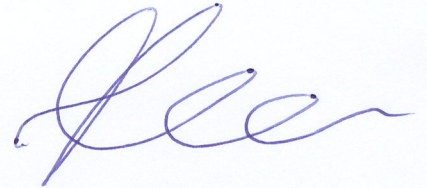


На правах рукописи

Калас Вячеслав Олегович



**ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ И НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАНИЙ
В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА**

Специальность 01.02.01 – «Теоретическая механика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2015

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

В настоящей работе исследуется устойчивость тривиального положения равновесия в задаче Ситникова, как в линейном случае, так и в нелинейной постановке. Также проводится анализ устойчивости равновесия и некоторых колебаний для фотогравитационной задачи Ситникова.

Актуальность исследований обусловлена возможностью использования внутренней коллинеарной точки либрации двойной планеты (или двойной звезды, имеющей одинаковые притягивающие массы) для размещения в ней пилотируемой орбитальной станции, космической обсерватории или телескопа. Некоторые европейские и американские проекты ([WMAP](#), [«Планк»](#), [«Гершель»](#)) по созданию таких станций для системы Солнце-Земля уже реализованы. Все эти проекты предполагают исследование устойчивости равновесия точки либрации, исследование колебаний в ее окрестности.

Известно, что исторически задача Ситникова связана с проблемой классификации финальных движений в задаче трех тел. Полную классификацию типов финальных движений дал Шази, постулируя наличие осциллирующих решений, которым отвечают неограниченные колебания координаты z , при условии, что z не стремится к бесконечности со временем. В 1954 году А.Н. Колмогоров предложил изучить частный случай задачи трех тел на предмет исследования топологии некоторых подмножеств фазового пространства, порождающих разные типы финальных движений. К.А. Ситников доказал для этого случая существование осциллирующих решений, для которых координата z испытывает бесконечное число выбросов на произвольно большие расстояния, однако всегда возвращается в начало координат.

Позднее, В.М. Алексеев исследовал хаотические движения в задаче Ситникова методами символьной динамики и показал, что при определенных условиях в этой задаче реализуются все возможные комбинации финальных движений по Шази, доказал также существование осциллирующих и гиперболично-эллиптических решений, меняющих свой финальный тип за счет явления

«полного захвата». Mozer J. познакомил западных исследователей с задачей Ситникова, читая лекции по небесной механике в Принстонском университете в начале 70-ых и публикуя результаты своих исследований этой задачи в виде монографии. Впоследствии появилось множество работ, посвященных задаче Ситникова, в основном зарубежных авторов (Belbruno E., Llibre J., Olle M., Corbera M., Jiménez-Lara L., Escalona-Buendía A., Ortega R., Hagel J., Kovács T., Érdi B., Liu Jie, Sun Yi-Sui., Jalali M.A., Pourtakdoust S.H., Clark Robinson., Прокopenя А.Н.), которые исследовали периодические орбиты и их устойчивость, устойчивость некоторых интегральных многообразий; большой цикл работ посвящен хаотическим движениям.

Цель диссертационной работы

Цель работы – исследование устойчивости тривиального положения равновесия в задаче Ситникова как в линейном, так и нелинейном приближениях; исследование нелинейных колебаний в окрестности положения равновесия. Рассматривается классическая задача Ситникова и ее модификация – фотогравитационная задача Ситникова.

Проблема исследования устойчивости в нелинейной постановке является одной из целей диссертации. Предполагается, что возмущения в начальных условиях сохраняют одномерный характер движения пассивно-гравитирующей точки. Используется метод точечных отображений, позволяющий, на основе работ Маркеева А.П., сделать вывод об устойчивости равновесия по Ляпунову для всего множества значений эксцентриситета $e \in [0,1)$, за исключением некоторой дискретной последовательности значений этого параметра.

Одной из целей диссертации является также исследование одномерного колебания пассивно-гравитирующей точки вдоль оси, перпендикулярной плоскости орбиты основных тел, когда коэффициент редукции задачи отличен от единицы.

Научная новизна

Диссертационная работа содержит несколько новых научных результатов.

Во-первых, получены условия устойчивости тривиального равновесия в первом приближении на основе регуляризации линейных уравнений движения и последующего вычисления следа a матрицы монодромии. Показано, что в классической задаче Ситникова равновесие устойчиво при почти всех значениях эксцентриситета e из интервала $[0, 1)$. Неустойчивость имеет место на дискретном множестве значений e , когда мультипликаторы являются кратными (с непростыми элементарными делителями), при этом $e = 1$ является точкой сгущения этого множества.

Во-вторых, получены, на основе метода точечных отображений, условия устойчивости в нелинейной постановке. Показано, что устойчивость по первому приближению сохраняется в полной системе для всех значений эксцентриситета из интервала $[0, 1)$ за исключением дискретного множества значений e , отвечающих случаю кратных мультипликаторов ($|b(e)| = 1$). Устойчивость равновесия сохраняется для первого значения эксцентриситета e_1 ($b(e_1) = 1$) из этого множества, второе значение e_2 ($b(e_2) = -1$) нейтрально в нелинейном приближении (вычисления показывают, что имеет место вырождение условий теоремы об устойчивости). Однако недавние аналитические исследования (Бардин Б.С., работа не опубликована) поставили под сомнение этот вывод, так как возможно появление достаточно малых областей изменения e , точность расчета которых превышает точность вычислений, и для которых $b(e) < -1$ (неустойчивость по первому приближению). Поэтому требуется дополнительный анализ случая $b(e) = -1$. Остается также открытым вопрос об устойчивости равновесия при остальных критических значениях эксцентриситета.

Для фотогравитационной задачи Ситникова показано влияние коэффициента редукции q на вид функции $b(e)$, представляющей собой половину следа матрицы монодромии. Сделаны выводы об изменении областей эксцентриситета, отвечающих зонам устойчивости в линейном и нелинейном приближении.

Показано, что для коэффициента редукции q из диапазона $(0.3 - 1.0]$ равновесие устойчиво, за исключением критических значений e , при которых

$|b(e)|=1$. При e , удовлетворяющих равенству $b(e)=1$, равновесие неустойчиво (непростые элементарные делители). Случай $b(e)=-1$ требует отдельного рассмотрения в силу приближенного характера вычисления корней этого уравнения.

