УДК 629.7.015.4

Анализ конструктивно-технологических решений складных рулей с учетом требований аэроупругой устойчивости.

Неделин В.Г.

Аннотация: В статье представлена общая постановка и схема решения задачи анализа конструктивно-технологических решений складных рулей. Алгоритм решения основывается на зависимостях, представленных в работе [1], при этом он содержит ряд изменений, вызванных конструктивными особенностями рассматриваемого объекта.

Ключевые слова: эталонное теоретическое решение; математическая модель; анизотропная пластина; конструктивные особенности; собственные колебания; аэроупругость; флаттер; дивергенция.

Данная задача является составной частью более общей задачи структурно-параметрической оптимизации (СПО) несущей поверхности (НП), в процессе решения которой предполагается отыскание наилучшего конструктивно-технологического решения (КТР) путем его идентификации с эталонным теоретическим решением (ЭТР) с последующей параметрической оптимизацией. В работе [1] приведена схема решения задачи СПО для традиционной (нескладной) НП, которая предполагает использование модели анизотропной пластины для определения оптимальных законов распределения массовых и жесткостных характеристик с учетом ограничений прочности и аэроупругой устойчивости.

Очевидно, что складная НП обладает рядом конструктивных особенностей, которые должны быть учтены при формировании математической модели. Так для складной НП характерно наличие элементов стопорения и пружинного или торсионного механизма. Фиксация НП в рабочем положении осуществляется одним или несколькими стержнями (стопорами) по схеме на рис.1.

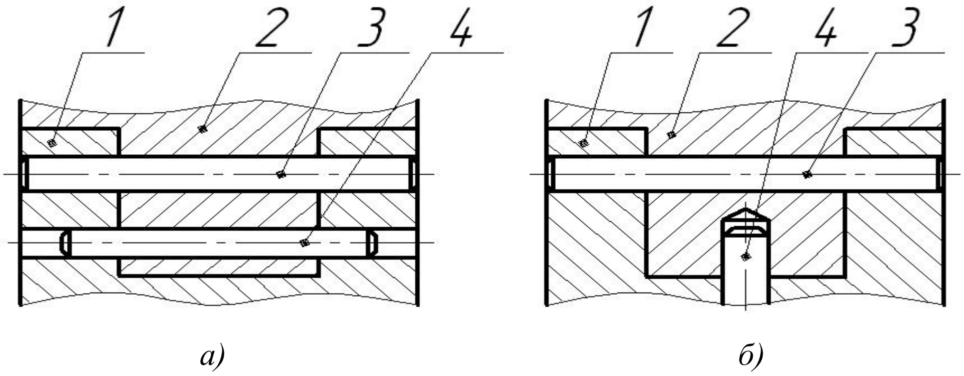

Рис.1 Варианты соединения вилки и лопатки руля

(1 – вилка; 2 – лопатка; 3 – ось лопатки; 4 – стопор)

Из-за различного расположения осей стопора 4 варианты а) и б) будут отличаться изгибной и крутильной жесткостями. Влияние типа механизма раскладки на свойства НП, находящейся в раскрытом положении, когда положение лопатки относительно вилки обеспечивается только за счет стопора, сводится к различиям в массе. Кроме того, из-за конструктивных особенностей, представленных на рис. 2, могут возникать дополнительные степени свободы лопатки относительно вилки.

