

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)



На правах рукописи

ЧЕРНЕЦКИЙ ИВАН МИРОСЛАВОВИЧ

АНТЕННЫ И ЭКРАНЫ ДЛЯ ВЫСОКОТОЧНОГО
СПУТНИКОВОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

Специальность 05.12.07 – Антенны, СВЧ устройства и их технологии

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
д.т.н., проф. Татарников Д. В.

Москва – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
ГЛАВА 1. Антенны бегущей волны, формирующие ДН П-образной формы	19
1.1. Оценка потенциальных возможностей с помощью модели плоскопараллельного волновода с полупрозрачным окончанием	19
1.1.1. Математическая модель	19
1.1.2. Результаты расчетов	28
1.2. Четырехзаходная спиральная антенна с реактивными элементами ...	38
1.2.1. Структура антенны	38
1.2.2. Результаты экспериментальных исследований	42
1.2.3. Результаты полевых испытаний в составе аппаратуры позиционирования.....	48
1.3. Выводы	54
ГЛАВА 2. Вертикальные экраны в виде ребер с полупрозрачными окончаниями для антенн позиционирования	56
2.1. Возбуждение полуплоскости с полупрозрачным окончанием слабонаправленным источником.....	56
2.2. Система полуплоскостей	71
2.3. Оценка характеристик замкнутого экрана	85
2.4. Результаты натурного эксперимента.....	100
2.1. Выводы	104
ГЛАВА 3. Искусственные препятствия для испытательных полигонов аппаратуры спутникового позиционирования	105
3.1. Математическая модель полусферического полупрозрачного препятствия.....	105
3.2. Синтез полупрозрачной структуры	116

3.3. Результаты расчетов характеристик системы антенна-препятствие	120
3.4. Результаты натурального эксперимента.....	125
3.5. Выводы	129
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	130
Список литературы	132
Акт о внедрении в разработки ООО “Топкон Позизионинг Системс”	138
Акт о внедрении в учебный процесс “МАИ (НИУ)”	140
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. К модели дифракции поля Н-поляризации на полуплоскости с полупрозрачным окончанием.....	141
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. К модели дифракции поля Н-поляризации на замкнутом экране.....	144
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Математическая модель дифракции поля Е-поляризации на полуплоскости с полупрозрачным окончанием.....	164
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Математическая модель дифракции поля Е-поляризации на системе полуплоскостей с полупрозрачными окончаниями	169
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Математическая модель дифракции поля Е-поляризации на замкнутом экране	171
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Модель щелевой полупрозрачной структуры на диэлектрической подложке	184
ПРИЛОЖЕНИЕ 7. К модели полупрозрачного полусферического препятствия.....	196

Введение

Актуальность темы диссертации

В настоящее время позиционирование по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) относится к числу важных областей практики и прикладных исследований. К области высокоточного позиционирования относят устройства, которые в настоящий момент обеспечивают ошибку позиционирования порядка 1...2см в режиме реального времени и порядка 1...2мм при накоплении данных с последующей обработкой. Такие точности обусловили широкое применение данной аппаратуры для целей геодезии, землеустройства, а также для позиционирования автоматической и полуавтоматической техники в строительстве, сельском хозяйстве и на транспорте.

В отличие от устройств бытового назначения, высокоточные системы относятся к фазовым дальномерам и работают в дифференциальном режиме [1,2]. Здесь измерения фазы несущей передаются с базовой станции на подвижный объект - так называемый ровер - по радиоканалу. Путем соответствующей обработки, аппаратура позиционирования позволяет определить базовую линию – то есть вектор, компоненты которого представляют собой разность координат базы и ровера.

Перечислим основные требования к антеннам высокоточного позиционирования. В настоящее время к числу действующих относятся спутниковые системы GPS (США), ГЛОНАСС (Россия) и Beidou (Китай). Вводятся в эксплуатацию системы Galileo (Европейский союз), система с локальным покрытием QZSS (Япония) и IRNSS (Индия). С антенной точки зрения сигналы этих систем удобно объединить в два частотных поддиапазона – низкочастотный поддиапазон (1164МГц-1300МГц) и высокочастотный поддиапазон (1535МГц-1614МГц). Антенны

позиционирования предназначены для приема сигналов правой круговой поляризации.

Антенны позиционирования обладают гладкой ДН в верхней (рабочей) полусфере для приема сигналов спутников, находящихся выше местного горизонта. В практике позиционирования сигналы спутников, находящихся ниже 10...12 градусов от местного горизонта, исключают из обработки, так как эти сигналы, как правило, подвержены значительным возмущениям из-за влияния различных затеняющих объектов и препятствий. Однако, сигналы так называемых низких спутников, находящихся в диапазоне углов 10...20 градусов над горизонтом, являются принципиально важными. При исключении этих спутников растет так называемый геометрический DOP фактор [2], что препятствует нормальному функционированию системы. Для успешного слежения за сигналами низких спутников, допустимым является снижение КУ антенны в направлении 10...15 градусов к горизонту на величину порядка 12...15дБ к зениту [2...4].

При дифференциальном методе позиционирования, основные ошибки для аппаратуры базовой станции и подвижного объекта оказываются одинаковыми. К числу этих ошибок относятся [1,2] дополнительные задержки на распространение в ионосфере и тропосфере, неточности знания орбит спутников и отклонения часов на спутниках и в приемнике. Эти ошибки исключаются при обработке. Основной некомпенсированной ошибкой является ошибка многолучевости, когда антенна позиционирования принимает не только прямой сигнал со спутников, но также и сигналы, отраженные от местных предметов. Влиянию многолучевых отражений подвержены обе антенны, и базы, и ровера.

В наилучших условиях открытой местности единственным источником отражений является подстилающая поверхность земли.

Необходимо отметить, что условия позиционирования на открытой местности являются типичными для применений в целях геодезии, для мониторинга сложных инженерных сооружений типа дамб, для управления машинами сельскохозяйственного назначения, а также для ряда исследовательских направлений. К последним относятся оценки в реальном времени малых смещений земной коры в целях прогнозирования землетрясений, работы системы оповещения и повышения безопасности транспортных магистралей в горных условиях. Для всех этих применений остро стоит вопрос повышения точности позиционирования в реальном времени. Способ повышения точности состоит в уменьшении ошибки многолучевости путем придания специальной формы ДН приемной антенны.

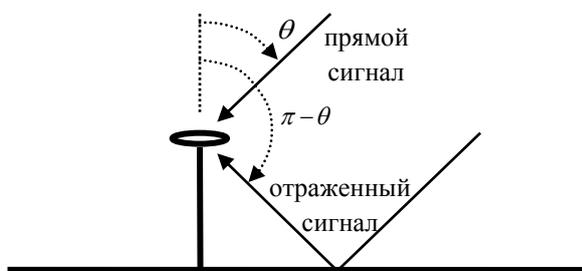


Рис. В1. Многолучевое распространение сигнала

Как известно [2...5], фазовая ошибка многолучевости пропорциональна суммарной амплитуде интерферирующих отраженных сигналов, отнесенной к амплитуде прямого сигнала. В условиях открытой местности, когда единственным источником отражений является поверхность местного рельефа (рис. В1), эта ошибка определяется отношением низ-верх амплитудной ДН антенны.

Отношение низ-верх, как функция угла возвышения, общепринятого наименования не имеет. В дальнейшем это отношение обозначается D/U и определяется формулой

$$D/U(\theta^e) = F(-\theta^e)/F(\theta^e) \quad (B1)$$

Здесь $F(\pm\theta^e)$ - значения ДН антенны под углом θ^e выше (ниже) местного горизонта. При работе системы позиционирования по всем спутникам в верхней полусфере необходимо снижение отношения D/U , начиная от низких углов к горизонту.

В настоящее время, основной антенной базовых станций является антенна с дроссельным кольцевым экраном (в англоязычной литературе – choke ring) [6]. Применяются различные модификации этого экрана [7,8]. Обзор антенн для подвижных объектов (роверов) и достигнутых характеристик приведен в [2...4,9]. В этих работах указывается, что для антенн базовых станций типичными являются значения D/U порядка -7дБ для низких углов с последующим уменьшением до -25...-30дБ для зенитных направлений. Для антенн подвижных объектов соответствующие цифры составляют -5дБ для низких углов с уменьшением до -15...-20дБ для зенита.

Однако, как обсуждается в работах [2...4,10], для снижения ошибки позиционирования в реальном времени до величин порядка 1мм в условиях открытой местности, характеристика D/U антенны позиционирования не должна превышать величин порядка -20дБ для всех спутников, начиная от низких углов к горизонту. Иначе говоря, ДН антенны позиционирования должна иметь неравномерность КУ в верхней (рабочей) полусфере, не более указанной, и затем резкий спад усиления (отсечку) при пересечении местного горизонта.

Антенны с отсечкой поля при пересечении горизонта приводятся в работах [11...16]. Так, антенна [11] представляет собой вертикальную антенную решетку длиной (высотой) более 10 длин волн. Эта антенна предназначена для базовых станций систем автоматической посадки

самолетов. Комбинация антенны позиционирования с вертикальной антенной решеткой рассмотрена в [12], возможности формирования ДН с отсечкой путем применения сферической антенной решетки обсуждались в [13], антенна с плоским проводящим экраном представлена в [14]. Возможности применения всех этих антенны для практики систем позиционирования не публиковались.

Антенна [15] представляет собой импедансный экран диаметром порядка 15 длин волн (3 метра). Работа системы позиционирования с такой антенной проиллюстрирована в [16]. В этих работах показано, что при применении такой антенны ошибка многолучевости на открытой местности становится ниже фазового шума системы. При этом экспериментально достигнута среднеквадратичная ошибка позиционирования в 0.7мм при условии сглаживания фазовых шумов за время порядка 1 минуты.

Однако следует отметить, что указанные антенны обладают весьма существенным габаритом. Возможности применения этих антенн для целей практического позиционирования ограничены.

Таким образом, актуальным направлением является исследование возможностей построения антенн, пригодных для практического позиционирования, и имеющих равномерную ДН в верхней (рабочей) полусфере с резким уменьшением (отсечкой) при пересечении местного горизонта.

С другой стороны, отметим, что в связи с продвижением методов и устройств высокоточного позиционирования в практику, нарастает число применений, когда, напротив, позиционируемый объект работает в сложных условиях быстропеременных затенений прямого сигнала спутника. К таковым, например, относится работа автоматической сельскохозяйственной машины (трактора) на границах рабочего хода (поля), когда машина

оказывается под кронами зеленых насаждений. В этих условиях непосредственное позиционирование по сигналам спутников с указанной точностью оказывается невозможным. Для поддержания работоспособности систем позиционирования применяются специальные методы и алгоритмы комплексирования позиционирования по спутникам с другими системами. Широкое распространение получили методы комплексирования с инерциальными датчиками, способными на краткое время восполнить прерываемые спутниковые сигналы без существенной потери точности [18]. Однако разработка таких устройств и алгоритмов комплексирования сопряжена со значительными трудностями, связанными с невозможностью обеспечения повторяемости эксперимента. Так, свойства покрова зеленых насаждений подвержены резким изменениям в зависимости от времени суток и сезонности.

В связи с этим, для практики разработки и испытаний систем спутникового позиционирования актуальной является задача разработки искусственных препятствий для спутниковых сигналов, по своим свойствам приближенным к натуральным – то есть обеспечивающих резкие и хаотические по характеру возмущения спутниковых сигналов, однако, не подверженных указанным выше нестабильностям. Такие препятствия оказываются полезными на испытательных полигонах по отработке систем.

Сказанное обуславливает 2 основные

Цели работы

1. Поиск путей построения антенн, пригодных для практики спутникового позиционирования на открытых пространствах с субсантиметровой точностью в режиме реального времени.
2. Поиск путей построения искусственных препятствий, по своим проявлениям приближенным к естественным зеленым насаждениям, а

именно, обеспечивающих резкие хаотичные возмущения спутниковых сигналов по амплитуде и фазе.

Одним из перспективных направлений для достижения субсантиметровой точности позиционирования в практических условиях является исследование возможностей применения антенн бегущей волны. Антенны бегущей волны известны значительное время. Можно отметить общеизвестные антенны типа волновой канал [17,19], диэлектрические стержневые антенны [17,20], микрополосковые линейные решетки [21], спиральные антенны [22]. Типичными для применений к спутниковому позиционированию являются спиральные антенны круговой поляризации. История этого вопроса и образцы применяемых антенн рассмотрены в [3].

Можно отметить, что антенны бегущей волны выгодно отличаются простотой системы возбуждения и общей относительной простотой конструкции. Однако, антенн бегущей волны, удовлетворяющие перечисленным выше требованиям к ДН, в настоящее время не опубликовано. При этом, представляет интерес как оценка самой возможности получения требуемых амплитудно-фазовых распределений с помощью антенн бегущей волны, так и разработка способов их практического воплощения.

Для гибкого управления амплитудно-фазовым распределением в антенне бегущей волны перспективным является применение современных материалов с переменной прозрачностью. Полупрозрачные поверхности с реактивным импедансом рассматривались рядом авторов [23...25]. Такие поверхности реализуются в виде сеток с малым, по сравнению с длиной волны, шагом, с внедренными импедансами в виде навесных элементов [27,28] или полосковых структур [29]. К числу возможностей по управлению прозрачностью можно отнести также применение частотно-селективных

поверхностей [21]. Пример успешного применения полупрозрачных поверхностей в антеннах бегущей волны для систем связи приведен в работе [29]; возможности формирования ДН, требуемой для позиционирования, в этой публикации не рассматривались.

Другим направлением, представляющим интерес, является исследование возможности оснащения существующих практических антенн дополнительными экранами для повышения крутизны отсечки КУ антенны при пересечении местного горизонта. Эти экраны представляют собой ребра, ориентированные параллельно главному максимуму ДН. Такие ребра далее называются вертикальными. Задача дифракции на идеально проводящей кромке хорошо известна. Здесь характер убывания поля в области тени описывается интегралом Френеля (см., например, [26]). Однако применение полупрозрачных окончаний полуплоскостей потенциально дает дополнительную степень свободы по увеличению скорости спада КУ по сравнению с идеально проводящей полуплоскостью.

Возможности уменьшения затекания поля за контур зеркальных антенн путем дополнения контура зеркала полупрозрачными структурами рассматривались в литературе [30,31,32]. Известны экраны, выполненные из материалов с переменным профилем прозрачности, с краями в виде тонкого резистивного листа [33]. Представляет интерес развитие этих подходов для обеспечения отсечки усиления антенн позиционирования в области углов, близких к горизонту. Первоначальные оценки в этом направлении приведены в работе [34,35].

Полупрозрачные материалы, упомянутые выше, представляют собой удобные структуры для реализации искусственных укрытий для испытательных полигонов. Известны многочисленные применения полупрозрачных материалов для управления ДН антенны. В частности, в

работах [36,37] обсуждаются возможности создания остронаправленного излучения с помощью слабонаправленных возбудителей. Механизм создания такого излучения состоит в возбуждении резонанса между полупрозрачной поверхностью и экраном возбудителя. По аналогии с лазерной техникой и оптикой, такие устройства получили наименование резонаторов Фабри-Перо. Для реализации целей данной диссертации по разработке искусственных препятствий, целесообразным является рассмотрение резонаторов типа Фабри-Перо с размерами, значительно превышающими длину волны. Спектр колебаний таких резонаторов оказывается почти непрерывным, интерференцию этих колебаний можно рассматривать [38,39] как механизм образования резких и хаотических возмущений ДН системы антенна-препятствие.

Вследствие сказанного, **основные задачи, решаемые в диссертационной работе**, состоят в следующем:

1. Оценка потенциальных возможностей реализации ДН с отсечкой при пересечении местного горизонта с помощью антенны бегущей волны путем рассмотрения математической модели в виде плоскопараллельного волновода с полупрозрачным окончанием.
2. Разработка практического воплощения антенны бегущей волны в виде четырехзаходной спирали с внедренными реактивными компонентами.
3. Разработка численной математической модели возбуждения системы вертикальных ребер с полупрозрачными окончаниями и модели антенны позиционирования с такими ребрами. Проведение расчетов и экспериментальных исследований таких экранов.
4. Создание математической модели возбуждения резонатора типа Фабри-Перо с размерами, значительно превышающими длину волны.

5. Разработка укрытия антенны позиционирования и полевые испытания таких укрытий с целью получения возмущений в ДН приемной антенны, приближенных к естественному лесу.

Для решения сформулированных задач в работе применяются обоснованные **методы** математического моделирования и разработки алгоритмов и программ, расчеты с помощью пакетов программ электродинамического уровня и экспериментальные исследования в безэховой камере и на испытательном полигоне.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Показана возможность получения ДН, равномерной в верхней (рабочей) полусфере с отсечкой на 20дБ при пересечении местного горизонта с помощью антенн бегущей волны габаритом порядка 1.5 длины волны. Разработан образец такой антенны в виде четырехзаходной спирали с внедренными реактивными компонентами.
2. Показана возможность увеличения крутизны спада КУ при пересечении местного горизонта у слабонаправленных антенн позиционирования путем введения дополнительного экрана в виде системы вертикальных ребер с полупрозрачными окончаниями.
3. Выявлена возможность применения укрытий в виде резонаторов типа Фабри-Перо большого электрического размера для внесения возмущений в ДН антенны позиционирования, аналогичных естественным зеленым насаждениям.

Практическая значимость работы состоит в следующем:

1. Достигнута суб-сантиметровая точность спутникового позиционирования на открытых пространствах в режиме реального

времени с помощью антенн бегущей волны габаритом порядка 1.5 длины волны.

2. Показана возможность улучшения характеристик подавления многолучевости антеннами спутникового позиционирования за счет применения экранов в виде системы вертикальных ребер с полупрозрачными окончаниями.
3. Разработаны искусственные укрытия для испытательных полигонов спутникового позиционирования, приближенные к естественным зеленым насаждениям по степени влияния на затенение приемной антенны.

Реализация и внедрение результатов работы. Построенные опытные образцы спиральной антенны и искусственных укрытий применяются в НИОКР, проводимых компанией «Топкон Позиционинг Системс» в направлении совершенствования автоматической и полуавтоматической строительной и сельскохозяйственной техники. Результаты из глав 2 и 3 диссертации были использованы для подготовки и чтения лекций по курсу “Теоретические основы технической электродинамики антенн” на кафедре №406 МАИ. Соответствующие Акты о внедрении приведены в приложениях к диссертации.

Достоверность полученных результатов обусловлена применением апробированных методов математического моделирования и соответствия результатов расчетов экспериментально полученным данным.

Апробация результатов работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях.

1. 6-я Всероссийская научно-техническая конференция “Радиолокация и радиосвязь”, Москва, 2012

2. Proceedings of the 27th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+ 2014) September 8 - 12, 2014

Публикации. По результатам выполненной работы опубликованы 2 статьи в журналах, входящих в перечень ВАК РФ, 2 статьи в сборниках трудов международных конференций, поданы 3 заявки на патенты.

1. Татарников Д. В., Чернецкий И. М., Затенение полуплоскостью с полупрозрачным окончанием. 6-я Всероссийская научно-техническая конференция “Радиолокация и радиосвязь”, Москва, 2012
2. Татарников Д. В., Чернецкий И. М., Затенение полуплоскостью с полупрозрачным окончанием. Электронный журнал “Журнал радиоэлектроники”, №12, 2012
3. Tatarnikov D., Chernetsky I., Artificial Obstructions Employing Fabry-Perot Principles for GNSS Positioning Equipment Test Ranges, Proc. of the 27th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+ 2014), Tampa, Florida, September 2014, pp. 486-489
4. Татарников Д. В., Чернецкий И. М., Искусственные препятствия для испытательных полигонов аппаратуры позиционирования по сигналам GPS/ГЛОНАСС // Антенны. 2015, выпуск 2 (253), стр. 47-54
5. Tatarnikov D., Chernetsky I., “Methods for modeling multipath reflections of GNSS signals using a test installation and apparatuses for implementing test methods” от 16 января 2014г. International Application Number PCT/RU2014/000022

6. Tatarnikov D., Chernetsky I., “Impedance helical antenna forming П-shaped directional diagram” от 7 октября 2014г. International Application Number PCT/RU2014/000753
7. Stepanenko A., Astakhov A., Tatarnikov D., Chernetsky I. “Broadband helical antenna with cutoff pattern” International Application Number PCT/RU2015/000234, Filing date 04/09/2015

Основные положения, выносимые на защиту.

- антенны бегущей волны габаритом порядка 1.5 длины волны позволяющие улучшить точность позиционирования по сигналам спутников ГЛОНАСС и других систем.

- экраны в виде вертикальных ребер с полупрозрачными окончаниями, улучшающие степень подавления многолучевости антеннами позиционирования

- укрытия в виде резонаторов на основе выпуклой полупрозрачной поверхности радиусом порядка 10 длин волн для испытательных полигонов аппаратуры позиционирования, вносящие искажения в ДН приемной антенны, сходные с естественными зелеными насаждениями.

Объем и структура работы.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и 7 приложений. Текст работы изложен на 137 страницах машинописного текста, общий объем 198 страниц машинописного текста, работа включает 100 рисунков, список литературы включает 55 наименований.

В главе 1 исследуются антенны бегущей волны, формирующие ДН П-образной формы. В начале главы исследуется математическая модель

плоскопараллельного волновода с полупрозрачными стенками. Приводится описание модели и результаты расчетов. Результаты имеют качественный характер и используются для синтеза четырехзаходной спиральной антенны с реактивным импедансом витков. Приводятся характеристики разработанной антенны и результаты испытаний антенны в составе аппаратуры позиционирования.

Вторая глава работы посвящена исследованию экранов в виде системы вертикальных ребер с полупрозрачными окончаниями. Эти экраны предназначены для уменьшения ошибки многолучевости путем увеличения крутизны уменьшения КУ практических антенн при пересечении местного горизонта. В начале Главы исследуется дифракция поля слабонаправленного источника на полуплоскости с полупрозрачным окончанием. Здесь обосновывается возможность синтеза профиля импеданса окончания, обеспечивающего более быстрое затухание поля в области полутени по сравнению с идеально проводящей (металлической) полуплоскостью. Далее исследуются системы ребер и модель замкнутого экрана в двумерном приближении. Глава завершается экспериментальными исследованиями на примере практической антенны позиционирования.

Глава 3 диссертации посвящена искусственным препятствиям для тестирования аппаратуры позиционирования по сигналам ГНСС в условиях хаотического затенения антенны. Исследуемая конфигурация представляет собой полупрозрачную полусферу большого электрического размера, размещенную над идеально проводящей поверхностью, внутри которой помещается антенна позиционирования. Разрабатывается математическая модель такого укрытия, выполняется синтез периодической полупрозрачной щелевой структуры. Глава завершается сравнением работы антенны позиционирования под таким укрытием с условиями естественного леса.

Работа завершается общим Заключением по проведенным исследованиям.

Личный вклад автора состоит в разработке математических моделей, алгоритмов и программ, проведении расчетов, разработке экспериментальных макетов, проведении натурных экспериментов и обработке полученных результатов.

ГЛАВА 1. Антенны бегущей волны, формирующие ДН П-образной формы

1.1. Оценка потенциальных возможностей с помощью модели плоскопараллельного волновода с полупрозрачным окончанием

1.1.1. Математическая модель

Рассмотрим структуру, представленную на рис. 1.1, которая представляет собой две полубесконечные полуплоскости с полупрозрачными окончаниями, образующие плоскопараллельный волновод шириной a . Из области $z \rightarrow -\infty$ в сторону открытого конца плоскопараллельного волновода распространяется T -волна, которая излучается во внешнее пространство и частично отражается. Ширина волновода достаточно мала, чтобы докритической являлась лишь T -волна, т. е. выполняется условие $a < \frac{2\pi}{k}$.

Это условие одномодовости, в котором учтено, что при падении T -волны на симметричную неоднородность в плоскопараллельном волноводе, возбуждаются только четные гармоники. На полупрозрачных окончаниях полуплоскостей выполняются граничные условия тонкого слоя [23-25].

$$\begin{cases} [\mathbf{n}, \mathbf{E}^+] = [\mathbf{n}, \mathbf{E}^-] = [\mathbf{n}, \mathbf{E}] \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-] = \mathbf{j}^e = \frac{[[\mathbf{n}, \mathbf{E}], \mathbf{n}]}{Z_L}, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

где Z_L - импеданс слоя; \mathbf{j}^e - вектор поверхностной плотности электрического тока; \mathbf{n} - нормаль к поверхности; \mathbf{E} - вектор электрического поля; \mathbf{H}^\pm - вектор магнитного поля; знаки “+” и “-” означают стремление к поверхности, с внешней и внутренней стороны относительно нормали; векторное произведение $[\mathbf{n}, \mathbf{E}]$ определяет касательную к поверхности составляющую электрического поля.

На остальной части полуплоскостей выполняются граничные условия для идеального проводника $E_r = 0$. Полупрозрачная часть полуплоскостей имеет длину h . Система координат расположена таким образом, что начало координат находится на расстоянии L по оси z от окончания плоскопараллельного волновода и на расстоянии $a/2$ по оси x от полуплоскостей. Ось x перпендикулярна полуплоскостям, ось z - параллельно стенкам и направлена в сторону окончания плоскопараллельного волновода.

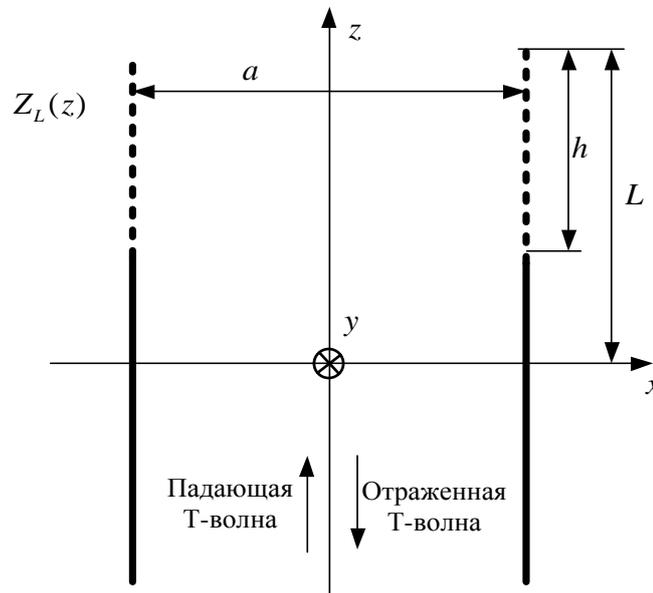


Рис. 1.1. Геометрия плоскопараллельного волновода

Решим задачу дифракции, воспользовавшись первой граничной задачей электродинамики [41]. Для этого разделим область решения на две подобласти, введя идеально проводящую перегородку между полуплоскостями в плоскости xOy , как показано на рис 1.2, и введем эквивалентные магнитные токи по обе стороны перегородки $\mathbf{j}_{\text{пад}}^{m\pm} = [\pm \mathbf{z}_0, \mathbf{E}_{\text{пад}}]$ и $\mathbf{j}_{\text{отр}}^{m\pm} = [\pm \mathbf{z}_0, \mathbf{E}_{\text{отр}}]$, где знаки “+” и “-” означают

стремление к поверхности перегородки, со стороны $z > 0$ и $z < 0$, соответственно, $\mathbf{E}_{\text{тпад}}$ - касательная к плоскости xOy составляющая вектора электрического поля падающей T -волны, $\mathbf{E}_{\text{тотр}}$ - касательная к плоскости xOy составляющая вектора электрического поля отраженной T -волны. Ввиду этого первоначальная задача разделяется на две подзадачи: 1) решение во внутренней области, ограниченной полуплоскостями и горизонтальной идеально проводящей перегородкой; 2) решение во внешней области, содержащей открытый конец плоскопараллельного. Решения этих задач объединяются с помощью условия непрерывности касательной составляющей магнитного поля под и над идеально проводящей перегородкой.

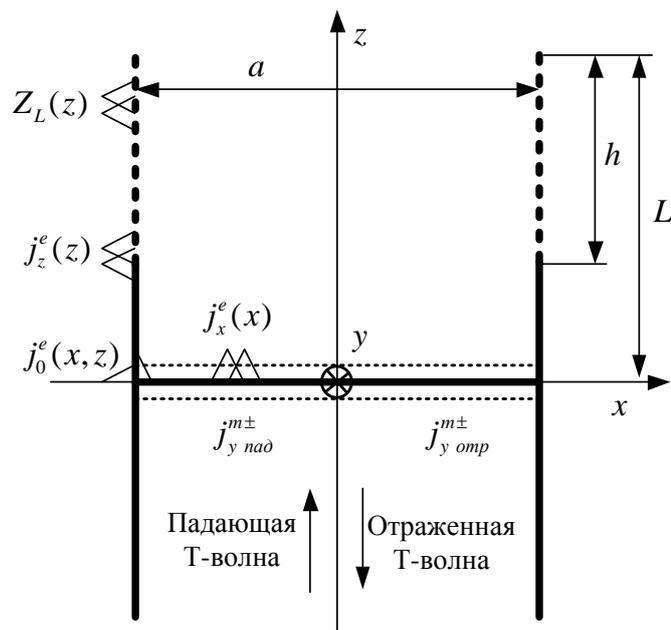


Рис. 1.2. Модель плоскопараллельного волновода, возбуждаемого T -волной.

Решение задачи во внутренней области представляет собой совокупность падающей и отраженной T -волн плоскопараллельного

волновода с амплитудами U_{nad} и U_{omp} . Выпишем касательные к перегородке компоненты поля во внутренней области плоскопараллельного волновода:

$$E_x = U_{nad} e^{-ikz} + U_{omp} e^{ikz} \quad (1.1.2)$$

$$H_y = \frac{1}{W_0} U_{nad} e^{-ikz} - \frac{1}{W_0} U_{omp} e^{ikz} \quad (1.1.3)$$

В соответствии с выражением (1.1.2), запишем выражения для эквивалентного поверхностного магнитного тока под и над идеально проводящей перегородкой:

$$j_y^{m\pm} = \pm E_x = U_{nad} j_y^{m\pm} + U_{omp} j_y^{m\pm}, \quad z = 0, -a/2 < x < a/2 \quad (1.1.4)$$

где $j_y^{m\pm} = \pm \text{rect}_a(x)$ - кусочно-постоянная базисная функция магнитного тока, соответствующего отраженной волне; $j_y^{m\pm} = \pm \text{rect}_a(x)$ - кусочно-постоянная функция распределения стороннего магнитного тока, соответствующего падающей волне.

В выражениях (1.1.2-1.1.4) в спектре отраженных волн не учитываются высшие гармоники, т. к. уже при ширине плоскопараллельного волновода $a < 0.7\lambda$ и расстоянии между идеально проводящей перегородкой и началом полупрозрачной области $L-h > \lambda$, первая высшая гармоника, возбуждавшаяся на неоднородности, дойдет до идеально проводящей перегородки с затуханием в $e^{i\Gamma_1 z} = e^{i\sqrt{k^2 - (2\pi/a)^2}(L-h)} = 1.8 \cdot 10^{-5}$ раз.

Перейдем к решению задачи во внешней области. Для удобства перепишем граничные условия (1.1.1) в следующем виде

$$j_z Z_L = E_z, \text{ при } x = \pm a/2, L-h < z < L$$

Граничное условие на идеально проводящей части полуплоскостей:

$$E_z = 0, \text{ при } x = \pm a/2, 0 < z < L-h \quad (1.1.5)$$

Условие непрерывности касательной составляющей магнитного поля сверху и снизу идеально проводящей перегородки и условие для касательной составляющей электрического поля и магнитного тока над перегородкой

$$\begin{cases} E_x^+ = j_y^{m+} \\ H_y^+ - H_y^- = 0 \end{cases}, \text{ при } z = 0, -a/2 < x < a/2, \quad (1.1.6)$$

где H_y^+, H_y^- - касательные компоненты магнитного поля над и под идеально проводящей перегородкой соответственно; E_x^+ - касательная составляющая электрического поля над перегородкой; j_y^{m+} - магнитный ток над идеально проводящей перегородкой.

Запишем интегральное уравнение для электрического поля

$$\int \mathbf{G}^{EE} \mathbf{j}^e dv + \int \mathbf{G}^{EH} \mathbf{j}_{отр}^{m+} dv + \int \mathbf{G}^{EH} \mathbf{j}_{пад}^{m+} dv = Z_L \mathbf{j}^e; \quad (1.1.7)$$

Запишем интегральное уравнение для магнитного поля

$$\int \mathbf{G}^{HH+} \mathbf{j}_{отр}^{m+} dv + \int \mathbf{G}^{HH+} \mathbf{j}_{пад}^{m+} dv + \int \mathbf{G}^{HE} \mathbf{j}^e dv = \int \mathbf{G}_1^{HH-} \mathbf{j}_{отр}^{m-} dv + \int \mathbf{G}_2^{HH-} \mathbf{j}_{пад}^{m-} dv \quad (1.1.8)$$

Здесь символами с “крышкой” обозначены функции Грина, в частности [42]

$\mathbf{G}^{EE}, \mathbf{G}^{EH}, \mathbf{G}^{HE}$ - импеданс и электрическая и магнитная передаточные функции в свободном пространстве, \mathbf{G}^{HH+} - проводимость в свободном пространстве; \mathbf{G}_1^{HH-} - проводимость во внутренней области короткозамкнутого плоскопараллельного волновода для волн, распространяющихся в направлении от источника; \mathbf{G}_2^{HH-} - проводимость во внутренней области короткозамкнутого плоскопараллельного волновода для волн, распространяющихся в направлении источника; \mathbf{j}^e - неизвестная

поверхностная плотность электрического тока на окончаниях полуплоскостей и идеально проводящей перегородке; $\mathbf{j}_{\text{пад}}^{\text{м}\pm}$ - эквивалентный поверхностный магнитный ток под и над идеально проводящей перегородкой, соответствующий падающей T -волне; $\mathbf{j}_{\text{отр}}^{\text{м}\pm}$ - эквивалентный поверхностный магнитный ток под и над идеально проводящей перегородкой, соответствующий отраженной T -волне.

Интегральные уравнения (1.1.7), (1.1.8) будем решать методом моментов. Представим электрический ток на окончаниях полуплоскостей, расположенных над идеально проводящей перегородкой, в виде разложения по треугольным базисным функциям, аналогично [27,28]:

$$j_z^e = \sum_{p=1}^P C_{z_p} \psi_{z_p}, \quad (1.1.9)$$

где $\psi_{z_p} = \begin{cases} \Delta_{2l}(z - z_p), & x = a/2 \\ -\Delta_{2l}(z - z_p), & x = -a/2 \end{cases}; P = \frac{L-l}{l}$ - количество базисных функций тока, текущего по окончаниям полуплоскостей; $z_p = pl$ - смещение по оси z базисной функции ψ_{z_p} .

Представим электрический ток на перегородке между полуплоскостями:

$$j_x^e = \sum_{s=1}^S C_{x_s} \psi_{x_s}, \quad (1.1.10)$$

где $\psi_{x_s} = \begin{cases} \Delta_{2l}(x - x_s) + \Delta_{2l}(x + x_s), & x_s \neq 0, z = 0 \\ \Delta_{2l}(x) & x_s = 0, z = 0 \end{cases}; S = \frac{a}{2l}$ - количество базисных функций тока, текущего по идеально проводящей перегородке; $x_s = (s-1)l$ - смещение по оси x базисной функции ψ_{x_s} .

Предполагается, что длина окончаний полуплоскостей L над идеально проводящей перегородкой выбрана настолько большой, что электрический ток, текущий по внешней стороне полуплоскостей при $z < 0$, можно принять равным нулю. Численное значение L получено в результате расчетов и приводится ниже. Тогда суммарный электрический ток по внешней и внутренней сторонам окончаний полуплоскостей, текущий над идеально проводящей перегородкой, должен перетекать на идеально проводящую перегородку при $z = 0$. В силу этого в двух симметричных относительно плоскости yOz узлах с координатами $(x = \pm a/2, z = 0)$ должно выполняться правило Кирхгофа для суммы токов в узле.

$$j_x^e(x = \pm a/2, z = 0) = \pm j_z^e(x = \pm a/2, z = 0) \quad (1.1.11)$$

Для выполнения этого условия, введем узловую базисную функцию ψ_0 с амплитудой C_0 , состоящую из расположенных на полуплоскостях и идеально проводящей перегородке половинок треугольной функции, так, чтобы ток с полуплоскостей перетекал на идеально проводящую перегородку. Эта узловая базисная функция опишется следующими выражениями

$$\psi_0 = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_l^l(x - a/2) + \Delta_l^r(x + a/2), \quad z = 0 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \Delta_l^r(z), \quad x = a/2 \\ -\Delta_l^r(z), \quad x = -a/2 \end{array} \right. \end{array} \right. , \quad (1.1.12)$$

где

$$\Delta_l^l(x - a/2) = \frac{1}{l}(x - a/2 + l), \quad a/2 > x > a/2 - l; \quad (1.1.13)$$

$$\Delta_l^r(x + a/2) = -\frac{1}{l}(x + a/2 - l), \quad a/2 + l > x > a/2; \quad (1.1.14)$$

$$\Delta_l^r(z) = -\frac{1}{l}(z - l), \quad l > z > 0 \quad (1.1.15)$$

Базисная функция магнитного тока $j_{y\ omp}^{m\pm}$ и функция распределения стороннего магнитного тока $j_{y\ na\delta}^{m\pm}$ определены выражением (1.1.3). Согласно общей схеме метода моментов, проинтегрируем интегральное уравнение (1.1.7) с базисной функцией ψ_{zq}

$$\begin{aligned}
& \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} \sum_{p=1}^P C_{zp} E_z(\psi_{zp}) dz dx - \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} \sum_{p=1}^P C_{zp} \psi_{zp} \sum_{m=1}^M Z_{Lm} \Delta_{2l}(z-z_m) dz dx + \\
& + \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} C_0 E_z(\psi_0) dz dx + \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} \sum_{s=1}^S C_{xs} E_z(\psi_{xs}) dz dx + \\
& + \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} U_{omp} E_z(j_{y\ omp}^{m+}) dz dx = - \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} U_{na\delta} E_z(j_{y\ na\delta}^{m+}) dz dx
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Проинтегрируем интегральное уравнение для электрического поля (1.1.7) с базисной функцией ψ_0

$$\begin{aligned}
& \int_x \int_0^l \psi_0 \sum_{p=1}^P C_{zp} E_z(\psi_{zp}) dz dx + 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 \sum_{p=1}^P C_{zp} E_x(\psi_{zp}) dx dz + \\
& + \int_x \int_0^l \psi_0 C_0 E_z(\psi_0) dz dx + 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 C_{zp} E_x(\psi_0) dx dz + \\
& + \int_x \int_0^l \psi_0 \sum_{s=1}^S C_{xs} E_z(\psi_{xs}) dz dx + 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 \sum_{s=1}^S C_{xs} E_x(\psi_{xs}) dx dz - \\
& + \int_x \int_0^l \psi_0 U_{omp} E_z(j_{y\ omp}^{m+}) dz dx + 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 U_{omp} E_x(j_{y\ omp}^{m+}) dx dz = \\
& = - \int_x \int_0^l \psi_0 U_{na\delta} E_z(j_{y\ na\delta}^{m+}) dz dx - 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 U_{na\delta} E_x(j_{y\ na\delta}^{m+}) dx dz
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

Проинтегрируем интегральное уравнение для электрического поля (1.1.7) с базисной функцией ψ_{xw}

$$\begin{aligned}
& \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} \sum_{p=1}^P C_{zp} E_x(\psi_{zp}) dx dz + \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} C_0 E_x(\psi_0) dx dz + \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} \sum_{s=1}^S C_{xs} E_x(\psi_{xs}) dx dz + \\
& + \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} U_{omp} E_x(j_{y omp}^{m+}) dx dz = - \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} U_{nad} E_x(j_{y nad}^{m+}) dx dz
\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

Проинтегрируем интегральное уравнение для магнитного поля (1.1.18) с базисной функцией гармоники эквивалентного магнитного тока

$$\begin{aligned}
& \int_z \int_{-a/2}^{a/2} j_{y omp}^{m+} \sum_{p=1}^P C_{zp} H_y(\psi_{zp}) dx dz + \int_z \int_{-a/2}^{a/2} j_{y omp}^{m+} C_0 H_y(\psi_0) dx dz + \\
& + \int_z \int_{-a/2}^{a/2} j_{y omp}^{m+} \sum_{s=1}^S (-1/2) C_{xs} \psi_{xs} dx dz + \int_z \int_{-a/2}^{a/2} j_{y omp}^{m+} U_{omp} H_y(j_{y omp}^{m+}) dx dz - \\
& - \int_z \int_{-a/2}^{a/2} j_{y omp}^{m+} U_{omp} H_y(j_{y omp}^{m-}) dx dz = - \int_z \int_{-a/2}^{a/2} j_{y omp}^{m+} U_{nad} H_y(j_{y nad}^{m+}) dx dz + \\
& + \int_z \int_{-a/2}^{a/2} j_{y omp}^{m+} U_{nad} H_y(j_{y nad}^{m-}) dx dz
\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Уравнения (1.1.16-1.1.19) образуют систему уравнений относительно амплитуд базисных функций C_{zp} , C_0 , C_{xs} , U_{omp} .

$$\begin{pmatrix} W(\psi_z, \psi_z) + WZ(\psi_z, \psi_z) & W(\psi_z, \psi_0) & W(\psi_z, \psi_x) & W(\psi_z, j_{y omp}^{m+}) \\ W(\psi_0, \psi_z) & W(\psi_0, \psi_0) & W(\psi_0, \psi_x) & W(\psi_0, j_{y omp}^{m+}) \\ W(\psi_x, \psi_z) & W(\psi_x, \psi_0) & W(\psi_x, \psi_x) & W(\psi_x, j_{y omp}^{m+}) \\ W(j_{y omp}^{m+}, \psi_z) & W(j_{y omp}^{m+}, \psi_0) & W(j_{y omp}^{m+}, \psi_x) & W(j_{y omp}^{m+}, j_{y omp}^{m+}) - W(j_{y omp}^{m+}, j_{y omp}^{m-}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_z \\ C_0 \\ C_x \\ U_{omp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\psi_z, j_{y nad}^{m+}) \\ B(\psi_0, j_{y nad}^{m+}) \\ B(\psi_x, j_{y nad}^{m+}) \\ B(j_{y omp}^{m+}, j_{y nad}^{m+}) - B(j_{y omp}^{m+}, j_{y nad}^{m-}) \end{pmatrix} \tag{1.1.20}$$

Элементы матрицы (1.1.20) вычисляются с помощью формул (П 2.67-П 2.92) из Приложения 2. Элементы столбца возбуждения вычисляются по формулам

$$B(\psi_z, j_{y nad}^{m+}) = -W(\psi_z, j_{y omp}^{m+}) \tag{1.1.21}$$

$$B(\psi_0, j_{y\text{ над}}^{m+}) = -W(\psi_0, j_{y\text{ отр}}^{m+}) \quad (1.1.22)$$

$$B(\psi_x, j_{y\text{ над}}^{m+}) = -W(\psi_x, j_{y\text{ отр}}^{m+}) \quad (1.1.23)$$

$$B(j_{y\text{ отр}}^{m+}, j_{y\text{ над}}^{m+}) - B(j_{y\text{ отр}}^{m+}, j_{y\text{ над}}^{m-}) = -W(j_{y\text{ отр}}^{m+}, j_{y\text{ отр}}^{m+}) - W(j_{y\text{ отр}}^{m+}, j_{y\text{ отр}}^{m-}) \quad (1.1.24)$$

1.1.2. Результаты расчетов

По формулам (1.1.21-1.1.24) и (П 2.67-П 2.92) из Приложения 2 были составлены вычислительные программы. Приведем результаты моделирования поля излучения плоскопараллельного волновода с полупрозрачными стенками, возбуждаемого T -волной. При моделировании было установлено, что протяженность $L = 5\lambda$ области вычисления тока по внешним сторонам стенок волновода является достаточной. Размер носителя треугольной базисной функции выбран $2l = 0.05\lambda$.

На рис. 1.3-1.7 приведены диаграммы направленности и отношение низ/верх для волновода с идеально проводящими стенками. Расчеты проведены с целью проверки правильности численной модели, описанной в п. 1.1.1. Кривые 1 вычислены с помощью численной модели, кривые 2 вычислены согласно аналитическому решению задачи об излучении открытого конца плоскопараллельного волновода с идеально проводящими стенками, полученному Л. А. Вайнштейном [40]. Рассматриваемые значения ширины волновода $a = 0.3\lambda$, $a = 0.4\lambda$, $a = 0.5\lambda$, $a = 0.6\lambda$, $a = 0.7\lambda$.