Случай $q \in (0.16, 0.3]$ характеризуется тем, что равновесие устойчиво в первом приближении при $e \in [0, e^*)$, где e^* – первый корень уравнения $b(e)=-1$. Равновесие неустойчиво при $e \in (e^*, e^{**})$, где e^{**} – второй корень уравнения $b=-1$. Случай $e > e^{**}$ требует отдельных исследований.

Если $q \in (0, 0.16]$, то имеем устойчивость при $e \in [0, e^*)$, где e^* – корень уравнения $b(e)=-1$. При $e > e^*$ положение равновесия неустойчиво по первому приближению, за исключением малой окрестности точки $e=1$, требующей отдельного анализа.

В дополнение к выводам об устойчивости в линейном приближении сделан вывод о неустойчивости тривиального положения равновесия при выполнении условия $b(e) < -1$ в строгой нелинейной постановке задачи.

С помощью метода точечных отображений доказана устойчивость по Ляпунову тривиального равновесия для всех значений эксцентриситета e из интервала $e \in [0, 1)$ за исключением корней $\{e_j\}$ уравнения $b(e) = \pm 1$ и областей $b(e) < -1$.

В третьих, методом усреднения исследованы резонансные колебания пассивно-гравитирующей массы как при строгом резонансе, так и в окрестности резонанса: выведены усредненные уравнения, показано, что они допускают первый интеграл, построен фазовый портрет колебаний в окрестности резонанса (и при строгом резонансе). Результаты исследований дублируются в разных системах координат.

Практическая значимость результатов работы

Практическая значимость исследования заключается в получении новых результатов по устойчивости равновесия в классической и фотогравитационной

задаче Ситникова и, как следствие, возможностью использования этих результатов для размещения орбитальной станции во внутренней коллинеарной точке либрации двойной планеты (или двойной звезды, имеющей одинаковые притягивающие массы).

Также данный теоретический результат объясняет возможное скопление пылевых частиц между двумя одинаковыми по массе и излучению звездами, где частицы подвержены влиянию как сил светового давления (парусный эффект), так и сил гравитации.

На защиту выносятся следующие положения и результаты

1. Результаты исследования устойчивости в первом приближении для значений эксцентриситета из интервала $[0,1)$: устойчивость равновесия при всех e , за исключением дискретного набора $\{e_j\}$, для которого равновесие неустойчиво.
2. Апробация нового метода исследования устойчивости в нелинейной постановке [1-3] на основе задаче Ситникова. Выводы об устойчивости равновесия по Ляпунову для значений эксцентриситета из интервала $[0,1)$: устойчивость при всех e , за исключением дискретного набора $\{e_j\}$, $j = 2, 3, \dots$.
3. Результаты исследования устойчивости в фотогравитационной задаче Ситникова в линейной и нелинейной постановке при некоторых значениях коэффициента редукции $q \in (0,1)$.
4. Результаты исследований параметрических резонансных колебаний в нелинейном приближении для фотогравитационной задачи Ситникова: условия существования параметрического резонанса 1:2 для системы первого приближения и для системы в нелинейном приближении, описание резонансных колебаний точки как при строгом резонансе, так и в окрестности резонанса, описание бифуркационного значения параметра a ($a=2$), при котором наблюдается изменение топологического типа фазового портрета колебаний.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на XLVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2010 г.), в конкурсе «Молодежь и будущее авиации и космонавтики-2010» (Москва, 2010 г.), в XXXXII открытом институтском конкурсе Московского авиационного института (государственного технического университета), на конференции в рамках Российской Аэрокосмической Декады 2009, на Международной научной конференции по механике «Седьмые Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2015 г.).

Публикации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в трех журналах, рекомендованных ВАК РФ. Опубликованные в данных журналах статьи полностью отражают содержание всех глав диссертации.

В рамках научных конференций результаты докладов опубликованы в виде тезисов.

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают вклад авторов в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных автором результатов проводилась совместно с Красильниковым П.С. Основные результаты исследований получены лично автором диссертации.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, обзора литературы, 4 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 103 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлена история возникновения и постановки задачи, отражена суть и актуальность проблемы данной области исследований, представлены выносимые на защиту научные положения. Также сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований.

В первой главе рассмотрена задача устойчивости в первом приближении положения тривиального равновесия в задаче Ситникова. На рисунке 1 представлена рассматриваемая система трех тел.

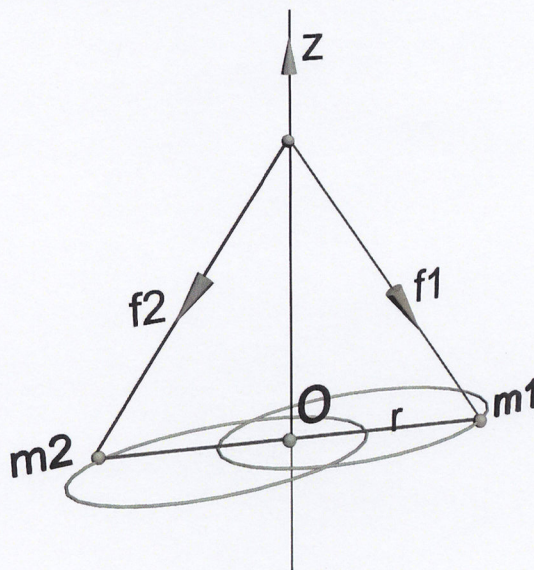


Рис. 1

Уравнения движения имеют следующий вид

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + r^2(t))^{3/2}} = 0, \quad 2r = a(1 - e \cos E) \quad (1)$$

Здесь r – половина расстояния между телами m_1, m_2 , E – эксцентриситетная аномалия, e – эксцентриситет орбиты, a – ее большая полуось. Единицы измерения выбраны таким образом, что $m_1 + m_2 = 1$, $a = 1$, при этом период T обращения основных тел по орбите равен 2π .

Аномалия E зависит от времени t в силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - \tau),$$

где τ – один из кеплеровских элементов эллиптической орбиты, представляющий собой время прохождения через перицентр, $n = 2\pi / T$ – среднее движение основных тел. Без ограничения общности будем считать, что $\tau = 0$, при этом $n = 1$ в силу выбора единиц измерения.

