

Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 9. С. 407–418  
Thermal processes in engineering, 2025, vol. 17, no. 9, pp. 407–418

Научная статья  
УДК 518.12+533.6.011  
URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186287>  
EDN: <https://www.elibrary.ru/LRSEMD>

## Анализ результатов исследования тепловых потоков на поверхности моделей летательного аппарата при обтекании сверхзвуковым потоком

Н.И. Сидняев<sup>1</sup>✉, Э. Баттулга<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

<sup>1</sup>[sidn\\_ni@mail.ru](mailto:sidn_ni@mail.ru)✉

**Аннотация.** Изложен экспериментальный подход к исследованию распределения тепловых потоков на поверхности летательных аппаратов при обтекании сверхзвуковым потоком газа. Основное внимание уделено изучению статистической обработке результатов измерения тепловых потоков при различных параметрах потока для получения регрессионных моделей. Постулируется, что при турбулентном режиме течения в пограничном слое поверхностный массообмен приводит к снижению тепловых потоков. Представлен аналитический обзор. Показана существенная роль статистического анализа результатов измерений параметров газа по поверхности тела вращения.

**Ключевые слова:** анализ, тепловые потоки, поверхность, модель, обтекание, сверхзвук

**Для цитирования.** Сидняев Н.И., Баттулга Э. Анализ результатов исследования тепловых потоков на поверхности моделей летательного аппарата при обтекании сверхзвуковым потоком // Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 9. С. 407–418. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186287>

Original article

## Analysis of the results of the study of thermal flows on the surfaces of aircraft models during supersonic gas flow

N.I. Sidnyaeve<sup>1</sup>✉, E. Battulga<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

<sup>1</sup>[sidn\\_ni@mail.ru](mailto:sidn_ni@mail.ru)✉

**Abstract.** An experimental approach to the study of the distribution of heat fluxes on the surface of aircraft during supersonic gas flow is presented. The main focus is on the statistical analysis of heat flux measurement results under different flow parameters to obtain regression models. It is postulated that in turbulent flow conditions in the boundary layer, surface mass transfer leads to a decrease in heat fluxes. An analytical review is presented. It is postulated that when designing modern high-speed aircraft, it is

of particular importance to correctly assess and take into account the effect of gas mass transfer different in intensity and distribution over the surface of the body in the wall layer on the distributed and integral aerodynamic characteristics of aircraft. The process of sublimation of heat-protective material is described. It is noted that under turbulent flow conditions in the boundary layer, surface mass exchange leads to a decrease in heat flows to the wall due to changes in the velocity and temperature profiles in the boundary layer. The values of the turbulent transfer coefficients depend on the results of measurements of such flow parameters as gradients of average speed and temperature values. Ratios expressing turbulent viscosity coefficient and turbulent Prandtl number are obtained. In the calculations, the interleaving coefficient is used, which takes into account the fact that when approaching the outer boundary of the boundary layer, turbulence becomes intermittent, i.e. the flow is turbulent only part of the entire time. The boundary between the inner and outer regions of the boundary layer is determined from the condition of continuity of the turbulent viscosity coefficient; at a distance from the wall to this boundary, the formula for the turbulent viscosity coefficient for the inner region is applied until equality is fulfilled. Various ratios for the turbulent Prandtl number have been proposed. The dependence of the surface friction coefficient on various factors (flow rate, pipe thickness, etc.) has been established. The adequacy of the constructed regression model was checked. It is noted that the pressure gradient cannot significantly affect the calculated results for the rough surface. It is interpreted that the calculation method allows obtaining sufficiently accurate results for a flow with a pressure gradient on a smooth surface. Roughness causes a change in the boundary condition on the wall, but does not affect the appearance of the calculation formulas used in the outer part of the layer.

**Keywords:** analysis, heat flux, surface, model, flow, supersonic

**For citation.** Sidnyaev N.I., Battulga E. Analysis of the results of the study of thermal flows on the surfaces of aircraft models during supersonic gas flow. *Thermal processes in engineering*. 2025, vol. 17, no. 9, pp. 407–418. (In Russ.). URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186287>

## 1. Введение

При проектировании современных высокоскоростных летательных аппаратов особое значение имеет правильная оценка и учет воздействия различного по интенсивности и распределению по поверхности тела массообмена газа в пристеночный слой на распределенные и интегральные аэродинамические характеристики летательных аппаратов. Проведенный анализ опубликованных экспериментальных и теоретических работ [1–4] показывает, что в настоящее время отсутствуют систематические данные по исследованию влияния различных определяющих параметров (чисел  $M_\infty$  и  $Re_\infty$ , угла атаки и т.д.) на сверхзвуковое обтекание летательных аппаратов сложной геометрической формы. Повышенный интерес к проблеме входа в атмосферу аппаратов затупленной формы с высокими скоростями требует разрешения некоторых основных вопросов, касающихся перехода пограничного слоя при сверхзвуковых числах Маха [5]. Особый интерес вызывает процесс сублимации теплозащит-

ного материала, так как большинство материалов разрушается именно таким образом. Влияние подвода массы в пограничный слой, имитирует сублимацию тепловой защиты летательного аппарата.

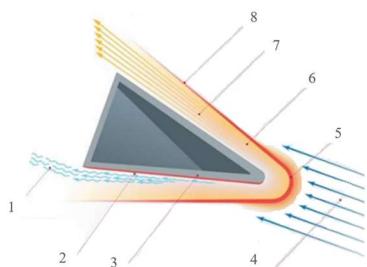
Экспериментальному изучению влияния поверхностного массообмена на трение и теплопередачу на поверхности летательных аппаратов, обтекаемых сверхзвуковым потоком, посвящено значительное количество работ [1, 2, 3]. Установлено, что при турбулентном режиме течения в пограничном слое поверхностный массообмен приводит к снижению тепловых потоков к стенке вследствие изменения профилей скорости и температуры в пограничном слое. В случае ламинарного пограничного слоя поперечный вдув газа, оказывая дестабилизирующее влияние на пограничный слой, может вызвать более ранний его переход и соответствующее увеличение теплопередачи [2, 3]. Еще более сложным образом проявляется влияние массообмена на теплопередачу при значительной шероховатости поверхности [2].

