по оси  $Z$  в разных слоях пластины при начальной скорости 10 м/с. Напряжения на внешней границе 1 слоя есть давления. Как видно, для случая отсутствия воздушной прослойки, максимальные давления возникают в начальный момент времени и постепенно стихают.

С учетом воздушной прослойки, максимальные давления нарастают постепенно по мере

приближения к поверхности жидкости. Также из рисунка видно, что высокие напряжения по оси  $Z$  возникают в заполнителе (как сжимающие, так и растягивающие).

На рисунке 43 показаны напряжений по оси  $X$ . Из рисунка видно, что, для случая отсутствия воздушной прослойки, максимальные растягивающие напряжения возникают на внешней границе второго слоя, а максимальные сжимающие — на внешней границе первого.

Также из рисунков 34-37 и рисунка 43 видно, что выгибание второго слоя в разных направлениях, как в случае круговой пластины, не наблюдается. Для случая с воздушной прослойкой, максимальные растягивающие напряжения возникают на внешней границе первого слоя, а максимальные сжимающие — на внешней границе второго.

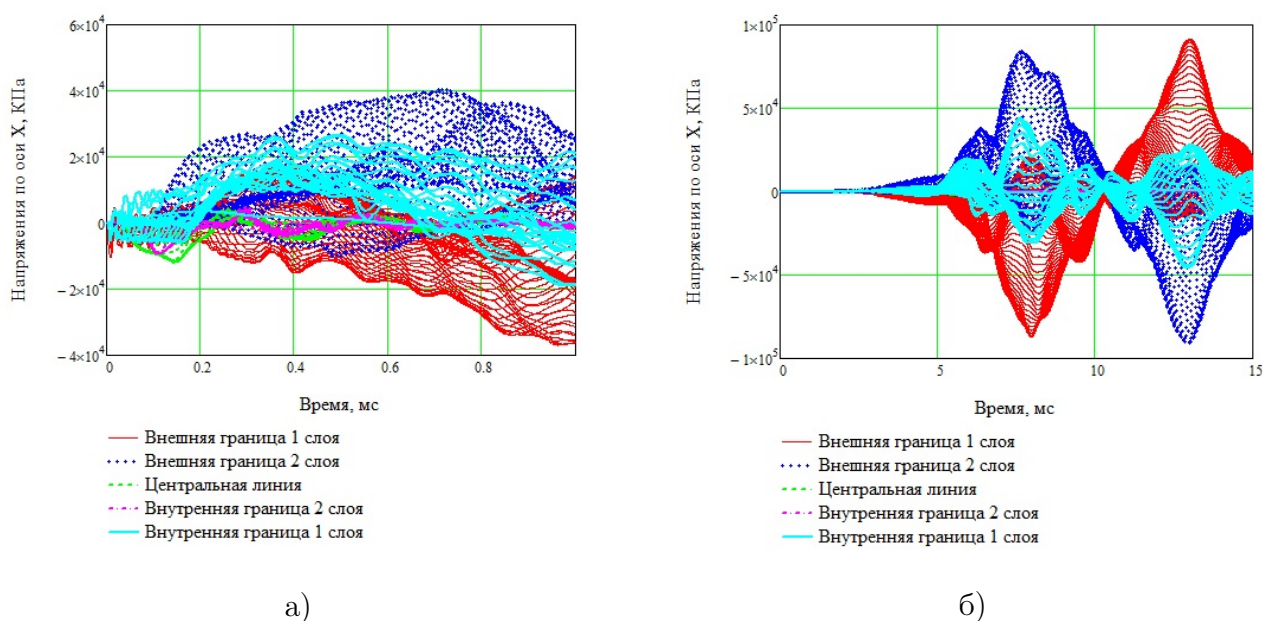


Рис. 43. Напряжения по оси  $X$  при начальной скорости 10 м/с: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

На рисунке 44 показаны напряжения по Мизесу. Из рисунка видно, что без воздушной прослойки максимальные эквивалентные напряжения возникают на внешней границе второго слоя, однако, достаточно высокие напряжения возникают и на внешней границе первого. Разница между ними составляет почти 9 %.

С учетом воздушной прослойки, максимальные эквивалентные напряжения возникают на внешней границе первого слоя, однако, достаточно высокие напряжения возникают и на внешней границе второго. Разница между ними составляет почти 1 %.

На рисунке 45 показаны напряжения в зависимости от начальной скорости. Из рисунка видно, что напряжения на рассматриваемом участке начальных скоростей от начальной скорости зависят линейно.

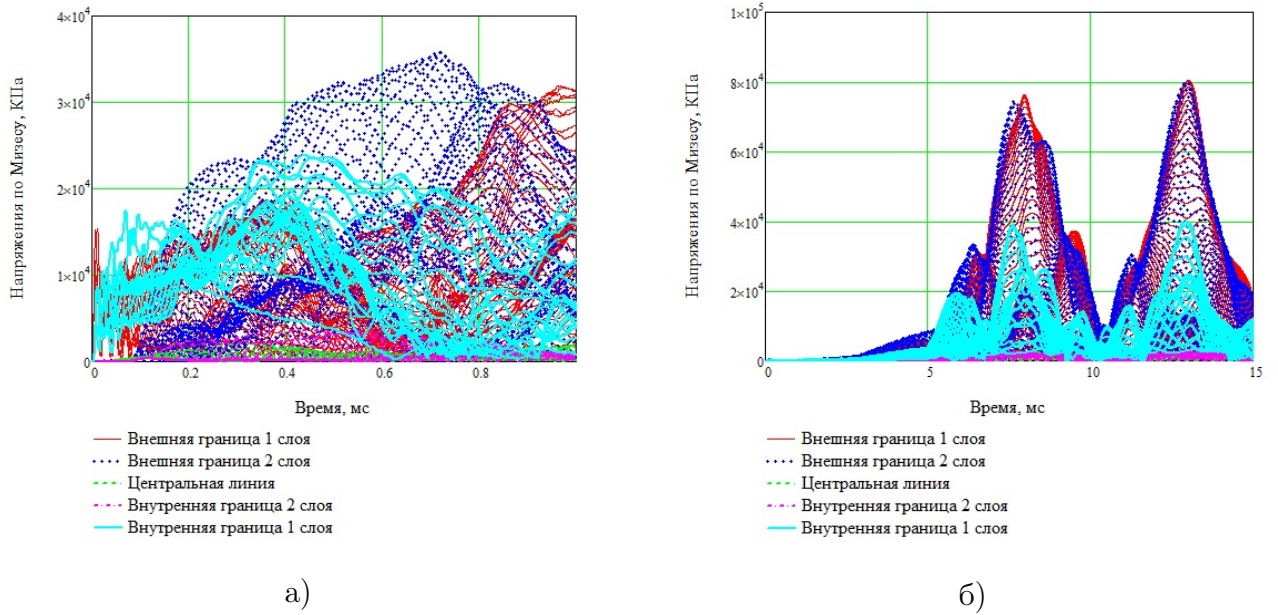


Рис. 44. Напряжения по Мизесу при скорости соударения 10 м/с: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