Для исследования устойчивости на интервале $e \in [0, 1)$ используется метод регуляризации уравнения в окрестности особой точки $e = 1$. Для этого для системы первого приближения

$$\ddot{z} + \frac{8}{(1 - e \cos E)^3} z = 0 \quad (2)$$

$$\dot{E} = \frac{1}{1 - e \cos E}$$

вводится фиктивное время g таким образом, чтобы фазовая кривая $x_1(g) = z(t(g))$, $x_2(g) = \dot{z}(t(g))$ была гладкой функцией параметра g в силу гладкости правых частей преобразованных уравнений. Положим

$$g = \int_0^t \frac{dt}{(1 - e \cos E)^3} \quad (3)$$

Уравнения (2) примут вид

$$\frac{dx_1}{dg} = (1 - e \cos \Sigma)^3 x_2, \quad \frac{dx_2}{dg} = -8x_1, \quad \frac{d\Sigma}{dg} = (1 - e \cos \Sigma)^2 \quad (4)$$

где $\Sigma(g) = E(t(g))$.

На рисунке 2 представлен график $b(e)$ половины следа матрицы монодромии $X(g^*)$

$$X(g^*) = \left\| x_{ij}(g^*) \right\|_{i,j=1}^2, \quad x_{ij}(g^*) = x_i^{(j)}(g^*)$$

$$2b(e) = x_1^{(1)}(g^*) + x_2^{(2)}(g^*) \quad (5)$$

$$g^*(e) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 - e \cos E)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(1 - e \cos E)^2}.$$

$x^{(1)}(g)$, $x^{(2)}(g)$ – нормальная фундаментальная система решений уравнений (4).

Из рис. 2 следует, что $|b(e)| < 1$ всюду, за исключением дискретного набора критических значений $\{e_j\} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$, такого, что $b(e_j) = \pm 1$. Поэтому равновесие устойчиво в первом приближении для всех значений эксцентриситета из интервала $[0, 1)$, исключая его критические значения. Показано, что для первых девяти критических значений равновесие неустойчиво, так как мультипликаторы являются кратными с непростыми элементарными делителями.

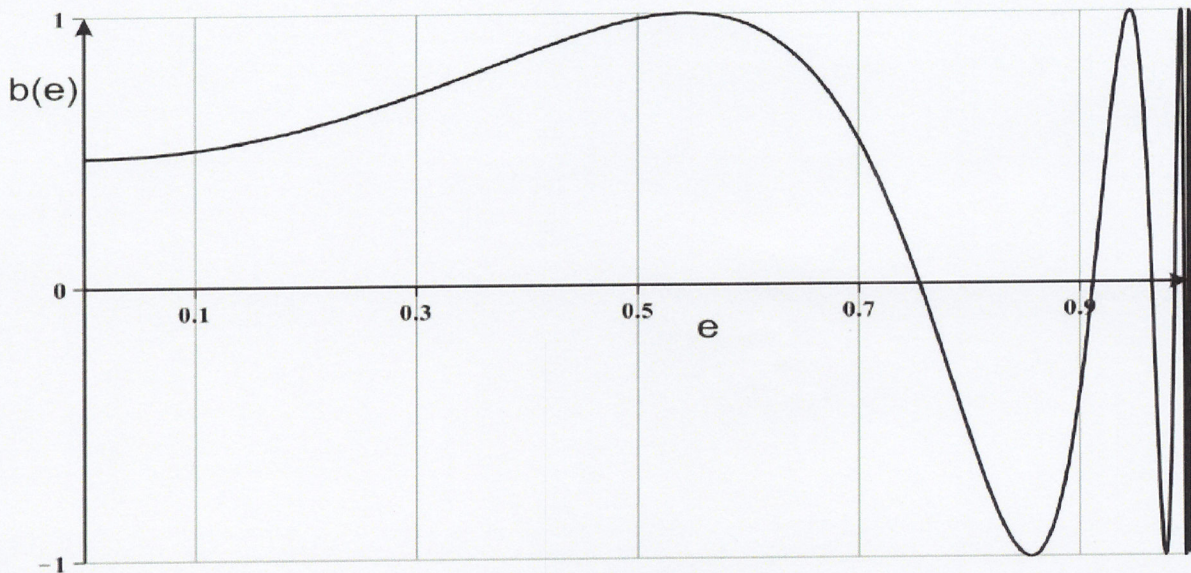


Рис. 2

Во второй главе исследуется устойчивость тривиального равновесия в задаче Ситникова с учетом нелинейных членов в уравнениях движения.

Для гамильтоновых уравнений

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{(q^2 + r^2)^{1/2}}, \quad 2r = a(1 - e \cos E), \quad q = z, \quad p = \dot{z}$$

задачи построено [1], с точностью до членов третьего порядка малости включительно, отображение T фазового пространства на себя в момент времени $t = 2\pi$:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = X(2\pi) \begin{pmatrix} q_0 - \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0 \partial p_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} - \frac{\partial S_4}{\partial p_0} + O_4 \\ p_0 + \frac{\partial S_3}{\partial q_0} - \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0^2} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial S_4}{\partial q_0} + O_4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Здесь $q(0) = q_0, p(0) = p_0, q(2\pi) = q_1, p(2\pi) = p_1, S_3 = \Phi_3(q_0, p_0, 2\pi) \equiv 0,$

$S_4 = \Phi_4(q_0, p_0, 2\pi), O_4$ – совокупность членов, порядок которых выше третьего.

Линеаризованное отображение T имеет вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= y_{11}q_0 + y_{12}p_0, \quad p_1 = y_{21}q_0 + y_{22}p_0 \\ y_{ij} &= x_{ij}(2\pi) \end{aligned} \quad (7)$$

Собственные значения уравнений в вариациях Пуанкаре являются корнями уравнения

$$\rho^2 - 2b\rho + 1 = 0 \quad (2b = y_{11} + y_{22}) \quad (8)$$

На рисунке 2 приведен график зависимости $b(e)$. С помощью линейной замены переменных

$$q = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p = n_{21}Q + n_{22}P \quad (d = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} \neq 0) \quad (9)$$

отображение (7) приводится к вещественной нормальной форме.

