

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
**«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ**  
(национальный исследовательский университет)»  
**(МАИ)**

На правах рукописи



**Макаренкова Надежда Алексеевна**  
**СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ**  
**СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА БЕСКАРКАСНОЙ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ**  
**КОНСТРУКЦИИ БЕЗ РАСХОДА РАБОЧЕГО ТЕЛА**

Специальность 05.07.09

Динамика, баллистика, управление движением  
летательных аппаратов (технические науки)

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
**Степаньянц Георгий Аркадьевич**

Москва – 2018 год

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

Список основных обозначений.....	3
Введение.....	5
Постановка задачи исследования.....	14
Принятые допущения.....	15
1. Оценка формы поверхности плёнки при эволюции солнечного паруса.....	16
1.1. Конструкция солнечного паруса.....	16
1.2. Математическая модель солнечного паруса.....	20
1.3. Алгоритм демпфирования колебаний плёнки .....	32
Выводы по разделу.....	53
2. Обеспечение требуемой ориентации солнечного паруса.....	55
2.1. Алгоритм управления пространственным разворотом солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».....	55
2.2. Сравнение предложенного алгоритма с методом, использующим изменение отражательной способности плёнки.....	74
Выводы по разделу.....	89
3. Обеспечение разгрузки кинетических моментов вращающихся элементов конструкции.....	90
3.1. Алгоритм разгрузки кинетического момента.....	90
3.2. Анализ возможности аккумуляции энергии с помощью конструкции солнечного паруса.....	105
Выводы по разделу.....	111
Заключение.....	112
Список использованных источников.....	114

## СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\rho_{\Pi}$  – плотность плёнки, кг/м<sup>3</sup>;

$\mu_{\Pi}$  – коэффициент Пуассона плёнки;

$L_c$  – кинетический момент системы «жёсткая вставка – плёнка», кг·м<sup>2</sup>/с;

$L_{\Pi}$  – кинетический момент плёнки, кг·м<sup>2</sup>/с;

$L_B$  – кинетический момент жёсткой вставки, кг·м<sup>2</sup>/с;

$L_M$  – кинетический момент маховика, кг·м<sup>2</sup>/с;

$S$  – плотность потока энергии (интенсивность света), Вт/м<sup>2</sup>;

$c$  – скорость света в вакууме, м/с;

$F_d$  – сила давления света, Н;

$R_{\Pi}$  – наружный радиус плёнки, м;

$R_B$  – наружный радиус жёсткой вставки, м;

$\omega_B$  – угловая скорость вращения системы «жёсткая вставка – плёнка», рад/с;

$\omega_M$  – угловая скорость вращения маховика, рад/с;

$n$  – число аппроксимирующих окружностей;

$N_{max}$  – минимальный коэффициент отражательной способности, который может иметь плёнка;

$N_{min}$  – минимальный коэффициент отражательной способности, который может иметь плёнка;

$I_{OK}$  – момент инерции солнечного паруса относительно оси разворота солнечного паруса ОК, кг·м<sup>2</sup>;

$\omega_{OK}$  – угловая скорость разворота солнечного паруса вокруг оси разворота солнечного паруса ОК, рад/с;

$\gamma$  – величина изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», рад;

$\xi$  – угол между векторами кинетических моментов жёсткой вставки и системы «жёсткая вставка – плёнка», рад;

$\chi$  – угол отклонения вектора кинетического момента маховика за счёт воздействия внешнего момента, рад;

$\delta$  – угол между векторами кинетических моментов плёнки и жёсткой вставки, рад;

$\zeta$  – угол между угловой скоростью солнечного паруса (приборного отсека) и вектором кинетического момента системы «жёсткая вставка – плёнка», рад;

$\omega_\chi$  – скорость изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», рад/с.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одним из перспективных устройств для перемещения в космосе считается солнечный парус, который представляет собой космический аппарат с тонкой зеркальной плёнкой большой площади. За счёт давления солнечного света, действующего на плёнку, он может перемещаться в космическом пространстве без расхода рабочего тела в отличие от космических аппаратов на реактивном движении. Хотя давление солнечного света чрезвычайно мало и уменьшается пропорционально квадрату расстояния от Солнца, оно может сообщать непрерывное ускорение космическому кораблю [1]. Возможные области применения солнечного паруса довольно разнообразны: начиная с геоцентрических раскруток и задач, связанных с освещением отдельных участков Земли, и заканчивая межпланетными и даже межзвёздными перелётами [1-9].

Основным недостатком солнечного паруса является его движение за счёт давления солнечного света только в сторону от Солнца, а не к нему. Однако эту проблему можно решить, если ориентировать солнечный парус таким образом, чтобы снижалась орбитальная скорость космического аппарата, за счёт чего он будет переходить на более близкую к Солнцу орбиту [1]. Аналогично можно поступать при движении от Солнца, постепенно увеличивая орбитальную скорость.

Впервые идеи об устройстве и принципах применения солнечного паруса в качестве движителя для космических перелетов выдвинул Фридрих Цандер в статье «Перелеты на другие планеты» 1924 года [10]. По замыслу Цандера, солнечный парус большой площади и сравнительно малой массы представляет собой полотнище-экран, форма которого поддерживается некоторым набором каркасных элементов. Ученый попытался разработать основы теории движения космических аппаратов под солнечным парусом. На тот момент реализовать такой проект было невозможно, однако к идее космических перелётов на

солнечном давлении стали впоследствии неоднократно обращаться другие выдающиеся российские и зарубежные учёные [11-13].

С развитием новых технологий возможность использования солнечного паруса становилась всё более реальной, вызывая практический интерес со стороны исследователей разных стран [14-23]. В частности, были исследованы проблемы, связанные с выводом на орбиту космического аппарата с солнечным парусом, расчётом требуемой траектории космического аппарата и угла ориентации паруса по отношению к солнечным лучам для перелёта на разные планеты, материалом для изготовления паруса, динамикой управления полётом, принципами развёртывания тонкой плёнки из уложенного состояния, терморегуляцией солнечного паруса и т.д. На данный момент уже успешно реализованы несколько проектов солнечных парусов, таких как российское «Знамя-2» (1993 г.), японский IKAROS (2010 г.), американские NanoSail-D2 (2010 г.) и LightSail (2015 г.).

По принципу развёртывания и поддержания формы плёнки конструкции солнечного паруса можно разделить на каркасные (составные части конструкции шарнирно соединены в единую кинематическую систему) и центробежные (раскрытие и сохранение формы происходит за счёт центробежных сил, возникающих при вращении конструкции) [4]. К достоинству центробежных конструкций можно отнести возможность реализовать большую площадь плёнки по сравнению с каркасной конструкцией, а значит, космический аппарат может приобрести значительно большее ускорение.

Направление силы тяги солнечного паруса в процессе полёта будет зависеть от его ориентации по отношению к солнечным лучам. Одной из основных задач, связанных с обеспечением требуемой ориентации паруса, является его пространственный разворот в процессе полёта. При этом требуется минимизировать расход энергии, и, по возможности, избежать расхода рабочего тела.

Любые манёвры солнечного паруса в пространстве связаны с управлением угловой ориентацией паруса по отношению к солнечным лучам. В настоящее время пространственная угловая переориентация космических аппаратов в основном осуществляется за счёт реактивных двигателей, которые требуют постоянного расхода топлива. С целью уменьшения массы космического аппарата и увеличения срока теоретической эксплуатации предпочтительным оказывается разработать систему управления солнечным парусом без расхода рабочего тела.

При такой постановке задачи в некоторых работах предлагается использовать для установки нужной ориентации солнечного паруса и его стабилизации в заданном положении двухстворчатой конструкции паруса определённой пропорции, который будет саморегулироваться на Солнце [24].

Одним из вариантов стабилизации и ориентации космического аппарата без расхода рабочего тела является управление с помощью сил светового давления [25-27]. Чаще всего для этого используются поворотные панели, установленные на космическом аппарате – солнечные рули. Современные технологии позволяют также изменять непосредственно коэффициент отражательной способности поверхности, что также можно использовать для переориентации солнечного паруса. Подобная технология, например, использовалась на японском космическом аппарате IKAROS [28-30]. Данное управление позволяет обойтись без расхода рабочего тела, однако вследствие небольшой величины получаемых при этом моментов солнечному парусу потребуется значительное время на разворот.

Для управления космическим аппаратом без расхода рабочего тела также можно использовать гироскопические силовые устройства [28-30] – гироскопы с различным числом степеней свободы, числом вращающихся роторов и т.п. Работа гироскопических силовых устройств (маховиков и гиродинов) в качестве исполнительных органов основана на законе сохранения момента импульса. Гироскопические устройства имеют ряд преимуществ: потребляют

относительно мало энергии как в режиме стабилизации, так и в режиме программных разворотов; способны создавать значительные управляющие моменты, что очень важно для осуществления быстрых разворотов космического аппарата. Поэтому такой способ управления оказывается предпочтительным для пространственной переориентации солнечного паруса, так как не требует расхода рабочего тела или слишком больших расходов энергии. Недостатком гиросtabilизаторов является необходимость в системе разгрузки. Со временем при такой системе управления требуется включать двигатели ориентации, уменьшая обороты маховика или «разгружая» кинематику гироскопа.

В существующих работах, посвящённых исследованию управления ориентацией солнечного паруса без расхода рабочего тела, предлагается использовать в качестве гироскопического устройства саму конструкцию солнечного паруса, в котором плоская поверхность плёнки поддерживается за счёт центробежных сил [4, 31-33]. Реализация такого управления требует разработки соответствующих алгоритмов управления, переводящих солнечный парус в заданное положение.

В работе рассматривается конструкция солнечного паруса в виде тонкой зеркальной круговой плёнки, плоская поверхность которой поддерживается центробежными силами за счёт вращения центральной жёсткой вставки. Кинетический момент системы «жёсткая вставка – плёнка» компенсируется за счёт устройства, условно названного маховиком. Тогда при изменении угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» космический аппарат начнёт вращаться вокруг оси, совпадающей с их суммой в связанной системе координат. При этом солнечный парус может развернуться в требуемое пространственное положение в том случае, когда кинетические моменты маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» совпадают по модулю.



Одной из проблем, возникающих при разработке системы управления солнечным парусом путём изменения угла между векторами кинетических моментов его вращающихся элементов, являются упругие колебания, возникающие при эволюциях космического аппарата. Для решения данной проблемы необходимо разработать алгоритм активного демпфирования колебаний плёнки.

Ещё одной проблемой является дисбаланс между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», возникающий в результате внешних возмущающих воздействий и, не позволяющий солнечному парусу занимать произвольное неподвижное положение после пространственного разворота. Для решения данной проблемы необходимо разработать алгоритм устранения дисбаланса векторов кинетических моментов вращающихся элементов конструкции солнечного паруса. При этом в качестве управляющего воздействия можно использовать изменение коэффициента отражательной способности отдельных частей поверхности плёнки, что позволит обойтись без расхода рабочего тела.

**Актуальность работы.** Солнечный парус можно считать одним из перспективных вариантов современных космических движителей благодаря тому, что он не требует расхода топлива. Многочисленные научные работы и проекты, посвящённые движению за счёт светового давления, подтверждают актуальность исследования и возможность применения солнечного паруса в космонавтике ближайших десятилетий. Любые манёвры солнечного паруса в пространстве связаны с управлением угловой ориентацией паруса по отношению к солнечным лучам. С целью уменьшения массы космического аппарата и увеличения его теоретического срока эксплуатации актуальной задачей является разработка системы управления угловой ориентацией солнечного паруса без расхода рабочего тела.

**Цель исследования.** Обеспечение требуемой ориентации солнечного паруса в процессе его эксплуатации без расхода рабочего тела. Обеспечение

демпфирования колебаний плёнки, возникающих при переориентации паруса центробежной конструкции. Устранение дисбаланса кинетических моментов элементов конструкции, возникающего при воздействии внешних возмущений. Оценка площади солнечных батарей, обеспечивающих функционирование системы управления.

**Объект исследования.** Система управления пространственной ориентацией солнечного паруса, представленного в виде вращающейся тонкой пленки, прикрепленной к цилиндрической жесткой вставке, и маховика, кинетический момент которого равен по модулю и противоположен по направлению кинетическому моменту системы «жёсткая вставка – плёнка».

**Предмет исследования.** Алгоритмы системы управления солнечного паруса, обеспечивающие требуемую ориентацию по отношению к солнечным лучам в процессе его эксплуатации без расхода рабочего тела.

**Методология и методы исследования.** Основными методами исследования, используемыми в работе, являются: методы механики твёрдого тела, метод конечных элементов, методы теории автоматического управления, математическое моделирование.

**Следующие результаты являются новыми:**

1) Алгоритм активного демпфирования колебаний поверхности солнечного паруса, возникающих при эволюциях космического аппарата.

2) Алгоритм управления и математическое описание пространственного разворота солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и поверхности паруса.

3) Способ устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и поверхности паруса путём изменения отражательной способности поверхности солнечного паруса.

**Практическая значимость результатов исследования.** Оценка формы поверхности солнечного паруса при его эволюциях и разработанный алгоритм демпфирования колебаний позволили при исследовании пространственной

переориентации использовать грубую математическую модель поверхности паруса в виде плоского диска, соединённого с жёсткой вставкой упругой невесомой плёнкой. Разработанный алгоритм управления и математическое описание пространственного разворота солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов его вращающихся частей позволили оценить возможные угловые скорости его переориентации с учётом конструктивных особенностей космического аппарата. При этом существенно снизились временные и энергетические затраты на переориентацию космического аппарата по сравнению с существующими аналогами. Изменение отражательной способности поверхности паруса обеспечивает приемлемое время на устранение дисбаланса абсолютных значений кинетических моментов маховика и поверхности солнечного паруса. Использование рекуперации кинетических энергий маховика и поверхности паруса позволяет снизить площадь солнечных батарей при создании внешнего воздействия путём изменения отражательной способности плёнки.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается математическим моделированием предложенной системы управления пространственной ориентацией солнечного паруса, физически обоснованными закономерностями, соответствием полученных результатов моделирования с ожидаемыми при изменении исходных данных.

**Внедрение результатов работы.** Полученные в ходе работы результаты использованы в научно-исследовательских работах ФГУП ЦНИИмаш при разработке облика перспективных космических аппаратов с солнечным парусом гибкой конструкции (СЧ НИР «Авангард» (Аппараты)), системы управления пространственной ориентацией космического аппарата, методов синтеза законов управления демпфированием крупногабаритных деформируемых конструкций СЧ НИР «Магистраль» (Облик).

**Публикации и апробация результатов работы.** По теме диссертации опубликовано восемь работ [35-42], из них три в рецензируемых изданиях [38,

41, 42], определённых Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации. Часть материалов, вошедших в данную диссертационную работу, были отмечены первым местом на Московском конкурсе на лучшую научную работу студентов МАИ в 2014 году. В 2014 году материалы диссертации докладывались на конференции «Гагаринские чтения» (МАТИ, г. Москва) и на XI конференции молодых учёных «Фундаментальные и прикладные космические исследования» (ИКИ РАН, г. Москва). Материалы диссертации докладывались на конференции «Инновации в авиации и космонавтике» (МАИ, г. Москва), где в 2014 году заняли первое место в секции «Проектирование, динамика полета и эксплуатация РКС», а в 2015 году заняли первое место в секции «Перспективы развития ракетно-космических систем и космических технологий». Также материалы диссертации докладывались на конференции «Гагаринские чтения» (МАИ, г. Москва), где в 2016 заняли первое место в секции «Перспективы развития ракетно-космических систем и космических технологий», в 2017 году заняли второе место в секции «Управление движением, навигация и бортовые системы», а в полуфинале конкурса докладов были отмечены грамотой за перспективность тематики исследований и практическую значимость работы.

**На защиту выносятся следующие основные научные положения:**

- 1) Алгоритм активного демпфирования колебаний плёнки при эволюции солнечного паруса в условиях невозможности прямого измерения пространственных координат поверхности плёнки относительно жёсткой вставки.
- 2) Алгоритм управления пространственной переориентации солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».
- 3) Способ устранения дисбаланса абсолютных значений кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» без

расхода рабочего тела, а также алгоритм и математическое описание этого процесса.

4) Оценка необходимого увеличения площади солнечных батарей для обеспечения работоспособности системы управления солнечным парусом.

**Структура и объём работы.** Работа состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников. Объём диссертации составляет 120 страниц. Работа содержит 35 рисунков и 4 таблицы. Список использованных источников включает 62 наименования.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Основной задачей диссертационной работы является разработка алгоритма управления пространственным разворотом солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». При этом потребуется решить ряд сопутствующих задач, включающих разработку алгоритма активного демпфирования колебаний плёнки, возникающих в процессе его эксплуатации; подбор параметров конструкции, обеспечивающих допустимое отклонение поверхности плёнки от плоскости жёсткой вставки; устранение дисбаланса кинетических моментов вращающихся элементов конструкции путём изменения отражательной способности плёнки; оценка требуемой площади солнечных батарей для изменения коэффициента отражательной способности с учётом возможности рекуперации кинетических энергий маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». Тема является перспективной, так как в дальнейшем может служить основой для космических полётов без использования ракетного топлива.

## ПРИНЯТЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

В работе влияния различных орбитальных факторов, таких как градиент гравитационного поля небесных тел, радиационные потоки от Солнца и галактического излучения, радиационные пояса и магнитные поля планет и т.д., учитываются в совокупности только как некоторое возмущающее воздействие, которое может привести к дисбалансу по модулям векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». Влияние этих факторов на технические характеристики звеньев конструкции, в частности, на материал плёнки, не учитывается.

Не учитывается изменение коэффициента отражательной способности плёнки вследствие ухудшения оптических характеристик паруса во время полёта, которое возможно вследствие высокого вакуума, корпускулярных солнечных потоков, гамма-излучений высоких энергий и т.д. [1]. Также не учитывается влияние внешних факторов на возможность изменения коэффициента отражательной способности плёнки при устранении дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». Отражение солнечных лучей от плёнки происходит строго по геометрическому закону, т.е. не является рассеянным, как например, для шероховатых поверхностей.

Система управления пространственной переориентацией разрабатывалась применительно к случаю, когда солнечный парус находится на гелиоцентрической орбите. При исследовании и моделировании систем управления, использующих изменение отражательной способности плёнки, предполагается, что солнечный парус находится на расстоянии 1 а.е. (астрономическая единица) от Солнца, и на него не отбрасывают тень небесные тела. При рассмотрении управления на других расстояниях от Солнца следует учитывать, что изменится время на устранение дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».

# 1. ОЦЕНКА ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ПЛЁНКИ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА

## 1.1. КОНСТРУКЦИЯ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА

В работе рассмотрена конструкция солнечного паруса в виде круговой зеркальной плёнки большой площади, форма поверхности которой поддерживается центробежными силами за счёт вращения центральной цилиндрической жёсткой вставки [31, 42]. Образующийся в результате вращения системы «жёсткая вставка – плёнка» кинетический момент компенсируется за счёт устройства, условно названного маховиком, ось вращения которого противоположна по направлению оси вращения жёсткой вставки [42]. Между маховиком и жёсткой вставкой расположен неподвижный приборный отсек с рабочей аппаратурой и полезной нагрузкой. В работе рассматривается случай, когда центр симметрии всех частей конструкции (жёсткой вставки, плёнки, маховика и приборного отсека) расположен в одной точке. Это позволит избежать возмущающих эффектов при переориентации космического аппарата. Также предполагается возможность обеспечения бесконтактного соединения частей солнечного паруса, что позволит не учитывать трение подшипников, что может быть достигнуто, например, при использовании магнитных подшипников [43].

Конструкция солнечного паруса представлена на рисунке 1.1.1. Центр связанной с приборным отсеком ортогональной системы координат  $OXYZ$  находится в центре масс солнечного паруса. При невозмущённом положении, когда кинетический момент маховика компенсирует кинетический момент системы «жёсткая вставка – плёнка», ось  $OZ$  направлена вдоль оси вращения всех элементов конструкции. В этом случае оси  $OX$  и  $OY$  находятся в невозмущённой плоскости паруса. Положение связанного координатного репера в пространстве может быть определено по астродатчикам. С вектором



кинетического момента жёсткой вставки связана ортогональная система  $OX_1Y_1Z_1$ , в начальный момент времени (до пространственной переориентации солнечного паруса) совпадающая с системой координат  $OXYZ$  [42].

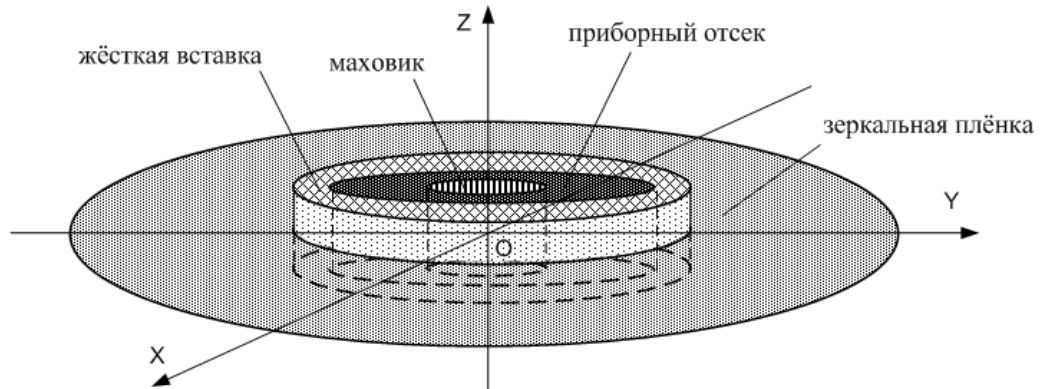


Рисунок 1.1.1 – Конструкция солнечного паруса

В качестве исходных данных плёнки примем, что её плотность  $\rho_{\text{п}} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , толщина  $h_{\text{п}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ , коэффициент Пуассона  $\mu_{\text{п}} = 0,3$ , прочность  $\sigma_{\text{п}} = 160 \text{ МПа}$  ( $1,6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ). Указанные значения соответствуют техническим характеристикам современной полимерной плёнки каптон, которую чаще всего используют в конструкциях солнечного паруса. Материал для изготовления жёсткой вставки и маховика должен иметь по возможности малую плотность и высокую прочность. В качестве исходных данных такого материала примем, что его плотность  $\rho_{\text{с}} = 4,45 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент Пуассона  $\mu_{\text{с}} = 0,32$ , прочность  $\sigma_{\text{с}} = 950 \text{ МПа}$  ( $9,5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ). Указанные значения соответствуют техническим характеристикам титанового сплава ВТ6, который используют в конструкциях космических аппаратов [44].

Для увеличения тяги космического аппарата представляется выгодным максимально увеличить площадь плёнки, по возможности снизив габариты жёсткой вставки, а также массу приборного отсека и маховика [38]. Однако будет существовать ограничение на максимальную величину отношения радиуса плёнки к радиусу жёсткой вставки, связанное как с выполнением требований к прочностным показателям, так и с особенностями управления

солнечным парусом. Например, уменьшение радиуса жёсткой вставки приведёт к увеличению отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки, амплитуды колебаний плёнки и т.д.

Рассмотрим предполагаемое техническое оснащение для солнечного паруса.

Чувствительные элементы системы управления (датчики) предназначены для измерения текущих угловых координат космического аппарата относительно инерциальной системы координат, а также для выдачи в систему управления измеренных текущих параметров солнечного паруса и внешней среды: угловых скоростей составных частей солнечного паруса, интенсивности солнечного излучения, возможных гравитационных эффектов и т.д. [27].

Широкое распространение в космической технике для измерения текущих угловых координат космического аппарата относительно инерциальной системы координат получили различные виды оптоэлектронных устройств [27]. В качестве опорного астроориентира можно выбрать Солнце, так как ориентация паруса по отношению к солнечным лучам будет определять направление тяги космического аппарата. В настоящее время существуют датчики, которые позволяют измерять положение Солнца с точностью до нескольких угловых минут. В этом случае оптическую ось датчика следует ориентировать на центр солнечного диска.

Измерение угловых скоростей вращения космического аппарата осуществляется двухстепенными гироскопами – датчиками угловой скорости (ДУС). Особые требования, предъявляемые к ДУС, сводятся к высокой чувствительности (порядка  $0,01 \div 0,02$  град/с) и большому ресурсу работы. В работе процессы управления рассматривались в предположении, что сигналы, поступающие в систему с датчиков, пропорциональны измеряемым координатам. Для ДУС такое допущение справедливо лишь для некоторой части диапазона измерения, так как он имеет ограниченную чувствительность и сильную зависимость от диапазона измеряемых угловых скоростей: повышение

чувствительности приводит к сужению диапазона измеряемых скоростей [27]. Наибольшей чувствительностью должен обладать датчик, установленный на приборном отсеке и измеряющий угловую скорость разворота солнечного паруса. При этом диапазон измеряемых скоростей у датчика может быть не большим, так как на величину угловой скорости разворота будут наложены ограничения. Напротив, большим диапазоном измеряемых скоростей должны обладать ДУС маховика и жёсткой вставки, так как в процессе управления их угловые скорости могут сильно изменяться. Можно установить три ДУС по трём перпендикулярным координатным осям на приборный отсек, так как его вращение будет определять вращение всего солнечного паруса. На жёсткую вставку и маховик достаточно установить по одному ДУС.

Для обеспечения изменения коэффициента отражательной способности участков солнечного паруса можно использовать различные технологии [45-50]. При этом для создания управляющего момента необходимо в течение определённого времени поддерживать разные коэффициенты отражательной способности относительно оси создания момента сил светового давления. Для этого потребуется изменять коэффициент отражательной способности различных участков плёнки с частотой вращения плёнки, что вполне позволяют современные технологии [45-47]. Например, используя в качестве материала для изготовления паруса каптон (плёнка из полиамида), алюминизированный с одной стороны и покрытый жидкокристаллической плёнкой с изменяемой прозрачностью [48-50], можно, подавая и снимая электрическое напряжение на плёнке, изменять ее прозрачность и, соответственно, силу воздействия света.

## 1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА

При исследовании пространственного разворота солнечного паруса модель плёнки удобно представить в виде плоского диска, расположенного по отношению к поверхности жёсткой вставки под некоторым углом, который зависит от угловой скорости переориентации. Для оценки обоснованности выбора такой модели проведено исследование формы поверхности плёнки при различных эволюциях солнечного паруса. С использованием математической модели солнечного паруса в виде набора жёстких аппроксимирующих окружностей.

Пусть  $r$  – радиус цилиндрического сечения поверхности пленки. В каждый момент времени  $t$  положение точки цилиндрического сечения пленки задается либо координатами  $x, y, z$  (прямоугольная система координат), либо координатами  $r, \varphi, z$  (цилиндрическая система координат). Угол  $\varphi$  отсчитывается в положительном направлении от оси  $OX$  [31]. На рисунке 1.2.1 показана аппроксимация поверхности плёнки жёсткой окружностью.

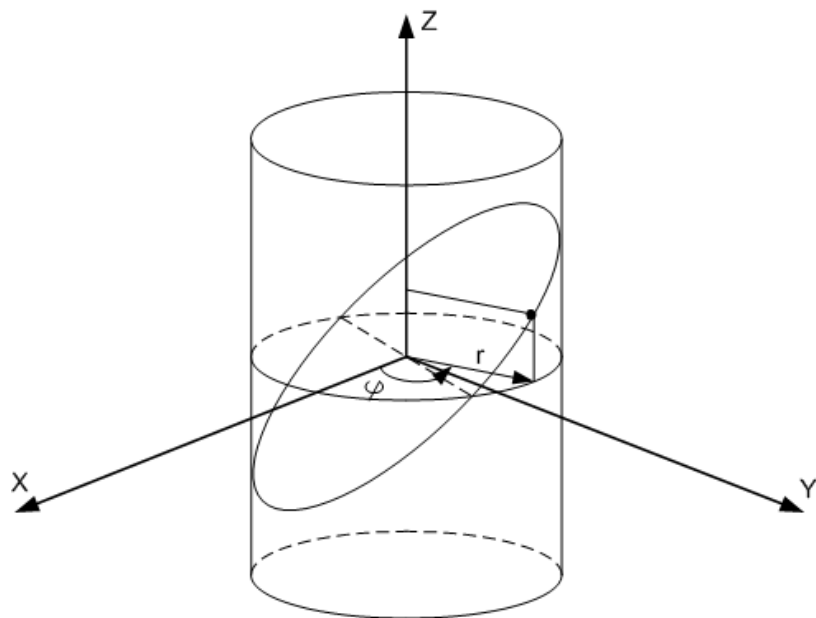


Рисунок 1.2.1 – Аппроксимация поверхности плёнки жёсткой окружностью

В каждый момент времени координаты точки цилиндрического сечения плёнки будут представлять собой периодическую функцию от угла  $\varphi$ , которую можно разложить в ряд Фурье. Первый член этого ряда будет представлять собой эллипс, лежащий на поверхности цилиндра радиуса  $r$ . Если рассмотреть окружность радиуса  $r$ , лежащую в плоскости этого эллипса, то отклонения точек окружности от точек эллипса будут малыми высшего порядка. Приведённые положения легли в основу линейной модели, приближённо (с точностью до высших гармоник рядов Фурье) описывающей поведение поверхности плёнки в процессе движения [31].

Разбив поверхность пленки на плоские кольцевые области, ограниченные окружностями радиусов  $r_{i-1}$  и  $r_i$ , м, можно найти их моменты инерции  $I_i$ , кг·м<sup>2</sup>, по формуле [51]:

$$I_i = \frac{1}{2} \cdot m_i (r_i^2 + r_{i-1}^2), \quad (1.2.1)$$

где  $m_i$  – масса кольцевой области, кг.

Плоские кольцевые области можно заменить окружностями радиуса  $R_i$ , которые будут иметь ту же массу, что и соответствующие им кольцевые области. Радиусы  $R_i$  выбираются таким образом, чтобы моменты инерции аппроксимирующих окружностей были равны моментам инерции аппроксимируемых кольцевых областей [31]. Момент инерции аппроксимирующих окружностей можно определить по формуле [51]:

$$I_i = m_i R_i^2. \quad (1.2.2)$$

Приравняв выражения (1.2.1) и (1.2.2), получим:

$$R_i = \sqrt{0,5(r_i^2 + r_{i-1}^2)}. \quad (1.2.3)$$

Следует отметить, что при равномерном разделении полотна солнечного паруса на плоские кольцевые области, расстояния между смежными аппроксимирующими окружностями не будут одинаковыми [38]. На рисунке 1.2.2 представлено разбиение поверхности солнечного паруса на кольцевые области и соответствующие им аппроксимирующие окружности. Кольцевые

области выделены голубым и жёлтым цветом, между ними отмечены соответствующие аппроксимирующие окружности.

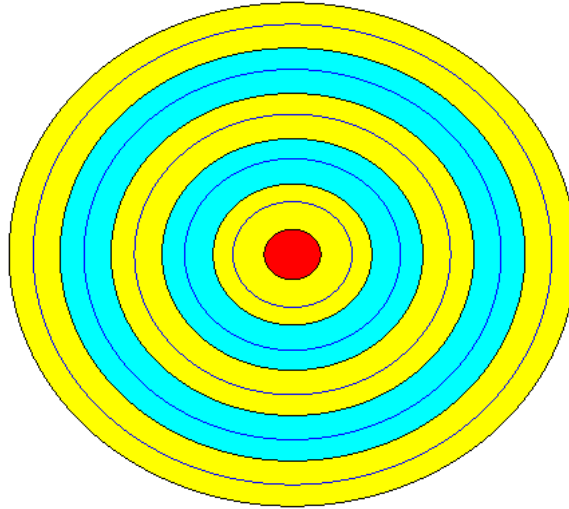


Рисунок 1.2.2 – Разбиение поверхности солнечного паруса на кольцевые области и соответствующие им аппроксимирующие окружности

Аппроксимирующие окружности соединены тонкой невесомой плёнкой, через которую передаются напряжения. Аппроксимация поверхности паруса жёсткими окружностями приведена на рисунке 1.2.3. Голубым и зелёным цветом показана тонкая натянутая невесомая плёнка между смежными аппроксимирующими окружностями.

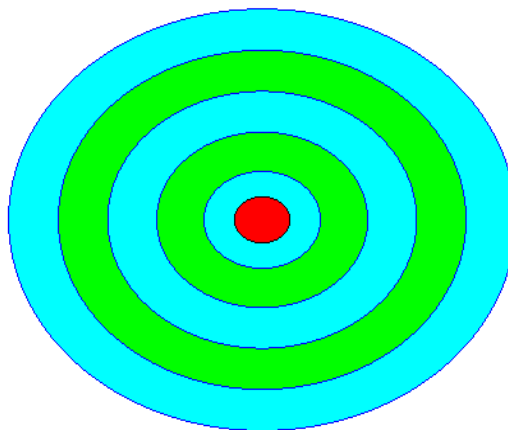


Рисунок 1.2.3 – Аппроксимация поверхности паруса жёсткими окружностями

Положение связанных с каждой аппроксимирующей окружностью осей по отношению к базовой системе координат задается углами Кардано. Координаты связанного с окружностью ортонормированного репера приведены на рисунке 1.2.4.