По мере увеличения интенсивности распределенного массоподвода газа пограничный слой оттесняется от поверхности, вблизи нее формируется слой продуктов разложения и тепловые потоки снижаются вплоть до нулевых значений [5]. Однако, даже при интенсивных значениях параметра массообмена, когда пограничный слой оттесняется от поверхности и трение на ней становится нулевым, отмечены конечные, хотя и небольшие значения коэффициента теплопередачи, что объясняется сохранением теплообмена за счет излучения высокоянтальпийного ударного слоя и теплопроводности подводимого газа [2, 3].

При этом для летательных аппаратов сложной геометрической формы с изломами образующей боковой поверхности вследствие существенно различных условий обтекания отдельных участков тел, а также применения на этих участках разных по физико-химическим свойствам материалов теплозащитных покрытий, одновременно могут реализоваться различные режимы массообменных эффектов.

## 2. Описание модели и условия эксперимента

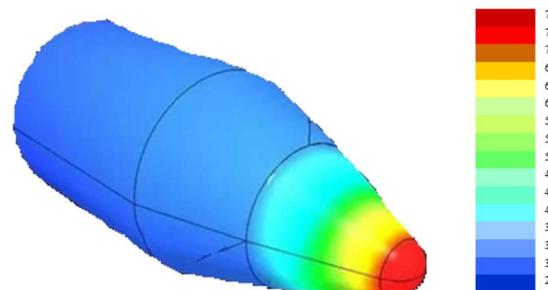
Для экспериментального изучения влияния поверхностного массообмена на обтекание ЛА использовался принудительный неравномерно распределенный, вдув газа через проницаемую оболочку аэродинамической модели (рис. 1). Интенсивность поверхностного массообмена (вдува газа) выражена безразмерным параметром вдува  $(\bar{\rho}v)_{\text{вд}} = (\rho v)_{\text{вд}} / (\rho u)_{\infty}$ , где  $v$  и  $u$  соответственно скорости вдуваемого газа и набегающего потока,  $\rho$  – соответствующая плотность (индексы « $\infty$ » и « $\text{вд}$ », соответствуют параметрам набегающего потока и вдуваемого газа).



**Рис. 1.** Схема подвода газа через проницаемую оболочку аэrodинамической модели: 1 – унос (вдув) теплозащитного покрытия, 2 – обгорание теплозащитного покрытия, 3 – теплозащитное покрытие, 4 – набегающий поток, 5 – отсоединененная головная ударная волна, 6 – область ударного слоя, 7 – высокотемпературный поток, 8 – поверхность конуса

Комбинированная модель для исследования влияния, распределенного вдува газа в пограничный слой представляет собой затупленный по сфере конус с длиной 0,07 м с полууглом раскрытия боковой поверхности  $\beta_1 = 14^\circ$ , относительным затуплением носовой части  $\bar{R}_0 = R_0 / R_m = 0,2$  и радиусом миделевого сечения  $R_m = 0,04$  м (рис. 1). Значение удельных массовых расходов вдуваемого газа определяются по формуле  $\rho_{\text{вд}} v_{\text{вд}} = Q / F_{np}$ , где  $Q$  – суммарный массовый расход вдуваемого газа,  $F_{np}$  – характерная площадь (площадь проницаемой поверхности модели). Исследования распределения тепловых потоков проводились в сверхзвуковой аэродинамической трубе ( $M_\infty = 6$ ; угол атаки  $\alpha = 0 - 12^\circ$ ; температура торможения  $T_0 = 493^\circ K$ ; давление в форкамере  $P_0 = 39 \times 10^5$  Па; числа Рейнольдса  $Re_\infty = 3,8 \times 10^7$  1/м при  $q_0 = 45$  ккал/м<sup>2</sup> сек и  $Re_\infty = 1,04 \times 10^7$  1/м при  $q_0 = 23$  ккал/м<sup>2</sup> сек, где  $q_0$  – тепловой поток в критической точке модели).

Поверхностный массообмен в зависимости от его интенсивности, вызывает различные изменения спектров их обтекания, и как следствие, распределение давлений, тепловых потоков на поверхности ЛА (рис. 2).



**Рис. 2.** Распределение интенсивности тепловых потоков (массообмена) по поверхности тела вращения с изломами образующей

Исследования позволили выявить существенные особенности физической картины течения, а именно, с увеличением  $(\rho v)_{\text{вд}}$  происходит оттеснение пограничного слоя от поверхности тела 1 и вблизи нее формируется область вдуваемого газа 2, отделенного от внешнего потока

разделяющей линией тока 3 (рис. 1). При несимметричном ( $\alpha \neq 0^\circ$ ) обтекание наблюдается более раннее (т.е. при меньших значениях параметра вдува) оттеснение пограничного слоя от поверхности тела и формирование слоя вдуваемого газа на его подветренной стороне (рис. 3). При этом по мере увеличения  $(\rho v)_{\infty}$  более существенно изменяется контур «эффективного» тела на подветренной стороне.

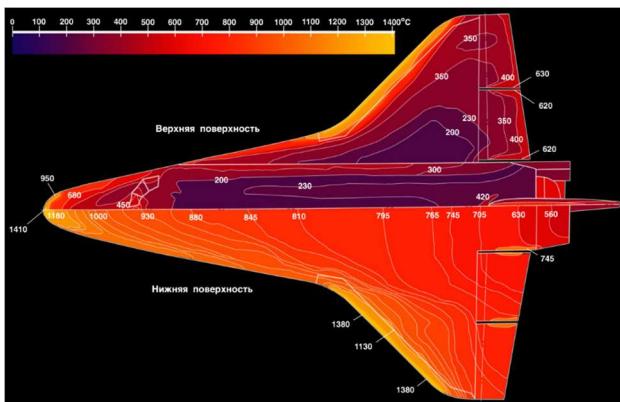


Рис. 3. Схемы обтекания

Следует отметить, что при обтекании гладкой стенки и числах  $Re_\infty = 1,04-3,89 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$  на ней развивается ламинарный пограничный слой. При обтекании проницаемой поверхности, вследствие повышенной ее шероховатости ( $40 \text{ мкм} < R_z < 60 \text{ мкм}$ ) наблюдается турбулентный пограничный слой.