Вводятся обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{30} - f_{12}, \quad a_2 = f_{12} + 3f_{30}, \quad a_3 = f_{22} - f_{40} - f_{04}, \\ b_1 &= f_{21} - f_{03}, \quad b_2 = f_{21} + 3f_{03}, \quad b_3 = f_{13} - f_{31}, \\ k &= 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) + 6(a_1b_2 - a_2b_1) - 8a_2b_2 + 9\text{ctg}(3\pi\sigma)(a_1^2 + b_1^2) + 3\text{ctg}(\pi\sigma)(a_2^2 + b_2^2), \\ k_0 &= 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) - 8a_2b_2 + \sqrt{3}(a_2^2 + b_2^2), \\ k_1 &= 2[4a_3 + 9a_1b_1 - a_2b_2 + 3\text{ctg}(\pi\sigma)(a_1a_2 - b_1b_2)], \\ k_2 &= 8b_3 - 9(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + 6\text{ctg}(\pi\sigma)(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Здесь f_{kl} – коэффициенты, входящие в структуру отображения $Q_0, P_0 \rightarrow Q_1, P_1$ [1,2].

Следующие три теоремы [1-3] полностью решают задачу устойчивости по формам третьего порядка малости, исключая вырожденные случаи.

Теорема 1. Предположим, что $|b| < 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $b \neq -1/2$, $b \neq 0$ (нерезонансный случай), то положение равновесия устойчиво при $k \neq 0$
- II. Если $b = -1/2$ (резонанс третьего порядка), то равновесие неустойчиво при $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Если $a_1^2 + b_1^2 = 0$, но при этом $k_0 \neq 0$, то имеет место устойчивость
- III. Если $b = 0$ (резонанс четвертого порядка), то положение равновесия устойчиво при $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ и неустойчиво, когда $|k| < \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ ■

Показано, что в нерезонансном случае ($|b(e)| < 1$, $b \neq -1/2$, $b \neq 0$) коэффициент $k(e)$ отличен от нуля всюду (см. рис. 3). Поэтому положение тривиального равновесия устойчиво по Ляпунову.

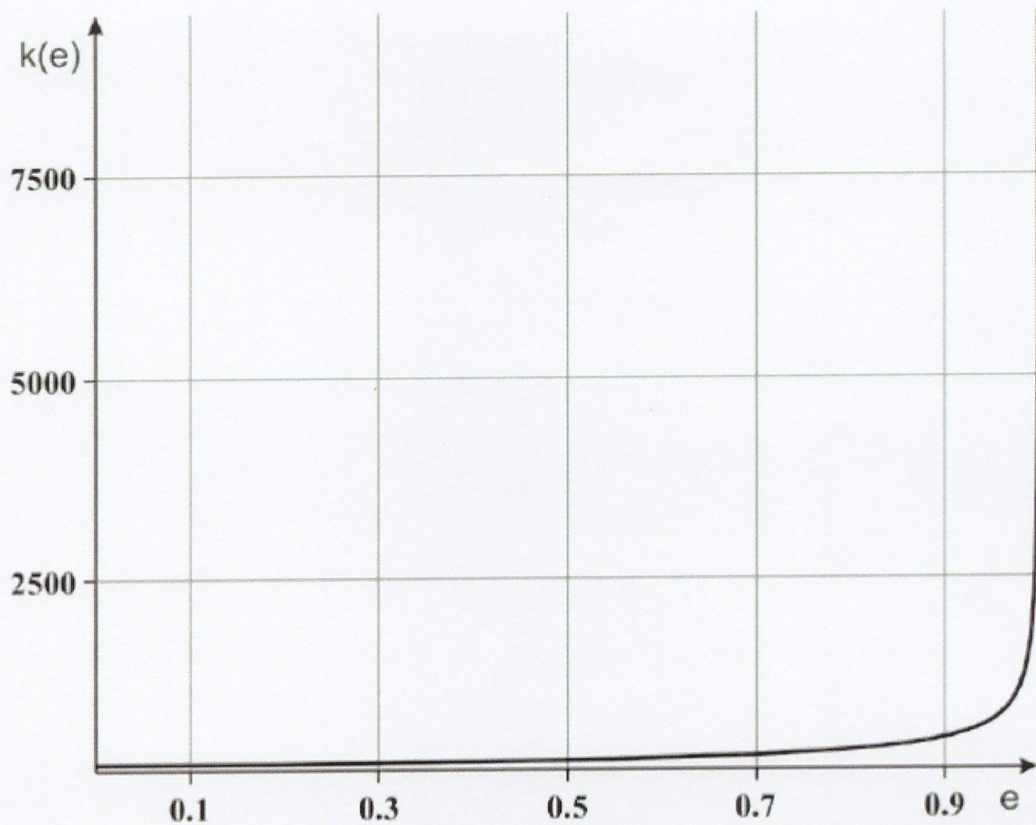


Рис. 3 График зависимости $k(e)$

При резонансе третьего порядка ($b(e) = -1/2$) имеем $a_1^2(e) + b_1^2(e) = 0$ при любых e , поскольку $S_3 \equiv 0$. Коэффициент $k_0(e)$ тождественно равен $k(e)$, поэтому $k_0(e) \neq 0$. Отсюда следует устойчивость тривиального равновесия.

Наконец, $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ на всем интервале $e \in [0, 1)$, в частности, неравенство сохраняет силу и при $b(e) = 0$. Следовательно, на основе пункта III теоремы 1, равновесие устойчиво.

Таким образом, теорема 1 гарантирует устойчивость по Ляпунову тривиального равновесия для всех значений эксцентриситета e из интервала $e \in [0, 1)$, если исключить из рассмотрения корни $\{e_j\}$ уравнения $|b(e)| = 1$.

Рассмотрим случай кратных мультипликаторов: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ (резонанс первого порядка, $b(e) = 1$ при $e = e_1, e_3, e_5, e_7, e_9$) и $\rho_1 = \rho_2 = -1$ (резонанс второго порядка, $b(e) = -1$, когда $e = e_2, e_4, e_6, e_8$).

Отображение (7) будет тождественным, если $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Если $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$, то коэффициенты линейного преобразования (7) вычисляются в соответствии со следующей таблицей:

$y_{12} \neq 0, y_{21} = 0$	$n_{11} = \sqrt{ y_{12} }, n_{12} = n_{21} = 0, n_{22} = \sqrt{ y_{12} } / y_{12}$
$y_{12} = 0, y_{21} \neq 0$	$n_{11} = 0, n_{12} = \sqrt{ y_{21} } / y_{21}, n_{21} = \sqrt{ y_{21} }, n_{22} = 0$
$y_{12} \neq 0, y_{21} \neq 0$	$n_{11} = y_{12}, n_{12} = 0, n_{21} = \text{sign}(b) - y_{11}, n_{22} = 1$

Теорема 2. Предположим, что $b = 1$.