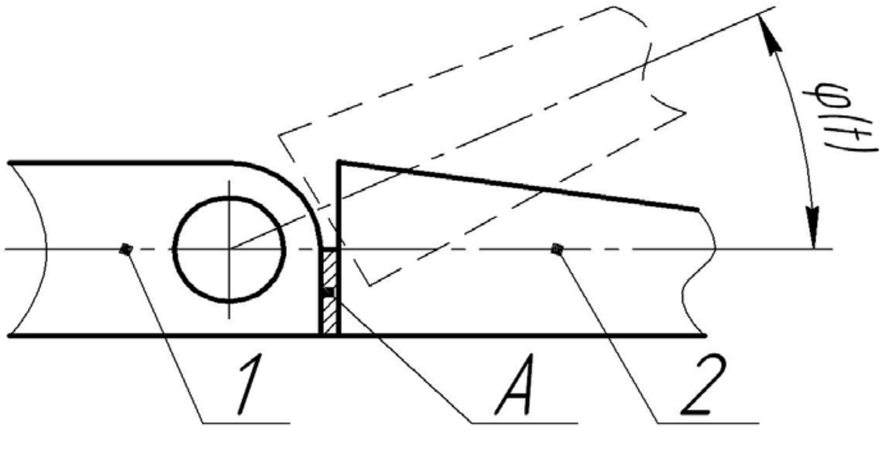

Рис.2 Дополнительные степени свободы лопатки НП

(1 – вилка; 2 – лопатка)

Лопатка 1 опирается на вилку 2 в зоне А, в идеальном случае (при отсутствии деформаций стопора, вилки, лопатки; зазоров) подобная конструкция обеспечит неподвижность лопатки относительно вилки, предполагается, что в реальной конструкции данное утверждение не выполняется, а, следовательно, при составлении математической модели необходимо учесть уменьшение жесткости НП в месте соединения. Предполагается, что жесткость соединения лопатки и вилки будет сопоставима с жесткостью крепления НП к корпусу летательного аппарата (ЛА). В случае подтверждения данного предположения отличия характеристик аэроупругих колебаний складной НП от нескладной окажутся значительными.

На основании изложенного можно предложить два подхода к формированию математической модели НП: первый заключается в замене одной пластины парой пластин, соединение которых моделируется двумя пружинами (аналогично узлу крепления НП на рис.3); второй – в уменьшении жесткости единственной пластины в точках, лежащих на линии соединения лопатки с вилкой. С точки зрения простоты математической модели более предпочтительным является второй способ. Однако следует учесть, что значения жесткостей пружин K_φ и K_θ узла крепления НП определяются на основании эксперимента или назначаются исходя из сведений о прототипе, следовательно, определение подобных величин для соединения лопатки и вилки может оказаться затруднительным из-за недостатка данных на начальном этапе проектирования.

В обоих случаях (как в случае монолитной, так и в случае складной НП) предполагается использование метода конечных разностей, в соответствии с которым НП аппроксимируется сеточной областью с N узлами и для каждого узла соответствующие уравнения расписываются в конечных разностях, далее решается полученная система уравнений.

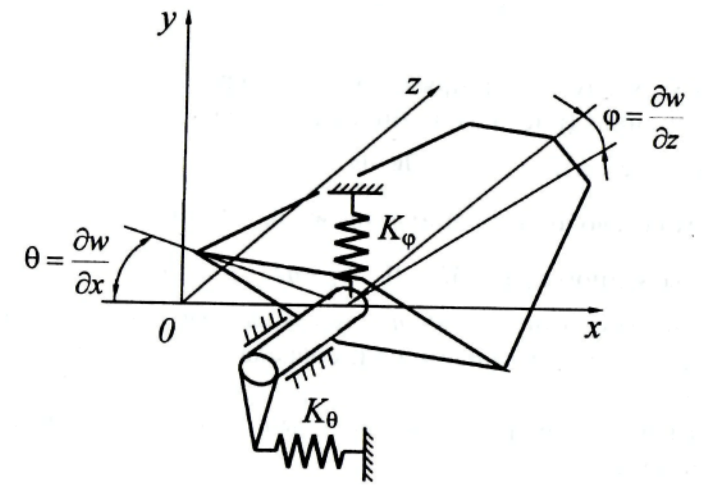

Рис.3 Моделирование узла крепления НП

Определение напряженно-деформированного состояния.