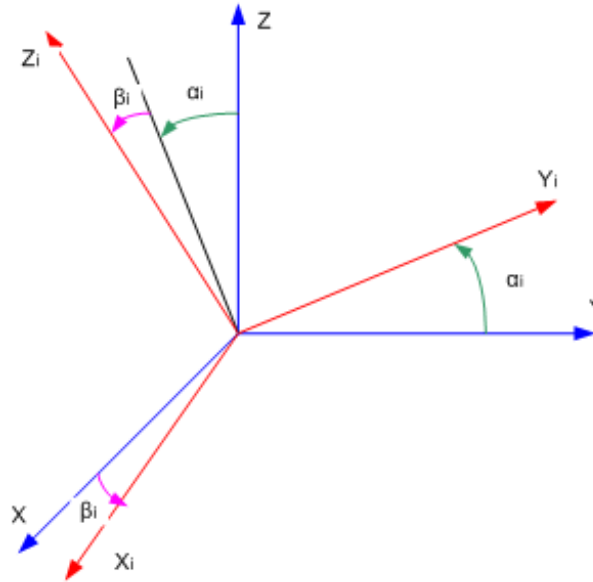


Рисунок 1.2.4 – Координаты связанного с окружностью ортонормированного репера

Для определения оптимального количества аппроксимирующих окружностей при исследовании пространственного разворота солнечного паруса необходимо определить установившуюся поверхность солнечного паруса в случае равномерного вращательного движения [35, 36, 38].

Определим форму поверхности пленки в плоском сечении, проходящем через ось Z, при переориентации солнечного паруса вокруг оси X с постоянной угловой скоростью  $\omega_c$ , рад/с. Для этого воспользуемся формулой для отклонения координаты z в рассматриваемом сечении на расстоянии r от центра вращения [4]:

$$z_1(r) \approx \frac{2\omega_c r}{(3+\mu_{\Pi})\omega_B} \left( \frac{R_{\Pi}^2}{R_B^2} - \frac{R_{\Pi}^2}{r^2} + 2 \ln \left( \frac{r}{R_B} \right) \right), \quad (1.2.4)$$

где  $\omega_c$  – угловая скорость пространственного разворота солнечного паруса, рад/с;

$R_{\Pi}$  – наружный радиус пленки, м;

$R_{\text{В}}$  – радиус центральной жесткой вставки, м;

$\omega_{\text{В}}$  – угловая скорость вращения системы «жесткая вставка – плёнка», рад/с;

$r$  – радиус аппроксимирующего кольца, на котором определяется отклонение плёнки, м.

Следует отметить, что формула (1.2.4) учитывает только радиальное напряжение, и не учитывает тангенциальное напряжение и скорость деформации. Поэтому отклонения координаты  $z$ , определяемое формулой (1.2.4), будет совпадать с результатами, полученными в [53] с использованием уравнения напряженно-деформированного состояния мембраны, с точностью до коэффициента  $K$ , определяемого геометрическими и плотностными характеристиками плёнки. Определим этот коэффициент, найдя отношение скоростей изменения угла отклонения плёнки от плоскости жесткой вставки в случае различных математических моделей представления поверхности плёнки. Получим соотношение:

$$K = \frac{d\beta_2}{d\beta_1}, \quad (1.2.5)$$

где  $\beta_1$  – угол отклонения плёнки от плоскости жесткой вставки, полученный в [4] при использовании математической модели плёнки в виде набора аппроксимирующих окружностей, соединённых натянутой невесомой плёнкой, рад;

$\beta_2$  – угол отклонения плёнки от плоскости жесткой вставки, полученный при использовании уравнения напряженно-деформированного состояния мембраны, рад.

Дифференциальное уравнение, описывающее скорость изменения угла отклонения плёнки от плоскости жесткой вставки, по [4] имеет вид:

$$\frac{d\beta_1}{dr} = \frac{4\omega_{\text{с}}(R_{\Pi}^2 + r^2)}{(3 + \mu_{\Pi})\omega_{\text{В}}r^3}. \quad (1.2.6)$$

Максимальное отклонение плёнки от плоскости жесткой вставки на расстоянии  $r$  от центра вращения по формуле из [53] будет иметь вид:



$$z_2(r) = \frac{2\omega_c r}{(3+\mu_{\Pi})A\omega_B} \left[ 2\ln\left(\frac{r}{R_B}\right) - (1+A) \ln\left(\frac{r^2 - AR_{\Pi}^2}{R_B^2 - AR_{\Pi}^2}\right) \right], \quad (1.2.7)$$

где  $A$  – коэффициент, зависящий от геометрических и плотностных характеристик плёнки,  $A = -\frac{\eta}{R_{\Pi}^2(R_{\Pi}^2 + \eta R_B^2)}(R_{\Pi}^2 - \zeta R_B^2)$ ,  $\eta = \frac{1-\mu_{\Pi}}{1+\mu_{\Pi}}$ ,  $\zeta = \frac{1+\mu_{\Pi}}{3+\mu_{\Pi}}$ .

Из формулы (1.2.6) угол отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки будет приближённо находиться по формуле:

$$\beta_2(r) = \frac{2\omega_c}{(3+\mu_{\Pi})A\omega_B} \left[ 2\ln\left(\frac{r}{R_B}\right) - (1+A) \ln\left(\frac{r^2 - AR_{\Pi}^2}{R_B^2 - AR_{\Pi}^2}\right) \right]. \quad (1.2.8)$$

Дифференциальное уравнение, описывающее скорость изменения угла отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки, с учётом формулы (1.2.8) имеет вид:

$$\frac{d\beta_2}{dr} = \frac{4\omega_c(R_{\Pi}^2 + r^2)}{(3+\mu_{\Pi})\omega_B r} \cdot \frac{1}{r^2 - AR_{\Pi}^2}. \quad (1.2.9)$$

Считая коэффициент  $A$  равным нулю, уравнения (1.2.6) и (1.2.9) примут идентичный вид, что подтверждает обоснованность модели плёнки в виде набора аппроксимирующих окружностей.

Воспользовавшись соотношениями (1.2.5), (1.2.6) и (1.2.9), получим:

$$K = \frac{r^2}{r^2 - AR_{\Pi}^2}. \quad (1.2.10)$$

Как видно из формулы (1.2.10), коэффициент  $K$  будет зависеть от расстояния  $r$  от центра вращения. Для нахождения расстояния  $r$ , на котором будем высчитывать коэффициент  $K$ , проведём касательную к графику скорости изменения угла отклонения плёнки возле жёсткой вставки, определяемому формулой (1.2.9), и найдём точку пересечения с асимптотой, к которой стремится график функции (1.2.9). График зависимости скорости изменения угла отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки при различных радиусах плёнки представлен на рисунке 1.2.5.

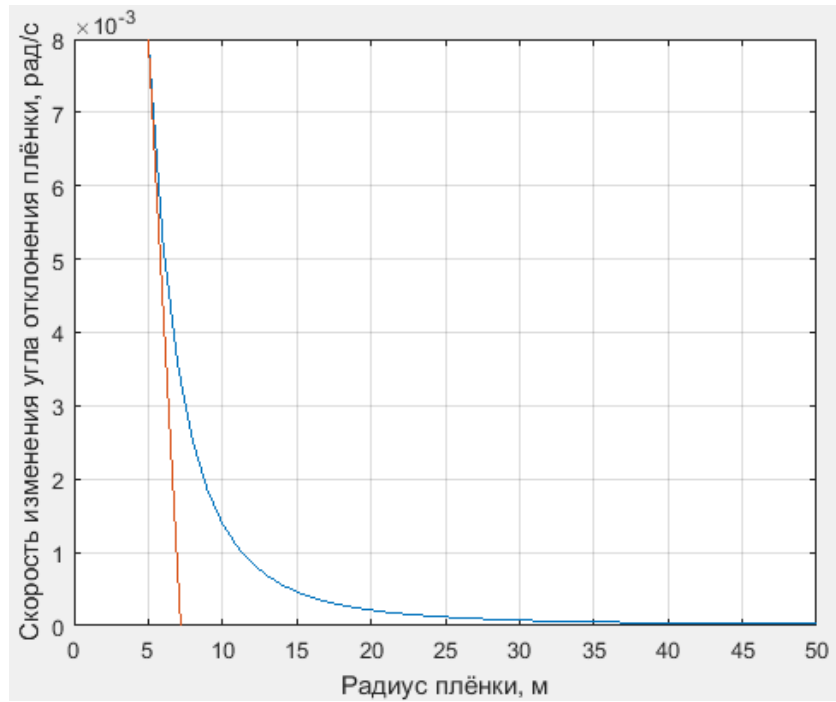


Рисунок 1.2.5 – Зависимость скорости изменения угла отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки при различных радиусах плёнки

Асимптота функции (1.2.9) будет проходить через следующее значение:

$$V_{\beta} = \frac{8\omega_c}{(3+\mu_{\Pi})\omega_B R_{\Pi}(1-A)}. \quad (1.2.11)$$

В точке крепления к жёсткой вставке скорость изменения угла отклонения плёнки согласно формуле (1.2.9) будет определяться соотношением:

$$\dot{\beta}_2(R_B) = \frac{4\omega_c(R_{\Pi}^2+R_B^2)}{(3+\mu_{\Pi})\omega_B R_B} \cdot \frac{1}{R_B^2-AR_{\Pi}^2}. \quad (1.2.12)$$

Производная от скорости изменения угла отклонения плёнки будет определяться соотношением:

$$\frac{d^2\beta_2}{dr^2} = \frac{4\omega_c}{(3+\mu_{\Pi})\omega_B} \cdot \frac{AR_{\Pi}^4-r^2-r^2R_{\Pi}^2(A+3)}{r^2(r^2-AR_{\Pi}^2)^2}. \quad (1.2.13)$$

В точке крепления к жёсткой вставке ускорение изменения угла отклонения плёнки согласно формуле (1.2.13) будет определяться соотношением:

$$\ddot{\beta}_2(R_B) = \frac{4\omega_c}{(3+\mu_{\Pi})\omega_B} \cdot \frac{AR_{\Pi}^4-R_B^2-R_B^2R_{\Pi}^2(A+3)}{R_B^2(R_B^2-AR_{\Pi}^2)^2}. \quad (1.2.14)$$

Тогда радиус, на котором вычисляется коэффициент  $K$ , будет определяться соотношением:

$$R_k = \frac{V_{\beta} - \beta_2(R_B)}{\beta_2(R_B)} + R_B. \quad (1.2.15)$$

С учётом (1.2.11), (1.2.12) и (1.2.14) окончательно получим:

$$R_k = \frac{(2R_B[R_B^2 - AR_{II}^2] - R_{II}(1-A)[(R_{II}^2 + R_B^2)])R_B[R_B^2 - AR_{II}^2]}{R_{II}(1-A)[AR_{II}^4 - R_B^2 - R_B^2 R_{II}^2(A+3)]} + R_B. \quad (1.2.16)$$

Окончательно отклонение координаты  $z$  плёнки в рассматриваемом сечении на расстоянии  $r$  от центра вращения согласно (1.2.4) и (1.2.11) будет определяться соотношением:

$$z(r) = \frac{R_k^2}{R_k^2 - AR_{II}^2} \cdot \frac{2\omega_c r}{(3 + \mu_{II})\omega_B} \left( \frac{R_{II}^2}{R_B^2} - \frac{R_{II}^2}{r^2} + 2 \ln \left( \frac{r}{R_B} \right) \right). \quad (1.2.17)$$

Можно отметить, что результаты моделирования при данных параметрах солнечного паруса при пространственной переориентации в случае представления его математической модели в виде набора аппроксимирующих окружностей совпадает с результатами моделирования, полученными в [53] с использованием уравнения напряженно-деформированного состояния мембраны. График отклонений плёнки от плоскости жёсткой вставки на различных расстояниях от центра вращения плёнки при пространственном развороте солнечного паруса в случае различных математических моделей представлен на рисунке 1.2.6. Синим цветом показана зависимость отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки, полученная в работе [53] путём решения уравнения в частных производных, красным цветом – зависимость отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки при рассмотрении модели в виде жёстких аппроксимирующих окружностей.

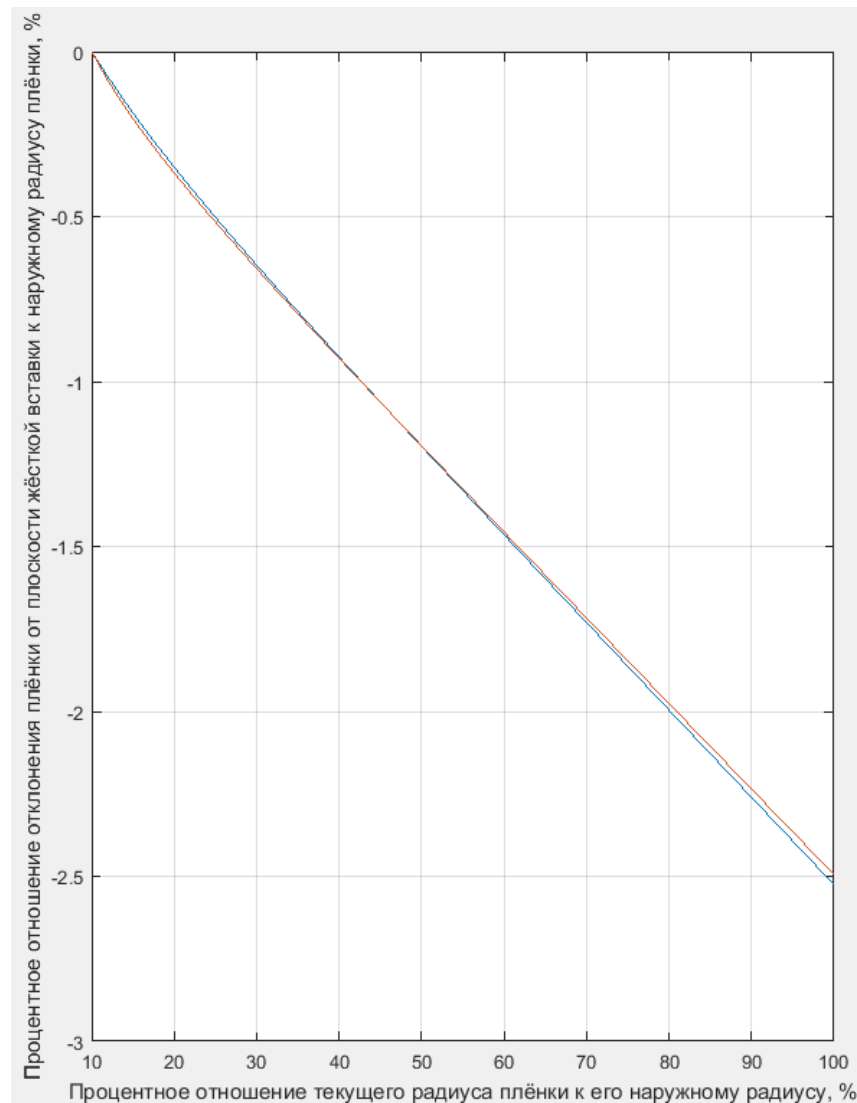


Рисунок 1.2.6 – График отклонений плёнки при пространственном развороте солнечного паруса в случае различных математических моделей

На рисунке 1.2.7 приведена модель поверхности плёнки при переориентации солнечного паруса с постоянной угловой скоростью при следующих характеристиках: угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка»  $\omega_B = 1$  рад/с, радиус жёсткой вставки  $R_B = 5$  м, радиус плёнки  $R_{\Pi} = 50$  м. Угловая скорость пространственного разворота солнечного паруса  $\omega_C$  для расчёта выбрана равной 0,0005 рад/с. Для наглядности формы поверхности плёнки масштабы по осям  $Z$  и  $X$ ,  $Y$  – разные. Максимальное отклонение внешнего края пленки в этом случае составляет не более 4% от радиуса пленки.

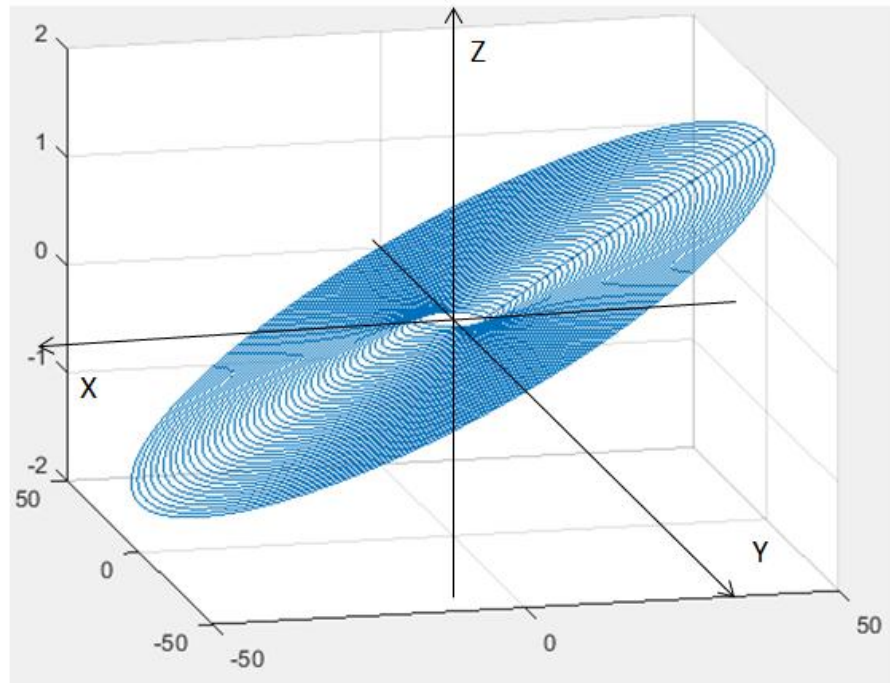


Рисунок 1.2.7 – Модель формы поверхности солнечного паруса при его переориентации с постоянной угловой скоростью

Рассмотрим, какие параметры жёсткой вставки и маховика будут наиболее предпочтительны для солнечного паруса. График отклонения внешнего края плёнки от плоскости жёсткой вставки при различных радиусах жёсткой вставки и различной угловой скорости полотна солнечного паруса представлен на рисунке 1.2.8. Угловая скорость пространственного разворота солнечного паруса  $\omega_c$  для расчёта выбрана равной 0,0003 рад/с. Масштабы по осям указаны в процентном соотношении от радиуса пленки.

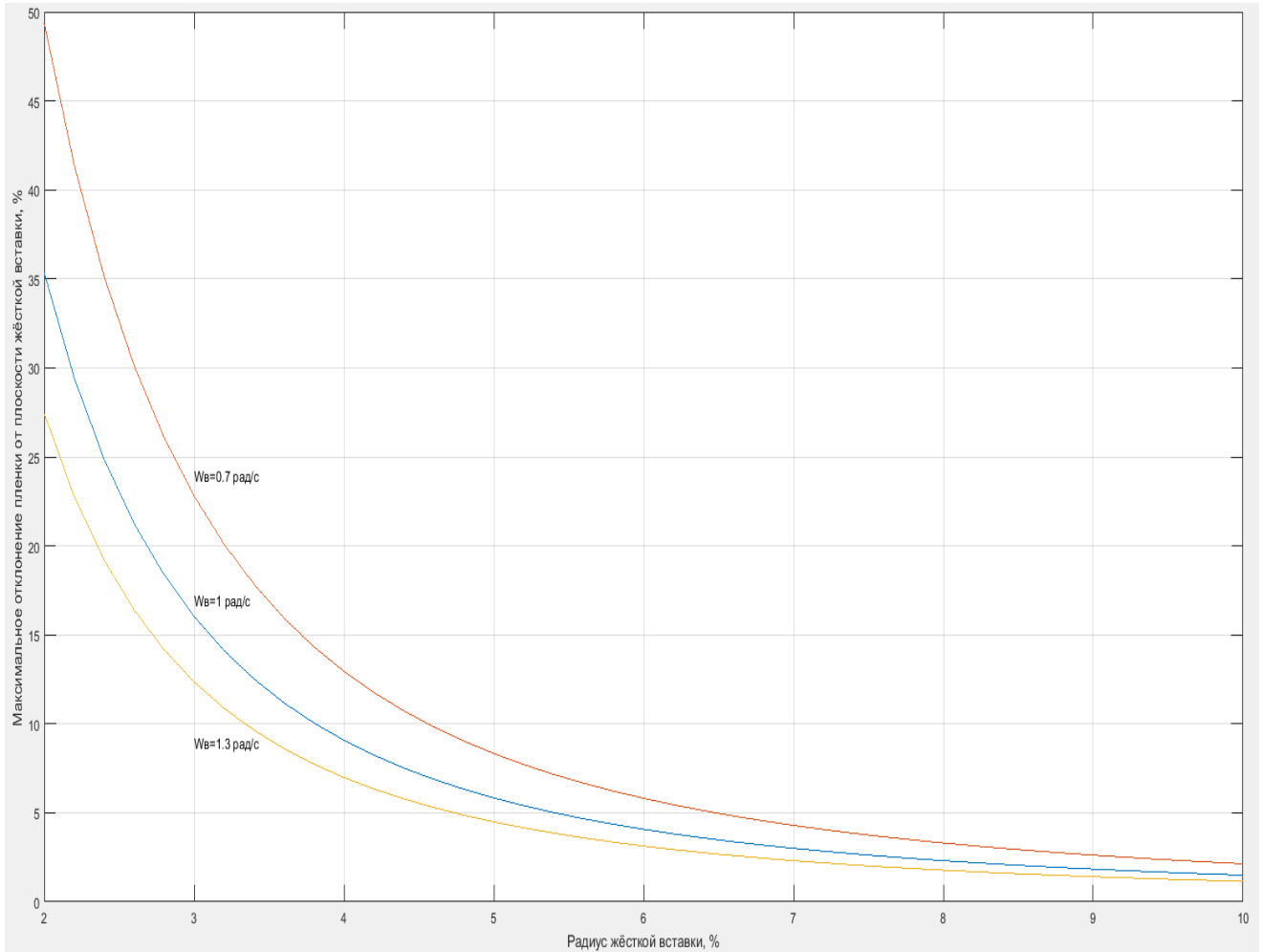


Рисунок 1.2.8 – График отклонения внешнего края плёнки от плоскости жёсткой вставки при различных радиусах жёсткой вставки и различной угловой скорости

Анализ полученного графика позволил наложить ограничения на такие параметры космического аппарата, как соотношение радиусов плёнки и жёсткой вставки, угловую скорость плёнки, угловую скорость переориентации. Например, задаваясь ограничением угла отклонения плёнки от жёсткой вставки 0,2 рад, можно наложить ограничение на угловую скорость жёсткой вставки  $\omega_{в}$ , которая должна быть не менее 0,7 рад/с. Также, в дальнейшем, при моделировании пространственного разворота солнечного паруса ограничение на угловую скорость переориентации  $\omega_{с}$  составило 0,0009 рад/с. При этом, как видно из рисунка 1.2.8, основной изгиб плёнки при пространственной

переориентации солнечного паруса возникает возле жёсткой вставки, а на больших радиусах плёнка будет представлять собой плоский диск, расположенный под некоторым углом к плоскости жёсткой вставки. Представление поверхности плёнки в виде плоского диска (т.е. случай одной аппроксимирующей окружности) обеспечивается соответствующим выбором параметров солнечного паруса [35, 39].

### 1.3. АЛГОРИТМ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛЁНКИ

Рассмотрим теперь проблему активного демпфирования колебаний плёнки, возникающих в процессе эксплуатации под действием внешних сил [38, 39]. Так как установлено, что отклонение плёнки от плоскости жёсткой вставки составляет малую величину по сравнению с радиусом плёнки, а угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» много больше угловой скорости пространственного разворота солнечного паруса, можно воспользоваться следующей системой уравнений из [31] для угловых движений  $i$ -ой аппроксимирующей окружности в выбранной системе координат:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2\omega_B} \cdot I^{-1} \cdot M \cdot \beta - \frac{1}{2\omega_B} \cdot I^{-1} \cdot b \cdot u_x \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{2\omega_B} \cdot I^{-1} \cdot M \cdot \alpha + \frac{1}{2\omega_B} \cdot I^{-1} \cdot b \cdot u_y \end{cases}, \quad (1.3.1)$$

где  $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$  – угловые координаты, определяющие

пространственное положение аппроксимирующих окружностей по отношению к базовой системе координат;

$\alpha_0, \beta_0$  – угловые координаты, определяющие пространственное положение жёсткой вставки;

$n$  – число аппроксимирующих окружностей;

$I$  – матрица моментов инерции;

$u_x, u_y$  – управляющие воздействия, приложенные к жёсткой вставке;

$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  – матрица коэффициентов;

$M$  – матрица коэффициентов, элементы которой можно найти по следующим формулам:

$$M_{i,i-1} = -\frac{\pi \cdot P_i \cdot r_{i-1} \cdot R_{i-1} \cdot R_i}{(R_i - R_{i-1})},$$



$$M_{i,i+1} = -\frac{\pi \cdot P_i \cdot r_i \cdot R_i \cdot R_{i+1}}{(R_{i+1} - R_i)},$$

$$M_{i,i} = M_{i,i-1} + M_{i,i+1}, \quad (1.3.2)$$

Запишем систему (1.3.1) в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u, \quad (1.3.3)$$

где  $x = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$  – вектор состояния;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{M_{1,1}}{2\omega_B I_0} & -\frac{M_{1,2}}{2\omega_\epsilon I_0} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{M_{2,1}}{2\omega_\epsilon I_1} & -\frac{M_{2,2}}{2\omega_\epsilon I_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{M_{n+1,n+1}}{2\omega_\epsilon I_n} \\ \frac{M_{1,1}}{2\omega_\epsilon I_0} & \frac{M_{1,2}}{2\omega_\epsilon I_0} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{M_{2,1}}{2\omega_\epsilon I_1} & \frac{M_{2,2}}{2\omega_\epsilon I_1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{M_{n+1,n+1}}{2\omega_\epsilon I_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\omega_\epsilon I_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\omega_\epsilon I_0} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверим выполнение для системы (1.3.3) условия управляемости по отношению к моментам, приложенным к жёсткой вставке, и условие наблюдаемости по отношению к координатам пространственного положения жёсткой вставки.

Матрица управляемости размерностью  $(2n + 2) \times (4n + 4)$ :

$$R_u = [B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{2n+1} \cdot B] \quad (1.3.4)$$

$$R_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_e I_0} & 0 & 0 & \frac{-M_{1,1}}{(2\omega_e I_0)^2} & \frac{M_{1,1}^2}{(2\omega_e I_0)^3} + \frac{M_{1,2}M_{2,1}}{(2\omega_e I_0)^3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-M_{1,1}}{(2\omega_e)^2 I_0 I_1} & \frac{M_{1,1}M_{2,1}}{(2\omega_e)^3 I_0^2 I_1} + \frac{M_{2,1}M_{2,2}}{(2\omega_e)^3 I_0 I_1^2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2\omega_e I_0} & \frac{-M_{1,1}}{(2\omega_e I_0)^2} & 0 & 0 & \frac{M_{1,1}^2}{(2\omega_e I_0)^3} + \frac{M_{1,2}M_{2,1}}{(2\omega_e I_0)^3} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{-M_{1,1}}{(2\omega_e)^2 I_0 I_1} & 0 & 0 & \frac{M_{1,1}M_{2,1}}{(2\omega_e)^3 I_0^2 I_1} + \frac{M_{2,1}M_{2,2}}{(2\omega_e)^3 I_0 I_1^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы управляемости равен рангу исходной системы. Система (1.3.3) управляема [54].

Измеряемые координаты системы (1.3.1):

$$y = C \cdot x + D \cdot u, \quad (1.3.5)$$

где  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$  – матрица размерностью  $2n + 2 \times 2$ .

Матрица наблюдаемости размерностью  $(2n + 2) \times (2n + 2)$ :

$$R_n = [C \quad C \cdot A \quad \dots \quad C \cdot A^{2n+1}] \quad (1.3.6)$$

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{M_{1,1}}{2\omega_6 I_0} & \frac{M_{1,1}^2}{(2\omega_6 I_0)^3} + \frac{M_{1,2}M_{2,1}}{(2\omega_6 I_0)^3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M_{2,1}}{2\omega_6 I_1} & \frac{M_{1,1}M_{2,1}}{(2\omega_6)^3 I_0^2 I_1} + \frac{M_{2,1}M_{2,2}}{(2\omega_6)^3 I_0 I_1^2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \frac{M_{1,1}}{2\omega_6 I_0} & 0 & 0 & \frac{M_{1,1}^2}{(2\omega_6 I_0)^3} + \frac{M_{1,2}M_{2,1}}{(2\omega_6 I_0)^3} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{M_{2,1}}{2\omega_6 I_1} & 0 & 0 & \frac{M_{1,1}M_{2,1}}{(2\omega_6)^3 I_0^2 I_1} + \frac{M_{2,1}M_{2,2}}{(2\omega_6)^3 I_0 I_1^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен рангу исходной системы. Система (1.3.3) наблюдаема [54].

Поскольку диссипативные силы отсутствуют, система (1.3.3) представляет собой консервативное звено, а значит, корни её характеристического многочлена являются комплексно-сопряжёнными. При этом корни оказались сильно разнесены друг от друга. В таблице 1.3.1 приведён спектр колебаний поверхности солнечного паруса, определяемый мнимыми частями корней характеристического многочлена (1.3.3), и амплитуды колебаний на каждой из частот.

Таблица 1.3.1. Спектр колебаний поверхности солнечного паруса

Частота колебания, Гц	0,0155	1,68	4,4	8,03	12,4	17,6	...
Амплитуда колебаний, м	$10 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$0,7 \cdot 10^{-2}$	$0,4 \cdot 10^{-2}$	$0,27 \cdot 10^{-2}$	$0,16 \cdot 10^{-2}$	...

Следует учитывать, что при рассмотрении математической модели поверхности солнечного паруса с различным числом аппроксимирующих окружностей первый ненулевой тон колебаний будет незначительно изменяться, что позволяет говорить об обоснованности выбранного подхода к исследованию. На рисунке 1.3.1 представлен график изменения первого

ненулевого тона колебаний плёнки при различном числе аппроксимирующих окружностей в случае равномерного по радиусу шага разбиения на кольцевые области поверхности плёнки. Как видно из графика, с увеличением числа аппроксимирующих окружностей величина первого ненулевого тона приходит к установившемуся значению 0,0155 Гц при 40 аппроксимирующих окружностях.

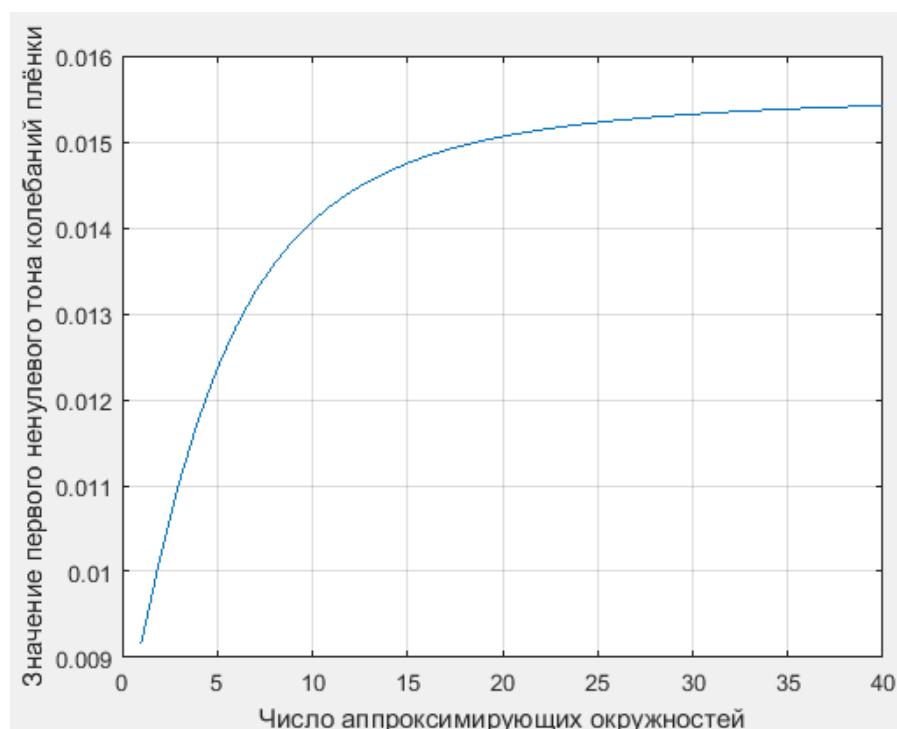


Рисунок 1.3.1 – График изменения первого ненулевого тона колебаний плёнки при различном числе аппроксимирующих окружностей в случае равномерного по радиусу шага разбиения на кольцевые области поверхности плёнки

Рассмотрим случай неравномерного по радиусу шага разбиения на кольцевые области поверхности плёнки. В этом случае меньший шаг следует делать возле жёсткой вставки, так как там происходит основной изгиб плёнки. Поэтому при аппроксимации плёнки кольцевыми областями следует одну кольцевую область выделить на радиусах плёнки от  $R_b$  до  $R_k$ , остальные кольцевые области сгруппировать вблизи жёсткой вставки.