- I. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Тогда, если $S_3 \neq 0$, то положение равновесия $p = q = 0$ исходной системы неустойчиво. Если $S_3 \equiv 0$, а уравнение $\varphi(x) \equiv S_4(\sin(x), \cos(x)) = 0$ не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво.
- II. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$. Если $f_{30} \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. Если $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 < 0$, то имеет место устойчивость. В случае $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 > 0$ равновесие неустойчиво ■

Сформулируем аналогичную теорему для случая $b = -1$. Пусть

$$R_4(q_0, p_0) = 2S_4 - \frac{\partial S_3}{\partial q_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0}, \quad g = -8f_{40} + 12f_{30}f_{21} - 9f_{30}^2$$

Теорема 3. Предположим, что $b = -1$.

- I. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Если уравнение $\psi(x) \equiv R_4(\sin(x), \cos(x)) = 0$ не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво.
- II. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$. Если $g > 0$, то положение равновесия неустойчиво, если $g < 0$, то устойчиво ■

Исследованы на устойчивость только две точки e_1, e_2 , отвечающие случаю кратных мультипликаторов: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ при $e = e_1$ и $\rho_1 = \rho_2 = -1$ при $e = e_2$. Анализ остальных точек $e = e_j$ ($j = 3, 4, \dots$) требует большой точности вычисления и представляет собой отдельную задачу.

С точностью до первых 14 значащих цифр, корни имеют вид

$$e_1 = 0.54446890395124, e_2 = 0.855862554109814$$

Равновесие устойчиво для первого значения $e = e_1$. Второе значение эксцентриситета $e = e_2$ отвечает вырождению теорем устойчивости, поэтому требует привлечения членов порядка выше третьего. Отметим также, что окрестность точки $e = e_2$ требует дополнительного исследования, так как возможно появление узких областей $b(e) < -1$.

В третьей главе исследуется устойчивость тривиального равновесия в задаче Ситникова при наличии сил светового давления со стороны основных тел (фотогравитационная задача Ситникова). Исследовано влияние коэффициента редукции q на вид функции $b(e)$ при 17-ти значениях коэффициента q , отвечающих трем интервалам изменения этого параметра: $(0.3, 1]$, $(0.16, 0.3]$, $[0.1, 0.16]$.

Рассмотрим интервал $q \in (0.3, 1]$. Как видно из рис. 4 ($q = 0.7$), функция $b(e)$, значения которой принадлежат интервалу $[-1, 1]$, совершает колебания, сгущающиеся по мере приближения к предельному значению $e = 1$.

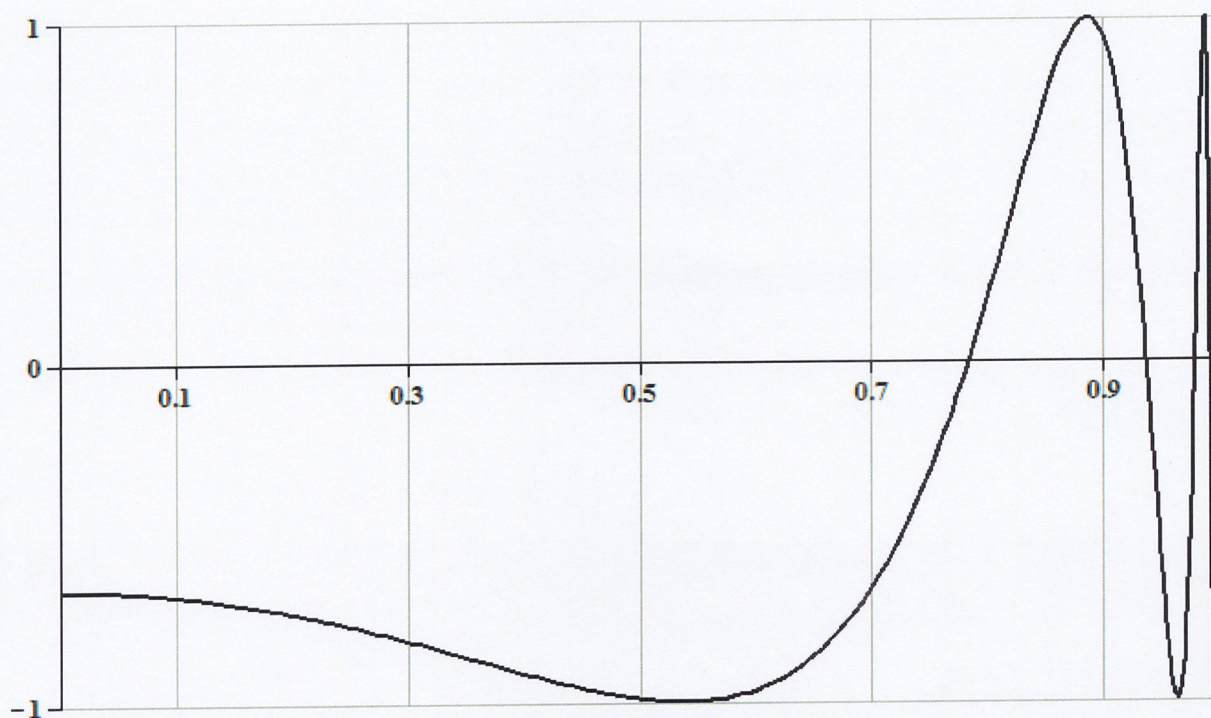


Рис. 4 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.7$

При этом минимальное значение этой функции равно (-1). Численный счет не может выявить малых областей изменения e , в которых функция $b(e)$ принимает значения, меньшие (-1). На существование таких областей указывает строгий анализ поведения этой функции. Поэтому критические значения e , в которых график функции $b(e)$ «касается» прямой $b = -1$, требуют дополнительного исследования.

В случае $q \in (0.16, 0.3]$ отчетливо видны области изменения e , для которых $b(e) < -1$, при этом в остальных областях изменения параметра e график функции $b(e)$ принадлежит области $[-1, 1]$, сохраняя колебательный характер в окрестности точки $e = 1$ (рис. 5).