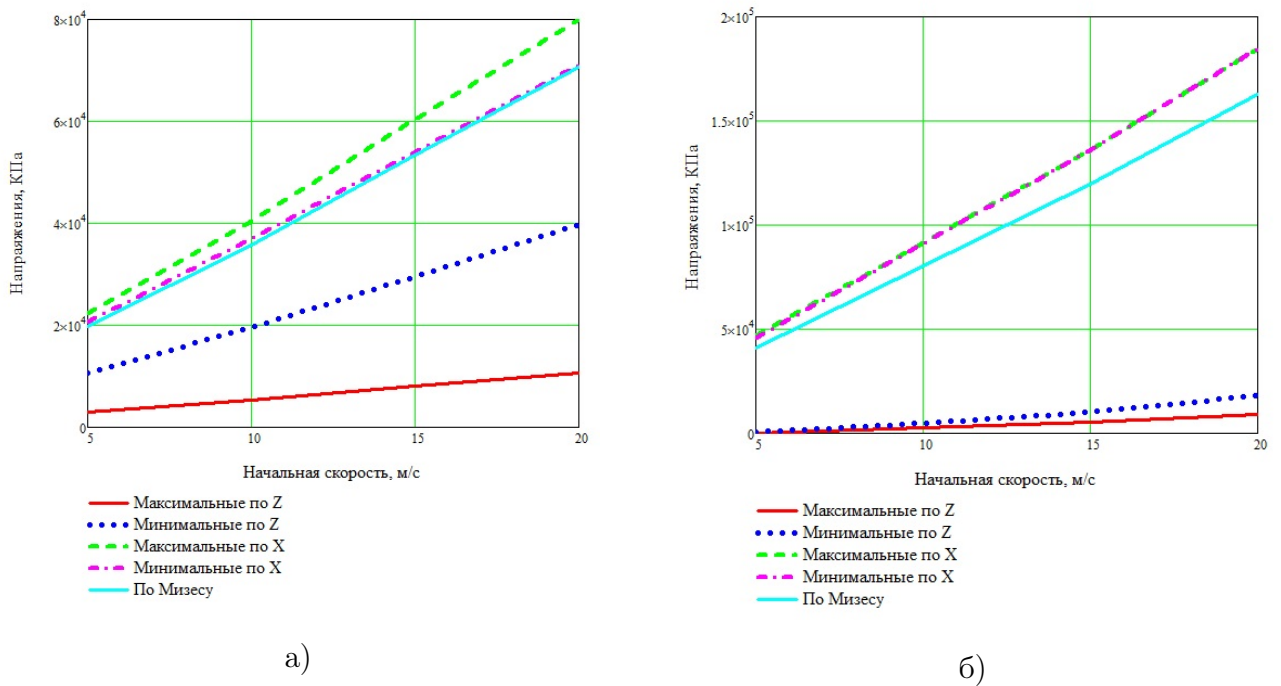


Рис. 45. Максимальные напряжения в зависимости от начальной скорости: а) без воздушной прослойки, б) с воздушной прослойкой.

### 3.3 Вертикальный удар малокилеватого клина

В данном пункте рассматривается вертикальный удар трехслойного симметричного по толщине малокилеватого клина об идеальную сжимаемую жидкость (воду).

### 3.3.1 Описание конечно-элементной модели

Трехслойный симметричный по толщине клин (Рисунок 46) с шириной каждой пластины (составляющей половину клина)  $r$  вертикально падает на сжимаемую жидкость. Толщина несущих слоев:  $H1$  и  $H2$ , толщина заполнителя:  $H3$ .

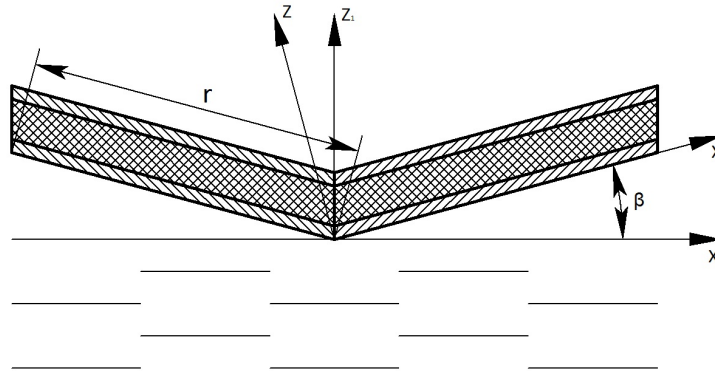


Рис. 46. Модель трехслойного симметричного по толщине клина в начальный момент взаимодействия с жидкостью

Моделирование задачи проводится в плоскосимметричной постановке. В программном комплексе моделируется область шириной 2000 мм и высотой 3100 мм. Водой заполнено 200 см снизу, остальное заполнено воздухом. Область моделируется элементами Эйлера. Размер элемента области 5 мм. Количество элементов, моделирующих область, 248000. На нижней границе области задается условие свободного убегания волн, что соответствует случаю бесконечной глубины.

Пластина клина моделируется элементами Лагранжа. Размер элемента пластины 10 мм. Количество элементов, моделирующих пластину, 2000. Расчет проводится при  $r = 1000$  мм,  $H1 = H2 = 40$  мм,  $H3 = 120$  мм. Сначала моделируется пластина толщиной  $H = 200$  мм из материала несущих слоев (Д16Т), а потом внутренние элементы, соответствующие заполнителю, заполняются материалом заполнителя (фторопласт-4). Таким образом, на границе слоев между слоями трехслойной пластины задается условие равенства перемещений. Клин свободно падает на жидкость (граничные условия на краю свободные).

Ввиду наличия симметрии относительно оси  $Z_1$ , рассматривалась только половина клина. Симметрия вводилась путем запрещения перемещений в направлении  $X_1$  на оси симметрии клина.

В начальный момент времени клин, соприкасающийся с невозмущенной поверхностью воды, приобретает начальную скорость. Начальная скорость задается в каждом узле пла-



СТИНЫ.

На рисунке 47 представлен фрагмент конечно-элементной модели.

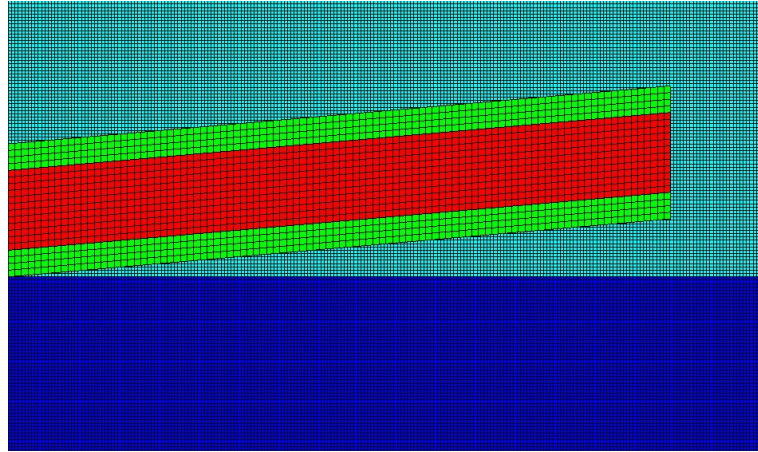


Рис. 47. Фрагмент конечно-элементной модели

Для несущих слоев использован материал Д16Т, а для заполнителя фторопласт-4. Характеристики материалов, приведенные в таблице 7.

Расчеты проводились для начальных скоростей: 5, 10, 15, 20 м/с.

### 3.3.2 Результаты расчетов

На рисунках 48-51 показаны прогибы первого и второго слоя клина в зависимости от времени и ширины для случая начальной скорости 5 м/с.

