

## ОТЗЫВ

официального оппонента д.ф.-м.н. Шатиной Альбины Викторовны  
на диссертацию Майорова Андрея Юрьевича «Качественный и асимптотический  
анализ динамики неконсервативных систем с квадратичным трением» на соискание  
ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности  
01.02.01 – «Теоретическая механика»

**Актуальность темы.** Диссертационная работа Майорова А.Ю. посвящена исследованию устойчивости положений равновесия в механических системах с двумя и тремя степенями свободы при наличии неконсервативных позиционных сил, потенциальных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил. Описанные механические системы возникают в модельных задачах, принадлежащих различным областям науки и техники. Это проектирование конструкций в машиностроении, авиации, ракетной техники, робототехника, исследования по движению тел в среде с сопротивлением. Поэтому тема исследования является актуальной.

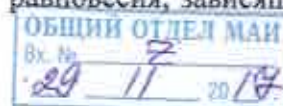
Как известно, при отсутствии сил трения и неконсервативных позиционных сил устойчивость положения равновесия обеспечивается условием минимума потенциальной энергии в положении равновесия. Добавление диссипативных сил с полной диссипацией согласно теореме Томсона-Гэта-Четаева ведет в этом случае к асимптотической устойчивости точки покоя. Появление неконсервативной силы может привести к ситуации, когда положение равновесия устойчиво в линейном приближении в отсутствие сил трения, но эта устойчивость разрушается сколь угодно малыми силами трения. Этот эффект носит название эффекта Циглера. Трудность в изучении устойчивости положения равновесия в описанных механических системах связана большой технической сложностью, возникающей при исследовании неравенств в критерии Рауса-Гурвица. Исследования неконсервативных систем далеки от завершения несмотря на большое количество работ по решению прикладных задач в этой области.

**Содержание и основные результаты работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Она содержит 75 страниц текста, включающего 20 рисунков, одну таблицу и список литературы из 62 наименований.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, ее научная новизна и практическая значимость. Определены цели и задачи исследований. Приводится обзор научной литературы по теме диссертации. Изложено краткое содержание диссертационной работы. Представлены основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** диссертации исследуется устойчивость положения равновесия трехзвенного механизма, состоящего из однородных весомых стержней и находящегося в горизонтальной плоскости. На свободный конец третьего звена действует следящая сила, которая постоянна по модулю и направлена под постоянным углом  $\alpha$  к продольной оси симметрии третьего стержня. Помимо следящей силы на систему действуют силы упругости и трения в шарнирах.

Уравнения движения выписываются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. В качестве обобщенных координат используются углы, которые стержни образуют с неподвижной осью. Показано, что механическая система имеет единственное положение равновесия, зависящее



от 2-х параметров задачи  $u, v (u = \gamma \cos \alpha, v = \gamma \sin \alpha)$  Соответствующие положению равновесия значения углов выписаны в явном виде. Характеристический полином задачи представляет собой многочлен 6-ой степени. Для нахождения характеристического многочлена используется алгоритм Лаврентье и методы компьютерной алгебры.

На первом этапе проводится анализ устойчивости положения равновесия при отсутствии диссипации. Рассмотрен случай, когда угол  $\alpha$  равен нулю. В этом случае параметр  $v$  равен нулю. Показано, что устойчивость системы возможна лишь когда значение второго параметра  $u$  не превышает некоторого значения  $u^*$ . Методом Ньютона с точностью до  $10^{-9}$  получено приближенное значение  $u^*$ . Рассмотрен также случай, когда значение параметра  $v$  равно 0,001. В этом случае наблюдается чередование промежутков устойчивости и неустойчивости для параметра  $u$ .

На втором этапе исследуется влияние малых и произвольных диссипативных сил на устойчивость нулевого решения возмущенной линеаризованной системы уравнений.

Сформулирован и доказан критерий асимптотической устойчивости положения равновесия систем с тремя степенями свободы при наличии линейных диссипативных сил в невырожденном случае когда силы трения малы. Полученные теоретический результат применен к изучаемой трехзвенной механической системе, когда следящая сила действует вдоль стержня, т.е. при  $\alpha = 0$ . Получены значения параметра  $u$ , при которых положение равновесия асимптотически устойчиво, а также значения параметра  $u$ , при которых имеет место эффект Циглера – эффект дестабилизации малыми диссипативными силами.