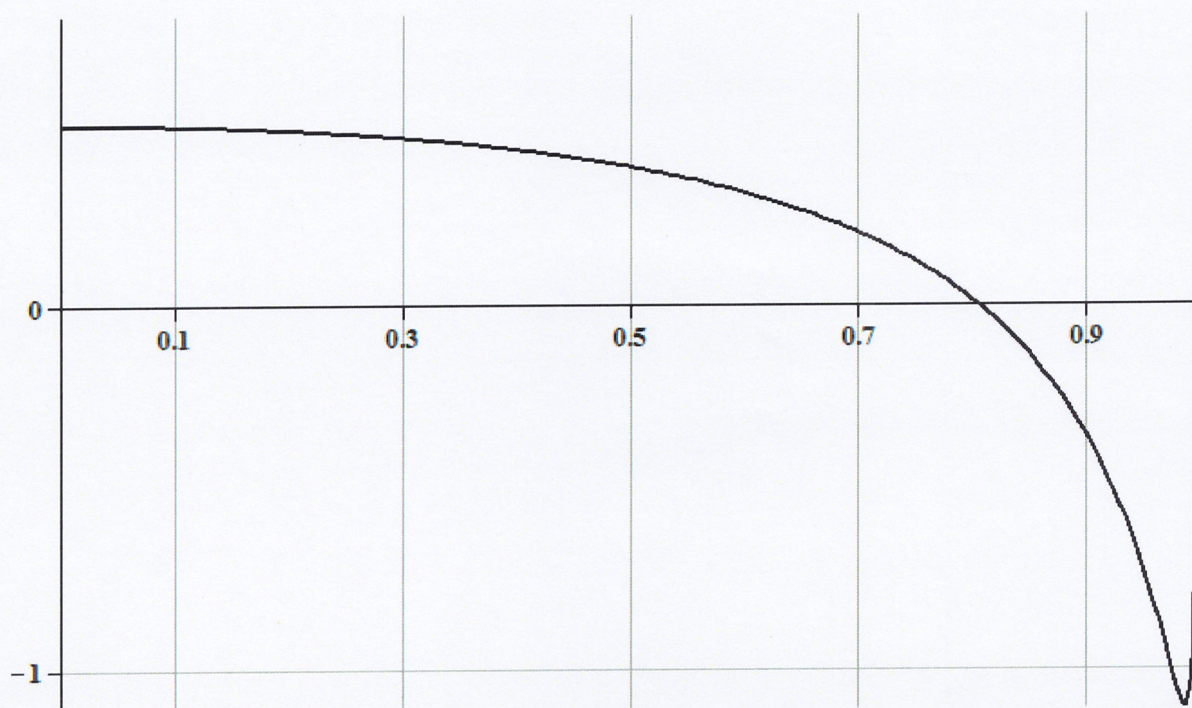


Рис. 5 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.17$

В случае $q \in [0.1, 0.16]$ функция $b(e)$ монотонно убывает (рис. 6), принимая отрицательные значения, меньшие минус единицы, при $e > e^*$, где e^* – корень уравнения $b = -1$. Отметим, что малая окрестность точки $e = 1$ требует отдельного исследования на предмет сохранения колебаний, при которых функция $b(e)$ принимает значения, равные единице.

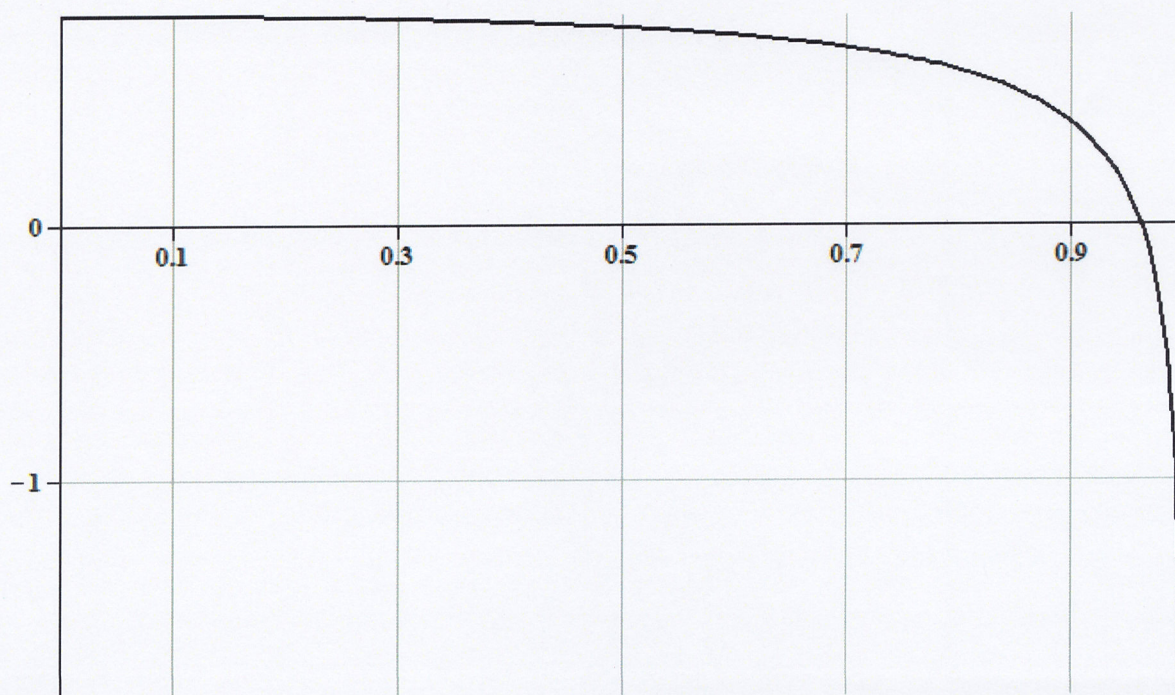


Рис. 6 График зависимости $b(e)$ при $q = 0.15$

Окончательный вывод исследования устойчивости в первом приближении состоит в следующем. Для коэффициента редукции q из диапазона $(0.3, 1.0]$ имеем устойчивость, за исключением критических значений e , при которых $|b(e)|=1$. При e , удовлетворяющих равенству $b(e)=1$, равновесие неустойчиво (непростые элементарные делители). Случай $b(e)=-1$ требует отдельного рассмотрения в силу приближенного характера вычисления корней этого уравнения: возможно появление достаточно малых областей изменения e , точность расчета которых превышает точность вычислительного алгоритма, и для которых $b(e) < -1$. В этих гипотетических областях равновесие будет неустойчивым по первому приближению.