Уравнения равновесия для элемента анизотропной пластины, представленного на рис. 4 будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} = -p \qquad (1)$$

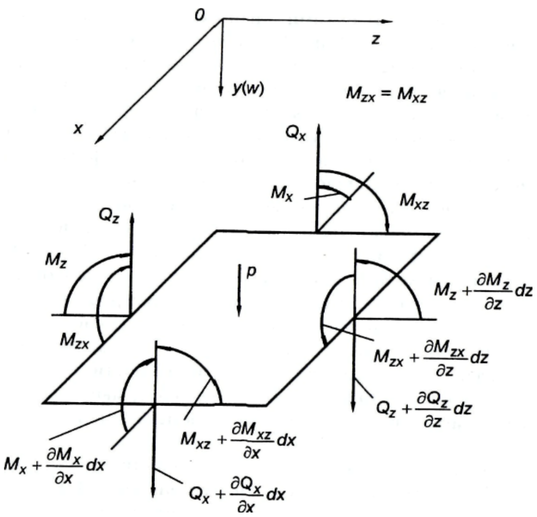

Рис.4 Силовые факторы, действующие на элемент анизотропной пластины

Моменты M_x, M_z, M_{xz} связаны с прогибом $w(x,z)$ срединной поверхности анизотропной пластины следующими соотношениями:

$$M_x = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)$$
$$M_z = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \qquad (2)$$
$$M_{xz} = -\left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)$$

где D_{ij} – изгибные жесткости анизотропной пластины *(i, j=1,2,6)*.

Граничные условия пластины при различных вариантах крепления следующие:

1. Край пластины ($x = 0$) защемлен. Прогиб и угол поворота в точках края равняются нулю:

$$(w)_{x=0} = 0$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \qquad (3)$$

2. Край пластины *(x=a)* свободно оперт. Прогиб и изгибающий момент равны нулю:

$$(w)_{x=a} = 0$$
$$(M_x)_{x=a} = 0 \qquad (4)$$

3. Край пластины *(x=b)* свободен. По этому краю нет ни изгибающих или крутящих моментов, ни вертикальных перерезывающих сил:

$$(M_x)_{x=b} = 0$$
$$(M_{xz})_{x=b} = 0 \qquad (5)$$
$$(Q_x)_{x=b} = 0$$

Для узла поворота руля (рис.3) граничные условия имеют вид:

$$K_\theta \frac{\partial w}{\partial x} = GJ_p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$
$$K_\varphi \frac{\partial w}{\partial z} = EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \qquad (6)$$

В общем случае для прямолинейной кромки, непараллельной осям координат (рис.5), граничные условия имеют вид:

1. При защемлении $w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$

2. При свободном опирании $w = 0 \quad M_n = 0$

3. На свободном крае $M_n = 0 \quad Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0$

В данных соотношениях *n* – нормаль к рассматриваемой части контура; *t* – касательная к ней, совпадающая по направлению с передней кромкой.

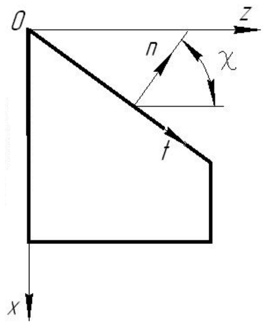

Рис.5 Система координат для стреловидной передней кромки

В этом случае моменты определяются следующими выражениями:

$$M_n = M_x \sin^2\chi + M_z \cos^2\chi - 2M_{xz} \sin\chi \cos\chi$$
$$M_t = M_x \cos^2\chi + M_z \sin^2\chi + 2M_{xz} \sin\chi \cos\chi$$
$$M_{nt} = (M_z - M_x)\sin\chi \cos\chi + M_{xz}(\cos^2\chi - \sin^2\chi)$$

С учетом деформации конструкции для крыла и руля результирующее аэродинамическое давление определяется следующими соотношениями:

$$p = c_y^\alpha q(\alpha_{ж} + \varphi_y)$$
$$p = c_y^\alpha q\alpha_{ж} \pm c_y^\delta q(\delta_{ж} + \varphi_y) \qquad (7)$$

где $c_{y\alpha}$ – производная коэффициента подъемной силы несущей поверхности по углу атаки $\alpha_{ж}$; q – скоростной напор; $\alpha_{ж}$ – угол атаки жесткой несущей поверхности (корпуса ЛА); φ_y – дополнительный угол атаки, обусловленный упругостью конструкции, $\varphi=\partial w/\partial x$; $c_{y\delta}$ – производная коэффициента подъемной силы руля по углу отклонения $\delta_{ж}$; $\delta_{ж}$ – угол отклонения жесткого руля.