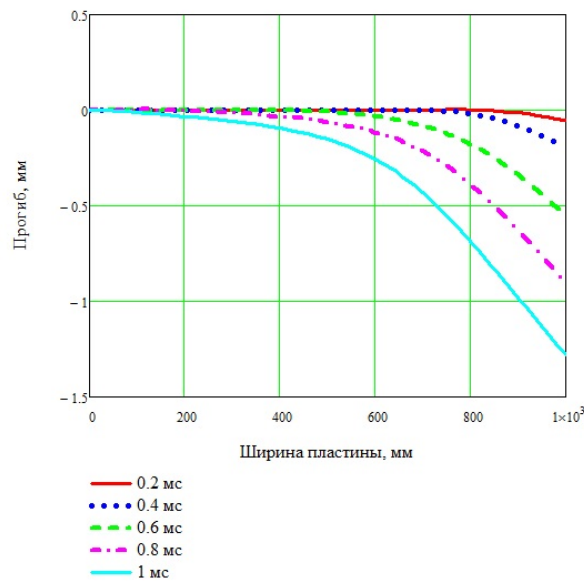


Рис. 48. Прогибы первого слоя клина по ширине при начальной скорости 5 м/с в разные моменты времени

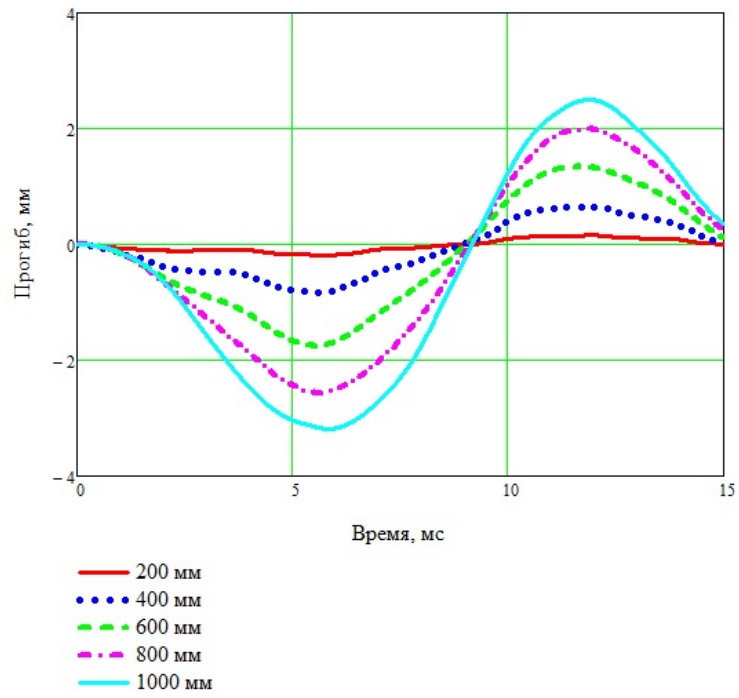


Рис. 49. Прогибы первого слоя клина в зависимости от времени при начальной скорости 5 м/с

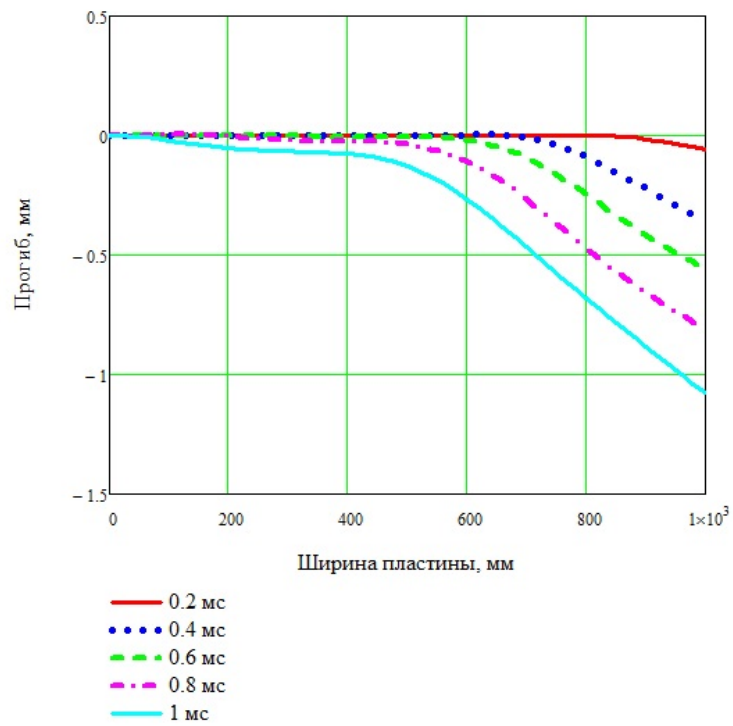


Рис. 50. Прогибы второго слоя клина по ширине клина при начальной скорости 5 м/с в разные моменты времени

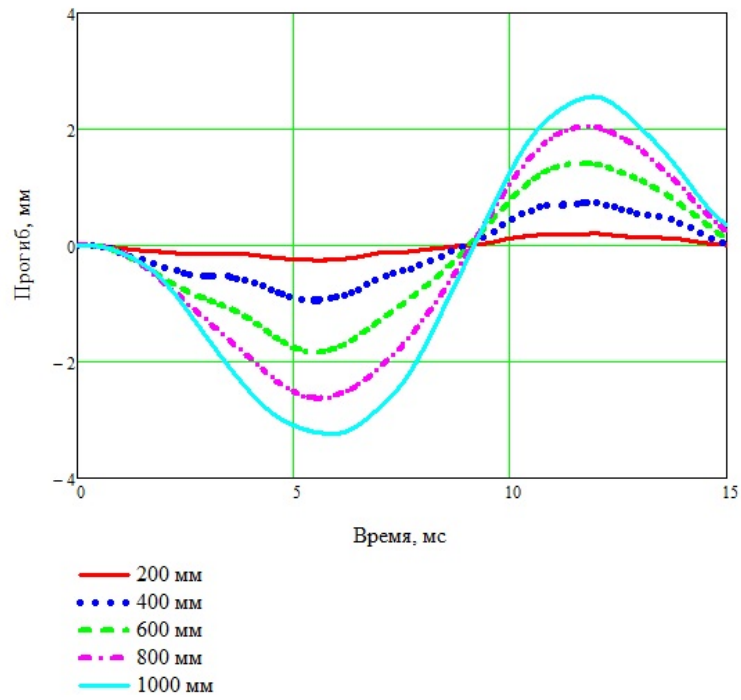


Рис. 51. Прогибы второго слоя клина в зависимости от времени при начальной скорости 5 м/с

Из рисунков видно, что свободные концы пластин клина совершают колебательные движения около первоначальной невозмущенной формы. Максимальный прогиб достигается в направлении движения.