Случай $q \in (0.16, 0.3]$ характеризуется тем, что отчетливо видны области изменения e , для которых $b(e) < -1$, при этом график функции $b(e)$ сохраняет колебательный характер в окрестности точки $e=1$. Поэтому имеем устойчивость в первом приближении при $e \in [0, e^*)$, где e^* – первый корень уравнения $b = -1$. Равновесие неустойчиво при $e \in (e^*, e^{**})$, где e^{**} – второй корень уравнения $b = -1$. Дальнейший вывод об устойчивости зависит от характера колебаний функции $b(e)$ в окрестности точки $e=1$, поэтому необходимы дальнейшие вычисления.

В случае $q \in (0, 0.16]$ имеем устойчивость при $e \in [0, e^*)$, где e^* – корень уравнения $b(e) = -1$. При $e > e^*$ положение равновесия неустойчиво по первому приближению, за исключением малой окрестности точки $e=1$, требующей отдельного анализа.

Таким образом, в данном разделе представлен качественный анализ поведения функции половины следа матрицы монодромии на интервале $e \in [0, 1)$ и показано, какие области изменения данной функции отвечают условиям устойчивости или неустойчивости. Окрестность особой точки $e=1$ требует дополнительного анализа.

В дополнение к выводам об устойчивости в линейном приближении, стоит отметить, что при выполнении условия $b(e) < -1$ тривиальное положение равновесия будет неустойчивым не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи. Если $|b(e)| \leq 1$, то для строгого решения вопроса об устойчивости недостаточно анализа линейного приближения.

Вывод об устойчивости по Ляпунову при выполнении условия $|b(e)| < 1$ можно сделать согласно теореме 1. Ниже представлен график функции $k(e)$, характерный для фотогравитационной задачи Ситникова (см. рис. 7).

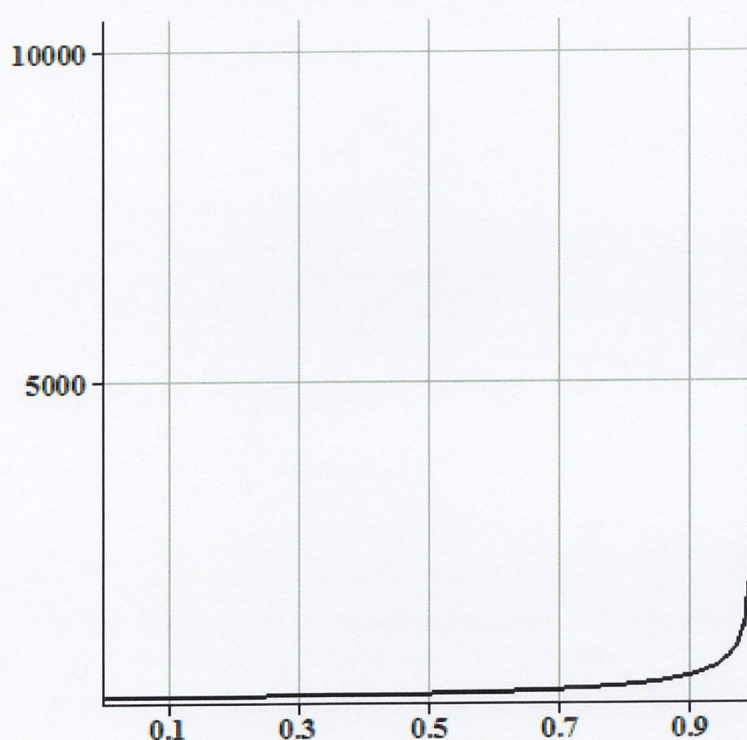


Рис. 7 График зависимости $k(e)$ при $q = 0.8$

Согласно теореме 1 для коэффициентов редукции $q = 0.9, 0.8, \dots, 0.2$ при $b \neq -1/2, b \neq 0$ положение равновесия будет устойчивым в строгой нелинейной постановке, так как $k(e) \neq 0$.

При резонансе третьего порядка ($b(e) = -1/2$) имеем $a_1^2(e) + b_1^2(e) = 0$ при любых e , поскольку $S_3 \equiv 0$. Коэффициент $k_0(e)$ тождественно равен $k(e)$, поэтому $k_0(e) \neq 0$. Отсюда следует устойчивость тривиального равновесия.

Неравенство $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ выполняется на всем интервале $e \in [0,1)$. В частности, неравенство сохраняет силу и при $b(e) = 0$. Следовательно, на основе пункта III теоремы 1, равновесие устойчиво.

Таким образом, теорема 1 гарантирует устойчивость по Ляпунову тривиального равновесия для всех значений эксцентриситета e из интервала $e \in [0,1)$, если исключить из рассмотрения корни $\{e_j\}$ уравнения $|b(e)| = 1$, а также области по эксцентриситету, удовлетворяющие неравенству $b(e) < -1$.

В четвертой главе рассматривается задача о движении пассивно гравитирующей точки в окрестности положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова.

Получены условия существования параметрического резонанса $w = 1/2$ для линейного и нелинейного приближения. После стандартной замены переменных получена многочастотная система вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{e \sin y_1}{w} \left((-24q \cos y_2)(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1) + 48q(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1)^3 \right) \\ \dot{x}_2 = -\frac{e \cos y_1}{w} \left((-24q \cos y_2)(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1) + 48q(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1)^3 \right) \\ \dot{y}_1 = w \\ \dot{y}_2 = \gamma \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $w^2 = 8q$. Применяя процедуры усреднения, получим систему, описывающую колебания в окрестности резонанса 1:2.

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{12eq}{1+2\Delta} \left(3u_1^2 u_2 + 3u_2^3 - u_2 + 2u_1 \sin \theta \cos \theta + 2u_2 (\cos \theta)^2 \right) \\ \dot{u}_2 = \frac{12eq}{1+2\Delta} \left(2u_1 \cos^2 \theta - 2u_2 \sin \theta \cos \theta - u_1 - 3u_1^3 - 3u_1 u_2^2 \right) \end{cases} \quad (11)$$

При строгом резонансе уравнения (11) примут более простой вид

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 12eq \left(3u_1^2 u_2 + 3u_2^3 + u_2 \right) \\ \dot{u}_2 = -12eq \left(3u_1 u_2^2 + 3u_1^3 - u_1 \right) \end{cases} \quad (12)$$

Данные уравнения записываются в форме Гамильтона

$$\dot{q} = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$H = 9(p^2 + q^2)^2 + 6(p^2 - q^2)$$

и допускают следующий интеграл:

$$3(u_1^2 + u_2^2)^2 + 2(u_2^2 - u_1^2) = C \quad (13)$$

Ниже представлен фазовый портрет резонансных колебаний. Сепаратриса колебаний выделена жирным черным цветом, она проходит через неустойчивое положение равновесия $u_1 = u_2 = 0$.