Напряжения и деформации в точках конструкции связаны следующими соотношениями:

$$\sigma_x = -\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) y$$

$$\sigma_z = -\left(B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) y \qquad (8)$$

$$\tau_{xz} = -\left(B_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) y$$

Выражения для коэффициентов жетсксти B_{ij} *(i, j=1,2,6)* имеют вид:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \quad B_{12} = \frac{E}{1-\mu^2}\mu \quad B_{16} = B_{26} = 0 \quad B_{66} = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (9)$$

где E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Для получения расчетной модели напряженно-деформированного состояния конструкции НП будем использовать метод конечных разностей (МКР). В соответствии с идеей МКР:

- несущая поверхность аппроксимируется сеточной областью с N узлами, при этом для складной НП разбиение должно быть таким, чтобы линия соединения лопатки и вилки проходила через узлы сеточной области (рис.6);
- для каждого узла сеточной области расписывается в конечных разностях через прогибы уравнение равновесия *(1)* или соответствующее граничное условие *(3) — (6)*, решается система алгебраических уравнений относительно прогибов в узлах сеточной области;
- определяются напряжения в узлах сетки по соотношениям *(8)*, записанным в конечно-разностной форме.

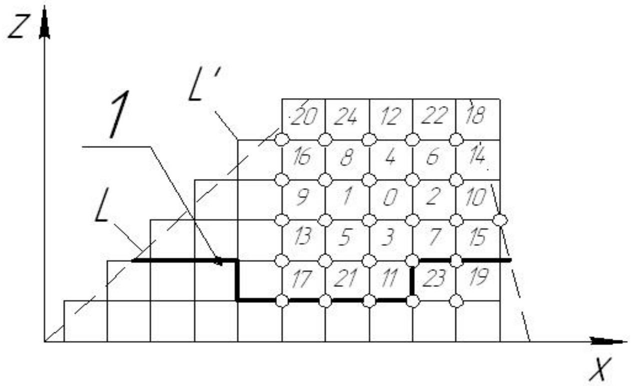

Рис.6 Сеточная область, аппроксимирующая несущую поверхность

(1 – линия соединения лопатки и вилки НП)

Известно, что производные некоторой функции $F(x,z)$, дифференцируемой в области L (рис. 6), аппроксимируемой областью L' с прямоугольной сеткой с шагом Δx, Δz , можно выразить через значения самой функции в узловых точках сеточной области. Так, основные производные с точностью порядка Δx^2, Δz^2 в точке 0 (рис. 6) имеют следующий вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2\Delta x}\left(F_2 - F_1\right)$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = \frac{1}{2\Delta z}\left(F_4 - F_3\right)$$
$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta x^2}\left(F_1 - 2F_0 + F_2\right)$$
$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta z^2}\left(F_3 - 2F_0 + F_4\right) \qquad (10)$$
$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)_0 = \frac{1}{4\Delta x \Delta z}\left(F_5 + F_6 - F_7 - F_8\right)$$

Следует отметить, что передача усилий от лопатки к вилке НП в месте соединения осуществляется не на всей длине хорды (рис. 7). В дальнейшем при составлении системы уравнений для незаштрихованных узлов на рис. 7 применяются ГУ свободного края пластины, заштрихованные узлы рассматриваются как центральные.

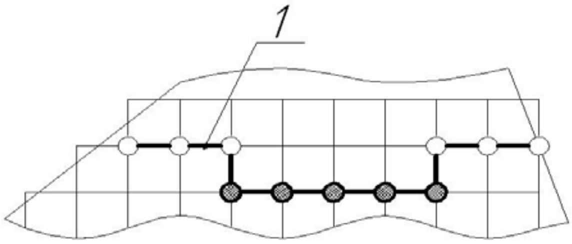

Рис.7 Определение граничных условий в соединении лопатки и вилки НП

(1 – линия соединения лопатки и вилки НП)

Расписывая уравнение равновесия *(1)* с учетом граничных условий *(3)-(6)* и группируя коэффициенты при неизвестных, получим систему линейных алгебраических уравнений порядка N(N-число узлов сеточной области, в которых записаны уравнения равновесия):

$$\begin{aligned} &c_{11}w_1 + c_{12}w_2 + \ldots + c_{1N}w_N = P_1 \\ &c_{21}w_1 + c_{22}w_2 + \ldots + c_{2N}w_N = P_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_{N1}w_1 + c_{N2}w_2 + \ldots + c_{NN}w_N = P_N \end{aligned} \qquad (11)$$

В матричном виде:

$$CW = P \qquad (12)$$

где C – матрица жесткости конструкции; W – вектор прогибов; P – вектор нагрузки.