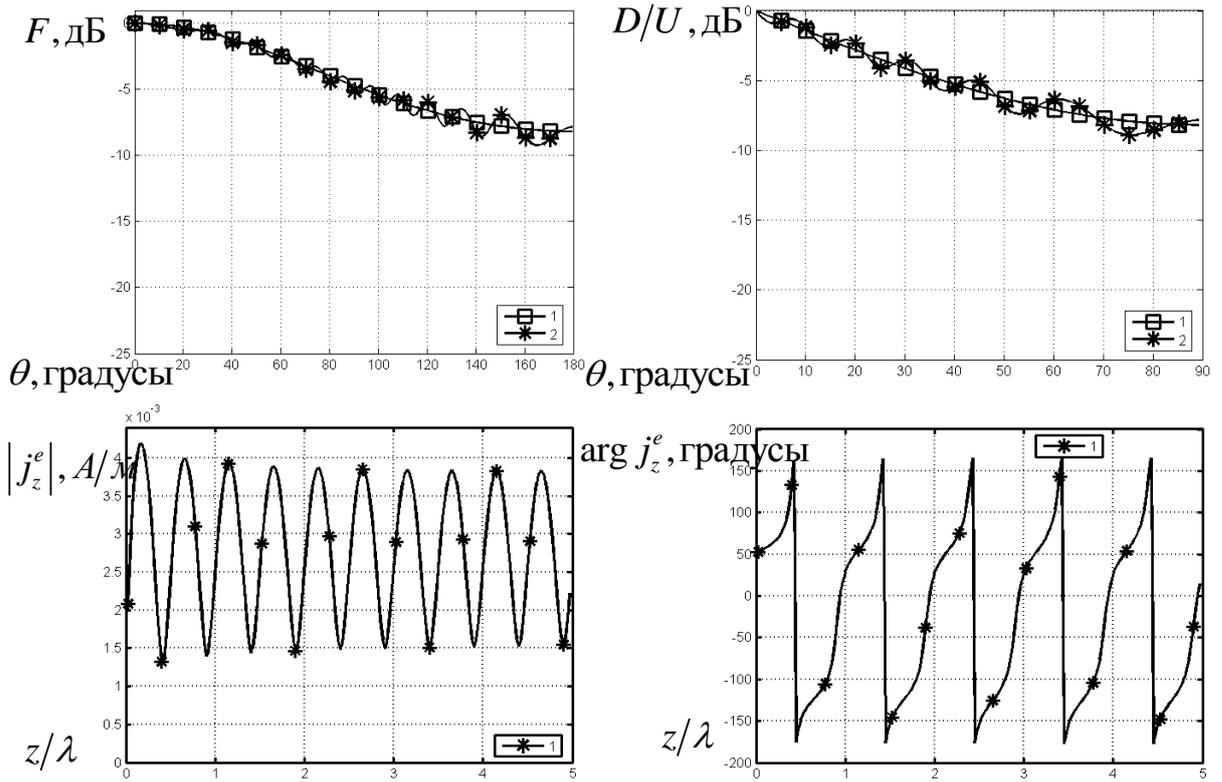


Рис. 1.3. Сравнение с точными формулами для случая $a = 0.3\lambda$

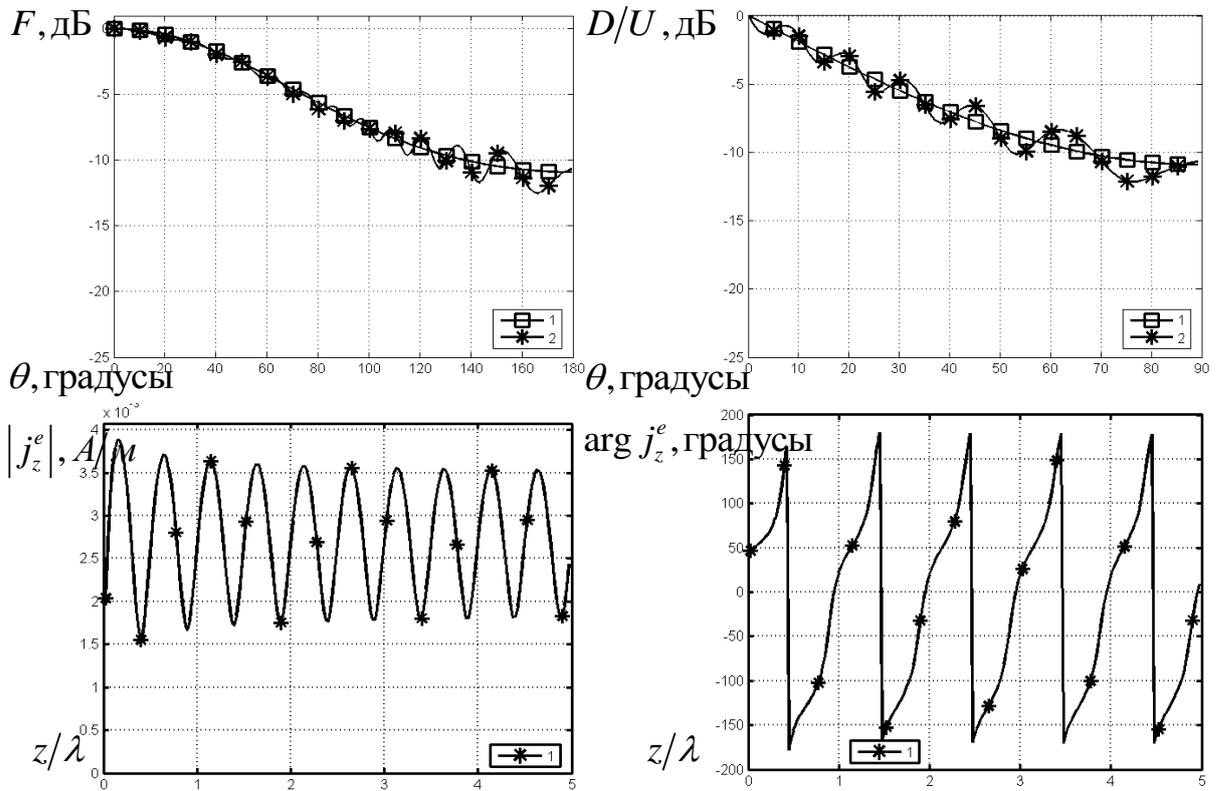


Рис. 1.4. Сравнение с точными формулами для случая $a = 0.4\lambda$

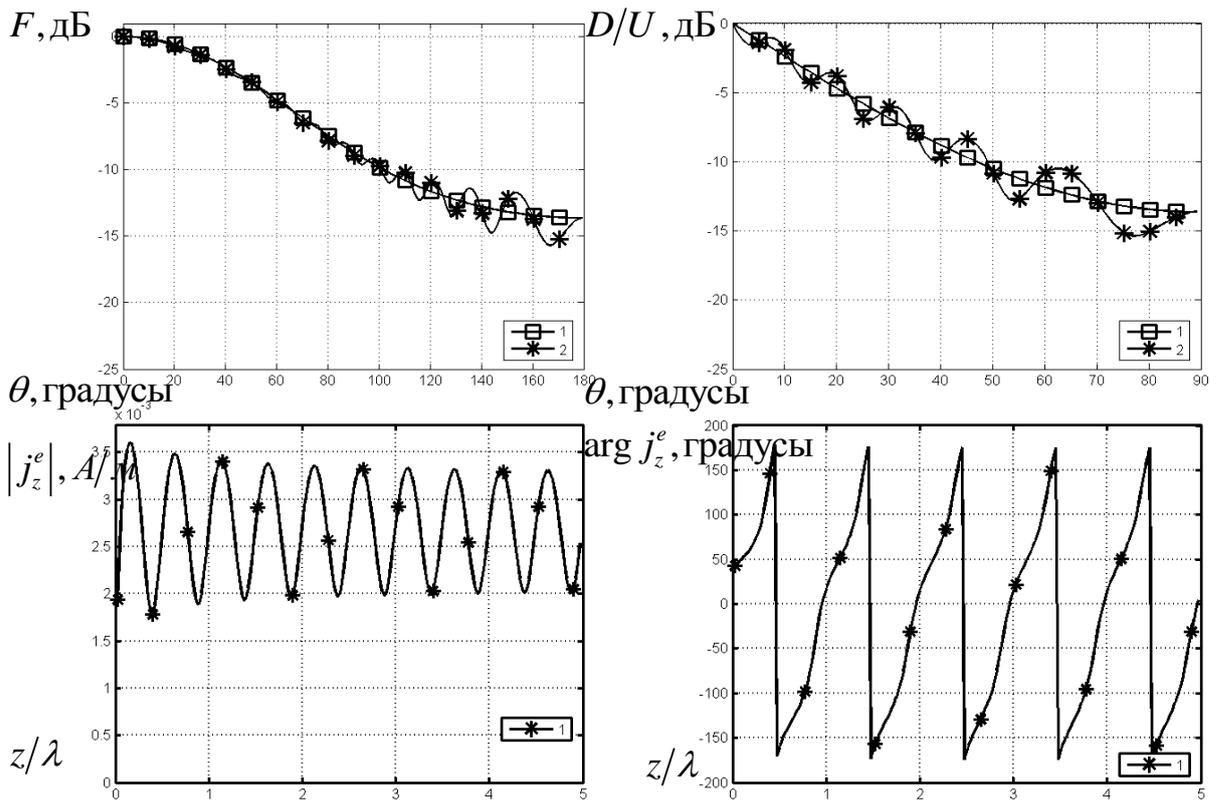


Рис. 1.5. Сравнение с точными формулами для случая $a = 0.5\lambda$

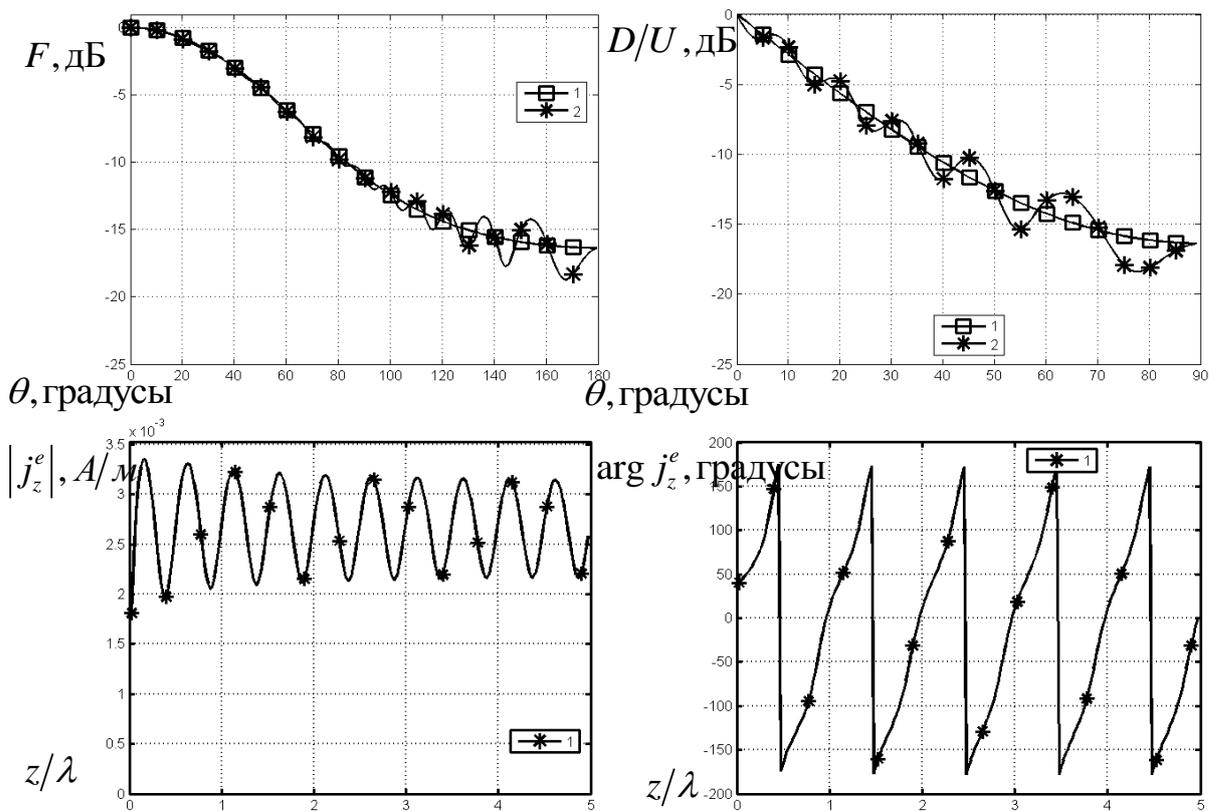


Рис. 1.6. Сравнение с точными формулами для случая $a = 0.6\lambda$

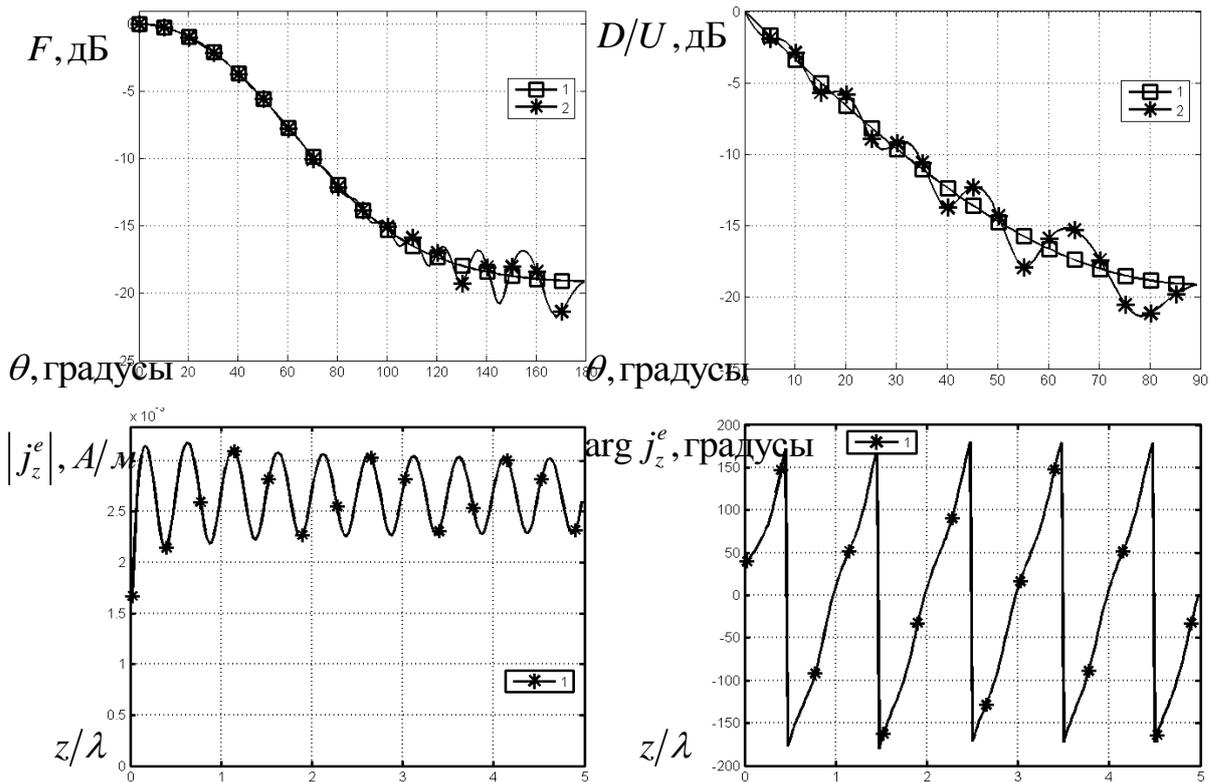


Рис. 1.7. Сравнение с точными формулами для случая $a = 0.7\lambda$

Из сравнения графиков рис. 1.3-1.7 видно хорошее совпадение диаграмм направленности, вычисленных с помощью численной модели и аналитического решения. Осцилляции диаграммы направленности, вычисленной с помощью численной модели, обусловлены конечной областью вычисления тока по внешней стороне стенок волновода. Также, из графиков для распределения тока видно, что при увеличении ширины волновода уменьшается коэффициент отражения от открытого конца волновода.

На рис. 1.8-1.12 приведены диаграммы направленности, отношение низ/верх, распределения тока и импеданса по вертикальным стенкам волновода с полупрозрачными окончаниями стенок при значениях $a = 0.3\lambda$, $a = 0.4\lambda$, $a = 0.5\lambda$, $a = 0.6\lambda$, $a = 0.7\lambda$. Рассматривается чисто реактивный

импеданс, оптимизированный по критерию максимально быстрого уменьшения отношения низ/верх при пересечении горизонта.

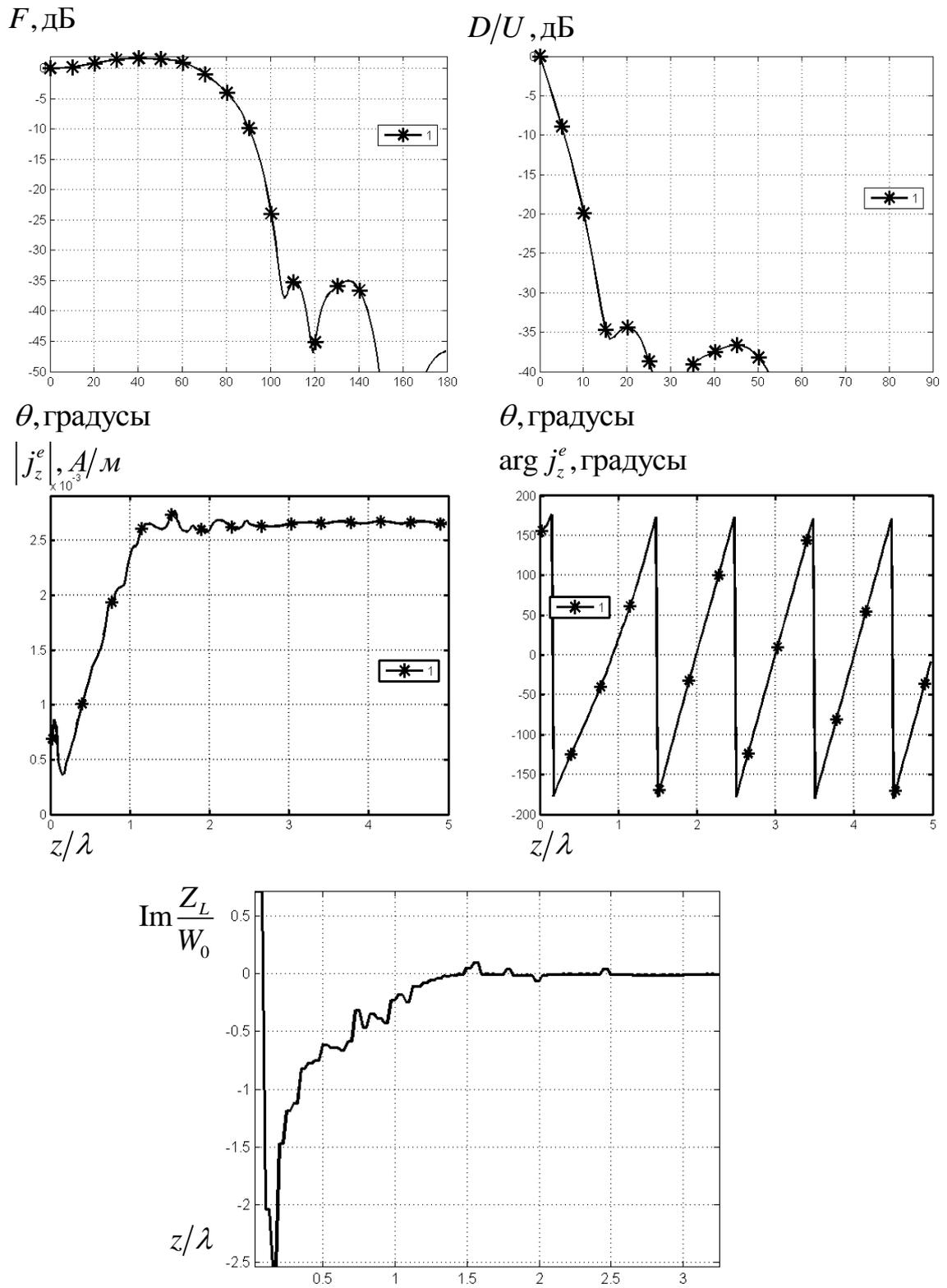


Рис. 1.8. Результаты расчета для случая $a = 0.3\lambda$

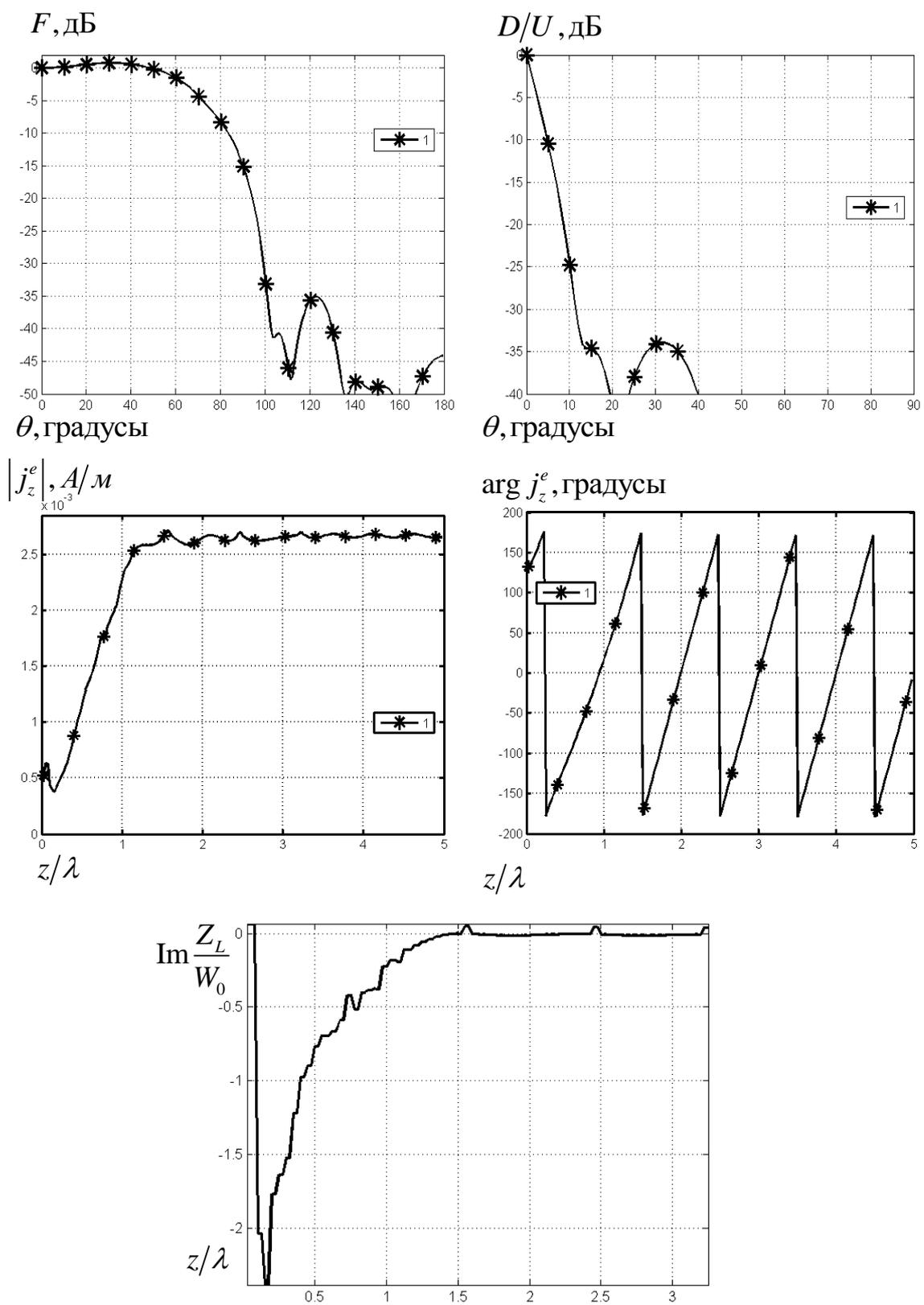


Рис. 1.9. Результаты расчета для случая $a = 0.4\lambda$

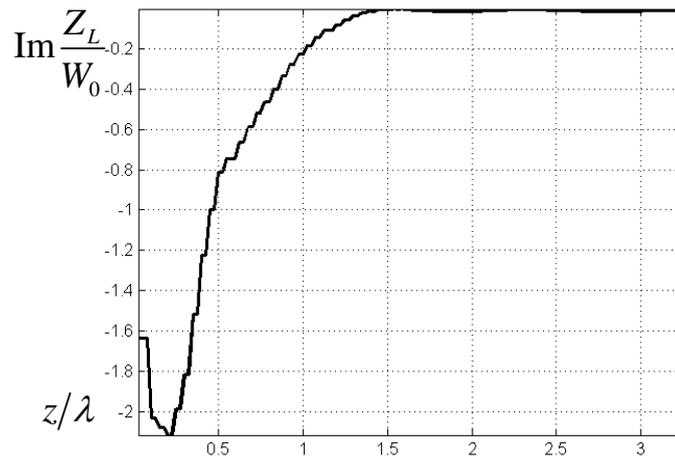
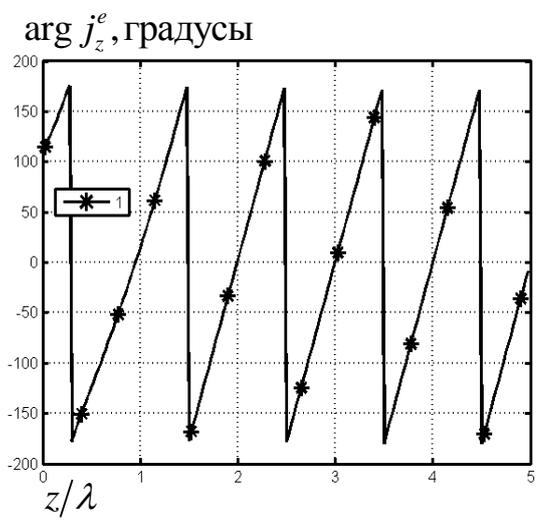
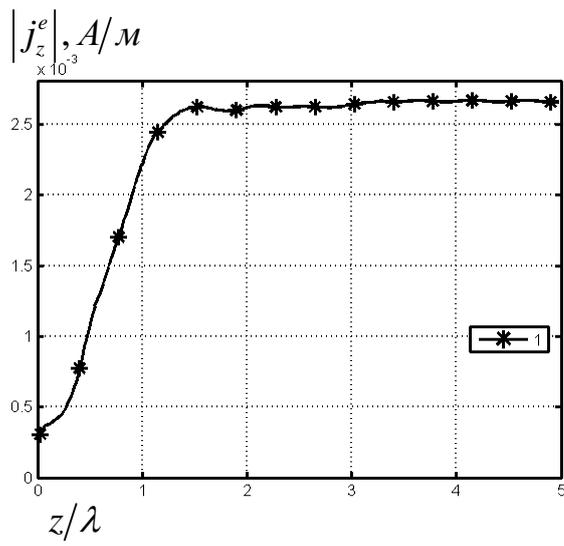
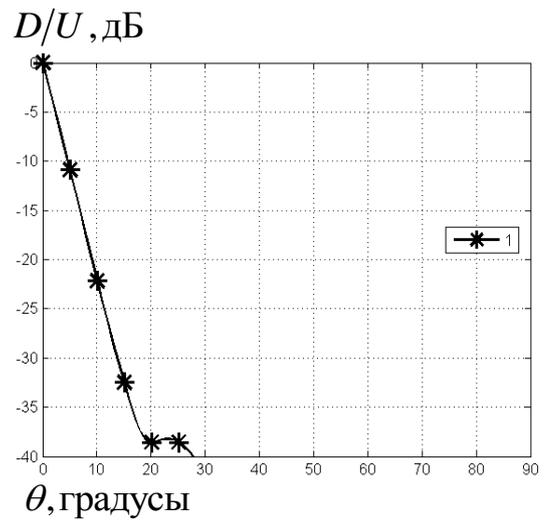
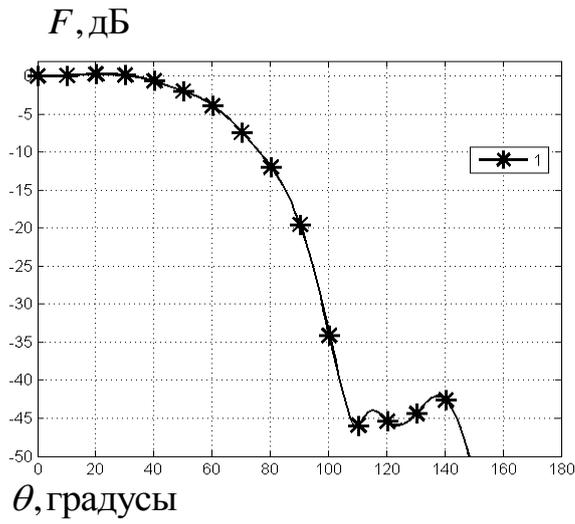


Рис. 1.10. Результаты расчета для случая $a = 0.5\lambda$

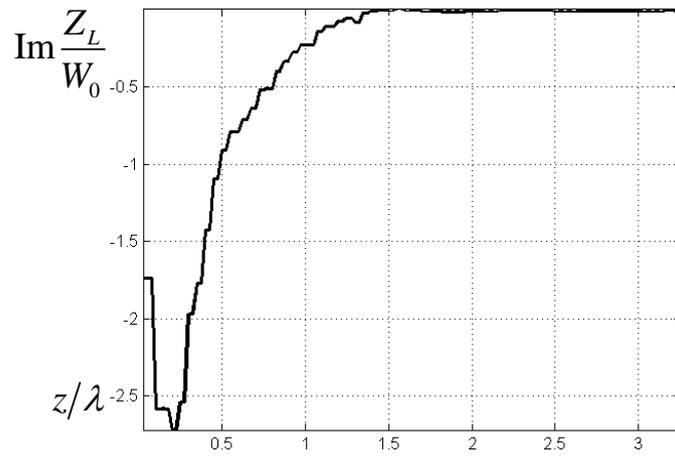
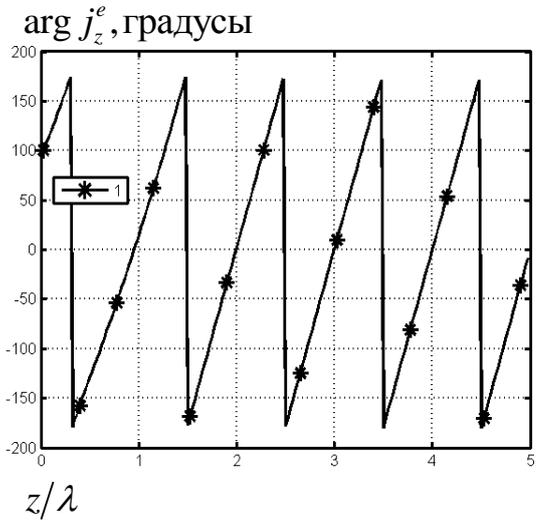
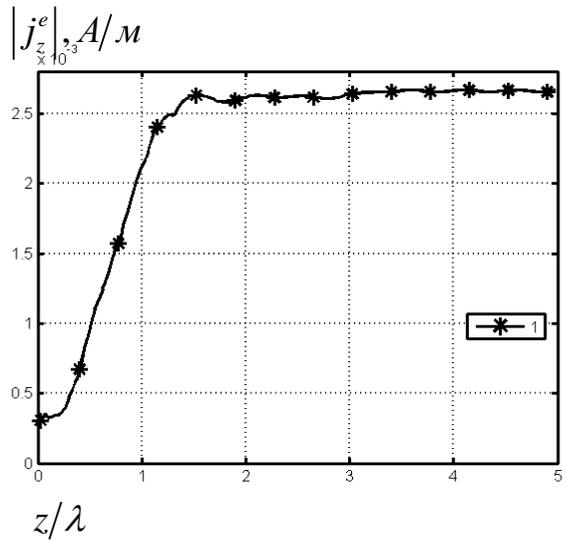
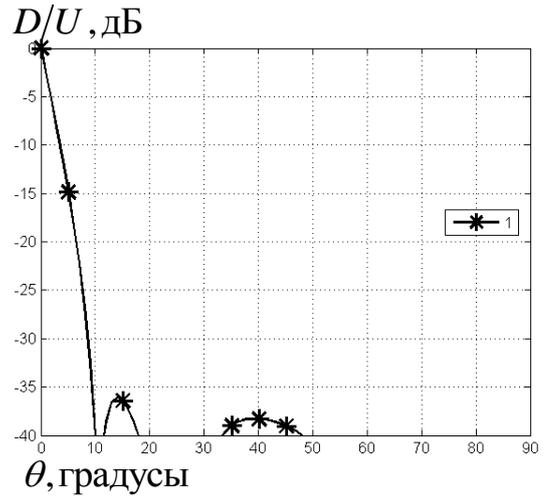
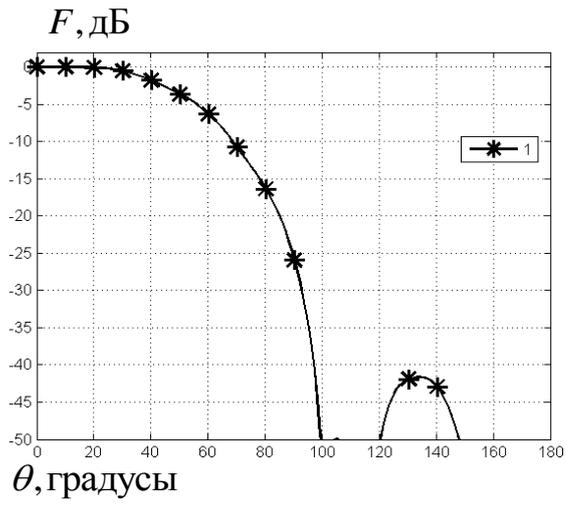


Рис. 1.11. Результаты расчета для случая $a = 0.6\lambda$

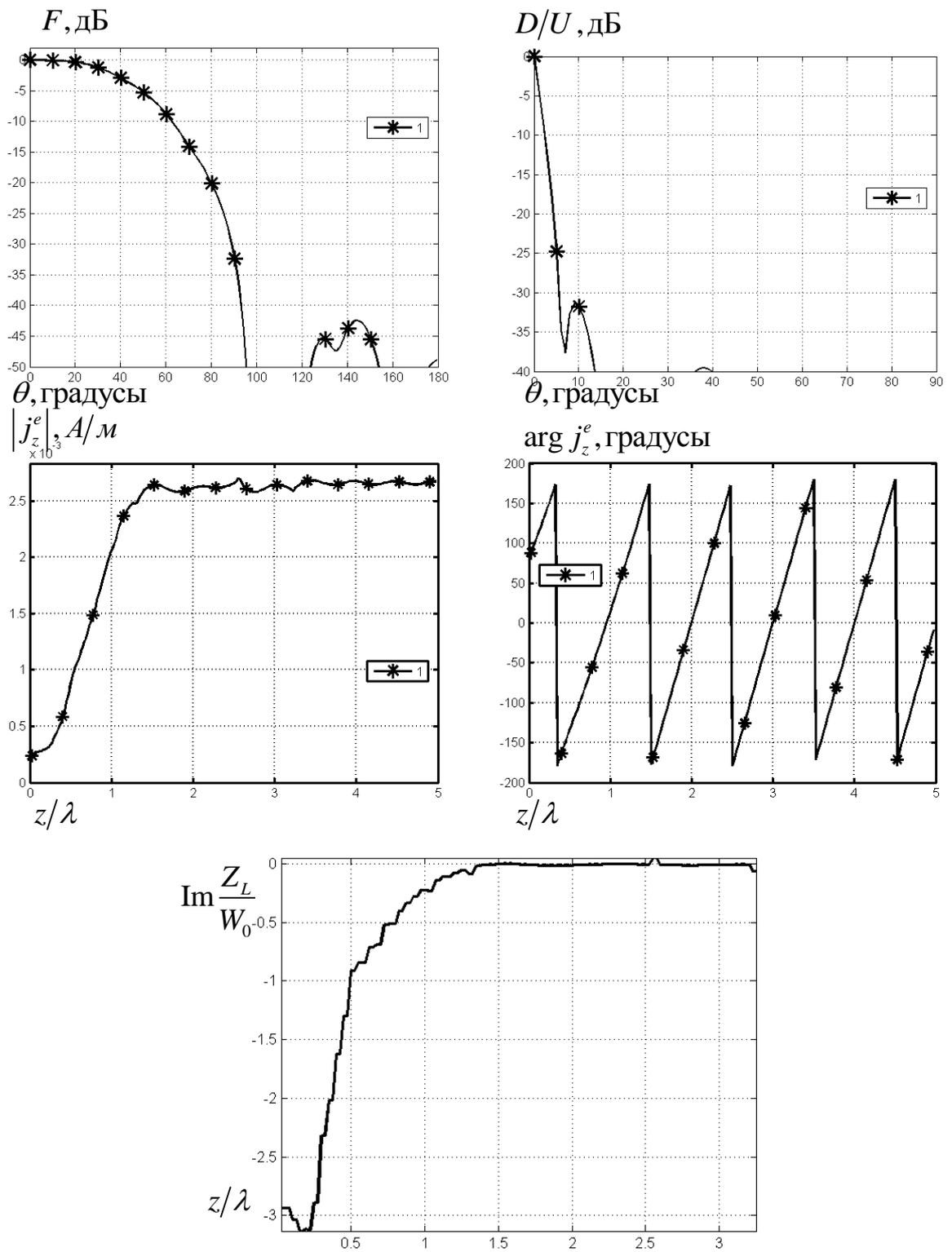


Рис. 1.12. Результаты расчета для случая $a = 0.7\lambda$

Из графиков для амплитудного и фазового распределения тока рис. 1.8-1.12 видно, что в области с высоким модулем емкостного импеданса при $z/\lambda < 1.5$ и ширинах волновода $0.7 > a/\lambda > 0.3$ происходит затухание тока с ускорением фазы волны, бегущей по волноводу. Таким образом, данная структура представляет собой антенну бегущей волны с ускоренной волной, у которой основное излучение происходит в области затухания тока. Из графиков рис. 1.8-1.12 видно, что при увеличении ширины волновода происходит увеличение крутизны спада характеристики отношения низ/верх при одновременном обужении диаграммы направленности. Так при ширине волновода $a = 0.6\lambda$ отношение низ/верх не хуже -36дБ от 10 градусов к горизонту при значении диаграммы направленности -16дБ на высоте 10 градусов над горизонтом.

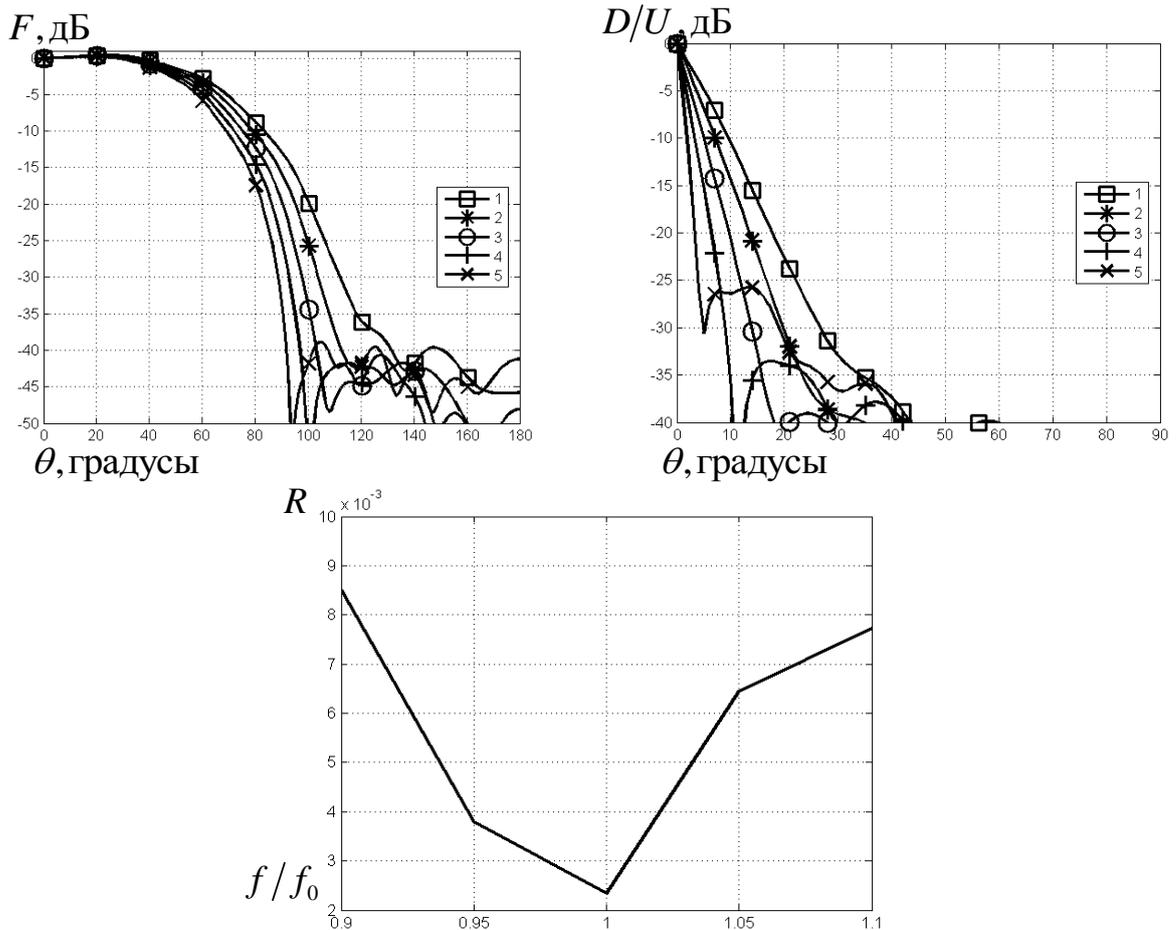


Рис. 1.13. Частотные характеристики

На рис. 1.13 приведены частотные зависимости диаграммы направленности, отношения низ/верх и коэффициента отражения при ширине волновода $a = 0.5\lambda_0$ и распределении импеданса на рис 1.10, в котором учтена частотная зависимость f_0/f емкостного импеданса. Кривые 1...5 соответствуют полосе частот $f/f_0 = 0.9...1.1$. Из графиков видно, что полоса частот, в которой отношение низ верх не хуже -20дБ в области углов от 10 градусов составляет порядка 10%. Коэффициент отражения при этом $R \sim 5 \cdot 10^{-3}$.

1.2. Четырехзаходная спиральная антенна с реактивными элементами

1.2.1. Структура антенны

Для практической реализации антенны бегущей волны с укоренной волной, работающей по принципу, показанному в п. 1.1.1-1.1.2., была выбрана четырехзаходная спиральная антенна с реактивным импедансом витков. Структура антенны была синтезирована с помощью пакета программ CST. При выборе прототипа учитывалось, что для задач высокоточного позиционирования требуется антенна круговой поляризации с высокой степенью азимутальной симметрии. На рис. 1.14. представлен эскиз экспериментального макета такой антенны, расположенной над экраном. Экспериментальный макет состоит из цилиндрической левовинтовой четырехзаходной спирали 1 с впаянными в разрезы навесными компонентами 3, обеспечивающими необходимый импеданс витков, круглого проводящего экрана 2 и квадратурной схемы возбуждения 5. К выходу квадратурной схемы 5 возбуждения подключен малошумящий усилитель 4. Спиральный элемент представляет собой скрученную в виде

цилиндрической трубки тонкую печатную плату. Высота спирали $H = 285\text{мм}$, диаметр экрана $D = 300\text{мм}$.

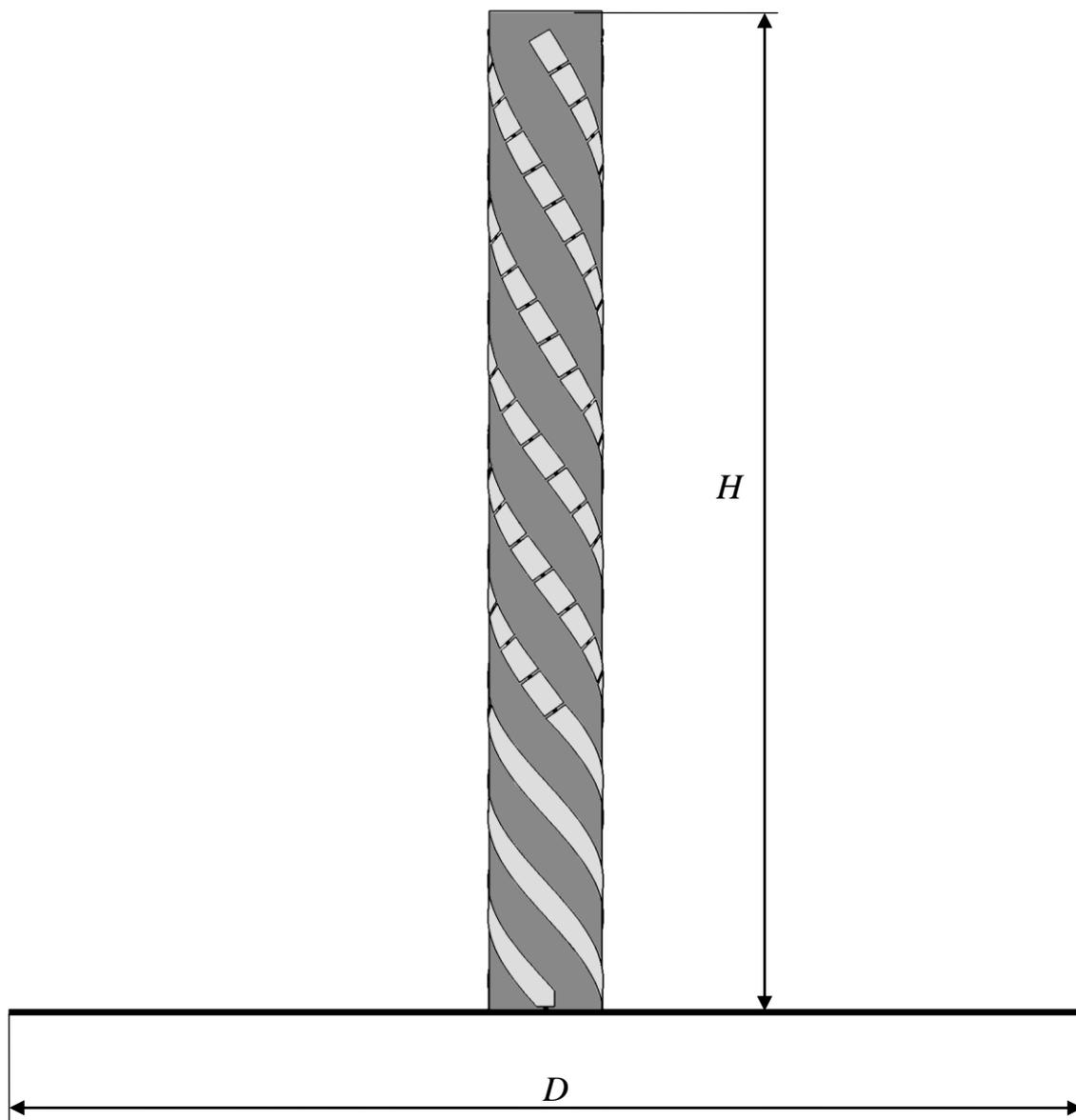


Рис. 1.14. Эскиз экспериментального макета

На рис. 1.15 показаны фотографии спирального элемента с впаянными в разрезы навесными компонентами. На рис. 1.16 показаны фотографии нижней стороны экрана, где видны схема деления мощности и усилитель.



Рис. 1.15. Фотографии экспериментального макета

При оптимизации параметров конструкции в качестве параметров оценки диаграммы направленности выбраны максимальное значение отношения низ/верх по полной мощности в секторе углов возвышения над горизонтом 10-90 градусов - $\max(DU(10-90))$, характеризующее крутизну спада ДН в нижней полусфере, а также значение ДН по полной мощности при угле возвышения над горизонтом 80 градусов $F(80)$, характеризующее степень обужения ДН в верхней полусфере. Также учитывалось, что рабочей полосой сигнала L1 GNSS является 1550...1630МГц.

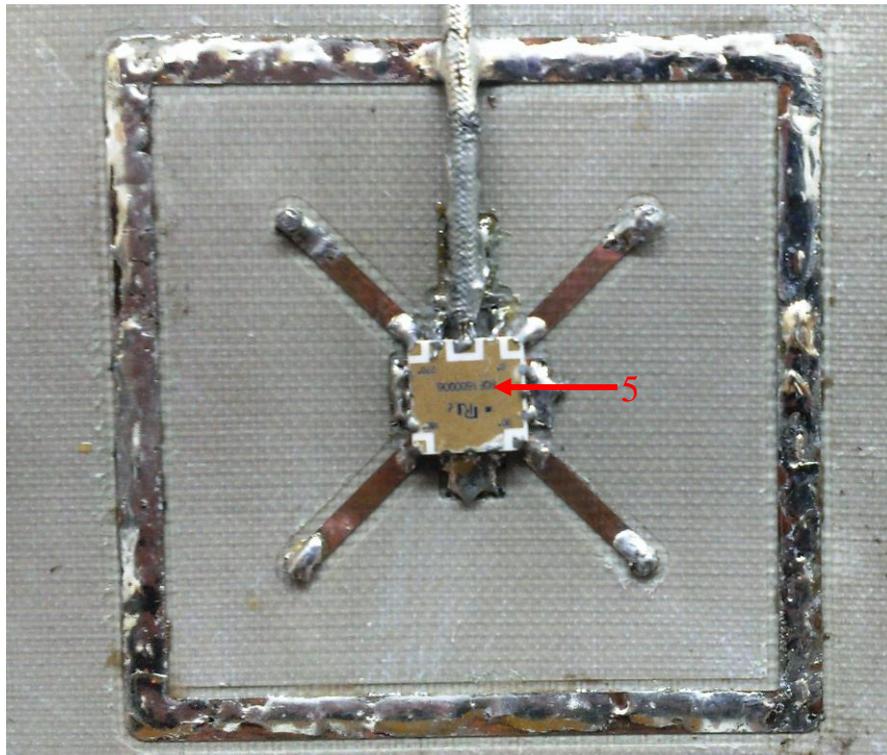


Рис. 1.16. Фотографии схемы деления мощности

1.2.2. Результаты экспериментальных исследований

На рис. 1.17-1.21 приведены диаграммы направленности для двух линейно поляризованных компонент (F_θ - сплошная линия, F_φ - штриховая линия) и отношение низ/верх по полной мощности в полосе частот $f = 1550 \div 1630$ МГц, измеренные в безэховой камере.