При разбиении на две аппроксимирующие окружности и более первая кольцевая область берётся в пределах от  $r_1 = R_{\text{п}}$  до  $r_2 = R_k$ , остальные находятся по следующей формуле:

$$r_i = r_{i-1} + h, \quad (1.3.7)$$

где  $h = \frac{R_k - R_{\text{п}}}{n}$  – шаг разбиения на кольцевые области поверхности плёнки.

При таком разбиении на кольцевые области первый ненулевой тон колебаний плёнки приходит к установившемуся значению уже при трёх аппроксимирующих окружностях.

Целесообразно поставить задачу демпфирования первого (ненулевого) тона, как оказывающего самое сильное влияние на установившуюся форму поверхности плёнки [38, 39]. Представим модель полотна солнечного паруса в виде одной аппроксимирующей окружности и жёсткой вставки. В этом случае систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_0}{dt} = -\frac{M_{1,1}}{2\omega_{\text{в}}I_0} \cdot \beta_0 - \frac{M_{1,1}}{2\omega_{\text{в}}I_0} \cdot \beta_1 - \frac{1}{2\omega_{\text{в}}I_0} \cdot u_x \\ \frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{M_{2,2}}{2\omega_{\text{в}}I_1} \cdot \beta_0 - \frac{M_{2,2}}{2\omega_{\text{в}}I_1} \cdot \beta_1 \\ \frac{d\beta_0}{dt} = \frac{M_{1,1}}{2\omega_{\text{в}}I_0} \cdot \alpha_0 + \frac{M_{1,1}}{2\omega_{\text{в}}I_0} \cdot \alpha_1 + \frac{1}{2\omega_{\text{в}}I_0} \cdot u_y \\ \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{M_{2,2}}{2\omega_{\text{в}}I_1} \cdot \alpha_0 + \frac{M_{2,2}}{2\omega_{\text{в}}I_1} \cdot \alpha_1 \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Тогда матрицы А и В можно записать в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_{1,1}}{2\omega_{\text{в}}I_0} & -\frac{M_{1,1}}{2\omega_{\text{в}}I_0} \\ 0 & 0 & -\frac{M_{2,2}}{2\omega_{\text{в}}I_1} & -\frac{M_{2,2}}{2\omega_{\text{в}}I_1} \\ \frac{M_{1,1}}{2\omega_{\text{в}}I_0} & \frac{M_{1,1}}{2\omega_{\text{в}}I_0} & 0 & 0 \\ \frac{M_{2,2}}{2\omega_{\text{в}}I_1} & \frac{M_{2,2}}{2\omega_{\text{в}}I_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\omega_{\text{в}}I_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\omega_{\text{в}}I_0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического многочлена системы без управления:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = j\hat{\omega}_1$ ,  $\lambda_4 = -j\hat{\omega}_1$ . Частота колебаний плёнки  $\hat{\omega}_1 = \frac{M_{1,1}I_1 + M_{2,2}I_0}{2\omega_{\text{в}}I_0I_1}$ .

Желаемый характеристический многочлен будем искать в виде:

$$(\lambda - \hat{\lambda}_1)^2 \cdot (\lambda - \hat{\lambda}_2) \cdot (\lambda - \hat{\lambda}_3) = 0, \quad (1.3.9)$$

где  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$  – желаемые корни характеристического многочлена.

Время демпфирования колебаний пленки  $t_d$  можно вычислить по следующему соотношению [55]:

$$t_d \leq \frac{1}{\eta} \ln \left( \frac{1}{\Delta} \right), \quad (1.3.10)$$

где  $\eta$  – расстояние между мнимой осью и ближайшей парой комплексно сопряженных корней;

$\Delta$  – радиус окрестности установившегося значения переходного процесса, при попадании в который процесс считается завершённым.

Сдвинем все корни характеристического многочлена вдоль вещественной оси комплексной плоскости в левую полуплоскость на величину  $\varepsilon$ . Величину сдвига будем считать равной величине длительности переходного процесса  $\eta$ , которую можно выразить из формулы (1.3.10) [55]:

$$\varepsilon = \frac{1}{t_d} \cdot \ln \left( \frac{1}{\Delta} \right). \quad (1.3.11)$$

Время затухания колебаний плёнки должно быть не больше, чем время разворота солнечного паруса. Ориентируясь на время разворота, равное величине  $t_p$ , получим следующее соотношение:

$$\varepsilon \geq t_p \ln \left( \frac{1}{\Delta} \right). \quad (1.3.12)$$

Записав  $\hat{\lambda}_1 = -\varepsilon$ ,  $\hat{\lambda}_2 = -\varepsilon + j\hat{\omega}_1$ ,  $\hat{\lambda}_3 = -\varepsilon - j\hat{\omega}_1$ , получим:

$$\lambda^4 + 4\varepsilon\lambda^3 + (\hat{\omega}_1^2 + 6\varepsilon^2) \cdot \lambda^2 + (4\varepsilon^3 + 2\varepsilon\hat{\omega}_1^2) \cdot \lambda + (\varepsilon^4 + \varepsilon^2\hat{\omega}_1^2) = 0$$

Управление будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= k_1\alpha_0 + k_2\alpha_1 + k_3\beta_0 + k_4\beta_1, \\ u_y &= k_5\alpha_0 + k_6\alpha_1 + k_7\beta_0 + k_8\beta_1. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Приравняв характеристический многочлен системы (1.3.8) с управлением (1.3.13) к желаемому характеристическому многочлену (1.3.9), получим систему из четырёх уравнений с восемью неизвестными. При симметричном законе управления её решение можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l}
k_1 = 4\varepsilon\omega_0 I_0 \\
k_2 = 4\varepsilon\omega_B I_0 - \frac{8\varepsilon(2\varepsilon^2 + \hat{\omega}_1^2)\omega_B^3 \cdot I_0^2 \cdot I_1^2}{M_{2,2} \cdot (I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1})} \\
k_3 = \frac{\sqrt{(I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1})^2 - 4\omega_B^2 I_0^2 I_1^2 (\hat{\omega}_1^2 + 2\varepsilon^2)}}{I_1} \\
k_4 = k_3 - \sqrt{\frac{M_{2,2}^2 (k_1 - k_2)^2 - 16\varepsilon^2 \omega_B^4 I_0^2 I_1^2 (\hat{\omega}_1^2 + \varepsilon^2)}{M_{2,2}^2}} \\
k_5 = -\frac{\sqrt{(I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1})^2 - 4\omega_B^2 I_0^2 I_1^2 (\hat{\omega}_1^2 + 2\varepsilon^2)}}{I_1} \\
k_6 = -k_3 + \sqrt{\frac{M_{2,2}^2 (k_1 - k_2)^2 - 16\varepsilon^2 \omega_B^4 I_0^2 I_1^2 (\hat{\omega}_1^2 + \varepsilon^2)}{M_{2,2}^2}} \\
k_7 = -4\varepsilon\omega_0 I_0 \\
k_8 = -4\varepsilon\omega_B I_0 - \frac{8\varepsilon(2\varepsilon^2 + \hat{\omega}_1^2)\omega_B^3 \cdot I_0^2 \cdot I_1^2}{M_{2,2} \cdot (I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1})}
\end{array} \right. . \quad (1.3.14)$$

Управление (1.3.14) можно представить в матричном виде:

$$u = Kx, \quad (1.3.15)$$

где  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ -k_3 & -k_4 & -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$ .

Разработанный закон управления (1.3.15) будет действовать и в случае представления поверхности солнечного паруса большим числом аппроксимирующих окружностей, обеспечивая необходимое демпфирование колебаний плёнки [38, 39]. На рисунках 1.3.2, 1.3.3 представлены переходные процессы по угловым координатам, определяющим пространственное положение аппроксимирующих окружностей, в случае представления поверхности паруса двумя аппроксимирующими окружностями и жёсткой вставкой. При расчётах было принято, что  $\varepsilon = 0,07$ . В этом случае время переходного процесса составит 2700 с.

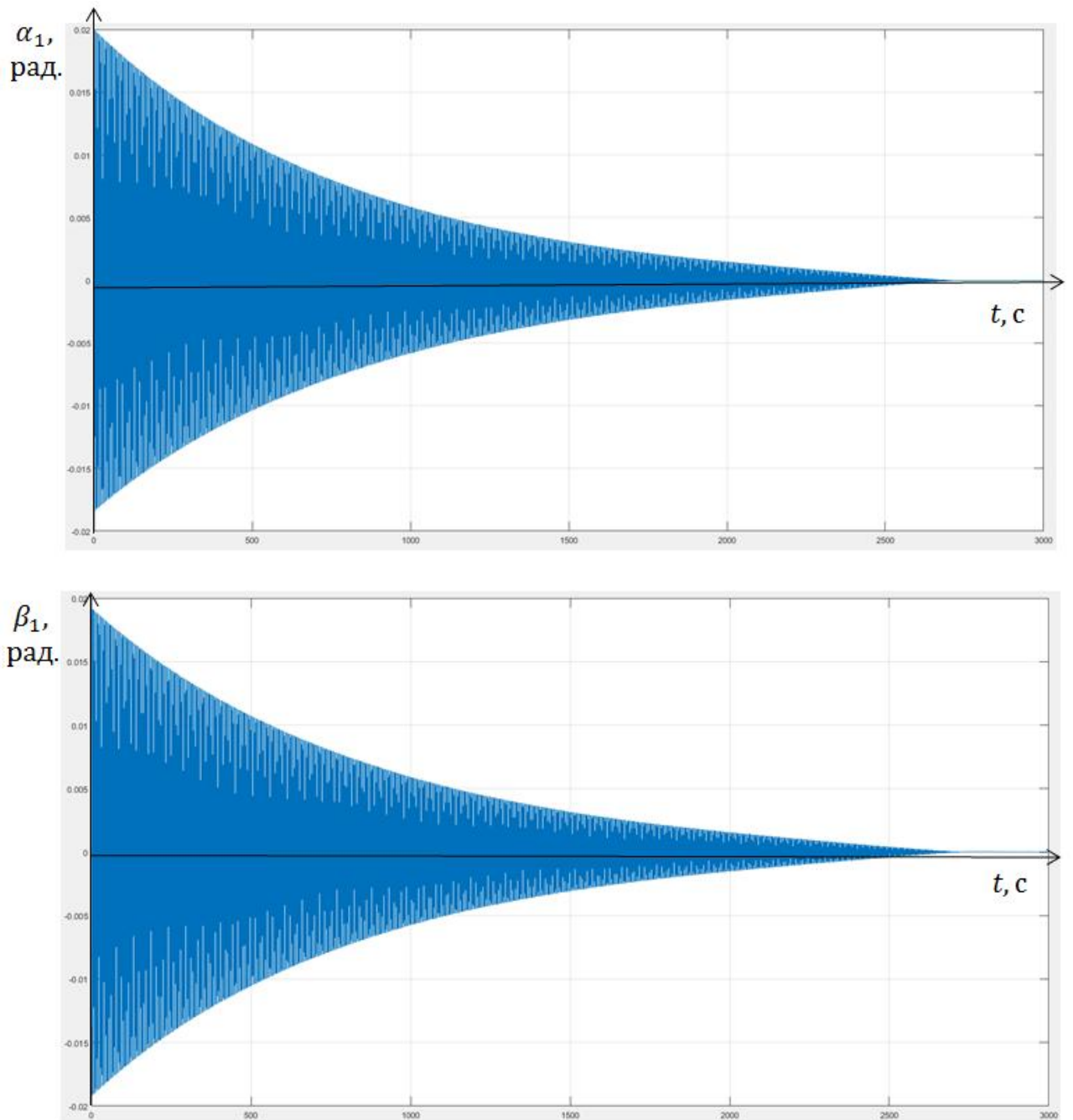


Рисунок 1.3.2 – Переходные процессы по угловым координатам, определяющим пространственное положение первой аппроксимирующей окружности



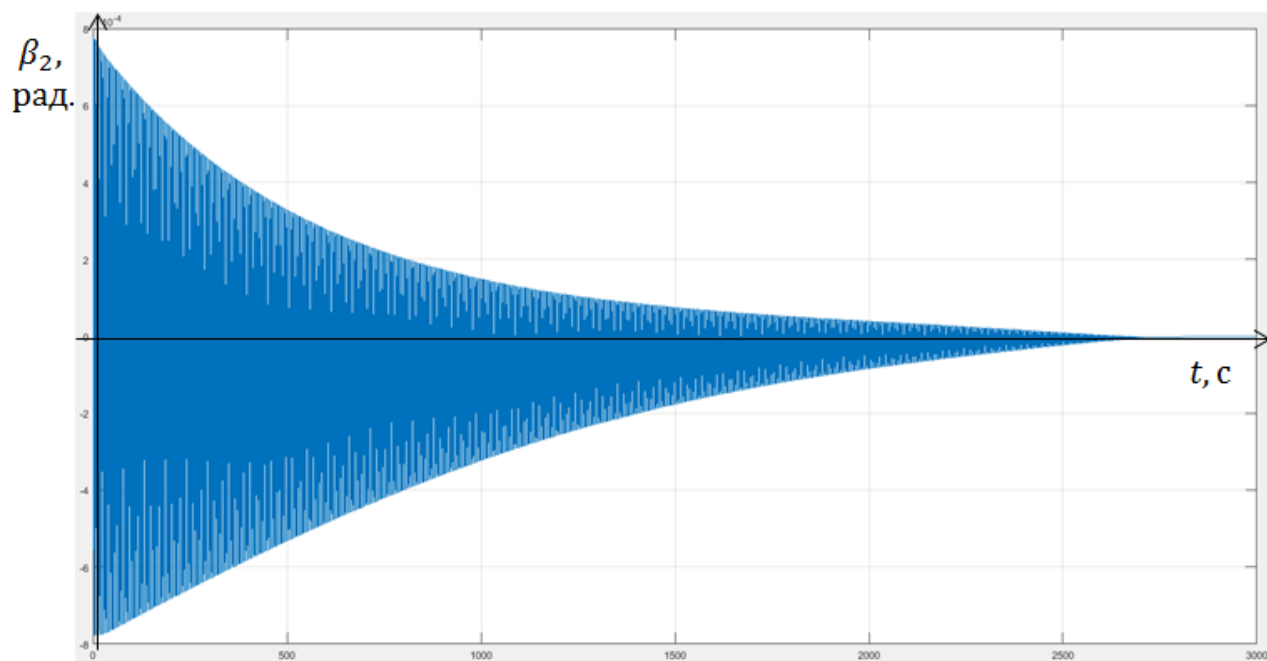
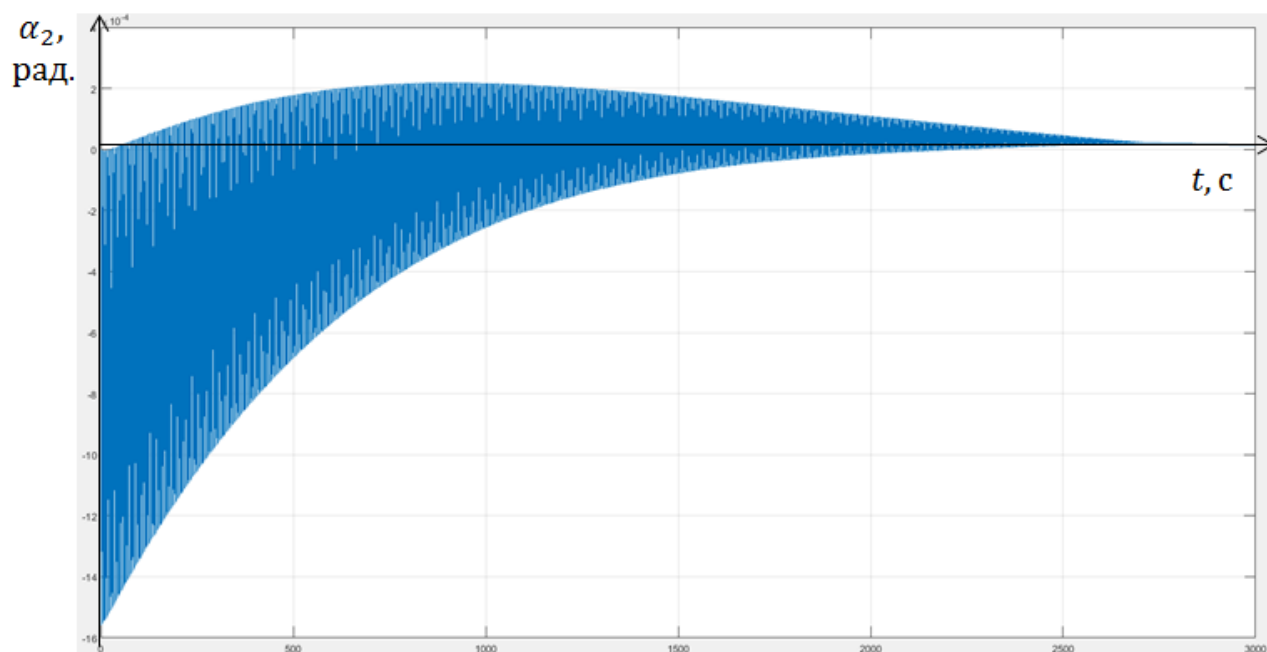


Рисунок 1.3.3 – Переходные процессы по угловым координатам, определяющим пространственное положение второй аппроксимирующей окружности

Рассмотрим случай, когда на управляющие воздействия наложены ограничения вида:  $|u_x| \leq u_{xmax}$ ,  $|u_y| \leq u_{ymax}$ . Для системы (1.3.8) с найденным управлением (1.3.14, 1.3.15) существует такое невырожденное линейное преобразование  $L$ , которое заменой переменных  $x = L \cdot y$  приведёт уравнения движения  $\frac{dx}{dt} = (A + BK)x$  к канонической форме Жордана [54]. Уравнения движения в новых переменных запишутся в виде:

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda y, \quad (1.3.16)$$

$$\text{где } \Lambda = L^{-1}(A + BK)L, \Lambda = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon - j\hat{\omega}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon + j\hat{\omega}_1 \end{bmatrix}.$$

Для уравнений движения (1.3.16) запишем функцию Ляпунова в виде [54]:

$$v_\Lambda(y) = y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + y_3\bar{y}_3 + y_4\bar{y}_4. \quad (1.3.17)$$

В этом случае производная функции Ляпунова по времени, с учётом выбранных корней характеристического многочлена, будет иметь следующий вид [54]:

$$w(y) = -\varepsilon \cdot (|y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2 + |y_4|^2). \quad (1.3.18)$$

В исходных координатах функция Ляпунова запишется в виде:

$$v(x) = v_\Lambda(L^{-1}x). \quad (1.3.19)$$

Функцию Ляпунова (1.3.18) относительно координаты  $\alpha_0$  можно записать в виде:

$$v(x) = G_1(\alpha_1, \beta_0, \beta_1) \cdot \alpha_0^2 + G_2(\alpha_1, \beta_0, \beta_1) \cdot \alpha_0 + G_3(\alpha_1, \beta_0, \beta_1), \quad (1.3.20)$$

где  $G_1(\alpha_1, \beta_0, \beta_1)$ ,  $G_2(\alpha_1, \beta_0, \beta_1)$ ,  $G_3(\alpha_1, \beta_0, \beta_1)$  – коэффициенты, зависящие от угловых координат  $\alpha_1, \beta_0, \beta_1$ .

Условно-оптимальный по отношению к функции Ляпунова закон управления  $\widehat{u}_x$  можно найти из соотношения [54]:

$$\text{grad}_{\widehat{x}} v \cdot f(x, \widehat{u}_x) = \min_{u_x \in U} \text{grad}_x v \cdot f(x, u_x). \quad (1.3.21)$$

Так как управление  $u_x$  входит только в первое уравнение системы (1.3.8), то условно-оптимальный по отношению к функции Ляпунова закон управления  $\widehat{u}_x$  будет определяться соотношением:

$$\widehat{u}_x = -u_{xmax} \text{sign}(2G_1(\alpha_1, \beta_0, \beta_1) \cdot \alpha_0 + G_2(\alpha_1, \beta_0, \beta_1)) \quad (1.3.22)$$

В общем виде условно-оптимальный закон управления  $\widehat{u}_x$  будет определяться соотношением:

$$\widehat{u}_x = -u_{xmax} \text{sign}(Q_1\alpha_0 + Q_2\alpha_1 + Q_3\beta_0 + Q_4\beta_1), \quad (1.3.23)$$

где  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  – коэффициенты.

Аналогично находим условно-оптимальный по отношению к функции Ляпунова закон управления  $\widehat{u}_y$ . Функцию Ляпунова (1.3.18) относительно координаты  $\beta_0$  можно записать в виде:

$$v(x) = J_1(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) \cdot \beta_0^2 + J_2(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) \cdot \beta_0 + J_3(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1), \quad (1.3.24)$$

где  $J_1(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1), J_2(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1), J_3(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$  – коэффициенты, зависящие от угловых координат  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ .

Так как управление  $u_y$  входит только в третье уравнение системы (1.3.8), то условно-оптимальный по отношению к функции Ляпунова закон управления  $\widehat{u}_y$  будет определяться соотношением:

$$\widehat{u}_y = -u_{ymax} \text{sign}(2J_1(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) \cdot \beta_0 + J_2(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)) \quad (1.3.25)$$

Так как закон управления  $u_y$  по отношению к закону управления  $u_x$  является симметричным, то условно-оптимальный закон управления  $\widehat{u}_y$  можно представить в следующем виде:

$$\widehat{u}_y = -u_{ymax} \text{sign}(Q_3\alpha_0 + Q_4\alpha_1 + Q_1\beta_0 + Q_2\beta_1). \quad (1.3.26)$$

На рисунках 1.3.4 и 1.3.5 приведены переходные процессы по угловым координатам, определяющим пространственное положение жёсткой вставки и аппроксимирующей окружности при ограничении на управление  $u_{xmax} = 10$ ,  $u_{ymax} = 10$ , сдвиг корней  $\varepsilon = 0,01$ . В этом случае время переходного процесса составит 400 с.

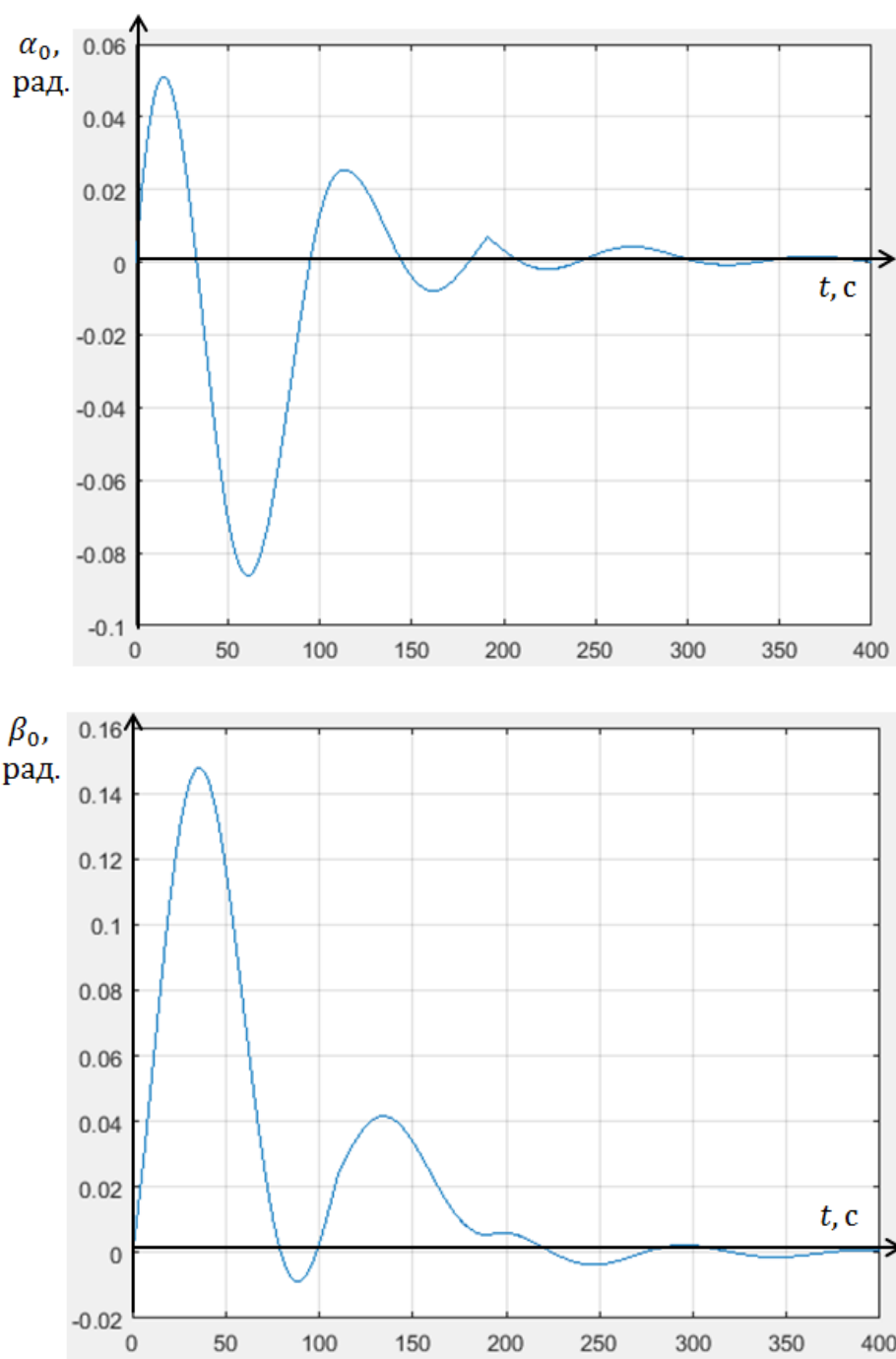


Рисунок 1.3.4 – Переходные процессы по угловым координатам, определяющим пространственное положение жёсткой вставки

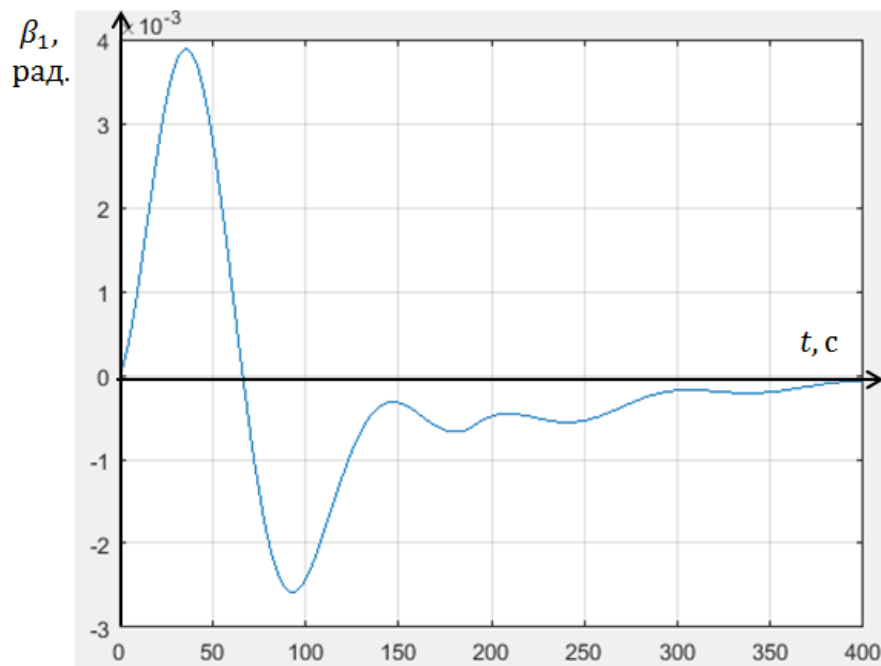
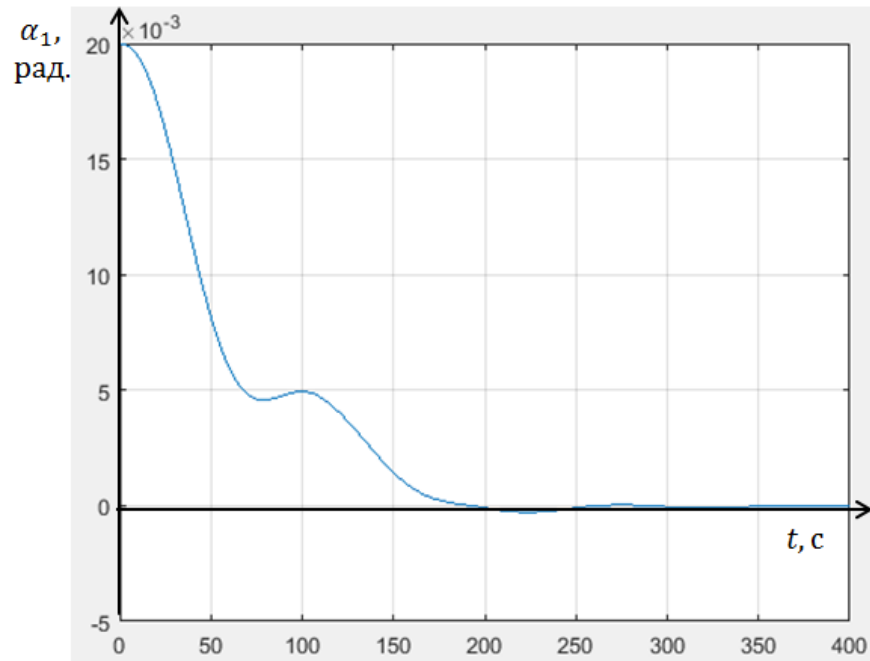


Рисунок 1.3.5 – Переходные процессы по угловым координатам, определяющим пространственное положение аппроксимирующей окружности

Система (1.3.3) является наблюдаемой, а значит, для определения пространственных координат аппроксимирующих окружностей можно построить редуцированный наблюдатель [38]. Рассмотрим случай одной аппроксимирующей окружности. На рисунке 1.3.6 представлена блок-схема

демпфирования колебаний плёнки для модели с одной аппроксимирующей окружностью, включающая редуцированный наблюдатель.

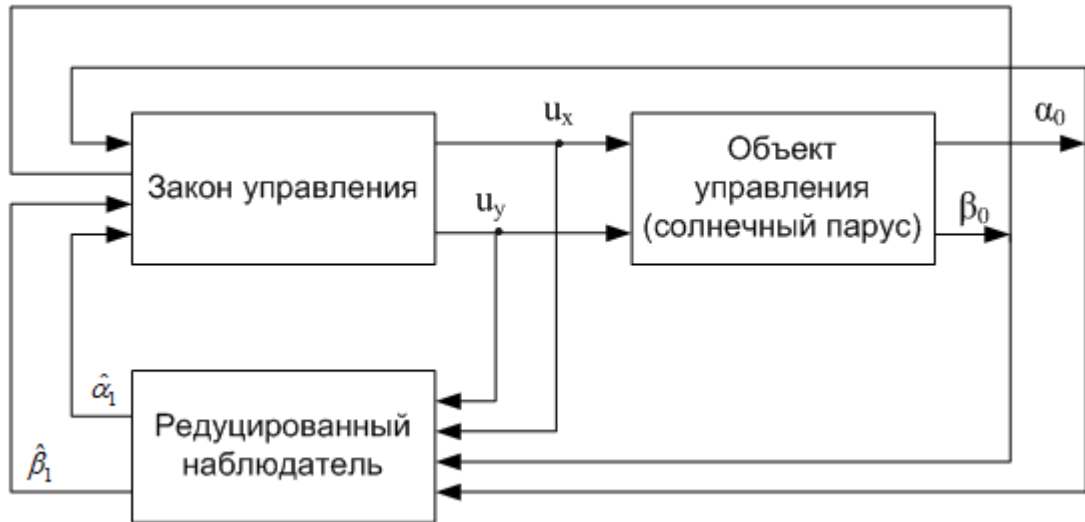


Рисунок 1.3.6 – Блок-схема демпфирования колебаний плёнки для модели с одной аппроксимирующей окружностью, включающая редуцированный наблюдатель

В этом случае справедливы уравнения [53]:

$$\dot{\hat{x}} = S \cdot y + \Phi \cdot v, \quad (1.3.27)$$

$$\dot{v} = Y \cdot v + F \cdot y + T \cdot B \cdot u, \quad (1.3.28)$$

где  $y = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$ ;

$v$  – двумерный вектор состояний наблюдателя;

$S, \Phi$  – матрицы чисел размером  $4 \times 2$ , которые определяются из уравнения:

$$S \cdot C + \Phi \cdot T = E; \quad (1.3.29)$$

$T$  – прямоугольная матрица, которая находится из уравнения:

$$T \cdot A - Y \cdot T = F \cdot C, \quad (1.3.30)$$

$F$  – произвольная матрица размером  $2 \times 2$ .