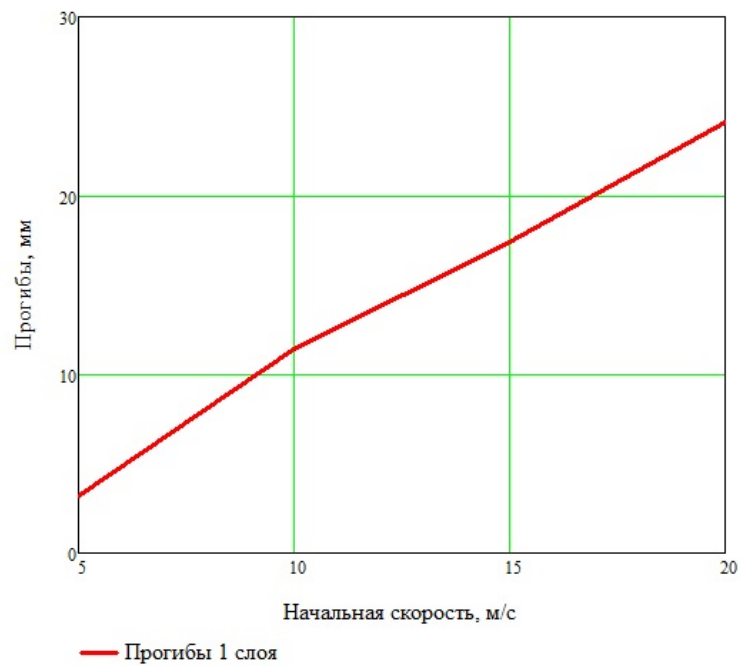
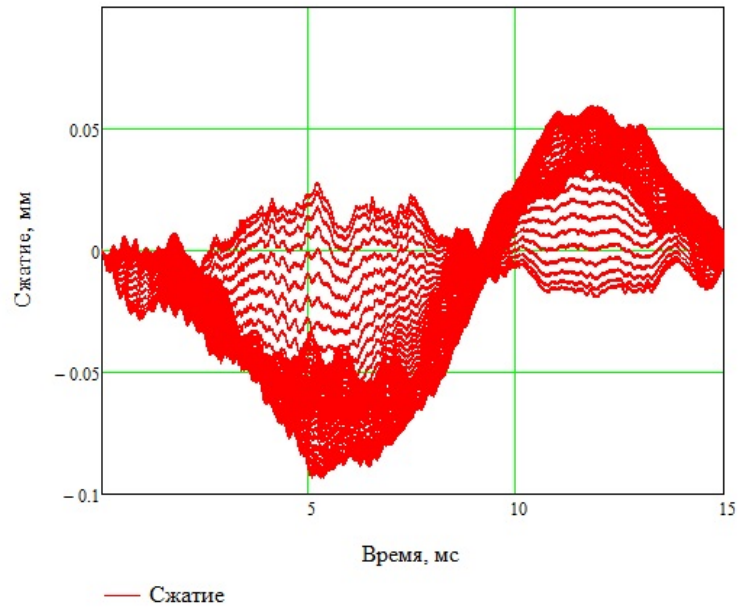


Рис. 52. Максимальные прогибы клина в зависимости от начальной скорости



Рис. 53. Сжатие клина по оси  $Z$  от времени

На рисунке 52 приведены максимальные прогибы пластин клина в зависимости от начальной скорости. Из рисунка видно, что максимальные прогибы имеют линейную зависимость от начальной скорости.

На рисунке 53 показана зависимость сжатия клина по оси  $Z$  от времени при начальной скорости 5 м/с.

В таблицу 10 занесены показатели максимальных сжатия и растяжения клина по оси  $Z$  в зависимости от начальной скорости, а также деформации клина (сжатие отнесенное к первоначальной высоте клина  $\frac{\Delta H}{H}$ ).

Таблица 10. Сжатие пластин клина

Начальная скорость, м/с	Максимальное сжатие, мм	Деформации сжатия	Максимальное растяжение, мм	Деформации растяжения
5	0.094	$4.7 \cdot 10^{-4}$	0.06	$3 \cdot 10^{-4}$
10	0.31	$15.5 \cdot 10^{-4}$	0.29	$14.5 \cdot 10^{-4}$
15	0.57	$28.5 \cdot 10^{-4}$	0.492	$24.6 \cdot 10^{-4}$
20	1.383	$69.5 \cdot 10^{-4}$	0.987	$49.35 \cdot 10^{-4}$

На рисунке 54 показано максимальное сжатие клина по оси  $Z$  в зависимости от начальной скорости.

На рисунке 55 приведены напряжения по оси  $Z$  в разных слоях клина для случая начальной скорости 5 м/с. Напряжения на внешней границе 1 слоя есть давления. Как видно,

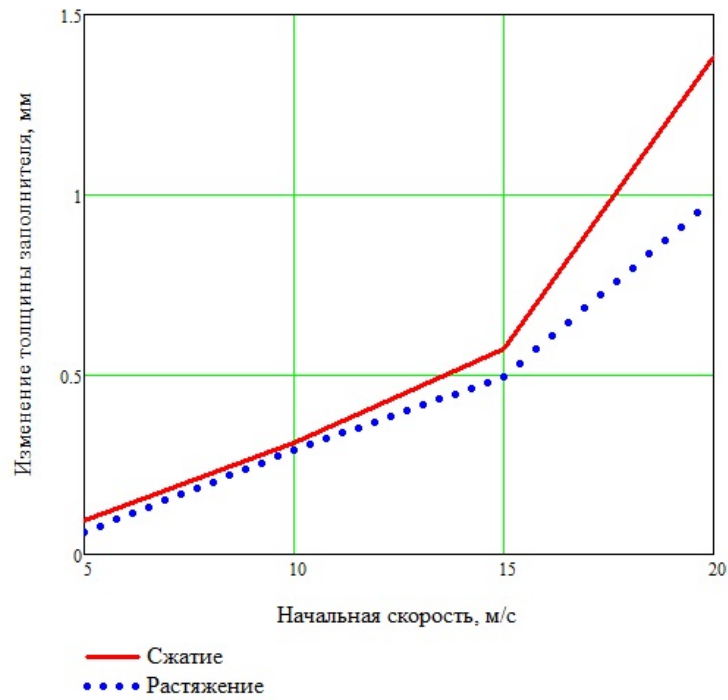


Рис. 54. Сжатие клина по оси Z от начальной скорости

давления нарастают со временем и достигают максимума, когда клин несколько погружен в воду, а затем стихают.

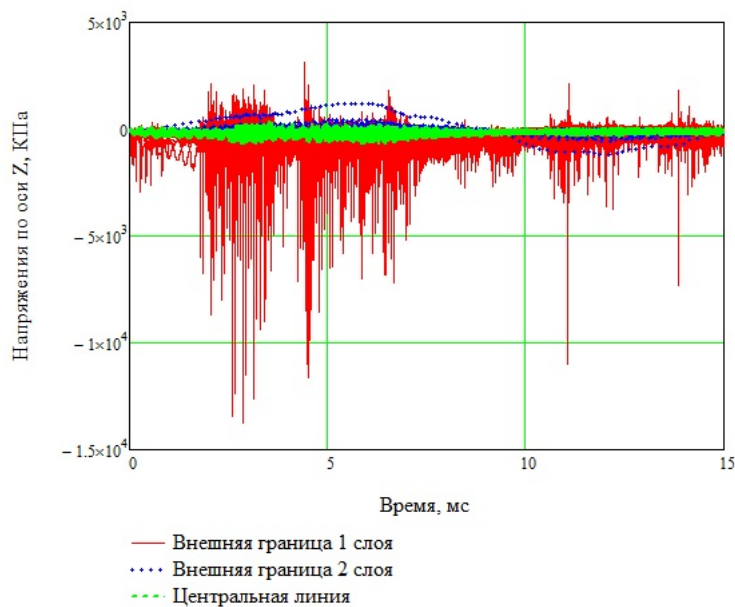


Рис. 55. Напряжения по оси Z для начальной скорости 5 м/с

На рисунке 56 показаны напряжений по оси X. Из рисунка видно, что максимальные растягивающие и сжимающие напряжения возникают на внешней границе второго слоя.

На рисунке 57 показаны напряжения по Мизесу. Из рисунка видно, что максимальные

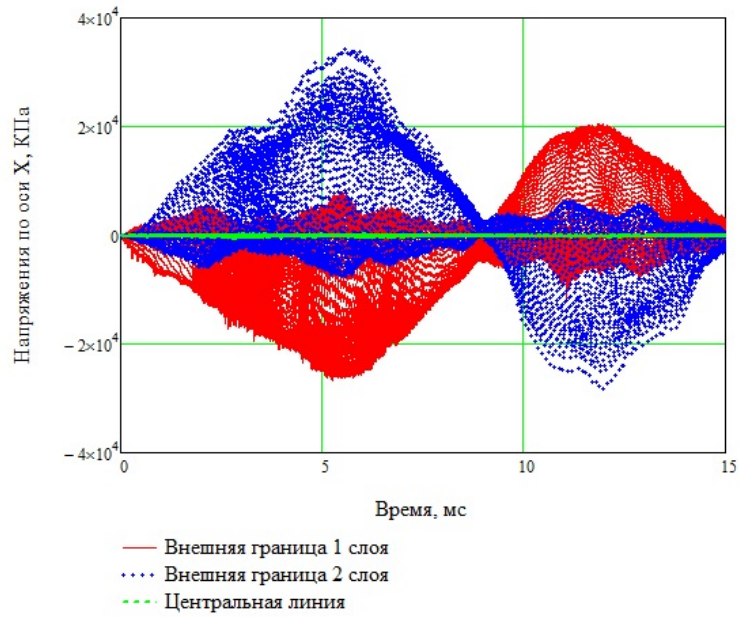


Рис. 56. Напряжения по оси X для начальной скорости 5 м/с

эквивалентные напряжения возникают на внешней границе второго слоя, однако, достаточно высокие напряжения возникают и на внешней границе первого. Разница между ними составляет почти 21 %.