Определив прогибы конструкции, находим напряжения σ_x, σ_z, τ_{xz}, действующие в узлах сеточной области, по формулам *(8),* записанным в конечно-разностной форме. По соотношениям *(8)* можно определить напряжения, действующие в любой точке конструкции НП. Однако для нахождения напряжений в точках на свободном контуре требуется предварительное знание прогибов в близлежащих законтурных точках. Прогибы в этих точках можно получить с помощью экстраполяции кубическим сплайном [2].

После чего определяются эквивалентные напряжения. Для обеспечения статической прочности конструкции НП необходимо, чтобы эквивалентные напряжения $\sigma_{эквk}$ в узлах сеточной области не превышали допускаемое с точки зрения прочности напряжение.

$$\sigma_{эквk} \le \sigma_{доп}, k = 1,2,..., N_k \qquad (13)$$

Определение частот и форм собственных колебаний.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний анизотропной пластины переменной толщины, схематизирующей конструкцию НП, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} - m(x,z)\frac{\partial^2 w(x,z,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (14)$$

где *m(x,z)* – функция распределения масс пластины; *w(x,z,t)* – динамический прогиб пластины; M_x, M_z, M_{xz} – моменты, связанные с прогибом *w(x,z,t)* соотношениями *(2)*; *t* – время.

Приведенное выше уравнение свободных колебаний можно получить из уравнения равновесия *(1)* подстановкой динамического прогиба *(15)* и инерционной нагрузки *(16).*

$$w(x,z,t) = \overline{w}(x,z)e^{j\omega t} \qquad (15)$$

$$p_{ин} = -m(x,z)\frac{\partial^2 w(x,z,t)}{\partial t^2} \qquad (16)$$

где ω, $\overline{w}(x,z)$ – частота и форма собственных колебаний.

С учетом соотношения *(15)* выражение для нагрузки *(16)* можно преобразовать к виду:

$$p_{ин} = \omega^2 m(x,z)\overline{w}(x,z)e^{j\omega t} \qquad (17)$$

Используя метод конечных разностей и сосредоточив распределенную массу пластины в узлах сеточной области (рис. 6), дифференциальное уравнение свободных колебаний *(14)* можно представить в виде системы конечно-разностных алгебраических уравнений порядка *N*:

$$
\begin{array}{l}
\left(c_{11}-\omega_1^2 m_1\right)\overline{w}_1+c_{12}\overline{w}_2+\ldots+c_{1N}\overline{w}_N=0\\
c_{21}\overline{w}_1+\left(c_{22}-\omega_2^2 m_2\right)\overline{w}_2+\ldots+c_{2N}\overline{w}_N=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{N1}\overline{w}_1+c_{N2}\overline{w}_2+\ldots+\left(c_{NN}-\omega_N^2 m_N\right)\overline{w}_N=0
\end{array}
\qquad (18)
$$

В матричной форме система уравнений *(18)* принимает следующий вид:

$$\left(C-\omega^2 M\right)\overline{W}=0 \qquad (19)$$

где C – матрица жесткости; ω – вектор, компоненты которого – частоты собственных колебаний; M – матрица масс, сосредоточенных в узлах сеточной области; W – матрица, столбцы которой – формы собственных колебаний w_n представляющие собой прогибы w_{nk} в каждом узле сеточной области ($n=1,2,\ldots,N;\ k=1,2,\ldots,N_k$).