Описан эмпирический метод анализа устойчивости при наличии произвольных сил трения. Суть метода основана на понятии критического коэффициента трения  $\epsilon_*$ , который находится численным методом при фиксировании всех остальных параметров системы. В качестве примера представлены результаты расчетов для трехзвенной стержневой системы.

**Вторая глава** диссертации посвящена исследованию малых колебаний голономных неконсервативных механических систем, подверженных действию потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил. Отличительной особенностью проведенного в диссертации исследования является учет совместного влияния линейных и квадратичных диссипативных сил, а также применение классических аналитических и приближенно-аналитических методов.

В первой части второй главы исследуются автоколебания указанной механической системы с одной степенью свободы. Обезразмеренное уравнение движения имеет вид уравнения квазилинейных колебаний. Оно содержит малый параметр  $\epsilon$ , характеризующий действие диссипативных сил. С помощью известной замены переменных это уравнение преобразуется к виду системы дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно медленной и быстрой угловой переменных, к которой применяется метод усреднения. Усредненное уравнение относительно медленной переменной имеет два стационарных решения, одно из которых тривиально, а второе отлично от нуля. В случае, когда нетривиальное решение усредненного уравнения асимптотически устойчиво существует орбитально устойчивый предельный цикл, притягивающий все траектории фазовой плоскости, кроме положения равновесия. Эти результаты служат опорной точкой для анализа аналогичной механической системы с двумя степенями свободы.

Далее рассматривается система с двумя степенями свободы. Предполагается, что параметры линейных и квадратичных сил вязкого трения связаны между собой степенным соотношением:  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ . Выполняется цепочка преобразований: разложение матрицы кинетической энергии и позиционных сил по степеням координат, проведение масштабирующей замены для обобщенных координат и скоростей, приведение системы уравнений движения к главным координатам с помощью неособенного линейного преобразования с сохранением членов не выше первого порядка по  $\varepsilon$ , метод нормализации Хори-Кэмила, позволяющий избавиться от членов порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ , преобразование к двухчастотной системе специального вида, к которой применяется метод усреднения. Рассматривается нерезонансный случай. В одном важном случае, когда диссипативные силы действуют независимо вдоль осей главных координат, проведено полное исследование динамики усредненной системы. Показано, что усредненная система для медленных имеет 4 особые точки. Получены достаточные условия, при которых существует инвариантный (предельный при  $t \rightarrow +\infty$ ) тор. Отмечено, что в рассматриваемой механической системе этот случай не может быть реализован, так как линейные диссипативные силы должны быть при этом ускоряющими.

**В третьей главе** диссертации теоретические результаты второй главы применяются к модельной задаче о движении лопасти на упругой втулке несущего или рулевого винта вертолета в плоскости тяги. Для исследования устойчивости положения равновесия при отсутствии сил трения используются методы, изложенные в главе 1. Построена область устойчивости в плоскости параметров задачи  $F, \sigma$  при отсутствии сил трения. Проведено исследование устойчивости при наличии сил трения. Построены области асимптотической устойчивости и зоны дестабилизации (зоны Циглера) при наличии малых сил трения в системе при некоторых значениях коэффициентов трения в плоскости параметров  $F, \sigma$  задачи.

#### **Достоверность результатов и обоснованность выводов работы.**

Достоверность результатов диссертации обоснована использованием методов классической механики, теории устойчивости, применением классических аналитических и приближенно-аналитических методов исследования, использованием математического пакета Maple версии 13.0.

**Научная новизна и практическая значимость работы.** Основные результаты работы являются новыми и оригинальными.

1. Полученные результаты при исследовании трехзвенного механизма выявили эффект, не имеющий аналога в системе с двумя степенями свободы.

2. Результаты исследования эффекта Циглера для трехзвенной стержневой системы при наличии малых сил трения позволяют оценить, как области устойчивости, так и области нарастающих поперечных колебаний в зонах неустойчивости для дискретных моделей ракеты-носителя и заправочного шланга летательного аппарата.

3. Получены достаточные условия существования инвариантного тора в фазовом пространстве систем с двумя степенями свободы, подверженных действию потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил.

4. Проведено исследование устойчивости положения равновесия механической системы, моделирующей движение лопасти винта в плоскости тяги, которое можно использовать при конструировании безопасных режимов движений лопасти вертолета.

Диссертационная работа Майорова А.Е. прошла **апробацию** в ходе ее обсуждения ее результатов научных семинарах и конференциях. Основные результаты работы опубликованы в 7 работах, в том числе в трех журналах из перечня ВАК.