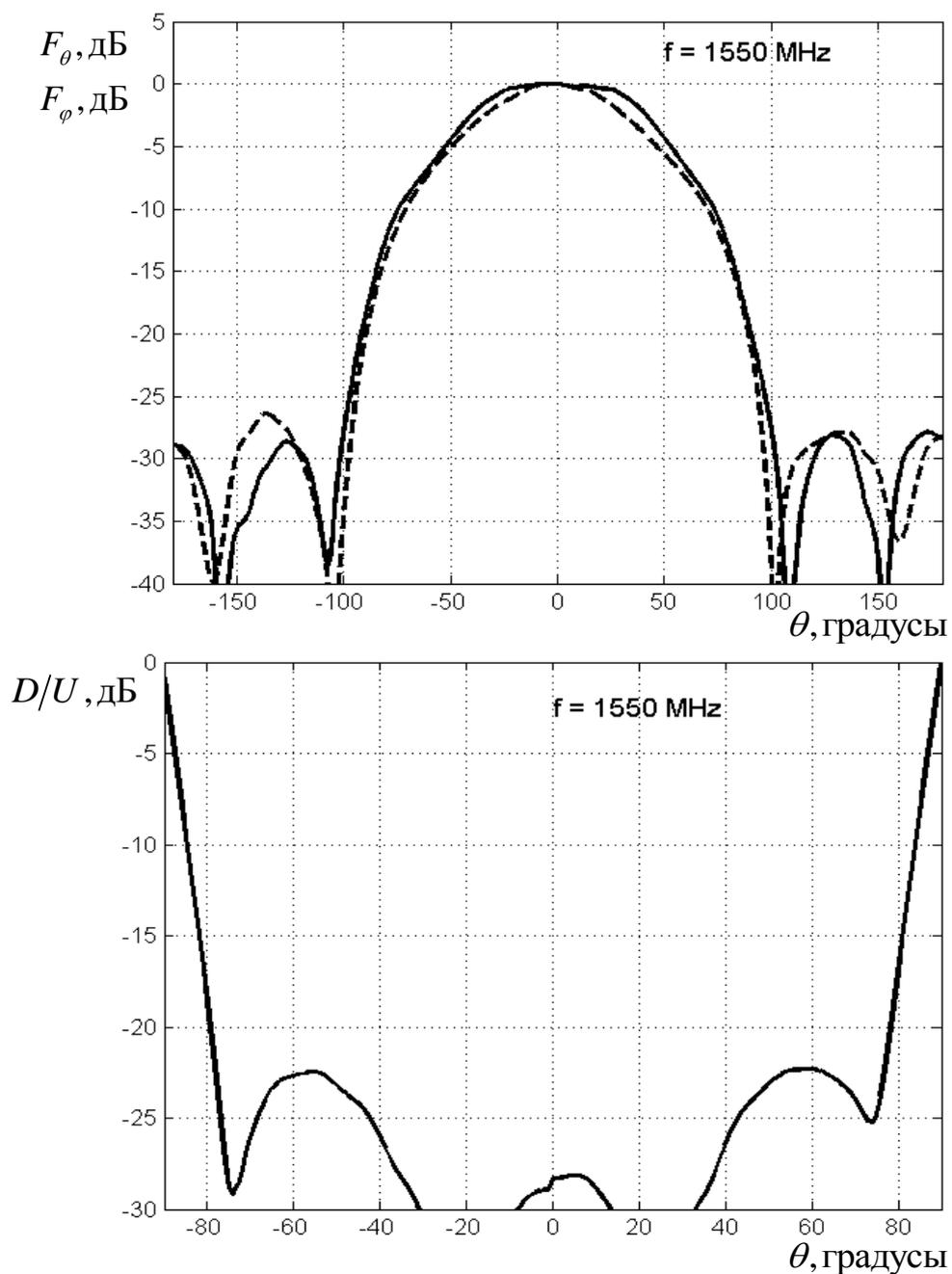


Рис. 1.17. Экспериментальные характеристики антенны при $f = 1550$ МГц

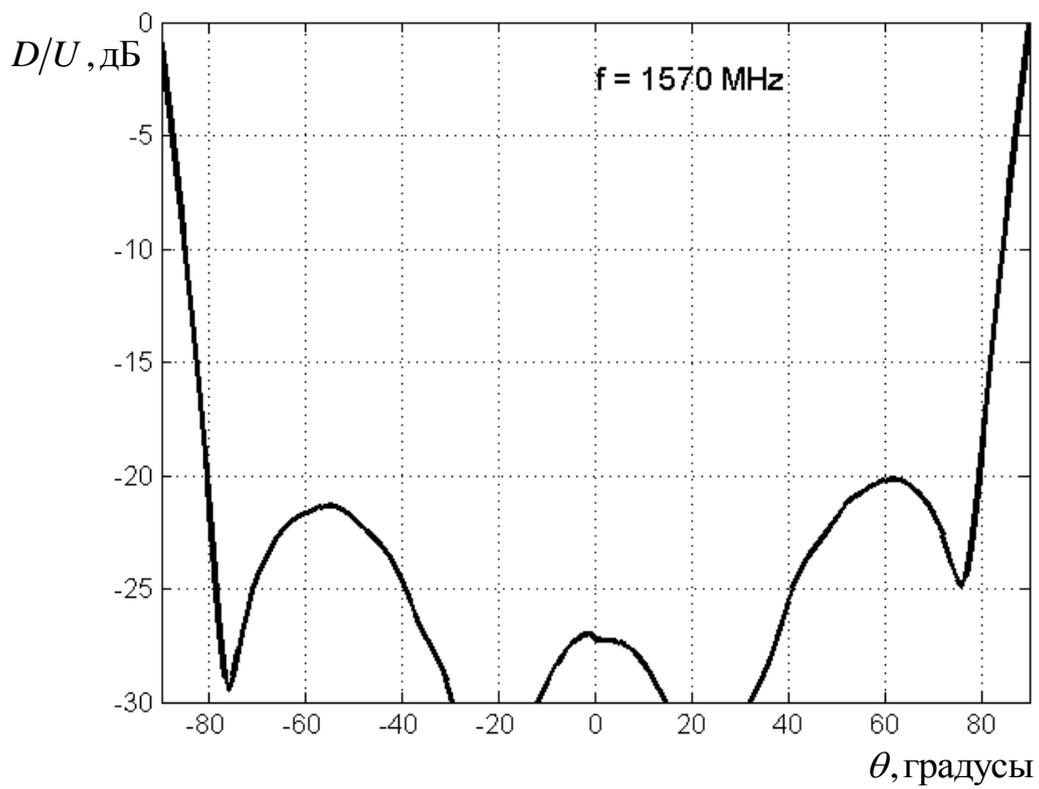
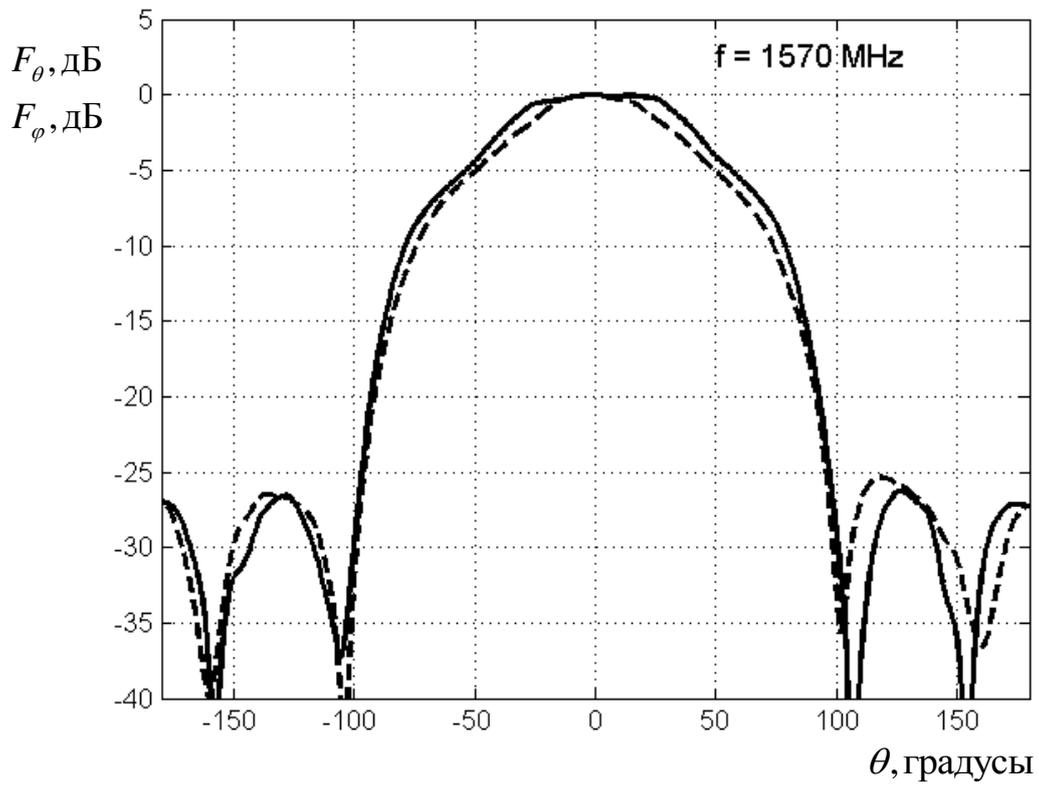


Рис. 1.18. Экспериментальные характеристики антенны при $f = 1570 \text{ МГц}$

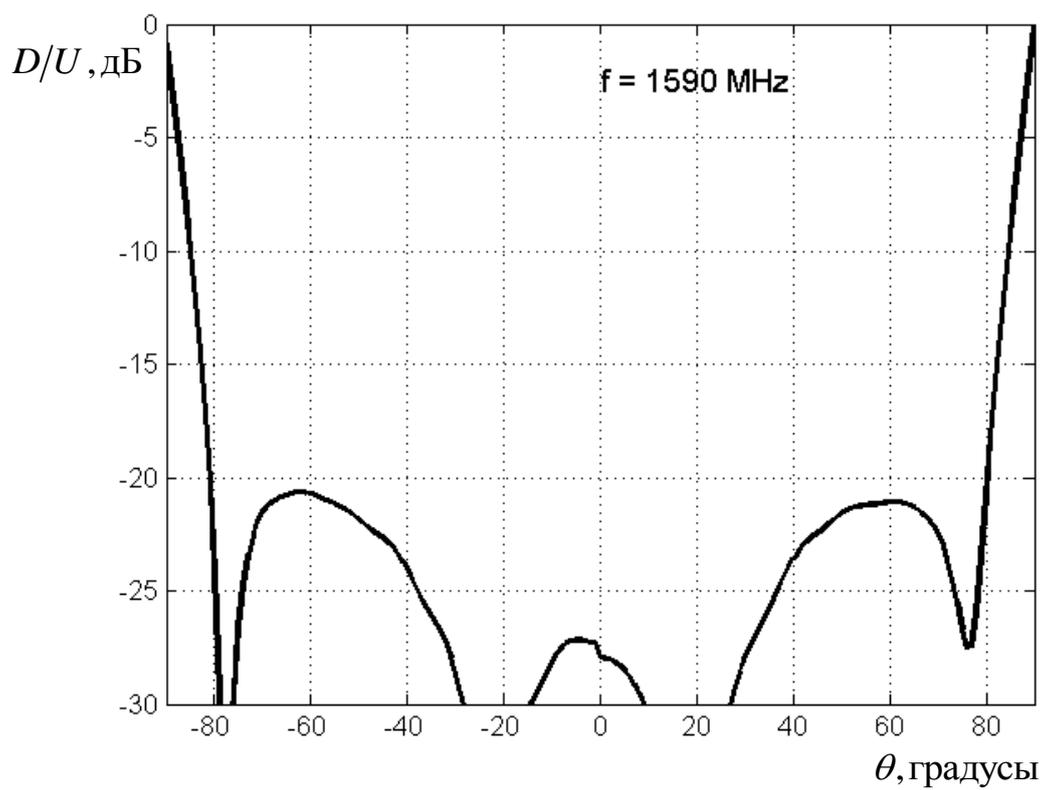
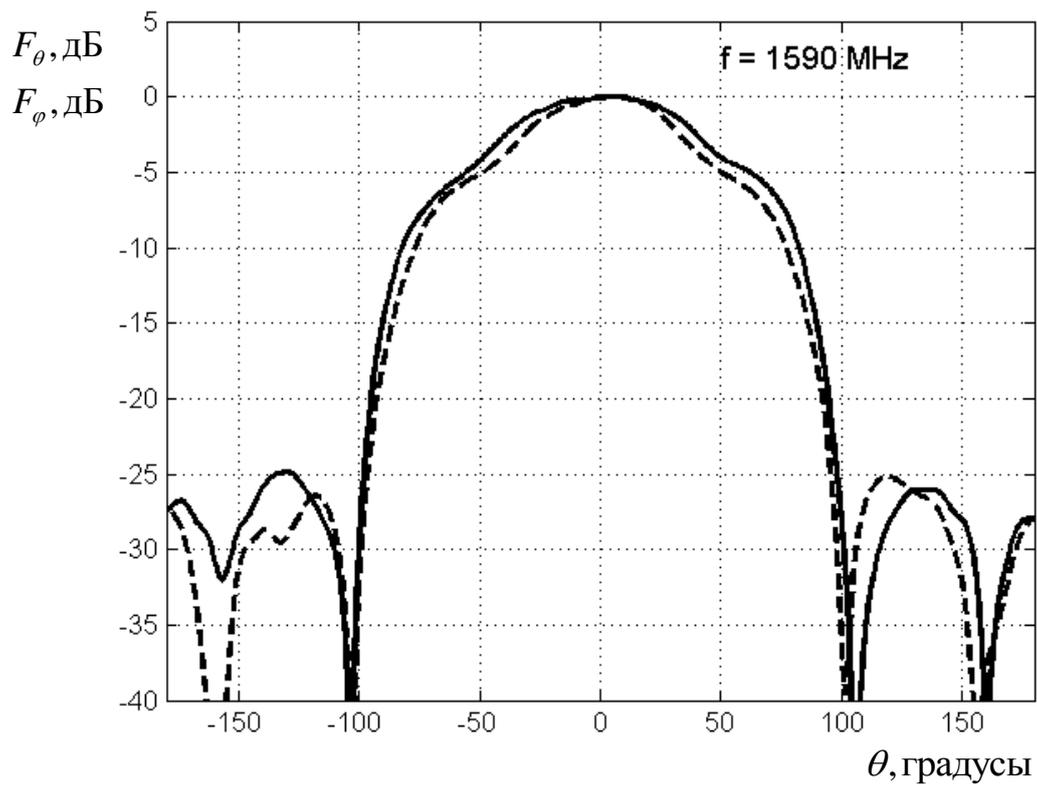


Рис. 1.19. Экспериментальные характеристики антенны при $f = 1590 \text{ МГц}$

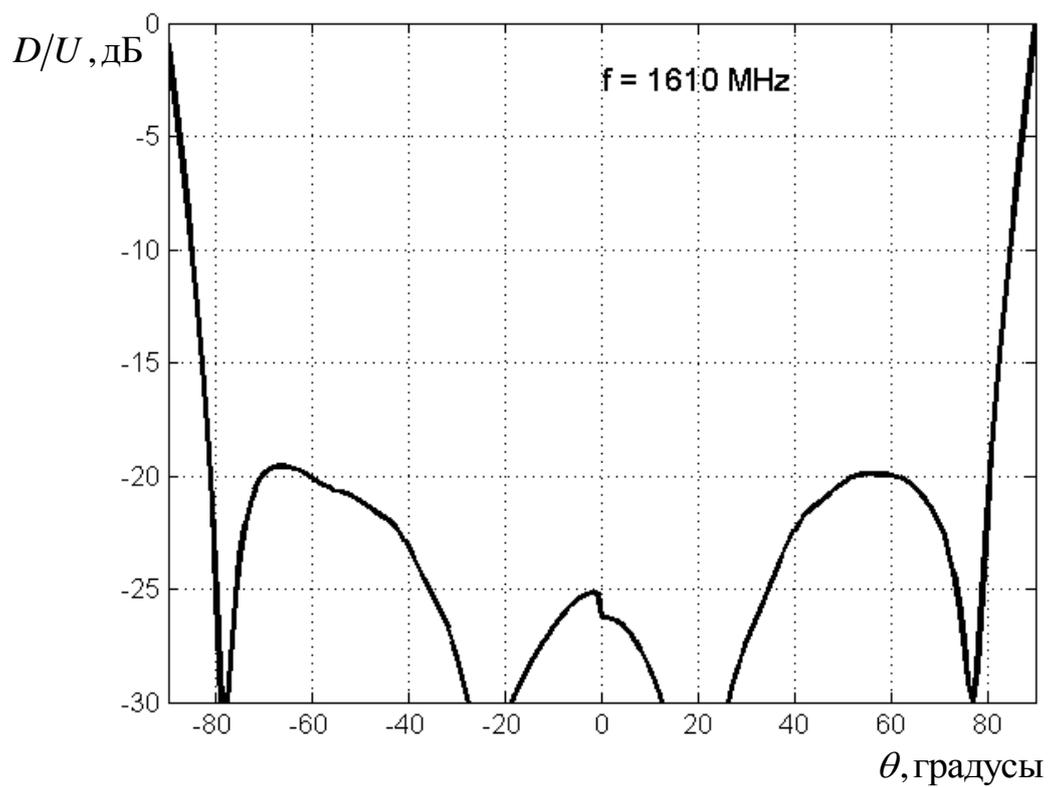
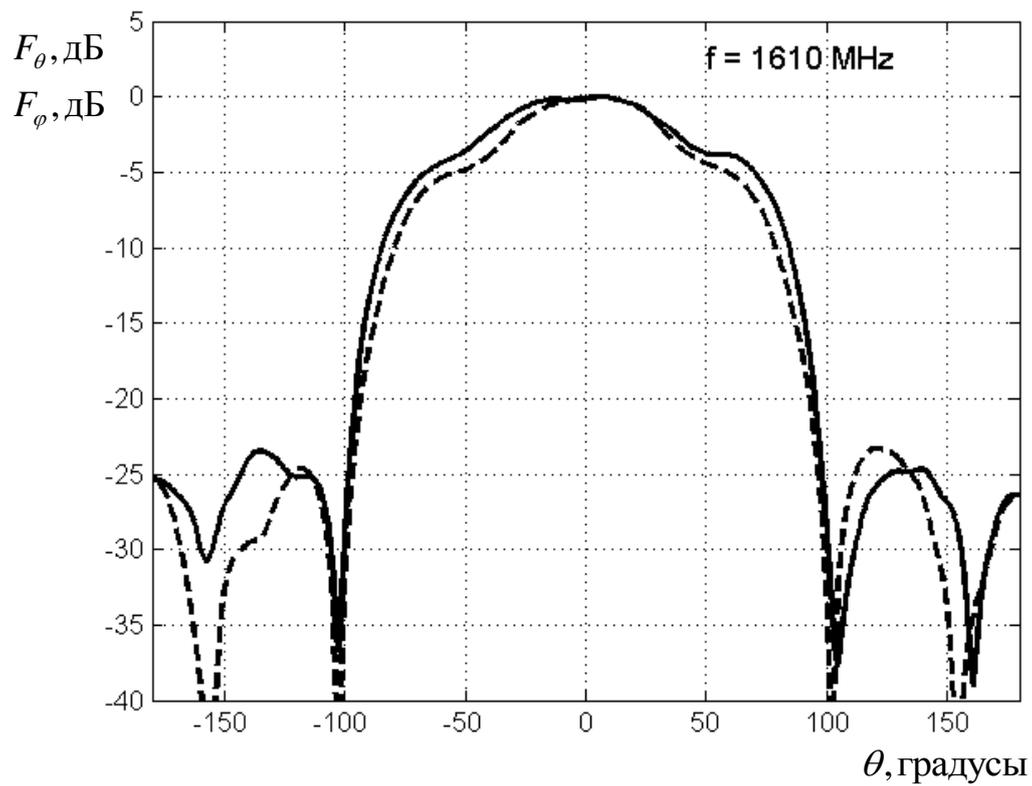


Рис. 1.20. Экспериментальные характеристики антенны при $f = 1610 \text{ МГц}$

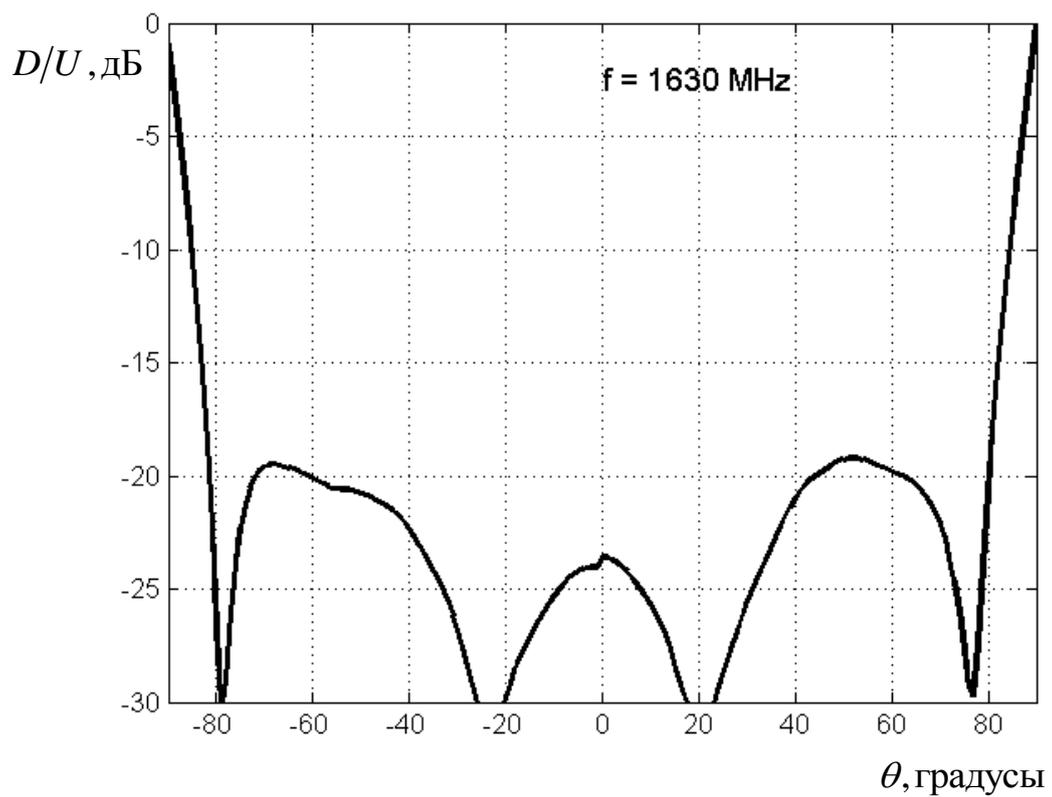
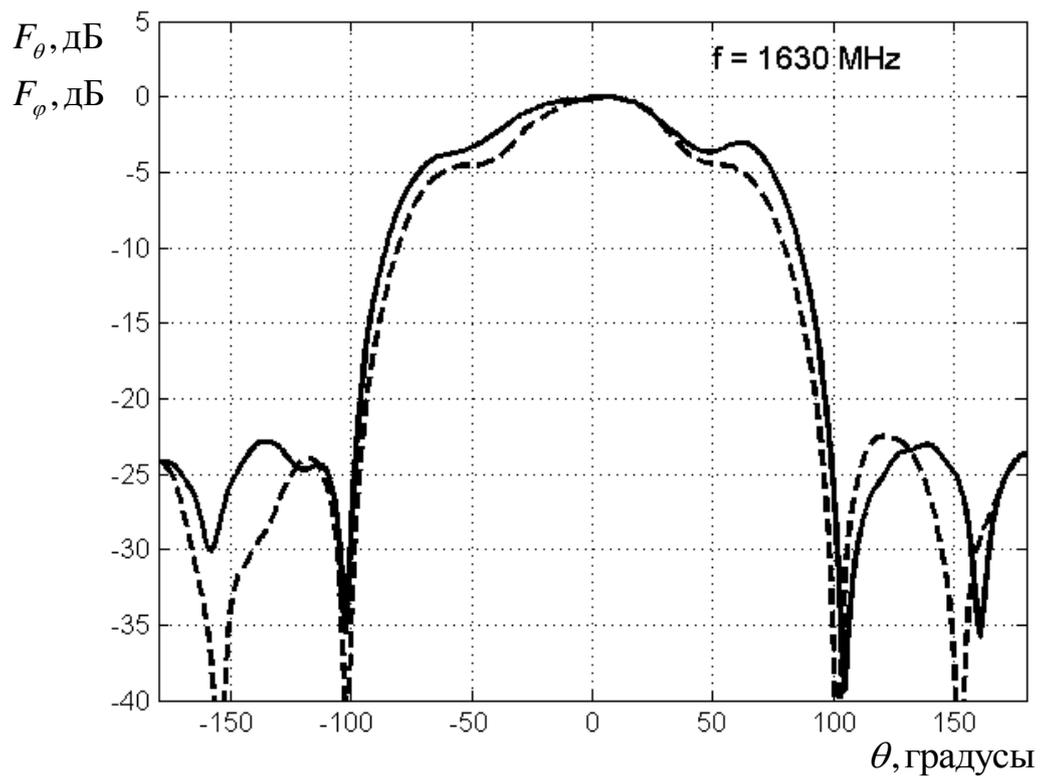


Рис. 1.21. Экспериментальные характеристики антенны при $f = 1630$ МГц

Как видно из рис. 1.17-1.21, данная спиральная антенна позволяет получить отношение низ/верх $DU < -20\text{дБ}$, начиная от 10 градусов, в полосе частот $f = 1550 \div 1630\text{МГц}$.

На рис.1.22 приведена измеренная частотная зависимость активной и реактивной части входного сопротивления Z_{ex} одного витка спирали в полосе частот $f = 1100 \div 1700\text{МГц}$.

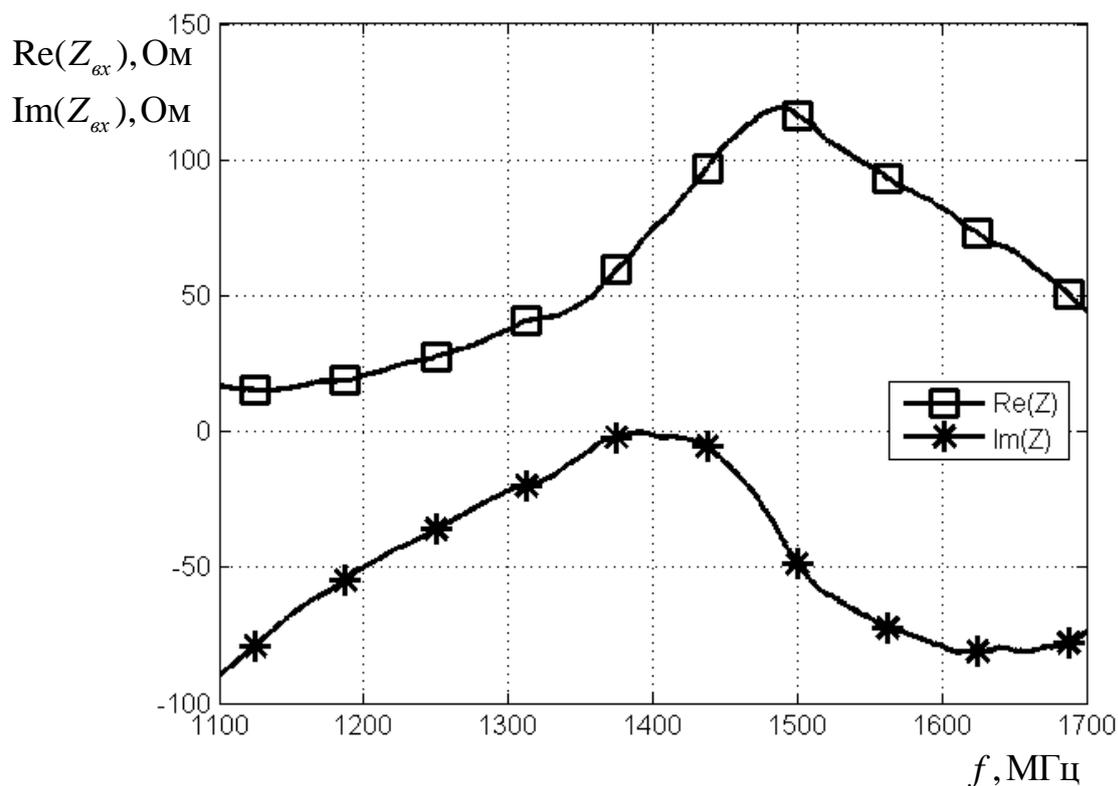


Рис. 1.22. Частотная зависимость входного сопротивления витка спирали

Из графика рис 1.22 видно, что в рабочей полосе $f = 1550 \div 1630\text{МГц}$ активная составляющая входного сопротивления составляет порядка $\text{Re}(Z_{ex})=100\text{Ом}$, а реактивная составляющая - $\text{Im}(Z_{ex})=-70\text{Ом}$. Такие величины не являются препятствием для достижения хорошего согласования антенны со входами системы деления мощности.

1.2.3. Результаты полевых испытаний в составе аппаратуры позиционирования

Для сравнения достижимой точности позиционирования в дифференциальном режиме в реальном времени двух спиральных антенн и двух стандартных антенн типа choke ring [2-4,6] были проведены полевые испытания на полигоне. Измерения проводились в одночастотном режиме. База векторов между двумя спиралями и двумя антеннами типа choke ring составляет порядка 150м.

На рис. 1.23 показана одна из двух одинаковых спиральных антенн, установленных на измерительных позициях испытательного полигона. Антенна имеет выход 1, который соединен с помощью коаксиального кабеля 2 со входом 3 геодезического приемника 4 типа Topcon NET-G3A. Приемник подключен к аккумулятору 5 с помощью проводов 6. Приемник осуществляет запись позиции с интервалом времени в 1 секунду.

На рис. 1.24, для примера, также показана одна из двух антенн типа choke ring, установленных на измерительных позициях испытательного полигона.

Для сравнения на рис. 1.25 для антенны типа choke ring приведены диаграммы направленности (F_θ - сплошная линия, F_φ - штриховая линия) и отношение низ/верх по полной мощности на частоте $f = 1570\text{МГц}$, взятые из [2]. Из рис. 1.25 видно, что отношение низ/верх для антенны choke ring достигает значения -20дБ только под углом 30 градусов, таким образом, стандартная антенна базовой станции обладает худшими по сравнению со спиралью свойствами подавления многолучевости под низкими углами.

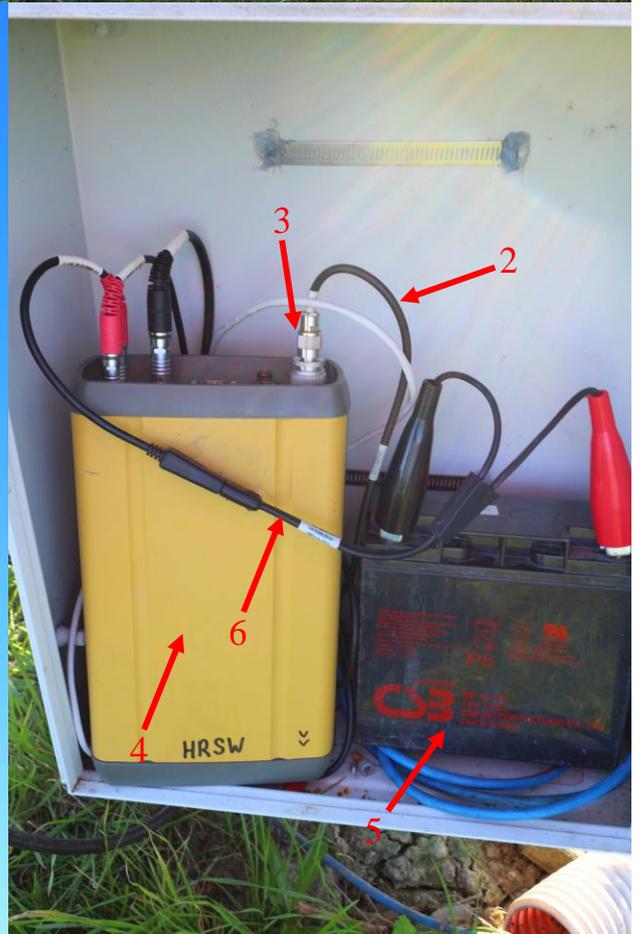


Рис. 1.23. Спиральная антенна на позиции испытательного полигона



Рис. 1.24. Антенна типа choke ring на позиции испытательного полигона

На рис. 1.26а,б представлены характеристики отношения сигнал/шум спутника GPS24 для антенны типа choke ring и спирали соответственно, на рис. 1.26в – зависимость угла возвышения этого спутника над горизонтом от времени. По горизонтальной оси на всех графиках отложено время в часах. Из сравнения рис. 1.26а,б видно, что характеристика отношения сигнал/шум для антенны типа choke ring при углах возвышения меньше 30 градусов имеет ярко выраженные осцилляции порядка 7дБ, связанные с интерференцией прямого сигнала спутника и сигнала, отраженного от поверхности земли. В то же время, у спиральной антенны эти осцилляции выражены значительно слабее.

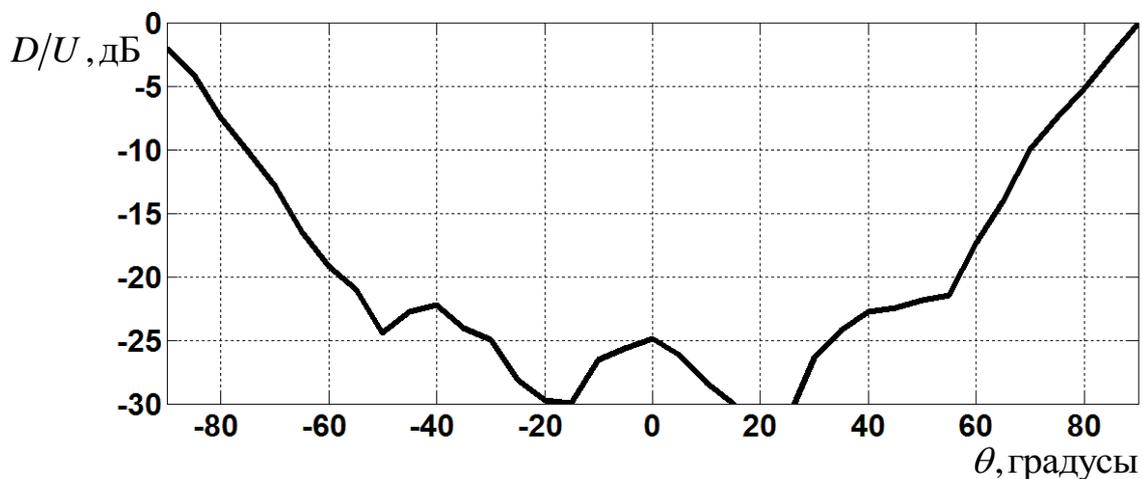
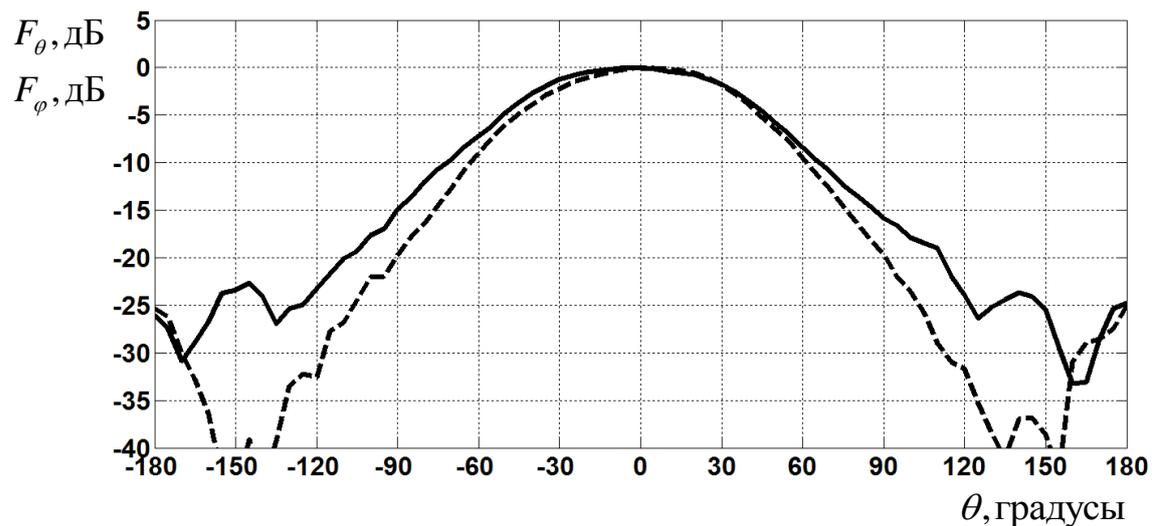


Рис. 1.25. Характеристики антенны типа choke ring

На рис. 1.27а,б приведены результаты вычисления ошибки позиционирования в режиме реального времени для двух антенн типа choke ring и двух спиральных антенн соответственно. Время измерений составляет 2 часа. Период записи приемников составляет 1 секунду. Толстой линией обозначено плавающее среднее с окном 100 секунд, чтобы выделить общий тренд ошибки позиционирования на фоне тепловых шумов аппаратуры. Для случая антенны типа choke ring, сглаженная кривая имеет характерный период ошибки многолучевости на открытой местности порядка 10-15 минут [2].

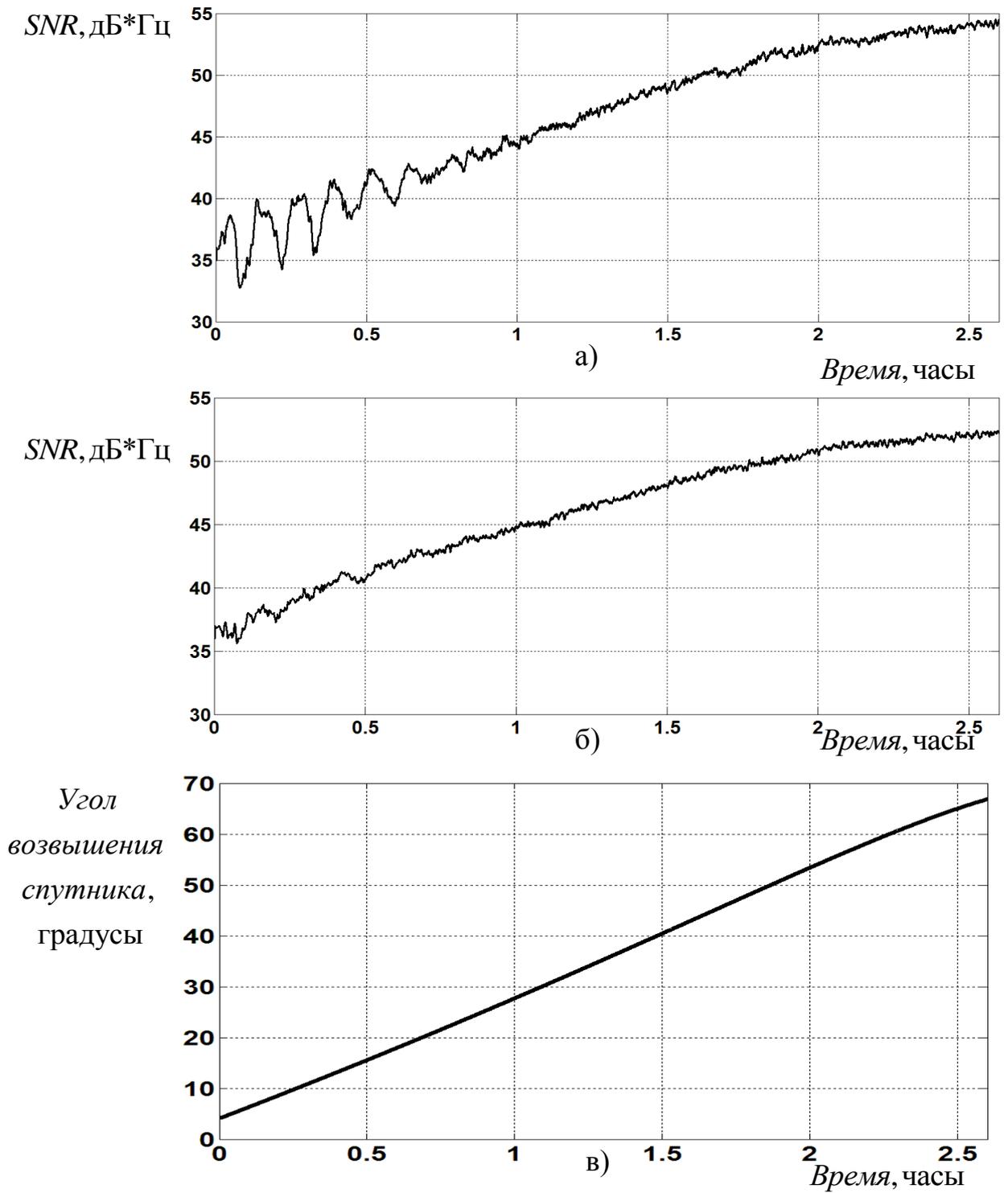


Рис. 1.26. Зависимость отношения сигнал/шум от угла возвышения спутника

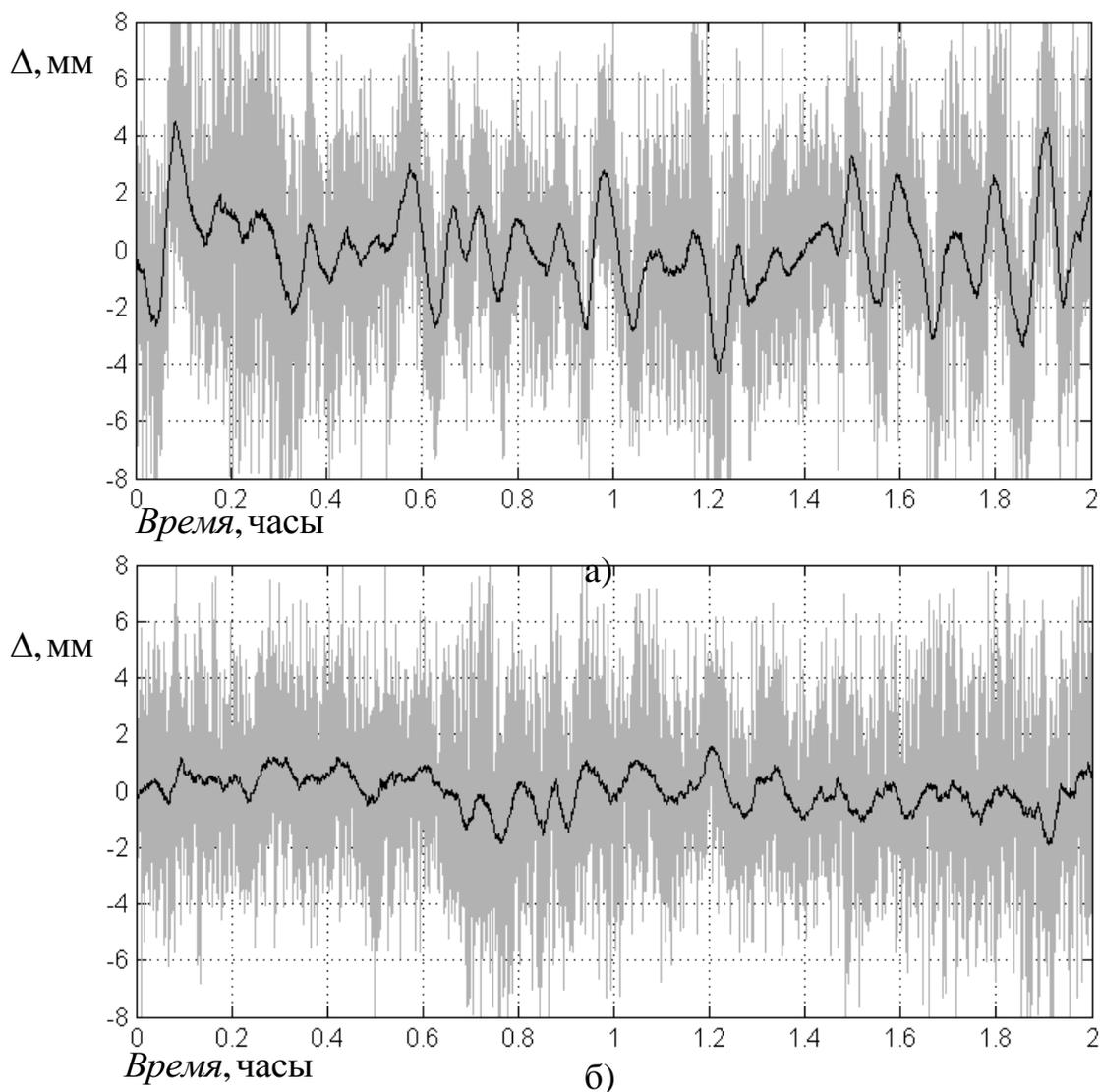


Рис. 1.27. Ошибка позиционирования в режиме реального времени

Из сравнения рис. 1.27а,б видно, что при сглаженном тепловом шуме пара спираль-спираль обеспечивает точность позиционирования (имеется ввиду разница между минимальным и максимальным значением сглаженной кривой), не выходящую за пределы $\pm 1.75\text{мм}$, в то время как пара антенн типа choke ring обеспечивает точность $\pm 4.4\text{мм}$, что наглядно показывает выигрыш за счет подавления многолучевости под скользящими углами для двух спиралей. Среднеквадратическое отклонение сглаженной кривой зависимости ошибки позиционирования от времени для спиральных антенн

составляет 0.63мм. Ошибка многолучевости для двух антенн типа choke ring соизмерима с фазовым шумом, вследствие чего сглаживание фазового шума не применяется в реальных системах. А для спиральных антенн ошибка многолучевости существенно меньше фазового шума, что позволяет существенно повысить точность позиционирования за при сглаживании быстро осциллирующего фазового шума. Возможности достижения таких субмиллиметровых ошибок многолучевости с помощью относительно компактных антенн в литературе ранее не публиковались. Такой режим обработки представляет интерес для практики.

1.3. Выводы

1. Разработана математическая модель антенны бегущей волны в виде плоскопараллельного волновода с полупрозрачными стенками, возбуждаемого Т-волной.
2. Показано, что для такого волновода можно получить отношение низ/верх от -20дБ до -35дБ начиная от 10 градусов от направления, касательного раскрыву. Длина полупрозрачной части волновода при этом составляет порядка 1.5λ .
3. Показано, что полоса частот, в которой отношение низ/верх не хуже -20дБ начиная от 10 градусов от направления, касательного раскрыву, составляет порядка 10% и коэффициент отражения при этом составляет порядка $5 \cdot 10^{-3}$.
4. Разработана четырехзаходная спиральная антенна, в проводники которой включены реактивные элементы.
5. Экспериментально показано, что такая спиральная антенна имеет ДН в верхней (рабочей) полусфере, близкую к равномерной и отношение

низ/верх не хуже -20дБ начиная от углов в 10 градусов от направления на горизонт.

6. С помощью такой антенны получена среднеквадратичная ошибка позиционирования по сигналам ГНСС в реальном времени, составляющая 0.63мм (с учетом сглаживания тепловых шумов за время порядка 1 минуты).

ГЛАВА 2. Вертикальные экраны в виде ребер с полупрозрачными окончаниями для антенн позиционирования

2.1. Возбуждение полуплоскости с полупрозрачным окончанием слабонаправленным источником

Рассмотрим задачу дифракции источника Н-поляризации на полуплоскости с полупрозрачным окончанием (рис. 2.1). Введем систему координат, показанную на рисунке. На расстоянии от источника $a/2$ по оси x расположена полуплоскость протяженная по оси z от 0 до $-\infty$. Угол наблюдения θ отсчитывается от оси z в направлении оси x .