### 3. Методика измерений и обработка

Измерение удельных тепловых потоков в данной работе проводилось методом регулярного режима. Уравнение теплового баланса, связывающее количество тепла, поступившее через поверхность проницаемой оболочки  $F_{np}$ , с изменением его энталпии имеет вид:

$$a(T_w - T)F_{np} = \rho c V \frac{dT}{d\tau}.$$

Здесь  $V$  – объем проницаемой оболочки;  $\rho$  – плотность;  $a$  – коэффициент теплоотдачи,  $T$  – температура произвольной точки тела,  $T_w$  – температура потока на поверхности модели. Считая теплофизические характеристики системы постоянными и вводя переменную  $\theta = T_w - T$ , по-

лучим  $\theta = \theta_0 e^{-m\tau}$  постоянная  $m = aF_{np}/\rho cV$  является темпом охлаждения. Здесь  $\theta_0$  – начальное значение при времени  $\tau = 0$ . При воздействии на датчик удельного теплового потока  $\dot{q}$  время наступления режима регулярного нагрева  $\tau_p$  определяется по следующей формуле

$$\tau_p \approx \frac{l_k^2 c_k \rho_k}{6 \lambda_k},$$

здесь  $l_k$  – линейный размер калориметрической массы,  $\rho_k$ ,  $c_k$ ,  $\lambda_k$  – его плотность, удельные теплоемкость и теплопроводность.

При наступлении режима регулярного нагрева темп роста температуры калориметрической массы, если тепловые потери малы, практически прямо пропорционален тепловому потоку  $\dot{q}$  [1]:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{F_k}{\rho_k V_k c_k} \dot{q}.$$

Здесь  $F_k$  – поверхность калориметрического датчика.

Для оценки числа Био необходимо знать значение коэффициента теплоотдачи. Так, например, удельный тепловой поток по поверхности модели определяется зависимостью

$$\dot{q}_w = -0,76(\Pr)^{-0,6} \left( \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_\delta \mu_\delta} \right)^{0,1} \times \\ \times \sqrt{\beta_i \rho_\delta \mu_\delta} [H_\delta - c_p T_w].$$

Здесь индексы  $w$  и  $\delta$  относятся к параметрам на стенке и на внешней границе пограничного слоя соответственно

$$\beta_i = \frac{a_0}{R_0} \sqrt{\frac{2}{k} \left( 1 - \frac{P_1}{P'_0} \right)},$$

$a_0$  – скорость звука в условиях торможения,  $H$  – энталпия,  $R_0$  – радиус затупления в критической точке,  $k$  – отношение удельных теплоемкостей,  $P_1$ ,  $P'_0$  – статическое давление и давление за прямым скачком.

Значения коэффициента динамической вязкости  $\mu$ , удельной теплоемкости воздуха при

постоянном давлении  $C_p$  известны. Для условий эксперимента  $M_\infty = 6$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $T_w = 293^\circ\text{K}$ ,  $T_0 = 493^\circ\text{K}$  формула Шея–Риддеса [1] дает значения  $\dot{q}_w = 27 \text{ ккал}/\text{м}^2 \text{ сек.}$

Удельный тепловой поток к точке полного торможения сферического носка вычислялся по формуле

$$\begin{aligned}\dot{q}_o &= -0,763(\text{Pr})^{-0.6} \sqrt{\rho_\delta \mu_\delta \tilde{\lambda}} c_p [T_\delta - T_w], \\ \tilde{\lambda} &= \frac{u_\infty}{2R_0} \times \\ &\times \left[ \frac{8((k-1)M_\infty^2 + 2)}{(k+1)M_\infty^2} \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \frac{(k-1)M_\infty^2 + 2}{2kM_\infty^2(k-1)} \right]^{-(k-1)^{-1}} \right]^{0.5},\end{aligned}$$

где  $u_\infty$  – скорость набегающего потока,  $k$  – отношение удельных теплоемкостей.

### 3.1. Температурные исследования при обтекании модели турбулентным потоком с учетом шероховатости

Основное различие между анализами турбулентного течения и ламинарного течения состоит в том, что для ламинарного течения коэффициенты переноса количества движения и тепла являются известными характеристиками, а для турбулентного течения эффективные коэффициенты переноса неизвестны. Величины коэффициентов турбулентного переноса зависят от результатов измерений таких параметров течения, как градиенты средних значений скорости и температуры, а также соответствующих турбулентных плотностей потока количества движения (напряжения Рейнольдса) и тепла, и обычно выражаются с помощью моделей, основанных на эмпирических данных.

Большинство течений, встречающихся в инженерной практике и в окружающей среде, являются турбулентными; те из них, в которых изменения плотности достаточно малы, можно считать несопряженными. Следует отметить, что современные модели турбулентности для задач, в которых требуется найти решение сопряженных уравнений, основаны, как правило, на экспериментальных данных, полученных при малых изменениях температуры и плотности, и на решениях несопряженных уравнений.