Уравнения (1.3.27) и (1.3.28) можно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \\ \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (1.3.31)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\omega_B I_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\omega_B I_0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (1.3.32)$$

В качестве матрицы  $Y$  удобно выбрать диагональную матрицу, на диагонали которой стоят отрицательные числа для обеспечения устойчивости наблюдателя. Выберем матрицу  $Y$  таким образом, чтобы обеспечить требуемое время переходного процесса в наблюдателе  $t_n = 0,01 \cdot t_d$ . Тогда:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{t_n} = -100 \cdot \frac{1}{t_d}, \\ \lambda_{1,2} = -100\varepsilon. \quad (1.3.33)$$

В этом случае должно выполняться соотношение:

$$\det(\lambda \cdot E - Y) = \left( \lambda + 100 \cdot \frac{1}{t_d} \right)^2 = 0. \quad (1.3.34)$$

Отсюда находим, что  $Y = \begin{bmatrix} -100 \cdot \frac{1}{t_d} & 0 \\ 0 & -100 \cdot \frac{1}{t_d} \end{bmatrix}$ , т.е.  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$ ,

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma = -100 \cdot \frac{1}{t_d}.$$

Параметры наблюдателя на основании (1.3.31) и (1.3.32) можно вычислить из следующих соотношений:  $\alpha_1 - \widehat{\alpha}_1$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & s_{12} & 0 \\ s_{21} & 0 & s_{22} & 0 \\ s_{31} & 0 & s_{32} & 0 \\ s_{41} & 0 & s_{42} & 0 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \varphi_{11}t_{11} + \varphi_{12}t_{21} & \varphi_{11}t_{12} + \varphi_{12}t_{22} & \varphi_{11}t_{13} + \varphi_{12}t_{23} & \varphi_{11}t_{14} + \varphi_{12}t_{24} \\ \varphi_{21}t_{11} + \varphi_{22}t_{21} & \varphi_{21}t_{12} + \varphi_{22}t_{22} & \varphi_{21}t_{13} + \varphi_{22}t_{23} & \varphi_{21}t_{14} + \varphi_{22}t_{24} \\ \varphi_{31}t_{11} + \varphi_{32}t_{21} & \varphi_{31}t_{12} + \varphi_{32}t_{22} & \varphi_{31}t_{13} + \varphi_{32}t_{23} & \varphi_{31}t_{14} + \varphi_{32}t_{24} \\ \varphi_{41}t_{11} + \varphi_{42}t_{21} & \varphi_{41}t_{12} + \varphi_{42}t_{22} & \varphi_{41}t_{13} + \varphi_{42}t_{23} & \varphi_{41}t_{14} + \varphi_{42}t_{24} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_{1,1}}{2 \cdot \omega_0 \cdot I_0} & -\frac{M_{1,1}}{2 \cdot \omega_0 \cdot I_0} \\ 0 & 0 & -\frac{M_{2,2}}{2 \cdot \omega_0 \cdot I_1} & -\frac{M_{2,2}}{2 \cdot \omega_0 \cdot I_1} \\ \frac{M_{1,1}}{2 \cdot \omega_0 \cdot I_0} & \frac{M_{1,1}}{2 \cdot \omega_0 \cdot I_0} & 0 & 0 \\ \frac{M_{2,2}}{2 \cdot \omega_0 \cdot I_1} & \frac{M_{2,2}}{2 \cdot \omega_0 \cdot I_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} \frac{t_{13}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} + \frac{t_{14}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} & \frac{t_{13}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} + \frac{t_{14}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} & -\frac{t_{11}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} - \frac{t_{12}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} & -\frac{t_{11}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} - \frac{t_{12}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} \\ \frac{t_{23}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} + \frac{t_{24}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} & \frac{t_{23}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} + \frac{t_{24}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} & -\frac{t_{21}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} - \frac{t_{22}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} & -\frac{t_{21}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} - \frac{t_{22}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \gamma \cdot t_{11} & \gamma \cdot t_{12} & \gamma \cdot t_{13} & \gamma \cdot t_{14} \\ \gamma \cdot t_{21} & \gamma \cdot t_{22} & \gamma \cdot t_{23} & \gamma \cdot t_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & f_{12} & 0 \\ f_{21} & 0 & f_{22} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3.36}
\end{aligned}$$

Элементы матрицы  $\Gamma$  находим из матричного уравнения (1.3.36) решением системы:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{t_{13}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} + \frac{t_{14}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} + \gamma \cdot t_{11} = f_{11} \\ \frac{t_{13}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} + \frac{t_{14}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} + \gamma \cdot t_{12} = 0 \\ -\frac{t_{11}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} - \frac{t_{12}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} + \gamma \cdot t_{13} = f_{12} \\ -\frac{t_{11}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} - \frac{t_{12}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} + \gamma \cdot t_{14} = 0 \\ \frac{t_{23}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} + \frac{t_{24}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} + \gamma \cdot t_{21} = f_{21} \\ \frac{t_{23}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} + \frac{t_{24}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} + \gamma \cdot t_{22} = 0 \\ -\frac{t_{21}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} - \frac{t_{22}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} + \gamma \cdot t_{23} = f_{22} \\ -\frac{t_{21}M_{1,1}}{2\omega_B I_0} - \frac{t_{22}M_{2,2}}{2\omega_B I_1} + \gamma \cdot t_{24} = 0 \end{array} \right. \quad (1.3.37)$$

Решая систему (1.3.36), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{11} = \frac{I_0[f_{11}(4I_0I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + M_{2,2}[I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]) - 2f_{12}I_1^2\gamma M_{1,1}\omega_B]}{\gamma(4I_0^2I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + [I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]^2)} \\ t_{12} = \frac{-I_1M_{1,1}[f_{11}[I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}] + 2f_{12}I_0I_1\gamma\omega_B]}{\gamma(4I_0^2I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + [I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]^2)} \\ t_{13} = \frac{I_0[f_{12}(4I_0I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + M_{2,2}[I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]) + 2f_{11}I_1^2\gamma M_{1,1}\omega_B]}{\gamma(4I_0^2I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + [I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]^2)} \\ t_{14} = \frac{I_1M_{1,1}[-f_{12}[I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}] + 2f_{11}I_0I_1\gamma\omega_B]}{\gamma(4I_0^2I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + [I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]^2)} \\ t_{21} = \frac{I_0[f_{21}(4I_0I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + M_{2,2}[I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]) - 2f_{22}I_1^2\gamma M_{1,1}\omega_B]}{\gamma(4I_0^2I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + [I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]^2)} \\ t_{22} = \frac{-I_1M_{1,1}[f_{21}[I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}] + 2f_{22}I_0I_1\gamma\omega_B]}{\gamma(4I_0^2I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + [I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]^2)} \\ t_{23} = \frac{I_0[f_{22}(4I_0I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + M_{2,2}[I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]) + 2f_{21}I_1^2\gamma M_{1,1}\omega_B]}{\gamma(4I_0^2I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + [I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]^2)} \\ t_{24} = \frac{I_1M_{1,1}[-f_{22}[I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}] + 2f_{21}I_0I_1\gamma\omega_B]}{\gamma(4I_0^2I_1^2\gamma^2\omega_B^2 + [I_0M_{2,2} + I_1M_{1,1}]^2)} \end{array} \right. \quad (1.3.38)$$

Элементы матриц  $S$  и  $\Phi$  можно вычислить, решив матричное уравнение (1.3.35). В итоге получим:

$$\begin{aligned}
s_{11} &= 1, s_{12} = 0, \\
s_{21} &= \frac{I_0 M_{2,2}}{I_1 M_{1,1}}, s_{22} = \frac{2I_0 \gamma \omega_0}{M_{1,1}}, \\
s_{31} &= 0, s_{32} = 1, \\
s_{41} &= -\frac{2I_0 \gamma \omega_B}{M_{1,1}}, s_{42} = \frac{I_0 M_{2,2}}{I_1 M_{1,1}}, \\
\varphi_{11} &= 0, \varphi_{12} = 0, \\
\varphi_{21} &= -\frac{\gamma(f_{22}[I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}] - 2f_{21} I_0 I_1 \gamma \omega_B)}{I_1 M_{1,1}(f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})}, \\
\varphi_{22} &= \frac{\gamma(f_{12}[I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}] - 2f_{11} I_0 I_1 \gamma \omega_B)}{I_1 M_{1,1}(f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})}, \\
\varphi_{31} &= 0, \varphi_{32} = 0, \\
\varphi_{41} &= \frac{\gamma(f_{21}[I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}] - 2f_{22} I_0 I_1 \gamma \omega_B)}{I_1 M_{1,1}(f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})}, \\
\varphi_{42} &= -\frac{\gamma(f_{11}[I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}] - 2f_{12} I_0 I_1 \gamma \omega_B)}{I_1 M_{1,1}(f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})}.
\end{aligned}$$

При выборе элементов произвольной матрицы  $F$  следует учитывать, что должно выполняться условие:  $f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} \neq 0$ . Задав эти элементы, можно однозначно определить матрицы  $T$ ,  $S$  и  $\Phi$ , а затем, подставив в уравнения (1.3.29) и (1.3.30), получить систему с редуцированным наблюдателем. Для удобства можно представить матрицу  $F$  в следующем виде:  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Тогда:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \\ \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{I_0 M_{2,2}}{I_1 M_{1,1}} & \frac{2I_0 \gamma \omega_B}{M_{1,1}} \\ 0 & 1 \\ -\frac{2I_0 \gamma \omega_B}{M_{1,1}} & \frac{I_0 M_{2,2}}{I_1 M_{1,1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\gamma(I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1})}{I_1 M_{1,1}} & \frac{\gamma(I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1} - 2I_0 I_1 \gamma \omega_B)}{I_1 M_{1,1}} \\ 0 & 0 \\ -\frac{2I_0 I_1 \gamma^2 \omega_B}{I_1 M_{1,1}} & -\frac{\gamma(I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1} - 2I_0 I_1 \gamma \omega_B)}{I_1 M_{1,1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (1.3.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} -\frac{4I_0 I_1^2 \gamma^2 \omega_B^2 + M_{2,2} [I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}] - 2I_1^2 \gamma M_{1,1} \omega_B}{2\omega_0 \gamma (4I_0^2 I_1^2 \gamma^2 \omega_B^2 + [I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}]^2)} & \frac{4I_0 I_1^2 \gamma^2 \omega_B^2 + M_{2,2} [I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}] + 2I_1^2 \gamma M_{1,1} \omega_B}{2\omega_B \gamma (4I_0^2 I_1^2 \gamma^2 \omega_B^2 + [I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}]^2)} \\ \frac{I_1^2 M_{1,1}}{4I_0^2 I_1^2 \gamma^2 \omega_B^2 + [I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}]^2} & \frac{4I_0 I_1^2 \gamma^2 \omega_B^2 + M_{2,2} [I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}]}{2\omega_B \gamma (4I_0^2 I_1^2 \gamma^2 \omega_B^2 + [I_0 M_{2,2} + I_1 M_{1,1}]^2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.3.40}$$

Промоделируем систему с построенным законом управления (1.3.24, 1.3.26) с учётом наблюдателя (1.3.31, 1.3.38-1.3.40). На рисунке 1.3.7 представлено расхождение оценки наблюдаемых угловых координат аппроксимирующей окружности с её реальными значениями. Как видно, ошибка оценивания приходит к нулевому значению за 25 с, что значительно меньше времени переходного процесса при демпфировании колебаний плёнки.

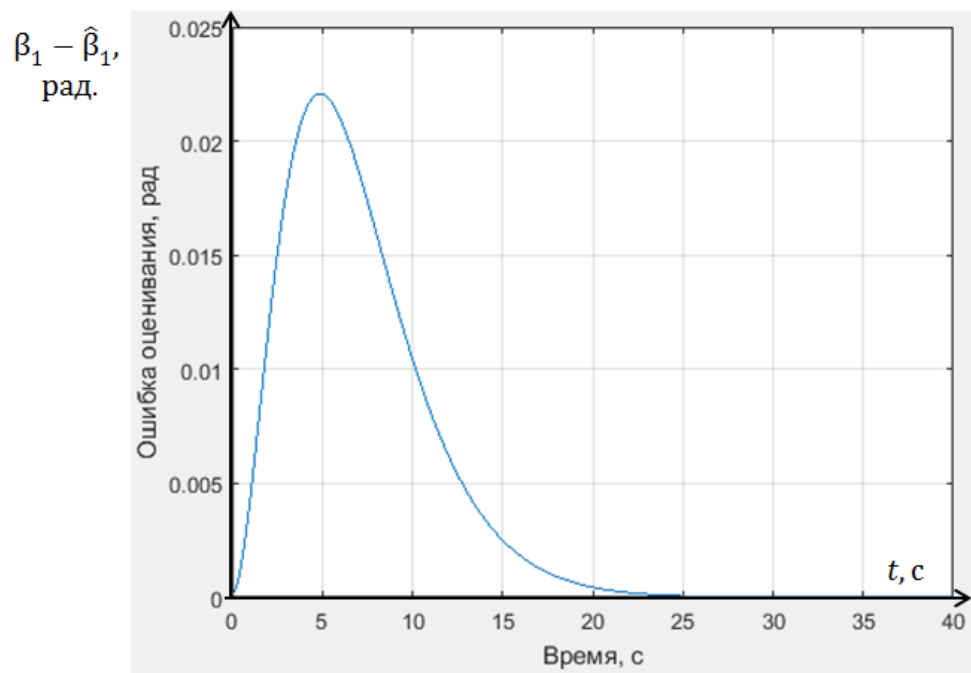
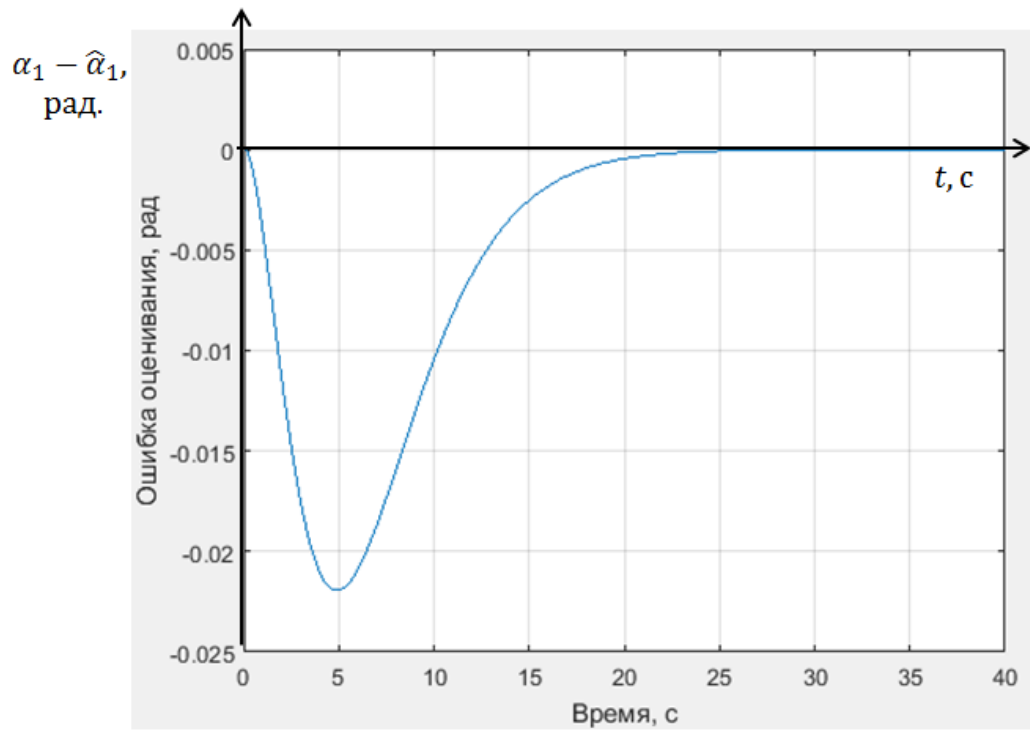


Рисунок 1.3.7 – Расхождение оценки наблюдаемых угловых координат аппроксимирующей окружности с её реальными значениями.

## ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ

Для установления приемлемой модели поверхности паруса при его пространственном развороте было проведено исследование формы поверхности плёнки при вращении солнечного паруса. Для этого была использована математическая модель солнечного паруса в виде набора аппроксимирующих окружностей, моменты инерции которых совпадают с моментами инерции кольцевых областей поверхности плёнки. При этом был установлен коэффициент пропорциональности, учитывающий конструктивные особенности самого паруса. Истинность данной математической модели подтверждена результатами моделирования, которые совпали с более сложными математическими моделями вращающейся мембраны. При этом следует отметить, что используемая модель даёт наглядное представление о поведении плёнки при вращении солнечного паруса.

Оптимальное количество аппроксимирующих окружностей было определено с помощью анализа установившейся формы поверхности плёнки при равномерном вращательном движении солнечного паруса. Это позволило наложить ограничения на такие параметры космического аппарата, как соотношение радиусов плёнки и жёсткой вставки, угловую скорость плёнки, угловую скорость переориентации.

В результате проведённого исследования была обоснована возможность представления плёнки при пространственном развороте солнечного паруса в виде плоского диска, расположенного относительно плоскости жёсткой вставки под некоторым углом, зависящим от угловой скорости переориентации.

Ввиду практически нулевого значения диссипативных сил отдельно рассматривался вопрос о демпфировании колебаний плёнки при эволюции солнечного паруса, вне зависимости от числа аппроксимирующих окружностей, составляющих модель плёнки. При этом использовалась система первого приближения. При отсутствии активного демпфирования корни

характеристического многочлена этой системы имеют нулевую действительную часть, а их мнимая часть будет определять частоты колебаний плёнки. Значения корней сильно разнесены друг от друга, а значит, амплитуды колебаний высших гармоник значительно меньше амплитуды колебаний первого тона. При этом было установлено, что неравномерное разбиение поверхности паруса на аппроксимирующие окружности приводит первый ненулевой тон колебаний к установившемуся значению при меньшем числе аппроксимирующих окружностей.

Предполагая, что силовое воздействие на плёнку в месте её крепления к жёсткой вставке является безынерционным, можно разработать алгоритм активного демпфирования колебаний любых тонов рассматриваемой модели. Было доказано, что достаточно обеспечить активное демпфирование только первого ненулевого тона для математической модели с одной аппроксимирующей окружностью. Для этого разработан соответствующий алгоритм, обоснованность использования которого была подтверждена результатами моделирования. Также был разработан закон демпфирования колебаний плёнки, учитывающий ограничение на величину управляющего воздействия.

Поскольку для модели любой сложности выполняются условия наблюдаемости, то, измеряя угловые скорости движения жёсткой вставки, можно определить состояние поверхности плёнки. Для определения вектора состояния для модели с одной аппроксимирующей окружностью был построен редуцированный наблюдатель.

## 2. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТРЕБУЕМОЙ ОРИЕНТАЦИИ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА

### 2.1. АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАЗВОРОТОМ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА ПУТЁМ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ МАХОВИКА И СИСТЕМЫ «ЖЁСТКАЯ ВСТАВКА – ПЛЁНКА»

Если рассматривать сравнительно небольшие отрезки времени, то орбитальная система координат, относительно которой задаётся положение солнечного паруса, может считаться инерциальной. Предполагается, что солнечный парус находится в равновесии, если он неподвижен относительно выбранной системы координат. Тогда под пространственным разворотом солнечного паруса можно понимать изменение направления вектора угловой скорости жёсткой вставки при перемещении солнечного паруса из одного равновесного состояния в другое.

Предлагается изменять угол между векторами кинетических моментов системы «жёсткая вставка – плёнка» и маховика [35, 36, 39, 41]. Равенство нулю общего кинетического момента конструкции приведёт к тому, что космический аппарат начнет вращаться вокруг оси, совпадающей с суммой этих векторов. Направление векторов кинетических моментов солнечного паруса при его пространственном развороте приведено на рисунке 2.1.1. Введены следующие обозначения:  $\vec{L}_в$  – вектор кинетического момента жесткой вставки,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ ;  $\vec{L}_п$  – вектор кинетического момента плёнки,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ ;  $\vec{L}_м$  – вектор кинетического момента маховика,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ ; ОК – ось, противоположная по направлению сумме векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка»  $\vec{L}_{\text{сум}}$  и проходящая через центр масс солнечного паруса;  $I_{ОК}$  – момент инерции солнечного паруса относительно оси ОК,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $\omega_{ОК}$  – угловая скорость разворота солнечного паруса вокруг оси ОК,  $\text{рад}/\text{с}^2$ .





Предпочтительным оказывается вариант, когда кинетические моменты системы «жёсткая вставка – плёнка» и маховика равны по модулю [36, 39, 41, 42]. В этом случае солнечный парус можно развернуть в любое желаемое положение при сколь угодно малом изменении угла между векторами кинетических моментов элементов конструкции, значит – при сколь угодно малых затратах энергии; при этом приборный отсек сможет занимать неподвижное пространственное положение после переориентации [36, 39, 41, 42]. На рис. 2.1.2 показаны возможные положения векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» в случае их равенства по модулю при пространственном развороте солнечного паруса. Через  $\vec{L}_{c.1}$  и  $\vec{L}_{c.2}$  обозначены крайние положения вектора кинетического момента системы «жёсткая вставка – плёнка» в результате разворота солнечного паруса вокруг оси ОК, через  $\vec{L}_{m.1}$  и  $\vec{L}_{m.2}$  – крайние положения вектора кинетического момента маховика. Как видно, в этом случае солнечный парус можно развернуть в противоположное положение при небольшом изменении угла между векторами кинетических моментов [41, 42].

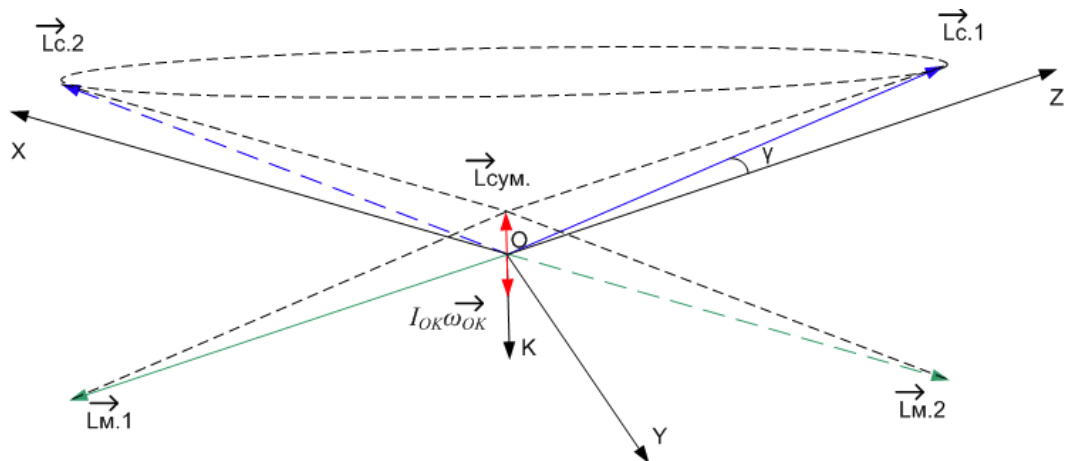


Рисунок 2.1.2 – Возможные положения векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» в случае их равенства по модулю

На рис. 2.1.3 показаны возможные положения векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» в случае их

неравенства по модулю. В этом случае угол, на который сможет развернуться солнечный парус, будет значительно меньше, чем в случае равенства по модулю векторов кинетических моментов элементов конструкции, при этом вектор кинетического момента системы «жесткая вставка – плёнка» будет описывать конус в пространстве.

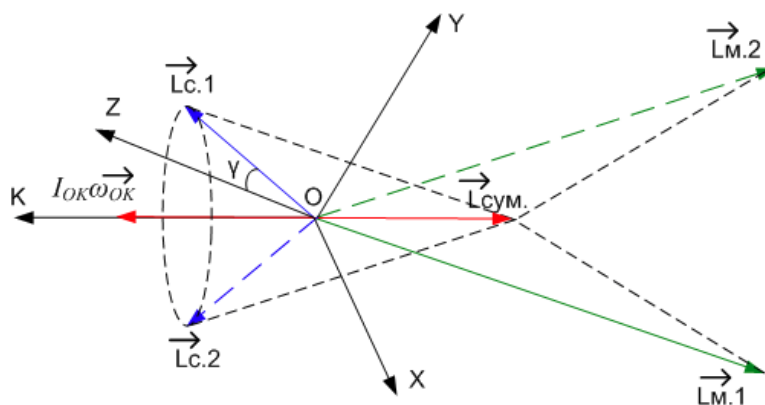


Рисунок 2.1.3 – Возможные положения векторов кинетических моментов маховика и системы «жесткая вставка – плёнка» в случае их неравенства по модулю

Угол между векторами кинетических моментов жесткой вставки и плёнки определяется отклонением плёнки вследствие гироскопического момента, действующего на её поверхность [40, 58, 59]. В этом случае кинетический момент системы «жесткая вставка – плёнка»  $L_c$  определяется соотношением:

$$L_c = \sqrt{L_B^2 + L_{II}^2 + 2L_B L_{II} \cos(\delta)}. \quad (2.1.3)$$

Угловая скорость вращения солнечного паруса  $\omega_{OK}$ , рад/с, будет определяться соотношением:

$$\omega_{OK} = \frac{\sqrt{L_c^2 + L_M^2 - 2L_c L_M \cos(\gamma)}}{I_{OK}}. \quad (2.1.4)$$

При малых углах  $\delta$  приближённо можно считать  $L_c = L_M = L$ , тогда выражение (2.1.4) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2L \sin \frac{\gamma}{2}}{I_{OK}}, \quad (2.1.5)$$

где  $\vartheta$  – угол разворота солнечного паруса вокруг оси ОК, рад.

Отклонение кинетического момента плёнки от кинетического момента жёсткой вставки будет в основном определяться угловым положением внешнего края плёнки ( $\delta \approx \varphi(R_{\Pi})$ ), которое, с учётом соотношения (1.2.24), можно найти по формуле:

$$\delta \approx \frac{R_k^2}{R_k^2 - AR_{\Pi}^2} \cdot \frac{2\omega_{OK} \cdot \sin \phi}{(3 + \mu_{\Pi}) \cdot \omega_B} \cdot \left( \frac{R_{\Pi}^2}{R_B^2} - 1 + 2 \ln \left( \frac{R_{\Pi}}{R_B} \right) \right), \quad (2.1.6)$$

где  $\phi$  – угол между вектором угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка» и угловой скоростью вращения солнечного паруса, рад.

При малых углах отклонения между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» внешний момент  $M_B$ , Н·м, приложенный к солнечному парусу, будет определяться соотношением [58]:

$$M_B \approx L\omega_{OK}. \quad (2.1.7)$$

Так как угол  $\phi \approx \frac{\pi}{2}$  ( $\sin \phi \approx 1$ ), выражение (2.1.6), с учётом соотношения (2.1.7), можно представить в следующем виде:

$$\delta = \frac{R_k^2}{R_k^2 - AR_{\Pi}^2} \cdot \frac{2M_B \sin \phi}{(3 + \mu_{\Pi}) \omega_B L} \cdot \left( \frac{R_{\Pi}^2}{R_B^2} - 1 + 2 \ln \left( \frac{R_{\Pi}}{R_B} \right) \right). \quad (2.1.8)$$

Используя теорему синусов, можно получить соотношение, определяющее угол между векторами кинетических моментов солнечного паруса и маховика:

$$\tau = \pi - \arcsin \left( \frac{L \cdot \sin \gamma}{I_{OK} \omega_{OK}} \right). \quad (2.1.9)$$

Соотношение для угла между векторами кинетических моментов солнечного паруса и системой «жёсткая вставка – плёнка» запишется в следующем виде:

$$\zeta = \pi - \arcsin \left( \frac{L \cdot \sin \gamma}{I_{OK} \omega_{OK}} \right). \quad (2.1.10)$$

Соотношение для угла между векторами кинетических моментов жёсткой вставки и системы «жёсткая вставка – плёнка» имеет вид:

$$\xi = \arcsin \left( \frac{L_{\Pi} \cdot \sin \delta}{L} \right). \quad (2.1.11)$$

Угол между вектором угловой скорости жёсткой вставки и вектором кинетического момента солнечного паруса определяется следующим соотношением:

$$\phi = \zeta + \xi. \quad (2.1.12)$$

Величина изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» будет определяться соотношением:

$$\gamma = \chi + \delta. \quad (2.1.13)$$

Для правомерности представления модели плёнки в виде плоского диска необходимо наложить ограничение на угловую скорость разворота солнечного паруса  $\omega_{OK}$ , а значит, на изменение угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». Приблизённо выражение (2.1.8) с учётом (2.1.5) можно записать в виде:

$$\delta = \frac{2KL}{I_{OK} \cdot \omega_B} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (2.1.14)$$

$$\text{где } K = \frac{R_k^2}{R_k^2 - AR_{\Pi}^2} \cdot \frac{1}{(3 + \mu_{\Pi})} \cdot \left( \frac{R_{\Pi}^2}{R_B^2} - 1 + 2 \cdot \ln \left( \frac{R_{\Pi}}{R_B} \right) \right).$$

При малых углах  $\gamma$  соотношение (2.1.12) приближённо можно записать в следующем виде:

$$\delta \approx \frac{KL}{I_{OK} \cdot \omega_z} \cdot \gamma. \quad (2.1.15)$$

С учётом (2.1.13) можно записать следующее соотношение:

$$\delta = \frac{KL}{I_{OK} \omega_B - KL} \cdot \chi. \quad (2.1.16)$$

Из (2.1.16) следует, что предельное значение угла отклонения вектора кинетического момента маховика от оси, противоположной по направлению оси  $OZ_1$ :

$$\hat{\chi} = \left( \frac{I_{OK} \cdot \omega_B}{K \cdot L} - 1 \right) \cdot \hat{\delta}, \quad (2.1.17)$$

где  $\hat{\delta}$  – предельный угол между векторами кинетических моментов плёнки и жёсткой вставки, рад.

Аналогично выглядит соотношение для предельного значения угловой скорости разворота солнечного паруса:

$$\hat{\omega}_{OK} = \frac{\hat{\delta} \cdot \omega_B}{K}. \quad (2.1.18)$$

Например, задаваясь ограничением на угол между векторами кинетических моментов жёсткой вставки и плёнки  $\hat{\delta} = 0,2$  рад, по соотношению (2.1.18) получим, что предельная угловая скорость разворота солнечного паруса  $\hat{\omega}_{OK} = 0,0064$  рад/с, а внешний момент, определяемый по формуле (2.1.7), должен составить  $M_B = 512$  Н·м при  $L = 80000$  кг·м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>.

Момент инерции солнечного паруса  $I_{OK}$ , кг·м<sup>2</sup>, можно найти как сумму моментов инерции маховика, приборного отсека, жёсткой вставки и плёнки относительно оси ОК по следующему соотношению:

$$I_{OK} = I_{МОК} + I_{ОТОК} + I_{ВОК} + I_{ПОК}, \quad (2.1.19)$$

где  $I_{МОК}$  – момент инерции маховика относительно оси ОК, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{ОТОК}$  – момент инерции приборного отсека относительно оси ОК, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{ВОК}$  – момент инерции жёсткой вставки относительно оси ОК, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{ПОК}$  – момент инерции плёнки относительно оси ОК, кг·м<sup>2</sup>.

Момент инерции маховика относительно оси ОК можно определить по формуле [51]:

$$I_{МОК} = I_{МХ} \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \tau \right) + I_{МУ} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} + I_{МЗ} \cdot \cos^2 \tau, \quad (2.1.20)$$

где  $I_{МХ}$  – момент инерции маховика относительно оси ОХ, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{МУ}$  – момент инерции маховика относительно оси ОУ, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{МЗ}$  – момент инерции маховика относительно оси ОZ, кг·м<sup>2</sup>.