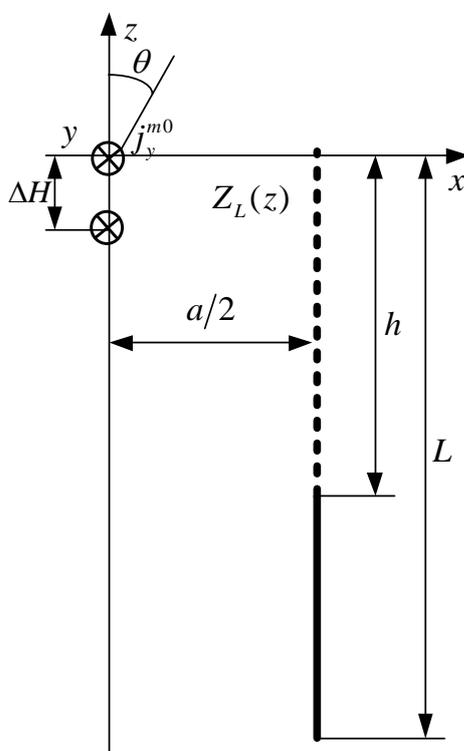


Рис. 2.1. Геометрия модели полуплоскости

Предполагается, что источник обладает направленностью по отношению к оси z так, что в области $|\theta| \leq \pi/2$ ДН источника близка к равномерной, а в области $\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$ излучение подавлено. Это

соответствует типичным ДН антенн позиционирования. Следуя подходу статьи [45], будем моделировать такой источник в виде двух нитей магнитного тока, расстояние между которыми равно ΔH и разность начальных фаз нитей магнитного тока выбрана таким образом, чтобы обеспечить ноль ДН в направлении $\theta = \pi$. Таким образом, источник описывается следующим выражением

$$\mathbf{j}^{\text{m}0} = \delta(x)\mathbf{y}_0 \left(\delta(z) + \delta(z + \Delta H)e^{-i(k\Delta H + \pi)} \right), \quad (2.1.1)$$

где ΔH - расстояние по оси z между двумя нитями тока; $\delta(x)$ - дельта функция Дирака; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число свободного пространства; λ - длина волны в свободном пространстве; \mathbf{y}_0 - единичный вектор в направлении оси y в системе координат, показанной на рис. 2.1.

При значениях $\Delta H \rightarrow 0$ ДН источника (2.1.1) в свободном пространстве имеет вид кардиоиды с нулем в направлении $\theta = 180$ градусов и показана на рис. 2.2.

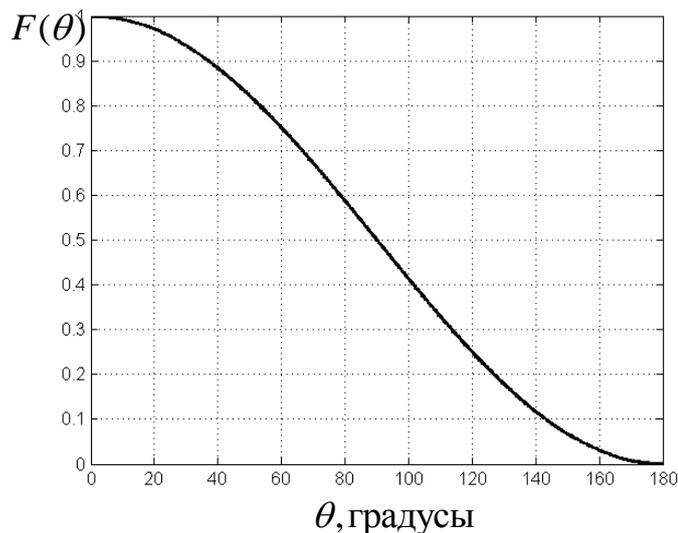


Рис. 2.2. Диаграмма направленности источника

На окончании полуплоскости имеется область длиной h , на которой выполняются граничные условия (1.1.1). Импеданс в этой области предполагается переменным. Функцию распределения импеданса обозначим Z_L . На оставшейся части полуплоскости выполняется граничное условие равенства нулю касательной составляющей электрического поля $E_\tau = 0$.

Перепишем граничные условия (1.1.1) в более удобном виде.

$$\begin{cases} (H_y^+ - H_y^-)Z_L = j_z Z_L = E_z^+ \\ E_z^+ = E_z^- \end{cases}, \quad (2.1.2)$$

где знаки “+” и “-” означают стремление к поверхности экрана, со стороны $x > a/2$ и $x < a/2$, соответственно. В выражении (2.1.2) H_y^\pm - касательная к экрану составляющая полного магнитного поля; E_z^\pm - касательная к экрану составляющая полного электрического поля; j_z - поверхностная плотность электрического тока, текущего по экрану.

Суммарное поле данной системы состоит из поля источника (2.1.1) и поля вторичного тока на экране \mathbf{j}^e . Задача нахождения тока на экране может быть сведена к решению интегрального уравнения вида [27].

$$\int_{-\infty}^0 \mathbf{G} \cdot \mathbf{j}^e dz + \mathbf{E}^0(\mathbf{j}^{m0}) = Z_L \mathbf{j}^e, \quad \text{где} \quad (2.1.3)$$

$\mathbf{E}^0(\mathbf{j}^{m0})$ - поле стороннего источника, \mathbf{G} - импеданс Грина [42].

Уравнение (2.1.3) решается численно методом моментов с разложением тока по базису конечных элементов, аналогично [27,28]. При этом полуплоскость заменяется на конечный экран с длиной L , достаточной для того, чтобы ток на экране в области $z = -L$ был значительно меньше тока на экране в области $z = 0$.

Представим ток, возбуждаемый на экране, как разложение по треугольным базисным функциям $\psi_z^p(z)$ с амплитудами C^p (2.1.4)

$$j_z^e = \sum_{p=1}^P C^p \psi_z^p(z), \quad (2.1.4)$$

$$\text{где } \psi_z^p(z) = \Delta_{2l}(z - z_p), \quad x = a/2; \quad (2.1.5)$$

$$\Delta_{2l}(z - z_p) = \begin{cases} \frac{1}{l}(z - z_p + l), & z_p - l < z < z_p \\ \frac{1}{l}(-z + z_p + l), & z_p < z < z_p + l \end{cases} \quad - \text{треугольная функция, с носителем } 2l \text{ и с центром в точке } z_p$$

Аналогично сказанному в Главе 1, интегральное уравнение (2.1.3) будем решать методом моментов. Для этого проинтегрируем (2.1.3) с базисной функцией ψ_z^q при $q = 1, 2, \dots, P$, получим систему из P уравнений с неизвестными C^p

$$\begin{cases} \int_{z_1-l}^{z_1+l} \psi_z^1 \sum_{p=1}^P C^p (E_z(\psi_z^p) - \psi_z^p Z_L) dz = - \int_{z_1-l}^{z_1+l} \psi_z^1 E_z(\mathbf{j}^{m0}) dz \\ \int_{z_2-l}^{z_2+l} \psi_z^2 \sum_{p=1}^P C^p (E_z(\psi_z^p) - \psi_z^p Z_L) dz = - \int_{z_2-l}^{z_2+l} \psi_z^2 E_z(\mathbf{j}^{m0}) dz \\ \vdots \\ \int_{z_p-l}^{z_p+l} \psi_z^p \sum_{p=1}^P C^p (E_z(\psi_z^p) - \psi_z^p Z_L) dz = - \int_{z_p-l}^{z_p+l} \psi_z^p E_z(\mathbf{j}^{m0}) dz \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Таким образом, для нахождения столбца амплитуд токов C необходимо решить систему уравнений

$$(W + WZ)C = B, \quad (2.1.7)$$

где W - матрица взаимных сопротивлений между базисными функциями тока экрана, расположенного на расстоянии $a/2$ от источника; WZ - матрица, обусловленная конечным импедансом экрана, расположенного на расстоянии $a/2$ от источника; B - столбец возбуждения (2.1.7); C - столбец амплитуд базисных функций электрического тока

Элементы матрицы $W^{q,p}$ определяется следующим выражением

$$W^{q,p} = \frac{8i}{\pi} \frac{W_0}{k} \int_{u=0}^{\infty} \frac{\sin^4 \frac{ul}{2}}{u^4} \sqrt{u^2 - k^2} \cos u(z_q - z_p) du, \quad (2.1.8)$$

где $W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ - волновое сопротивление свободного пространства; ε_0 , μ_0 - диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства. Вывод этого выражения приведен в Приложении 1.

Представим распределение импеданса по экрану, как разложение по треугольным конечным элементам:

$$Z_L(z) = \sum_{p=1}^P Z_L(z_p) \Delta_{2l}(z - z_p) \quad (2.1.9)$$

Подставим (2.1.9) в (2.1.6) и выпишем отдельно слагаемое элементов матрицы взаимных сопротивлений, обусловленное импедансом Z_L , также, как сделано в [27,28]

$$WZ^{q,p} = - \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_z^q(z) Z_L(z) \psi_z^p(z) dz = - \begin{cases} \frac{l}{12} Z_L(z_q) + \frac{l}{12} Z_L(z_{q+1}) & p = q+1 \\ \frac{l}{12} Z_L(z_{q-1}) + l Z_L(z_q) + \frac{l}{12} Z_L(z_{q+1}) & p = q \\ \frac{l}{12} Z_L(z_q) + \frac{l}{12} Z_L(z_{q-1}) & p = q-1 \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Элементы столбца правой части (1.1.6) определяются выражением

$$\begin{aligned}
 B^q = & i \frac{1}{4} \int_{z_q-l}^{z_q+l} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + z^2}} H_1^{(2)} \left(\sqrt{(a/2)^2 + z^2} \right) \Delta_{2l}(z - z_q) dz + \\
 & + i \frac{1}{4} e^{-i(k\Delta H + \pi)} \int_{z_q-l}^{z_q+l} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (z + \Delta H)^2}} H_1^{(2)} \left(\sqrt{(a/2)^2 + (z + \Delta H)^2} \right) \Delta_{2l}(z - z_q) dz
 \end{aligned}
 \tag{2.1.11}$$

Здесь $H_1^{(2)}(\alpha)$ - функция Ганкеля 2-го рода 1-го порядка. Вывод этого выражения приведен в Приложении 1.

По формулам (2.1.6), (2.1.8), (2.1.10), (2.1.11) были составлены вычислительные программы. Рассмотрим результаты расчетов.

Анализ показал, что общая длина экрана L может быть взята равной 40λ . При этом, вклад дифракции поля на нижнем (нерабочем) ребре экрана мал. Этот вклад приводит к незначительным осцилляциям ДН, заметным на графиках ниже. Также было установлено, что выбор носителя $2l = 0.05\lambda$ достаточен для обеспечения сходимости результатов с графической точностью.

На рис. 2.5-2.10 приведены диаграммы направленности, отношение низ/верх, которое вычисляется по формуле (В 1) для расстояний $a/2 = 0.75\lambda$, $a/2 = 2.25\lambda$, $a/2 = 3.75\lambda$, $a/2 = 5.25\lambda$, $a/2 = 6.75\lambda$, $a/2 = 8.25\lambda$, соответственно. На рис. 2.5, для примера, также показано амплитудное и фазовое распределение тока на экране. Кривые 1 на графиках соответствуют идеально проводящей полуплоскости, кривые 2, 3 соответствуют распределениям импеданса, показанных на рис. 2.3-2.4.

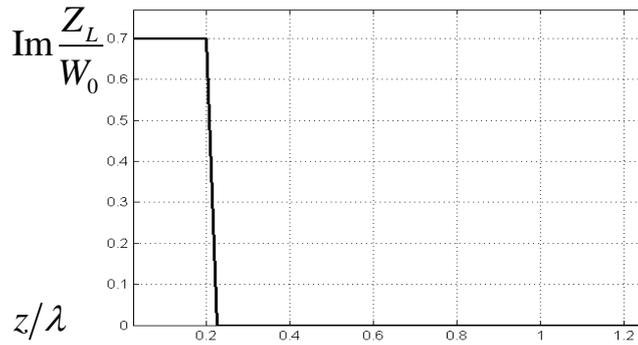


Рис. 2.3. Распределение импеданса

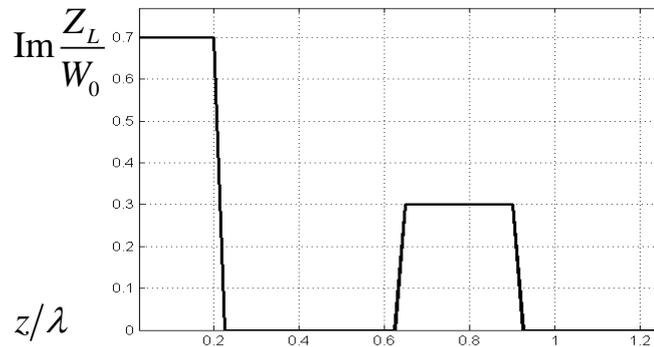


Рис. 2.4. Распределение импеданса

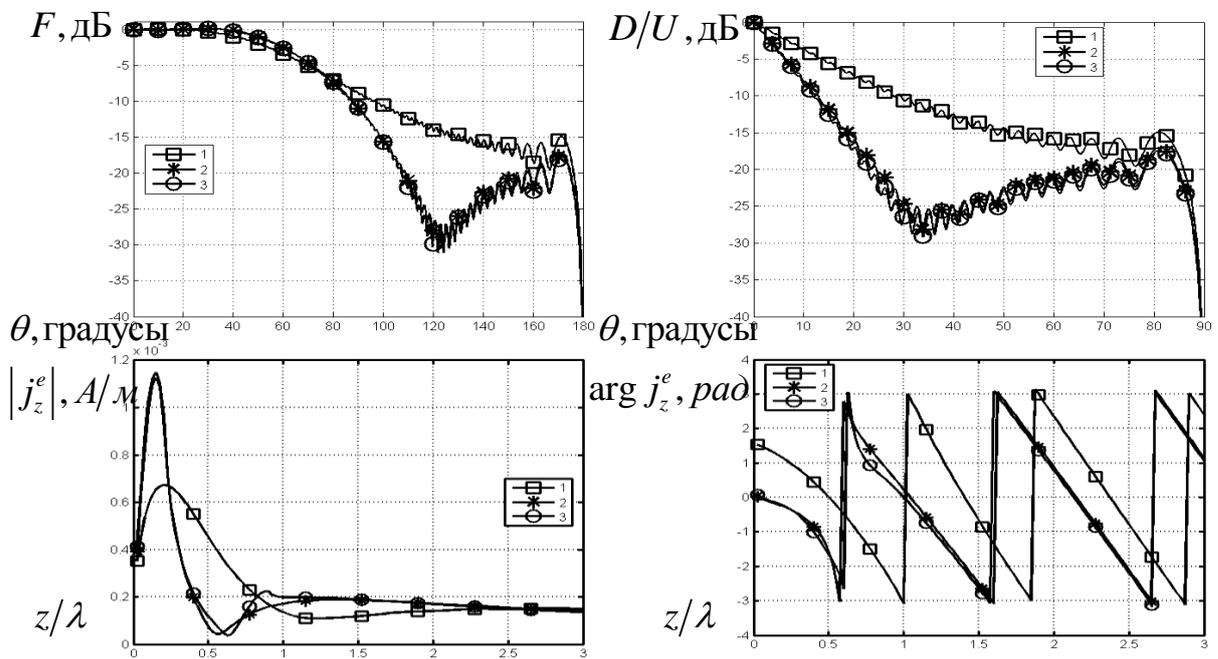


Рис. 2.5. Результаты расчета для случая $a/2 = 0.75\lambda$

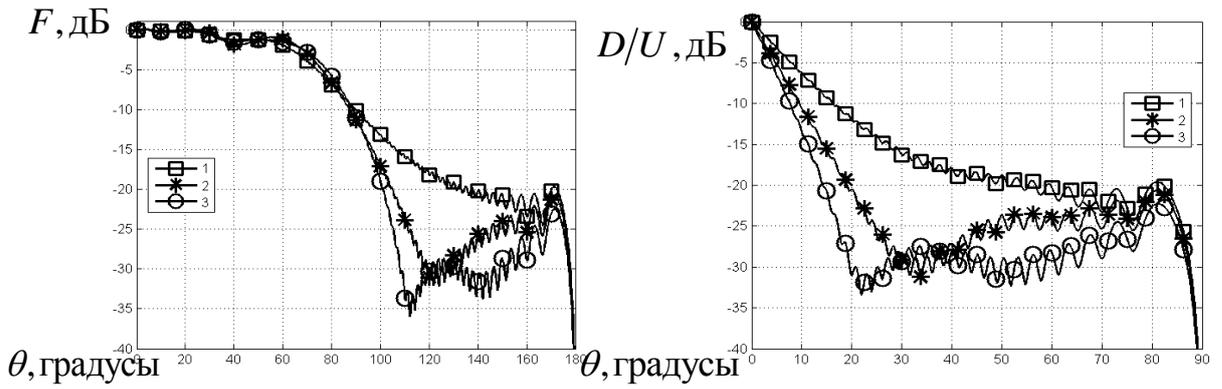


Рис. 2.6. Результаты расчета для случая $a/2 = 2.25\lambda$

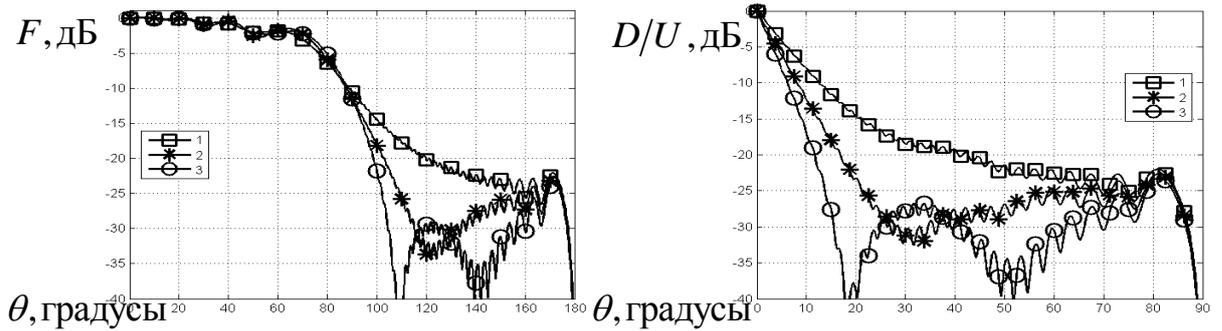


Рис. 2.7. Результаты расчета для случая $a/2 = 3.75\lambda$

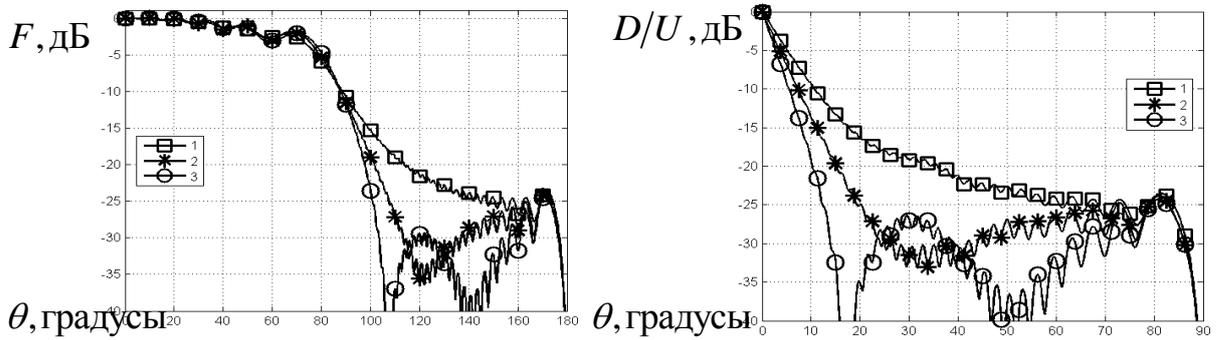


Рис. 2.8. Результаты расчета для случая $a/2 = 5.25\lambda$

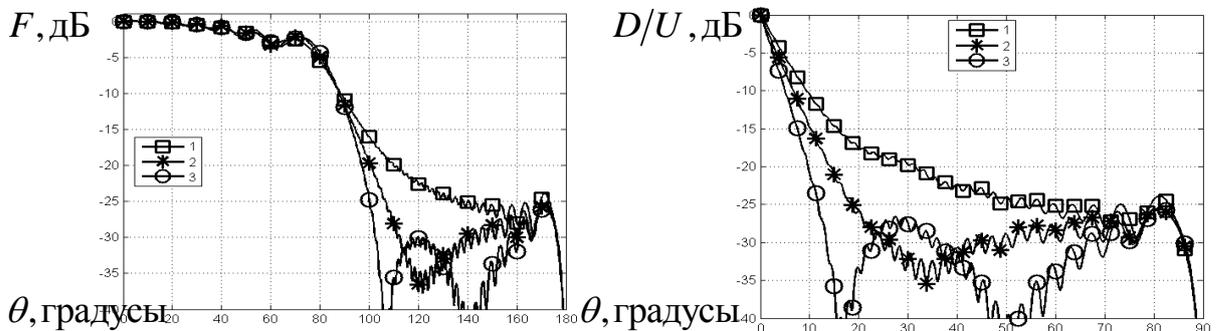


Рис. 2.9. Результаты расчета для случая $a/2 = 6.75\lambda$

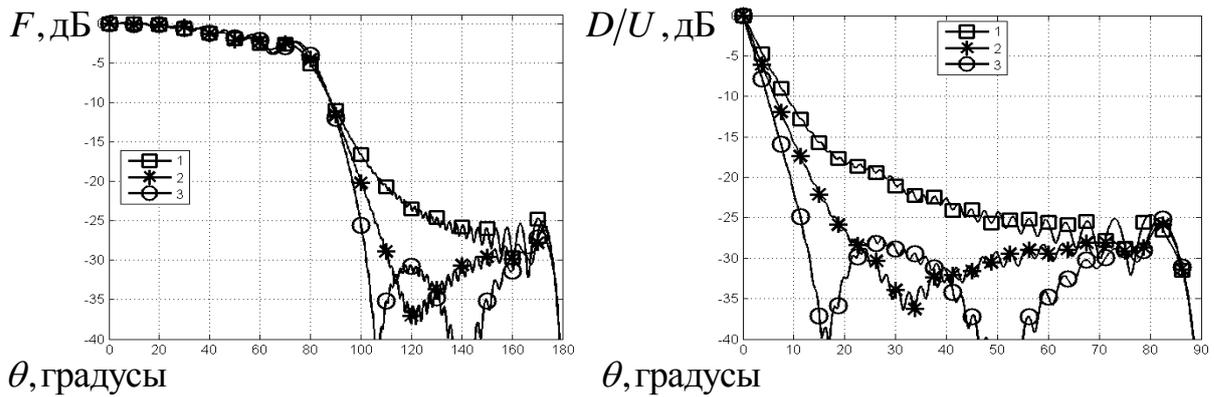


Рис. 2.10. Результаты расчета для случая $a/2 = 8.25\lambda$

Из графиков для амплитудного и фазового распределения тока на экране, показанных на рис. 2.5, видно, что введение полупрозрачного окончания приводит к формированию вблизи ребра области с высокой плотностью тока, которая примерно в 2 раза больше по амплитуде и в 2 раза уже по протяженности, чем для идеально проводящей полуплоскости. Фаза тока вблизи ребра при введении полупрозрачного окончания смещается на величину примерно $\pi/2$, относительно фазы тока на идеально проводящей полуплоскости. На больших расстояниях от ребра фаза тока на полуплоскости изменяется со скоростью света. Из сравнения рис. 2.5-2.10 видно, что распределение импеданса, показанное на рис. 2.3, дает более быстрый спад ДН в области полутени по сравнению с идеально проводящей полуплоскостью, как в случае малых, так и больших расстояний до источника. Так, например, для полуплоскости, расположенной на расстоянии $a/2 = 0.75\lambda$ от источника с распределением импеданса, показанном на рис. 1.3, отношение низ/верх достигает уровня -15дБ при угле возвышения $\theta = 18$ градусов, а при идеально проводящей полуплоскости, расположенной на том же расстоянии от источника, тот же уровень отношения низ/верх достигается при угле возвышения $\theta = 50^\circ$. Распределение импеданса (рис. 2.4) по сравнению с распределением импеданса (рис. 2.3) не дает выигрыша в

отношении низ/верх при малых расстояниях от полуплоскости до источника (при $a/2 < 0.75\lambda$), как это видно из рис. 2.5. Однако, при расстояниях от полуплоскости до источника $8.25\lambda > a/2 > 2.25\lambda$ распределение импеданса (рис. 2.4) обеспечивает более быстрое уменьшение отношения низ/верх по сравнению с распределением импеданса, показанном на рис. 2.3. Так, например, для полуплоскости, расположенной на расстоянии $a/2 = 8.25\lambda$ от источника с распределением импеданса, показанном на рис. 2.4, отношение низ/верх достигает уровня -15дБ при угле возвышения 7 градусов. А для полуплоскости с распределением импеданса, показанном на рис. 2.3, расположенной на том же расстоянии от источника, тот же уровень отношения низ/верх достигается при угле возвышения 10 градусов. При дальнейшем увеличении расстояния между источником и полуплоскостью ДН асимптотически стремится к предельному случаю падения плоской волны на полуплоскость.

Рассмотрим теперь случай возбуждения полем источника Е-поляризации. Геометрия задачи аналогична случаю возбуждения полем источника Н-поляризации, показанному на рис. 2.1. Отличие состоит в выборе источника в виде двух нитей электрического тока.

$$\mathbf{j}^{e0} = \delta(x)\mathbf{y}_0 \left(\delta(z) + \delta(z + \Delta H)e^{-i(k\Delta H + \pi)} \right) \quad (2.1.12)$$

При решении интегрального уравнения (1.1.3) методом моментов, ток на полуплоскости, в отличие от п. 1.1.1, представим в виде суммы прямоугольных базисных функций

$$j_y^e = \sum_{p=1}^P C^p \xi_y^p(z), \quad (2.1.13)$$

$$\text{где } \xi_y^p(z) = \text{rect}_l(z - z_p), \text{ при } x = a/2; \quad (2.1.14)$$

$$\text{rect}_l(z - z_p) = \begin{cases} 1, & z_p - l/2 < z < z_p + l/2 \\ 0, & z < z_p - l/2, z > z_p + l/2 \end{cases}$$
 - постоянная функция с носителем l и с центром в точке z_p

В отличие от рассмотренного ранее случая Н-поляризации, в данном случае можно выбрать кусочно-постоянный базис. Это объясняется тем, что для Н-поляризации существует условие равенства нулю тока на ребре [46]. Поэтому, выбор треугольной базисной функции обеспечивает конечную собственную мощность. В рассматриваемом случае для E -поляризации ток параллелен ребру, поэтому конечность собственной мощности будет обеспечиваться при выборе более простой – кусочно-постоянной аппроксимации. Полный вывод соотношений математической модели приведен в Приложении 3.

По формулам (П 3.5), (П 3.8), (П 3.19), (П 3.21) из Приложения 3 были составлены вычислительные программы. Рассмотрим результаты расчета. Расчет показал, что длина экрана $L = 20\lambda$ является достаточной для того, чтобы дифракцией на втором ребре можно было пренебречь, а также, что размер носителя конечного элемента $l = 0.025\lambda$ обеспечивает сходимость с графической точностью. На рис. 2.11-2.12 приведены диаграммы направленности, отношение низ/верх, амплитудно-фазовое распределение тока и распределение импеданса для полуплоскости $Z_L = 0$ (кривая 1) и распределении реактивного импеданса, обеспечивающего максимальную крутизну спада отношения низ/верх (кривая 2) для расстояний $a/2 = 0.75\lambda$, $a/2 = 2.25\lambda$, $a/2 = 3.75\lambda$, $a/2 = 5.25\lambda$, $a/2 = 6.75\lambda$, $a/2 = 8.25\lambda$ соответственно, а также сами распределения импеданса.

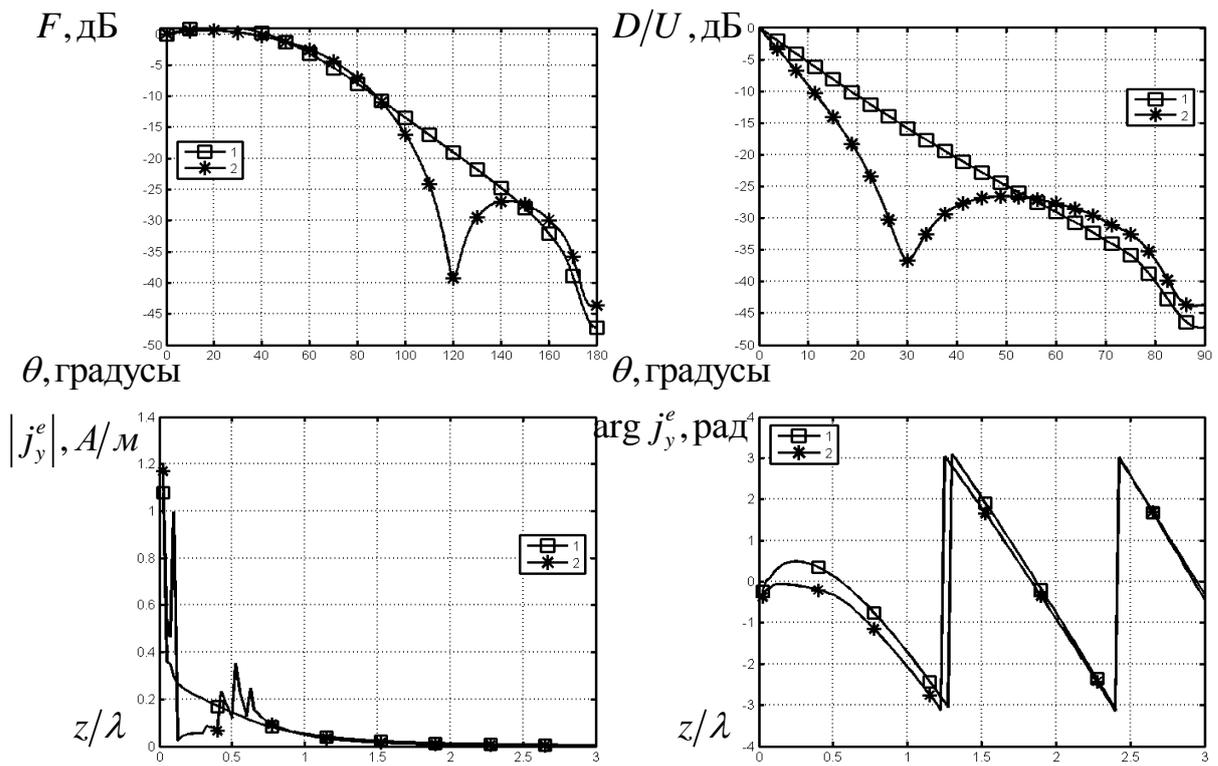


Рис. 2.11а. Результаты расчета для случая $a/2 = 0.75\lambda$

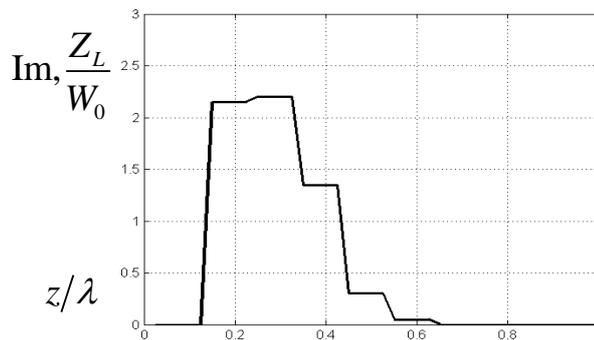


Рис. 2.11б. Распределение импеданса для случая $a/2 = 0.75\lambda$

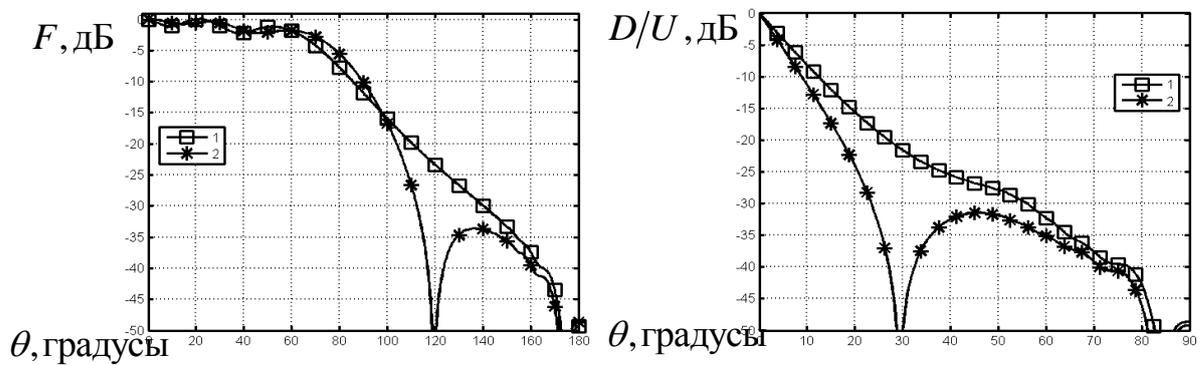


Рис. 2.12а. Результаты расчета для случая $a/2 = 2.25\lambda$

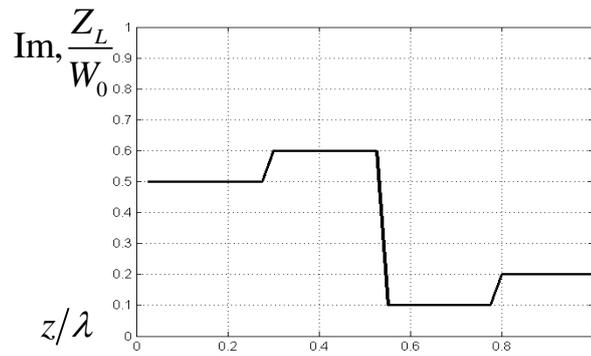


Рис. 2.12б. Распределение импеданса для случая $a/2 = 2.25\lambda$

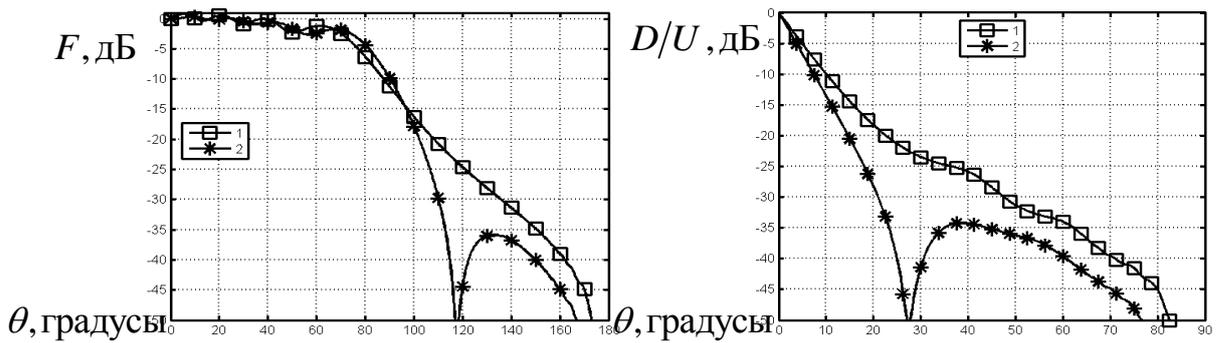


Рис. 2.13а. Результаты расчета для случая $a/2 = 3.75\lambda$

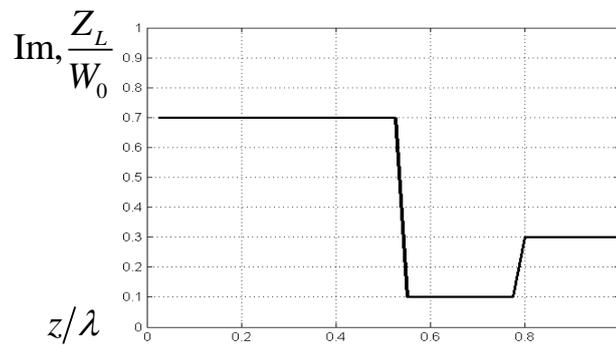


Рис. 2.13б. Распределение импеданса для случая $a/2 = 3.75\lambda$

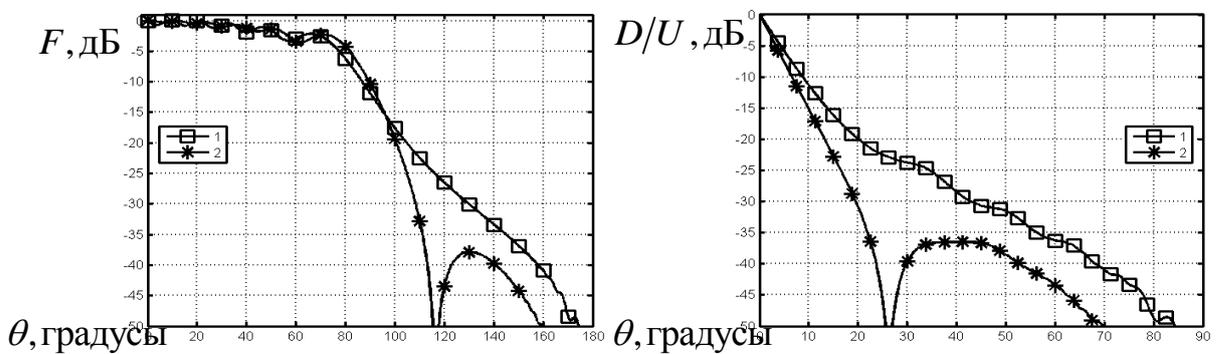


Рис. 2.14а. Результаты расчета для случая $a/2 = 5.25\lambda$

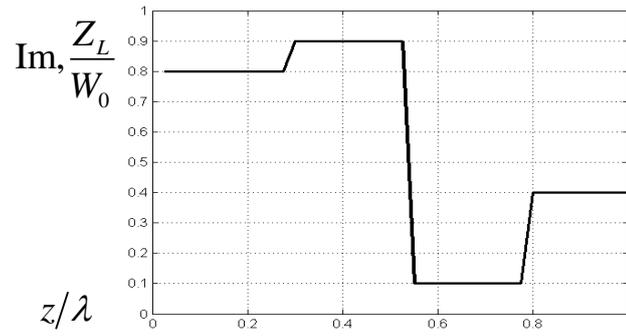


Рис. 2.146. Распределение импеданса для случая $a/2 = 5.25\lambda$

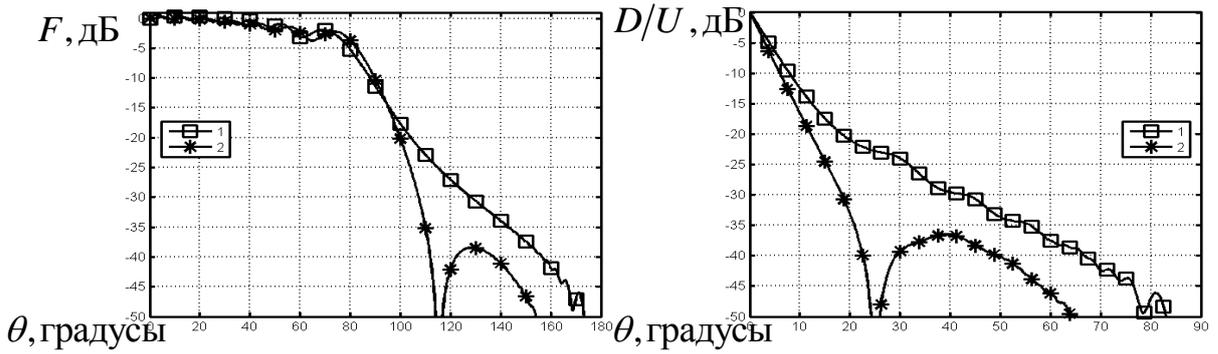


Рис. 2.15а. Результаты расчета для случая $a/2 = 6.75\lambda$

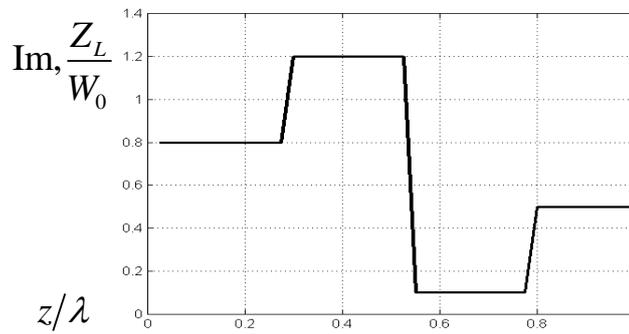


Рис. 2.15б. Распределение импеданса для случая $a/2 = 6.75\lambda$

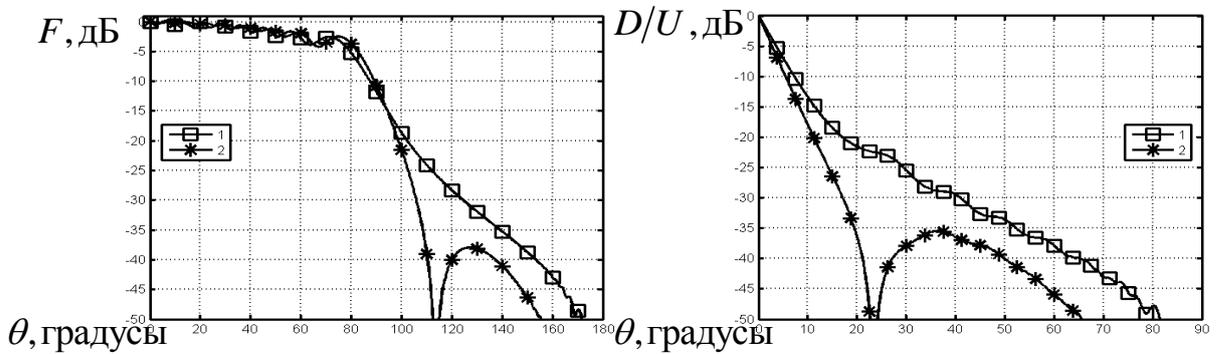


Рис. 2.16а. Результаты расчета для случая $a/2 = 8.25\lambda$

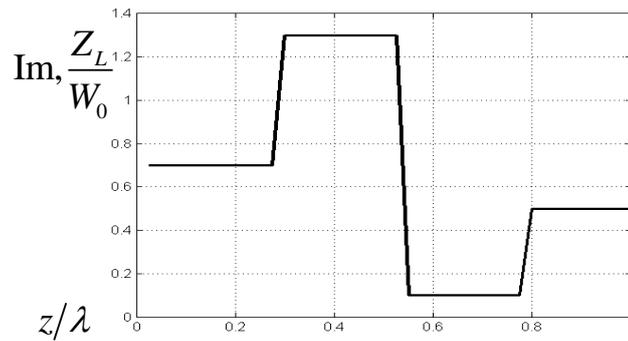


Рис. 2.16б. Распределение импеданса для случая $a/2 = 8.25\lambda$

В отличие от случая Н-поляризации, при Е-поляризации, как видно из рис. 2.11а, при скачкообразном изменении импеданса, амплитуда тока на экране также испытывает скачки. При этом фазовое распределение тока на экране изменяется менее заметно. Из графиков рис. 2.11-2.16 видно, что применение полуплоскости с полупрозрачным окончанием с переменным распределением импеданса позволяет получить более быстрый спад ДН в области полутени по сравнению с идеально проводящей полуплоскостью при различных значениях расстояния от источника до полуплоскости. Так, например, для полуплоскости, расположенной на расстоянии $a/2 = 0.75\lambda$ от источника с распределением импеданса, показанном на рис. 2.11б, отношение низ/верх достигает уровня -15дБ при угле возвышения 15 градусов, а для идеально проводящей полуплоскости, расположенной на том же расстоянии от источника, тот же уровень отношения низ/верх достигается при значении угла возвышения 49 градусов. Увеличение расстояния от источника до полуплоскости приводит к уменьшению угловой протяженности зоны полутени, как в случае полупрозрачной полуплоскости, так и в случае идеально проводящей. Так, например, для полупрозрачной полуплоскости расположенной на расстоянии $a/2 = 8.25\lambda$ от источника, отношение низ/верх достигает уровня -15дБ при значении угла возвышения 7 градусов, а для идеально проводящей полуплоскости, расположенной на том

же расстоянии от источника, тот же уровень отношения низ/верх достигается при значении угла возвышения 12 градусов. Для Е-поляризации также характерно, что в отличие от Н-поляризации, оптимальное распределение импеданса зависит от расстояния между источником и экраном.

2.2. Система полуплоскостей

Рассмотрим возможности улучшения характеристик за счет введения системы полуплоскостей. Для этого рассмотрим систему, изображенную на рис. 2.17. состоящую из источника, расположенного в начале координат и системы из N полуплоскостей, которые расположены на расстоянии $a_1/2$, $a_2/2$, ..., $a_N/2$ от источника, соответственно. Распределения импеданса на окончаниях полуплоскостей обозначим Z_{L1} , Z_{L2} , ..., Z_{LN} . Нижний индекс здесь и далее означает принадлежность к полуплоскости, расположенной на расстоянии $a_n/2$ от источника.

Задача дифракции на системе полуплоскостей решается аналогично п. 2.1.1 с помощью решения интегрального уравнения (2.1.3) методом моментов. При этом каждая полуплоскость заменяется на конечный фрагмент с длиной L , достаточной для того, чтобы ток в области $z = -L$ был значительно меньше тока в области $z = 0$.

Введем базисные функции для поверхностного тока на системе полуплоскостей:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_{1z}^p(z) = \Delta_{2l}(z - z_p), & x = a_1/2 \\ \psi_{2z}^p(z) = \Delta_{2l}(z - z_p), & x = a_2/2 \\ \vdots & \\ \psi_{Nz}^p(z) = \Delta_{2l}(z - z_p), & x = a_N/2 \end{array} \right. , \quad (2.1.15)$$

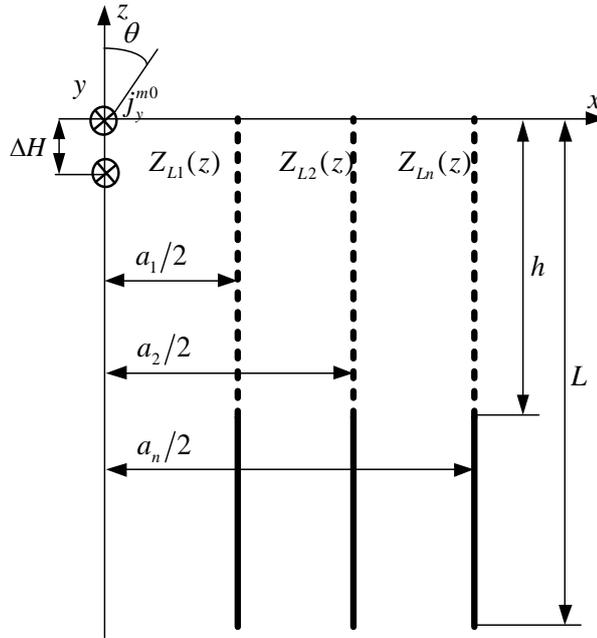


Рис. 2.17. Геометрия модели системы из N полуплоскостей

Запишем систему уравнений относительно амплитуд базисных функций поверхностной плотности электрического тока в матричном виде, аналогично п. 1.1.1

$$\begin{bmatrix} W_{1,1} + WZ_{1,1} & W_{1,2} & \cdots & W_{1,N} \\ W_{2,1} & W_{2,2} + WZ_{2,2} & & W_{2,N} \\ \vdots & & \ddots & \\ W_{N,1} & W_{N,2} & & W_{N,N} + WZ_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}, \quad (2.1.16)$$

где $W_{n,n} + WZ_{n,n}$ - блоки матрицы, элементы которых представляют собой взаимные сопротивления базисных функций, принадлежащих одной полуплоскости с индексом n , и которые определяются выражениями (2.1.8, 2.1.10); $W_{n,m}^{q,p} = W_{m,n}^{p,q}$ - блоки матрицы, элементы которых представляют собой взаимные сопротивления базисных функций, расположенных на разных

полуплоскостях с индексами n и m , которые определяются следующим выражением

$$W_{m,n}^{q,p} = \frac{8i}{\pi} \frac{W_0}{k} \int_{u=0}^{\infty} \frac{\sin^4 \frac{ul}{2}}{u^4} \sqrt{u^2 - k^2} \cos u(z_q - z_p) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} |a_n - a_m|/2} du; \quad (2.1.17)$$

B_n - блоки столбца возбуждения для базисных функций, расположенных на экране с индексом n , элементы которых определяются выражением (2.1.11), где $a/2$ заменяется на $a_n/2$.