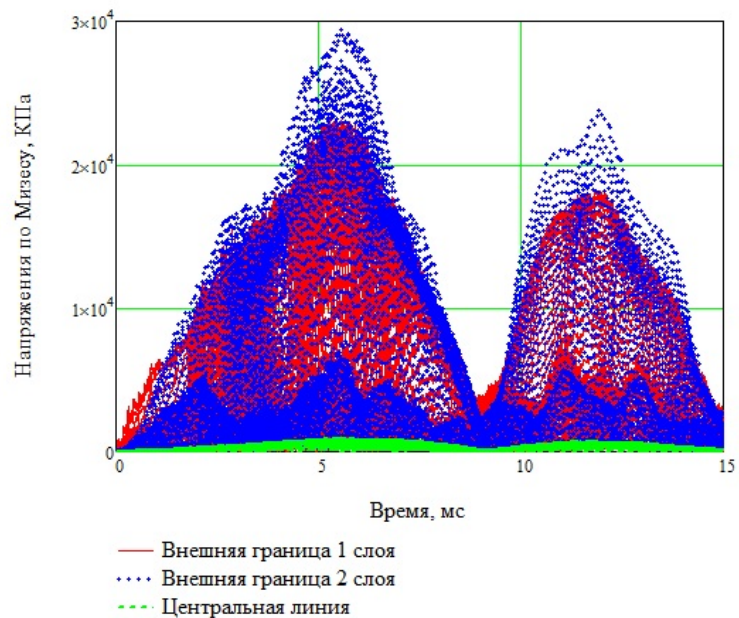


Рис. 57. Напряжения по Мизесу для начальной скорости 5 м/с

На рисунке 58 показаны максимальные напряжения в зависимости от начальной скорости.

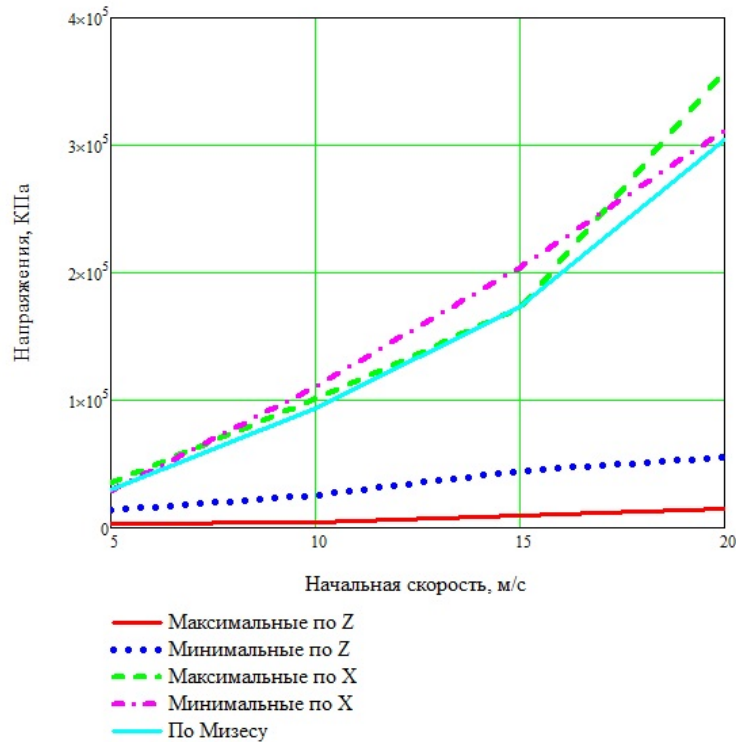


Рис. 58. Максимальные напряжения в зависимости от начальной скорости

### 3.4 Выводы по главе

С помощью разработанной методики получено решение ряда задач о взаимодействии трехслойных элементов конструкций с жидкостью.

Рассмотрено 4 случая: без воздушной прослойки и без груза, без воздушной прослойки с грузом, с воздушной прослойкой без груза, с воздушной прослойкой с грузом.

Получен численный набор данных, характеризующий изменение динамических характеристик рассмотренных элементов конструкций в зависимости от начальной скорости, для всех случаев.

На основании анализа данных получены следующие результаты:

1. Прогибы пластины существенно зависят от жесткости системы пластина-среда. Так в случае без воздушной прослойкой прогибы значительно меньше, чем с ней, так как жесткость системы пластина-воздух меньше, чем жесткость пластина-вода. Груз придает пластине дополнительную жесткость, что также уменьшает прогибы.

2. При наличии груза пик сжатия заполнителя больше пика растяжения в 1.5 раза. Сжатие пластины с грузом также в 1.5 больше сжатия пластины без груза. Сравнение для разных случаев соударения показывает, что учет воздушной прослойки и груза может существенно сказаться на сжатии пластины.

3. В случае отсутствия воздушной прослойки максимальные гидродинамические давления для пластины с грузом и без одинаковы. Максимальные давления возникают в начальный момент времени.

В случае с воздушной прослойкой максимальные давления нарастают постепенно. За счет учета воздушной прослойки давления значительно меньше, чем для случая без учета воздушной прослойки.

4. Показано, что наличие груза и воздушной прослойки существенно влияет как на уровень, так и на характер распределения напряжений.

В расчетном случае с грузом максимальные напряжения возникают во втором несущем слое, и они существенно больше, чем напряжения в первом несущем слое, что в перспективе позволяет внести асимметрию по толщине в конструкцию пластины.

Наблюдается высокий уровень осевых напряжений по всей толщине пластины, что может быть причиной расслоения. В дальнейших исследованиях необходимо более точно смоделировать взаимодействие между слоями пластины.

Сравнение максимальных эквивалентных напряжений для случаев с грузом и без груза, с учетом воздушной прослойки и без нее позволяет сделать вывод, что самые высокие напряжения возникают при учете как груза, так и воздушной прослойки, и их необходимо учитывать при проектировании конструкций вступающих в ударное взаимодействие с жидкостью.

5. Показано, что основные динамические характеристики рассмотренных элементов конструкций: прогибы элементов конструкций, деформации пластин и клина, давления, действующие на конструкции со стороны воды, напряжения в элементах конструкций имеют линейную зависимость от начальной скорости взаимодействия. Так как это справедливо для всех рассмотренных элементов конструкций, можно сделать вывод, что данная зависимость проявляется в общем при ударном взаимодействии тел с жидкостью.

6. В дальнейших исследованиях необходимо более точно смоделировать взаимодействие между слоями пластин, а также рассмотреть поведение материалов пластин за пределами закона Гука.

Возможно усовершенствовать модель жидкости: известно, что в поверхностных слоях жидкости растворены пузырьки воздуха, что увеличивает сжимаемость жидкости. К тому же, поверхность жидкости покрыта сетью небольших волн, что может привести к перераспределению гидродинамических давлений на поверхности пластин и напряжений в них.