Формулу (2.1.20) можно представить в следующем виде:

$$I_{МОК} = \left[ \frac{m_M \cdot R_M^2}{4} + \frac{m_M \cdot h_M^2}{12} \right] \cdot \sin^2(\tau) + \frac{m_M \cdot R_M^2}{2} \cdot \cos^2 \tau, \quad (2.1.21)$$

где  $R_M$  – радиус маховика, м;

$h_M$  – глубина маховика, м;

$m_M$  – масса маховика, кг.

Аналогично, момент инерции приборного отсека  $I_{отОК}$  относительно оси ОК можно найти по формуле:

$$I_{отОК} = \left[ \frac{m_{от} \cdot (R_M^2 + R_{от}^2)}{4} + \frac{m_{от} \cdot h_{от}^2}{12} \right] \cdot \sin^2 \phi + \frac{m_{от} \cdot (R_M^2 + R_{от}^2)}{2} \cdot \cos^2 \phi, \quad (2.1.22)$$

где  $R_{от}$  – наружный радиус приборного отсека, м;

$h_{от}$  – глубина приборного отсека, м;

$m_{от}$  – масса приборного отсека, кг.

Момент инерции жёсткой вставки  $I_{вОК}$  относительно оси ОК можно найти по формуле:

$$I_{вОК} = \left[ \frac{m_{в} \cdot (R_B^2 + R_{от}^2)}{4} + \frac{m_{в} \cdot h_{в}^2}{12} \right] \cdot \sin^2 \phi + \frac{m_{в} \cdot (R_B^2 + R_{от}^2)}{2} \cdot \cos^2 \phi, \quad (2.1.23)$$

где  $h_{в}$  – глубина жёсткой вставки, м;

$m_{в}$  – масса жёсткой вставки, кг.

Момент инерции пленки  $I_{пОК}$  относительно оси ОК при условии, что толщиной плёнки можно пренебречь ( $h_{пл.} \approx 0$ ):

$$I_{пОК} = \frac{m_{пл.} \cdot (R_B^2 + R_{п}^2)}{4} \cdot \sin^2(\phi + \delta) + \frac{m_{п.} \cdot (R_B^2 + R_{п}^2)}{2} \cdot \cos^2(\phi + \delta). \quad (2.1.24)$$

В общем случае соотношение для момента инерции солнечного паруса  $I_{ОК}$  относительно оси ОК будет иметь вид:

$$I_{ОК} = I_{ОКx} \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) + I_{ОКy} \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) + I_{ОКz} \cdot \cos^2(\psi), \quad (2.1.25)$$

где  $\psi$  – угол между вектором кинетического момента элемента конструкции солнечного паруса (маховика, приборного отсека, жёсткой вставки или плёнки) и осью разворота солнечного паруса ОК.

При небольшом угле отклонения вектора кинетического момента системы «жёсткая вставка – плёнка» от его первоначального направления угол  $\psi \approx \pi/2$ . Из формулы (2.1.25) получим, что  $I_{ОК} \approx I_{ОКx}$ .

Пусть с текущим пространственным положением жёсткой вставки связана ортонормированная система координат  $OX_1Y_1Z_1$ , с желаемым пространственным положением – ортонормированная система координат

$OX_2Y_2Z_2$ , координаты которой относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  выражаются следующей матрицей:

$$G_{ж} = \begin{bmatrix} x_X & y_X & z_X \\ x_Y & y_Y & z_Y \\ x_Z & y_Z & z_Z \end{bmatrix}. \quad (2.1.26)$$

С направлением вектора внешнего момента, который обеспечит изменение угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», связана ось  $ON$ . Она будет лежать в плоскости  $OX_1Y_1$  и составлять с осью  $OX_1$  угол  $\kappa$ . Ось  $ON$  имеет пространственное положение относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  [60]:

$$ON^T = [\cos \kappa \quad \sin \kappa \quad 0]. \quad (2.1.27)$$

Пользуясь определением матриц вращения из [60], пространственное положение вектора кинетического момента маховика относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$ :

$$\frac{\vec{L}_M}{|L_M|} = \begin{bmatrix} \sin \chi \sin \kappa \\ \sin \chi \cos \kappa \\ -\cos \chi \end{bmatrix}. \quad (2.1.28)$$

Пространственное положение вектора кинетического момента плёнки от вектора кинетического момента жёсткой вставки вследствие гироскопического момента определяется следующим соотношением:

$$\frac{\vec{L}_\Pi}{|L_\Pi|} = \begin{bmatrix} \sin \delta \sin \kappa \\ \sin \delta \cos \kappa \\ \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (2.1.29)$$

Вращение солнечного паруса будет происходить вокруг оси  $OK$ , противоположной по направлению сумме векторов кинетических моментов вращающихся элементов конструкции. Пространственное положение нормированной оси  $OK$  относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  с учётом (2.1.28, 2.1.29) будет определяться следующим соотношением:

$$\begin{aligned}
OK &= \frac{1}{I_{OK}\omega_{OK}} \left( |L_B| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + |L_M| \begin{bmatrix} -\sin \chi \sin \kappa \\ \sin \chi \cos \kappa \\ -\cos \chi \end{bmatrix} + |L_N| \begin{bmatrix} \sin \delta \sin \kappa \\ \sin \delta \cos \kappa \\ \cos \delta \end{bmatrix} \right), \\
OK &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{OK}\omega_{OK}} (-|L_M| \sin \chi + |L_N| \sin \delta) \sin \kappa \\ \frac{1}{I_{OK}\omega_{OK}} (|L_M| \sin \chi + |L_N| \sin \delta) \cos \kappa \\ \frac{1}{I_{OK}\omega_{OK}} (|L_B| - |L_M| \cos \chi + |L_N| \cos \delta) \end{bmatrix}. \quad (2.1.30)
\end{aligned}$$

Пренебрегая временем изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», ось ОК можно считать осью Эйлера, вокруг которой происходит вращение космического аппарата. В общем виде пространственное положение оси ОК относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  можно записать в следующем виде:

$$OK = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}. \quad (2.1.31)$$

Матрица вращения вокруг оси ОК запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
F &= \\
&\begin{bmatrix} \cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta) \hat{x}^2 & (1 - \cos \vartheta) \hat{x}\hat{y} - \sin \vartheta \hat{z} & (1 - \cos \vartheta) \hat{x}\hat{z} + \sin \vartheta \hat{y} \\ (1 - \cos \vartheta) \hat{x}\hat{y} + \sin \vartheta \hat{z} & \cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta) \hat{y}^2 & (1 - \cos \vartheta) \hat{z}\hat{y} - \sin \vartheta \hat{x} \\ (1 - \cos \vartheta) \hat{x}\hat{z} - \sin \vartheta \hat{y} & (1 - \cos \vartheta) \hat{z}\hat{y} + \sin \vartheta \hat{x} & \cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta) \hat{z}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.1.32)
\end{aligned}$$

Для остановки солнечного паруса потребуется создать управляющий момент, вектор которого противоположно направлен оси ON. Он будет возвращать коллинеарность векторам кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».

Приравняв соотношения (2.1.26) и (2.1.32), можно найти угол разворота  $\vartheta$  и направления осей ON и ОК. Угол разворота  $\vartheta$  будет определяться соотношением:

$$\vartheta = \arccos \left( y_Y - \frac{1}{2} \frac{(z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}{(z_X + x_Z)} \right). \quad (2.1.33)$$

Положение линии ОК будет определяться следующим соотношением:



$$OK = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2(x_X - y_Y)(z_X + x_Z) + (z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}{2(1 - y_Y)(z_X + x_Z) + (z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}} \\ \frac{(z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}{\sqrt{2(1 - y_Y)(z_X + x_Z) + (z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}} \\ \sqrt{\frac{2(z_Z - y_Y)(z_X + x_Z) + (z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}{2(1 - y_Y)(z_X + x_Z) + (z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}} \end{bmatrix}. \quad (2.1.34)$$

Приравняв соотношения (2.1.30) и (2.1.34), можно найти угол  $\kappa$ , определяющий положение оси ON относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$ :

$$\kappa = \arctg \left( \sqrt{\frac{2(x_X - y_Y)(z_X + x_Z)}{(z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)} + 1} \right). \quad (2.1.35)$$

Приравняв соотношения (2.1.30) и (2.1.34) и учитывая соотношения (2.1.13) и (2.1.17), при малых углах  $\chi$  и  $\delta$ , можно найти угол  $\chi$ , который будет определяться соотношением:

$$\chi = \frac{I_{OK} \cdot \omega_z}{(K_1 L + I_{OK} \cdot \omega_z)} \frac{I_{OK} \omega_{OK}}{(|L_M| + |L_{II}|) \cos \kappa} \sqrt{\frac{(z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}{2(1 - y_Y)(z_X + x_Z) + (z_Y + y_Z)(y_X + x_Y)}}. \quad (2.1.36)$$

Алгоритм пространственного разворота солнечного паруса включает следующие шаги [42]:

Шаг 1. Сравнить текущее пространственное положение солнечного паруса с желаемым пространственным положением и найти необходимый угол разворота солнечного паруса (2.1.33).

Шаг 2. Вычислить положение оси ON по соотношению (2.1.35) и (2.1.27).

Шаг 3. Изменить угол между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».

Шаг 4. Развернуть солнечный парус вокруг оси ОК, совпадающей с суммой векторов кинетических моментов, положение которой определяется соотношением (2.1.34).

Шаг 5. Возвратить нулевую сумму векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».

Шаг 6. Прекратить совмещение положений.

Блок-схема алгоритма пространственного разворота солнечного паруса представлена на рисунке 2.1.4.

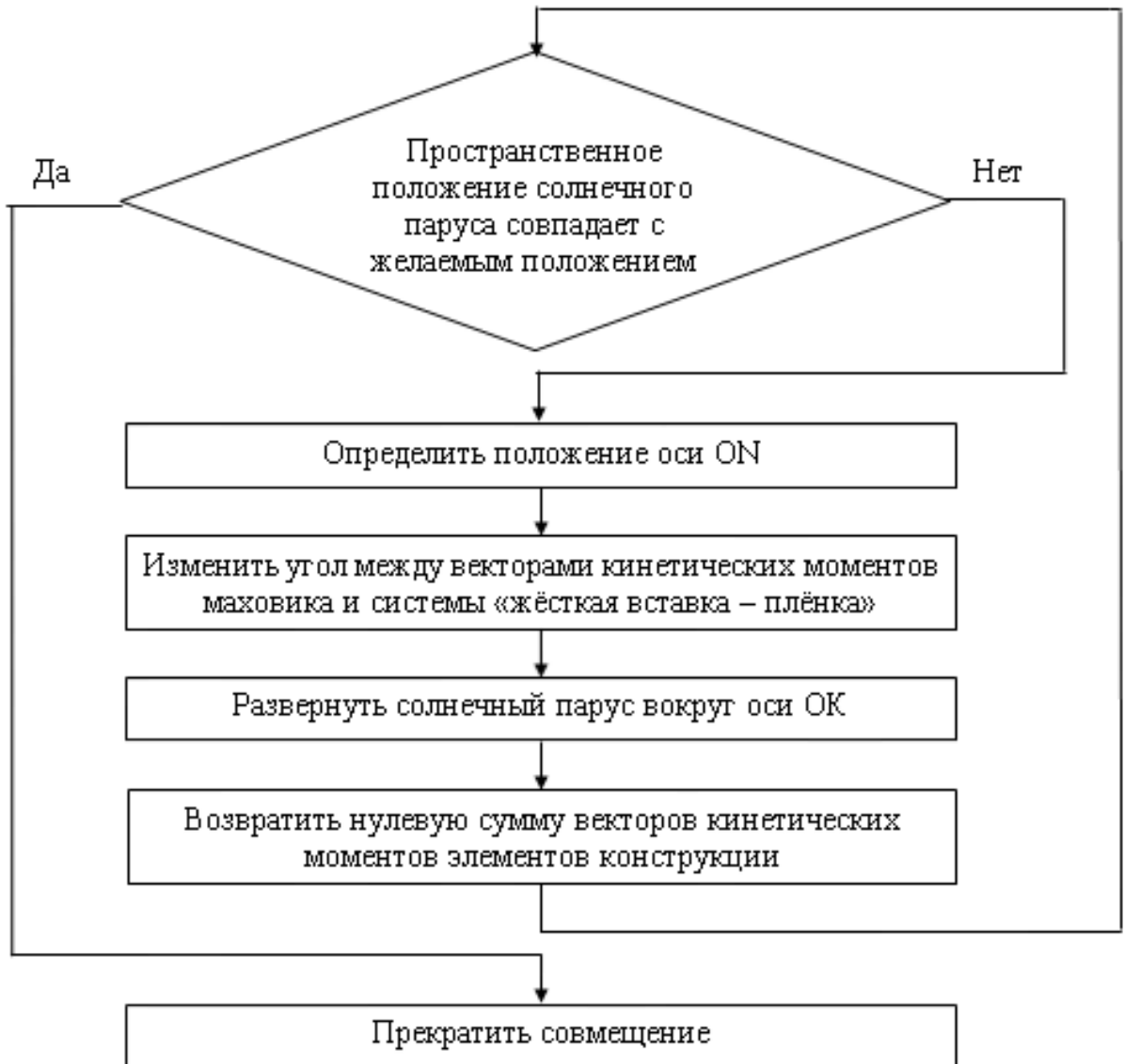


Рисунок 2.1.4 – Блок-схема алгоритма пространственного разворота солнечного паруса

Ввиду особенности космического полёта с солнечным парусом, состоящей в зависимости направления силы тяги от угла установки паруса по отношению к солнечным лучам (угла между направлением падения солнечных лучей и нормалью к солнечному парусу), часто при пространственном развороте требуется обеспечить желаемый угол установки. Блок-схема для моделирования пространственного разворота солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы

«жёсткая вставка – плёнка» представлена на рисунке 2.1.5. Через  $\theta_k$  обозначен желаемый угол установки, через  $\theta_T$  – текущий угол установки солнечного паруса.



Рисунок 2.1.5 – Блок-схема для моделирования пространственного разворота солнечного паруса

Пусть в начальный момент времени солнечный парус имеет угол установки  $\theta_0$ , рад. В этом случае начальное положение связанной с приборным отсеком системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  по отношению к инерциальной системе координат  $OXYZ$ , в которой ось  $OZ$  направлена противоположно направлению падения солнечных лучей, будет определяться следующей матрицей:

$$G_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.37)$$

На рисунке 2.1.6 представлено начальное положение солнечного паруса и ось  $ON$ , вдоль которой направлен внешний момент.

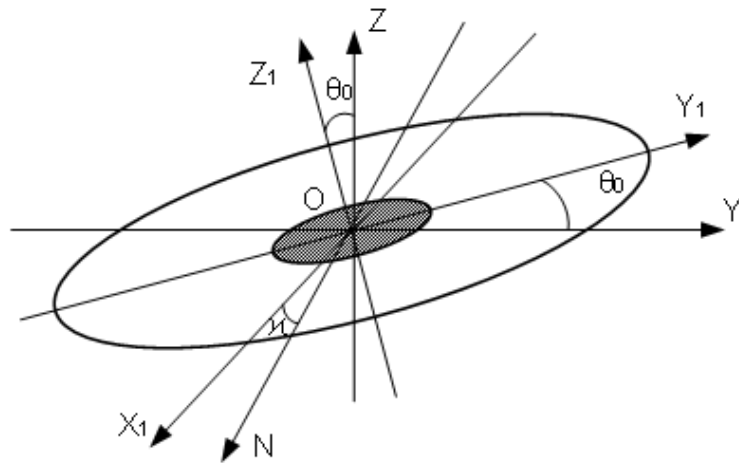


Рисунок 2.1.6 – Начальное положение солнечного паруса

Тогда текущее положение солнечного паруса относительно базовой системы координат с учётом матрицы вращения (2.1.31) будет определяться следующей матрицей:

$$G_T = G_c \cdot F. \quad (2.1.38)$$

Текущий угол установки паруса  $\theta$  можно найти как угол между векторами  $OZ$  и  $OZ_1$ :

$$\cos \theta = \frac{\overline{OZ \cdot OZ_1}}{|OZ| \cdot |OZ_1|}. \quad (2.1.39)$$

Норма векторов  $OZ$  и  $OZ_1$  равна единице, отсюда угол установки паруса можно найти по формуле:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \theta_0 [(1 - \cos \vartheta) \hat{z} \hat{y} - \sin \vartheta \hat{x}] + \cos \theta_0 [\cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta) \hat{z}^2], \\ \theta &= \arccos(\sin \theta_0 [(1 - \cos \vartheta) \hat{z} \hat{y} - \sin \vartheta \hat{x}] + \cos \theta_0 [\cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta) \hat{z}^2]), \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

где  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  определяются соотношениями (2.1.30).

Зная желаемое пространственное положение солнечного паруса, можно найти конечный угол установки. Желаемое пространственное положение солнечного паруса (2.1.26) относительно базовой системы координат будет определяться следующей матрицей:

$$G_{жб} = G_c \cdot G_{ж},$$

$$G_{жб} = \begin{bmatrix} x_X & y_X & z_X \\ x_Y \cos \theta_0 - x_Z \sin \theta_0 & y_Y \cos \theta_0 - y_Z \sin \theta_0 & z_Y \cos \theta_0 - z_Z \sin \theta_0 \\ x_Y \sin \theta_0 + x_Z \cos \theta_0 & y_Y \sin \theta_0 + y_Z \cos \theta_0 & z_Y \sin \theta_0 + z_Z \cos \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.41)$$

Текущий угол установки паруса  $\theta$  можно найти как угол между векторами  $OZ$  и  $OZ_2$ :

$$\cos \theta_k = \frac{\overline{OZ \cdot OZ_2}}{|\overline{OZ}| \cdot |\overline{OZ_2}|}. \quad (2.1.42)$$

Норма векторов  $OZ$  и  $OZ_2$  равна единице, отсюда желаемый угол установки паруса можно найти по формуле:

$$\begin{aligned} \cos \theta_k &= z_Y \sin \theta_0 + z_Z \cos \theta_0, \\ \theta_k &= \arccos(z_Y \sin \theta_0 + z_Z \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

Тогда, с учётом соотношений (2.1.5), (2.1.13), (2.1.16), (2.1.40), система, описывающая пространственный разворот солнечного паруса, запишется в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{KL}{I_{OK} \cdot \omega_B - KL} \cdot \chi \\ \frac{d\chi}{dt} &= \omega_\chi \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{L}{I_{OK}} (\chi + \delta) \\ \theta &= \arccos(\sin \theta_0 [(1 - \cos \vartheta) \hat{z} \hat{y} - \sin \vartheta \hat{x}] + \cos \theta_0 [\cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta) \hat{z}^2]) \end{aligned} \right. , \quad (2.1.44)$$

где  $\omega_\chi$  – скорость изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», рад/с.

Систему (2.1.44) можно представить в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= \omega_\chi \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{L\omega_B}{I_{OK} \cdot \omega_B - KL} \cdot \chi \end{aligned} \right. \quad (2.1.45)$$

Решение системы (2.1.45) имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \vartheta &= \frac{L\omega_B}{2(I_{OK} \cdot \omega_B - KL)} (\omega_\chi t^2 + 2\chi_0 t) + \vartheta_0 \\ \chi &= \omega_\chi t + \chi_0 \end{aligned} \right. \quad (2.1.46)$$

Время на разворот солнечного паруса будет определяться предельным значением его угловой скорости, найденной по соотношению (2.1.19), и временем на изменение угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», соответствующим этой угловой скорости.

Фазовый портрет системы (2.1.45) будет описываться уравнением:

$$\vartheta = \frac{L\omega_B}{2\omega_\chi(I_{OK}\omega_B - KL)}(\chi^2 - \chi_0^2) + \vartheta_0. \quad (2.1.47)$$

В начальный момент времени  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\chi_0 = 0$ ,  $\omega_\chi = 0$ . Затем, согласно шагу 3 разработанного алгоритма и системе (2.1.46),  $\omega_\chi = \omega_{\chi 0}$  до момента времени  $t_1 = \frac{\hat{\chi}}{\omega_\chi}$ , когда  $\vartheta = \frac{L\omega_B\hat{\chi}^2}{2\omega_\chi(I_{OK}\omega_B - KL)}$ ,  $\chi = \hat{\chi}$ .

Затем солнечный парус будет вращаться с постоянной угловой скоростью  $\hat{\omega}_{OK}$  согласно шагу 4 разработанного алгоритма при  $\omega_\chi = 0$  до момента времени  $t_2 = \frac{(I_{OK}\omega_B - KL)\vartheta_K}{L\omega_B\hat{\chi}}$ , когда  $\vartheta = \vartheta_K - \frac{L\omega_B\hat{\chi}^2}{2\omega_\chi(I_{OK}\omega_B - KL)}$ ,  $\chi = \hat{\chi}$ . На этом участке изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» не происходит.

Заключительный участок согласно шагу 5 будет характеризоваться возвращением угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» к своему первоначальному значению и остановкой вращения солнечного паруса.  $\omega_\chi = -\omega_{\chi 0}$  до момента времени  $t_3 = \frac{(I_{OK}\omega_B - KL)\vartheta_K}{L\omega_B\hat{\chi}} + \frac{\hat{\chi}}{\omega_\chi}$ , когда  $\vartheta = \vartheta_K$ ,  $\chi = 0$ .

Если  $t_1 < t_2$ , то можно уменьшить предельное изменение угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». Это позволит уменьшить расход энергии, однако увеличит время разворота солнечного паруса. Также можно изменять угол между векторами вращающихся элементов конструкции до момента времени

$$t_4 = \frac{1}{\omega_\chi} \sqrt{\frac{\omega_\chi(I_{OK}\omega_B - KL)\vartheta_K}{L\omega_B}}, \text{ когда } \vartheta = \frac{\vartheta_K}{2}, \chi = \sqrt{\frac{\omega_\chi(I_{OK}\omega_B - KL)\vartheta_K}{L\omega_B}}, \text{ а затем уменьшать}$$

его до момента времени  $t_5 = \frac{2}{\omega_\chi} \sqrt{\frac{\omega_\chi(I_{OK}\omega_B - KL)\vartheta_K}{L\omega_B}}$ , когда  $\vartheta = \vartheta_K$ ,  $\chi = 0$ . В этом случае не будет участка, характеризующегося постоянной угловой скоростью разворота солнечного паруса (шаг 4 разработанного алгоритма).

В заключении необходимо сравнить текущее и желаемое пространственное положение солнечного паруса согласно шагу 6 разработанного алгоритма и при необходимости повторить пройденные шаги.

Для изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» можно, к примеру, добавить к конструкции четыре небольших маховика, расположенных на равном расстоянии друг от друга по периметру жёсткой вставки на двух перпендикулярных осях  $OX$  и  $OY$  и компенсирующих друг друга.

При моделировании пространственного разворота солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» были выбраны следующие исходные параметры: скорость изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка»  $\omega_\chi = 10^{-4}$  рад/с, момент инерции солнечного паруса  $I_{OK} = 45000$  кг·м<sup>2</sup>, начальный угол установки паруса  $\theta_0 = 0,1$  рад, угол, определяющий положение оси  $ON$  в плоскости  $OX_1Y_1$   $\kappa = 0,2$  рад. На рисунке 2.1.7 представлена зависимость угла установки солнечного паруса от изменения угла между векторами кинетических моментов вращающихся элементов конструкции. Время для разворота на 1,2 рад составит в этом случае приблизительно 2700 с.

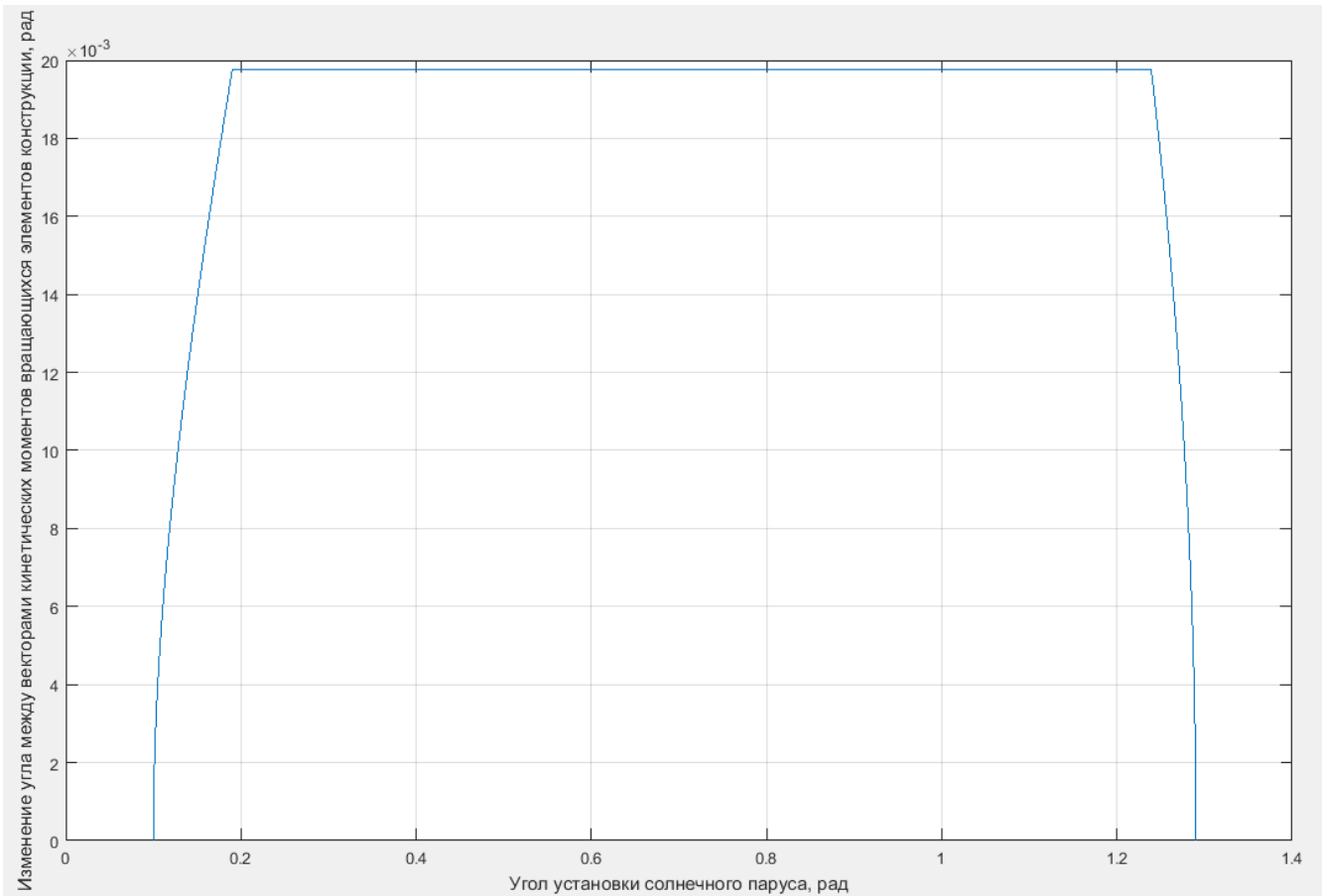


Рисунок 2.1.7 – Зависимость угла установки солнечного паруса от изменения угла между векторами кинетических моментов вращающихся элементов конструкции

В таблице 2.1.1 представлены параметры пространственного разворота солнечного паруса на различные углы установки при различных начальных условиях.



Таблица 2.1.1. – Параметры пространственного разворота солнечного паруса на различные углы установки при различных начальных условиях

Начальный угол установки паруса $\theta_0$ , рад	Конечный угол установки паруса $\theta_k$ , рад	Угол положения и оси ON, рад	Время разворота, с
0,1	0,5	0,3	720
0,2	1,2	0,3	1540
0,1	1,2	0,5	1760
0,3	1	0	1940

Как видно из таблицы, время разворота солнечного паруса на требуемый угол установки не будет превышать 2000 с для разворотов на угол меньше, чем

$$\frac{\pi}{2}.$$

## 2.2. СРАВНЕНИЕ ПРЕДЛОЖЕННОГО АЛГОРИТМА С МЕТОДОМ, ИСПОЛЬЗУЮЩИМ ИЗМЕНЕНИЕ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ ПЛЁНКИ

Покажем, что разработанный алгоритм управления пространственным разворотом солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» является предпочтительным по временным затратам по сравнению с методом, использующим для разворота изменение отражательной способности плёнки. Рассмотрим возможность применения данного метода управления для конструкции солнечного паруса в виде плоской плёнки, прикреплённой к вращающейся жёсткой вставке [37, 40, 42].

На сектора паруса с различным коэффициентом отражательной способности будет действовать разная по величине сила светового давления  $F_D$ . Считая отражение солнечных лучей от плёнки не рассеянным, силу давления можно представить как сумму проекций на нормальное и касательное направления. За счёт разницы нормальных составляющих сил светового давления, действующих на сектора паруса, создаётся внешний момент, влияющий на ориентацию плёнки [37, 40, 42].

Таким образом, изменение коэффициента отражательной способности частей плёнки будет создавать одновременно как внешний момент  $\Delta \vec{M}_K$  вокруг оси вращения плёнки, так и внешний момент  $\Delta \vec{M}_H$  вокруг оси ON, разделяющей плёнку на части с разным коэффициентом отражательной способности.

Рассмотрим случай, когда коэффициент отражательной способности может изменяться на всей поверхности плёнки. Предположим, что в любой момент времени сектор паруса может иметь отражательную способность либо максимальное возможное значение отражательной способности  $N_{max}$  с учётом выбранной технологии, либо минимальное возможное значение отражательной способности  $N_{min}$ . Моменты, действующие на солнечный парус при изменении

коэффициента отражательной способности его поверхности, показаны на рисунке 2.2.1. Через  $F_{Tmax}$ ,  $F_{Kmax}$  и  $F_{Hmax}$  обозначены сила тяги, действующая на поверхность паруса с коэффициентом отражательной способности  $N_{max}$ , а также её касательная и нормальная составляющие. Через  $F_{Tmin}$ ,  $F_{Kmin}$  и  $F_{Hmin}$  обозначены сила тяги, действующая на поверхность паруса с коэффициентом отражательной способности  $N_{min}$ , а также её касательная и нормальная составляющие.

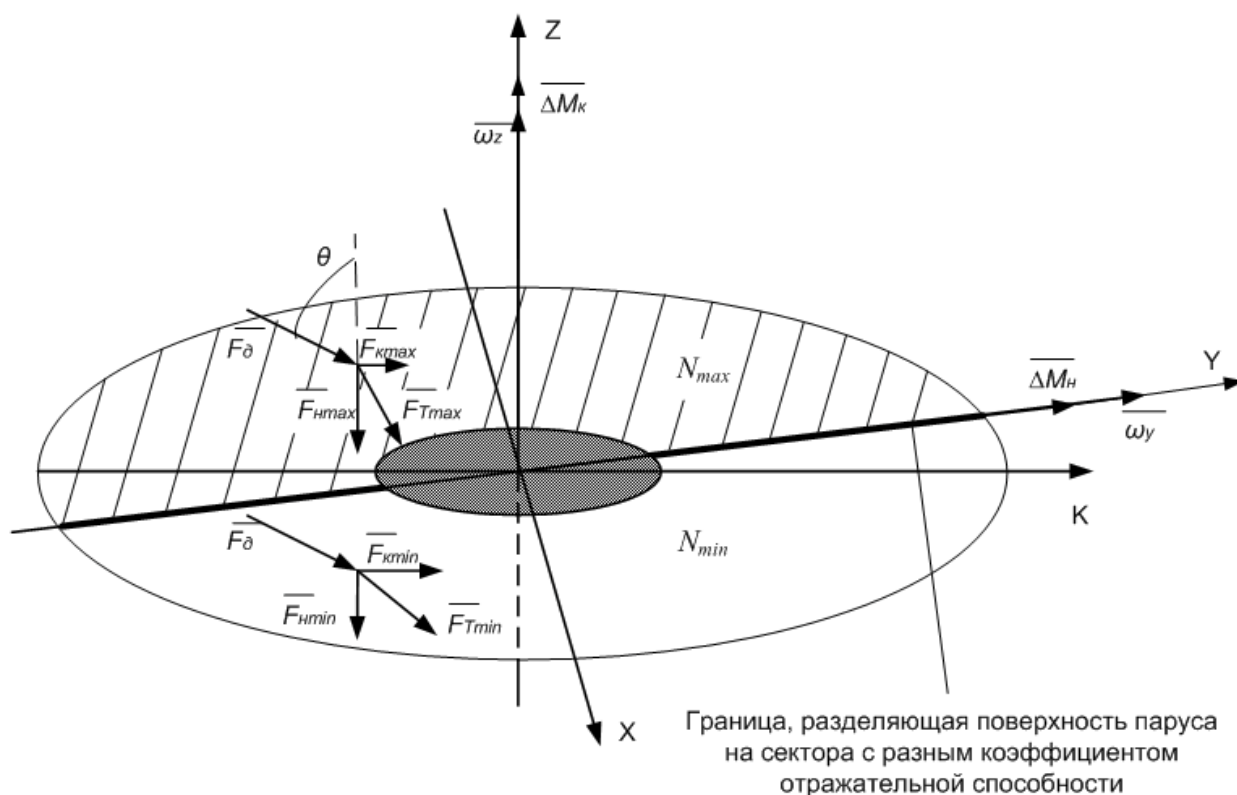


Рисунок 2.2.1 – Моменты, действующие на солнечный парус при изменении коэффициента отражательной способности его поверхности

Представим поверхность плёнки в виде большого количества  $m$  секторов  $N$  малой площади, каждый из которых имеет свой номер  $i$  (может принимать целое значение от 1 до  $m$ ). Обозначим через  $S_N$  полуплоскость, лежащую в плоскости невозмущённой поверхности плёнки и ограниченную вектором  $\Delta \vec{M}_N$ . В случае, если необходимо изменить пространственное положение поверхности

паруса, произвольный сектор  $i$  должен менять свою отражательную способность по следующему закону:

$$N_i = \begin{cases} N_{max}, & \text{если } H_i \in S_H \\ N_{min}, & \text{если } H_i \notin S_H \end{cases} \quad (2.2.1)$$

где  $N_i$  – текущее значение коэффициента отражательной способности сектора  $H_i$ .