По формулам (2.1.8), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.16), (2.1.17) были составлены вычислительные программы. Рассмотрим результаты расчетов для двух полуплоскостей с полупрозрачным окончанием. Анализ показал, что значения параметров $L = 40\lambda$ и $2l = 0.05\lambda$ достаточны для обеспечения необходимой точности расчета.

Отметим, что при расчетах для системы полуплоскостей, между соседними полуплоскостями возникает волноводный эффект, который заключается в распространении в пространстве между полуплоскостями мод плоскопараллельного волновода. Эти моды, в силу конечного учитываемого размера полуплоскостей, будут излучаться от дальнего конца системы полуплоскостей, искажая дифракционную картину. Для того чтобы уменьшить искажение дифракционной картины, на дальних концах всех, за исключением последней, полуплоскостей вводится распределение резистивного импеданса Z_{Ln}^d , в области протяженностью d , как показано на рис. 2.18. Таким образом, волны, распространяющиеся между полуплоскостями, будут частично поглощаться и частично рассеиваться в область, расположенную за системой.

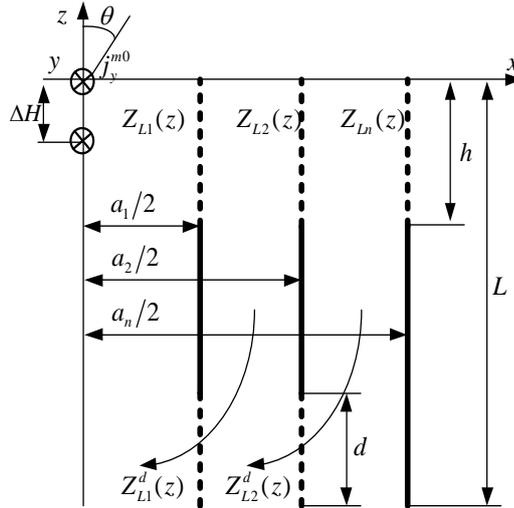


Рис. 2.18. Подавление волноводного эффекта в модели системы полуплоскостей

Рассмотрим конфигурацию, при которой две полуплоскости находятся на расстояниях $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 2.25\lambda$ от источника. Распределение импеданса на полуплоскостях показано на рис. 2.19-2.20. На рис. 2.21 кривая 2 соответствует ДН и отношению низ/верх для данной конфигурации из двух полуплоскостей, а кривая 1 соответствует одной идеально проводящей полуплоскости, расположенной на расстоянии $a_2/2$.

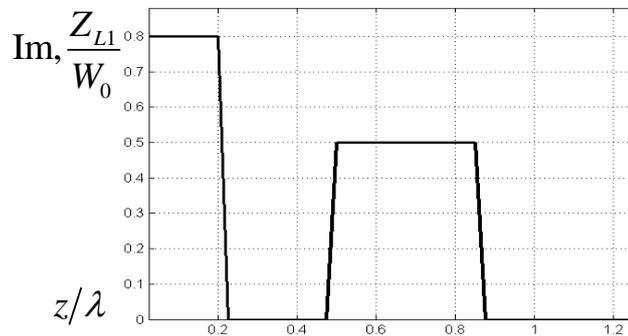


Рис. 2.19. Распределение импеданса на 1-й полуплоскости

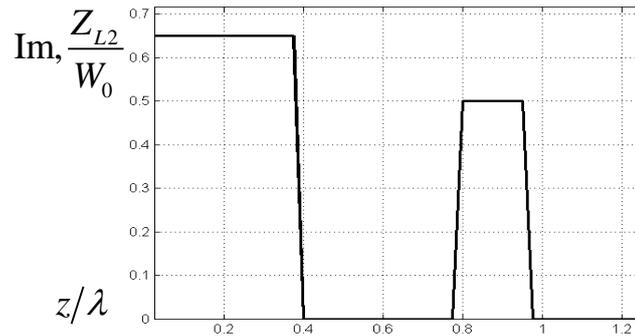


Рис. 2.20. Распределение импеданса на 2-й полуплоскости

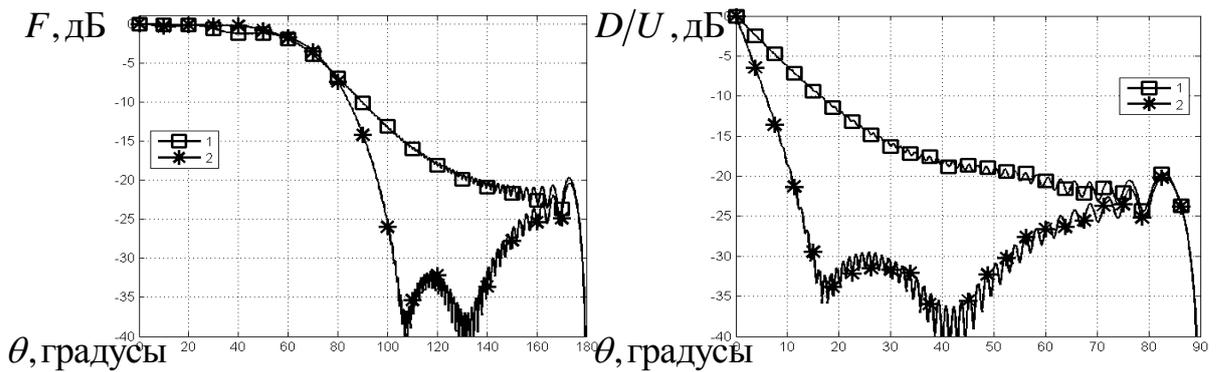


Рис. 2.21. Результаты расчета для случая $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 2.25\lambda$

Сравним отношение низ/верх под углом 10 градусов для данной конфигурации и варианта с одной полуплоскостью на расстоянии $a/2 = 2.25\lambda$ от источника с распределением импеданса как на рис. 2.4. Из сравнения видно, что применение промежуточной полуплоскости с полупрозрачными областями позволяет получить отношение низ/верх -18.5дБ против -13дБ под углом 10 градусов для случая с одной полуплоскостью. Таким образом, выигрыш от добавления промежуточной полуплоскости составил 5.5дБ.

Рассмотрим другую конфигурацию, при которой две полуплоскости находятся на расстояниях $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 3.75\lambda$ от источника. Распределение импеданса на полуплоскостях изображено на рис. 2.22-2.23. На рис. 2.24 кривая 2 соответствует ДН и отношению низ/верх для данной

конфигурации из двух полуплоскостей, а кривая 1 соответствует одной идеально проводящей полуплоскости, расположенной на расстоянии $a_2/2$.

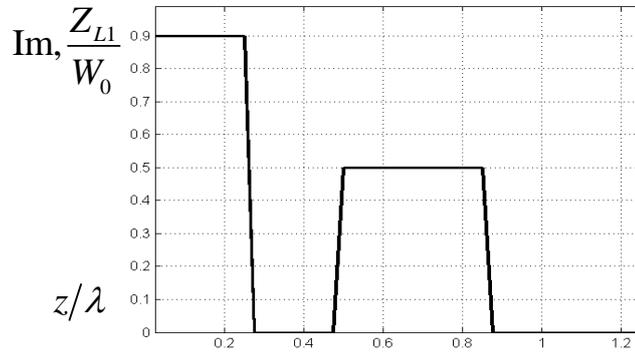


Рис. 2.22. Распределение импеданса на 1-й полуплоскости

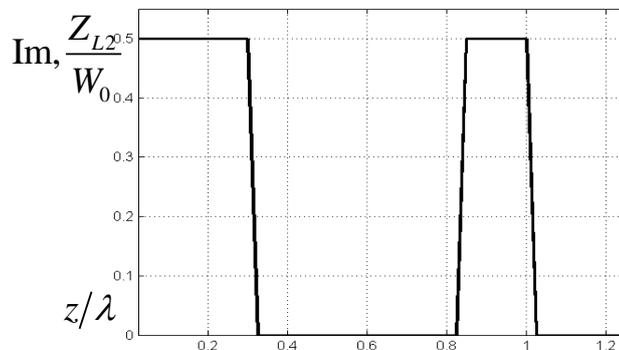


Рис. 2.23. Распределение импеданса на 2-й полуплоскости

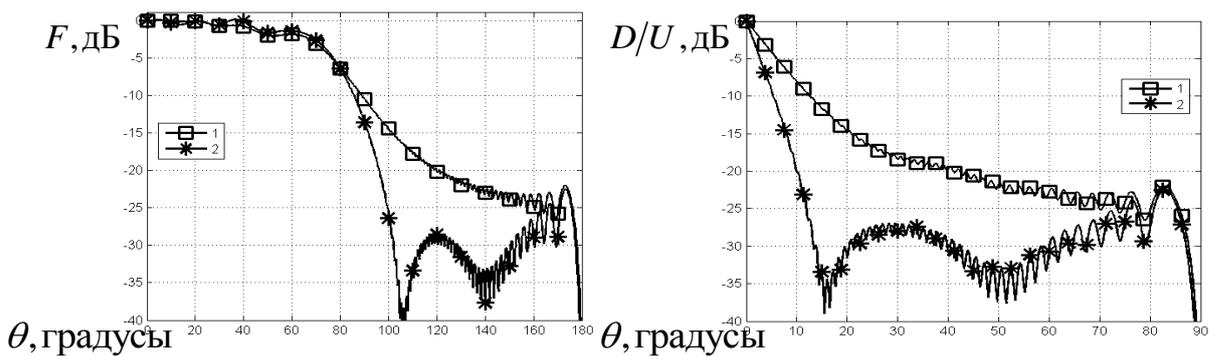


Рис. 2.24. Результаты расчета для случая $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 3.75\lambda$

Сравним отношение низ/верх под углом 10 градусов для данной конфигурации и варианта с одной полуплоскостью на расстоянии

$a/2 = 3.75\lambda$ от источника с распределением импеданса как на рис. 2.4. Из сравнения видно, что применение промежуточной полуплоскости с полупрозрачными областями позволяет получить отношение низ/верх -19.5дБ против -17.5дБ под углом 10 градусов для случая с одной полуплоскостью. Таким образом, выигрыш от добавления промежуточной полуплоскости составил 2дБ .

Таким образом, введение промежуточной полуплоскости позволяет получить значительный выигрыш в отношении низ/верх при малых расстояниях от источника до внешней полуплоскости. При увеличении расстояния источника до внешней полуплоскости, выигрыш за счет введения промежуточной полуплоскости менее заметен.

Рассмотрим результаты расчетов для трех полуплоскостей с полупрозрачными окончаниями.

Рассмотрим конфигурацию, при которой три полуплоскости находятся на расстояниях $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 1.5\lambda$, $a_3/2 = 2.25\lambda$ от источника. Распределение импеданса на полуплоскостях показано на рис. 2.25-2.27. На рис. 2.28 кривая 2 соответствует ДН и отношению низ/верх для данной конфигурации из трех полуплоскостей, а кривая 1 соответствует одной идеально проводящей полуплоскости, расположенной на расстоянии $a_3/2$.

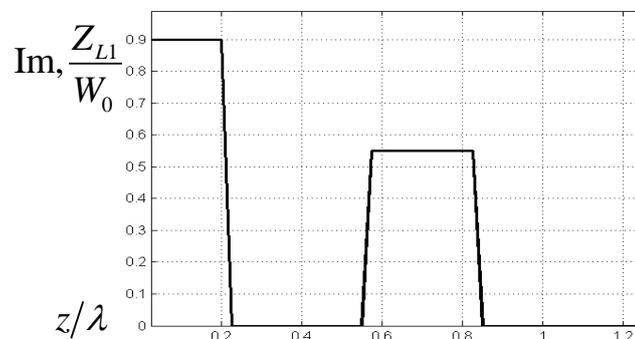


Рис. 2.25. Распределение импеданса на 1-й полуплоскости

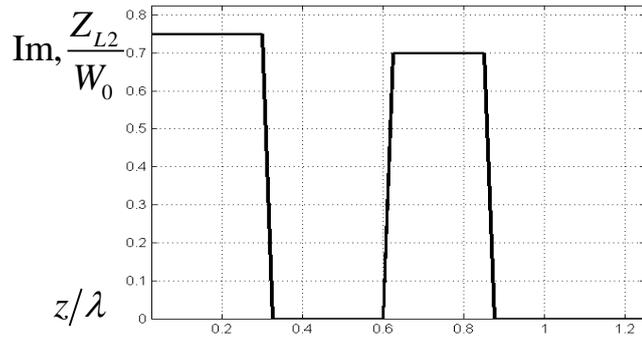


Рис. 2.26. Распределение импеданса на 2-й полуплоскости

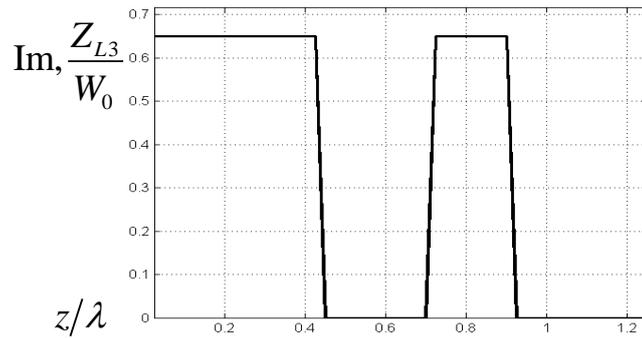


Рис. 2.27. Распределение импеданса на 3-й полуплоскости

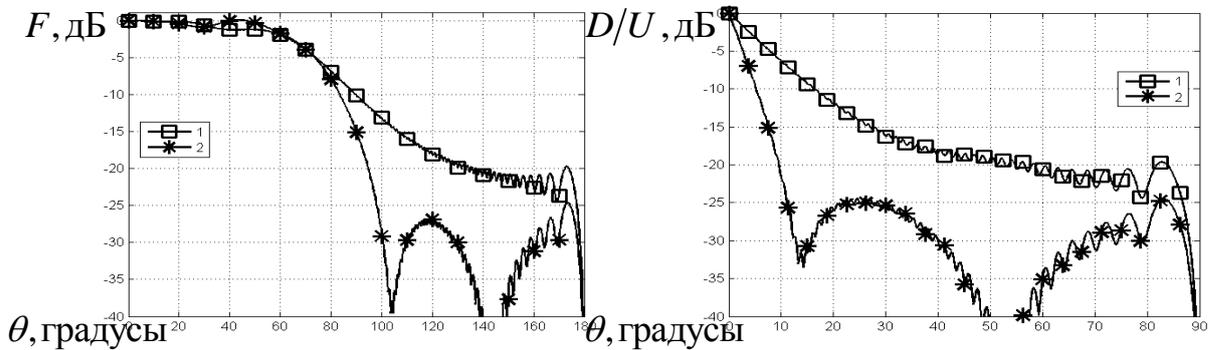


Рис. 2.28. Результаты расчета для случая $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 1.5\lambda$, $a_3/2 = 2.25\lambda$

Отношение низ/верх под углом 10 градусов для данной конфигурации составляет -21дБ, а для случая с двумя полуплоскостями на расстояниях до источника $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 2.25\lambda$, как видно из рис. 2.21, составляет -18.5дБ. В данном случае выигрыш от добавления третьей полуплоскости составляет 2.5дБ.

Рассмотрим другую конфигурацию, при которой три полуплоскости находятся на расстояниях $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 2\lambda$, $a_3/2 = 3.75\lambda$ от источника. Распределение импеданса на полуплоскостях показано на рис. 2.29-2.31. На рис. 2.32 кривая 2 соответствует ДН и отношению низ/верх для данной конфигурации из трех полуплоскостей, а кривая 1 соответствует одной идеально проводящей полуплоскости, расположенной на расстоянии $a_3/2$.

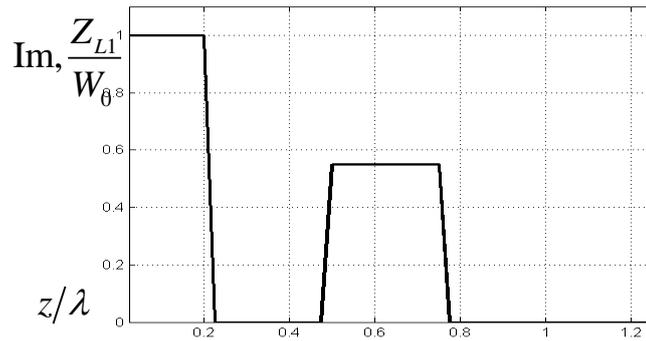


Рис. 2.29. Распределение импеданса на 1-й полуплоскости

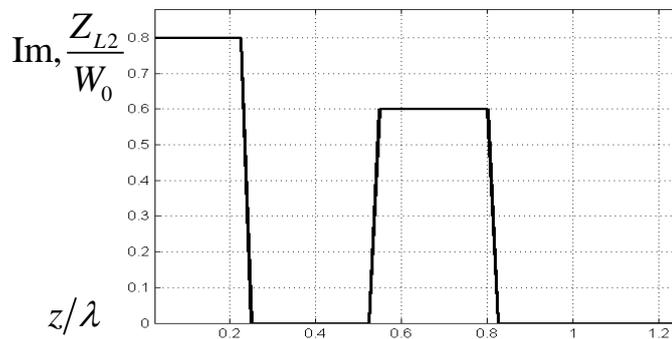


Рис. 2.30. Распределение импеданса на 2-й полуплоскости

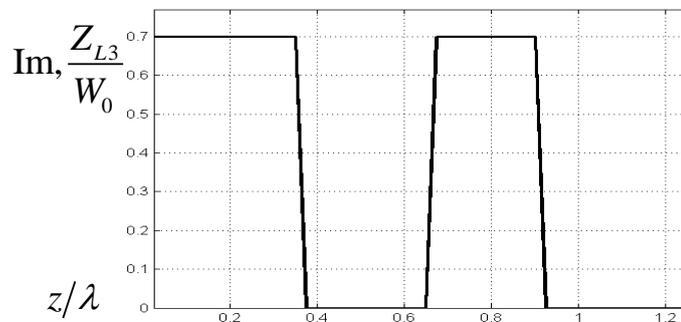


Рис. 2.31. Распределение импеданса на 3-й полуплоскости

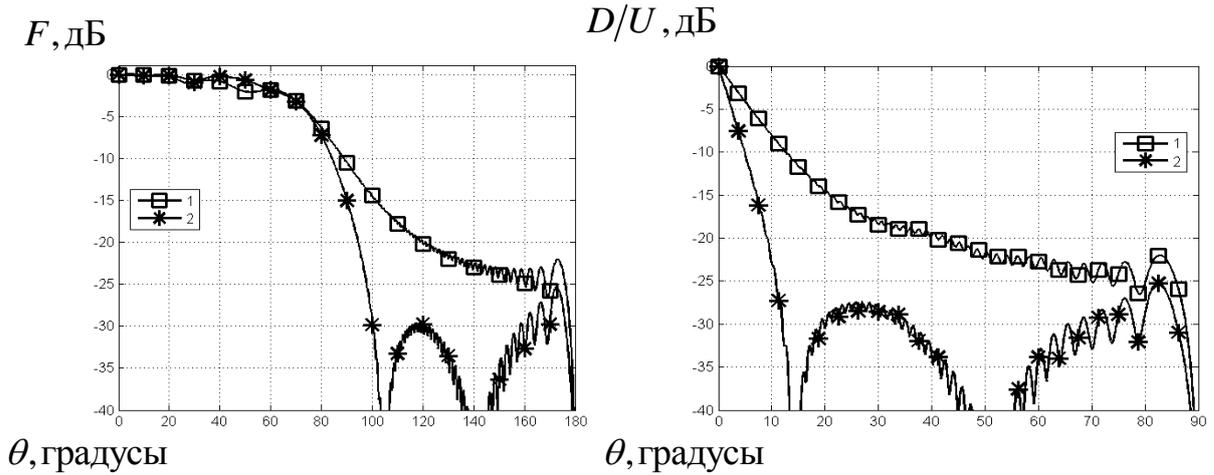


Рис. 2.32. Результаты расчета для случая $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 2\lambda$, $a_3/2 = 3.75\lambda$

Отношение низ/верх под углом 10 градусов для данной конфигурации составляет -22.5дБ, а для случая с двумя полуплоскостями на расстояниях до источника $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 3.75\lambda$, как видно из рис. 2.24, составляет -19.5дБ. В данном случае выигрыш от добавления третьей полуплоскости составляет 3дБ. Таким образом, введение третьей полуплоскости также позволяет получить некоторое увеличение крутизны спада ДН по сравнению с одной и двумя полуплоскостями, но дальнейшее увеличение количества промежуточных полуплоскостей нецелесообразно.

Рассмотрим теперь случай возбуждения системы полуплоскостей полем источника Е-поляризации. Математическая модель аналогична модели для случая источника Н-поляризации, однако, здесь рассматривается источник в виде двух нитей электрического тока (2.1.12). Ток на полуплоскостях представлен в виде суммы прямоугольных базисных функций

$$j_{ny}^e = \sum_{p=1}^P C_n^p \xi_{ny}^p(z), \quad (2.1.18)$$

где $\xi_n^p(z) = \text{rect}_l(z - z_p)$, $x = a_n/2$; (2.1.19)

$$\text{rect}_l(z - z_p) = \begin{cases} 1, & z_p - l/2 < z < z_p + l/2 \\ 0, & z < z_p - l/2, z > z_p + l/2 \end{cases} - \text{прямоугольная функция, с}$$

носителем l и с центром в точке z_p ; n - номер полуплоскости; $P = L/l$ - количество прямоугольных функций, укладываемых в длину L .

Полный вывод соотношений математической модели приведен в Приложении 4.

По формулам (П 3.8), (П 3.21), (П 4.3), (П 4.4) из Приложений 3 и 4 были составлены вычислительные программы. Рассмотрим результаты расчета для двух полуплоскостей. Анализ показал, что значения параметров $L = 20\lambda$ и $l = 0.025\lambda$ достаточны для обеспечения необходимой точности расчета. Рассмотрим структуру, состоящую из двух полуплоскостей с полупрозрачными окончаниями, расположенными с одной стороны относительно источника, геометрия которого изображена на рис. 2.17 с заменой источника Н-поляризации на источник Е-поляризации. Расстояние от источника до первой и второй полуплоскости обозначим $a_1/2$ и $a_2/2$ соответственно. Распределение импеданса на первой и второй полуплоскости обозначим Z_{L1} и Z_{L2} соответственно.

Рассмотрим конфигурацию, при которой первая полуплоскость находится на расстоянии $a_1/2 = \lambda$ от источника, вторая полуплоскость находится на расстоянии $a_2/2 = 2.25\lambda$ от источника. Диаграмма направленности и отношение низ/верх для данной конфигурации и идеально проводящей полуплоскости на расстоянии $a_2/2$ от источника приведены на рис. 2.33а. Распределения импеданса на полуплоскостях Z_{L1} и Z_{L2} приведены на рис. 2.33б-в.

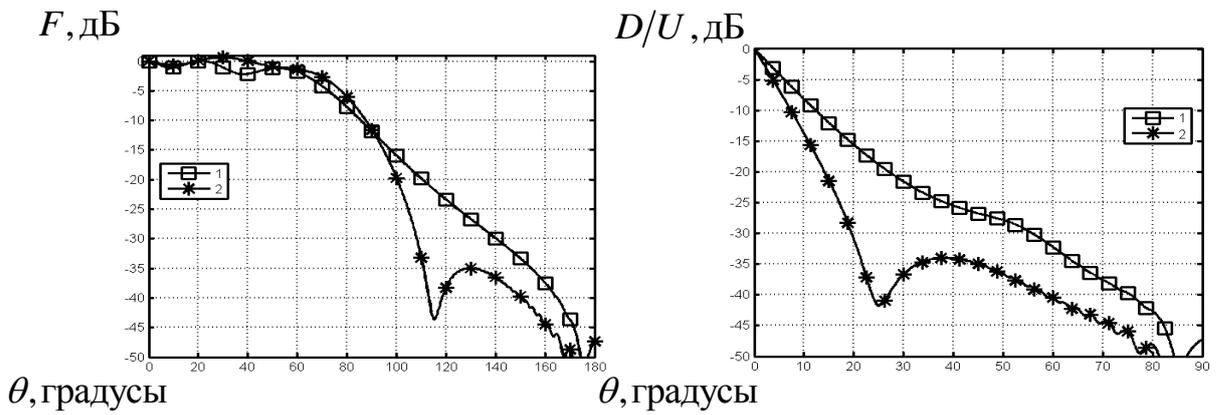


Рис. 2.33а. Результаты расчета для случая $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 2.25\lambda$

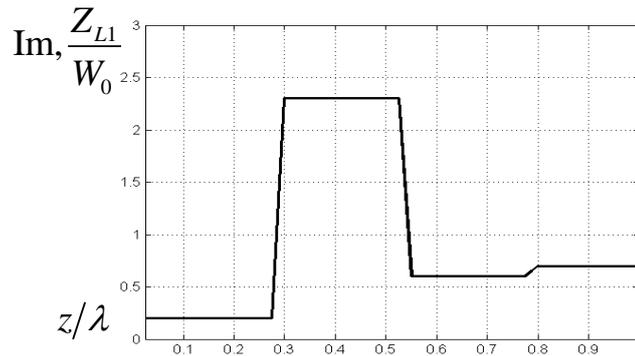


Рис. 2.33б. Распределение импеданса на 1-й полуплоскости

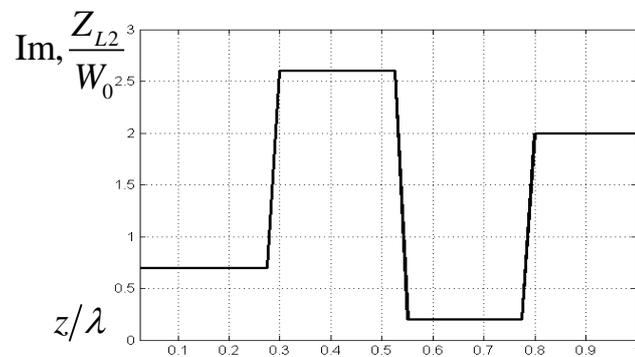


Рис. 2.33в. Распределение импеданса на 2-й полуплоскости

Сравним отношение низ/верх для варианта с одной полуплоскостью на расстоянии $a/2 = 2.25\lambda$ от источника (рис. 2.12а) и распределением импеданса (рис. 2.12б) и варианта с двумя полуплоскостями на расстояниях $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 2.25\lambda$ (рис. 2.33а) с распределением импеданса на

полуплоскостях (рис. 2.33б-в) соответственно. Распределение импеданса на полуплоскостях выбиралось для получения наиболее быстрого спада отношения низ/верх.

Из сравнения вариантов с одной и двумя полуплоскостями с одинаковыми расстояниями от источника до крайней полуплоскости видно, что применение промежуточной полуплоскости с полупрозрачным окончанием позволяет получить отношение низ/верх -14дБ против -12дБ под углом 10 градусов и -35дБ против -31дБ под углами более 20 градусов.

Рассмотрим другую конфигурацию, при которой первая полуплоскость находится на расстоянии $a_1/2 = \lambda$ от источника, вторая полуплоскость находится на расстоянии $a_2/2 = 3.75\lambda$ от источника. Диаграмма направленности и отношение низ/верх для данной конфигурации и идеально проводящей полуплоскости на расстоянии $a_2/2$ приведены на рис. 2.34а. Распределения импеданса на полуплоскостях Z_{L1} и Z_{L2} приведены на рис. 2.34б-в.

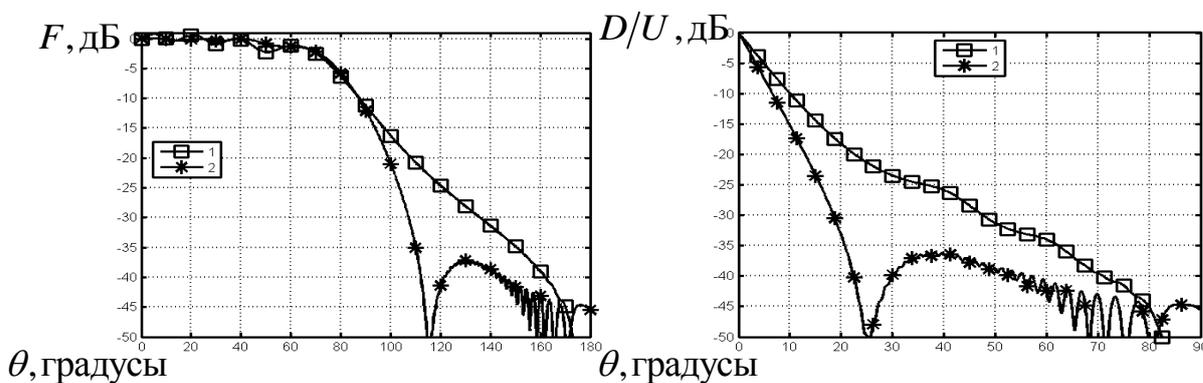


Рис. 2.34а. Результаты расчета для случая $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 3.75\lambda$

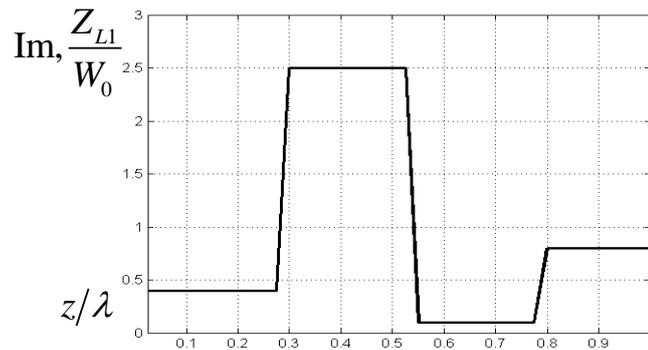


Рис. 2.34б. Распределение импеданса на 1-й полуплоскости

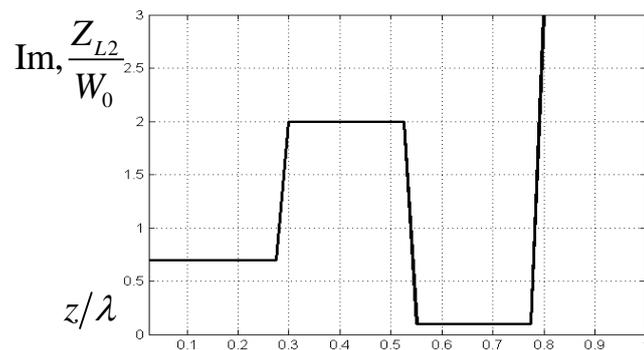


Рис. 2.34в. Распределение импеданса на 2-й полуплоскости

Сравним отношение низ/верх для варианта с одной полуплоскостью на расстоянии $a/2 = 3.75\lambda$ от источника (рис. 2.13а) и распределением импеданса (рис. 2.13б) и варианта с двумя полуплоскостями на расстояниях $a_1/2 = \lambda$, $a_2/2 = 3.75\lambda$ (рис. 2.34а) с распределением импеданса на полуплоскостях (рис. 2.34б-в) соответственно. Распределение импеданса на полуплоскостях выбиралось для получения наиболее быстрого спада отношения низ/верх.

Из сравнения вариантов с одной и двумя полуплоскостями с одинаковыми расстояниями от источника до крайней полуплоскости видно, что для случая Е-поляризации, применение промежуточной полуплоскости с полупрозрачными областями позволяет получить отношение низ/верх -15дБ против -13дБ под углом 10 градусов и -36дБ против -34дБ под углами более

20 градусов. Таким образом, для данного типа поляризации, введение промежуточной полуплоскости не приводит к значительному выигрышу в отношении низ/верх.

2.3. Оценка характеристик замкнутого экрана

При рассмотрении замкнутого экрана возникает новое явление по сравнению с уже рассмотренными. Это явление состоит в переотражении поля между ребрами экрана, находящимися по разные стороны от источника. Изучим это явление на двумерной модели в виде структуры, представленной на рис. 2.35. Эта структура представляет собой две полубесконечные полуплоскости с полупрозрачными окончаниями, образующие плоскопараллельный волновод шириной a . На полупрозрачных окончаниях полуплоскостей выполняются граничные условия (1.1.1). На остальной части полуплоскостей выполняются граничные условия для идеального проводника $E_{\tau} = 0$. Полупрозрачная часть полуплоскостей имеет длину h . Система координат расположена таким образом, что начало координат находится на расстоянии L по оси z от окончания плоскопараллельного волновода и на расстоянии $a/2$ по оси x от полуплоскостей. Ось x перпендикулярна полуплоскостям, ось z - ориентирована в направлении окончания плоскопараллельного волновода. На высоте z_0 относительно начала координат находится источник в виде двух нитей магнитного тока, также как в п. 2.1.1. Поле источника излучается во внешнее пространство, дифрагируя на окончаниях полуплоскостей и частично поглощается в пространстве между двумя полуплоскостями.

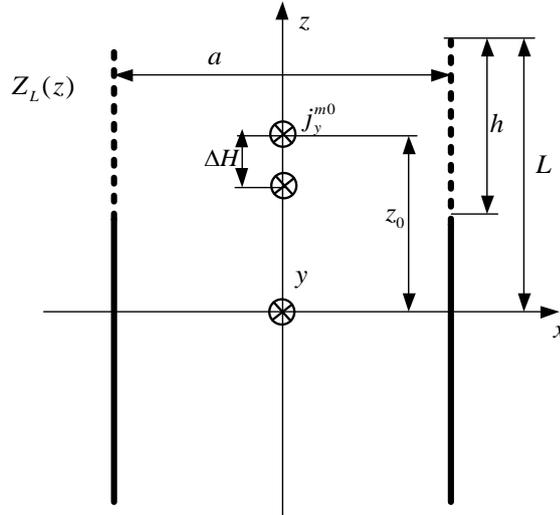


Рис. 2.35. Геометрия замкнутого экрана в двумерном приближении

Метод решения данной задачи аналогичен рассмотренному в п. 1.1.1. Как это было проделано в главе 1, разделим область решения на две подобласти, введя идеально проводящую перегородку между полуплоскостями в плоскости xOy , как показано на рис 2.38, и введем эквивалентные магнитные токи по обе стороны перегородки $\mathbf{j}_\tau^{m\pm} = [\pm \mathbf{z}_0, \mathbf{E}_\tau]$, где знаки “+” и “-” означают стремление к поверхности перегородки, со стороны $z > 0$ и $z < 0$, соответственно, \mathbf{E}_τ - касательная к плоскости xOy составляющая вектора электрического поля. Ввиду этого первоначальная задача разделяется на две подзадачи: 1) решение во внутренней области, ограниченной полуплоскостями и горизонтальной идеально проводящей перегородкой; 2) решение во внешней области, содержащей открытый конец плоскопараллельного волновода и две нити магнитного тока. Решения этих задач объединяются с помощью условия непрерывности касательной составляющей магнитного поля под и над идеально проводящей перегородкой.

Решение во внутренней области представляет совокупность гармоник плоскопараллельного волновода, которые возбуждаются в данной геометрии. К их числу относятся Т- и Е-волны.

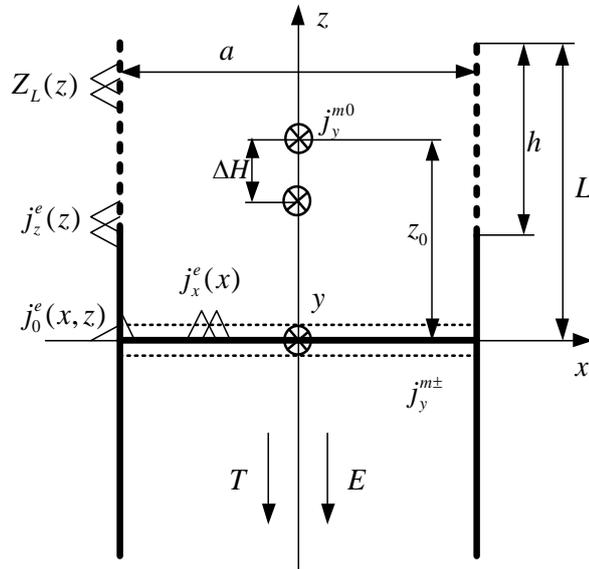


Рис. 2.36. Модель замкнутого экрана в двумерном приближении

Распределение магнитного тока под идеально проводящей перегородкой также представим в виде разложения по модам плоскопараллельного волновода. Рассмотрим моды, которые возбуждаются в плоскопараллельном волноводе:

T-волна:

$$E_x = U_0 e^{ikz} \quad (2.1.20)$$

$$H_y = -\frac{1}{W_0} U_0 e^{ikz} \quad (2.1.21)$$

E-волны

$$E_{xn} = U_n e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (2.1.22)$$

$$H_{yn} = -\frac{1}{W_{\perp n}} U_n e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (2.1.23)$$

$$E_{zn} = -i \frac{k_{xn}}{\Gamma_n} U_n e^{i\Gamma_n z} \sin k_{xn} x, \quad (2.1.24)$$

где $W_{\perp n}^E = W_0 \frac{\Gamma_n}{k}$ - поперечное волновое сопротивление; $\Gamma_n = \sqrt{k^2 - k_{xn}^2}$ - продольное волновое число; $k_{xn} = \frac{2n\pi}{a}$ - поперечное волновое число; U_0 - амплитуда T -волны; U_n - амплитуда E -волны n -го порядка. Докритические гармоники определяются неравенством $n < \frac{ak}{2\pi}$.

Запишем касательные составляющие электрического и магнитного поля во внутренней области, ограниченной полуплоскостями и горизонтальной идеально проводящей перегородкой, в виде суммы гармоник плоскопараллельного волновода.

$$E_x = U_0 e^{ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (2.1.25)$$

$$H_y = -\frac{1}{W_0} U_0 e^{ikz} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{W_{\perp n}} U_n e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (2.1.26)$$

Запишем магнитный ток над и под проводящей перегородкой:

$$\mathbf{j}_{\tau}^{m\pm} = [\pm \mathbf{z}_0, \mathbf{E}_{\tau}] = \pm \mathbf{y}_0 E_x = \pm \mathbf{y}_0 \left[U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos k_{xn} x \right] \quad (2.1.27)$$

Перейдем к решению задачи во внешней области. Запишем граничные условия задачи. Граничное условие на полупрозрачных окончаниях полуплоскостей:

$$j_z Z_L = E_z, \text{ при } x = \pm a/2, L-h < z < L \quad (2.1.28)$$

Граничное условие на идеально проводящей части полуплоскостей:

$$E_z = 0, \text{ при } x = \pm a/2, 0 < z < L-h \quad (2.1.29)$$

Условие непрерывности касательной составляющей магнитного поля сверху и снизу идеально проводящей перегородки и условие для касательной составляющей электрического поля и магнитного тока над перегородкой

$$\begin{cases} E_x^+ = j_y^{m+} \\ H_y^+ - H_y^- = 0 \end{cases}, \text{ при } z = 0, -a/2 < x < a/2, \quad (2.1.30)$$

где H_y^+ , H_y^- - касательные компоненты магнитного поля над и под идеально проводящей перегородкой соответственно; E_x^+ - касательная составляющая электрического поля над перегородкой; j_y^{m+} - магнитный ток над идеально проводящей перегородкой.

Запишем интегральное уравнение для электрического поля

$$\int \mathbf{G}^{EE} \mathbf{j}^e dv + \int \mathbf{G}^{EH} \mathbf{j}^{m+} dv + \mathbf{E}^0(\mathbf{j}^{m0}) = Z_L \mathbf{j}^e; \quad (2.1.31)$$

Запишем интегральное уравнение для магнитного поля

$$\int \mathbf{G}^{HH+} \mathbf{j}^{m+} dv + \int \mathbf{G}^{HE} \mathbf{j}^e dv + \mathbf{H}^0(\mathbf{j}^{m0}) = \int \mathbf{G}_1^{HH-} \mathbf{j}^{m-} dv, \quad (2.1.32)$$

где \mathbf{G}^{EE} , \mathbf{G}^{EH} , \mathbf{G}^{HE} - импеданс, электрическая и магнитная передаточные функции в свободном пространстве [42]. \mathbf{G}^{HH+} - проводимость в свободном пространстве; \mathbf{G}_1^{HH-} - проводимость во внутренней области короткозамкнутого плоскопараллельного волновода для волн, распространяющихся в направлении от источника; \mathbf{j}^{m0} - сторонний

магнитный ток; $\mathbf{E}^0(\mathbf{j}^{m0})$ - электрическое поле стороннего магнитного тока; $\mathbf{H}^0(\mathbf{j}^{m0})$ - магнитное поле стороннего магнитного тока.

Будем решать интегральные уравнения (2.1.31-2.1.32) методом моментов. Базисные функции электрического тока выбраны такими же, как в п. 1.1.1.: ψ_{zp} - базисные функции тока, текущего по окончаниям полуплоскостей; ψ_0 - базисная функция в узле между полуплоскостями и идеально проводящей перегородкой; ψ_{xs} - базисная функция тока, текущего по идеально проводящей перегородке.

Введем базисные функции поверхностного магнитного тока, текущего под и над идеально проводящей перегородкой.

$$\begin{cases} j_{y0}^{m\pm} = \pm 1 & n = 0, z = 0, -a/2 < x < a/2 \\ j_{yn}^{m\pm} = \pm \cos k_{xn} x & n > 0, z = 0, -a/2 < x < a/2 \end{cases} \quad (2.1.33)$$

Введем обозначения для полей базисных функций: $E_x(\psi_{xs}), E_z(\psi_{xs}), H_y(\psi_{xs})$ - компоненты поля базисной функции электрического тока ψ_{xs} ; $E_x(\psi_{zp}), E_z(\psi_{zp}), H_y(\psi_{zp})$ - компоненты поля базисной функции электрического тока ψ_{zp} ; $E_x(\psi_0), E_z(\psi_0), H_y(\psi_0)$ - компоненты поля узловой базисной функции ψ_0 ; $E_x(j_y^{m0}), E_z(j_y^{m0}), H_y(j_y^{m0})$ - компоненты поля стороннего источника j_y^{m0} ; $E_x(j_{yn}^{m\pm}), E_z(j_{yn}^{m\pm}), H_y(j_{yn}^{m\pm})$ - компоненты поля базисных функций поверхностного магнитного тока, текущего под и над идеально проводящей перегородкой.

Проинтегрируем интегральное уравнение (2.1.31) с базисной функцией ψ_{zp}

$$\begin{aligned}
& \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} \sum_{p=1}^P C_{zp} E_z(\psi_{zp}) dz dx - \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} \sum_{p=1}^P C_{zp} \psi_{zp} \sum_{m=1}^M Z_{Lm} \Delta_{2l}(z-z_m) dz dx + \\
& + \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} C_0 E_z(\psi_0) dz dx + \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} \sum_{s=1}^S C_{xs} E_z(\psi_{xs}) dz dx + \\
& + \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} \sum_{n=0}^N U_n E_z(j_{yn}^{m+}) dz dx = - \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} E_z(j_y^{m0}) dz dx
\end{aligned} \tag{2.1.34}$$

Проинтегрируем интегральное уравнение для электрического поля (2.1.31) с базисной функцией ψ_0

$$\begin{aligned}
& \int_x \int_0^l \psi_0 \sum_{p=1}^P C_{zp} E_z(\psi_{zp}) dz dx + 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 \sum_{p=1}^P C_{zp} E_x(\psi_{zp}) dx dz + \\
& + \int_x \int_0^l \psi_0 C_0 E_z(\psi_0) dz dx + 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 C_{zp} E_x(\psi_0) dx dz + \\
& + \int_x \int_0^l \psi_0 \sum_{s=1}^S C_{xs} E_z(\psi_{xs}) dz dx + 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 \sum_{s=1}^S C_{xs} E_x(\psi_{xs}) dx dz - \\
& + \int_x \int_0^l \psi_0 \sum_{n=0}^N U_n E_z(j_{yn}^{m+}) dz dx + 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 \sum_{n=0}^N U_n E_x(j_{yn}^{m+}) dx dz = \\
& = - \int_x \int_0^l \psi_0 E_z(j_y^{m0}) dz dx - 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_0 E_x(j_y^{m0}) dx dz
\end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Проинтегрируем интегральное уравнение для электрического поля (2.1.31) с базисной функцией ψ_{xw}

$$\begin{aligned}
& \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} \sum_{p=1}^P C_{zp} E_x(\psi_{zp}) dx dz + \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} C_0 E_x(\psi_0) dx dz + \\
& + \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} \sum_{s=1}^S C_{xs} E_x(\psi_{xs}) dx dz + \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} \sum_{n=0}^N U_n E_x(j_{yn}^{m+}) dx dz = - \int_z \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} E_x(j_y^{m0}) dx dz
\end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Проинтегрируем интегральное уравнение для магнитного поля (2.1.32) с базисной функцией гармоники эквивалентного магнитного тока

$$\begin{aligned}
& \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{ym}^{m+} \sum_{p=1}^P C_{zp} H_y(\psi_{zp}) dx dz + \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{ym}^{m+} C_0 H_y(\psi_0) dx dz + \\
& + \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{ym}^{m+} \sum_{s=1}^S (-1/2) C_{xs} \psi_{xs} dx dz + \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{ym}^{m+} \sum_{n=0}^N U_n H_y(j_{yn}^{m+}) dx dz - (2.1.37) \\
& - \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{ym}^{m+} \sum_{n=0}^N U_n H_y(j_{yn}^{m-}) dx dz = - \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{ym}^{m+} H_y(j_y^{m0}) dx dz
\end{aligned}$$

Уравнения (2.1.34-2.1.37) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд базисных функций C_{zp} , C_0 , C_{xs} , U_n .

$$\begin{pmatrix}
W(\psi_z, \psi_z) + WZ(\psi_z, \psi_z) & W(\psi_z, \psi_0) & W(\psi_z, \psi_x) & W(\psi_z, j_y^{m+}) \\
W(\psi_0, \psi_z) & W(\psi_0, \psi_0) & W(\psi_0, \psi_x) & W(\psi_0, j_y^{m+}) \\
W(\psi_x, \psi_z) & W(\psi_x, \psi_0) & W(\psi_x, \psi_x) & W(\psi_x, j_y^{m+}) \\
W(j_y^{m+}, \psi_z) & W(j_y^{m+}, \psi_0) & W(j_y^{m+}, \psi_x) & W(j_y^{m+}, j_y^{m+}) - W(j_y^{m+}, j_y^{m-})
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
C_z \\
C_0 \\
C_x \\
U
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
B(\psi_z, j_y^{m0}) \\
B(\psi_0, j_y^{m0}) \\
B(\psi_x, j_y^{m0}) \\
B(j_y^{m+}, j_y^{m0})
\end{pmatrix}
\quad (2.1.38)$$

Вывод формул для вычисления элементов матрицы и столбца правой части системы уравнений (2.1.38) приведен в Приложении 2. Решив эту систему, мы найдем неизвестные амплитуды базисных функций электрического и магнитного тока.

По формуле (2.1.38), а также формулам (П 2.67 - П 2.97) из Приложения 2 были составлены вычислительные программы. Рассмотрим результаты расчетов. Анализ показал, что величина L , достаточная для достижения необходимой точности вычисления ДН в области полутени, составляет 20λ . Для обеспечения сходимости результатов достаточен выбор носителя $2l = 0.05\lambda$. Количество гармоник плоскопараллельного волновода, необходимых для расчета, составляет $N > \frac{ak}{2\pi} + 1$. На рис. 2.37-2.42

приведены диаграммы направленности, отношение низ/верх, а также амплитудное и фазовое распределения тока на стенках экрана при расстояниях между полуплоскостями $a = 1.5\lambda$, $a = 4.5\lambda$, $a = 7.5\lambda$, $a = 10.5\lambda$, $a = 13.5\lambda$, соответственно. Вычисления проведены для случая $Z_L = 0$ (кривая 1) и для распределений импеданса, показанных на рис. 1.3-1.4 (кривые 2-3).