Также следует выяснить функциями чего являются коэффициенты линейной зависимости динамических характеристик от начальной скорости взаимодействия.

## 4 ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. На основании метода конечных элементов разработана методика решения задач взаимодействия конструкций с жидкостью, учитывающая влияние воздушной прослойки между телом и жидкостью, и гравитационных сил, в связанной постановке.

2. Для случая конечной массы диска доведено до конца аналитическое решение Пору-чикова для гидродинамической силы, действующей на диск, для задачи об ударе абсолютно твердого диска о поверхность идеальной сжимаемой жидкости.

3. На основании решения для гидродинамической силы, действующей на абсолютно твердый диск, для случая диска конечной массы, получено аналитическое решение задачи об ударе трехслойной круговой пластины о поверхность идеальной сжимаемой жидкости.

4. С использованием разработанной методики исследовано влияние воздушной прослойки между конструкцией и жидкостью на процесс удара элементов конструкции о жидкость.

5. С использованием разработанной методики исследовано влияние связности задачи взаимодействия конструкций с жидкостью на процесс удара элементов конструкции о жидкость.

6. С помощью разработанной методики исследовано поведение ряда слоистых элементов конструкций при их вертикальном ударе о первоначально невозмущенную поверхность идеальной сжимаемой жидкости. Проведен параметрический анализ динамических характеристик элементов конструкции в зависимости от начальной скорости взаимодействия.

## 5 СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже представлен список основных обозначений, которыми автор пользуется в работе.

$x, y, z$  — декартовы координаты,

$t$  — абсолютное время,

$m$  — масса узла (элемента),

$F$  — сила,

$\rho$  — плотность,

$a$  — ускорение,

$v$  — скорость,

$u$  — перемещение,

$w$  — прогиб,

$c$  — скорость звука,

$V$  — объем,

$\sigma$  — тензор напряжений,

$\varepsilon$  — тензор деформаций,

$\epsilon$  — удельная энергия,

$p$  — давление,

$s$  — девиатор тензора напряжений,

$K$  — мгновенный модуль объемной деформации,

$\mu$  — сжатие,

$G$  — модуль сдвига,

$E$  — модуль Юнга,

$H$  — толщина пластины,

$S$  — площадь пластины,

$M$  — масса пластины,

$n$  — нормаль к поверхности пластины,

$\nu$  — коэффициент Пуассона,

$g$  — ускорение свободного падения ( $\simeq 9.81$  м/с<sup>2</sup>),

$A, B, C, D, R, U, N, L, T, W, b, k, d, q, f, h, \lambda, \alpha, \beta, \chi, \psi, \gamma, \Gamma$  — различные коэффициенты (в каждом подразделе имеют свои значения),

$e$  — экспонента ( $\simeq 2.718$ ),

$\pi$  — отношение периметра окружности к диаметру ( $\simeq 3.14$ ),

$\tau$  — безразмерное время,

$r$  — радиус (ширина) пластины.

$i$  — мнимая единица.



## ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов Н. А.* Численное исследование осесимметричного деформирования композитных оболочек вращения при импульсных воздействиях// Мех. композит. матер., 1987, № 4, С. 647-653.
2. *Александров А. Я., Куршин Л. М.* Трехслойные пластины и оболочки// В кн.: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Машиностроение, 1968, т. 2, С. 243-308.
3. *Александров А. Я., Брюккер Л. М., Куршин Л. М.* Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960, 270 с.
4. *Аннин Б. Д., Садовский В. М.* Динамика слоистых упругопластических плит// Теория распространения волн в упругих и упругопластических средах. Новосибирск, 1987, С. 56-60.
5. *Асрян Н. Г.* Удар твердой пластинки о поверхность несжимаемой жидкости при наличии между ними газового слоя// Известия АН Армянской ССР. Механика, 1972. т. 25, № 6. С. 32-49.
6. *Баженов В. Г., Михайлов Г. С.* Нелинейное динамическое взаимодействие тонкостенных конструкций с идеальными сжимаемыми средами// В сб.: Прикл. пробл. Прочности и пластич. (Горький), 1979, №10, С. 41-55.
7. *Бельгов Ю. В.* Удар упругой пластины о воду с учетом эффекта захвата воздуха// В сб.: НТО судпрома, вып. 109, Л., 1968, С. 93-99.
8. *Бельгов Ю. В.* Экспериментальное исследование плоского удара пластин о воду// В сб.: НТО судпрома, вып. 145, Л., 1970, С. 33-41.
9. *Бельгова М. А.* Экспериментальное исследование плоского удара// Труды ЦНИИМФ, 1969. Вып. 117. С. 15-28.
10. *Болотин В. В.* К теории слоистых плит// Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 3, С. 65-72.
11. *Болотин В. В.* О изгибе плит, состоящих из большого числа слоев// Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1, С. 61-66.
12. *Болотин В. В.* Основные уравнения теории армированных сред// Механика полимеров, 1965, № 2, С. 27-37.

13. *Болотин В. В.* Механика многослойных конструкций/Болотин В. В., Новичков Ю. Н. — М.: Машиностроение, 1980.— 375 с.
14. *Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н.* Об учете влияния стенок при ударе круглого диска о жидкость// Инж. Журнал Механика твердого тела, 1967. № 1. С. 177-182.
15. *Бронштейн И. Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ: Учебное пособие/ Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. — СПб.: Издательство "Лань" 2010. — 608 с.
16. *Вакалов Г. Н., Горшков А. Г.* Вертикальный вход упругого клина в несжимаемую жидкость// В сб: Стат. и динам. тонкостен. конструкций. М., 1980, С. 136-142.
17. *Васильева А. Б.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах: Учебное пособие. 3-е изд., испр./Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А.— СПб.: Издательство "Лань" 2010. 432с.
18. *Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой// Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела, 1983, т.15, С.69-148.
19. *Ворович И. И., Юдович В. И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины// Прикладная математика и механика, 1957. т. 21, № 4. С. 525-532.
20. *Галин Л. А.* Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости// ПММ, 1957, т. 11, вып. 5, С. 547-550.
21. *Галин А. В., Сайкин С. С.* Вход тупых тел в жидкость конечной глубины// В сб.: Гидродинам. бол. скоростей. Чебоксары, 1981, С. 36-46.
22. *Гершун Г. В.* О деформации свободной поверхности жидкости под действием неустановившегося давления// Труды ЦНИИМФ, 1969, вып. 117, С.39-49.
23. *Говоров А. А., Крупенин А. М., Мартиросов М. И.* Вертикальный удар о воду слоистой пластины с легким наполнителем// 9-я Международная конференция «Авиация и космонавтика—2010». 16-18 ноября 2010 года. Москва. Тезисы докладов. — СПб.: Мастерская печати, 2010.— С. 63-64.