Следует отметить, что вектор силы за счёт солнечного давления будет зависеть от коэффициента отражательной способности  $N$  и составлять угол  $\varphi$  с нормалью к парусу, определяемый по формуле [1]:

$$\sin \varphi = \frac{(1-N) \sin \theta}{\sqrt{1+N^2+2N \cos(2\theta)}}. \quad (2.2.2)$$

Для идеального зеркального паруса  $N=1$ , а значит, угол  $\varphi = 0$  и не зависит от угла установки  $\theta$ . Соответственно, касательной составляющей силы тяги за счёт светового давления не будет [1]. Для черного паруса  $N = 0$ , а значит, угол  $\varphi = \theta$ , и касательная составляющая силы за счёт светового давления будет зависеть от текущего угла установки паруса. Хотя в реальности достигнуть абсолютно черного или зеркального паруса нельзя, для предварительных расчётов получаемых моментов за счёт изменения коэффициента отражательной способности можно использовать эти два крайних случая, так как при  $N \rightarrow 1$   $\varphi \approx 0$ , а при  $N \rightarrow 0$   $\varphi \approx \theta$ . Также можно рассмотреть вариант, когда поверхность паруса может становиться прозрачной и  $N = 0$ . В этом случае удастся избежать перегрева плёнки под воздействием солнечных лучей.

При нормальном падении света на поверхность тела давление солнечного света  $p$ , Н/м<sup>2</sup>, определяется по формуле [1]:

$$p = \frac{S(1+N)}{c}, \quad (2.2.3)$$

где  $S$  – плотность потока энергии (интенсивность света), Вт/м<sup>2</sup>;

$c$  – скорость света в вакууме, м/с.

Тогда сила  $F_d$ , Н, действующая за счёт давления солнечного света на сектор плёнки, будет определяться по формуле:

$$F_d = \frac{S(1+N)}{c} \lambda (R_{\Pi}^2 - R_B^2), \quad (2.2.4)$$

где  $\lambda$  – угол сектора, определяющий площадь плёнки с изменяемым коэффициентом отражательной способности, рад.

При изменении коэффициента отражательной способности поверхности паруса будет возникать гироскопический момент, обусловленный разницей моментов  $\Delta M_H$ , возникающей за счет нормальной составляющей силы светового давления. Он будет определяться соотношением:

$$\Delta M_H = \frac{S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3)}{3c} \lambda \cos^3 \theta. \quad (2.2.5)$$

Гироскопический момент создаёт отклонение плёнки от плоскости жёсткой вставки при переориентации солнечного паруса [37, 40, 42]. Для нахождения максимального отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки внешний момент, получаемый за счёт изменения отражательной способности поверхности плёнки, необходимо приравнять к моменту натяжения плёнки [41]. Формула (2.2.5) для аппроксимирующей окружности радиуса  $r$  будет иметь вид:

$$\Delta M_H = \frac{S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - r^3)}{3c} \lambda \cos^3 \theta. \quad (2.2.6)$$

Сила натяжения  $F_H$ , Н, тонкой натянутой невесомой плёнки, соединяющей аппроксимирующие окружности, действующая в радиальном направлении на расстоянии  $r_i$  от центра вращения, запишется в следующем виде [52]:

$$F_H = 2\pi r_i P_i, \quad (2.2.7)$$

где  $P_i = \frac{1}{8} \rho_{\Pi} h_{\Pi} (3 + \mu_{\Pi}) (R_{\Pi}^2 - r_i^2) \omega_B^2$  – напряжение плёнки в радиальном направлении [52], Н/м.

Момент натяжения плёнки с учётом коэффициента, определяемого соотношением (1.2.10), будет иметь вид:

$$M_{\Pi} = \frac{1}{8K} \pi r^3 \rho_{\Pi} h_{\Pi} (3 + \mu_{\Pi}) (R_{\Pi}^2 - r^2) \omega_B^2 \frac{d\beta}{dr}. \quad (2.2.8)$$

Приравняв моменты, определяемые по формулам (2.2.6) и (2.2.8), запишем дифференциальное уравнение для угла, определяющего максимальное отклонение плёнки на радиусе  $r$ :

$$d\beta = \frac{4S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - r^2) \cdot \lambda}{3c\pi r^3 \rho_{\Pi} h_{\Pi} (3 + \mu_{\Pi}) \cdot (R_{\Pi}^2 - r^2) \omega_B^2} \cdot \frac{R_k^2}{R_k^2 - AR_{\Pi}^2} \cdot \cos^3 \theta dr. \quad (2.2.9)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\beta(R) = \frac{4S(N_{max}-N_{min})\lambda}{3c\pi\rho_{\Pi}h_{\Pi}(3+\mu_{\Pi})\omega_B^2} \cdot \frac{R_k^2}{R_k^2 - AR_{\Pi}^2} \cdot \cos^3 \theta \left( \frac{R_{\Pi}}{2R_B^2} - \frac{R_{\Pi}}{2R^2} + \frac{1}{R_{\Pi}} \cdot \ln \left[ \frac{(R_{\Pi} + R_B) \cdot R}{R_B \cdot (R_{\Pi} + R)} \right] \right). \quad (2.2.10)$$

Угловое положение внешнего края плёнки  $\beta(R_{\Pi})$ , рад, будет определяться следующим соотношением:

$$\beta(R_{\Pi}) = \frac{4S(N_{max}-N_{min})\lambda}{3c\pi\rho_{\Pi}h_{\Pi}(3+\mu_{\Pi})\omega_B^2} \cdot \frac{R_k^2}{R_k^2 - AR_{\Pi}^2} \cdot \cos^3 \theta \cdot \left( \frac{R_{\Pi}}{2R_B^2} - \frac{1}{2R_{\Pi}} + \frac{1}{R_{\Pi}} \cdot \ln \left[ \frac{R_{\Pi} + R_B}{2R_B} \right] \right). \quad (2.2.11)$$

Данное отклонение возникает только при изменении отражательной способности плёнки, и будет зависеть как от расстояния между Солнцем и космическим аппаратом, так и от угла установки паруса [41]. При установлении формы поверхности плёнки считается, что угол установки паруса  $\theta$  изменяется достаточно медленно, и его изменением можно пренебречь. В качестве расчётных параметров при моделировании использовались следующие значения:  $\theta = 0$  рад,  $\lambda = \pi$ ,  $N_{max} = 1$ ,  $N_{min} = 0$ . Модель формы поверхности солнечного паруса при воздействии давления солнечного света представлена на рисунке 2.2.2. Для наглядности формы поверхности плёнки масштабы по осям OZ и OX, OY – разные.

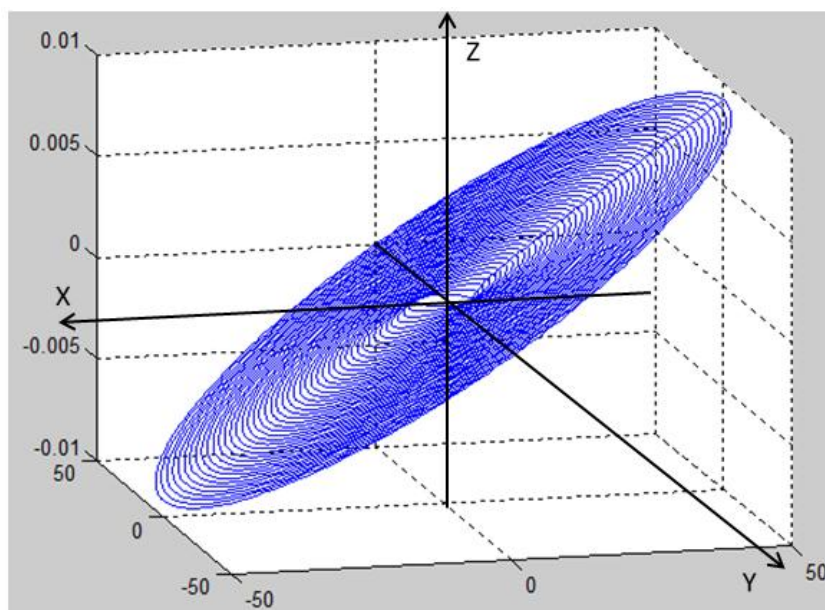


Рисунок 2.2.2 – Модель формы поверхности солнечного паруса при воздействии давления солнечного света

Максимальное отклонение внешнего края пленки от плоскости жёсткой вставки составляет менее 0,02% от радиуса плёнки. Ввиду малости данной величины при дальнейшем исследовании пространственного разворота солнечного паруса отклонением плёнки от плоскости жёсткой вставки под действием внешнего момента можно пренебречь [41].

Для начала рассмотрим случай, когда солнечный парус имеет в своей конструкции медленно вращающуюся жёсткую вставку с прикрепленной к ней плёнкой большого радиуса (плёнка может поддерживать плоскую форму в том числе и за счёт использования лёгкого каркаса). Угловое ускорение пространственного разворота солнечного паруса с учётом (2.2.5) имеет вид:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{п}^3 - R_{в}^3) \cdot \lambda}{3c(I_{вON} + I_{пON})} \cdot \cos^3\theta, \quad (2.2.12)$$

где  $\vartheta$  – угол, на который развернётся солнечный парус за счёт изменения коэффициента отражательной способности его поверхности, рад;

$I_{вON}$  – момент инерции жёсткой вставки относительно оси разворота ON, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{пON}$  – момент инерции плёнки относительно оси разворота ON, кг·м<sup>2</sup>.

Пусть солнечный парус с начальным углом установки  $\theta_0$  начинает вращаться за счёт нормальной составляющей силы светового давления вокруг оси ON, имеющей пространственное положение относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$ , описанное соотношением (2.1.27).

Пространственный разворот солнечного паруса вокруг оси ON описывается матрицей вращения:

$$F_{B1} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa & (1 - \cos \vartheta) \cos \kappa \sin \kappa & \sin \vartheta \sin \kappa \\ (1 - \cos \vartheta) \cos \kappa \sin \kappa & \cos \vartheta \cos^2 \kappa + \sin^2 \kappa & -\sin \vartheta \cos \kappa \\ -\sin \vartheta \sin \kappa & \sin \vartheta \cos \kappa & \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (2.2.13)$$

Приравняв соотношения (2.1.26) и (2.2.13), можно найти угол  $\kappa$ , определяющий положение оси ON относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$ :

$$\kappa = -\arctg\left(\frac{z_X}{z_Y}\right). \quad (2.2.14)$$

Текущее положение солнечного паруса относительно базовой системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  с учётом матрицы начального положения (2.1.37) и матрицы вращения (2.2.9), будет определяться матрицей:

$$G_B = G_C \cdot F_{B1}. \quad (2.2.15)$$

Текущий угол установки паруса  $\theta$  можно найти как угол между векторами  $OZ$  и  $OZ_1$ :

$$\cos \theta = \frac{\overline{OZ} \cdot \overline{OZ_1}}{|\overline{OZ}| \cdot |\overline{OZ_1}|}. \quad (2.2.16)$$

Норма векторов  $OZ$  и  $OZ_1$  равна единице, отсюда угол установки паруса можно найти по формуле:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\sin \theta_0 \cos \kappa \sin \vartheta + \cos \theta_0 \cos \vartheta, \\ \theta &= \arccos(-\sin \theta_0 \cos \kappa \sin \vartheta + \cos \theta_0 \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

В процессе управления углы  $\theta_0$  и  $\kappa$  считаются постоянными величинами, а угол  $\vartheta$  изменяется во времени и зависит от коэффициента отражательной способности секторов паруса. Влиянием касательной составляющей на угловую скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» на данном этапе исследования возможности использования изменения отражательной способности для переориентации солнечного паруса решено пренебречь [41].



Окончательно математическую модель пространственного разворота солнечного паруса можно представить в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{ON} \\ \frac{d\omega_{ON}}{dt} = \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_{\text{Б}}^3) \cdot \lambda}{3c(I_{\text{в}ON} + I_{\text{п}ON})} \cdot \cos^3 \theta \\ \theta = \arccos(-\sin \theta_0 \cos \kappa \sin \vartheta + \cos \theta_0 \cos \vartheta) \end{array} \right. , \quad (2.2.18)$$

где  $\omega_{ON}$  – угловая скорость вращения солнечного паруса вокруг оси ON путём изменения отражательной способности поверхности плёнки.

Если требуется перевести солнечный парус из одного неподвижного пространственного положения в другое, следует для начала создать управляющий момент вокруг оси, перпендикулярной плоскости, проходящей через нормали к поверхности паруса его начального и конечного положений. Затем следует создать момент, направленный в противоположную сторону для торможения системы [41]. Предполагается, что в каждый момент времени можно управлять углом  $\lambda$ , который будет определять величину создаваемого момента и направление его действия, при этом он может принимать значения  $\lambda \in [-\pi; \pi]$ .

Зная величины  $\theta_0$ ,  $\theta_{\kappa}$  и  $\kappa$ , можно найти угол  $\vartheta_{\kappa}$ , на который необходимо развернуться солнечному парусу. Получим:

$$\begin{aligned} -\sin \theta_0 \cos \kappa \sin \vartheta_{\kappa} + \cos \theta_0 \cos \vartheta_{\kappa} &= \cos \theta_{\kappa}, \\ \vartheta_{\kappa} &= \arccos \left( \frac{\cos \theta_{\kappa} \cdot \cos \theta_0 + \sin \theta_0 \cdot \cos \kappa \cdot \sqrt{\sin^2 \theta_{\kappa} - \sin^2 \theta_0 \cdot \sin^2 \kappa}}{1 - \sin^2 \theta_0 \cdot \sin^2 \kappa} \right). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Запишем систему уравнений (2.2.18) в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{ON} \\ \frac{d\omega_{ON}}{dt} = \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_{\text{Б}}^3) \cdot \lambda}{3c(I_{\text{в}ON} + I_{\text{п}ON})} \cdot (-\sin \theta_0 \cos \kappa \sin \vartheta + \cos \theta_0 \cos \vartheta)^3 \end{array} \right. . \quad (2.2.20)$$

Состояние равновесия будет в случае, если  $\omega_{ON} = 0$ ,  $\lambda = 0$  или  $\vartheta = -\arctg \left[ -\frac{\text{ctg} \theta_0}{\cos \kappa} \right] + \pi n$ . Следовательно, точки  $\vartheta = 0$ ,  $\omega_{ON} = 0$  и  $\vartheta = \vartheta_{\kappa}$ ,  $\omega_{ON} = 0$  при  $\lambda = 0$  также будут являться состояниями равновесия.

Оптимальное по быстрдействию управление будет в случае, если реализован релейный закон управления [56, 57], т.е. когда  $\lambda = \pm|\lambda_{max}|$ . Построим фазовый портрет системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\omega_{ON}} &= \frac{3c(I_{BON}+I_{ПОН})}{S(N_{max}-N_{min})\cdot(R_{\Pi}^3-R_{B}^3)\cdot\lambda} \frac{\omega_{ON}}{(-\sin\theta_0 \cos\kappa \sin\vartheta + \cos\theta_0 \cos\vartheta)^3}, \\ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{S(N_{max}-N_{min})\cdot(R_{\Pi}^3-R_{B}^3)\cdot\lambda}{3c(I_{BON}+I_{ПОН})} (-\sin\theta_0 \cos\kappa \sin\vartheta + \cos\theta_0 \cos\vartheta)^3 d\vartheta &= \\ &= \int_{\omega_{ON_0}}^{\omega_{ON}} \omega_{ON} d\omega_{ON}, \\ \sin\theta_0 \cos\kappa \left(-\frac{1}{3}\sin^2\theta_0 \cos^2\kappa + \cos^2\theta_0\right) [\cos^3\vartheta - \cos^3\vartheta_0] &+ \\ + \sin^3\theta_0 \cos^3\kappa [\cos\vartheta - \cos\vartheta_0] + \cos^3\theta_0 [\sin\vartheta - \sin\vartheta_0] &+ \\ + \cos\theta_0 \left(\sin^2\theta_0 \cos^2\kappa - \frac{1}{3}\cos^2\theta_0\right) \cdot [\sin^3\vartheta - \sin^3\vartheta_0] &= \\ &= \frac{3c(I_{BON}+I_{ПОН})}{2S(N_{max}-N_{min})\cdot(R_{\Pi}^3-R_{B}^3)\cdot\lambda} [\omega_{ON}^2 - \omega_{ON_0}^2]. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Фазовый портрет будет представлять собой две ветви. Первая ветвь будет начинаться в точке  $\vartheta = 0$ ,  $\omega_{ON} = 0$ , иметь закон управления  $\lambda = |\lambda_{max}|$  и достигать точки  $\vartheta = \vartheta_{\Pi}$ ,  $\omega_{ON} = \omega_{ON_{\Pi}}$ . Она будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} \sin\theta_0 \cos\kappa \left(-\frac{1}{3}\sin^2\theta_0 \cos^2\kappa + \cos^2\theta_0\right) [\cos^3\vartheta_{\Pi} - 1] &+ \\ + \sin^3\theta_0 \cos^3\kappa [\cos\vartheta_{\Pi} - 1] + \cos^3\theta_0 \sin\vartheta_{\Pi} &+ \\ + \cos\theta_0 \left(\sin^2\theta_0 \cos^2\kappa - \frac{1}{3}\cos^2\theta_0\right) \sin^3\vartheta_{\Pi} &= \frac{3c(I_{BON}+I_{ПОН})}{2S(N_{max}-N_{min})\cdot(R_{\Pi}^3-R_{B}^3)\cdot|\lambda_{max}|} \omega_{ON_{\Pi}}^2. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Вторая ветвь будет начинаться в точке  $\vartheta = \vartheta_{\Pi}$ ,  $\omega_{ON} = \omega_{ON_{\Pi}}$ , иметь закон управления  $\lambda = -|\lambda_{max}|$  и достигать точки  $\vartheta = \vartheta_{\kappa}$ ,  $\omega_{ON} = 0$ . Она будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} \sin\theta_0 \cos\kappa \left(-\frac{1}{3}\sin^2\theta_0 \cos^2\kappa + \cos^2\theta_0\right) [\cos^3\vartheta_{\kappa} - \cos^3\vartheta_{\Pi}] &+ \\ + \sin^3\theta_0 \cos^3\kappa [\cos\vartheta_{\kappa} - \cos\vartheta_{\Pi}] + \cos^3\theta_0 [\sin\vartheta_{\kappa} - \sin\vartheta_{\Pi}] &+ \\ + \cos\theta_0 \left(\sin^2\theta_0 \cos^2\kappa - \frac{1}{3}\cos^2\theta_0\right) [\sin^3\vartheta_{\kappa} - \sin^3\vartheta_{\Pi}] &= \\ &= \frac{3c(I_{BON}+I_{ПОН})}{2S(N_{max}-N_{min})\cdot(R_{\Pi}^3-R_{B}^3)\cdot|\lambda_{max}|} \omega_{ON_{\Pi}}^2 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Точку пересечения ветвей можно найти, приравняв левые части уравнений (2.2.22) и (2.2.23). Тогда получится соотношение:

$$\begin{aligned} & \sin \theta_0 \cos \kappa \left( -\frac{1}{3} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa + \cos^2 \theta_0 \right) [2 \cos^3 \vartheta_{\Pi} - \cos^3 \vartheta_{\kappa} - 1] + \\ & + \sin^3 \theta_0 \cos^3 \kappa [2 \cos \vartheta_{\Pi} - \cos \vartheta_{\kappa} - 1] + \cos^3 \theta_0 [2 \sin \vartheta_{\Pi} - \sin \vartheta_{\kappa}] + \\ & + \cos \theta_0 \left( \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa - \frac{1}{3} \cos^2 \theta_0 \right) [2 \sin^3 \vartheta_{\Pi} - \sin^3 \vartheta_{\kappa}] = 0. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

В целях экономии энергии, расходуемой на изменение отражательной способности поверхности солнечного паруса, внешний момент можно создавать не постоянно, а только до определённой величины угловой скорости разворота солнечного паруса  $\widehat{\omega}_{ON}$ . Эту величину можно выбрать, например, задавая её такой же, как и  $\widehat{\omega}_{OK}$ , определяемую по формуле (2.1.22).

В этом случае фазовый портрет будет представлять собой три ветви. Первая ветвь будет начинаться в точке  $\vartheta = 0$ ,  $\omega_{ON} = 0$ , иметь закон управления  $\lambda = |\lambda_{max}|$  и достигать точки  $\vartheta = \vartheta_{\Pi 1}$ ,  $\omega_{ON} = \widehat{\omega}_{ON}$ . Она будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} & \sin \theta_0 \cos \kappa \left( -\frac{1}{3} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa + \cos^2 \theta_0 \right) [\cos^3 \vartheta_{\Pi 1} - 1] + \\ & + \sin^3 \theta_0 \cos^3 \kappa [\cos \vartheta_{\Pi 1} - 1] + \cos^3 \theta_0 \sin \vartheta_{\Pi 1} + \\ & + \cos \theta_0 \left( \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa - \frac{1}{3} \cos^2 \theta_0 \right) \sin^3 \vartheta_{\Pi 1} = \frac{3c(I_{BON} + I_{\Pi ON})}{2S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3) \cdot |\lambda_{max}|} \widehat{\omega}_{ON}^2. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Затем будет прямая, начинающаяся в точке  $\vartheta = \vartheta_{\Pi 1}$ ,  $\omega_{ON} = \widehat{\omega}_{ON}$ , имеющая закон управления  $\lambda = 0$  и достигающая точки  $\vartheta = \vartheta_{\Pi 2}$ ,  $\omega_{ON} = \widehat{\omega}_{ON}$ . Она будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} & \sin \theta_0 \cos \kappa \left( -\frac{1}{3} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa + \cos^2 \theta_0 \right) [\cos^3 \vartheta_{\Pi 2} - \cos^3 \vartheta_{\Pi 1}] + \\ & + \sin^3 \theta_0 \cos^3 \kappa [\cos \vartheta_{\Pi 2} - \cos \vartheta_{\Pi 1}] + \cos^3 \theta_0 [\sin \vartheta_{\Pi 2} - \sin \vartheta_{\Pi 1}] + \\ & + \cos \theta_0 \left( \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa - \frac{1}{3} \cos^2 \theta_0 \right) \cdot [\sin^3 \vartheta_{\Pi 2} - \sin^3 \vartheta_{\Pi 1}] = 0. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Следующая ветвь будет начинаться в точке  $\vartheta = \vartheta_{п2}$ ,  $\omega_{ON} = \widehat{\omega}_{ON}$ , иметь закон управления  $\lambda = -|\lambda_{max}|$  и достигать точки  $\vartheta = \vartheta_{к}$ ,  $\omega_{ON} = 0$ . Она будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} & \sin \theta_0 \cos \kappa \left( -\frac{1}{3} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa + \cos^2 \theta_0 \right) [\cos^3 \vartheta_{к} - \cos^3 \vartheta_{п2}] + \\ & + \sin^3 \theta_0 \cos^3 \kappa [\cos \vartheta_{к} - \cos \vartheta_{п2}] + \cos^3 \theta_0 [\sin \vartheta_{к} - \sin \vartheta_{п2}] + \\ & + \cos \theta_0 \left( \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa - \frac{1}{3} \cos^2 \theta_0 \right) [\sin^3 \vartheta_{к} - \sin^3 \vartheta_{п2}] = \\ & = \frac{3c(I_{вON} + I_{пON})}{2S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_{п}^3 - R_{в}^3) \cdot |\lambda_{max}|} \omega_{ONп}^2 \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

В таблице 2.2.1 представлены параметры пространственного разворота солнечного паруса на различные углы установки при различных начальных условиях. В качестве расчётных параметров при моделировании использовались следующие значения: момент инерции плёнки относительно оси разворота ON  $I_{пON} = 32500$  кг·м<sup>2</sup>, момент инерции жёсткой вставки относительно оси разворота ON  $I_{вON} = 7500$  кг·м<sup>2</sup>, угол сектора, определяющий площадь плёнки с изменяемым коэффициентом отражательной способности  $\lambda_{max} = \frac{\pi}{2}$ , ограничение скорости разворота солнечного паруса  $\widehat{\omega}_{ON} = 3,6 \cdot 10^{-4}$  рад/с. Суммарное время изменения отражательной способности поверхности солнечного паруса, состоящее из суммы времён на создание моментов, разворачивающих и останавливающих солнечный парус, составляет не более 100 с.

Таблица 2.2.1 – Параметры пространственного разворота солнечного паруса на различные углы установки при различных начальных условиях

Начальный угол установки паруса $\theta_0$ , рад	Конечный угол установки паруса $\theta_k$ , рад	Угол положения и оси ON, рад	Время разворота, с
0,1	0,5	0,3	1135
0,2	1,2	0,3	2845
0,1	1,2	0,5	3125
0,3	1	0	2000

Как видно из таблиц 2.1.1 и 2.2.1, время на разворот солнечного паруса путём изменения отражательной способности его поверхности будет больше времени на разворот солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» [41].

Теперь рассмотрим случай, когда солнечный парус имеет в своей конструкции быстро вращающуюся жёсткую вставку с прикреплённой к ней плёнкой большого радиуса [41]. Данный вариант будет более актуальным для рассматриваемой конструкции солнечного паруса, так как предполагается, что для поддержания плоской формы поверхности плёнки требуется достаточно большая угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка», равная 1 рад/с. В этом случае будет возникать гироскопический момент [58] за счёт воздействия внешнего момента, обусловленного изменением коэффициента отражательной способности. В результате солнечный парус будет вращаться вокруг оси ОК, перпендикулярной плоскости, проходящей через оси  $OZ_1$  и ON. Положение связанной с солнечным парусом системы координат представлено на рисунке 2.2.3.

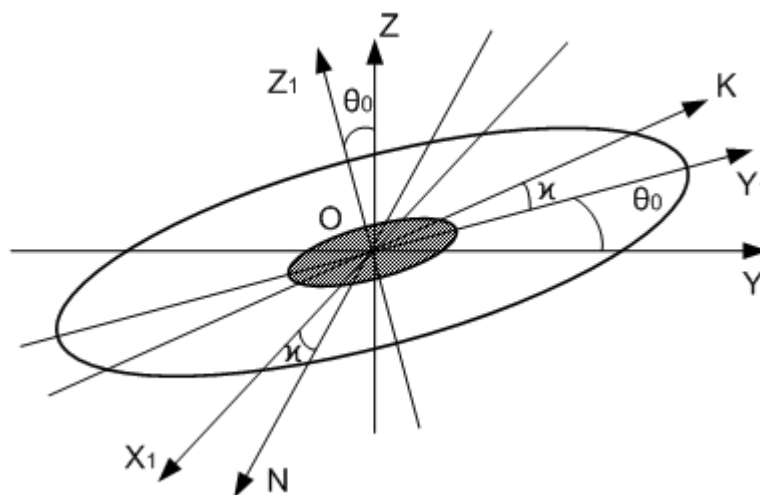


Рисунок 2.2.3 – Положение связанной с солнечным парусом системы координат

Угол отклонения плёнки от плоскости жёсткой вставки в результате прецессии солнечного паруса, исходя из предыдущих вычислений, будет составлять незначительную величину, которой можно пренебречь при составлении системы уравнений пространственного разворота.

Пространственное положение оси ОК относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$ :

$$OK^T = [-\sin \kappa \quad \cos \kappa \quad 0]. \quad (2.2.28)$$

Пространственный разворот солнечного паруса вокруг оси ОК описывается матрицей вращения:

$$F_{B2} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos^2 \kappa + \sin^2 \kappa & (\cos \vartheta - 1) \cos \kappa \sin \kappa & \sin \vartheta \cos \kappa \\ (\cos \vartheta - 1) \cos \kappa \sin \kappa & \cos \vartheta \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa & \sin \vartheta \sin \kappa \\ -\sin \vartheta \cos \kappa & -\sin \vartheta \sin \kappa & \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (2.2.29)$$

Текущее положение солнечного паруса относительно базовой системы координат  $OXYZ$  с учётом матрицы начального положения (2.1.37) и матрицы вращения (2.2.29) будет определяться матрицей:

$$G_B = G_C \cdot F_{B2}. \quad (2.2.30)$$

Текущий угол установки паруса  $\theta$  можно найти как угол между векторами  $OZ$  и  $OZ_1$ :

$$\cos \theta = \frac{\overline{OZ} \cdot \overline{OZ}_1}{|\overline{OZ}| \cdot |\overline{OZ}_1|}. \quad (2.2.31)$$

Норма векторов  $OZ$  и  $OZ_1$  равна единице, отсюда угол установки паруса можно найти по формуле:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \theta_0 \sin \kappa \sin \vartheta + \cos \theta_0 \cos \vartheta, \\ \theta &= \arccos(\sin \theta_0 \sin \kappa \sin \vartheta + \cos \theta_0 \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Прецессия солнечного паруса будет описываться следующим соотношением:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3) \cdot \lambda}{3c(I_{BOK} + I_{ПOK})\omega_B} \cos^3 \theta. \quad (2.2.33)$$

Пространственный разворот солнечного паруса с учётом (2.2.33) будет описываться системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3) \cdot \lambda}{3c(I_{BOK} + I_{ПOK})\omega_B} \cos^3 \theta \\ \theta = \arccos(\sin \theta_0 \sin \kappa \sin \vartheta + \cos \theta_0 \cos \vartheta) \end{cases}. \quad (2.2.34)$$

Зная величины  $\theta_0$ ,  $\theta_{\kappa}$  и  $\kappa$ , можно найти угол  $\vartheta_{\kappa}$ , на который необходимо развернуться солнечному парусу. Получим:

$$\begin{aligned} -\sin \theta_0 \sin \kappa \sin \vartheta_{\kappa} + \cos \theta_0 \cos \vartheta_{\kappa} &= \cos \theta_{\kappa}, \\ \vartheta_{\kappa} &= \arccos \left( \frac{\cos \theta_{\kappa} \cdot \cos \theta_0 + \sin \theta_0 \sin \kappa \cdot \sqrt{\sin^2 \theta_{\kappa} - \sin^2 \theta_0 \cdot \sin^2 \kappa}}{1 - \sin^2 \theta_0 \cdot \sin^2 \kappa} \right). \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Для вычисления оптимального закона управления запишем систему (2.2.34) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3) \cdot \lambda}{3c(I_{BOK} + I_{ПOK})\omega_B} (\sin \theta_0 \sin \kappa \sin \vartheta + \cos \theta_0 \cos \vartheta)^3, \\ \int_0^{\vartheta_{\kappa}} \frac{d\vartheta}{(\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \kappa} \cdot \sin(\vartheta + \arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}]))^3} &= \int_0^{t_{\kappa}} \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3) \cdot \lambda}{3c(I_{BOK} + I_{ПOK})\omega_B} dt, \\ \frac{1}{(1 - \sin^2 \theta_0 \cdot \cos^2 \kappa)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[ -\frac{1}{4} \cdot \ln \left( \frac{[\cos(\theta_{1\kappa} + \arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}]) + 1] \cdot [\cos(\arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}]) - 1]}{[\cos(\theta_{1\kappa} + \arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}]) - 1] \cdot [\cos(\arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}]) + 1]} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\cos(\vartheta_{\kappa} + \arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}])}{2 \cdot \sin^2(\vartheta_{\kappa} + \arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}])} + \frac{\cos(\arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}])}{2 \cdot \sin^2(\arctg[\frac{ctg\theta_0}{\sin \kappa}])} \right] &= \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3) \cdot \lambda}{3c(I_{BOK} + I_{ПOK})\omega_B} t_{\kappa}. \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Для максимального быстродействия системы следует установить угол  $\lambda = |\lambda_{max}|$  [56, 57]. В таблице 2.2.2 представлены параметры пространственного разворота солнечного паруса на различные углы установки при различных начальных условиях. В качестве расчётных параметров при моделировании использовались следующие значения: момент инерции плёнки относительно оси разворота ON  $I_{пОК} = 32500 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , момент инерции жёсткой вставки относительно оси разворота ОК  $I_{вОК} = 7500 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , угол сектора, определяющий площадь плёнки с изменяемым коэффициентом отражательной способности  $\lambda_{max} = \frac{\pi}{2}$ .