Уравнение *(19)* преобразуем к виду:

$$(D-\lambda E)\overline{W}=0 \qquad (20)$$

Решение системы уравнений *(20)* заключается в определении собственных значений λ_n и соответствующих векторов w_n, $n=1,2,\ldots,N$. Эта система уравнений имеет нетривиальное решение лишь в том случае, если определитель системы равен нулю:

$$\det(D-\lambda E)=0 \qquad (21)$$

Собственные значения динамической матрицы определяются из системы уравнений *(21)* методом парабол [2]. Данный метод является эффективным при решении проблемы собственных значений и векторов систем высокого порядка. Кроме того, метод парабол, как правило, гарантирует нахождение собственных значений, начиная с наименьших величин, а, следовательно, позволяет определять частоты ω_n и формы w_n собственных колебаний именно низших (основных) тонов.

Исследование аэроупругой устойчивости

Для исследования статической и динамической аэроупругой устойчивости конструкции НП воспользуемся динамическим методом (методом малых колебаний), согласно которому рассматривают малыее колебания системы вокруг положения равновесия. Уравнения малых колебаний получим из уравнения равновесия *(1)*, записанного в конечных разностях через прогибы, подстановкой динамического прогиба и заменой статической нагрузки на динамическую и инерционную.

$$w(x,z,t)=\overline{w}(x,z)e^{St} \qquad (22)$$

$$p_{дин} = -c_y^\alpha q\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$p_{ин} = -m(x,z)\frac{\partial^2 w(x,z,t)}{\partial t^2} \qquad (23)$$

$$p = p_{дин} + p_{ин}$$

w(x,z) – форма колебаний конструкции в аэродинамическом потоке; $S=\delta+i\omega$ – комплексная частота колебаний; *t* – время; *V* – скорость аэродинамического потока; *m(x,z*) – функция распределения масс пластины (значения которой подсчитываются в каждом узле сеточной области); $\partial w/\partial t$ — поперечная скорость колебаний.

Подставив выражение *(22)* в *(23)*, получим:

$$p = -\left[c_y^\alpha q\left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \frac{1}{V}S\overline{w}\right) + m(x,z)S^2\overline{w}\right]e^{St} \qquad (24)$$

Приведенная формула *(24)* справедлива для неподвижной несущей поверхности (крыла или стабилизатора); для руля следует вместо коэффициента C_y^α использовать коэффициент C_y^δ. Производная $\partial w/\partial x$ – в каждом узле сеточной области находится через значения и в соседних узлах по разностной формуле *(10)*.

Подставляя в уравнение *(1)* для прогиба *w* выражение *(22)* и для нагрузки *p* выражение *(24)*, записанное в конечных разностях, собираем все члены уравнения в левой части и сокращаем их на множитель e^{St}. Проделав эти операции для каждого из узлов сеточной области, получим систему алгебраических уравнений порядка *N*, которая имеет вид:

$$\begin{aligned}
&(c_{11}+\lambda_1)\overline{w}_1 + c_{12}\overline{w}_2 + \ldots + c_{1N}\overline{w}_N = 0\\
&c_{21}\overline{w}_1 + (c_{22}+\lambda_2)\overline{w}_2 + \ldots + c_{21N}\overline{w}_N = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{N1}\overline{w}_1 + c_{N2}\overline{w}_2 + \ldots + (c_{NN}+\lambda_N)\overline{w}_N = 0
\end{aligned} \qquad (25)$$

или в матричной форме

$$[C + \lambda(S)E]\overline{W} = 0 \qquad (26)$$

где c_{ij} – коэффициенты матрицы жесткости *C* (*i,j=1,2,...,N*); элементы вектора λ(S) определяются следующим выражением (27); $\overline{W}$ – матрица, столбцы которой – формы собственных колебаний w_n; *E* – единичная матрица.

$$\lambda_n = m_n S_n^2 + c_y^\alpha q\frac{1}{V}S_n \qquad (27)$$

Система уравнений *(26)* имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю:

$$\det(C + \lambda E) = 0 \qquad (28)$$

Комплексные частоты S_n определяются из системы *(28)* методом парабол.