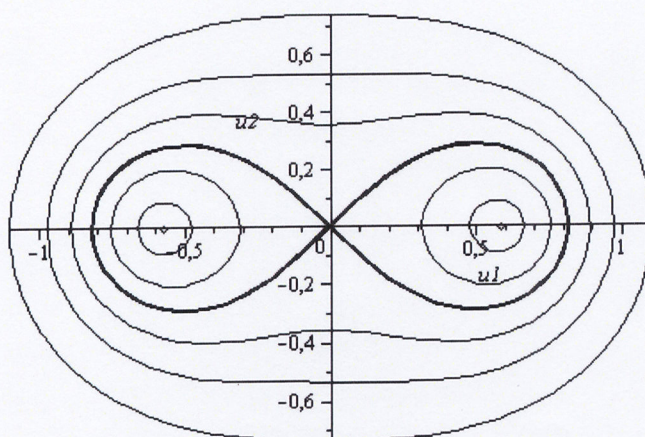


Рис. 8 Фазовый портрет резонансных колебаний

Усредненные уравнения для колебаний в окрестности резонанса имеют вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{6\varepsilon}{w} v \left[3(u^2 + v^2) + 1 - \frac{w}{6\varepsilon} \Delta \right] \\ \dot{v} = -\frac{6\varepsilon}{w} u \left[3(u^2 + v^2) - 1 - \frac{w}{6\varepsilon} \Delta \right] \end{cases} \quad (14)$$

Эти уравнения допускают автономный первый интеграл

$$3(u^2 + v^2)^2 + 2(v^2 - u^2) - a(u^2 + v^2) = C, \quad (15)$$

Ниже представлены фазовые портреты колебаний в окрестности резонанса для различных интервалов параметра a , значения которого $a = \pm 2$ являются бифуркационными, при которых наблюдается изменение топологического типа фазового портрета колебаний.

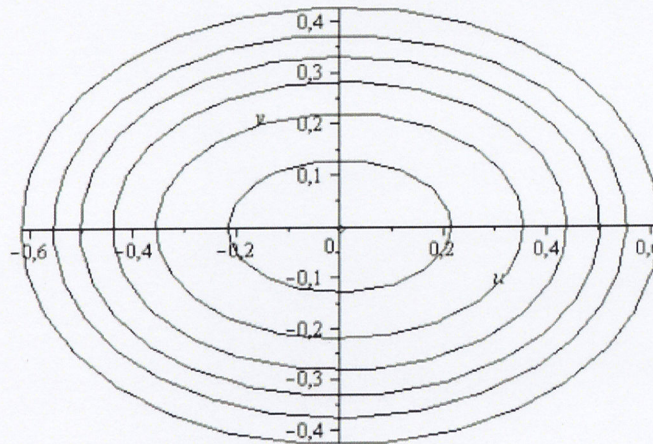


Рис. 9 Фазовый портрет при $a \leq -2$

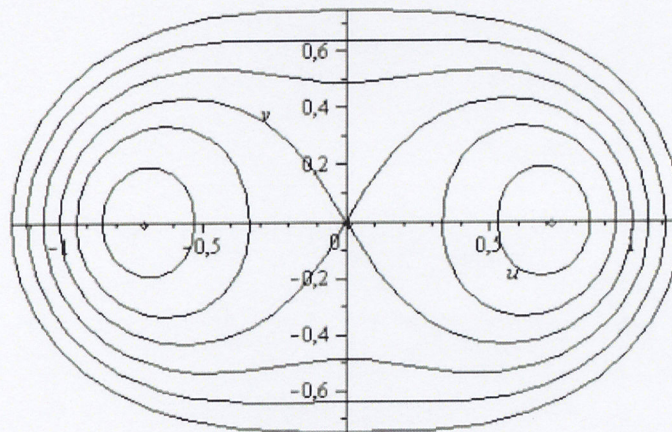


Рис. 10 Фазовый портрет при $-2 < a \leq 2$

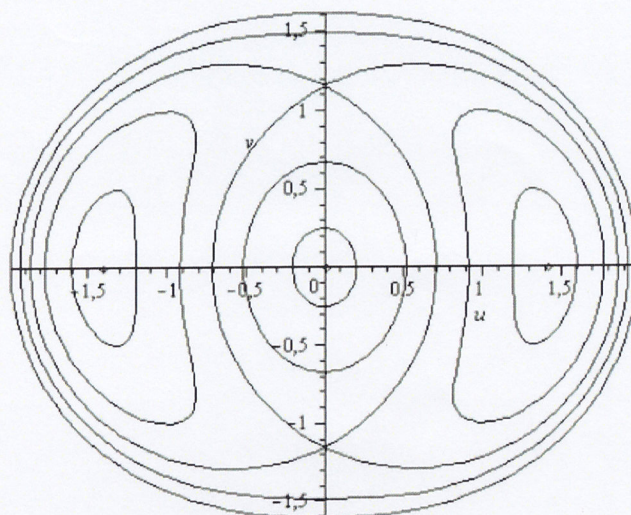


Рис. 11 Фазовый портрет при $a > 2$

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Калас В.О. Исследование резонансных колебаний в фотогравитационной задаче Ситникова // Электронный журнал «Труды МАИ». 2011, № 45.
2. Калас В.О., Красильников П.С. Об устойчивости равновесия в задаче Ситникова // Космические исследования. 2011, Т. 49, № 6, с. 1-4.
3. Калас В.О., Красильников П.С. Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке // Нелинейная динамика. 2015, Т. 11, № 1, с. 117-126.
4. Калас В.О., Красильников П.С. // Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке // Международная научная конференция по механике «Седьмые Поляховские чтения». Санкт-Петербург, 2 – 6 февраля 2015г. – Тезисы докладов. – М.: Издатель И.В. Балабанов, 2015. – С. 54.

Список цитируемой литературы

1. Маркеев А. П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // МТТ, 1996, №2, с. 37–54.
2. Маркеев А. П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // МТТ, 2004, №6, с. 3–12.
3. Маркеев А. П. Об устойчивости нелинейных колебаний связанных маятников // МТТ, 2013, №4, с. 20–30.