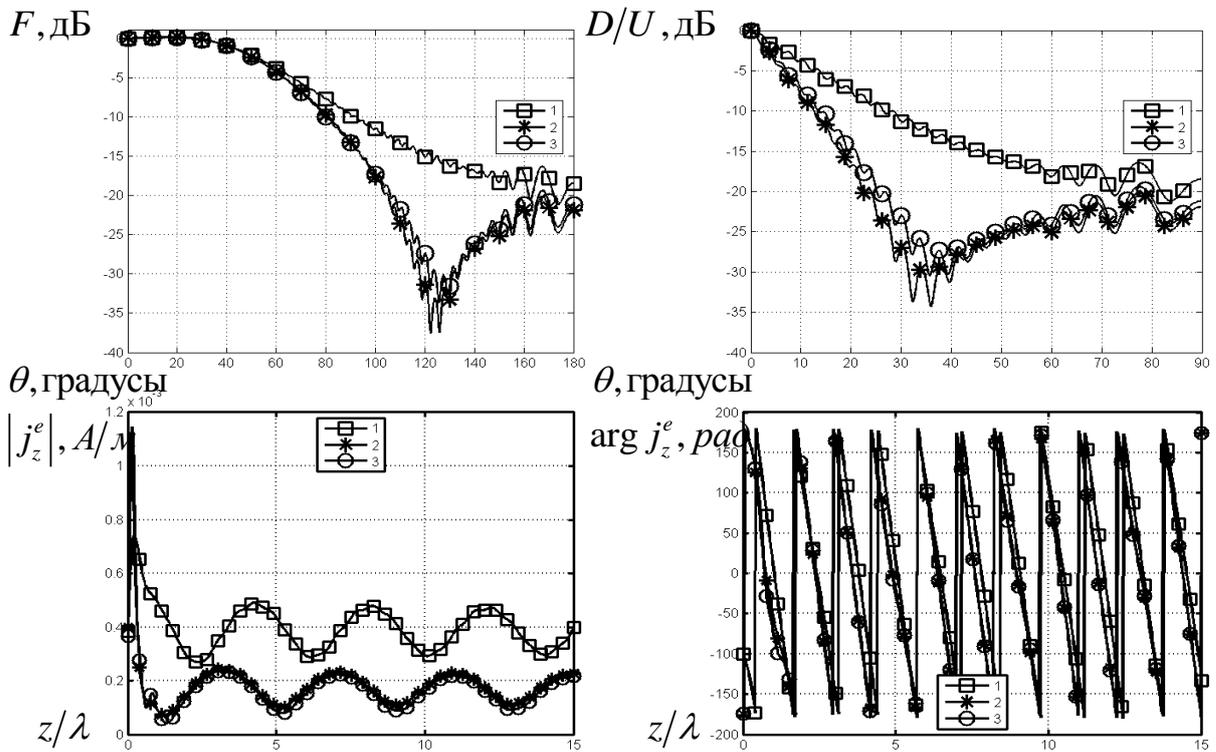


Рис. 2.37. Результаты расчета для случая $a = 1.5\lambda$

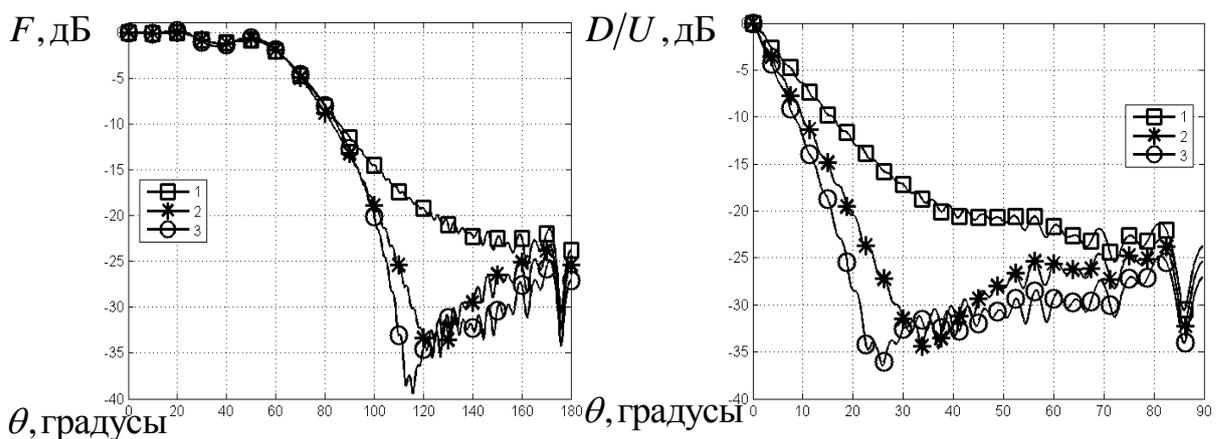


Рис. 2.38. Результаты расчета для случая $a = 4.5\lambda$

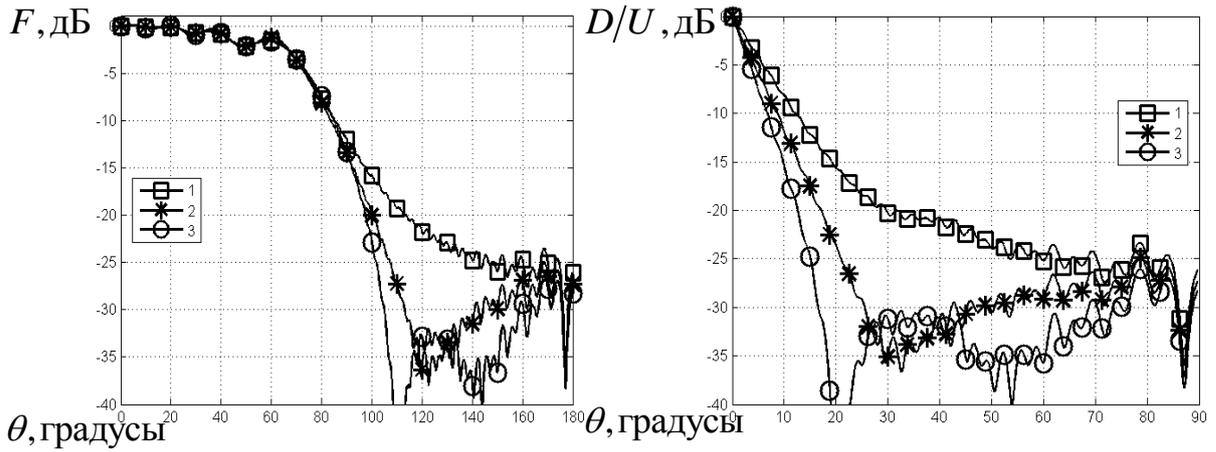


Рис. 2.39. Результаты расчета для случая $a = 7.5\lambda$

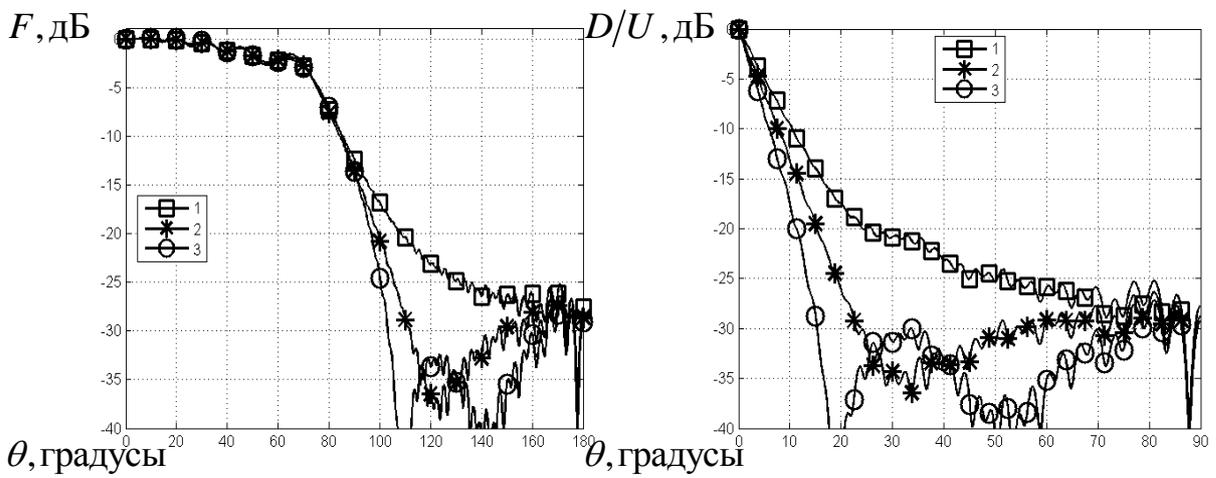


Рис. 2.40. Результаты расчета для случая $a = 10.5\lambda$

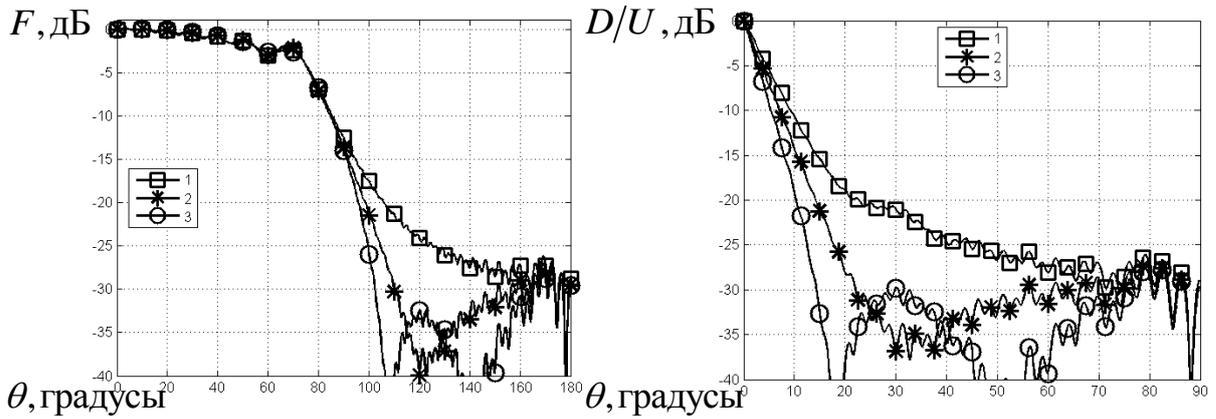


Рис. 2.41. Результаты расчета для случая $a = 13.5\lambda$

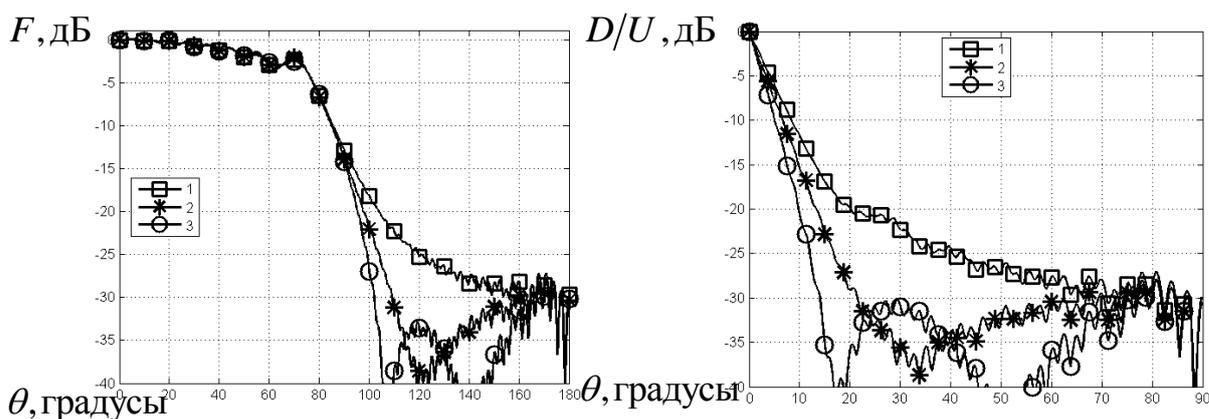


Рис. 2.42. Результаты расчета для случая $a = 16.5\lambda$

На рис. 2.37, для примера, показано распределение полного тока по внутренней и внешней сторонам полуплоскостей. В отличие от случая с одной полуплоскостью, где ток спадает по мере удаления от источника, в случае замкнутого экрана между полуплоскостями распространяются гармоники Т- и Е-волны плоскопараллельного волновода. Сравним диаграммы направленности для одной полуплоскости (рис. 2.5-2.10) и замкнутого экрана (рис. 2.39-2.44). Так, из сравнения ДН, показанных на графиках рис. 2.5 и рис. 2.36, видно, что при $a/2 = 0.75\lambda$ разница между ДН для полуплоскости и замкнутого экрана составляет порядка 1-3дБ. То же самое видно из сравнения графиков, показанных на рис. 2.10 и рис. 2.44 при $a/2 = 8.25\lambda$. Таким образом, введение замкнутого экрана не приводит к значительным изменениям ДН как при малых, так и при больших расстояниях между полуплоскостью и источником.

Математическая модель замкнутого экрана, возбуждаемого источником поля Е-поляризации, аналогична модели, рассмотренной для случая возбуждения источником Н-поляризации, но отличается выбором прямоугольных базисных функций для электрического тока, отсутствием узла тока между полуплоскостями и идеально проводящей перегородкой, а также тем, что в пространстве между полуплоскостями распространяются Н-

волны. Ввиду этого, вывод соотношений для данной модели более подробно рассмотрен в Приложении 5.

По формулам (П 5.15), (П 5.53 – П 5.63) из Приложения 5 были составлены вычислительные программы. Рассмотрим результаты расчета. Анализ показал, что величина L , достаточная для достижения необходимой точности вычисления ДН в области полутени, составляет 20λ . Для обеспечения сходимости результатов достаточен выбор носителя $l = 0.025\lambda$. Количество гармоник плоскопараллельного волновода, необходимое для расчета, составляет $N > \frac{ak}{2\pi} + \frac{1}{2}$. На рис. 2.45-2.50 приведены диаграммы направленности и отношения низ/верх для замкнутого экрана при нулевом импедансе (кривая 1) и распределении реактивного импеданса, обеспечивающего максимальную крутизну спада отношения низ/верх (кривая 2) для расстояний $a = 1.5\lambda$, $a = 4.5\lambda$, $a = 7.5\lambda$, $a/2 = 10.5\lambda$, $a = 13.5\lambda$, $a = 16.5\lambda$ соответственно, а также сами распределения импеданса. Распределения импеданса такие же, как в п. 2.1.1 в случае дифракции поля источника Е-поляризации на одной полуплоскости.

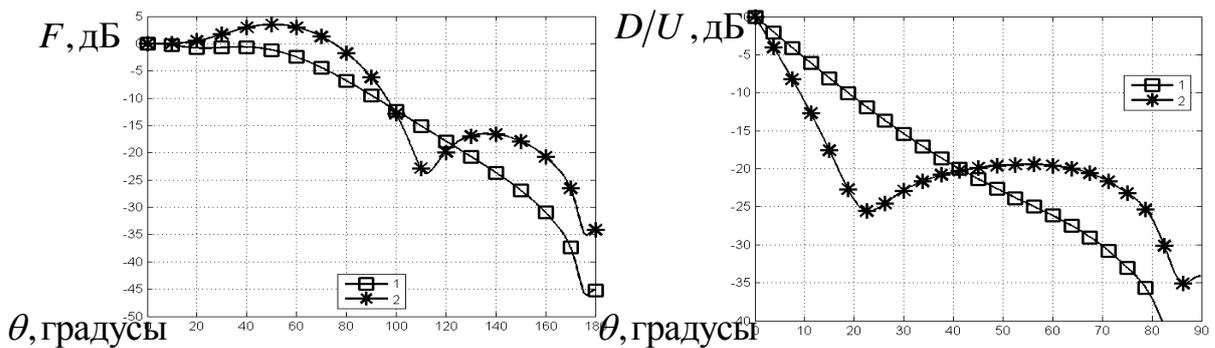


Рис. 2.45а. Результаты расчета для случая $a = 1.5\lambda$

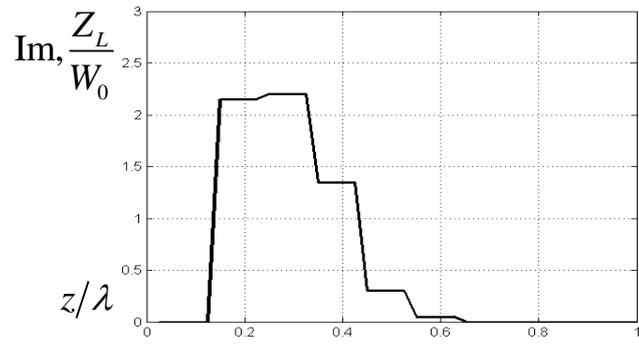


Рис. 2.456. Распределение импеданса для случая $a = 1.5\lambda$

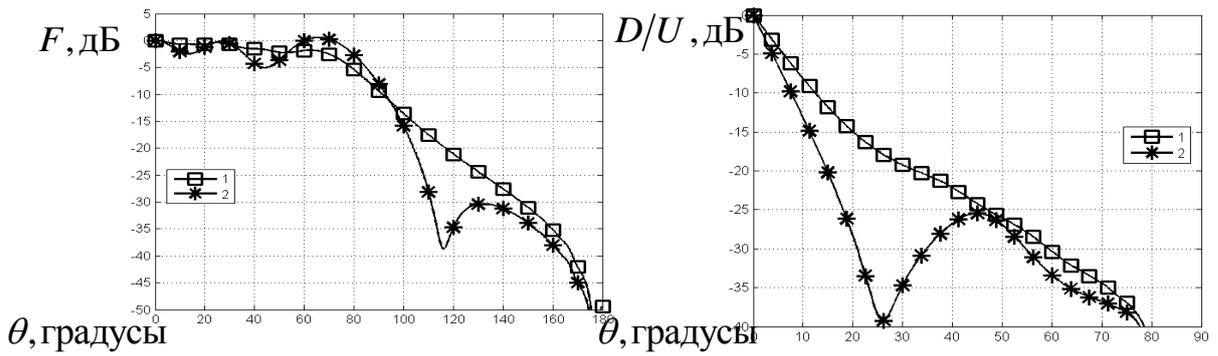


Рис. 2.46а. Результаты расчета для случая $a = 4.5\lambda$

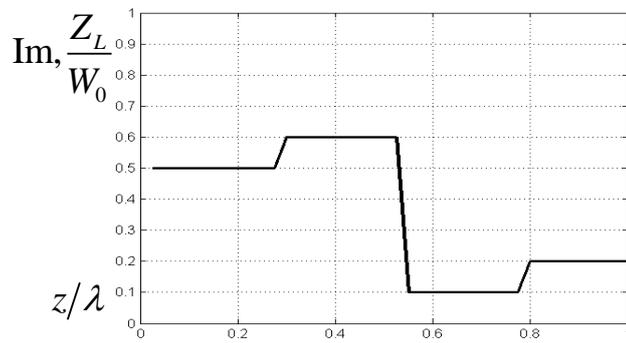


Рис. 2.46б. Распределение импеданса для случая $a = 4.5\lambda$

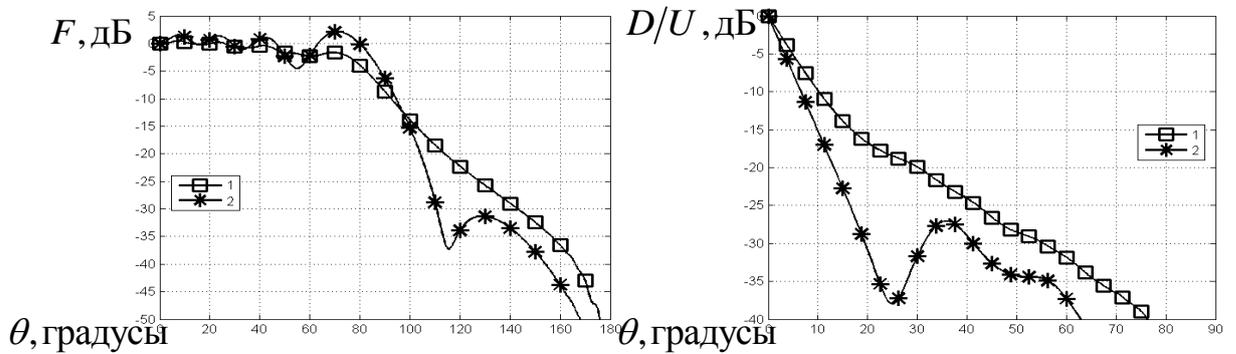


Рис. 2.47а. Результаты расчета для случая $a = 7.5\lambda$

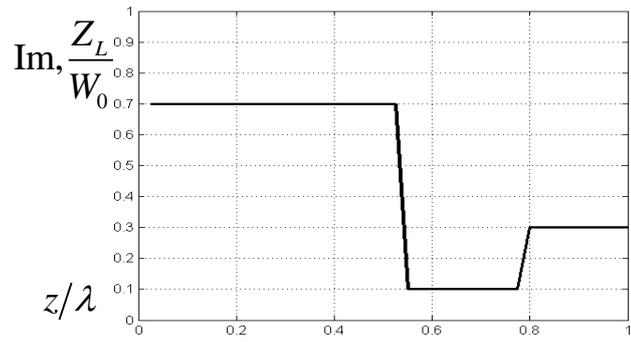


Рис. 2.47б. Распределение импеданса для случая $a = 7.5\lambda$

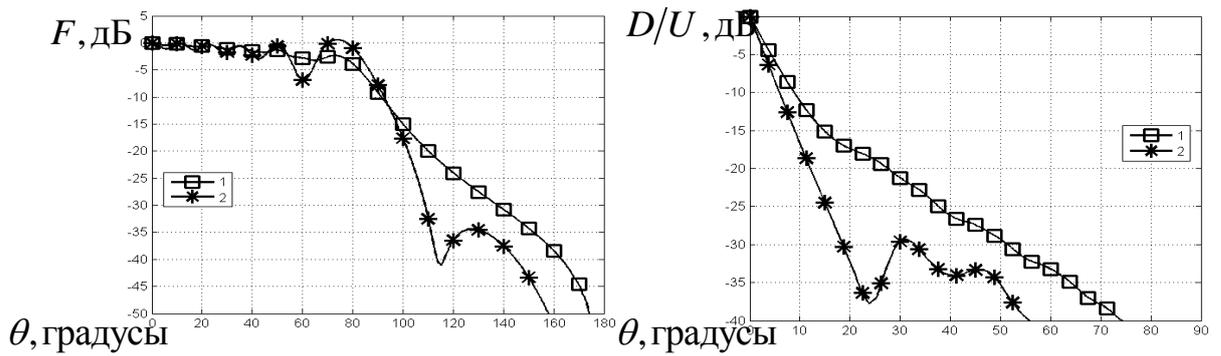


Рис. 2.48а. Результаты расчета для случая $a = 10.5\lambda$

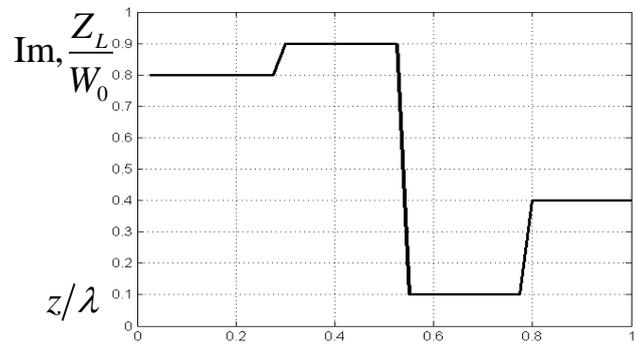


Рис. 2.48б. Распределение импеданса для случая $a = 10.5\lambda$

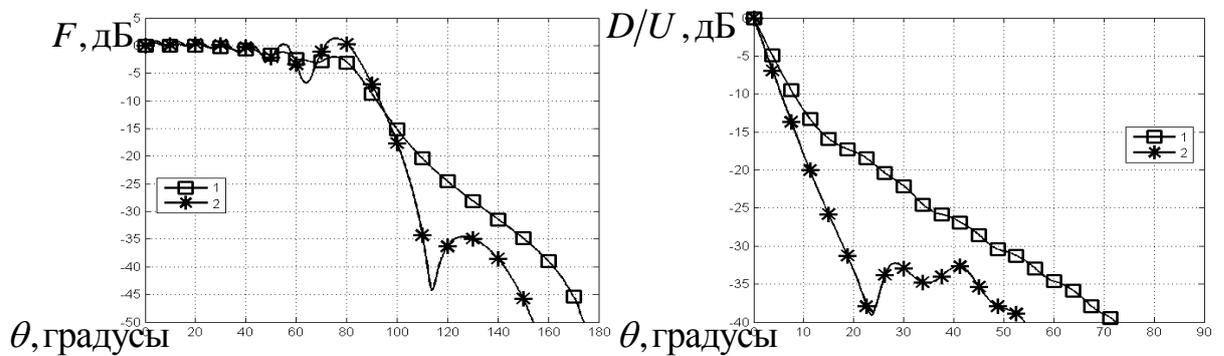


Рис. 2.49а. Результаты расчета для случая $a = 13.5\lambda$

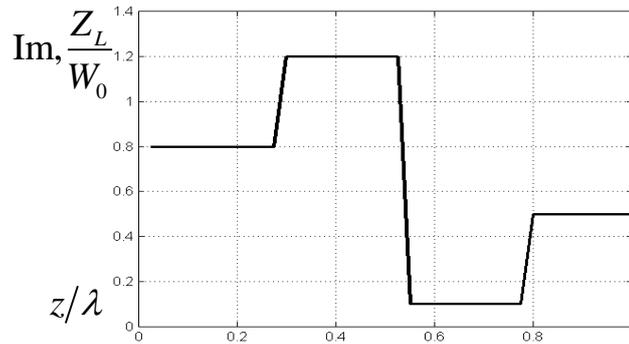


Рис. 2.49б. Распределение импеданса для случая $a = 13.5\lambda$

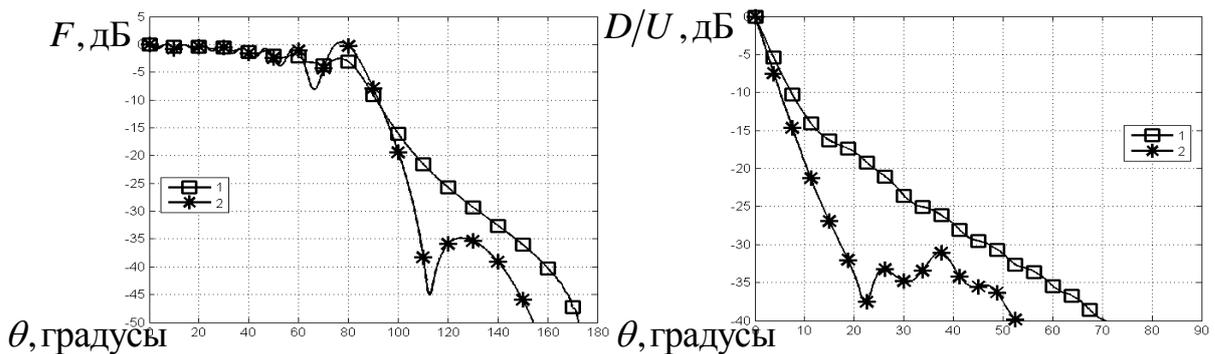


Рис. 2.50а. Результаты расчета для случая $a = 16.5\lambda$

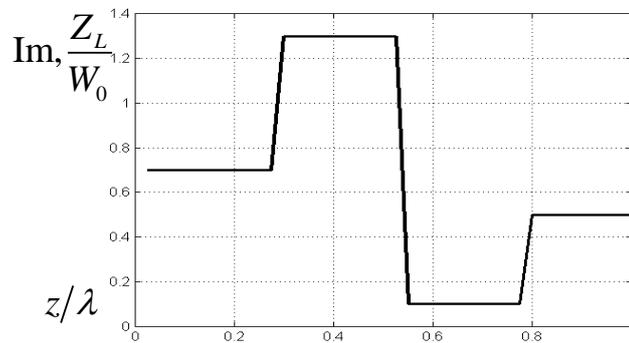


Рис. 2.50б. Распределение импеданса для случая $a = 16.5\lambda$

Из сравнения диаграмм направленности для случая возбуждения одной полуплоскости источником Е-поляризации (рис. 2.11-2.16) и диаграмм направленности для источника Е-поляризации, помещенного над замкнутым экраном (в двумерном приближении) (рис. 2.45-2.50) видно, что добавление второй полуплоскости с другой стороны от источника приводит к дополнительным осцилляциям в верхней полусфере амплитудой до 8дБ.

2.4. Результаты натурального эксперимента

Для проверки расчетных данных была построена экспериментальная установка, показанная на рис. 2.51, которая представляет собой совокупность экрана 1 с полупрозрачным окончанием 2 и антенного элемента 3 и поглотителя 4. Частота, на которой проводились измерения – 1575 МГц. Установка вращается вокруг оси 5. Ширина экрана - 382мм. Длина экрана - 764мм. Расстояние от экрана до антенного элемента - 191мм.

Экран выполнен из листа стеклотекстолита с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$ толщиной 1.5мм, металлизированного с одной стороны за исключением области 2, шириной 40мм, которая выполнена в виде щелевой структуры с впаянными в щели индуктивностями 6 номиналом 8.2 нГн, как показано на рис. 2.53. Ширина щелей - 1мм. Период следования щелей - 5мм. Период следования индуктивностей вдоль щели – 10мм. Величина импеданса такой структуры составляет $Z_L = i0.65W_0$.

На дальнем ребре экрана размещен поглощающий материал 4 для подавления осцилляций, обусловленных дифракцией на этом ребре.

Антенный элемент 3 показан на рис. 2.52. Антенный элемент представляет собой практически применяемую антенну, показанную в [2]. Эта антенна содержит печатную антенну 7, выполненную на подложке из керамики. Снизу расположена вторая антенна 8, названная антиантенной [45,47]. Благодаря наличию антиантенны, этот антенный элемент имеет кардиоидную ДН, что позволяет сопоставить экспериментальные и расчетные характеристики. В антиантенне для уменьшения веса использована подложка в виде искусственного диэлектрика [48, 49]. Антенна

также содержит малошумящий усилитель 9 для увеличения принимаемой мощности.

Измерения проводились по вертикальной поляризации (с вектором E , перпендикулярным ребру экрана), причем вертикальная компонента диаграммы направленности антенного элемента спадает плавно до уровня порядка -15дБ в направлении антинормали. На рис. 1.55-1.56 приведено сравнение экспериментальных (кривая 1) и расчетных (кривая 2) характеристик отношения низ/верх и ДН для идеально проводящего экрана и экрана с полупрозрачным ребром, соответственно.

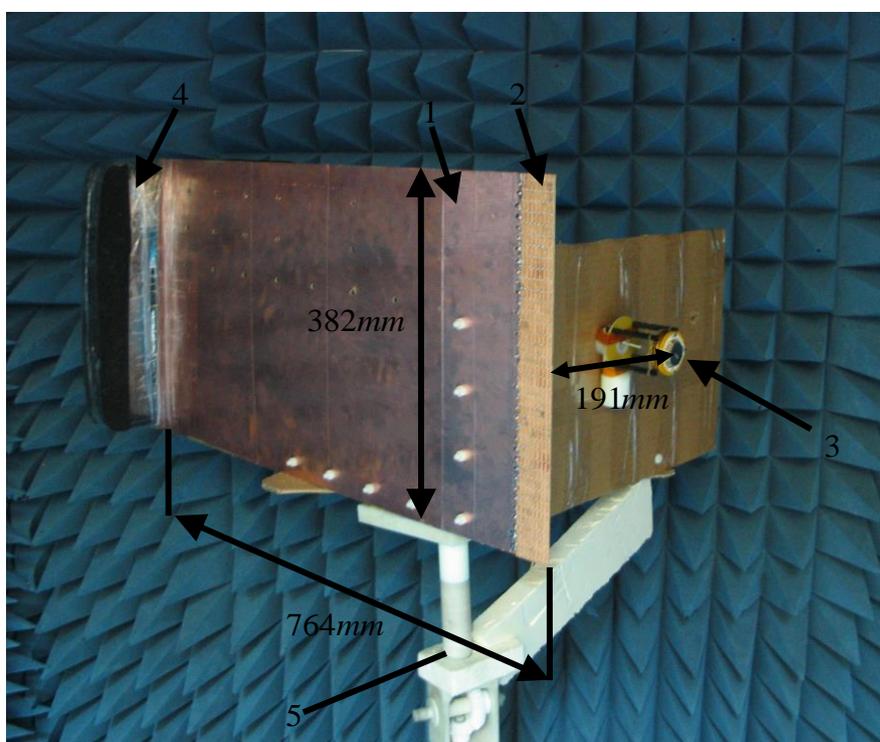


Рис. 2.51. Общий вид экспериментальной установки

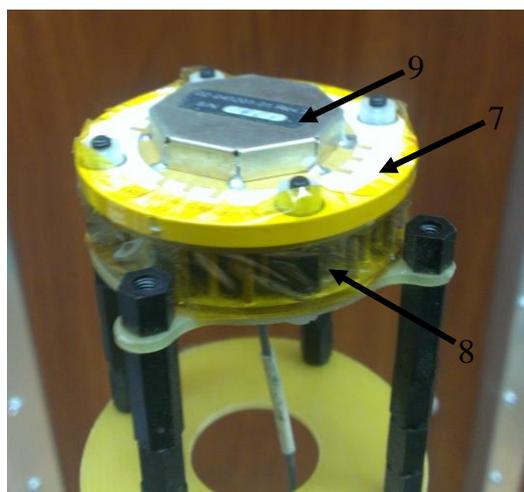


Рис. 2.52. Антенный элемент

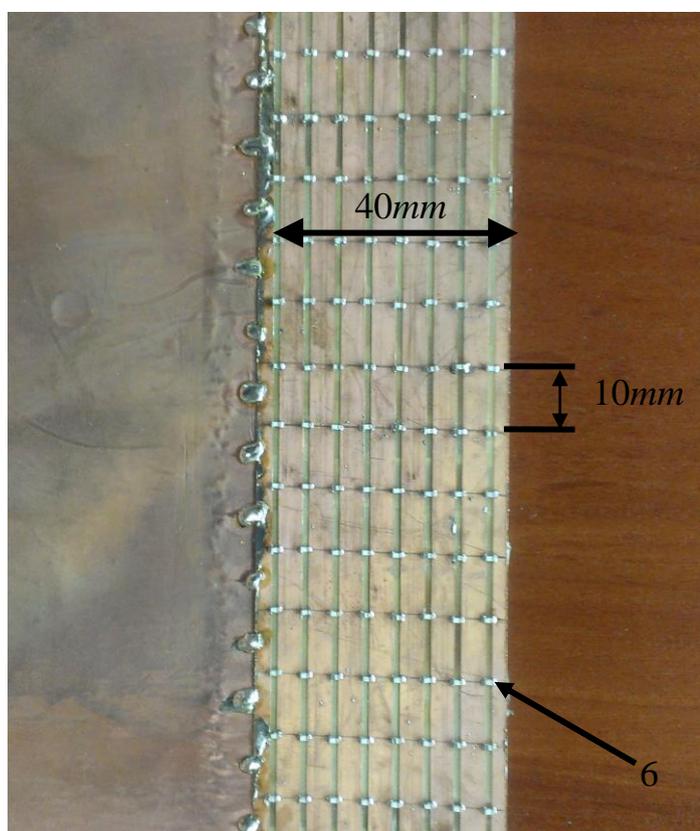


Рис. 2.53. Полупрозрачное окончание экрана

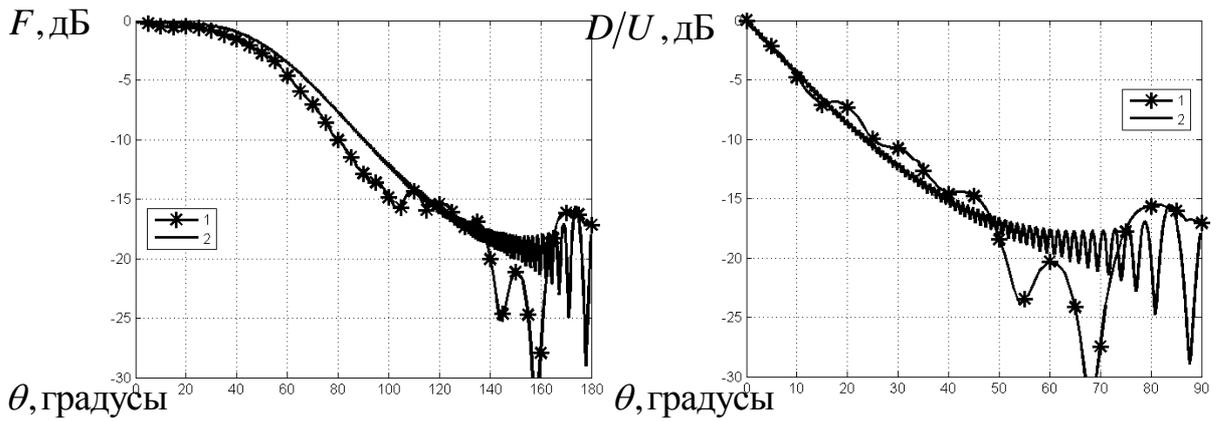


Рис. 2.54. Расчетные и экспериментальные характеристики для идеально проводящего экрана

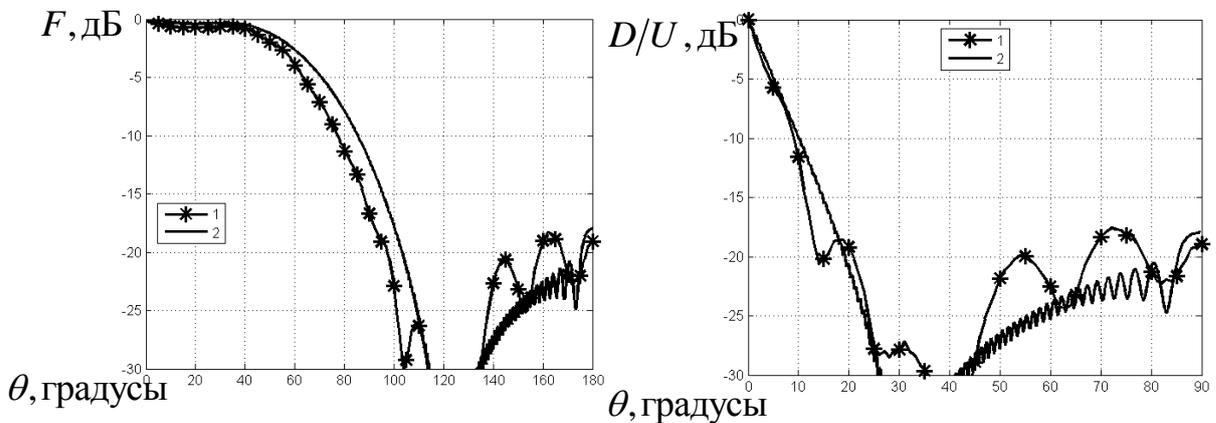


Рис. 2.55. Расчетные и экспериментальные характеристики для экрана с полупрозрачным окончанием

Из сравнения рис. 2.54-2.55 видно, расчетная модель достаточно хорошо описывает экспериментальные графики в интересующей нас области низких углов (до 40 градусов). Как видно из экспериментальных графиков, применение полупрозрачного ребра позволяет получить отношение низ/верх под углом 20 градусов порядка -20дБ, в то время как идеально проводящий экран позволяет получить -7дБ.

2.1. Выводы

1. Разработаны математические модели дифракции поля на вертикальном экране в виде полуплоскости с полупрозрачным окончанием, системе полуплоскостей и на замкнутом экране (в двумерном приближении). Проведены расчеты, выполнена экспериментальная проверка расчетных результатов на образце практически применяемой антенны.
2. Показано, что полуплоскость с полупрозрачным окончанием позволяет уменьшить угловую протяженность зоны полутени, оцениваемую по уровню затухания поля на -15дБ к границе свет-тень, в 2.5 раза по сравнению с идеально проводящей полуплоскостью;
3. Показано, что применение системы из двух или трех полуплоскостей позволяет получить дополнительное подавление поля в зоне тени на 3-5дБ;
4. Установлено, что экраны в виде вертикальных ребер с полупрозрачными окончаниями позволяют улучшить отношение низ/верх антенны позиционирования на 13...15дБ в области углов порядка 20 градусов к горизонту;
5. Синтезированы распределения импеданса для рассмотренных случаев и получено экспериментальное подтверждение расчетных результатов

ГЛАВА 3. Искусственные препятствия для испытательных полигонов аппаратуры спутникового позиционирования

3.1. Математическая модель полусферического полупрозрачного препятствия

Рассмотрим модель полупрозрачного препятствия в виде укрытия полусферической формы радиуса R , установленного над землей, внутри которого расположена антенна приема спутниковых сигналов (рис. 3.1).

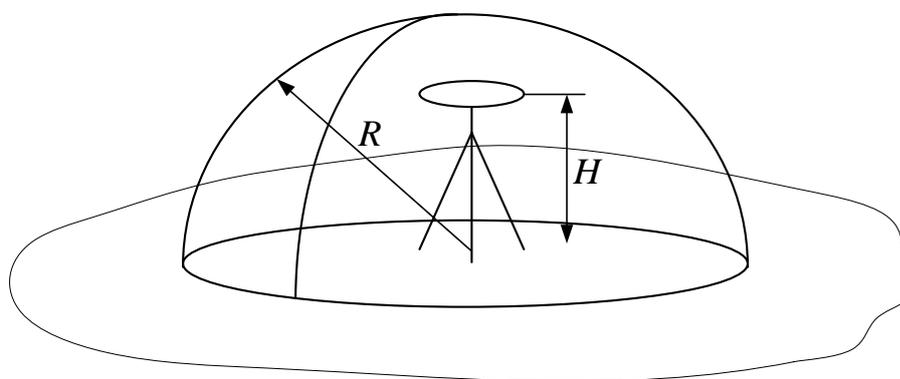


Рис. 3.1. Антенна под искусственным препятствием

В целях упрощения расчетов, поверхность реальной земли может быть заменена идеально проводящей плоскостью. Такая модель является удовлетворительной, в частности, для влажной почвы [4]. На полупрозрачной полусфере выполняются граничные условия

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\tau^+ = \mathbf{E}_\tau^- = \mathbf{E}_\tau \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-] = \mathbf{j}^e = \frac{\mathbf{E}_\tau}{Z_L} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

где Z_L - импеданс полусферы; \mathbf{j}^e - вектор поверхностной плотности электрического тока, текущего по полусфере; \mathbf{n} - внешняя нормаль к поверхности полусферы; \mathbf{E}_τ - касательная к полусфере составляющая

вектора электрического поля; \mathbf{H}^{\pm} - вектор магнитного поля; знаки “+” и “-” означают стремление к поверхности полусферы, с внешней и внутренней стороны, соответственно.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) , начало которой совпадает с центром полусферы, как показано на рис. 3.2. Внутри полости, образованной полусферой и идеально проводящей плоскостью на высоте H разместим модель приемной антенны ГНСС в виде двух колец магнитного тока с амплитудами I_1 и I_2 .

$$\mathbf{j}^{\text{м.ст}} = \mathbf{j}^{\text{м.ст1}} + \mathbf{j}^{\text{м.ст2}} = \mathbf{i}_{\varphi} I_1 e^{-im\varphi} \frac{\delta(r-r_1)}{r_1^2} \frac{\delta(\theta-\theta_1)}{\sin \theta_1} + \mathbf{i}_{\varphi} I_2 e^{-im\varphi} \frac{\delta(r-r_2)}{r_2^2} \frac{\delta(\theta-\theta_2)}{\sin \theta_2}, \quad (3.1.2)$$

где I_1 - амплитуда верхнего кольца тока; $I_2 = I_1 e^{-i(k\Delta H + \pi)}$ - амплитуда нижнего кольца тока; m - номер азимутальной гармоники (для правой круговой поляризации в верхней полусфере $m=1$); $\theta_1 = \arctg \frac{r_s}{H}$, $\theta_2 = \arctg \frac{r_s}{H - \Delta H}$ - угломестные координаты в сферической системе координат верхнего и нижнего колец магнитного тока; $r_1 = \frac{r_s}{\sin \theta_1}$, $r_2 = \frac{r_s}{\sin \theta_2}$ - радиальные координаты в сферической системе координат верхнего и нижнего колец магнитного тока; ΔH - расстояние между кольцами магнитного тока (величина $\sim 0.05\lambda$); Амплитуды I_1 и I_2 выбраны таким образом, чтобы излучение вниз двух колец магнитного тока складывались в противофазе. При вычислениях радиус колец r_s подбирается так, чтобы обеспечить усиление в направлении местного горизонта ($\theta = \pi/2$) порядка -12...-14дБ к зениту ($\theta = 0$). Эта значение является типичным для применяемых антенн. Таким образом, ДН источника в свободном пространстве приобретает вид кардиоиды, и показана на рис. 3.3. График построен при значениях $r_s = 0.1\lambda$ и $\Delta H = 0.05\lambda$.