Исследование аэроупругой устойчивости конструкции НП заключается в анализе поведения комплексных частот S_n в зависимости от скорости V. Относительное равновесие НП в потоке устойчиво, пока все коэффициенты затухания δ_n отрицательны:

$$\delta_n < 0, n = 1,2,..., N \qquad (29)$$

Наименьшее значение скорости V, начиная с которого хотя бы один коэффициент затухания $\delta_l (l \in N)$ меняет знак, является критическим. Смена знака у коэффициента затухания δ_l означает потерю устойчивости конструкцией. Характер неустойчивости при этом может быть как статическим ($\omega_l = 0$ – дивергенция, рис. 8,а), так и динамическим ($\omega_l \neq 0$ – флаттер, рис. 8,б). Следует отметить, что на практике ограничиваются исследованием нескольких низших тонов колебаний. Конструкция НП должна обладать 1,2-кратным запасом по критической скорости флаттера $V_{кр.\ фл}$ (дивергенции $V_{кр.\ див}$).

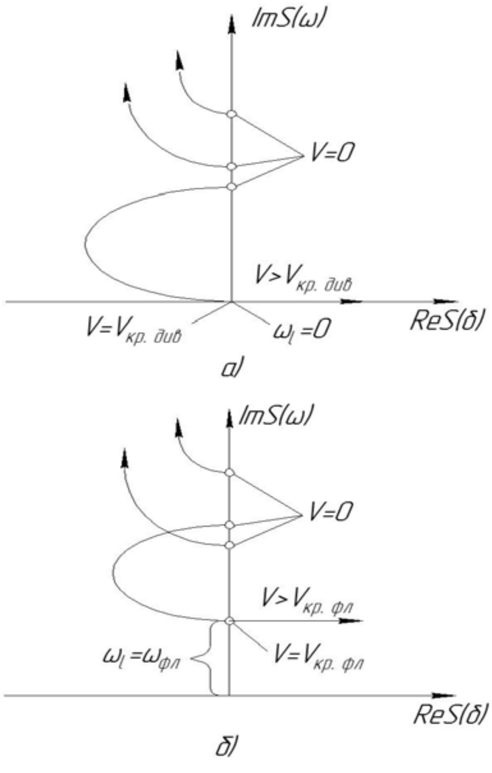

Рис.8 Характер связи между параметрами комплексной частоты и скоростью (а – статическое поведение конструкции; б – динамическое поведении конструкции)

Представленная выше математическая модель позволяет определить характеристики ЭТР НП. Далее следует осуществить переход от эталона к КТР, для чего используют оптимизационную процедуру идентификации. В данной процедуре есть только геометрические ограничения на варьируемые параметры КТР, поэтому она обладает высоким быстродействием. В рамках оптимизационной процедуры идентификации КТР и

ЭТР реализуется интерактивный поиск рациональной структуры НП с учетом трудноформализуемых требований технологического и эксплуатационного характера.

Следует отметить, что при получении ЭТР НП рассматривается один вариант механизма раскладки и способа фиксации лопатки, следовательно, он будет применен во всех рассматриваемых КТР. В случае, когда необходимо определить характеристики КТР НП с различными механизмами и способами фиксации, задачу структурно-параметрической оптимизации следует решать для каждого из вариантов, т.е. получить рациональные КТР для каждого ЭТР, а затем произвести их сравнение.

С целью проверки корректности удовлетворения КТР, полученных в результате решения задачи идентификации, функциональным ограничениям проводят параметрическую оптимизацию данных КТР.

Заключительным этапом решения задачи структурно-параметрической оптимизации является выбор рационального КТР НП. Этот выбор делают на основе оценки конструктивного и технологического совершенства КТР, полученных в результате решения оптимизационной задачи идентификации, с применением экспертного метода – метода анализа иерархий.

На основе представленных моделей, сформированных с учетом ограничений прочности, аэроупругой устойчивости и конструктивных особенностей складной несущей поверхности, строится алгоритм, которой позволит определить оптимальный закон распределения массово-инерционных и жесткостных характеристик НП с точки зрения минимума массы.

Библиографический список

1. Парафесь С.Г. Методы структурно-параметрической оптимизации конструкции беспилотных летательных аппаратов. – М.: МАИ-Принт, 2009. – 316 с.

2. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

НЕДЕЛИН Владислав Геннадьевич, инженер-конструктор
ОАО «Долгопрудненское научно-производственное предприятие»; аспирант
Московского авиационного института (национального исследовательского университета),
тел.: +7 (926) 901-04-26; e-mail: nedelinv@rambler.ru