Поскольку результаты расчетов характеристик турбулентного переноса тепла (и количества движения) зависят от экспериментальных данных, точность этих результатов, не выше точности эмпирических данных [5–8]. В общем точность результатов измерения характеристик теплообмена ниже точности результатов измерения поля скоростей. Даже современные экспериментальные исследования теплообмена между низкоскоростным пограничным слоем с нулевым градиентом давления и твердой стенкой, наиболее надежные из всех, имеют разброс результатов со стандартным отклонением порядка 10 % [9–14]. В противоположность этому скорость переноса количества движения в пограничном слое с постоянным давлением (конечно коэффициент поверхностного трения  $c_f$  при заданном числе Рейнольдса) определяется с точностью 2 % [15–17] или даже лучшей. Значения теплового потока при турбулентном течении получены на основании данных одновременного измерения пульсаций скорости и температуры и неизбежно имеют большую погрешность [10], чем значения потока количества движения, которые определяются только пульсациями скорости. Даже среднюю температуру значительно сложнее измерить, чем среднюю скорость, которая довольно просто и надежно определяется с помощью трубки полного напора. Все эти трудности приводят к тому, что погрешность эмпирических данных, необходимых для расчета теплообмена, редко бывает ниже 10 % [17]. Более того, поскольку теплообмен при обтекании тел существенным образом зависит от поля средних скоростей, точность результатов расчета турбулентного теплообмена для данного течения никогда не может быть выше (и наверняка существенно ниже) точности результатов расчета характеристик турбулентного переноса количества движения для того же самого течения.

В настоящее время существует несколько соотношений, выражающих коэффициент турбулентной вязкости и турбулентное число Прандтля, которые можно применить для расчета  $\varepsilon_m^+$  и  $Pr_t$ . Воспользуемся формулами Себиси и Смита [18]. Точность этих формул проверена для широкого класса течений, исследованных экспериментально, и установлено, что они позволяют

получить достаточно точные расчетные данные для большинства инженерных задач [19–21]. В соответствии с подходом Себиси и Смита турбулентный пограничный слой считается состоящим из внутренней и внешней областей, коэффициент турбулентной вязкости в которых описывается различными соотношениями [20]. Эти соотношения являются эмпирическими и получены на основании ограниченного количества экспериментальных данных [1]. Во внутренней части слоя на гладкой поверхности модели при наличии или отсутствии массообмена коэффициент турбулентной вязкости можно определить по формуле

$$(\varepsilon_m)_i = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \gamma_{tr} \gamma, \quad 0 \leq y \leq y_c. \quad (1)$$

Входящая в эту формулу длина пути перемешивания  $l$  выражается соотношением

$$l = ky \left[ 1 - \exp \left( -\frac{y}{A} \right) \right], \quad (2)$$

где  $k = 0,40$ , а  $A$  – постоянная длина демпфирования, которую можно определить следующим образом:

$$A = 26 \frac{\nu}{N} u_\tau^{-1},$$

$$N = \left\{ \frac{p^+}{v_w^+} \left[ 1 - \exp(11.8v_w^+) \right] + \exp(11.8v_w^+) \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

$$p^+ = \frac{\nu u_e}{u_\tau^3} \frac{du_e}{dx}, \quad v_w^+ = \frac{v_w}{u_\tau}. \quad (4)$$

Для течения при отсутствии массообмена ( $v_w^+ = 0$ )

$$N = (1 - 11.8 p^+)^{1/2}. \quad (5)$$

Входящий в формулу (1) коэффициент перемежаемости  $\gamma_{tr}$  необходим для описания характеристик пограничного слоя в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. Он определяется эмпирическим соотношением

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[ -G(x - x_{tr}) \int_{x_{tr}}^x \frac{dx}{u_e} \right]. \quad (6)$$

Здесь  $x_{tr}$  – координата начала области перехода, а коэффициент  $G$ , имеющий размерность скорость/(длина) и вычисляемый в области перехода, определяется выражением

$$G = 8,33 \times 10^{-4} \frac{u_e^3}{\nu^2} R_x^{-1,34}. \quad (7)$$

Это выражение применимо для несопряженных течений и сопряженных течений с числами Маха меньше 5 при отсутствии теплообмена. Оно становится несправедливым для сопряженных течений с теплообменом, поскольку значительные перепады между температурами стеки и внешнего потока оказывают существенное влияние на длину зоны перехода. Согласно корреляционной зависимости Чена и Тайсона [3] длина области перехода  $R_{\Delta x} (\equiv R_{x_t} - R_{x_{tr}})$  для несопряженных течений определяется формулой

$$R_{\Delta x} = 60 R_{x_{tr}}^{2/3}, \quad (8)$$

из которой следует, что область перехода пограничного слоя имеет относительно большую протяженность при сравнительно низких числах Рейнольдса и становится менее существенной при высоких числах Рейнольдса.

В формулу (1) входит еще один коэффициент перемежаемости  $\gamma$ , который учитывает тот факт, что при приближении к внешней границе пограничного слоя турбулентность становится перемежающейся, т.е. течение бывает турбулентным лишь часть всего времени  $\gamma$ . Коэффициент  $\gamma$  определяется эмпирическим соотношением

$$\gamma = \left[ 1 + 5,5 \left( \frac{y}{y_0} \right)^6 \right]^{-1}, \quad (9)$$

где  $y_0$  – координата  $y$  точки, в которой  $u/u_e = 0,995$ .

Во внешней части слоя коэффициент турбулентной вязкости выражается формулой

$$(\varepsilon_m)_0 = \alpha \left| \int_0^\infty (u_e - u) dy \right| \gamma_{tr} \gamma, \quad (10)$$

$$y_c \leq y \leq \delta.$$

В обычных пограничных слоях с  $u < u_e$  эта формула сводится к простому соотношению  $(\varepsilon_m)_0 = \alpha u_e \delta^* \gamma_{tr} \gamma$ . Постоянная  $\alpha$  равна 0,0168 при  $R_\theta \geq 5000$ . При более низких значениях  $R_\theta$  величина  $\alpha$  зависит от  $R_\theta$  в соответствии с эмпирической формулой, предложенной в работе [20]:

$$\alpha = 0,0168 \frac{1,55}{1 + \Pi}, \quad (11)$$

причем эмпирическая корреляционная зависимость  $\Pi$  от  $R_\theta$  имеет вид

$$\Pi = 0,55[1 - \exp(-0,243z_1^{1/2} - 0,298z_1)], \quad (12)$$

где  $z_1 = R_\theta / 425 - 1$  при  $R_\theta > 425$ .