Таблица 2.2.2 – Параметры пространственного разворота солнечного паруса на различные углы установки при различных начальных условиях

Начальный угол установки паруса $\theta_0$ , рад	Конечный угол установки паруса $\theta_k$ , рад	Угол положения $\alpha$ оси ON, рад	Время разворота, с
0,1	0,5	0,3	40000
0,2	1,2	0,3	250000
0,1	1,2	0,5	260000
0,3	1	0	175000

Как видно из таблиц 2.1.1 и 2.2.2, время на разворот солнечного паруса путём изменения отражательной способности его поверхности будет на несколько порядков больше времени на разворот солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», что доказывает преимущество разработанного в параграфе 2.1 алгоритма управления.



## ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ

Разработанный алгоритм управления пространственным разворотом солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» позволяет осуществлять переориентацию космического аппарата за желаемое время. Ограничением на угловую скорость переориентации будет служить ограничение на угол между векторами кинетических моментов жёсткой вставки и плёнки, вызванное возможностью представления модели плёнки в виде плоского диска.

Данный метод переориентации позволит в десятки раз снизить время на разворот солнечного паруса по сравнению с методами, использующими изменение отражательной способности поверхности плёнки (японский проект IKAROS). Пространственный разворот солнечного паруса можно осуществлять при любом начальном угле установки паруса, в отличие от методов, использующих давление солнечного света в качестве управляющих воздействий. Энергетические затраты потребуются только для создания внешнего момента, изменяющего угол между векторами кинетических моментов вращающихся элементов конструкции. Момент натяжения плёнки будет определяться гироскопическим моментом солнечного паруса.

Важной отличительной особенностью разработанного алгоритма для разворота солнечного паруса является требование к равенству по модулю кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», что по проведённому исследованию позволяет осуществлять пространственную переориентацию в любое желаемое положение при малых затратах энергии. Только потребуются время от времени устранять возникающий дисбаланс векторов кинетических моментов.

### 3. ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАЗГРУЗКИ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

#### 3.1. АЛГОРИТМ РАЗГРУЗКИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Компенсация ненулевого значения суммы кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» (при невозмущённом состоянии плёнки) может быть обеспечена внешним моментом, действующим на плёнку [37, 39, 42]. Учитывая большую площадь поверхности плёнки и общую массу космического аппарата, использование солнечных панелей, меняющих свой наклон относительно солнечных лучей для создания внешнего момента, будет иметь низкое быстродействие ввиду ограниченности их площади. Поэтому предлагается для создания управляющего воздействия изменять коэффициент отражательной способности отдельных секторов полотна солнечного паруса [37, 39, 40, 41, 42].

За счёт разницы нормальных составляющих сил светового давления, действующих на сектора паруса, создаётся внешний момент, изменяющий направление вектора кинетического момента системы «жёсткая вставка – плёнка» [39, 42]. За счёт разницы касательных составляющих сил светового давления, действующих на разные части поверхности паруса, создаётся момент вдоль оси вращения плёнки и тем самым регулировать её частоту вращения [39, 42].

Представим поверхность плёнки в виде большого количества  $m$  секторов  $N$  малой площади, каждый из которых имеет свой номер  $i$  (может принимать целое значение от 1 до  $m$ ). Обозначим через  $S_N$  полуплоскость, лежащую в плоскости невозмущённой поверхности плёнки и ограниченную вектором  $\Delta\vec{M}_N$ . В случае, если необходимо изменить направление вектора кинетического момента системы «жёсткая вставка – плёнка», отражательная способность произвольного сектора  $i$  должна меняться по следующему закону:

$$N_i = \begin{cases} N_{max}, & \text{если } H_i \in S_H \\ N_{min}, & \text{если } H_i \notin S_H \end{cases} \quad (3.1.1)$$

где  $N_i$  – текущее значение коэффициента отражательной способности сектора  $H_i$ .

Обозначим через  $\overrightarrow{OM}$  вектор, проходящий через ось вращения плёнки и параллельный проекции потока солнечного света на поверхность паруса. Обозначим через  $S_K$  полуплоскость, лежащую в плоскости невозмущённой поверхности плёнки и ограниченную вектором  $\overrightarrow{OM}$ . В случае, если необходимо изменить частоту вращения плёнки, произвольный сектор  $i$  должен менять свою отражательную способность по следующему закону:

$$N_i = \begin{cases} N_{max}, & \text{если } H_i \in S_K \\ N_{min}, & \text{если } H_i \notin S_K \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Давление солнечного света зависит от угла установки солнечного паруса, что ограничивает его использование в качестве управляющего воздействия. Так как при этом будет изменяться также направление тяги космического аппарата, а значит, его траектория полёта, устранение дисбаланса должно происходить не постоянно, а после достижения некоторого критического значения угловой скорости приборного отсека [42].

Важным требованием изменения отражательной способности является достаточная скорость её переключения, равная угловой скорости вращения полотна солнечного паруса. Однако в реальных системах переключение происходит не мгновенно, а с некоторым запаздыванием [42].

Время, требуемое на изменение коэффициента отражательной способности плёнки, учитывается путём введения угла смещения границы переключения отражательной способности, определяемого соотношением:

$$\gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} = \frac{(t_1 - t_2) \cdot \omega_z}{2}, \quad (3.1.3)$$

где  $t_1, t_2$  – время переключения коэффициента отражательной способности с  $N_{min}$  на  $N_{max}$  и обратно.

На рисунке 3.1.1 представлено связанное с временем на переключение отражательной способности расхождение реальной и желаемой оси, относительно которой создаётся управляющий момент.



Рисунок 3.1.1 – Расхождение реальной и желаемой оси, относительно которой создаётся управляющий момент

Требуемый сдвиг фазы переключения отражательной способности будет выражаться соотношением:

$$\varepsilon = \omega_z(t_1 + t_2). \quad (3.1.4)$$

Разница моментов, возникающая за счёт касательной составляющей силы светового давления, определяется соотношением (2.2.3). Разность моментов, возникающая за счёт касательной составляющей силы светового давления, определяется соотношением [42]:

$$\Delta M_K = \frac{S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3)}{3c} \lambda \cos^2 \theta \sin \theta. \quad (3.1.5)$$

Изменение угловой скорости вращения системы «жёсткая вставка – плёнка»  $\omega_B$  с использованием разницы моментов, возникающей за счёт касательной составляющей силы светового давления  $\Delta M_K$ , вычисляется в соответствии с соотношением:

$$\frac{d\omega_B}{dt} = \frac{S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3)}{3c(I_{Bz} + I_{\Pi z})} \lambda \cos^2 \theta \sin \theta, \quad (3.1.6)$$

где  $I_{BZ}$  – момент инерции жёсткой вставки относительно оси  $OZ$ , кг·м<sup>2</sup>;

$I_{ПZ}$  – момент инерции плёнки относительно оси  $OZ$ , кг·м<sup>2</sup>.

Считая угол установки паруса постоянным, можно записать уравнение вращательного движения солнечного паруса относительно оси  $OZ$ :

$$d\omega_B = \pm \frac{\Delta M_K}{(I_{BZ} + I_{ПZ})} dt, \quad (3.1.7)$$

где знак « $-$ » ставится в случае уменьшения угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка», а « $+$ » ставится в случае увеличения угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка».

Решение дифференциального уравнения (3.1.7) имеет вид:

$$\omega_B = \omega_{B0} \pm \frac{\Delta M_K}{(I_{BZ} + I_{ПZ})} t, \quad (3.1.8)$$

где  $t$  – время достижения заданной угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка», с;

$\omega_{B0}$  – начальная угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка», рад/с.

Из соотношения (3.1.8) с учётом формулы (3.1.5) можно получить соотношение для времени достижения заданной угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка»:

$$t = \left| \frac{(\omega_B - \omega_{B0}) \cdot (I_{BZ} + I_{ПZ})}{\Delta M_K} \right|, \quad (3.1.9)$$

$$t = \frac{3c(I_{BZ} + I_{ПZ})(\omega_B - \omega_{B0})}{S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_{П}^3 - R_B^3) \lambda \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta}.$$

Увеличение или уменьшение угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка» будет зависеть как от отражательной способности секторов паруса, так и от расположения секторов относительно солнечных лучей.

Найдем оптимальный угол  $\theta_{оп}$ , при котором время изменения угловой скорости будет минимально. Продифференцируем для этого соотношение (3.1.9) по углу установки  $\theta$ . Получим следующий результат:

$$t'_\theta = \frac{3c(I_{BZ} + I_{ПZ})(\omega_B - \omega_{B0})}{S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_{П}^3 - R_B^3) \lambda} \frac{2 \cdot \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta \cdot \sin^2 \theta}. \quad (3.1.10)$$

Тогда экстремум функции (3.1.7) будет определяться соотношением:

$$\frac{3c(I_{BZ}+I_{ПЗ})(\omega_B-\omega_{B0})}{S(N_{max}-N_{min})\cdot(R_{П}^3-R_B^3)\lambda} \frac{2\cdot\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\cos^3\theta\cdot\sin^2\theta} = 0,$$

$$\theta_{оп} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 35^\circ. \quad (3.1.11)$$

Для изменения отражательной способности сектора на него требуется подать электрическое напряжение. Тогда мгновенная мощность, необходимая для изменения отражательной способности солнечного паруса, будет определяться соотношением:

$$\frac{dW}{dt} = w_s \frac{\lambda}{m} (R_{П}^2 - R_B^2), \quad (3.1.12)$$

где  $w_s$  – требуемый ток для изменения отражательной способности  $1 \text{ м}^2$  полотна солнечного паруса, Вт/м<sup>2</sup>.

В общем случае момент, возникающий при изменении коэффициента отражательной способности, будет одновременно влиять как на направление вектора кинетического момента системы «жёсткая вставка – плёнка», так и на его абсолютное значение. Это необходимо учитывать при составлении закона управления для устранения дисбаланса векторов кинетических моментов. Сравнивая соотношения (2.2.6) и (3.1.5), можно отметить, что касательная составляющая силы светового давления будет оказывать меньший эффект, чем нормальная составляющая силы светового давления при углах установки  $\theta < \frac{\pi}{4}$ . Поэтому при возникновении дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» в первую очередь потребуется выравнивание до требуемой величины угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка» [42].

Требуемая величина угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка»  $\omega_{BK}$ , рад, будет определяться соотношением:

$$\omega_{BK} = \frac{I_{MZ1}\omega_M}{I_{BZ1}+I_{ПЗ1}}, \quad (3.1.13)$$

где  $I_{MZ1}$  – момент инерции маховика относительно оси  $OZ_1$ , кг·м<sup>2</sup>;

$I_{BZ1}$  – момент инерции жёсткой вставки относительно оси  $OZ_1$ , кг·м<sup>2</sup>;

$I_{ПЗ1}$  – момент инерции плёнки относительно оси  $OZ_1$ , кг·м<sup>2</sup>.

Для обеспечения быстродействия системы, связанного с устранением дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», солнечный парус следует ориентировать под углом установки, определяемым соотношением (3.1.11). Максимальное воздействие касательная составляющая силы светового давления будет оказывать на угловую скорость в том случае, когда ось  $OM$  будет лежать в плоскости  $S_M$ , проходящей через вектор силы светового давления и вектор угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка» [41, 42]. Если ось  $OM$  будет перпендикулярна плоскости  $S_M$ , касательная составляющая силы светового давления не будет оказывать влияние на солнечный парус. В общем случае положение оси  $OM$  относительно плоскости  $S_M$  в процессе разворота солнечного паруса будет меняться, а значит, будет изменяться и оказываемое влияние касательной составляющей силы светового давления. При этом в каждый момент времени вектор касательной составляющей силы светового давления будет направлен вдоль оси  $OL$ , которая находится в плоскости  $OX_1Y_1$  и составляет наибольший угол  $\psi$  с осью  $OZ$  из всех возможных положений осей, лежащих в плоскости  $OX_1Y_1$ . Положение связанной с солнечным парусом системы координат представлено на рисунке 3.1.2.

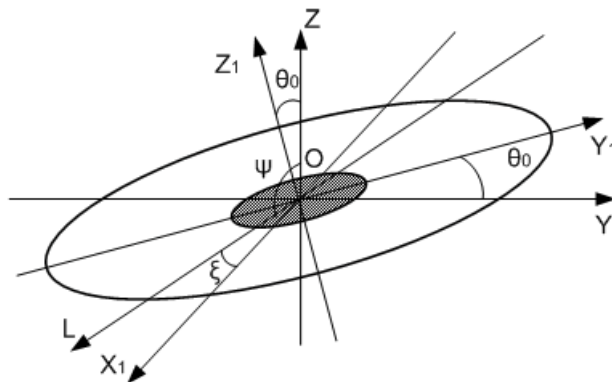


Рисунок 3.1.2 – Положение связанной с солнечным парусом системы координат

Пространственное положение оси  $OL$  относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  будет определяться соотношением:

$$OL^T = [\cos \xi \quad \sin \xi \quad 0], \quad (3.1.14)$$

где  $\xi$  – угол между осями OL и  $OX_1Y_1$ .

Положение оси OL относительно базовой системы координат OXYZ с учётом выражения (2.1.37) для  $G_c$  будет определяться вектором:

$$\begin{aligned} OL_6 &= G_c \cdot OL, \\ OL_6^T &= [\cos \xi \quad \cos \theta_0 \sin \xi \quad \sin \theta_0 \sin \xi]. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Текущий угол  $\psi$ , рад, между осями OL и OZ определяется соотношением:

$$\cos \psi = \frac{(\overline{OL}, \overline{OZ})}{|\overline{OL}| \cdot |\overline{OZ}|}. \quad (3.1.16)$$

Норма векторов OL и OZ равна единице, отсюда угол  $\psi$  между этими осями можно найти по формуле:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \sin \theta_0 \sin \xi, \\ \psi &= \arccos(\sin \theta_0 \sin \xi). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Угол  $\xi$  будет определять экстремум функции угла  $\psi$ . Для его нахождения продифференцируем выражение (3.1.17) по  $\xi$ . Получим:

$$\psi'_\beta = -\frac{\sin \theta_0 \cos \xi}{\sqrt{1 - (\sin \theta_0 \sin \xi)^2}}. \quad (3.1.18)$$

Экстремум функции (3.1.17) будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} -\frac{\sin \theta_0 \cos \xi}{\sqrt{1 - (\sin \theta_0 \sin \xi)^2}} &= 0, \\ \xi &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Из соотношения (3.1.18) также следует, что при  $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$  экстремума не будет, и касательная составляющая силы светового давления не будет оказывать влияния на солнечный парус.

Для обеспечения максимального быстродействия при изменении угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка» и снижения влияния нормальной составляющей силы светового давления необходимо постоянно менять положение линии переключения отражательной способности. В этом случае можно считать, что вектор кинетического момента системы «жёсткая вставка – плёнка» за счёт разницы нормальных составляющих сил светового давления,



действующих на парус, будет вращаться вокруг оси OZ. Для того, чтобы компенсировать изменение угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», которое может привести к нежелательному вращению солнечного паруса вокруг оси, совпадающей с суммой этих векторов, можно создавать внешний момент, действующий на маховик, противоположный по воздействию моменту, действующему за счёт разницы нормальных составляющих сил светового давления.

Блок-схема моделирования системы управления угловой скоростью системы «жёсткая вставка – плёнка» представлена на рисунке 3.1.3. Введены следующие обозначения:  $\omega_{\text{ВТ}}$  – текущая угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка», рад/с;  $\omega_{\text{ВК}}$  – конечная угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка», рад/с;  $v_{\text{тр}}$  – требуемый угол между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», рад;  $v_{\text{н}}$  – угол между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», который образуется за счёт воздействия разницы нормальных составляющих сил светового давления, рад.

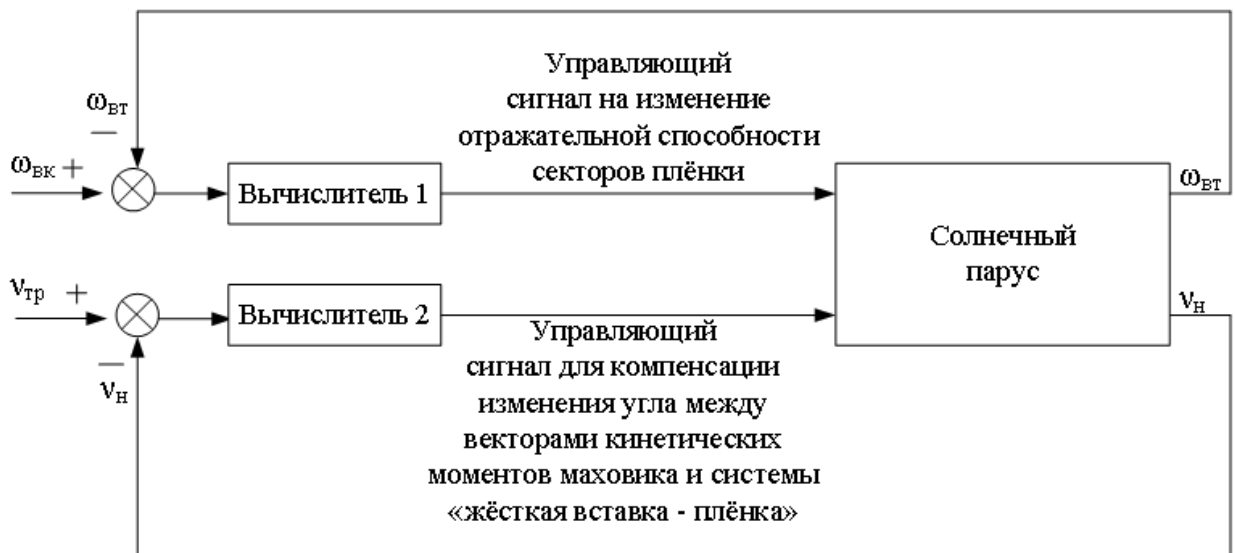


Рисунок 3.1.3 – Блок-схема моделирования системы управления угловой скоростью системы «жёсткая вставка – плёнка»

Матрица вращения солнечного паруса вокруг оси OZ имеет вид:

$$F_{OZ} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.20)$$

где  $\vartheta$  – угол разворота солнечного паруса под действием разницы нормальных составляющих сил светового давления, рад.

В каждый момент времени пространственные координаты солнечного паруса относительно базовой системы координат OXYZ, с учётом выражения (2.1.37) и предположения, что  $\theta_0 = \theta_{оп}$ , будут определяться соотношением:

$$G_K = G_C \cdot F_{OZ},$$

$$G_K = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \cos \theta_{оп} \sin \vartheta & \cos \theta_{оп} \cos \vartheta & -\sin \theta_{оп} \\ \sin \theta_{оп} \sin \vartheta & \sin \theta_{оп} \cos \vartheta & \cos \theta_{оп} \end{bmatrix}. \quad (3.1.21)$$

Момент инерции жёсткой вставки относительно оси можно найти по соотношению [51]:

$$I_{BZ} = \frac{(I_{BY_1} + I_{BZ_1})}{2} + \frac{(I_{BY_1} - I_{BZ_1})}{2} \cos(2\theta_{оп}) - I_{BY_1Z_1} \sin(2\theta_{оп}), \quad (3.1.22)$$

где  $I_{BY_1}$  – момент инерции жёсткой вставки относительно оси  $OY_1$ , кг·м<sup>2</sup>;

$I_{BY_1Z_1}$  – собственный момент инерции жёсткой вставки относительно плоскости  $OY_1Z_1$ , кг·м<sup>2</sup>.

Собственный момент инерции жёсткой вставки относительно плоскости  $OY_1Z_1$  можно найти по соотношению:

$$I_{BY_1Z_1} = \iiint_V \rho_c y_1 z_1 dV = \frac{m_B (R_B - R_{от}) h_B}{3\pi}. \quad (3.1.23)$$

Окончательно момент инерции жёсткой вставки будет выражаться соотношением:

$$I_{BZ} =$$

$$= \frac{3m_B (R_B^2 + R_{от}^2)}{8} + \frac{m_B \cdot h_B^2}{24} + \left[ -\frac{m_B (R_B^2 + R_{от}^2)}{8} + \frac{m_B \cdot h_B^2}{24} \right] \cos(2\theta_{оп}) - \frac{m_B (R_B - R_{от}) h_B}{3\pi} \sin(2\theta_{оп}). \quad (3.1.24)$$

Аналогично можно найти момент инерции плёнки, который, при условии, что толщиной плёнки можно пренебречь, будет определяться соотношением:

$$I_{пз} = \frac{3m_{п} (R_B^2 + R_{п}^2)}{8} - \frac{m_{п} (R_B^2 + R_{п}^2)}{8} \cos(2\theta_{оп}). \quad (3.1.25)$$

Система уравнений, описывающая изменение угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка», может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\omega_B}{dt} = \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3)}{3c(I_{BZ} + I_{\Pi Z})} \lambda \cos^2 \theta_{оп} \sin \theta_{оп} \\ \frac{d\vartheta_H}{dt} = \omega_H \\ \frac{d\omega_H}{dt} = - \frac{S(N_{max}-N_{min}) \cdot (R_{\Pi}^3 - R_B^3) \cdot \lambda}{3c(I_{BOM} + I_{\Pi OM})} \cdot \cos^3 \theta_{оп} \end{cases}, \quad (3.1.26)$$

где  $\omega_H$  – угловая скорость разворота солнечного паруса вокруг оси OZ за счёт воздействия разницы нормальных составляющих сил светового давления, рад/с;  $\vartheta_H$  – угол, на который будет смещаться солнечный парус за счёт воздействия разницы нормальных составляющих сил светового давления, рад.

При моделировании использовались следующие параметры солнечного паруса: момент инерции жёсткой вставки относительно оси OZ  $I_{BZ} = 11550$  кг·м<sup>2</sup>, момент инерции плёнки относительно оси OZ  $I_{\Pi Z} = 50300$  кг·м<sup>2</sup>, угол сектора, определяющий площадь плёнки с изменяемым коэффициентом отражательной способности  $\lambda = \pi$ . В результате моделирования можно сделать вывод, что угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» изменит своё значение на 5 % за 17500 с. Воспользовавшись соотношением (3.1.10) и приняв, что требуемый ток для изменения отражательной способности 1 м<sup>2</sup> полотна солнечного паруса  $w_s = 7$  Вт/м<sup>2</sup>, а число секторов  $m = 100$ , получим, что мгновенная мощность, требуемая на изменение отражательной способности поверхности солнечного паруса, будет равна 545 Вт.

Теперь рассмотрим пример, когда в конструкции есть дисбаланс между направлением векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». В этом случае солнечный парус вращается вокруг оси ОК. При этом требуется создать управляющий момент вдоль оси ON, чтобы вернуть коллинеарность векторам кинетических моментов вращающихся элементов конструкции. В этом случае величина управляющего момента будет зависеть от текущего угла установки паруса [41, 42].

Положение оси ОК можно вычислить с помощью датчиков, установленных на приборном отсеке. Её пространственное положение относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  будет определяться соотношением (2.1.3). Матрица вращения солнечного паруса относительно оси ОК описывается соотношением (2.1.32), текущий угол установки паруса – соотношением (2.1.40). Ось ON, вдоль которой требуется создать управляющий момент для возвращения коллинеарности векторам кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», будет лежать в плоскости  $OX_1Y_1$  и будет перпендикулярна плоскости, проходящей через вектор  $OZ_1$ , и проекции оси ОК на плоскость  $OX_1Y_1$ . Пространственное положение оси ON относительно системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  будет определяться соотношением:

$$ON^T = \left[ \frac{-\hat{y}}{\sqrt{1-\hat{z}^2}} \quad \frac{\hat{x}}{\sqrt{1-\hat{z}^2}} \quad 0 \right]. \quad (3.1.27)$$

При вращении солнечного паруса также будет возникать угол  $\delta$ , рад, между векторами кинетических моментов плёнки и жёсткой вставки, определяемый формулой (2.1.15). Поэтому вращение вектора кинетического момента системы «жёсткая вставка – плёнка» относительно оси ON будет определяться матрицей:

$$F_{ON} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_H + \delta) + \frac{\hat{y}^2[1-\cos(\vartheta_H+\delta)]}{1-\hat{z}^2} & \frac{-\hat{x}\hat{y}[1-\cos(\vartheta_H+\delta)]}{1-\hat{z}^2} & \frac{\hat{x}\sin(\vartheta_H+\delta)}{\sqrt{1-\hat{z}^2}} \\ \frac{-\hat{x}\hat{y}[1-\cos(\vartheta_H+\delta)]}{1-\hat{z}^2} & \cos(\vartheta_H + \delta) + \frac{\hat{x}^2[1-\cos(\vartheta_H+\delta)]}{1-\hat{z}^2} & \frac{\hat{y}\sin(\vartheta_H+\delta)}{\sqrt{1-\hat{z}^2}} \\ -\frac{\hat{x}\sin(\vartheta_H+\delta)}{\sqrt{1-\hat{z}^2}} & -\frac{\hat{y}\sin(\vartheta_H+\delta)}{\sqrt{1-\hat{z}^2}} & \cos(\vartheta_H + \delta) \end{bmatrix}. \quad (3.1.28)$$

Потребуется создавать управляющий момент до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\vartheta_H = \nu, \quad (3.1.29)$$

где  $\nu$  – угол, определяющий дисбаланс по направлениям векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», рад.

Блок-схема для моделирования системы устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» по направлению представлена на рисунке 3.1.4.

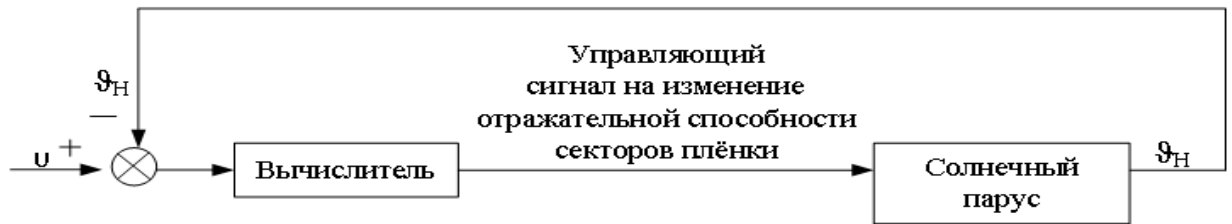


Рисунок 3.1.4 – Блок-схема для моделирования системы устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» по направлению

Текущее положение поверхности паруса относительно базовой системы координат  $OXYZ$  с учётом матрицы начального положения (2.1.37) и матриц вращения (2.1.32) и (3.1.25) будет определяться матрицей:

$$G_d = G_c \cdot F \cdot F_{ON}. \quad (3.1.30)$$

Текущий угол установки паруса  $\theta$  можно найти как угол между векторами  $OZ$  и  $OZ_1$  по формуле (2.2.31), где ось  $OZ_1$  будет определяться матрицей (3.1.30). При моделировании можно рассчитать устранение дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» таким образом, чтобы прийти к желаемому углу установки паруса в процессе управления.

Система уравнений, описывающая процесс устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta_H}{dt} = \omega_H \\ \frac{d\omega_H}{dt} = \frac{S(N_{max} - N_{min}) \cdot (R_H^3 - R_B^3) \cdot \lambda}{3c(I_{BON} + I_{HON})} \cdot \cos^3 \theta \\ \delta = \frac{KL}{I_{OK} \cdot \omega_B - KL} \cdot \nu \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{I_{OK}} \nu \end{array} \right. \quad (3.1.31)$$

При моделировании были приняты следующие параметры: определяющий дисбаланс по направлениям векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка»  $\nu = 0,0063$  рад, начальный угол установки солнечного паруса  $\theta_0 = 0,1$  рад, желаемый угол установки паруса:  $\theta_0 = 0,25$  рад. На рисунке 3.1.5 приведена зависимость угла установки паруса от времени. Время на устранение дисбаланса составило 45 с.

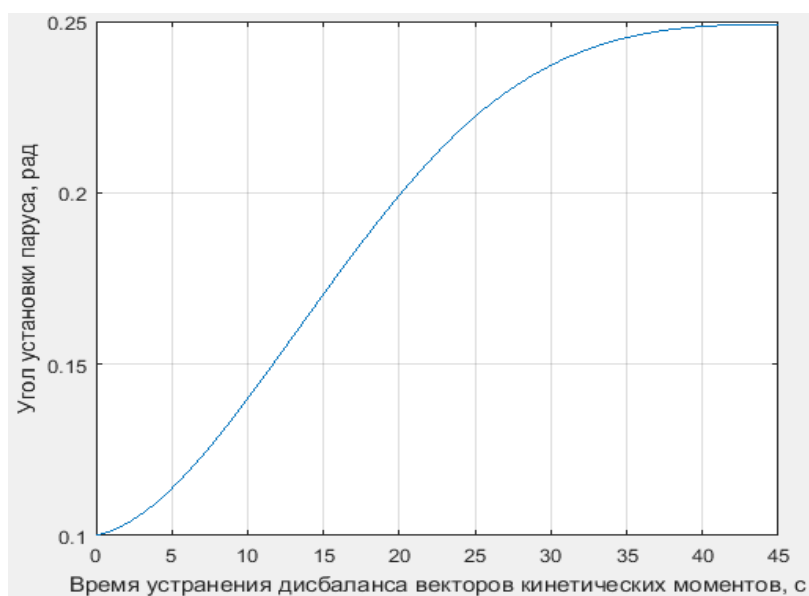


Рисунок 3.1.5 – Зависимость угла установки паруса от времени

В результате алгоритм устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» по модулю и направлению будет включать следующие шаги [42]:

Шаг 1. Определить угловую скорость приборного отсека.

Шаг 2. Определить угловые скорости маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».

Шаг 3. Сравнить значения модулей кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». Если они не равны, то перейти на шаг 4, если равны – на шаг 7.

Шаг 4. Обеспечить оптимальный угол установки паруса для минимального времени на изменение угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка»

Шаг 5. Вычислить положение оси  $OM$ , относительно которой происходит изменение коэффициента отражательной способности плёнки.

Шаг 6. Изменить угловую скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» за счёт разницы касательных составляющих сил светового давления при изменении коэффициента отражательной способности.

Шаг 7. Вычислить угол между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».

Шаг 8. Вычислить положение оси  $ON$ , относительно которой происходит изменение угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».

Шаг 9. Изменить угол между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» за счёт разницы касательных составляющих сил светового давления при изменении коэффициента отражательной способности.

Шаг 10. Прекратить устранение дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» в случае равенства нулю угловой скорости приборного отсека.

Блок-схема алгоритма устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» представлена на рисунке 3.1.6.

Расход энергии потребует в течение всего времени устранения дисбаланса кинетических моментов вращающихся частей солнечного паруса. С целью минимизации расхода энергии предпочтительнее изменять отражательную способность не всей поверхности паруса, а только определённой его части. Однако следует учитывать, что это также повлечёт за собой увеличение времени на устранение дисбаланса кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка».