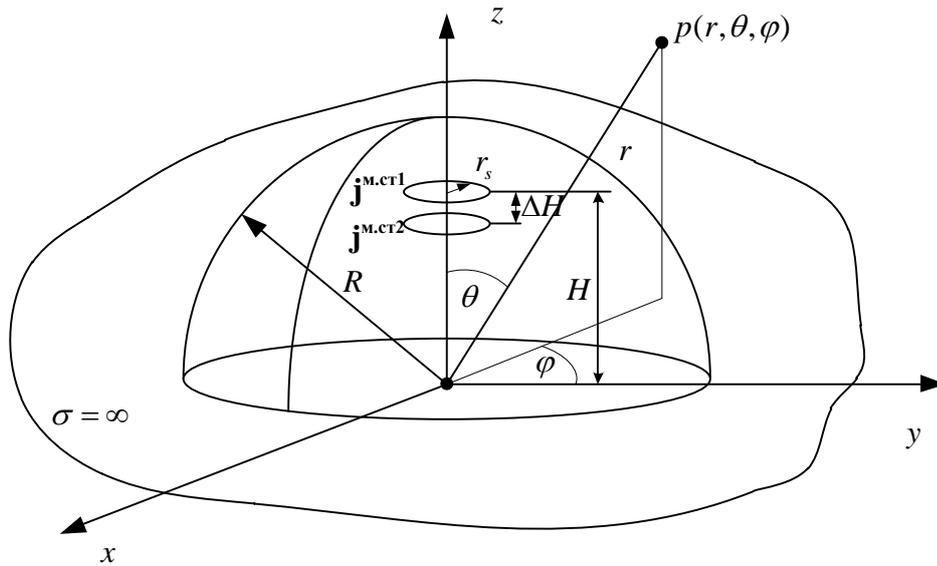


Рис. 3.2. Модель антенны, расположенной под искусственным препятствием

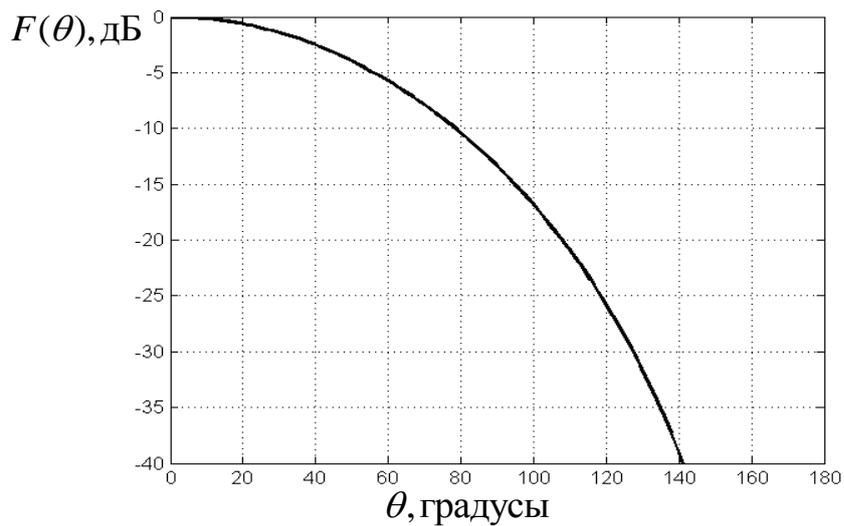


Рис. 3.3. Диаграмма направленности источника в свободном пространстве

В силу принципа зеркальных изображений, полусфера над идеально проводящей поверхностью может быть дополнена до полной сферы (рис. 3.4), а также введен зеркальный источник $\mathbf{j}^{m.cr'}$:

$$\mathbf{j}^{m.cr'} = \mathbf{j}^{m.cr1'} + \mathbf{j}^{m.cr2'} = \mathbf{i}_\varphi I_1 e^{-im\varphi} \frac{\delta(r-r_1)}{r_1^2} \frac{\delta(\theta+\theta_1)}{\sin\theta_1} + \mathbf{i}_\varphi I_2 e^{-im\varphi} \frac{\delta(r-r_2)}{r_2^2} \frac{\delta(\theta+\theta_2)}{\sin\theta_2} \quad (3.1.3)$$

Рассмотрим определение поля, возбуждаемого одним кольцом магнитного тока $\mathbf{j}_0^{\text{м.ст}}$.

$$\mathbf{j}_0^{\text{м.ст}} = \mathbf{i}_\varphi I_0 e^{-im\varphi} \frac{\delta(r-r_0)}{r_0^2} \frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin\theta_0}, \quad (3.1.4)$$

где $r_0 < R$, $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

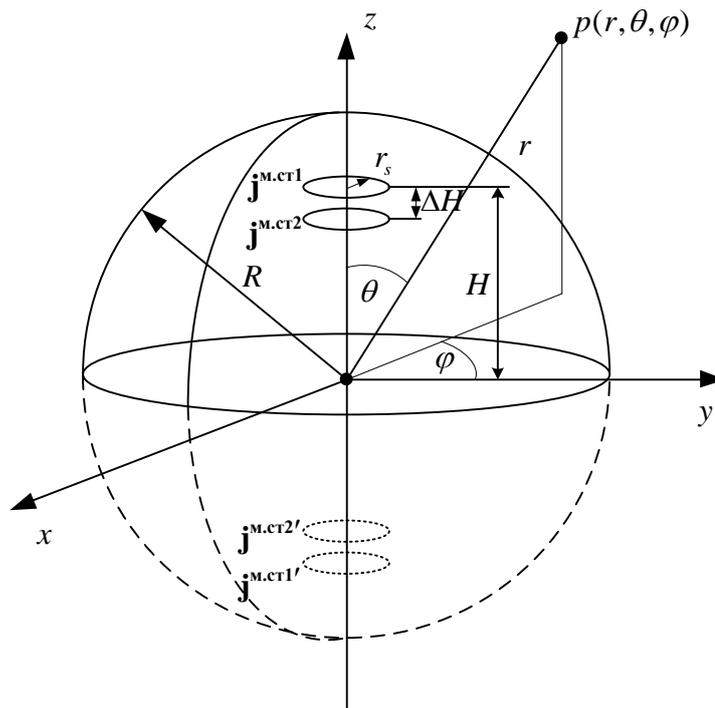


Рис. 3.4. Применение принципа зеркальных изображений

Эта задача решается с помощью разложения поля на электрические и магнитные волны распространяющихся вдоль оси r в сферической системе координат [50,51]. Выпишем решение для продольной составляющей электрического поля. Так как сторонний ток содержит только одну азимутальную гармонику $m=1$, то и решение тоже будет содержать только одну азимутальную гармонику $m=1$.

$$E_r = \frac{1}{r} \sum_{n=|m|}^{\infty} n(n+1)U_m^{\circ}, \text{ где} \quad (3.1.5)$$

$$U_m^{\circ} = P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \begin{cases} A_n^{\circ} \xi_n^{(2)}(kr) & r > R \\ B_n^{\circ} \xi_n^{(2)}(kr) + C_n^{\circ} \psi_n(kr) & r_0 < r < R; \\ D_n^{\circ} \psi_n(kr) & r < r_0 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

$A_n^{\circ}, B_n^{\circ}, C_n^{\circ}, D_n^{\circ}$ - неизвестные амплитуды; $\xi_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$;

$\psi_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr)$; $P_n^m(\cos \theta)$ - присоединенная функция Лежандра 1-го рода степени n , порядка m .

Выпишем выражения для поперечных составляющих электрического и магнитного полей E-волн:

$$E_{\theta}^{\circ} = \frac{1}{r} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial^2 (rU_m^{\circ})}{\partial \theta \partial r} \quad (3.1.7)$$

$$E_{\varphi}^{\circ} = \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial^2 (rU_m^{\circ})}{\partial \varphi \partial r} \quad (3.1.8)$$

$$H_{\theta}^{\circ} = \frac{imk}{W_0 \sin \theta} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial (rU_m^{\circ})}{\partial \varphi} \quad (3.1.9)$$

$$H_{\varphi}^{\circ} = -\frac{ik}{rW_0} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial (rU_m^{\circ})}{\partial \theta} \quad (3.1.10)$$

Для определения неизвестных амплитуд $A_n^{\circ}, B_n^{\circ}, C_n^{\circ}, D_n^{\circ}$ потребуем выполнения граничных условий для скачка электрического поля на сфере с радиусом $r = r_0$ и для скачка магнитного поля на сфере с радиусом $r = R$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_n^{\vartheta+}(r_0) - \mathbf{E}_n^{\vartheta-}(r_0)] = -\mathbf{j}_n^{m\vartheta} \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_n^{\vartheta+}(r_0) - \mathbf{H}_n^{\vartheta-}(r_0)] = 0 \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_n^{\vartheta+}(R) - \mathbf{H}_n^{\vartheta-}(R)] = \mathbf{j}_n^{e\vartheta} = \frac{[[\mathbf{n}, \mathbf{E}_n^{\vartheta+}(R)], \mathbf{n}]}{Z_L}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}_n^{\vartheta+}(R) - \mathbf{E}_n^{\vartheta-}(R)] = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.11)$$

где знаки “+” и “-” означают значения полей на внешней и внутренней стороне поверхности сферы, причем, для первых двух уравнений радиус сферы $r = r_0$, а для последних двух уравнений радиус сферы $r = R$; n - номер гармоники; $\mathbf{j}_n^{m\vartheta}$ - элемент разложения стороннего магнитного тока по E-волнам; $\mathbf{j}_n^{e\vartheta}$ - аналогично для вторичного электрического тока, текущего по сфере.

Получим из (3.1.11) граничные условия для компонент электрического и магнитного поля, раскрыв векторные произведения

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\varphi n}^{\vartheta+}(r_0) - E_{\varphi n}^{\vartheta-}(r_0) = j_{\theta n}^{m\vartheta} \\ H_{\theta n}^{\vartheta+}(r_0) - H_{\theta n}^{\vartheta-}(r_0) = 0 \\ E_{\varphi n}^{\vartheta+}(R) - E_{\varphi n}^{\vartheta-}(R) = 0 \\ H_{\theta n}^{\vartheta+}(R) - H_{\theta n}^{\vartheta-}(R) = j_{\varphi n}^{e\vartheta} = \frac{E_{\varphi n}^{\vartheta+}(R)}{Z_L} \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

Вычислим поле источника в свободном пространстве по обе стороны от сферы с радиусом $r = r_0$ и разложим его по E-волнам и вычислим скачек φ -той составляющей электрического поля

$$\begin{aligned} E_{\varphi n}^{\vartheta+}(r_0) &= \frac{-im}{r_0 \sin \theta} e^{-im\varphi} P_n^m(\cos \theta) F_n^{2\vartheta} \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) = \\ &= -\frac{1}{2} I_0 km \frac{1}{r_0 \sin \theta} e^{-im\varphi} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} \psi_n(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned}
E_{\varphi n}^{\vartheta-}(r_0) &= \frac{-im}{r_0 \sin \theta} e^{-im\varphi} P_n^m(\cos \theta) F_n^{1\vartheta} \frac{\partial}{\partial r_0} (r\psi_n(kr_0)) = \\
&= -\frac{1}{2} I_0 km \frac{1}{r_0 \sin \theta} e^{-im\varphi} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} \xi_n^{(2)}(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r\psi_n(kr_0))
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

где

$$\begin{aligned}
F_n^{s\vartheta} &= -\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{W_0}{4\pi} \int_V i \frac{k}{W_0} j_\varphi^m R_n^s(kr') \frac{\partial P_n^m(\cos \theta')}{\partial \theta'} e^{im\varphi'} r'^2 \sin \theta' d\theta' dr' d\varphi' = \\
&= -\frac{1}{2} i I_0 k \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} R_n^s(kr_0)
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

и

$$R_n^1(kr') = \xi_n^{(2)}(kr') = \sqrt{\frac{\pi}{2kr'}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr') \text{ при } s=1; \tag{3.1.16}$$

$$R_n^2(kr') = \psi_n(kr') = \sqrt{\frac{\pi}{2kr'}} J_{n+1/2}(kr') \text{ при } s=2 \tag{3.1.17}$$

Теперь запишем выражение для θ -вой составляющей элемента разложения стороннего магнитного тока по Е-волнам, подставив (3.1.13-3.1.14) в 1-е уравнение (3.1.12)

$$\begin{aligned}
j_{\theta n}^m &= E_{\varphi n}^{\vartheta+}(r_0) - E_{\varphi n}^{\vartheta-}(r_0) = \\
&= \frac{1}{2} I_0 km \frac{1}{r_0 \sin \theta} e^{-im\varphi} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} \times \\
&\times \left(\xi_n^{(2)}(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - \psi_n(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \right)
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Подставив в 1-е уравнение системы (3.1.12) выражение для n -го члена ряда (3.1.8), в котором учтено (3.1.6), и подставив (3.1.18), получим

$$\begin{aligned}
& B_n^3 \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) + C_n^3 \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - D_n^3 \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) = \\
& = \frac{1}{2} i I_0 k \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} \left(\xi_n^{(2)}(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - \psi_n(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \right)
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Подставив во 2-е уравнение системы (3.1.12) выражение для n -го члена ряда (3.1.9), в котором учтено (3.1.6), получим

$$B_n^3 \xi_n^{(2)}(kr_0) + C_n^3 \psi_n(kr_0) - D_n^3 \psi_n(kr_0) = 0 \tag{3.1.20}$$

Подставив в 3-е уравнение системы (3.1.12) выражение для n -го члена ряда (3.1.8), в котором учтено (3.1.6), получим

$$A_n^3 \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) - B_n^3 \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) - C_n^3 \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) = 0 \tag{3.1.21}$$

Подставив в 4-е уравнение системы (3.1.12) выражение для n -го члена ряда (3.1.9), и подставив выражение для n -го члена ряда (3.1.8), в которых учтено (3.1.6) получим

$$A_n^3 \left(\xi_n^{(2)}(ka) - \frac{1}{iak} \frac{W_0}{Z_L} \frac{\partial}{\partial a} (a \xi_n^{(2)}(ka)) \right) - B_n^3 \xi_n^{(2)}(ka) - C_n^3 \psi_n(ka) = 0 \tag{3.1.22}$$

Уравнения (3.1.19)-(3.1.22) образуют систему уравнений для Е-волн относительно амплитуд A_n^3 , B_n^3 , C_n^3 , D_n^3

$$\begin{cases}
0 & +B_n^3 \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) & +C_n^3 \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) & -D_n^3 \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) = \\
& \frac{1}{2} i I_0 k \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} \left(\xi_n^{(2)}(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - \psi_n(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \right) \\
0 & +B_n^3 \xi_n^{(2)}(kr_0) & +C_n^3 \psi_n(kr_0) & -D_n^3 \psi_n(kr_0) = 0 \\
A_n^3 \frac{\partial}{\partial a} (a \xi_n^{(2)}(kR)) & -B_n^3 \frac{\partial}{\partial a} (a \xi_n^{(2)}(kR)) & -C_n^3 \frac{\partial}{\partial a} (a \psi_n(kR)) & +0 = 0 \\
A_n^3 \left(\xi_n^{(2)}(ka) - \frac{1}{iak} \frac{W_0}{Z_L} \frac{\partial}{\partial a} (a \xi_n^{(2)}(ka)) \right) & -B_n^3 \xi_n^{(2)}(ka) & -C_n^3 \psi_n(ka) & +0 = 0
\end{cases} \tag{3.1.23}$$

Запишем решение системы уравнений для Е-волн:

$$\left\{ \begin{aligned}
 A_n^e &= -\frac{1}{2} i I_0 k \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\psi_n(kr_0) \left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \right) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0}}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \psi_n(kR) \right) - \frac{1}{iRk} \frac{W_0}{Z_L} \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR))} \\
 B_n^e &= -\frac{1}{2} i I_0 k \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \psi_n(kr_0) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} \\
 C_n^e &= -\frac{1}{2} I_0 \frac{W_0}{Z_L} \frac{1}{R} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\psi_n(kr_0) \left(\frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \right)^2 \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0}}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \psi_n(kR) \right) - \frac{1}{iRk} \frac{W_0}{Z_L} \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR))} \\
 D_n^e &= -\frac{1}{2} i I_0 k \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) \xi_n^{(2)}(kR) \xi_n^{(2)}(kr_0) - \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \xi_n^{(2)}(kr_0) \psi_n(kR)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \psi_n(kR) \right) - \frac{1}{iRk} \frac{W_0}{Z_L} \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR))} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} + \\
 &+ \frac{1}{2} i I_0 k \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\frac{1}{iRk} \frac{W_0}{Z_L} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) \xi_n^{(2)}(kr_0) - \left(\frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \right)^2 \psi_n(kr_0) \right)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \psi_n(kR) \right) - \frac{1}{iRk} \frac{W_0}{Z_L} \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR))} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0}
 \end{aligned} \right. \quad (3.1.24)$$

Аналогично, рассмотрим магнитные волны. Здесь также решение будет содержать только одну азимутальную гармонику $m=1$.

$$H_r = \frac{1}{r} \sum_{n=|m|}^{\infty} n(n+1) U_n^m, \text{ где} \quad (3.1.25)$$

$$U_m^m = P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \begin{cases} A_n^m \xi_n^{(2)}(kr) & r > R \\ B_n^m \xi_n^{(2)}(kr) + C_n^m \psi_n(kr) & r_0 < r < R, \\ D_n^m \psi_n(kr) & r < r_0 \end{cases} \quad (3.1.26)$$

а A_n^m , B_n^m , C_n^m , D_n^m - неизвестные амплитуды.

Выпишем выражения для поперечных составляющих электрического и магнитного полей Н-волн:

$$H_\theta^m = \frac{1}{r} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial^2 (r U_m^m)}{\partial \theta \partial r} \quad (3.1.27)$$

$$H_{\varphi}^M = \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial^2 (rU_m^M)}{\partial \varphi \partial r} \quad (3.1.28)$$

$$E_{\theta}^M = -\frac{imk}{W_0 \sin \theta} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial (rU_m^M)}{\partial \varphi} \quad (3.1.29)$$

$$E_{\varphi}^M = \frac{ik}{rW_0} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial (rU_m^M)}{\partial \theta} \quad (3.1.30)$$

Процедура нахождения неизвестных амплитуд аналогична случаю Е-волн и приведена в Приложении 7. Таким образом, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n^M = -\frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{W_0} \frac{1}{n(n+1)} \frac{2n+1}{(n-m)!} \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) \left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \right) \frac{P_n^m(\cos \theta_0)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \right) + iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR)} \\ B_n^M = -\frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{W_0} \frac{1}{n(n+1)} \frac{2n+1}{(n-m)!} \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) P_n^m(\cos \theta_0) \\ C_n^M = -\frac{1}{2} I_0 R k m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{Z_L} \frac{1}{n(n+1)} \frac{2n+1}{(n-m)!} \frac{\frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) (\xi_n^{(2)}(kR))^2 P_n^m(\cos \theta_0)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \right) + iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR)} \\ D_n^M = \frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{W_0} \frac{1}{n(n+1)} \frac{2n+1}{(n-m)!} \frac{\frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \psi_n(kR) - \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \xi_n^{(2)}(kR)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \right) + iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR)} P_n^m(\cos \theta_0) + \\ + \frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{W_0} \frac{1}{n(n+1)} \frac{2n+1}{(n-m)!} \frac{iRk \frac{W_0}{Z_L} \left((\xi_n^{(2)}(kR))^2 \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \right)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R\xi_n^{(2)}(kR)) \right) + iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR)} P_n^m(\cos \theta_0) \end{array} \right. \quad (3.1.31)$$

Выражения (3.1.23) и (3.1.31) определяют амплитуды сферических гармоник компонент электрического и магнитного полей Е- и Н-волн одного кольца магнитного тока, расположенного внутри сферы. Аналогичная процедура проводится для каждого из колец магнитного тока, показанных на рис. 3.4.

Перейдем теперь к вычислению поля в дальней зоне. Суммарное поле всех источников обозначим как E_φ^Σ . Оно определяется как сумма поля реального источника $\mathbf{j}^{\text{м.ст}}$ (3.2.2) и поля зеркального источника $\mathbf{j}^{\text{м.ст}'}$ (3.2.3). Причем φ -я компонента электрического поля зеркального источника берется со знаком минус

$$E_\theta^\Sigma = E_\theta^\vartheta(\mathbf{j}^{\text{м.ст}}) + E_\theta^M(\mathbf{j}^{\text{м.ст}}) + E_\theta^\vartheta(\mathbf{j}^{\text{м.ст}'}) + E_\theta^M(\mathbf{j}^{\text{м.ст}'}) \quad (3.1.42)$$

$$E_\varphi^\Sigma = E_\varphi^\vartheta(\mathbf{j}^{\text{м.ст}}) + E_\varphi^M(\mathbf{j}^{\text{м.ст}}) - E_\varphi^\vartheta(\mathbf{j}^{\text{м.ст}'}) - E_\varphi^M(\mathbf{j}^{\text{м.ст}'}) \quad (3.1.43)$$

Подставив в (3.1.7) выражение (3.1.6), получим выражения для поля в дальней зоне для электрических волн

$$\begin{aligned} E_\theta^\vartheta &= \frac{1}{r} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial^2 (rU_m^\vartheta)}{\partial \theta \partial r} = \frac{1}{r} e^{-im\varphi} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_n^\vartheta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_n^{(2)}(kr)) \approx \\ &\approx -\frac{1}{r} e^{-im\varphi} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_n^\vartheta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}(n+2)\right)} \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi^\vartheta &= \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial^2 (rU_m^\vartheta)}{\partial \varphi \partial r} = -im \frac{1}{r \sin \theta} e^{-im\varphi} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_n^\vartheta P_n^m(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_n^{(2)}(kr)) \approx \\ &\approx im \frac{1}{r \sin \theta} e^{-im\varphi} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_n^\vartheta P_n^m(\cos \theta) e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}(n+2)\right)} \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Подставив в (3.1.29) выражение (3.1.26), получим выражения для поля в дальней зоне для магнитных волн

$$\begin{aligned} E_\theta^M &= -\frac{ikW_0}{r \sin \theta} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial (rU_m^M)}{\partial \varphi} = -m \frac{kW_0}{\sin \theta} e^{-im\varphi} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_n^M P_n^m(\cos \theta) \xi_n^{(2)}(kr) \approx \\ &\approx -m \frac{W_0}{r \sin \theta} e^{-im\varphi} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_n^M P_n^m(\cos \theta) e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}(n+1)\right)} \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

$$\begin{aligned}
E_{\varphi}^m &= \frac{ikW_0}{r} \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{\partial(rU_n^m)}{\partial\theta} = ikW_0 e^{-im\varphi} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_n^m \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \xi_n^{(2)}(kr) \approx \\
&\approx i \frac{1}{r} W_0 e^{-im\varphi} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_n^m \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}
\end{aligned} \tag{3.1.47}$$

Таким образом, подставив (3.1.44, 3.1.46) в (3.1.42) и (3.1.45, 3.1.57) в (3.1.43) с амплитудами A_n^{ϑ} и A_n^m , вычисленными по (3.1.23) и (3.1.40) для каждого из колец магнитного тока, получим суммарное поле в дальней зоне E_{θ}^{Σ} , E_{φ}^{Σ} .

3.2. Синтез полупрозрачной структуры

В качестве поверхности с требуемой для реализации искусственного препятствия прозрачностью используется периодическая щелевая структура с квадратными ячейками, расположенная на диэлектрической подложке, вид которой показан на рис. 3.5. Период структуры обозначен через d , ширина щели $2a$, толщина подложки h с диэлектрической проницаемостью ε .

Импеданс периодической щелевой структуры с квадратными ячейками, расположенной на диэлектрической подложке оценивается по формулам (3.1.52-3.1.54), вывод которых приведен в Приложении 5.

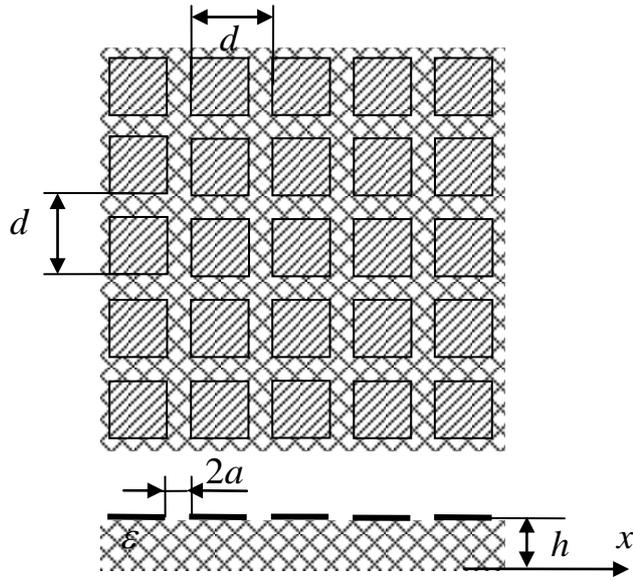


Рис. 3.5. Периодическая щелевая структура с квадратными ячейками

$$Z_L = -\frac{1}{2} \frac{k_{z0}}{k_1} \frac{1+R}{R} W_1, \quad (3.2.1)$$

где

$$R = \frac{E_x^{omp}}{E_x^{nad}} = \frac{C \frac{a\pi}{d} - \frac{k_{z0}}{k_1}}{\frac{k_{z0}}{k_1}}; \quad (3.2.2)$$

$$C = \frac{2}{\frac{a\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_0^2\left(\frac{2\pi na}{d}\right) k_{zn1} \left(1 + \frac{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n1}}{K_{n2}} \sin k_{zn2}h}{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n2}}{K_{n1}} \sin k_{zn2}h} \right)}; \quad (3.2.3)$$

k_1 - волновое число в свободном пространстве; $k_2 = k_1 \sqrt{\varepsilon}$ - волновое число в среде с диэлектрической проницаемостью ε ; k_{xn} - поперечное волновое число для поля n -ой пространственной гармоники; $k_{zn1} = \sqrt{k_1^2 - k_{xn}^2}$ - продольное волновое число для полей n -ой пространственной гармоники; $k_{zn2} = \sqrt{k_2^2 - k_{xn}^2}$ - продольное волновое число для полей n -ой

пространственной гармонике; W_1 - волновое сопротивление свободного пространства; $W_2 = W_1 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ - волновое сопротивление в среде с диэлектрической проницаемостью ε ; $K_{n1} = W_1 k_{zn1} k_2$; $K_{n2} = W_2 k_{zn2} k_1$

Рассмотрим результаты расчетов сетки. Введем обозначение $X_L = \text{Im}(Z_L)$ для реактивного емкостного импеданса щелевой структуры. На рис. 3.6 приведена зависимость X_L от ширины щели $2a$ при $d = 0.08\lambda$; $\varepsilon = 5$; $h = 0.008\lambda$. Из этого графика видно, что при увеличении ширины щели $2a$ модуль X_L увеличивается. На рис. 3.7 приведена зависимость X_L от периода щелевой структуры d при $2a = 0.005\lambda$, $\varepsilon = 5$, $h = 0.008\lambda$. Из этого графика видно, что при увеличении периода щелевой структуры d модуль X_L уменьшается. На рис. 3.8 приведена зависимость X_L от диэлектрической проницаемости подложки ε при $2a = 0.005\lambda$, $d = 0.08\lambda$, $h = 0.008\lambda$. Из этого графика видно, что при увеличении диэлектрической проницаемости подложки ε модуль X_L уменьшается. На рис. 3.9 приведена зависимость X_L от толщины подложки h при $2a = 0.005\lambda$, $d = 0.08\lambda$, $\varepsilon = 5$. Из этого графика видно, что при увеличении толщины подложки h модуль X_L уменьшается. На рис. 3.10 приведена частотная зависимость X_L при $2a = 0.005\lambda$, $d = 0.08\lambda$, $\varepsilon = 5$, $h = 0.008\lambda$. Из этого графика видно, что при увеличении частоты f модуль X_L уменьшается.

На основании графиков рис. 3.6-3.10 для практической реализации была выбрана щелевая структура с квадратными ячейками, расположенная на диэлектрической подложке, у которой ширина щелей $a = 1\text{мм}$, период 16.5мм , толщина подложки 1.5мм , диэлектрическая проницаемость подложки $\varepsilon = 5$.

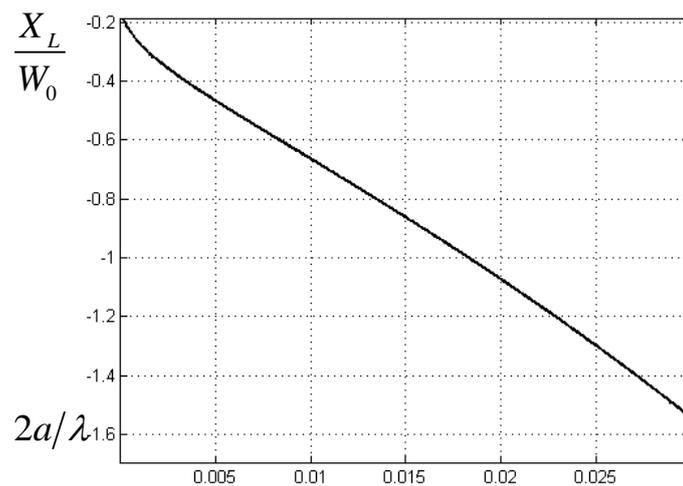


Рис. 3.6 Зависимость импеданса от ширины щели

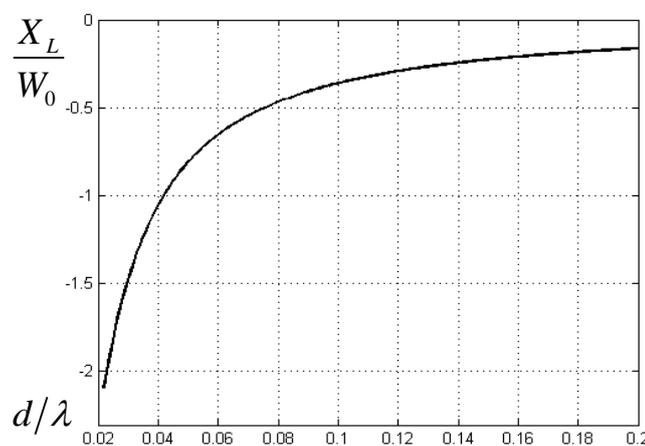


Рис. 3.7. Зависимость импеданса от периода структуры

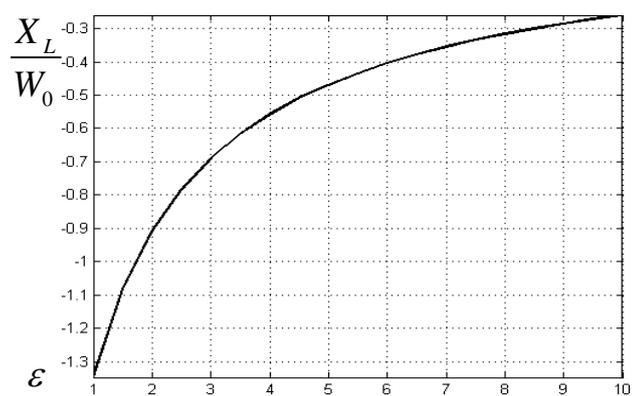


Рис. 3.8. Зависимость импеданса от диэлектрической проницаемости
подложки

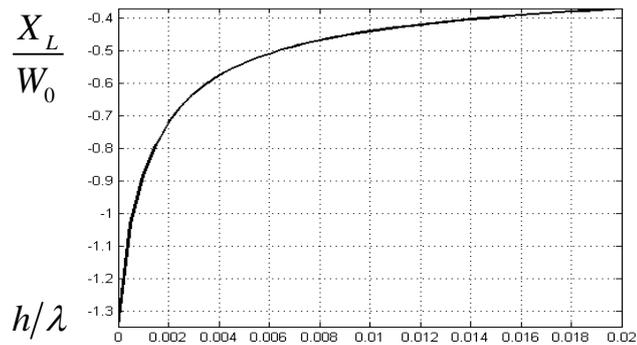


Рис. 3.9. Зависимость импеданса от толщины подложки

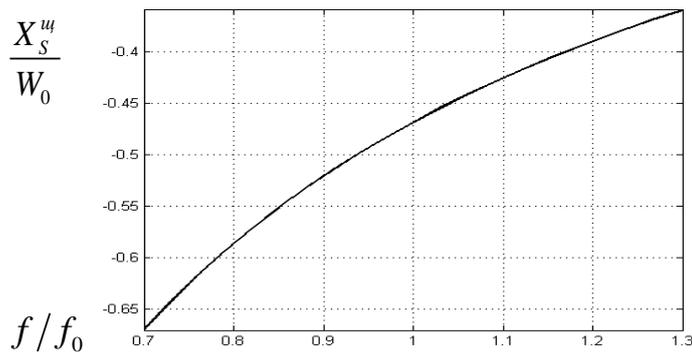


Рис. 3.10. Зависимость импеданса от частоты

3.3. Результаты расчетов характеристик системы антенна-препятствие

По формулам (3.1.24), (3.1.31), (3.1.42-3.1.51) были составлены вычислительные программы. Перейдем к результатам моделирования влияния полупрозрачного полусферического препятствия. Все диаграммы направленности далее рассчитаны для правой поляризации составляющей поля и нормированы к величине поля антенны в направлении зенит $\theta = 0$ в отсутствии препятствия.

На рис. 3.11а-е представлены амплитудные и фазовые ДН системы антенна-препятствие. Параметры, использованные при расчете, указаны в подписи, W_0 - волновое сопротивление свободного пространства, λ - длина волны в вакууме.

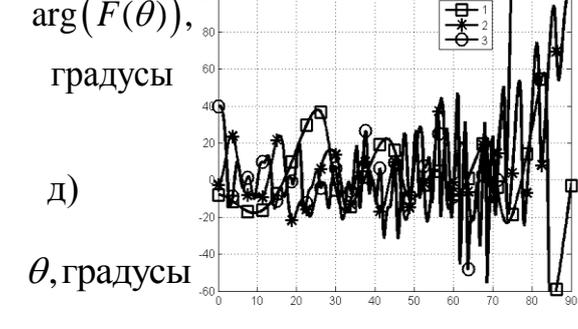
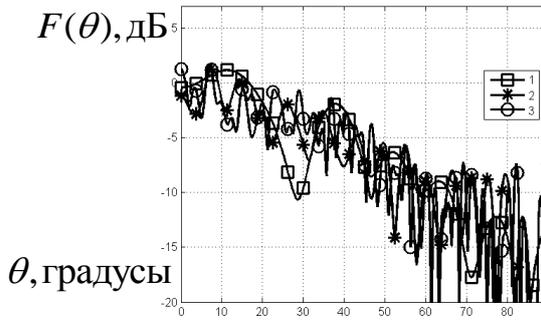
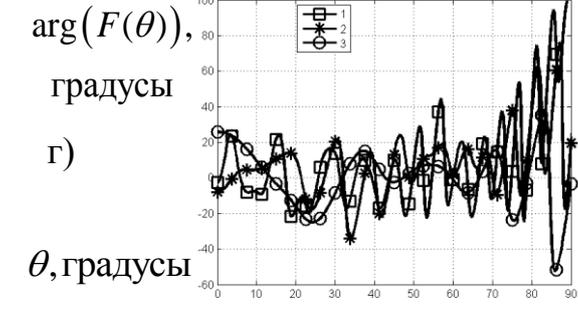
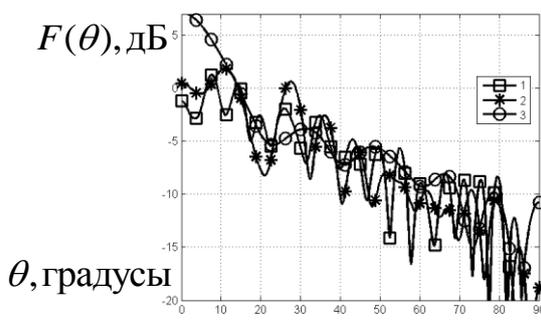
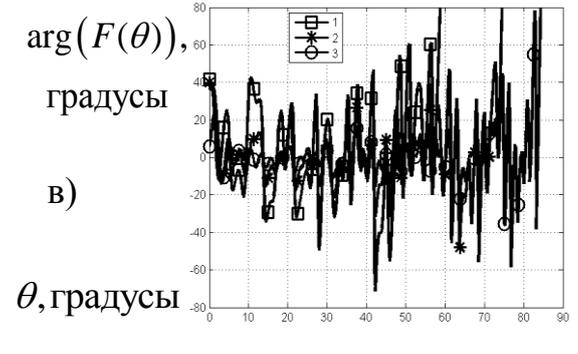
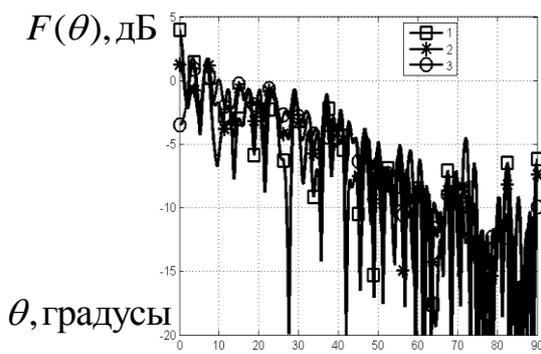
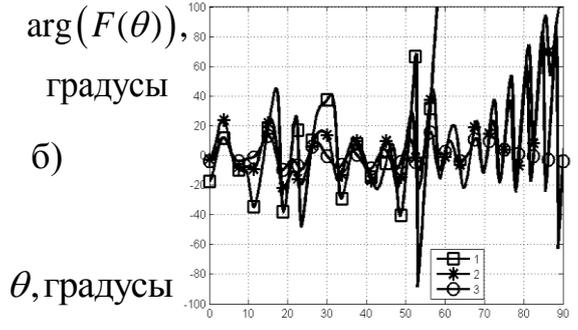
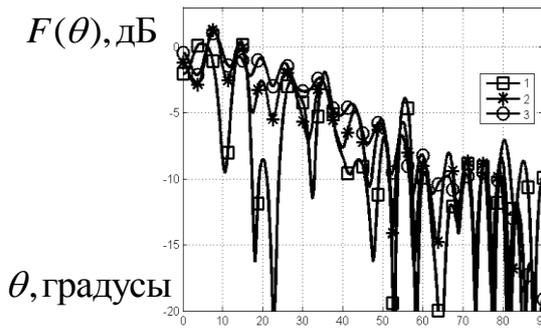
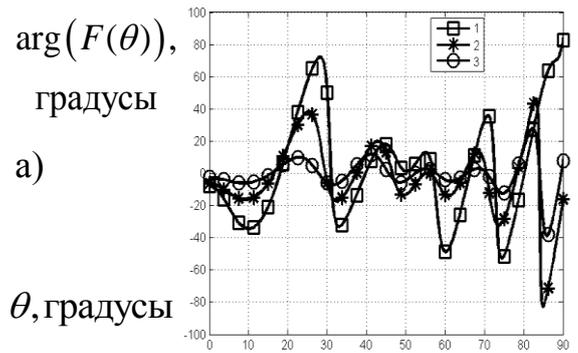
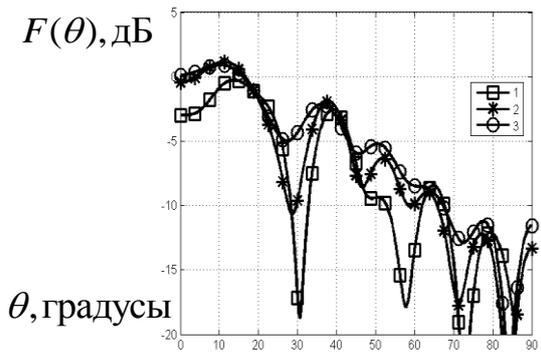


Рис. 3.11. Результаты расчета характеристик системы антенна-препятствие

- а) $R = 5.23\lambda$, $h = 2.61\lambda$. 1: $Z_L = -0.4iW_0$, 2: $Z_L = -0.7iW_0$, 3: $Z_L = -1.2iW_0$
- б) $R = 10.46\lambda$, $h = 2.61\lambda$. 1: $Z_L = -0.4iW_0$, 2: $Z_L = -0.7iW_0$, 3: $Z_L = -1.2iW_0$
- в) $R = 20.93\lambda$, $h = 2.61\lambda$. 1: $Z_L = -0.4iW_0$, 2: $Z_L = -0.7iW_0$, 3: $Z_L = -1.2iW_0$
- г) $Z_L = -0.7iW_0$, $R = 10.47\lambda$. 1: $h = 2.61\lambda$, 2: $h = 5.23\lambda$, 3: $h = 7.85\lambda$
- д) $Z_L = -0.7iW_0$, $h = 2.61\lambda$. 1: $R = 5.23\lambda$, 2: $R = 10.47\lambda$, 3: $R = 20.93\lambda$

Как видно из представленных графиков, ДН системы антенна-препятствие приобретает хаотический характер с многочисленными осцилляциями по амплитуде и фазе. Отметим, что уменьшение модуля импеданса Z_L приводит к увеличению глубины амплитудных и фазовых осцилляций ДН. Так, при величинах импеданса $-0.4iW_0$, $-0.7iW_0$, $-1.2iW_0$ глубина амплитудных осцилляций составляет 20дБ, 10дБ и 5дБ, а глубина фазовых осцилляций составляет 120, 60 и 30 градусов, соответственно. Также видно, что период осцилляций по углу места практически не зависит от величины модуля импеданса. На графиках рис. 3.11г параметром является расстояние между антенной и верхней точкой препятствия h . Из графиков видно, что для получения равномерных амплитудных и фазовых осцилляций наиболее эффективно располагать антенну максимально близко к верхней точке полусферы, т. к. при увеличении этого расстояния происходит увеличение углового периода осцилляций и их неравномерное распределение. Наконец, для графиков рис. 3.11д параметром является радиус препятствия R . При увеличении радиуса препятствия R при постоянном расстоянии h между антенной и верхней точкой препятствия, можно видеть уменьшение периода амплитудных и фазовых осцилляций по углу места. Так, при величинах радиуса 5.23λ , 10.47λ , 20.93λ и величине

$h = 2.61\lambda$ угловой период осцилляций составляет 30, 20 и 10 градусов соответственно.

Все приведенные результаты характеризуют полусферу с емкостным импедансом. Расчеты показали, что характеристики системы с индуктивным импедансом в основных чертах аналогичны. В целом, можно отметить, что набор конструктивных параметров препятствия предоставляется достаточно широким для выбора требуемой степени возмущения исходной ДН антенны.

Представленные характеристики можно обобщить следующим образом. Зависимость минимально возможного углового периода осцилляций ДН от отношения радиуса укрытия к длине волны T_θ приближенно описывается формулой

$$T_\theta = (50 \pm 5) \frac{\lambda}{R}, \text{ градусы} \quad (3.2.1)$$

где: R - радиус полусферического укрытия; λ - длина волны; Практически реализуемым диапазоном радиуса укрытия является отрезок $\frac{R}{\lambda} = 5 \dots 30$. При этом реализуются угловые осцилляции ДН с периодом $T_\theta = 1.5 \dots 11$ градусов.

Из формулы (3.2.1) следует формула, позволяющая по заданному минимальному периоду угловых T_θ осцилляций определить требуемый радиус экрана R :

$$\frac{R}{\lambda} = (50 \pm 5) \frac{1}{T_\theta} \quad (3.2.2)$$

Зависимость глубины осцилляций амплитудной диаграммы направленности ΔF от величины модуля импеданса укрытия

нормированного к волновому сопротивлению свободного пространства $\left| \frac{Z_s}{W_0} \right|$ приближенно описывается формулой

$$\Delta F = 20 \cdot \lg \left((0.5 \pm 0.05) \left| \frac{Z_s}{W_0} \right| \right), \text{ дБ} \quad (3.2.3)$$

При этом, рабочий диапазон модуля импеданса укрытия приблизительно равен $\left| \frac{Z_s}{W_0} \right| = 0.1 \dots 1.2$, в котором реализуются амплитудные осцилляции ДН с глубиной $|\Delta F| = 4 \dots 20 \text{ дБ}$.

Из формулы (3.3.3) следует формула, позволяющая по заданной величине амплитудных осцилляций ДН ΔF определить требуемый модуль импеданса укрытия $\left| \frac{Z_s}{W_0} \right|$:

$$\left| \frac{Z_s}{W_0} \right| = (2 \pm 0.2) 10^{-0.05|\Delta F|} \quad (3.2.4)$$

Зависимость глубины осцилляций фазовой диаграммы направленности $\Delta \Phi$ от величины модуля импеданса укрытия, приближенно описывается формулой

$$\Delta \Phi = (55 \pm 5) \left| \frac{W_0}{Z_s} \right|, \text{ градусы} \quad (3.2.5)$$

Формула (3.2.5) применима при значениях импеданса $\left| \frac{Z_s}{W_0} \right| \geq 0.45$. На этом интервале модуля импеданса экрана возникают фазовые осцилляции ДН с глубиной $\Delta \Phi = 40 \dots 120$ градусов. Для интервала модуля импеданса

$\left| \frac{Z_s}{W_0} \right| = 0.1 \dots 0.45$ расчетная формула (3.2.5) не применима, так как в этом интервале модуля импеданса фазовая ДН испытывает скачки фазы на 180 градусов. Искусственные препятствия, дающие скачки фазовой ДН на 180 градусов также представляют интерес, т. к. это соответствует случаю сильного затенения реальными препятствиями, приводящему к сильной изрезанности амплитудной и фазовой ДН.

Из формулы (3.2.5) следует формула, позволяющая по заданной величине фазовых осцилляций ДН $\Delta\Phi$ определить требуемый модуль импеданса укрытия $\left| \frac{Z_s}{W_0} \right|$:

$$\left| \frac{Z_s}{W_0} \right| = (55 \pm 5) \frac{1}{\Delta\Phi} \quad (3.2.6)$$

3.4. Результаты натурального эксперимента

Фотография опытного образца препятствия показана на рис. 3.12. Препятствие представляет собой полусферу радиусом 2 метра. Полусфера выполнена из щелевой сетки с импедансом $Z_L \approx -0.4iW_0$. Испытуемая антенна типа Торсон G3-A1 помещалась внутрь полусферы на штативе на высоте порядка 1.5 метра над землей. Антенна подключена к приемнику геодезического класса точности типа Торсон NET-G3A. Для сравнения антенна такого же типа располагалась на открытом пространстве.



Рис. 3.12. Фотография опытного образца препятствия

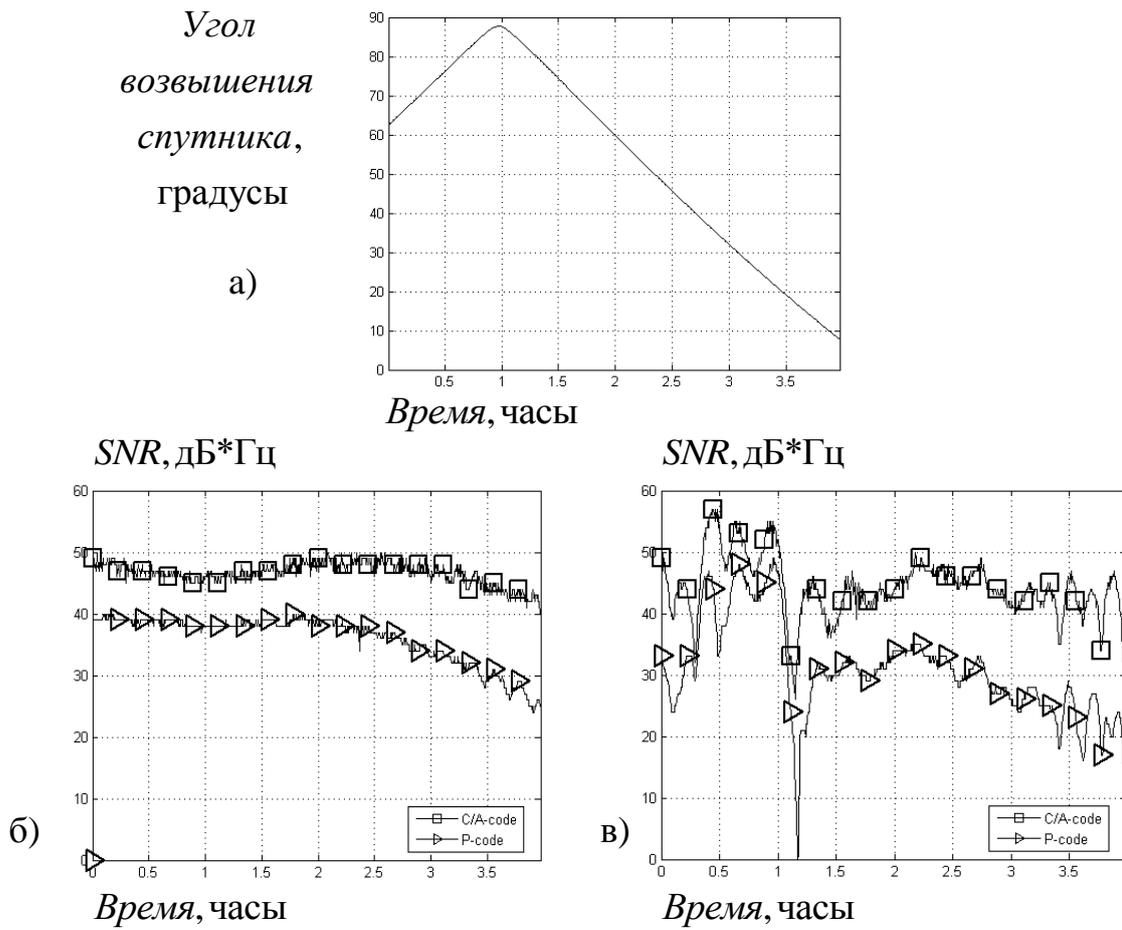


Рис. 3.13. Зависимость отношения сигнал/шум от угла возвышения спутника

В качестве величины, пропорциональной ДН, использовалось отношение сигнал-шум (SNR) навигационных спутников, регистрируемое приемником. Для примера, на рис. 3.13а-в показаны результаты обработки данных сеанса наблюдений за спутником GPS 11. Здесь, рис. 3.13а иллюстрирует зависимость угла возвышения этого спутника над местным горизонтом от времени. На рис. 3.13б показано отношение сигнал-шум, регистрируемое антенной, стоящей на открытой местности, а на рис. 3.13в – антенной, расположенной под искусственным препятствием. Из сравнения графиков видно, что возмущения, вносимые препятствием, по характеру совпадают с расчетными. Это свидетельствует о реализуемости характеристик препятствия, полученных расчетным путем.

Для сравнения такая же антенна помещалась в лесу, показанном на фотографии рис. 3.14 и поблизости от леса под открытым небом. Зависимость угла возвышения спутника GPS8 от времени приведена на рис. 3.13а, графики отношения сигнал-шум для антенны на открытой местности и в лесу показаны на рис. 3.13б,в соответственно.