Граница между внутренней и внешней областями пограничного слоя определяется из условия непрерывности коэффициента турбулентной вязкости; на расстоянии от стенки до этой границы применяется формула для коэффициента турбулентной вязкости для внутренней области до тех пор, пока не будет выполняться равенство  $(\varepsilon_m)_i = (\varepsilon_m)_0$ .

Предложены различные соотношения для турбулентного числа Прандтля. Иногда величина  $\Pr$  выражается в зависимости от расстояния  $y$  до стенки и молекулярного числа Прандтля, иногда она просто считается постоянной. Для воздуха, имеющего молекулярное число Прандтля, близкое к единице, учет влияния  $\Pr$  не вносит существенных изменений и, во всяком случае,  $\Pr$  оказывает влияние на  $\Pr_t$  лишь при  $u_\tau y / \nu \Pr < 50$ . Согласно результатам исследования Себиси и Смита [19–21], при использовании формулы для турбулентного числа Прандтля типа соотношения

$$\Pr_t = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h} = \frac{k}{k_h} \frac{1 - \exp(-y/A)}{1 - \exp(-y/B)}$$

для вязкого и теплопроводного подслоев в случае воздуха получаются примерно такие же результаты, что и при использовании постоянного значения турбулентного числа Прандтля (рис. 4). С другой стороны, положение изменяется, если молекулярное число Прандтля существенно отличается от единицы.

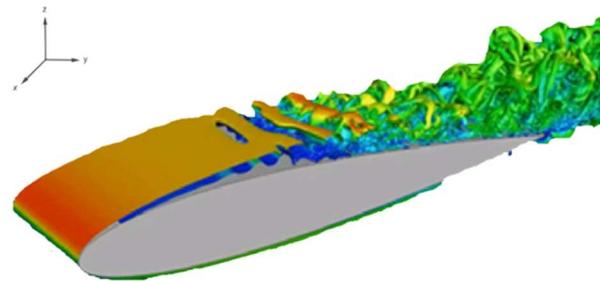


Рис. 4. Картина формирования турбулентного слоя

При использовании переменного турбулентного числа Прандтля в подслое получается значительно более точное соответствие результатов расчета экспериментальным данным, чем при использовании постоянной величины турбулентного числа Прандтля (рис. 5).

#### 4. Обсуждения результатов

Модель турбулентной вязкости Себиси–Смита, описываемую соотношениями (1)–(9), можно обобщить на случай турбулентного пограничного слоя на шероховатой стенке. Обобщение основано на результатах, полученных ранее Роттом [20], который показал, что профили скорости на гладкой и шероховатой поверхностях могут быть подобными (рис. 6), если сместить начало координат  $y$ .

Представим соотношение (2) для  $l$  следующим образом:

$$l = k(y + \Delta y) \left[ 1 - \exp \left\{ -(y + \Delta y)/A \right\} \right]$$

и выразим  $\Delta y$  в зависимости от параметра эквивалентной песочной шероховатости  $k_s^+ (\equiv k_s u_\tau / \nu)$ , а именно

$$\frac{\Delta y u_\tau}{\nu} = \Delta y^+ = \begin{cases} 0,9 \left[ \sqrt{k_s^+} - k_s^+ \exp \left( -\frac{k_s^+}{6} \right) \right], & 5 \leq k_s^+ \leq 70, \\ 0,7 (k_s^+)^{0.58}, & 70 \leq k_s^+ \leq 2000 \end{cases}$$

для гладкой поверхности; при меньших значениях  $k_s^+$  полагаем  $\Delta y = 0$ , чтобы получить результаты для гладкой стенки.

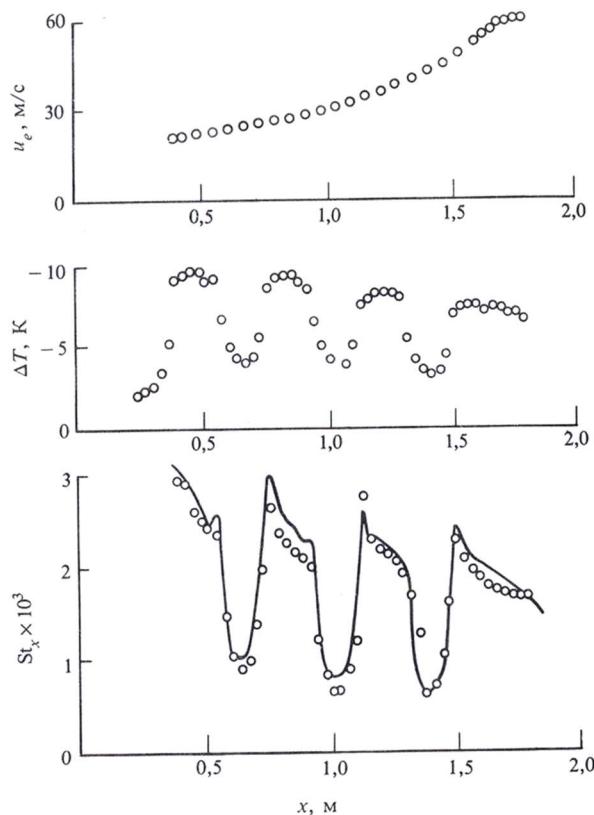


Рис. 5. Сравнение результатов расчета числа Стантона для течения в пограничном слое с экспериментальными данными Моретти и Кейса

На рисунке 6 результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными [18], которые измерили характеристики течения с нулевым градиентом давления на шероховатой поверхности, причем шероховатость создавалась плотно расположенными сферами одинакового диаметра 1,27 мм.