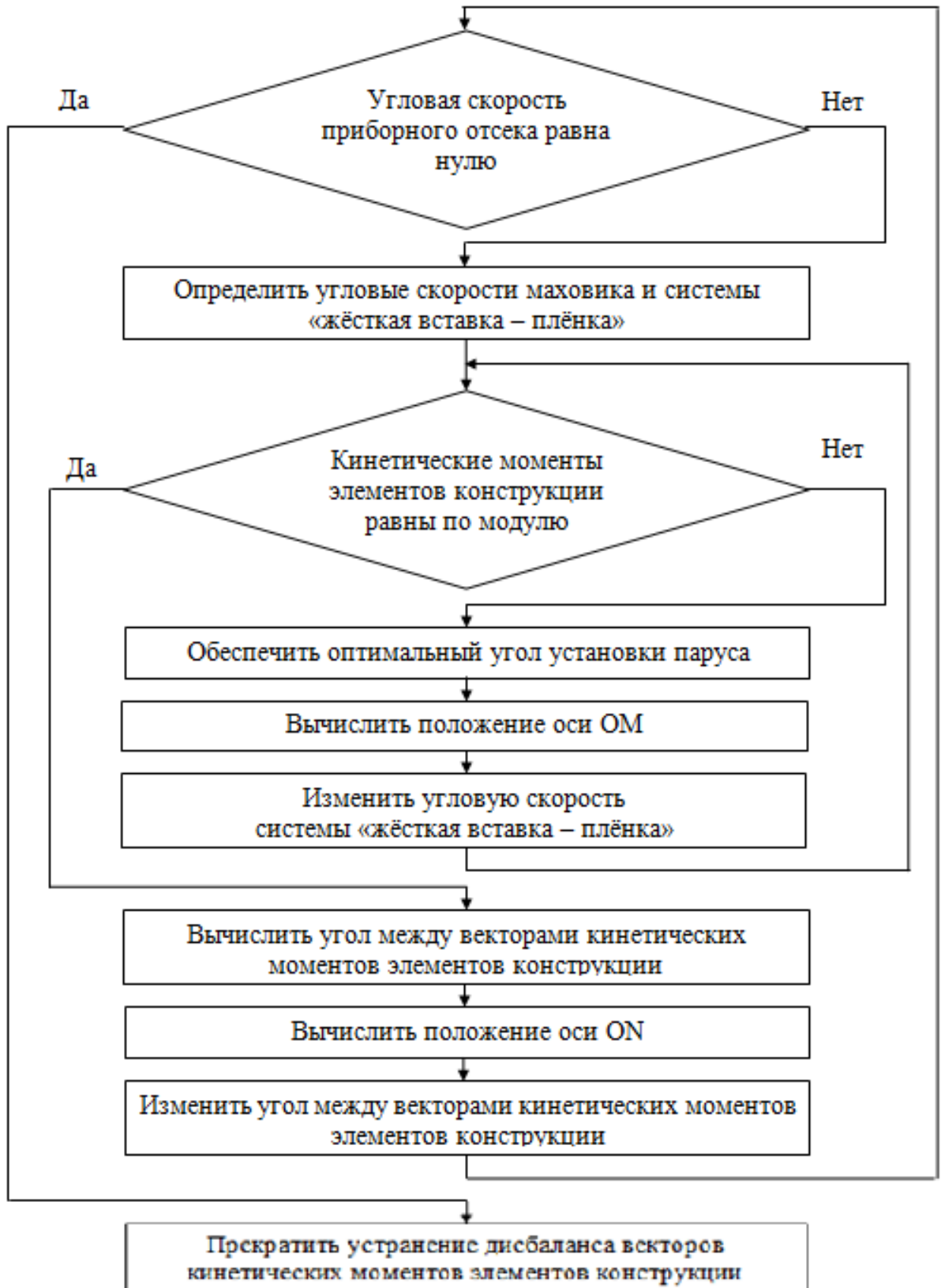


Рисунок 3.1.6 – Блок-схема алгоритма устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» по модулю и направлению



### 3.2. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ АККУМУЛИРОВАНИЯ ЭНЕРГИИ С ПОМОЩЬЮ КОНСТРУКЦИИ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА

Для изменения коэффициента отражательной способности солнечного паруса потребуется значительный расход энергии, что приведёт к необходимости увеличения площади солнечных батарей [61, 62]. Однако выравнивание по модулю кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» можно проводить не постоянно, а при необходимости [42]. Чем реже будет проводиться устранение дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», тем меньше будет потребное увеличение площади солнечных батарей [42]. Энергия для работы системы по устранению дисбаланса запасается в аккумуляторах энергии в тот момент, когда устранение дисбаланса не требуется. В качестве таких аккумуляторов можно использовать кинетическую энергию вращающихся элементов конструкции [39, 40, 42]. При этом необходимо, чтобы угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» была не менее значения, обеспечивающего достаточную силу натяжения плёнки для сохранения формы поверхности солнечного паруса [42]. В этом случае площадь солнечных батарей на борту космического аппарата можно увеличить лишь на ту величину, которая в дальнейшем, после устранения дисбаланса, обеспечит возвращение угловых скоростей маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» к своему первоначальному значению за приемлемое время [42].

Высвобожденная энергия за счёт одновременного уменьшения угловых скоростей маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» будет определяться соотношением:

$$E = \left| \frac{I_{BZ} + I_{PZ}}{2} (\omega_{BK}^2 - \omega_{B0}^2) + \frac{I_{MZ}}{2} (\omega_{MK}^2 - \omega_{M0}^2) \right|, \quad (3.2.1)$$

где  $I_{BZ}$  – момент инерции жёсткой вставки относительно оси OZ, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{PZ}$  – момент инерции плёнки относительно оси OZ, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{MZ}$  – момент инерции маховика относительно оси OZ, кг·м<sup>2</sup>;

$\omega_{B0}$  – начальная угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка», рад/с;

$\omega_{BK}$  – конечная угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка», рад/с;

$\omega_{M0}$  – начальная угловая скорость маховика, рад/с;

$\omega_{MK}$  – конечная угловая скорость маховика, рад/с.

Кинетические моменты маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» равны, следовательно, можно записать соотношение:

$$[I_{BZ} + I_{PZ}] \cdot \omega_B(t) = I_M \cdot \omega_M(t). \quad (3.2.2)$$

Выразив из (3.2.2) угловую скорость маховика, получим:

$$\omega_M(t) = \frac{[I_{BZ} + I_{PZ}] \cdot \omega_B(t)}{I_{MZ}}. \quad (3.2.3)$$

Тогда соотношение (3.2.1) с учётом (3.2.3) можно представить в следующем виде:

$$E = \left| \frac{[I_{BZ} + I_{PZ}] \cdot [I_{MZ} + I_{BZ} + I_{PZ}]}{2I_{MZ}} (\omega_{BK}^2 - \omega_{B0}^2) \right|. \quad (3.2.4)$$

Если положить, что отбираемая мощность – постоянная величина, то угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» в каждый момент времени определяется зависимостью:

$$\omega_{BK} = \sqrt{\omega_{B0}^2 - \frac{2I_{MZ}Mt}{[I_{BZ} + I_{PZ}] \cdot [I_{MZ} + I_{BZ} + I_{PZ}]}} \quad (3.2.5)$$

где M – мгновенная мощность, Вт.

В подразделе 2.2 говорилось о том, что на минимальную величину угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка» существует ограничение, связанное с возможностью представления модели поверхности плёнки в виде плоского диска при переориентации солнечного паруса. Это накладывает ограничение также на величину снимаемой энергии. На рисунке 3.2.1 представлена зависимость угла между векторами кинетических моментов плёнки и жёсткой вставки от угловой скорости системы «жёсткая вставка –

плёнка» при угловой скорости переориентации солнечного паруса  $\omega_{OK} = 0,005$  рад/с.

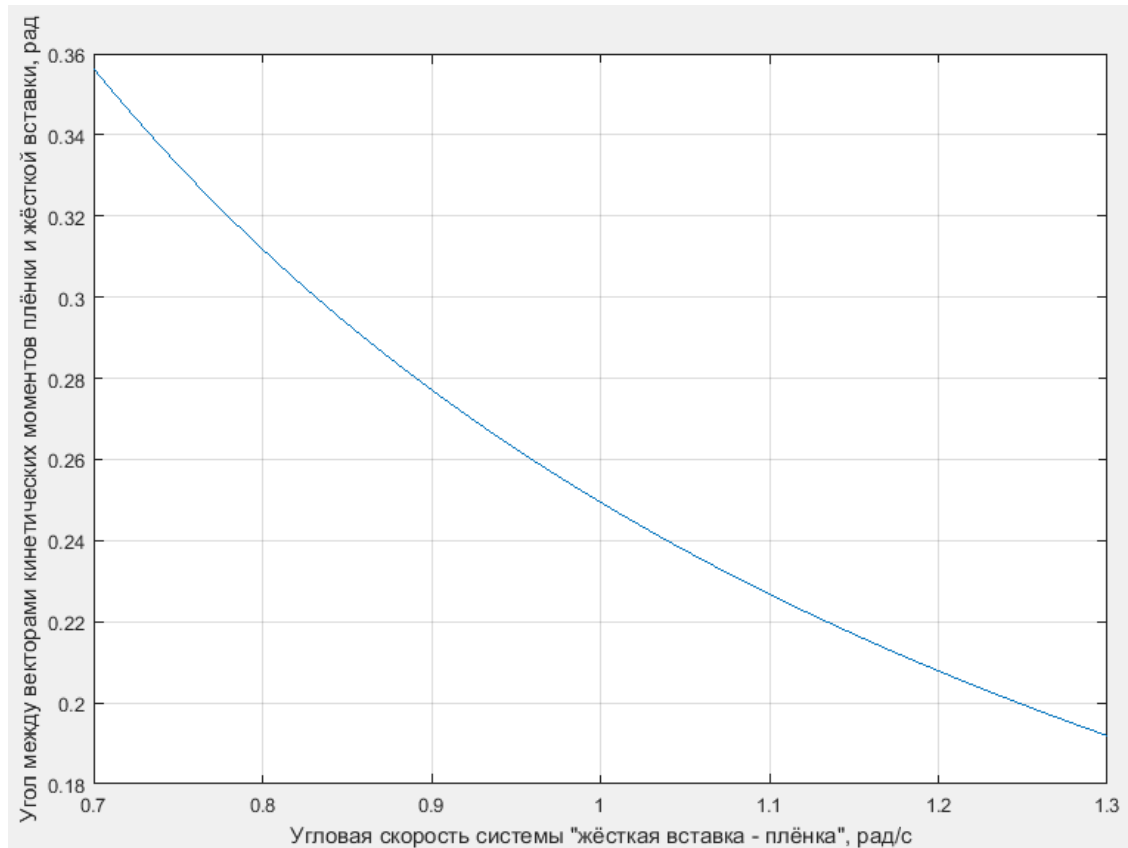


Рисунок 3.2.1 – Зависимость угла между векторами кинетических моментов плёнки и жёсткой вставки от угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка»

Применение высокопрочных материалов позволяет задать такую номинальную угловую скорость вращения плёнки, чтобы можно было допустить снижение скорости её вращения более, чем на 20% от исходной [44].

Для обеспечения выполнения требований к углу между векторами кинетических моментов плёнки и жёсткой вставки, определяемых (2.1.17), и задаваясь позволительным уменьшением угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка», согласно формулам (2.1.17) и (2.1.18), можно снизить величину предельного значения угла отклонения  $\hat{\chi}$  вектора кинетического момента маховика от оси, противоположной по направлению оси  $OZ_1$ , и предельно допустимую угловую скорость разворота солнечного паруса  $\hat{\omega}_{OK}$ .

На рисунке 3.2.2 представлен график мгновенной мощности, получаемой за счёт перевода кинетических энергий элементов конструкции в электрическую энергию, от времени, за которое угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» уменьшится на 20 %.

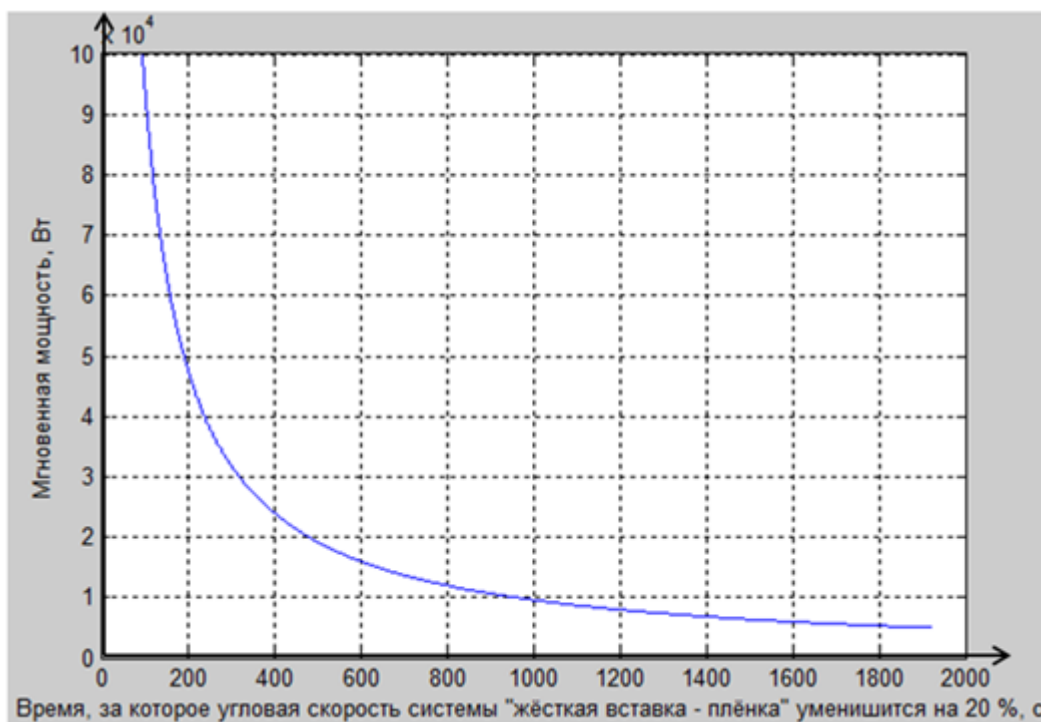


Рисунок 3.2.2 – График мгновенной мощности, получаемой за счёт перевода кинетических энергий элементов конструкции в электрическую энергию, от времени, за которое угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» уменьшится на 20 %

Для примера, рассмотренного в подразделе 3.1, было принято, что мгновенная мощность, требуемая на изменение отражательной способности поверхности солнечного паруса, будет равна 545 Вт. Тогда время, за которое угловая скорость системы «жёсткая вставка – плёнка» уменьшится на 20 %, составит 1900 с. Этого времени вполне хватит для устранения дисбаланса векторов кинетических моментов вращающихся элементов конструкции по направлению. В случае устранения дисбаланса векторов кинетических моментов вращающихся элементов конструкции по модулю снятие

кинетических энергий можно производить не равномерно с маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», а пропорционально тому, какая из угловых скоростей больше.

После осуществления необходимого управления угловые скорости маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» возвратятся к своему первоначальному значению за счёт энергии, получаемой от солнечных батарей. На рисунке 3.2.3 представлена зависимость времени возвращения угловых скоростей к первоначальному значению от отношения конечных и начальных значений угловых скоростей элементов конструкции при различной площади солнечных батарей, выраженной в процентах, от площади паруса.

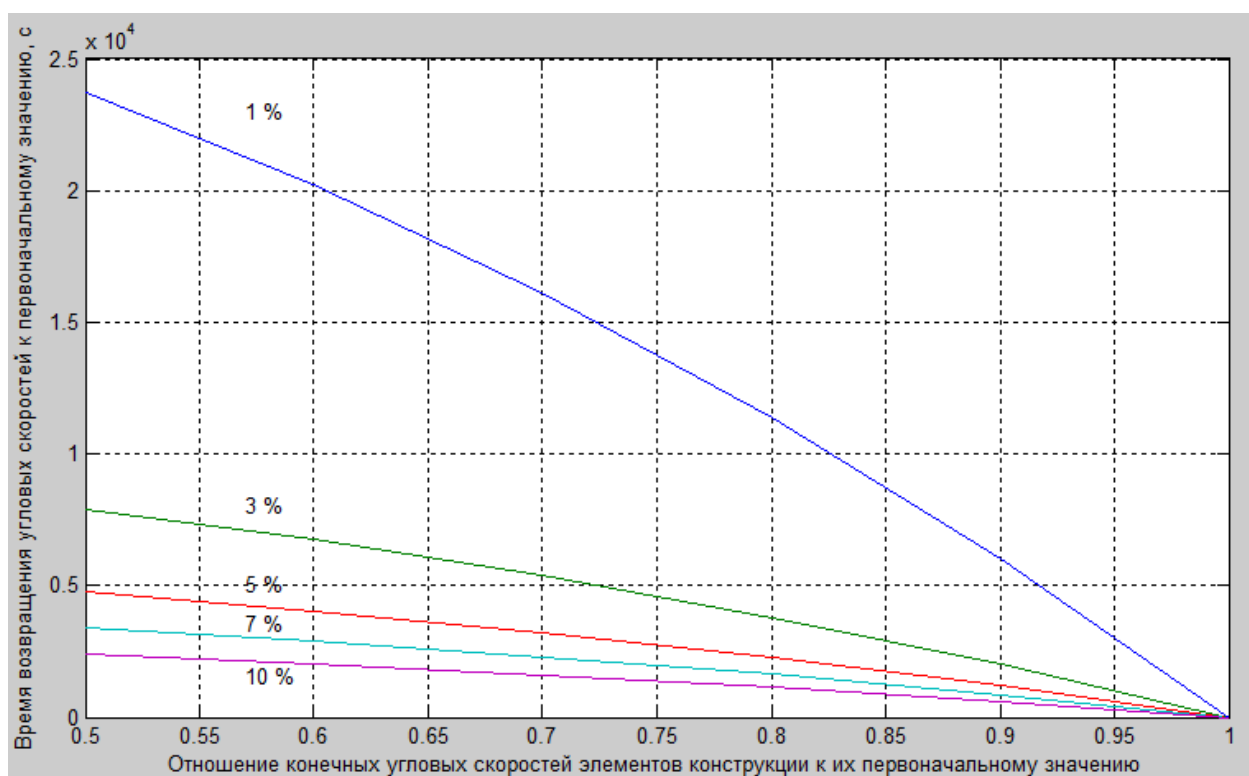


Рисунок 3.2.3 – Зависимость времени возвращения угловых скоростей к первоначальному значению от отношения конечных и начальных значений угловых скоростей элементов конструкции при различной площади солнечных батарей, выраженной в процентах, от площади паруса

Наиболее предпочтительным оказывается вариант, когда площадь солнечных батарей занимает порядка 3 % от общей площади плёнки. В этом

случае при снижении угловых скоростей маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» на 20 % от первоначальной, время на восстановление составит 3800 с. После возвращения угловых скоростей вращающихся элементов конструкции к своему первоначальному значению, устранение дисбаланса может продолжиться.

Можно сделать вывод, что для обеспечения изменения отражательной способности солнечного паруса при устранении дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» будет достаточно энергии, получаемой за счёт уменьшения угловых скоростей элементов его конструкции. При этом не потребуется использования химических аккумуляторов, а также сократится площадь солнечных батарей, а следовательно, и масса космического аппарата.

## ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ

Давление солнечного света предлагается использовать как управляющее воздействие только для устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка», возникающего вследствие внешних возмущающих эффектов. Для этого необходимо изменять коэффициент отражательной способности поверхности плёнки. Приведённая в разделе методика позволит обойтись без расхода рабочего тела, при этом устранение дисбаланса будет осуществляться за разумное время. При этом изменение угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка» происходит медленнее, чем изменение угла установки паруса, поэтому прежде всего необходимо устранить дисбаланс векторов кинетических моментов по модулю, а затем уже – по направлению. При устранении дисбаланса по модулю следует отдельно компенсировать изменение угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». Первоначальная установка паруса на оптимальный угол установки, при котором касательная составляющая силы светового давления достигает своего максимального значения, позволит увеличить быстродействие системы.

Устранение дисбаланса векторов кинетических моментов вращающихся элементов конструкции за счёт изменения отражательной способности поверхности паруса потребует существенных энергетических затрат. Предложенная методика рекуперации кинетических энергий маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» позволит снизить площадь солнечных батарей, требуемую для обеспечения изменения отражательной способности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Солнечный парус на данный момент является одним из перспективных вариантов космического аппарата, особенно в случае длительных полётов, поскольку не требует ракетного топлива. Для достижения требуемых орбит необходимо менять ориентацию паруса, что в настоящее время осуществляется путём расхода горючего реактивных двигателей либо путём изменения отражательной способности поверхности паруса. Такое управление требует расхода рабочего тела или большого времени на переориентацию. Поэтому разработка системы управления солнечным парусом без расхода рабочего тела является весьма актуальной задачей, которая может послужить основой для управления переориентацией других видов космических аппаратов.

Анализ установившейся формы поверхности плёнки при равномерном вращательном движении солнечного паруса показал, что основной изгиб плёнки возникает возле жёсткой вставки, а на больших радиусах плёнка будет представлять собой плоский диск, расположенный под некоторым углом к плоскости жёсткой вставки. Представление поверхности плёнки в виде плоского диска (т.е. случай одной аппроксимирующей окружности) обеспечивается соответствующим выбором таких параметров космического аппарата, как соотношение радиусов плёнки и жёсткой вставки, угловая скорость плёнки, угловая скорость переориентации.

Разработан алгоритм демпфирования колебаний плёнки при эволюциях солнечного паруса. Доказана целесообразность демпфирования только первого ненулевого тона, как оказывающего самое существенное влияние на установившуюся поверхность плёнки, и возможность рассмотрения грубой математической модели поверхности плёнки в виде плоского диска. Рассмотренная модель отличается простотой её реализации. При этом в работе показано, что система с разработанным алгоритмом управления работоспособна и в случае большего числа аппроксимирующих окружностей,



демпфируя более высокие частоты. Построен редуцированный наблюдатель для не измеряемых угловых координат плёнки относительно жёсткой вставки.

Разработан алгоритм управления пространственным разворотом солнечного паруса путём изменения угла между векторами кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». Результаты моделирования показывают работоспособность данного метода, а также его значительное преимущество по временным и энергетическим показателям по сравнению с существующими аналогами, в которых управление реализовывалось только изменением коэффициента отражательной способности плёнки.

Разработан алгоритм устранения дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка» без расхода рабочего тела путём изменения коэффициента отражательной способности поверхности плёнки, проведена оценка энергетических и временных затрат. Оптимальным для сокращения временных затрат является вариант, когда изменение коэффициента отражательной способности происходит на половине поверхности плёнки, но это приводит к значительным энергетическим затратам. С уменьшением площади, на которой меняется отражательная способность, уменьшается расход энергии, но при этом также возрастает время на устранение дисбаланса.

Установлена взаимосвязь между необходимым увеличением поверхности солнечных батарей и возможным временем работы алгоритма по устранению дисбаланса векторов кинетических моментов маховика и системы «жёсткая вставка – плёнка». При использовании в качестве аккумулятора энергии вращающихся элементов конструкции солнечного паруса вычислено возможное снижение угловой скорости системы «жёсткая вставка – плёнка», при котором правомерно считать поверхность плёнки плоским диском.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Поляхова Е. Н. Космический полёт с солнечным парусом: проблемы и перспективы. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 304 с.
2. Б.В. Поллер, А.Б. Поллер Об освещении земной поверхности с помощью «солнечных парусов» и «солнечных шаров» в околоземном пространстве // журнал «Интерэкспо Гео-Сибирь», 2008 г.
3. Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении, 3-е изд., дополненное и переработанное.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 512 с.
4. Комков В.А., Мельников В.М. Центробежные бескаркасные крупногабаритные космические конструкции. – М. «ФИЗМАТЛИТ», 2009. 447 стр.
5. Merikallio S. and Janhunen P. Moving an asteroid with electric solar wind sail // ASTROPHYSICS AND SPACE SCIENCES TRANSACTIONS, 7 December 2010, pp. 41-48.
6. Friedliani L., Garf D., Hiinsheim T. Evolutionary lightsailing mission for the 100-year starship // JBIS, Vol. 66, 2013, pp. 252-259.
7. Staehle R. L., Anderson B., Betts B., Blaney D., Chow C., Friedman L., Hemmati H., Jones D., Klesh A., Liewer P., Lazio J., Lo M., Mouroulis P., Murphy N., Pingree P. J., Puig-Suari J., Svitek T., Williams A., Wilson T. Interplanetary CubeSats: opening the solar system to a broad community at lower cost // JET PROPULSION LABORATORY, 2012, pp. 1-30.
8. Slann P. A. Space debris and the need for space traffic control // SPACE POLICY 30, 2014, pp. 40-42.
9. Карпасюк И.В. Модификация алгоритма управления космическим аппаратом с солнечным парусом на низкоширотной околокруговой орбите // Вестник АГТУ. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика, 2010 г., № 1, с. 132-134.

10. Цандер Ф. А. Перелеты на другие планеты // Техника и жизнь, 1924 г., № 13, с. 15-16.
11. Циолковский К.Э. Космический корабль. Избранные труды. – М.: Издательство Юрайт, 2017. 454 с.
12. Matloff G.L., Mallove E. Solar sail starships: the clipper ships of the galaxy // Journal of the British Interplanetary Society, Vol. 34, pp. 371-380, 1981.
13. Форвард Р. Л. К звездам на острие луча // Горизонт возможного, Симпозиум по межзвездным сообщениям и путешествиям. Филадельфия, Пенсильвания, 20-25 мая 1986 г.
14. Zoran P. Maximum pivot angle for a small element of a concave spherical mirror illuminated from its center of curvature // INTERNATIONAL JOURNAL OF APPLIED SCIENCE AND TECHNOLOGY, Vol. 2, No. 4, April 2012, pp. 49-51.
15. Yamaguchi T., Ikeda H., Mimasu Y., Tsuda Y., Takeuchi H., Yoshikawa M. Solar sail force modeling for spinning solar sail using the radiometric tracking data // JOURNAL OF AEROSPACE ENGINEERING, SCIENCES AND APPLICATIONS, Vol. III, No 3, Sep. - Dec. 2011, pp. 21-34.
16. Zeng X., Li J., Baoyin H., Gong S. Trajectory optimization and applications using high performance solar sails, , THEORETICAL & APPLIED MECHANICS LETTERS 1, 033001 (2011), pp. 1-7.
17. Young K. The Photonic Railway // JOURNAL OF SPACE EXPLORATION, Issue 2, Vol. 1, 2013, pp. 1-24.
18. Macdonald M. Solar Sailing: Applications and Technology Advancement // ADVANCES IN SPACECRAFT TECHNOLOGIES, February, 2011, pp. 35-60.
19. Zeng X.-Y., Baoyin H., Li J.-F., Gong S.-P. New applications of the H-reversal trajectory using solar sails // RESEARCH IN ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS, Vol. 11 No. 7, 2011, pp. 863-878.
20. Wawrzyniak G.G., Howell K.C. Generating Solar Sail Trajectories in the Earth-Moon System Using Augmented Finite-Difference Methods //

INTERNATIONAL JOURNAL OF AEROSPACE ENGINEERING, Volume 2011, pp. 1-13.

21. Wawrzyniak G.G., Howell K.C. Investigating the Design Space for Solar Sail Trajectories in the Earth-Moon System // THE OPEN AEROSPACE ENGINEERING JOURNAL, Vol. 4, 2011, pp. 26-44.

22. Wawrzyniak G.G., Howell K.C. An adaptive, receding-horizon guidance strategy for solar sail trajectories // AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS, august 2012, pp. 1-18.

23. Liu J., Rong S., Shen F., Cui N. Dynamics and control of a flexible solar sail // MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING, Volume 2014, pp. 1-25.

24. Поляхова Е.Н., Королев В.С. Задачи управления космическим аппаратом с солнечным парусом // Технические науки - от теории к практике: сб. ст. по матер. LV междунар. науч.-практ. конф. № 2(50). – Новосибирск: СибАК, 2016. – С. 18-31.

25. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986 г., 184 с.

26. Каргу Л.И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1980 г., 172 с.

27. Под ред. Лебедева Г.Н. Системы управления летательными аппаратами. – М.: Издательство МАИ, 2007 г., 753 стр.

28. Nakamiya M., Tsuda Y., Kawakatsu Y. A study of the Guidance Method for the small solar power sail demonstrator, IKAROS // JOURNAL OF AEROSPACE ENGINEERING, SCIENCES AND APPLICATIONS, Vol. III, No 3, Sep.-Dec. 2011, pp. 1-10.

29. Manahiro U., Takakazu O. Development of small solar power sail demonstrator IKAROS // NEC TECHNICAL JOURNAL, Vol. 6, NO. 1, 2011, pp. 52-56.

30. Mori O., Shirasawa Y., Miyazaki Y., Sakamoto H., Hasome M., Okuizumi N., Sawada H., Furuya H., Matunaga S., Natori M., Tsuda Y., Saiki T., Funase R.,

Mimasu Y., Kawaguchi J. Deployment and steering dynamics of spinning solar sail "IKAROS" // JOURNAL OF AEROSPACE ENGINEERING, SCIENCES AND APPLICATIONS, Vol. IV, No. 4, Oct - Dec 2012, pp. 79-96.

31. Степаньянц Г.А. Об использовании гибкого гироскопа для реализации проекта "солнечный парус" // «Авиакосмическое приборостроение», 2002 г., № 3, 10-15 с.

32. Черемных Е.А., Зыков А.В. Разработка алгоритмов управления и исследование динамического поведения спутника с большим вращающимся солнечным парусом // Труды МАИ, 2011 г., № 45.

33. Зыков А.В. Разработка алгоритмов управления космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом // Гироскопия и навигация, 2011 г., № 2 (73).

34. Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В. Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом // Труды МФТИ, 2013 г., Т. 5, № 2 (18), с. 106-119.

35. Макаренкова Н.А. Программно-алгоритмическое обеспечение пространственного разворота солнечного паруса без расхода рабочего тела // сборник тезисов Международной молодёжной научной конференции «40-е Гагаринские чтения», 2014 г., с. 273.

36. Макаренкова Н.А. Пространственный разворот солнечного паруса без расхода рабочего тела // сборник тезисов Московской молодёжной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике», 2014 г., с. 83-84.

37. Макаренкова Н.А. Управление пространственной ориентацией солнечного паруса путём изменения его отражательной способности // сборник тезисов Московской молодёжной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике», 2015 г., с. 230-231.

38. Макаренкова Н.А. Исследование формы поверхности полотна солнечного паруса при его пространственном развороте // «Труды МАИ», № 85, 2016 г.
39. Макаренкова Н.А. Управление солнечным парусом без расхода рабочего тела // сборник тезисов Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения», 2016 г., с. 62.
40. Макаренкова Н.А. Использование изменения отражательной способности солнечного паруса для управления его пространственным положением // сборник тезисов Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения», 2017 г., с. 864.
41. Макаренкова Н.А. Управление пространственным положением солнечного паруса // «Труды МАИ», № 94, 2017 г.
42. Макаренкова Н.А. Управление кинетическим моментом солнечного паруса путём изменения отражательной способности его поверхности // «Труды МАИ», № 98, 2018 г.
43. Журавлёв Ю. Активные магнитные подшипники – СПб.: Политехника, 2003. 206 с.
44. Арзамасов Б.Н., Сидорин И.И., Косолапов Г.Ф. и др. Материаловедение: Учебник для высших технических учебных заведений – М.: Машиностроение, 1986. 384 с.
45. Huab T., Gong S., Muac J., Lia J., Wanga T., Qianb W. Switch programming of reflectivity control devices for the coupled dynamics of a solar sail // *Advances in Space Research*, Volume 57, Issue 5, 1 March 2016, pp. 1147-1158.
46. Старовойтов Е.И. Выбор металлизации для отражателей космической системы орбитального освещения поверхности Земли // Труды МАИ, 2017. № 94.
47. Краснопольский П.К. Солнечный парус с управляемыми отражающими свойствами // Труды 55-й научной конференции МФТИ, 2012. с. 24-25.
48. Khoo I.C. *Liquid Crystals: physical properties and non-linear optical phenomena* // Wiley, 1995.

49. Mortimer R. Electrochromic materials // *Chemical Society Reviews*, Vol. 26 (3), 1997, pp. 147-156.
50. Oltean M. Switchable glass: a possible medium for evolvable hardware // *NASA conference on adaptive hardware systems*, 2006, pp. 81-87.
51. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. 416 с.
52. Тимошенко С.П. Теория упругости. – М.: издательство «Наука», 1979. 575 с.
53. Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В. Об устойчивости стационарной формы вращающейся кольцеобразной мембраны с регулярно прецессирующей центральной жёсткой вставкой // *Труды МФТИ*, Т.3, № 3 (11), 2011. с. 73-78.
54. Stepaniants G.A. Flexible gyroscope dynamics investigation – Modeling, measure & control. – В, AM SE Press, vol. 51, № 3, 1993.
55. Степаньянц Г.А. Стабилизация систем управления неустойчивыми и слабодемпфированными объектами // М.: Издательство МАИ, 2011. 162 с.
56. Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие для вузов по спец. «Автоматика и упр. в техн. системах». – М.: Высш. шк, 1989. 263 с.
57. Малышев В.В. Программирование оптимального управления летательными аппаратами. – М.: МАИ, 1982. 78 с.
58. Бороздин В.Н. Гироскопические приборы и устройства систем управления. – М.: Машиностроение, 1990. 271 с.
59. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1963. 482 с.
60. Степаньянц Г.А. Вращение векторного пространства и простейшие задачи управления пространственным разворотом твёрдого тела. – М.: МАИ, 2007. 164 с.

61. Гриликес В.А. Солнечная энергия и космические полёты // М.: Наука, 1984. 214 с.
62. Соренсен Б. Преобразование, передача и аккумуляция энергии // М.: Изд. Интеллект, 2011. 295 с.