Автореферат полностью отражает содержание и выводы диссертации.

По тексту диссертации можно сделать следующие **замечания**.

1) Имеются множественные описки, ошибки в орфографии, опечатки в тексте диссертации, которые встречаются уже на первых страницах при написании кинетической энергии, системы уравнений Лагранжа, возмущенной системы уравнений. Вот некоторые из них.

На стр. 15 в написании кинетической энергии пропущены точки у обобщенных координат  $\varphi_2, \varphi_3$ .

Во втором уравнении системы уравнений Лагранжа (1.2) на стр. 15 вместо  $\dot{\varphi}_3^2$  должно быть  $\dot{\varphi}_2$ , а вместо  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  в четвертом слагаемом должен быть  $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Аналогично, в системах (1.5), (1.6)  $\dot{\beta}_3^2$  следует заменить на  $\dot{\beta}_2$ .

В третьей строке снизу в системе (1.6) неверно расставлены скобки.

В матрице  $A$  на стр. 18 элемент в третьей строке и в третьем столбце равен  $1/3$ , а не  $1/2$ .

В формулах (1.16) вместо  $f_{2k}, f_{2m}$  должно быть  $f_k, f_m$ .

2) Характеристический многочлен в задаче о движении трехзвенного механизма в первой главе имеет очень громоздкий вид. Например, коэффициент при  $\lambda^2$  занимает 10 строк в тексте диссертации. При этом при написании этого выражения пропущены арифметические знаки при переходе с одной строки на другую. В диссертационной работе также не выписаны вспомогательные матрицы алгоритма Лаврье по причине их громоздкого вида. Было бы разумно в качестве приложения включить в текст диссертации соответствующий программный код.

3) В формулировке теоремы 1.4 говорится о полиноме  $\Delta(\mu)$ . Но что это за полином, становится ясно только после прочтения доказательства этой теоремы.

4) Пункт 1.1.5 называется «Графическое построение областей устойчивости положения равновесия». Словосочетание «область устойчивости» здесь не совсем уместно, так как построенные в этом разделе графики иллюстрируют решение системы неравенств относительно одной переменной – параметра  $u$  при фиксированном значении параметра  $v$ . Для параметра  $v$  рассматривается 2 значения:  $v=0$  и  $v=0.001$ . Следует отметить, что в статье авторов Байкова А.Е., Красильникова П.С.<sup>1</sup>, на результаты которой опирается диссертант, построены области устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров  $u, v$ .

<sup>1</sup>Байков А.Е., Красильников П.С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 74-88.

а также в плоскости параметров  $\alpha, \gamma$  для аналогичного двухзвенного механизма. Переход к трем степеням свободы существенно усложняет задачу построения аналогичных областей.

В пункте 1.2 автор пишет: «Получены ... графические условия устойчивости для значений параметров  $u = \gamma, v = 0.001$ ». Так как  $u = \gamma \cos \alpha, v = \gamma \sin \alpha$ , то такая формулировка некорректна.

Несмотря на указанные замечания диссертация производит хорошее впечатление. Автором проделан большой объем работы с использованием методов аналитической механики, асимптотических методов, численных методов, методов компьютерной алгебры и получен целый ряд новых и значительных результатов. Диссертация Майорова А.Ю. представляет собой законченное исследование, обладающее внутренним единством, выполненное на высоком научном уровне.

Диссертационная работа Майорова Андрея Юрьевича «Качественный и асимптотический анализ динамики неконсервативных систем с квадратичным трением» является научно-квалификационной работой, соответствующей требованиям Министерства образования и науки РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук согласно «Положению о порядке присуждения ученых степеней» ВАК РФ от 24.09.2013 № 842. Ее автор Майоров А.Ю. заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,  
доцент, профессор кафедры Высшей математики  
Московского технологического университета (МИРЭА)

Шатина Альбина Викторовна

Контактные данные:

Место работы: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технологический университет (МИРЭА)»

Адрес места работы: 119454, г. Москва, проспект Вернадского, д.78.

Адрес электронной почты: shatina\_av@mail.ru

Тел. служебный: +7(495) 433-03-55

Тел. сотовый: +7(916)981-00-67

Подпись официального оппонента Шатиной А.В. удостоверяю:

*Т.В. Филатенко* 22.11.2017



Филатенко Л.Г.