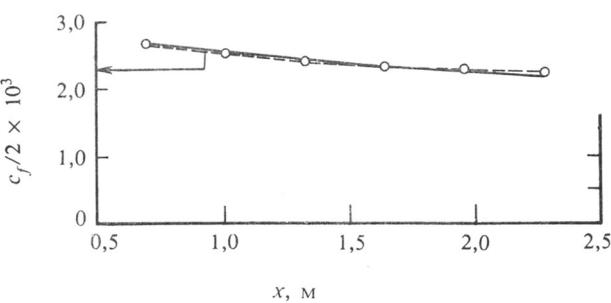


Рис. 6. Изменение поверхностного трения вдоль шероховатой поверхности (шероховатость создается плотно расположенными сферами диаметром 1,27 мм)

Штриховыми линиями на рисунке показаны результаты расчета по эмпирическим соотношениям, предложенным в работе [20]:

$$\frac{c_f}{2} = 0,00328 \left( \frac{\theta}{r} \right)^{-0,175},$$

$$St_x = 0,00317 \left( \frac{\theta_t}{r} \right)^{-0,175}.$$

Теперь требуется установить зависимость коэффициента поверхностного трения  $c_f / 2$  от различных факторов (скорость потока, толщина трубы и др.). Проверить адекватность построенной модели и исследовать, является ли данный процесс воспроизводимым.

Предполагаем, что на коэффициент поверхностного трения  $c_f / 2$  для течения в пограничном слое вдоль шероховатой поверхности влияют следующие четыре фактора:  $X_1 = u_e$  – скорость течения потока,  $X_2 = \Delta T$  – температура,  $X_3 = St_x \times 10^3$  – число Стантона,  $X_4 = \delta$  – толщина модели,  $X_5 = Re_x \times 10^{-6}$  – число Рейнольдса. Для получения необходимой зависимости целесообразно использовать план эксперимента с варьированием факторов на двух уровнях (см. табл. 1).

Таблица 1. Параметры факторов

Интервал варьирования и уровень факторов	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
Основной уровень	40	-6	1,7	1	1,5
Нижний уровень (-1)	30	-4	0,6	0,9	0,5
Верхний уровень (+1)	50	-8	2,8	1,1	2,5
Интервал варьирования	10	2	1,1	0,1	1

Нормированные  $X_i$  связаны с натуральными следующими соотношениями:

$$X_1 = \frac{X_1 - 40}{10}; X_2 = \frac{X_2 + 6}{2}; X_3 = \frac{X_3 - 1,7}{1,1};$$

$$X_4 = \frac{X_4 - 1}{0,1}; X_5 = \frac{X_5 - 1,5}{1}.$$

Для сокращения объема наблюдений эксперимент проводился с использованием дробного факторного плана (ДФЭ)  $2^{5-2}$  с заменой  $X_4 = X_1 X_2$ ,  $X_5 = X_1 X_2 X_3$  (см. табл. 2). При реализации ДФЭ были использованы данные.

**Таблица 2. Таблица плана ДФЭ  $2^{5-2}$ .**

№	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2$	$X_1X_2X_3$	$X_1X_3$	$X_2X_3$
1	+	-	-	-	+	-	+	+
2	+	+	-	-	-	+	-	+
3	+	-	+	-	-	+	+	-
4	+	+	+	-	+	-	-	-
5	+	-	-	+	+	+	-	-
6	+	+	-	+	-	-	+	-
7	+	-	+	+	-	-	-	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+
$\sum_{u=1}^N X_{iu} \bar{Y}_u$	19,29	0,25	0,29	0,21	0,05	0,88	-0,07	-0,26
$B_i$	2,41	0,03	0,04	0,03	$5,63 \cdot 10^{-3}$	0,11	$-8,13 \cdot 10^{-3}$	-0,03

При моделировании были использованы средние значения коэффициента поверхностного трения (экспериментальные данные для двух параллельных опытов). Коэффициенты регрессии:

$$B_0 = \frac{\sum_{u=1}^N X_{0u} \times \bar{Y}_u}{N} = 2,412;$$

$$B_1 = \frac{\sum_{u=1}^N X_{1u} \times \bar{Y}_u}{N} = 0,031; B_2 = 0,037;$$

$$B_3 = 0,026; B_4 = B_{12} = 5,625 \times 10^{-3};$$

$$B_5 = -0,109; B_{13} = -8,125 \times 10^{-3};$$

$$B_{23} = -0,032.$$

Значимость коэффициентов регрессии проверялось при помощи критерия Стьюдента.

Квантиль  $t_{kp} = 2,365$  (табличное значение) при  $f = N(n-1) = 8(2-1) = 8$  и  $\beta = 0,05$ :

$$t_i = \frac{|B_i|}{s\{B_i\}};$$

$$s^2\{B_i\} = \frac{s_y^2}{Nn},$$

где  $s_y$  – дисперсия воспроизводимости

$$s_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^N s_u^2}{N}.$$

Определим значение оценок дисперсии для каждой точки плана:

$$s_u^2 = \frac{\sum_{p=1}^m (y_{up} - \bar{y}_u)^2}{m-1},$$

$m = 2$  – число параллельных опытов.

$$s_1^2 = \frac{(y_{11} - \bar{y}_1)^2 + (y_{12} - \bar{y}_1)^2}{1} = \\ = \frac{(2,2 - 2,175)^2 + (2,15 - 2,175)^2}{1} = 1,25 \times 10^{-3}.$$

Таким же образом определяются:  $s_2^2 = 2 \times 10^{-4}$ ;  $s_3^2 = 8 \times 10^{-4}$ ;  $s_4^2 = 2 \times 10^{-4}$ ;  $s_5^2 = 1,25 \times 10^{-3}$ ;  $s_6^2 = 2 \times 10^{-4}$ ;  $s_7^2 = 5 \times 10^{-5}$ ;  $s_8^2 = 8 \times 10^{-4}$ .