24. *Говоров А. А., Крупенин А. М., Мартиросов М. И.* Нестационарное взаимодействие трехслойных элементов конструкций с жидкостью// Часть I. Материалы II Всероссийской студенческой научно-технической школы-семинара «Аэрокосмическая декада». Часть II. Материалы II Всероссийской научно-практической студенческой школы-семинара «Компьютерный инжиниринг в промышленности и ВУЗах», посвященной 80-тилетию МАИ. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. — С. 61-63.
25. *Говоров А. А., Крупенин А. М., Мартиросов М. И.* Численное исследование ударного взаимодействия слоистых элементов конструкций с поверхностью воды// Высокие технологии и фундаментальные исследования. Т. 1 : сборник трудов Десятой международной научно-технической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности». 09-11.12.2010, Санкт-Петербург, Россия/ под ред. А. Н. Кудинова.— СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2010.— С. 249-250.
26. *Горшков А. Г.* Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами// Изв. АН СССР Мех. тверд. тела, 1981, №4, С. 177-189.
27. *Горшков А.Г., Вакалов Г. Н.* Погружение упругого клина в несжимаемую жидкость// Прикл. мех., 1980, №9, С.115-120.
28. *Горшков А. Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение)/Горшков А. Г., Григолюк Э. И. — Л.: Судостроение, 1976. 200 с.
29. *Горшков А. Г., Коган Ф. А.* Удар упругих и жестких тел о воду// Известия АН СССР. МГТ, 1969. № 5, С. 189 (Аннотация доклада).
30. *Горшков А. Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций/Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
31. *Грек А.* Классные гонки человека и машины против моря.// М: Популярная механика, 2007, т. 58, № 8, С.116-121.
32. *Грек А.* Верхом на мечте// М: Популярная механика, 2008, т. 66, № 4, С.32-36.
33. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Погружение упругих оболочек вращения в жидкость// Итоги науки и техники. ВИНТИ. Мех. деформир. тверд. тела, 1977, № 10, С. 63-113.
34. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями// Труды Ин-та механики МГУ, 1971, № 13, С. 180.

35. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек// Прикл. мех., 1972, Т. 8, № 6, С. 5-17.
36. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Уравнения изгиба, устойчивости и колебаний трехслойных оболочек несимметричной структуры с жестким сжимаемым заполнителем// Вестник Моск. ун-та. Математика, механика, 1972, № 2. С.110-117.
37. Григолюк Э. И., Коган Е. А. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек/ Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций. Под ред. академика РАН С.С. Григоряна. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. С. 56-100.
38. Григолюк Э. И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек/ Григолюк Э. И., Чулков П. П. – М.: Машиностроение. 1973.
39. Григолюк Э. И., Чулков П. П. К расчету трехслойных пластин с жестким заполнителем// Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964, № 1. С.67-74.
40. Гурский Д. А. Вычисления в Mathcad 12//Гурский Д. А., Турбина Е. С. – Спб.: Питер, 2006. – 544 с.
41. Дворкин Я. П. Эффект подъема свободной поверхности сжимаемой жидкости при несимметричном ударе по ней клином// Вестн. МГУ. Мат., мех., 1976, №1, С. 68-76.
42. Дудченко А.А., Лурье И.Ф., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки// Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела, 1983, т.15, С.3-68.
43. Келдыш М. В. Удар пластины о воду, имеющую конечную глубину// Труды ЦАГИ, 1935. Вып. 152. С. 13-20.
44. Корзинов Н. Небесный флот Григоровича// М: Популярная механика, 20090, т. 77, № 3, С.106-107.
45. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Численное исследование поведения прямоугольной трёхслойной пластины несимметричного строения при вертикальном приводнении //Материалы Международной молодёжной научной конференции «XIX Туполевские чтения». Том 1. Казань, 24-26 мая 2011 г., изд-во КГТУ, 2011 г. С. 95-96.

46. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Сравнение динамических характеристик слоистых пластин с лёгким и жёстким изотропными заполнителями при ударе о воду // Тезисы докладов 9-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2011». Москва, 8-10 ноября 2011 г. М., МАИ, 2011 г. С. 129.
47. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Динамика слоистых пластин с различными заполнителями при вертикальном ударе о воду // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Ярополец, 13-17 февраля 2012 г. М., МАИ, 2012 г. С. 116-118.
48. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Численное исследование удара о воду слоистого клина с различными заполнителями // Сборник тезисов докладов Московской молодёжной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтке – 2012». Москва, 17-20 апреля 2012 г. М., МАИ 2012 г. С. 270-271.
49. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Исследование удара о воду трёхслойного клина с различными заполнителями // Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Новые материалы и технологии». Москва, 20-22 ноября 2012 г. М., МАТИ, 2012 г. С. 183-184.
50. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Удар о воду трёхслойного клина с малым углом килеватости // Материалы XIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Ярополец, 18-22 февраля 2013 г. М., МАИ, 2013 г. С. 131-132.
51. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Поведение слоистой прямоугольной пластины со сплошным изотропным заполнителем при вертикальном приводнении // Сборник тезисов докладов Московской молодёжной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтке – 2013». Москва, 16-18 апреля 2013 г. М., МАИ 2013 г. С. 55-56.
52. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Динамика слоистого клина со сплошным заполнителем из изотропного материала при вертикальном ударе о воду // Тезисы докладов XXV Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов.» Санкт-Петербург, 23-26 сентября 2013 г. СПбГУ, 2013 г. С. 120-121.

53. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Численное моделирование поведения трехслойной прямоугольной пластины при вертикальном ударе о жидкость // Электронный журнал «Труды МАИ». 2013 г. Выпуск № 69:<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=43066>.
54. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Исследование динамических характеристик трехслойной круговой пластины при вертикальном ударе о воду методом конечных элементов // Тезисы докладов 12-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2013». Москва, 12-15 ноября 2013 г. М., МАИ, 2013 г. С. 66-67.
55. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Анализ поведения круговой слоистой пластины при ударе о жидкость // Материалы XX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Ярополец, 17-21 февраля 2014 г. М., МАИ, 2014 г. С. 116-117.
56. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Конечно-элементный анализ взаимодействия трехслойных пластин с жидкостью // Сборник тезисов докладов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике – 2014» Москва, 22-24 апреля 2014 г., М., МАИ, 2014 г. С. 207.
57. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Электронный журнал «Труды МАИ». 2014 г. Выпуск № 75:<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=49676>.
58. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Симметричный удар круговой трехслойной пластины о воду // Материалы Всероссийской научной конференции «Обратные краевые задачи и их приложения», посвященной 100-летию со дня рождения М.Т. Нужина. Казань, 20-24 октября 2014 г. Казань, изд-во Казан. ун-та, 2014 г. С. 1-4.
59. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И., Рабинский Л.Н.* Численное моделирование нестационарного взаимодействия пластин с жидкостью // Международный научно-технический журнал «Нелинейный мир». Том 12, № 11, 2014 г. С. 21-29.
60. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Численное исследование поведения трехслойного клина при вертикальном взаимодействии со свободной поверхностью жидкости // Тезисы докладов Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, 8-10 декабря 2014 г. М., МАИ, 2014 г. С. 33-34.

61. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Поведение трехслойного клина с заполнителем сплошной структуры при входе в жидкость// Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Вятчи, 16-20 февраля 2015 г. М., МАИ, 2015 г. С.110-111.
62. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Численное исследование нестационарного взаимодействия круговой слоистой пластины с поверхностью воды// Электронный журнал «Труды МАИ». 2015 г. Выпуск № 80: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=56943>.
63. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Поведение слоистой платформы с дополнительной массой при ударе о поверхность воды// Сборник тезисов докладов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике – 2015» Москва, 21-23 апреля 2015 г., М., МАИ, 2015 г. С.31-32.
64. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Поведение круговой трёхслойной пластины с жёстким заполнителем при ударе о воду //Научные труды Международной молодёжной научной конференции «XXXVII Гагаринские чтения». Том 5. Москва, 5-8 апреля 2011 г. М., МАТИ, 2011 г. С. 27-28.
65. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Рабинский Л.Н.* Удар трехслойной пластины о свободную поверхность жидкости// Известия ТулГУ. Технические науки. Вып.5:в 2 ч. Ч.2. Тула: Из-во ТулГУ, 2015 г. С. 65-73.
66. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Конечно-элементное моделирование удара круговой трехслойной пластины несимметричного строения по толщине о жидкость// Тезисы докладов XXVI Международной конференции "Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций" Санкт-Петербург, 28-30 сентября 2015 г. СПбГУ, 2015 г. С. 214-215.
67. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Удар о воду слоистой платформы с грузом при сбросе с авиационного носителя// Тезисы докладов III Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, 17-19 декабря 2015 г. М., МАИ, 2015 г. С. 59.

68. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Исследование поведения трехслойной пластины при ударе о поверхность воды// Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Вятчи, 15-19 февраля 2016 г. М., МАИ, 2016 г. С.123-124.
69. *Крупенин А.М., Мартиросов М.И.* Исследование влияния воздушной подушки на динамические характеристики трехслойной пластины при падении на воду// Тезисы докладов IV Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, 15-19 февраля 2016 г. М., МАИ, 2016 г. С.97-99.
70. *Кубенко В. Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой/ Кубенко В. Д. – Киев: Наукова думка, 1979. – 184 с.
71. *Кузнецов А. В., Маневич А. Ш.* Вертикальное погружение наклоненного тонкого симметричного профиля в сжимаемую жидкость// Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1979, №5, С. 186-189.
72. *Кукуджанов В. Н.* Вычислительная механика сплошных сред/Кукуджанов В. Н. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2008. – 320 с.
73. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами/ Логвинович Г. В. – Киев: Наукова думка, 1969.— 209 с.
74. *Логвинович Г. В.* Современные проблемы гидродинамики// IV Всес. съезд по теор. и прикл. мех. 1976. Аннот. Докл. Киев, 1976.
75. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа/Лойцянский Л. Г. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
76. *Лунц Г. Л.* Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. Изд. 2-е./Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. – СПб.: Издательство "Лань". 2002. – 304с.
77. *Макаров О.* «Микро» для дальнего плавания// М: Популярная механика, 2010, т. 93, № 7, С.76-79.
78. *Маневич А.Ш.* Наклонное проникание тонкого клина в сжимаемую жидкость// В сб.: Гидродинамика больших скоростей. Чебоксары, 1981, С. 77-84.



79. *Марецкий А.* Прыжок без парашюта// М: Популярная механика, 2008, т. 64, №2, С.26-33.
80. *Мартыросов М.И., Шуриалов А.И.* Вертикальный вход в жидкость трехслойного клина// Прикладные методы исследования прочности ЛА: Тем. сб. науч. тр./ МАИ. – М.: Изд-во МАИ, 1992, С. 40-44.
81. *Новичков Ю. Н.* О различных моделях описания деформирования многослойных конструкций// Тр. МЭИ, 1980, № 459, С. 40-47.
82. *Осипов О. А.* Взаимодействие жидкости и воздушного потока при падении пластины на поверхность воды// Труды ЦНИИМФ, 1969, вып. 117, С. 3-14.
83. *Осипов О. А.* Влияние воздушного слоя на нагрузки при ударе корпуса судна о поверхность воды// Труды ЦНИИМФ, 1973, вып. 169, С. 51-69.
84. *Пикуль В.В.* Теория и расчет слоистых конструкций.– М.: Наука, 1985. – 182с.
85. *Повицкий А. С.* Дополнение к работе Вагнера по удару и глиссированию// Труды ЦАГИ, 1935, вып. 199, С. 27-31.
86. *Повицкий А. С.* Посадка гидросамолетов// Труды ЦАГИ, 1939, вып. 423, С. 1-83.
87. *Поручиков В. Б.* Удар диска по поверхности идеальной сжимаемой жидкости// ПММ, 1964, т. 28, №4, С. 797-800.
88. *Поручиков В. Б.* Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости/Поручиков В. Б., Сагомоян А. Я. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1970. — 120 с.
89. Пособие по физико-механическим характеристикам пенопластов и сотопластов – М.: Стройиздат. 1977. – 79с.
90. *Присекин В. Л.* Взаимодействие трехслойной пластины с акустической волной// В сб.: "Расчеты элементов авиационных конструкций". М. "Машиностроение". Вып. 4. 1965. С. 157-167.
91. *Прохоров Б. Ф.* Трехслойные конструкции в соударении/Прохоров Б. Ф., Кобелев В. Н. – Л.: Судостроение, 1972.— 334 с.

92. *Прусаков А. П.* К теории изгиба слоистых пластины// Прикладная механика, 1997, №3, С.64-70.
93. *Сагомонян А. Я.* Волны напряжения в сплошных средах. Учебное пособие/Сагомонян А. Я. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1985. — 416 с.
94. *Сагомонян А. Я.* Проникание/Сагомонян А. Я. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1974. — 299 с.
95. *Сагомонян А. Я.* Удар и проникание тел в жидкость/Сагомонян А. Я. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1986.— 171 с.
96. *Седов Л. И.* Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности жидкости// Труды ЦАГИ, 1934, вып.187, С. 1-27.
97. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Изд. 2-е, испр/Седов Л. И. — М.: Наука, 1966.— 448 с.
98. *Селянин Ю. Н.* Усилия в обвязках пучков из бревен при их ударе о воду// Известия высш. учебн. заведений. Лесн. Ж., 1962, №1, С. 74-83.
99. *Скоренко Т.* Крылатые субмарины// М: Популярная механика, 2009, т. 83, № 9, С.98-102.
100. Справочник по пластическим массам// под редакцией Гарбара М. И. – М.: Химия. 1969. – 520с.
101. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. Изд. 9-е, стереотипное/Степанов В. В. – М.: КомКнига. 2006. 472с.
102. *Уайз Д.* Катера новой волны// М: Популярная механика, 2008, т. 65, № 3, С.140-145.
103. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа: Учебник. Часть 1. 9-е изд., стер./Фихтенгольц Г. М. – Спб.: Издательство «Лань», 2008. — 448 с.
104. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа: Учебник. Часть 2. 9-е изд., стер./Фихтенгольц Г. М. – Спб.: Издательство «Лань», 2008. — 464 с.
105. *Хорошун Л. П.* О построении уравнений слоистых пластин и оболочек// Прикладная механика, 1978, т. 14, № 10, С.3-21.
106. *Чекин Б. С.* О входе клина в несжимаемую идеальную жидкость// Ин-т пробл. Мех. АН СССР. Препр., 1981, № 190, С. 34.

107. *Чижиумов С. Д.* Моделирование входа в жидкость с применением метода граничных элементов// III Международная научная летняя Школа "Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование Кемерово, июнь 2006 г. Кемерово, 2006 г. С. 1-7.
108. *Шахверди Г. Г.* Ударное взаимодействие судовых конструкций с жидкостью/Шахверди Г. Г. – СПб.: Судостроение. 1993. 256с.
109. *Шмидт Д.* Неистовые парусники// М: Популярная механика, 2007, т. 60, № 10, С.136-141.
110. *Aksenov A. , Korenev D., Shyshaeva A. , Vucinic D., Mravak Z.* "Drop-Test" FSI simulation with Abaqus and FlowVision based on the direct 2-way coupling approach. – Abaqus Users' Conference, 2008.
111. *Jonson R. S.* The effect of air compressibility in a first approximation to the ship slamming problem. – J. Ship. Res., 1968, vol. 12, No 1. p. 57-68.
112. *Karman T., Wattendorf F. L.* The impact on seaplane floats during landing.— NACA, Techn. Notes, 1929, No 321.
113. *Pabst W.* Theorie des Landestosses von Seeflugzengen.— Z. fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1930, Jahrg. 21, Heft 9, S. 217-226.
114. *Pabst W.* Uber den Landestoss von Seeflugzengen.— Z. fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1931, Jahrg. 22, Heft 1, S. 13-27.
115. *Verhagen J. H. G.* The impact of a flat plate on a water surface. – J. Ship. Res., 1967, vol. 11, No 4. p. 211-223.
116. *Wagner H.* Uber die Landestoss von Seeflugzengen.— Z. fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1931, Jahrg. 22, Heft 1, S. 1-8.