Тогда дисперсия воспроизводимости:  $s^2\{B_i\} = 3,711 \times 10^{-5}$ ;

$$t_0 = \frac{2,412}{\sqrt{3,711 \times 10^{-5}}} = 6,499 \times 10^4;$$

$$t_1 = \frac{0,031}{\sqrt{3,711 \times 10^{-5}}} = 835,298;$$

$$t_2 = \frac{0,037}{\sqrt{3,711 \times 10^{-5}}} = 996,969;$$

$$t_3 = \frac{0,026}{\sqrt{3,711 \times 10^{-5}}} = 700,573;$$

$$t_{12} = \frac{5,625 \times 10^{-3}}{\sqrt{3,711 \times 10^{-5}}} = 151,566;$$

$$t_{13} = \frac{8,125 \times 10^{-3}}{\sqrt{3,711 \times 10^{-5}}} = 218,929;$$

$$t_{23} = \frac{0,032}{\sqrt{3,711 \times 10^{-5}}} = 862,243;$$

$$t_{123} = \frac{0,109}{\sqrt{3,711 \times 10^{-5}}} = 2,937 \times 10^3.$$

Т.к. все  $t_i > t_{kp}, i = 0,1,2\dots$ , то делаем вывод, что все коэффициенты регрессии значимы. Та-

ким образом, математическое описание функции отклика заданной области:

$$Y = 2,412 + 0,031x_1 + 0,037x_2 + 0,026x_3 + \\ + 5,625 \times 10^{-3}x_4 - 8,125 \times 10^{-3}x_1x_3 - \\ - 0,032x_2x_3 - 0,109x_1x_2x_3$$

Результаты расчетов представлены в таблице 3. Возвращаясь к сделанным ранее заменам (10), получим:

$$Y = \frac{c_f}{2} 10^3 = 47,399 + 11,3x_1 - 14,855x_2 + \\ + 28,658x_3 + 5,625 \times 10^{-4}x_4 + 6,51x_1x_3 - \\ - 9,662x_2x_3 - 3,705x_1x_2 - 2,398x_1x_2x_3$$

Дисперсия адекватности определяется из выражения

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{N - d},$$

где  $d = 7$  соответствует числу членов аппроксимирующего многочлена;  $S_{ad}^2 = \sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 = 0,291 \times 10^{-2}$ .

Таблица 3. Результаты расчетов с использованием ДФЭ  $2^{5-2}$

№	$\bar{Y}$	$\hat{Y}$	$ \bar{Y} - \hat{Y} $
1	2,175	2,242	0,067
2	2,46	2,598	0,138
3	2,52	2,559	0,039
4	2,39	2,351	0,039
5	2,525	2,253	0,272
6	2,34	2,609	0,269
7	2,305	2,571	0,266
8	2,58	2,362	0,218

Чтобы проверить адекватность модели с условиями экспериментов, воспользуемся критерием Фишера при 5 %-ном уровне значимости. Адекватность имеет место, если выполняется неравенство:

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2} \leq F(0,05; f_{adek}; f_u);$$

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2} = \frac{0,291 \times 10^{-2}}{5,938 \times 10^{-4}} = 4,901;$$

$$F(0,05; f_{adek}; f_u) = \\ = F(0,05; 1; 8) = 5,3 \text{ (табл. значения)} \\ f_u = 8 \text{ (число степеней свободы воспроиз-} \\ \text{водимости)}$$

Т.к.  $F < F(0,05; f_{adek}; f_u)$ , то делаем заключение, что модель адекватна.

Выясним, воспроизводим ли данный процесс. Для этого найдем значение критерия Кохрена:

$$G = \frac{S_{n(\text{наиб})}^2}{\sum_{u=1}^n S_u^2},$$

где  $S_{n(\text{наиб})}^2$  – наибольшая из дисперсий в строчках плана  $S_{n(\text{наиб})}^2 = 1,25 \times 10^{-3}$ ,  $G = 0,63$ .

Сравним найденное значение с табличным:  $G(0,05; f_n; f_u) = G(0,05; 8; 1) = 0,68$ , где  $f_n$  – число независимых оценок дисперсий,  $f_u$  – число степеней свободы каждой оценки,  $f_u = m - 1 = 2 - 1 = 1$ . Т.к.  $G < G(0,05; f_n; f_u)$ , заключаем, что рассматриваемый процесс является воспроизводимым.

Таким образом, коэффициент при веденном нами факторе, означающем вклад числа Рейнольдса в уравнение регрессии, достаточно велик, что позволяет предполагать значимость этого фактора. Необходимо отметить, что градиент давления не может существенно повлиять на расчетные результаты для шероховатой поверхности при условии, что метод расчета позволяет получить достаточно точные результаты для течения с градиентом давления на гладкой поверхности. Действительно, шероховатость вызывает изменение граничного условия на стенке, но не влияет на вид расчетных формул, применяющихся во внешней части слоя (см. рис. 4).

## 5. Выводы

Изложен статистический подход к экспериментальному исследованию распределения тепловых потоков на поверхности проницаемых тел при обтекании потоком газа. Основное внимание уделено изучению статистической обработке результатов измерения тепловых потоков при различных параметрах потока. Показана существенная роль статистического анализа резуль-

татов экспериментальных измерений параметров газа по поверхности тела для случая моделирования массообменных эффектов.

Адекватность представленных формул проверена для широкого класса течений, исследованных экспериментально, и установлено, что они позволяют получить достаточно точные расчетные данные для большинства инженерных задач. В соответствии с подходом Себиси и Смита турбулентный пограничный слой считается состоящим из внутренней и внешней областей, коэффициент турбулентной вязкости в которых описывается различными соотношениями. Эти соотношения являются эмпирическими и получены на основании ограниченного количества экспериментальных данных.

### Список источников

- Сидняев Н.И. Обзор методик исследования обтекания гиперзвуковым потоком газа тел с разрушающим покрытием // Теплофизика и аэромеханика. 2004. Т. 11. № 4. С. 501–522.
- Зинченко В.И., Гольдин В.Д. Способы снижения максимальных температур поверхности тел из комбинированных материалов при их гиперзвуковом обтекании // Инженерно-физический журнал. Т. 97. № 4. С. 1012.
- Полежаев Ю.В., Юрьевич Ф.Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
- Сидняев Н.И. Обтекание гиперзвуковых летательных аппаратов в условиях поверхностного разрушения. М.: Физматлит, 2017. 302 с.
- Сидняев Н.И. Исследование влияния тепломассопереноса сферического наконечника на сверхзвуковое обтекание комбинированного тела вращения // Известия вузов. Авиационная техника. 2006. № 2. С. 32–36.
- Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учебное пособие. М.: Юрайт, 2011. 399 с.
- Выгодчикова И.Ю. Алгоритм оценки параметров линейной множественной модели регрессии по минимаксному критерию. М.: Синергия, 2019. 216 с.
- Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ / Пер. с англ. М.: Вильямс, 2007. 912 с.
- Мальцев П.М. Основы научных исследований. Киев: Вища школа, 1982. 192 с.
- Мещеряков В.В. Задачи по статистике и регрессионному анализу с MATLAB. М.: Диалог-Мифи, 2019. 448 с.
- Алабин М.А., Ройтман А.Б. Корреляционно-регрессионный анализ статистических данных в двигателестроении. М.: Машиностроение, 2019. 124 с.
- Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. 479 с.
- Горлач Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. СПб.: Лань, 2013. 320 с.
- Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 816 с.
- Сидняев Н.И., Садыхов Г.С., Савченко В.П. Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 382 с.
- Сидняев Н.И. Статистический анализ и теория планирования эксперимента: учебное пособие. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. 195 с.
- Mendenhall W., Sincich T. A Second Course in Statistics. Regression Analysis. PrenticeHall, 2011. 812 p.
- Cebeci T., Smith A.M.O. Analysis of Turbulent Boundary Layers. New York: Academic, 1974. 404 p.
- Chen K.K., Thyson N.A. Extension of Emmons' spot theory to flows on blunt bodies // AIAA Journal. 1971. Vol. 9. № 5. 821 p.
- Barbin A.R., Jones J.B., Turbulent flow in the inlet region of a smooth pipe // Journal of Basic Engineering. 1963. Vol. 85. № 1. 29–33 p.
- Rotta J.C. Turbulent boundary layers in incompressible flow // Progress in Aerospace Sciences. 1962. Vol 2. № 1. 95 p.
- Pimenta M.M., Moffat R.J., Kays W.M. The turbulent boundary layer: An experimental study of the transport of momentum and heat with the effect of roughness. Rept. No. HMT-21, Stanford University, Dept. of Mech. Eng. CA, 1975. 319 p.

### References

- Sidnyaev NI. Review of methods for studying hypersonic gas flow around bodies with a destructive coating. *Teplofizika i aeromehanika*. 2004;11(4):501–522. (In Russ).
- Zinchenko VI, Gol'din VD. Methods for reducing the maximum surface temperatures of bodies made of combined materials during their hypersonic flow. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal*. 97(4):1012. (In Russ).
- Polezhaev YuV, Yurevich FB. *Thermal protection*. Moscow: Energiya; 1976. 392 p. (In Russ).
- Sidnyaev NI. *Flow around hypersonic aircraft in conditions of surface fracture*. Moscow: Fizmatlit; 2017. 302 p. (In Russ).
- Sidnyaev NI. Investigation of the effect of heat and mass transfer of a spherical tip on supersonic flow around a combined body of rotation. *Izvestiya Vuzov. Aviatsionnaya Tekhnika*. 2006;(2):32–36. (In Russ).
- Sidnyaev NI. *Theory of experimental planning and statistical data analysis: a textbook*. Moscow: Yurajt; 2011. 399 p. (In Russ).
- Vygodchikova IYu. *An algorithm for estimating the parameters of a linear multiple regression model using a minimax criterion*. Moscow: Sinergiya; 2019. 216 p. (In Russ).

8. Drejper N, Smit G. *Applied regression analysis*. 2nd ed. Moscow: Vil'yams; 2007. 912 p. (In Russ).
9. Mal'cev PM. *Fundamentals of scientific research*. Kiev: Vishcha shkola; 1982. 192 p. (In Russ).
10. Meshcheryakov VV. *Tasks on statistics and regression analysis with MATLAB*. Moscow: Dialog-Mifi; 2019. 448 p. (In Russ).
11. Alabin MA, Rojtman AB. *Correlation and regression analysis of statistical data in the engine industry*. Moscow: Mashinostroenie; 2019. 124 p. (In Russ).
12. Gmurman VE. *Probability Theory and Mathematical statistics*. Moscow: Yurajt; 2013. 479 p. (In Russ).
13. Gorlach BA. *Probability Theory and Mathematical statistics*. Saint-Petersburg: Lan'; 2013. 320 p. (In Russ).
14. Kobzar' AI. *Applied mathematical statistics. For engineers and researchers*. Moscow: FIZMATLIT; 2012. 816 p. (In Russ).
15. Sidnyaev NI., Sadyhov G.S., Savchenko V.P. *Models and methods for estimating the residual life of radio electronics products*. Moscow: MGTU im. N.E. Baumana; 2015. 382 p. (In Russ).
16. Sidnyaev NI. *Statistical analysis and theory of experimental planning*. Moscow: MGTU im. N. E. Baumana; 2017. 195 p. (In Russ).
17. Mendenhall W, Sincich T. *A Second Course in Statistics. Regression Analysis*. PrenticeHall; 2011. 812 p.
18. Cebeci T, Smith AMO. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. New York: Academic; 1974. 404 p.
19. Chen KK, Thyson NA. Extension of Emmons' spot theory to flows on blunt bodies. *AIAA Journal*. 1971;9(5):821.
20. Barbin AR, Jones JB. Turbulent flow in the inlet region of a smooth pipe. *J. Basic Eng.* 1963;85(1):29–33.
21. Rotta JC. Turbulent boundary layers in incompressible flow. *Progress in Aerospace Sciences*. 1962;2(1):95.
22. Pimenta MM, Moffat RJ, Kays WM. The turbulent boundary layer: An experimental study of the transport of momentum and heat with the effect of roughness. Rept. No. HMT-21, Stanford University. Dept. of Mech. Eng. CA. 1975. 319 p.