Рис. 3.14. Фотография антенны, установленной в лесу

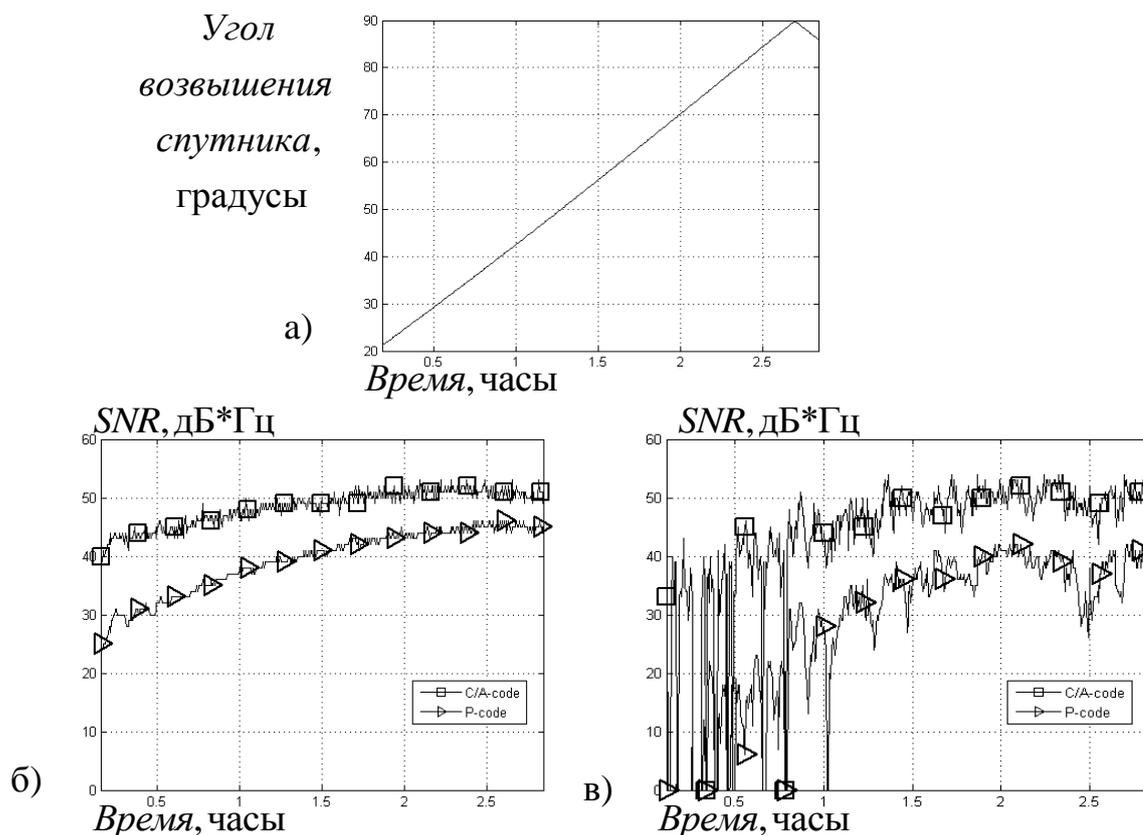


Рис. 3.15. Зависимость отношения сигнал/шум от угла возвышения спутника

Из сравнения графиков рис. 3.13 и 3.15 видно, что установка антенны под полупрозрачным препятствием и в лесу приводит к осцилляциям отношения сигнал/шум сходным по характеру, однако для не слишком малых углов возвышения, уровень осцилляций в условиях действия препятствия составляет порядка 20дБ, а при нахождении приемника в данном лесу - 10дБ. Расчеты показали, что для данного конкретного участка леса лучшим приближением является величина импеданса $Z_L \approx -0.7iW_0$. Таким образом, искусственное препятствие может имитировать различные естественные препятствия. Обеспечение соответствия между измерениями под искусственным препятствием и измерениями в условиях действия естественных препятствий возможно путем выбора соответствующих параметров радиуса и импеданса препятствия. Отметим, что частичный учет

поглощения возможен путем введения резистивных элементов в конструкцию полупрозрачной структуры.

3.5. Выводы

1. Разработана математическая модель полусферического полупрозрачного искусственного препятствия для сигналов ГНСС, работающего по принципу резонатора Фабри-Перо с размерами, значительно превышающими длину волны. Проведены расчеты ДН источника, помещенного внутри препятствия.
2. Синтезирована полупрозрачная щелевая сетчатая структура, выполненная на диэлектрической подложке.
3. Показано, что для достижения сходства с естественными зелеными насаждениями практически целесообразным является следующий диапазон изменения основных параметров препятствия: радиус препятствия $R = 5...30\lambda$, расстояние между антенной и препятствием $h = 2...5\lambda$, модуль импеданса препятствия, отнесенного к волновому сопротивлению свободного пространства $\left| \frac{Z_s}{W_0} \right| = 0.1...1.2$.
4. Разработан экспериментальный образец искусственного полусферического препятствия. Экспериментально установлено, что угловые осцилляции отношения сигнал/шум для антенны, установленной под искусственным препятствием и в естественном лесу, совпадают по характеру, что обуславливает возможность применения данного искусственного препятствия для отработки алгоритмов позиционирования в условиях затенений, близких по характеру к хаотическим.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе рассмотрены антенны и экраны для систем спутникового позиционирования, формирующие ДН с отсечкой при пересечении местного горизонта и искусственные препятствия для испытательных полигонов. Основные выводы по работе состоят в следующем.

1. Разработанная модель антенны бегущей волны в виде плоскопараллельного волновода с полупрозрачными стенками показала, что равномерная ДН в верхней (рабочей) полусфере с падением КУ на 20 дБ при пересечении горизонта достигается при габаритном размере антенны порядка 1.5 длины волны. Эти характеристики сохраняются в полосе частот 1550...1620 МГц.

2. Предложена спиральная антенна бегущей волны с включенными реактивными компонентами, обеспечивающая неравномерность ДН в верхней (рабочей) полусфере в пределах 12...15 дБ и резкое уменьшение КУ на 20 дБ в секторе углов +/- 10 градусов относительно местного горизонта. Антенна работает в полосе частот сигналов ГНСС L1.

В результате полевых испытаний этой антенны в составе аппаратуры позиционирования установлено, что среднеквадратичная ошибка позиционирования в реальном времени в условиях открытой местности составляет 0.65 м при сглаживании тепловых шумов аппаратуры за время порядка 1 минуты.

4. Развита математическая модель экранов антенн позиционирования в виде системы вертикальных ребер с полупрозрачными окончаниями. Показано, что такие экраны обеспечивают отсечку (падение) КУ антенн позиционирования на 15...17 дБ в секторе углов +/- 10 градусов при

пересечении местного горизонта при расстоянии между антенной и экраном порядка 2...3 длин волн. Данные моделирования подтверждены экспериментально.

5. Предложено выпуклое искусственное препятствие для сигналов ГНСС, вносящее возмущения в ДН антенны позиционирования, сходные по характеру с естественным лесом. Развита математическая модель такого препятствия, показано, что при размере порядка 10 длин волн, препятствие обеспечивает возмущения ДН хаотического характера с угловой протяженностью в 1...5 градусов при размахе осцилляций до 20дБ по амплитуде и до 180 градусов по фазе. Полевые испытания препятствия подтвердили вывод о соответствии вносимых возмущений естественным зеленым насаждениям.

6. Результаты работы опубликованы в статьях, входящих в перечень ВАК [34,35,39], доложены на международных конференциях [38,53], поданы заявки на патенты [54,55,56]. Результаты внедрены в разработки ООО «Топкон Позиционинг Системс» и в учебный процесс МАИ.

Список литературы

1. Антонович К. М., Использование спутниковых навигационных систем в геодезии, Т. 1-2, М.: ФГУП "Картгеоцентр", 2005.
2. Leick, A., L. Rapoport and D.Tatarnikov GPS Satellite Surveying, 4-th Edition , Wiley, New York, 2015.
3. Rao B.R., Kunysz W., Fante P. and McDonald K. GPS/GNSS Antennas, Artech House, Norwood, 2013
4. Вейцель А. В., Вейцель В. А., Татарников Д. В., Аппаратура высокоточного позиционирования по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем. Высокоточные антенны. Специальные методы повышения точности позиционирования/под ред. М. И. Жодзижского, М: МАИ-ПРИНТ, 2010 – 386с, ил.
5. Elosegui P., Davis J. L., Jaldehag T. K., Johansson J. M., Niell A. E., Shapiro, Geodesy using the global positioning system: The effects of signal scattering on estimates of site position, J. Geophys. Res., vol. 100, no. B7, pp9921-9934, June 10, 1995
6. Tranquilla James M., Carr J. P., Hussain M. Al-Rizzo; Analysis of a choke ring groundplane for multipath control in Global Positioning System (GPS) applications, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 42, pp. 905 - 911, July 1994
7. Kunysz W., A Three Dimensional Choke Ring Ground Plane Antenna. Proc. ION GNSS 2003. Institute of Navigation, Portland, OR, pp. 1883-1888
8. Tatarnikov D., Astakhov A., Stepanenko A., GNSS Reference Station Antenna with Convex Impedance Ground Plane: Basics of Design and Performance Characterization Proc. ION ITM 2011. Institute of Navigation, San Diego, CA, pp. 1240-1245.

9. Chen X., Parini C. G., Collins B., Yao Y., Rehman M. U., *Antennas for Global Navigation Satellite Systems*, Wiley, 2012
10. Counselman C. C., *Multipath-Rejecting GPS Antenna*. Proc. IEEE, 87(1):86-91, 1999
11. Lopez A. R., *GPS Landing System Reference Antenna*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 52, No. 1, 105–113, 2010
12. Thornberg D. B., Thornberg D. S., Dibenedetto M. F., Braasch M. S., F. Van Graas, Bartone C., *LAAS Integrated Multipath-Limiting Antenna*, Navigation, 50(2):117-130, 2003
13. Татарников Д.В., Астахов А.В. Сферическая антенная решетка с П-образной ДН и низким уровнем теневого поля, Сб. докл. VI Всерос. конф. «Радиолокация и радиосвязь» ИПЭ РАН, 19-22 ноября 2012г., т.1, стр. 3-6.
14. Counselman C. C. and Steinbrecher, *Circularly Polarized Antenna for Satellite Positioning Systems*, Patent US 4,647,942, 1987
15. Tatarnikov D. and A. Astakhov, *Large Impedance Ground Plane Antennas for mm-Accuracy of GNSS Positioning in Real Time*, PIERS Proc., 2013, Stockholm, Sweden, pp.1825-1829
16. Tatarnikov D., Astakhov A., *Approaching Millimeter Accuracy of GNSS Positioning in Real Time with Large Impedance Ground Plane Antennas*. Proc. ION ITM 2014. Institute of Navigation, San Diego, CA, pp. 844-848
17. Марков Г. Т., Сазонов Д. М., *Антенны*, М.: Энергия, 1975, 527с.
18. Grewal M., Weill L., Andrews A. *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*, Wiley, New York, 2001, 392p
19. Thiele G. A., *Analysis of yagi-uda-type antennas*, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 17, pp. 24 - 31, January 1969
20. Kishk A. A., Shafai L., *Radiation characteristics of the short dielectric rod antenna: A numerical solution*, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 35, pp. 139 - 146, February 1987

21. Филиппов В. С., Пономарев Л. И., Гринев А. Ю., Антенны и устройства СВЧ: Проектирование фазированных антенных решеток позиционирования / под ред. Воскресенского Д. И., М.: Радио и связь, 1994 – 591с
22. Юрцев О. А., Рунов А. В., Казарин А. Н. Спиральные антенны. М., Советское радио, 1974, 224с.
23. Конторович М. И., Астрахан М. И., Акимов В. П., Ферсман Г. А., Электродинамика сетчатых структур. М.: Радио и связь, 1987.
24. Каценеленбаум Б. З., Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями, Москва, Наука, 1989, 174с.
25. Tretyakov S., Analytical Modeling in Applied Electromagnetics, Artech House, Norwood, 2003
26. Уфимцев П. Я., Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: Бином, 2007
27. Татарников Д. В., Экраны антенн высокоточной геодезии по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем. Часть 2. Полупрозрачные экраны из композитных материалов, Антенны, №6(133) М., Радиотехника, 2008, стр. 3-13
28. Tatarnikov D., Semi-Transparent Ground Planes Excited by Magnetic Line Current, IEEE Trans. AP, 60(6), pp. 2843-2852, 2012
29. Attiya A.M., Omni-directional Leaky-wave Coaxial Antenna, PIERS Proc., 2013, Stockholm, Sweden, pp.1830-1833
30. Боровиков В. А., Амбарцумова К. А., Построение параболического зеркала с краем переменной прозрачности. Радиотехника и электроника, 1990, №12.
31. Будагян И. Ф., Хрычев Д. А., Узянов А. С., Моделирование распределению электромагнитного поля вблизи ребра краевой части

- и диаграмм направленности параболического зеркала с переменным импедансом. Антенны, выпуск 12 (67), 2002.
32. Будагян И. Ф., Щукин Г. Г., Моделирование характеристик излучения зеркальных антенн с корректирующим переменным импедансом. Антенны, выпуск 12 (91), 2004.
33. Rojas R.G., Colak D., Otero M.F., and Burnside W.D. Synthesis of tapered resistive ground plane for a microstrip antenna // Antennas and Propagation Society International Symposium. June 1995. V. 2. P. 1224-1227
34. Татарников Д. В., Чернецкий И. М., Затенение полуплоскостью с полупрозрачным окончанием. 6-я Всероссийская научно-техническая конференция “Радиолокация и радиосвязь”, Москва, 2012
35. Татарников Д. В., Чернецкий И. М., Затенение полуплоскостью с полупрозрачным окончанием, Журнал Радиоэлектроники ИПЭ РАН, №12, 2012, стр. 1684-1719
36. Trentini. G. V., Partially reflecting sheet array. – IRE Transactions on Antennas and Propagation, 1956, vol. 4, p. 666– 671.
37. Ziolkowski R., Erentok A., Metamaterial-Based Efficient Electrically Small Antennas. – IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 54, No. 7, July 2006, p.2113–2130.
38. Tatarnikov D., Chernetsky I., Artificial Obstructions Employing Fabry-Perot Principles for GNSS Positioning Equipment Test Ranges, Proc. of the 27th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+ 2014), Tampa, Florida, September 2014, pp. 486-489
39. Татарников Д. В., Чернецкий И. М., Искусственные препятствия для испытательных полигонов аппаратуры позиционирования по сигналам GPS/ГЛОНАСС // Антенны. 2015, выпуск 2 (253), стр. 47-54

40. Вайнштейн Л. А., Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966. С. 393.
41. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С., Антенны сантиметровых и дециметровых волн. Часть первая. М., Издание ВВИА им. проф. Жуковского, 1955, 205с.
42. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Том 1. Пер. с англ. под ред. Левина М. Л., Издательство “Мир”, М.: 1978
43. Зелкин Е. Г., Соколов В. Г., Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрытием. М.: Советское радио, 1980, 296с.
44. Серапинас Б. Б., Глобальные системы позиционирования. М., ИКФ “Каталог”, 2002, 106с.
45. Tatarnikov D., Soutiaguine I., Filippov V., Astakhov A., Stepanenko A., Shamatulsky P., Multipath Mitigation by Conventional Antennas with Ground Planes and Passive Vertical Structures, GPS Solutions, v.9, 2005, No3, pp.194-201
46. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З., Основы теории дифракции, М., Советское радио, 1982, 272с.
47. Soutiaguine I., Tatarnikov D., Philippov V., Stepanenko A., Astakhov A., Antenna Structures for Reducing the Effects of Multipath Radio Signals, Patent US 6,836,247 B2, 2004
48. Татарников Д. В., Пластинчатые антенны с подложками из искусственных диэлектриков, Антенны, №1(128) М., Радиотехника, 2008, стр. 35-45

49. Tatarnikov D., Astakhov A., Shamatulsky P., Soutiaguine I., Stepanenko A., “Patch antenna with comb substrate”, Patent EU 1684381 B1, 2008, Patent US 7,710,324 B2, 2010
50. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф., Возбуждение электромагнитных волн. М.: Энергия, 1967. – 371с.
51. Марков Г. Т., Возбуждение шара, ЖТФ, т. 23, вып. 5, 1953 г.
52. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч., Теория и анализ фазированных антенных решеток. М.: Мир, 1974. – 455с.
53. Tatarnikov D., Chernetsky I., “Impedance helical antenna forming П-shaped directional diagram”. International Application Number PCT/RU2014/000753, Filing date 10/07/2014
54. Stepanenko A., Astakhov A., Tatarnikov D., Chernetsky I. “Broadband helical antenna with cutoff pattern” International Application Number PCT/RU2015/000234, Filing date 04/09/2015
55. Tatarnikov D., Chernetsky I., “Methods for modeling multipath reflections of GNSS signals using a test installation and apparatuses for implementing test methods”. International Application Number PCT/RU2014/000022, Filing date 01/16/2014



АКТ

о внедрении

результатов диссертационной работы Чернецкого И. М.

**“Антенны и экраны для высокоточного спутникового позиционирования”,
представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук**

Результаты диссертационной работы внедрены в НИОКР, проводимые на предприятии в направлении развития автоматической и полуавтоматической строительной и сельскохозяйственной техники:

1. Результаты Главы 1 работы по исследованию применения антенн бегущей волны с П-образной диаграммой направленности, были использованы при создании экспериментального образца спиральной антенны бегущей волны с реактивным импедансом витков, с помощью которого была получена среднеквадратическая ошибка позиционирования 0.63мм при условии сглаживания фазовых шумов на интервалах времени порядка 100 секунд.
2. Результаты Главы 3 работы были применены при создании экспериментального макета полусферического искусственного препятствия в целях отработки алгоритмов и тестирования аппаратуры позиционирования в условиях затенения антенны, приближенных к естественному лесу.

3. Поданы заявки на патенты:

- 1) "METHODS FOR MODELING MULTIPATH REFLECTIONS OF GNSS SIGNALS USING A TESTINSTALLATION AND APPARATUSES FOR IMPLEMENTING TEST METHODS" от 16 января 2014г. International Application Number PCT/RU2014/000022
- 2) "IMPEDANCE HELICAL ANTENNA FORMING П-SHAPED DIRECTIONAL DIAGRAM" от 7 октября 2014г. International Application Number PCT/RU2014/000753
- 3) "BROADBAND HELICAL ANTENNA WITH CUSTOFF PATTERN" от 9 апреля 2015г. International Application Number PCT/RU2015/000234

Главный инженер



А. М. Кирсанов

СОГЛАСОВАНО

Декан факультета № 4

ФГБОУ ВПО Московского авиационно-
го института (национального исследо-
вательского университета)

 В.В. Кирдяшкин

«20» мая 2015 г.

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

ФГБОУ ВПО Московского авиационно-
го института (национального исследо-
вательского университета)

 М.Ю. Куприков

«20» мая 2015 г.

АКТ

о внедрении

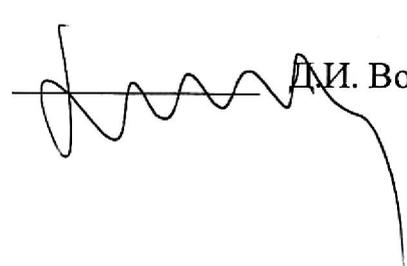
результатов диссертационной работы Чернецкого И. М.

**“Антенны и экраны для высокоточного спутникового позиционирования”,
представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук**

Результаты диссертационной работы были использованы при подготовке и чтении лекций и проведении практических занятий по курсу “Теоретические основы технической электродинамики антенн” на кафедре 406 «Радиофизика, антенны и микроволновая техника» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), а именно:

1. Результаты Главы 2 диссертационной работы были использованы при подготовке лекции на тему “Решение задачи дифракции на плоском экране методом моментов”
2. Результаты Главы 3 диссертационной работы были использованы при подготовке практических занятий на тему “Анализ щелевой полупрозрачной структуры на диэлектрической подложке”

Зав. кафедрой 406, проф., д.т.н.

 Д.И. Воскресенский

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. К модели дифракции поля Н-поляризации на полуплоскости с полупрозрачным окончанием

Вычислим компоненту поля $E_z(\psi^p_z)$ базисной функции ψ^p_z . Для этого ток базисной функции представим в виде преобразования Фурье (П 1.1) по координате z и найдем поле спектральной составляющей тока базисной функции. Спектральная плотность тока базисной функции

$$\psi^p_z = \int_{z_p-l}^{z_p+l} \psi^p_z e^{iuz} dz = \int_{z_p-l}^{z_p+l} \Delta_{2l}(z - z_p) e^{iuz} dz = 4 \frac{\sin^2 \frac{ul}{2}}{u^2} e^{iuz_p} \quad (\text{П 1.1})$$

Найдем поле листа электрического тока:

$$j_z^e = \begin{cases} \psi^p_z e^{-iu(z-z_p)}, & x = a_1/2 \\ 0, & x \neq a_1/2 \end{cases} \quad (\text{П 1.2})$$

Для этого найдем электродинамический потенциал A_z^e листа электрического тока j_z^e , проинтегрировав по объему выражение для листа электрического тока с функцией Грина:

$$A_z^e(j_z^e) = \int_V j_z^e(q, u) G(q, p) dq, \quad (\text{П 1.3})$$

где $q = (x', y', z')$ - координаты точки интегрирования; $p = (x, y, z)$ - координаты точки наблюдения; $G(q, p)$ - функция Грина.

$$G(q, p) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi - k^2}} e^{-i\chi(z-z')} e^{\pm\sqrt{\chi - k^2}(x-x')} d\chi \quad (\text{П 1.4})$$

и подставим его в выражение (П 1.3)

$$\begin{aligned} A_z^e(j_z^e) &= \int_{z'=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \delta(x' - a/2) \psi^p_z e^{-iuz'} \frac{1}{4\pi} \int_{\chi=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(z-z')} e^{\pm\sqrt{\chi - k^2}(x-x')}}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} d\chi dz' dx' = \\ &= \frac{1}{2} \psi^p_z \frac{e^{-iuz} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)}}{\sqrt{u^2 - k^2}} \end{aligned} \quad (\text{П 1.5})$$

Отсюда найдем компоненты электрического и магнитного поля листа тока

$$H_y(j_z^e) = \text{rot}_y(\mathbf{z}_0 A_z^e(j_z^e)) = \mp \frac{1}{2} \psi_z^p e^{-iuz} e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} \quad (\text{П 1.6})$$

$$E_z(j_z^e) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial H_y(j_z^e)}{\partial x} = \frac{i}{2} \frac{W_0}{k} \psi_z^p \sqrt{u^2 - k^2} e^{-iuz} e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} \quad (\text{П 1.7})$$

где знак “+” берется при $y < 0$; при $u^2 - k^2 < 0$ берется мнимый положительный корень.

Проинтегрировав (П 1.7) по спектру, получим выражение для z -ой компоненты поля треугольной базисной функции

$$E_z(\psi_z^p) = \frac{1}{2\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} E_z(j_z^e) du = \frac{i}{\pi} \frac{W_0}{k} \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{ul}{2}}{u^2} \sqrt{u^2 - k^2} e^{-iu(z-z_p)} e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} du \quad (\text{П 1.8})$$

Вычислим взаимные сопротивления между базисными функциями ψ_z^p . Для этого проинтегрируем выражение для поля $E_z(\psi_z^p)$ базисной функции ψ_z^p с током базисной функции ψ_z^q

$$W^{q,p} = \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_z^q E_z(\psi_z^p) dz dx = \frac{8i}{\pi} \frac{W_0}{k} \int_{u=0}^{\infty} \frac{\sin^4 \frac{ul}{2}}{u^4} \sqrt{u^2 - k^2} \cos u(z_q - z_p) du \quad (\text{П 1.9})$$

Вычислим элементы столбца правой части системы уравнений (1.2.8). Для этого вычислим поле стороннего магнитного источника, состоящего из двух нитей магнитного тока, расположенных в точках $q = (x_0, z_0)$

$$j_y^{m0} = \begin{cases} I_0, & x = 0, z = 0 \\ 0, & x \neq 0, z \neq 0 \end{cases} + \begin{cases} I_0 e^{-i(k\Delta H + \pi)}, & x = 0, z = -\Delta H \\ 0, & x \neq 0, z \neq -\Delta H \end{cases} \quad (\text{П 1.10})$$

Найдем электродинамический потенциал нити магнитного тока, проинтегрировав с двумерной функцией Грина

$$\begin{aligned}
A_y^m(j_y^{m0}) &= I_0 \int_{z'} \int_{x'} \delta(x') \delta(z') G(p, q) dx' dz' + \\
&+ I_0 e^{-i(k\Delta H + \pi)} \int_{z'} \int_{x'} \delta(x' - x_0) \delta(z' + \Delta H) \frac{1}{4i} H_0^{(2)} \left(\sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2} \right) dx' dz' = \\
&= I_0 \frac{1}{4i} H_0^{(2)} \left(\sqrt{x^2 + z^2} \right) + I_0 e^{-i(k\Delta H + \pi)} \frac{1}{4i} H_0^{(2)} \left(\sqrt{x^2 + (z + \Delta H)^2} \right)
\end{aligned} \tag{П 1.11}$$

Магнитное поле:

$$\begin{aligned}
H_y(j_y^{m0}) &= -i \frac{k}{W_0} A_y^m(j_y^{m0}) = \\
&= -I_0 \frac{1}{4} \frac{k}{W_0} H_0^{(2)} \left(\sqrt{x^2 + z^2} \right) - I_0 \frac{1}{4} \frac{k}{W_0} e^{-i(k\Delta H + \pi)} H_0^{(2)} \left(\sqrt{x^2 + (z + \Delta H)^2} \right)
\end{aligned} \tag{П 1.12}$$

Электрическое поле:

$$\begin{aligned}
E_x(j_y^{m0}) &= -i \frac{W_0}{k} \text{rot}_x \mathbf{H}(j_y^{m0}) = i I_0 \frac{1}{4} \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} H_1^{(2)} \left(\sqrt{x^2 + z^2} \right) - \\
&- i I_0 \frac{1}{4} e^{-i(k\Delta H + \pi)} \frac{z + \Delta H}{\sqrt{x^2 + (z + \Delta H)^2}} H_1^{(2)} \left(\sqrt{x^2 + (z + \Delta H)^2} \right)
\end{aligned} \tag{П 1.13}$$

$$\begin{aligned}
E_z(j_y^{m0}) &= -i \frac{W_0}{k} \text{rot}_z \mathbf{H}(j_y^{m0}) = -i I_0 \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} H_1^{(2)} \left(\sqrt{x^2 + z^2} \right) - \\
&- i I_0 \frac{1}{4} e^{-i(k\Delta H + \pi)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z + \Delta H)^2}} H_1^{(2)} \left(\sqrt{x^2 + (z + \Delta H)^2} \right)
\end{aligned} \tag{П 1.14}$$

Проинтегрируем (П 1.14) с током базисной функции $\psi_z^q(z)$ и получим выражение для элемента столбца правой части системы уравнений:

$$\begin{aligned}
B &= - \int_x \int_{z_q^{-l}}^{z_q^{+l}} E_z(j_y^{m0}) \psi_z^q(z) dz = i I_0 \frac{1}{4} \int_{z_q^{-l}}^{z_q^{+l}} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + z^2}} H_1^{(2)} \left(\sqrt{(a/2)^2 + z^2} \right) \Delta_{2l}(z - z_q) dz + \\
&+ i I_0 \frac{1}{4} e^{-i(k\Delta H + \pi)} \int_{z_q^{-l}}^{z_q^{+l}} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (z + \Delta H)^2}} H_1^{(2)} \left(\sqrt{(a/2)^2 + (z + \Delta H)^2} \right) \Delta_{2l}(z - z_q) dz
\end{aligned} \tag{П 1.15}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. К модели дифракции поля Н-поляризации на замкнутом экране

Вычислим поле базисной функции ψ_{xs}

$$\psi_{xs} = \begin{cases} \Delta_{2l}(x - x_s) + \Delta_{2l}(x + x_s), & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{П 2.1})$$

Для этого разложим распределение тока базисной функции по плоским волнам тока

$$\begin{aligned} \psi_{xs} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 (e^{iux_p} + e^{-iux_p}) e^{-iux} du = \\ &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \cos ux_p e^{-iux} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{xs} e^{-iux} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.2})$$

Далее, найдем поле одного листа электрического тока

$$j_x^e = \psi_{xs} e^{-iux} \quad (\text{П 2.3})$$

Для этого запишем электродинамический потенциал листа тока

$$A_x(j_x^e) = \frac{\psi_{xs}}{2} \frac{e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}} \quad (\text{П 2.4})$$

Тогда, компоненты поля листа тока будут равны

$$H_y(j_x^e) = \frac{\partial A_x(j_x^e)}{\partial z} = \pm \frac{\psi_{xs}(j_x^e)}{2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} \quad (\text{П 2.5})$$

$$E_x(j_x^e) = i \frac{W_0}{k} \frac{\partial H_y(j_x^e)}{\partial z} = i \frac{W_0}{k} \frac{\psi_{xs}}{2} \sqrt{u^2-k^2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} \quad (\text{П 2.6})$$

$$E_z(j_x^e) = -i \frac{W_0}{k} \frac{\partial H_y(j_x^e)}{\partial x} = \mp \frac{W_0}{k} \frac{\psi_{xs}}{2} u e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} \quad (\text{П 2.7})$$

Проинтегрировав компоненты поля плоской волны тока по спектру базисной функции тока, получим выражения для поля базисной функции ψ_{xs} :

$$\begin{aligned}
E_x(\psi_{xs}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{W_0}{k} \frac{\psi_{xs}}{2} \sqrt{u^2 - k^2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \cos ux_s \sqrt{u^2 - k^2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du
\end{aligned} \tag{П 2.8}$$

$$\begin{aligned}
E_z(\psi_{xs}) &= \mp \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_0}{k} \frac{\psi_{xs}}{2} u e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du = \\
&= \mp \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 u \cos ux_s e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du
\end{aligned} \tag{П 2.9}$$

$$\begin{aligned}
H_y(\psi_{xs}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pm \frac{\psi_{xs}}{2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du \\
&= \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \cos ux_s e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du
\end{aligned} \tag{П 2.10}$$

Перейдем к вычислению поля базисной функции ψ_{zp}

$$\psi_{zp} = \begin{cases} \Delta_{2l}(z - z_p), & x = a/2 \\ -\Delta_{2l}(z - z_p), & x = -a/2 \\ 0, & x \neq a/2, x \neq -a/2 \end{cases} \tag{П 2.11}$$

Для этого определим спектральную плотность базисной функции ψ_{zp}

$$\psi_{zp} = \int_{z_p - l}^{z_p + l} \psi_{zp} e^{iuz} dz = \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 e^{iuz_p} \tag{П 2.12}$$

и найдем поле совокупности двух противофазных листов тока.

$$j_z^e = \begin{cases} \psi_{zp} e^{-iuz}, & z = a/2 \\ -\psi_{zp} e^{-iuz}, & z = -a/2 \\ 0, & z \neq a/2, z \neq -a/2 \end{cases} \tag{П 2.13}$$

Далее вычислим электродинамический потенциал совокупности двух противофазных листов тока

$$A_z(j_z^e) = \int \int_{x' z'} G j_z^e dz' dx' = \frac{1}{2} \psi_{zp} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} - e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} \quad (\text{П 2.14})$$

и найдем компоненты поля совокупности двух противофазных листов тока:

$$H_y(j_z^e) = -\frac{\partial A_z(j_z^e)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \psi_{zp} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} \quad (\text{П 2.15})$$

$$E_x(j_z^e) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_y(j_z^e)}{\partial z} = -\frac{W_0}{k} \frac{1}{2} \psi_{zp} u \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} \quad (\text{П 2.16})$$

$$E_z(j_z^e) = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_y(j_z^e)}{\partial x} = i \frac{W_0}{k} \frac{1}{2} \psi_{zp} \sqrt{u^2 - k^2} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} - e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} \quad (\text{П 2.17})$$

Проинтегрировав компоненты поля двух плоских противофазных волн тока по спектру базисной функции тока, получим выражения для поля базисной функции ψ_{zp} :

$$\begin{aligned} E_x(\psi_{zp}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_0}{k} \frac{\psi_{zp}}{2} u e^{-iuz} e^{-\sqrt{u^2 - k^2}a/2} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}x} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}x} \right) du = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 u e^{-\sqrt{u^2 - k^2}a/2} \cos(-i\sqrt{u^2 - k^2}x) e^{iuz_p} e^{-iuz} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.18})$$

$$\begin{aligned} E_z(\psi_{zp}) &= i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_0}{k} \frac{\psi_{zp}}{2} \sqrt{u^2 - k^2} e^{-iuz} e^{-\sqrt{u^2 - k^2}a/2} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}x} - e^{-\sqrt{u^2 - k^2}x} \right) du = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \sqrt{u^2 - k^2} e^{-\sqrt{u^2 - k^2}a/2} \sin(-i\sqrt{u^2 - k^2}x) e^{iuz_p} e^{-iuz} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.19})$$

$$\begin{aligned} H_y(\psi_{zp}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_{zp}}{2} e^{-iuz} e^{-\sqrt{u^2 - k^2}a/2} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}x} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}x} \right) du = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 e^{-\sqrt{u^2 - k^2}a/2} \cos(-i\sqrt{u^2 - k^2}x) e^{iuz_p} e^{-iuz} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.20})$$

Вычислим поле узловой базисной функции ψ_0 как сумму полей z -ой и x -ой половинок с вычетом поля заряда, обусловленного разрывом базисной функции

$$\psi_0 = \begin{cases} \Delta_l^t(x - a/2) + \Delta_l^r(x + a/2), & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} + \begin{cases} \Delta_l^r(z), & x = a/2 \\ -\Delta_l^r(z), & x = -a/2 \\ 0, & x \neq a/2, x \neq -a/2 \end{cases} \quad (\text{П 2.21})$$

Для этого вычислим поле x -вой составляющей базисной функции ψ_0 и заряда ρ_0 , обусловленного разрывом базисной функции

$$\begin{cases} \psi_{x0} = \Delta_l^t(x - a/2) + \Delta_l^r(x + a/2), & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{П 2.22})$$

$$\begin{cases} \rho_0 = -\frac{1}{i\omega} \delta(x - a/2) + \frac{1}{i\omega} \delta(x + a/2), & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{П 2.23})$$

и вычислим спектральное разложение тока ψ_{x0}

$$\begin{aligned} \psi_{x0} &= \int_{a/2-l}^{a/2} \frac{1}{l} (x - a/2 + l) e^{iux} dx + \int_{-a/2}^{-a/2+l} \frac{1}{l} (-x - a/2 + l) e^{iux} dx = \\ &= -\frac{1}{u^2 l} \left(e^{\frac{iua}{2}} (e^{-iul} + iul - 1) + e^{-\frac{iua}{2}} (e^{iul} - iul - 1) \right) \end{aligned} \quad (\text{П 2.24})$$

Тогда поле тока ψ_{x0} будет

$$\begin{aligned}
E_x^*(\psi_{x0}) &= -i \frac{W_0}{k} \frac{1}{4\pi l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iul} + iul - 1}{u^2} \sqrt{u^2 - k^2} e^{-iu(x-a/2)} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du - \\
&- i \frac{W_0}{k} \frac{1}{4\pi l_x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iul} - iul - 1}{u^2} \sqrt{u^2 - k^2} e^{-iu(x+a/2)} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du = \\
&= -i \frac{W_0}{k} \frac{1}{4\pi l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{u^2 - k^2}}{u^2} \left(e^{-iul} e^{iu\frac{a}{2}} + e^{iul} e^{-iu\frac{a}{2}} - 2ul \sin u \frac{a}{2} - 2 \cos u \frac{a}{2} \right) e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} e^{-iux} du
\end{aligned}
\tag{П 2.25}$$

$$E_z^*(\psi_{x0}) = \pm \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left(e^{iu\frac{a}{2}} (e^{-iul} + iul - 1) + e^{-iu\frac{a}{2}} (e^{iul} - iul - 1) \right) e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du
\tag{П 2.26}$$

Компоненты поля заряда ρ_0 в разложении в спектр по x

$$\begin{aligned}
E_x(\rho_0) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iu(x-a/2)} \frac{e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z}}{\sqrt{u^2 - k^2}} du + \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iu(x+a/2)} \frac{e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z}}{\sqrt{u^2 - k^2}} du = \\
&= -\frac{i}{2\pi} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} u \sin u \frac{a}{2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du
\end{aligned}
\tag{П 2.27}$$

$$\begin{aligned}
E_z(\rho_0) &= \pm \frac{1}{4\pi i} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(x-a/2)} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du \mp \frac{1}{4\pi i} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(x+a/2)} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du = \\
&= \pm \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \sin u \frac{a}{2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} du
\end{aligned}
\tag{П 2.28}$$

Сумма поля тока ψ_{x0} и поля заряда ρ_0

$$\begin{aligned}
E_x(\psi_{x0}) &= E_x^*(\psi_{x0}) + E_x(\rho_0) = \\
&= -i \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} \left(\left(1 - \frac{k^2}{u^2} \right) \left(\cos u \left(\frac{a}{2} - l \right) - \cos u \frac{a}{2} \right) + \frac{k^2}{u} l \sin u \frac{a}{2} \right) e^{\pm\sqrt{u^2 - k^2}z} e^{-iux} du
\end{aligned}
\tag{П 2.29}$$

$$\begin{aligned}
E_z(\psi_{x0}) &= E_z^*(\psi_{x0}) + E_z(\rho_0) = \\
&= \pm \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left(\cos u \left(\frac{a}{2} - l \right) - \cos u \frac{a}{2} \right) e^{-iux} e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2} z} du
\end{aligned} \quad (\text{П 2.30})$$

Вычислим теперь поле z -вой составляющей базисной функции ψ_0

$$\begin{cases} \psi_{z0} = \Delta_l^r(z) (\delta(x - a/2) - \delta(x + a/2)) \\ \rho_0 = \frac{1}{i\omega} \delta(z) (\delta(x - a/2) - \delta(x + a/2)) \end{cases} \quad (\text{П 2.31})$$

Для этого получим сначала спектральное разложение тока ψ_{z0}

$$\psi_{z0} = \int_0^l \frac{1}{l} (-z + l) e^{iuz} dz = -\frac{1}{l} \frac{1}{u^2} (e^{iul} - iul - 1) \quad (\text{П 2.32})$$

Таким образом, поле тока ψ_{z0} определяется выражениями

$$E_x^*(\psi_{z0}) = \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} (e^{iul} - iul_z - 1) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} a/2} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2} x} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2} x} \right) e^{-iuz} du \quad (\text{П 2.33})$$

$$E_z^*(\psi_{z0}) = -i \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2} (e^{iul} - iul_z - 1) \sqrt{u^2 - k^2} e^{-\sqrt{u^2 - k^2} a/2} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2} x} - e^{-\sqrt{u^2 - k^2} x} \right) e^{-iuz} du \quad (\text{П 2.34})$$

Определим теперь поле заряда ρ_0 в разложении в спектр по z .

Вычислим скалярный электродинамический потенциал заряда ρ_0 , обусловленного разрывом базисной функции ψ_0

$$\varphi^r = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{z', x'} G \rho_0 dx' dz' = -i \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{u^2 - k^2} \frac{a}{2}} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2} x} - e^{-\sqrt{u^2 - k^2} x} \right) \frac{e^{-iuz}}{\sqrt{u^2 - k^2}} du \quad (\text{П 2.35})$$

Вычислим электрическое поле компенсирующего заряда ρ_0 , обусловленного разрывом базисной функции ψ_0

$$E_x(\rho_0) = -\frac{\partial \varphi^r}{\partial x} = i \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{u^2 - k^2} \frac{a}{2}} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2} x} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2} x} \right) e^{-iuz} du \quad (\text{П 2.36})$$

$$E_z(\rho_0) = -\frac{\partial \varphi^{rt}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\sqrt{u^2-k^2} \frac{a}{2}} \left(e^{\sqrt{u^2-k^2} x} - e^{-\sqrt{u^2-k^2} x} \right) \frac{e^{-iuz}}{\sqrt{u^2-k^2}} du \quad (\text{П 2.37})$$

Сумма поля тока ψ_{z0} и поля заряда ρ_0 определяется выражениями

$$\begin{aligned} E_x(\psi_{z0}) &= E_x^*(\psi_{z0}) + E_x(\rho_0) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left(e^{iul} - 1 \right) e^{-\sqrt{u^2-k^2} a/2} \left(e^{\sqrt{u^2-k^2} x} + e^{-\sqrt{u^2-k^2} x} \right) e^{-iuz} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.38})$$

$$\begin{aligned} E_z(\psi_{z0}) &= E_z^*(\psi_{z0}) + E_z(\rho_0) = \\ &= -i \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} \left(\left(e^{iul} - 1 \right) \left(1 - \frac{k^2}{u^2} \right) + iul \frac{k^2}{u^2} \right) e^{-\sqrt{u^2-k^2} a/2} \left(e^{\sqrt{u^2-k^2} x} - e^{-\sqrt{u^2-k^2} x} \right) e^{-iuz} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.39})$$

Электрическое поле базисной функции ψ_0 определяется как сумма полей половинок базисной функции:

$$\begin{aligned} E_z(\psi_0) &= E_z(\psi_{z0}) + E_z(\psi_{x0}) = \\ &= -i \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} \left(\left(e^{iul} - 1 \right) \left(1 - \frac{k^2}{u^2} \right) + iul \frac{k^2}{u^2} \right) e^{-\sqrt{u^2-k^2} a/2} \left(e^{\sqrt{u^2-k^2} x} - e^{-\sqrt{u^2-k^2} x} \right) e^{-iuz} du \pm \\ &\pm \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left(\cos u \left(\frac{a}{2} - l \right) - \cos u \frac{a}{2} \right) e^{-iux} e^{\pm \sqrt{u^2-k^2} z} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.40})$$

$$\begin{aligned} E_x(\psi_0) &= E_x(\psi_{z0}) + E_x(\psi_{x0}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left(e^{iul} - 1 \right) e^{-\sqrt{u^2-k^2} a/2} \left(e^{\sqrt{u^2-k^2} x} + e^{-\sqrt{u^2-k^2} x} \right) e^{-iuz} du - \\ &- i \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} \left(\left(1 - \frac{k^2}{u^2} \right) \left(\cos u \left(\frac{a}{2} - l \right) - \cos u \frac{a}{2} \right) + \frac{k^2}{u} l \sin u \frac{a}{2} \right) e^{\pm \sqrt{u^2-k^2} z} e^{-iux} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.41})$$

Вычислим теперь поле базисной функции эквивалентного магнитного тока j_{yn}^{m+} , которые определяются выражением

$$\begin{cases} j_{y0}^{m+} = 1, & n = 0, a/2 < x < a/2, z = 0 \\ j_{yn}^{m+} = \delta(z) \cos k_{xn} x & n > 0, a/2 < x < a/2, z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{П 2.42})$$

Запишем прямое и обратное преобразование Фурье для гармоник магнитного тока (П 2.39)

при $n = 0$:

$$j_{y0}^{m+} = \int_{-a/2}^{a/2} e^{iux} dx = \sin \frac{ua}{2} / \frac{u}{2} \quad (\text{П 2.43})$$

$$j_{y0}^{m+} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ua}{2} / \frac{u}{2} e^{-iux} du \quad (\text{П 2.44})$$

при $n > 0$

$$j_{yn}^{m+} = \int_{-a/2}^{a/2} \cos k_{xn} x e^{iux} dx = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{(u - k_{xn})a}{2} / \frac{u - k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u + k_{xn})a}{2} / \frac{u + k_{xn}}{2} \right) \quad (\text{П 2.45})$$

$$j_{yn}^{m+} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\sin \frac{(u - k_{xn})a}{2} / \frac{u - k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u + k_{xn})a}{2} / \frac{u + k_{xn}}{2} \right) e^{-iux} du \quad (\text{П 2.46})$$

где $k_{xn} = \frac{n\pi}{a}$

После чего найдем поле листа магнитного тока

$$j_y^m = \begin{cases} j_{yn}^{m+} e^{-iux'}, & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{П 2.47})$$

Для этого вычислим магнитный электродинамический потенциал листа магнитного тока

$$\begin{aligned}
A_y^m(j_y^m) &= \int_z \int_{-\infty}^{\infty} j_{yn}^{m+} e^{-iux'} \delta(z') \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(x-x')} e^{\pm\sqrt{\chi^2-k^2}(z-z')}}{\sqrt{\chi^2-k^2}} d\chi dx' dz' = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_{yn}^{m+} 2\pi\delta(u-\chi) \frac{e^{-i\chi x} e^{\pm\sqrt{\chi^2-k^2}z}}{\sqrt{\chi^2-k^2}} d\chi = j_y^m(u) \frac{1}{2} \frac{e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}}
\end{aligned} \tag{П 2.48}$$

и получим выражения для компонент электрического и магнитного поля листа магнитного тока:

$$E_x(j_y^m) = \frac{\partial A_y^m(j_y^m)}{\partial z} = \pm j_{yn}^{m+} \frac{1}{2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} \tag{П 2.49}$$

$$E_z(j_y^m) = -\frac{\partial A_y^m(j_y^m)}{\partial x} = j_{yn}^{m+} \frac{1}{2} iu \frac{e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}} \tag{П 2.50}$$

$$H_y(j_y^m) = \frac{i}{kW_0} \left(\frac{\partial E_x(j_y^m)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(j_y^m)}{\partial x} \right) = -i \frac{k}{W_0} j_{yn}^{m+} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} \tag{П 2.51}$$

Найдем поле нулевой гармоники магнитного тока j_{y0}^{m+} , проинтегрировав по спектру (П 2.43) выражения (П 2.49-П 2.51) для компонент поля листа магнитного тока:

$$E_x(j_{y0}^{m+}) = \pm \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ua}{2} \Big/ \frac{u}{2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} du \tag{П 2.52}$$

$$E_z(j_{y0}^{m+}) = \frac{1}{4\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ua}{2} \Big/ \frac{u}{2} u \frac{e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}} du \tag{П 2.53}$$

$$H_y(j_{y0}^{m+}) = -i \frac{k}{W_0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ua}{2} \Big/ \frac{u}{2} \frac{e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}} du \tag{П 2.54}$$

Теперь найдем поле ненулевой гармоники магнитного тока j_{yn}^{m+} , проинтегрировав по спектру (П 2.45) выражения (П 2.49-П 2.51) для компонент поля листа магнитного тока:

$$E_x(j_{yn}^{m+}) = \pm \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xn}}{2} \right) e^{-iux} e^{\pm \sqrt{u^2-k^2}z} du \quad (\text{П 2.55})$$

$$E_z(j_{yn}^{m+}) = \frac{1}{8\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xn}}{2} \right) u \frac{e^{-iux} e^{\pm \sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}} du \quad (\text{П 2.56})$$

$$H_y(j_{yn}^{m+}) = -i \frac{k}{W_0} \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xn}}{2} \right) \frac{e^{-iux} e^{\pm \sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}} du \quad (\text{П 2.57})$$

Запишем выражения для поля нити магнитного тока j_y^{m0} .

$$j_y^{m0} = \begin{cases} I_0, & x=0, z=z_0 \\ 0, & x \neq 0, z \neq z_0 \end{cases} \quad (\text{П 2.58})$$

Выражения для компонент электрического поля нити магнитного тока j_y^{m0} , полученные путем интегрирования тока с функцией Грина в представлении через функцию Ганкеля 2-го рода.

$$E_x(j_y^{m0}) = I_0 \frac{k}{4i} \sin \left(\arctan \frac{z-z_0}{|x|} \right) H_1^{(2)} \left(k \sqrt{z_0^2 + x^2} \right) \quad (\text{П 2.59})$$

$$E_z(j_y^{m0}) = I_0 \frac{k}{4i} \cos \left(\arctan \frac{z-z_0}{x} \right) H_1^{(2)} \left(k \sqrt{(z-z_0)^2 + x^2} \right) \quad (\text{П 2.60})$$

Теперь получим электрическое и магнитное поле нити магнитного тока j_y^{m0} путем интегрирования по спектральной переменной. Для этого запишем сначала выражение для электродинамического потенциала листа электрического тока

$$A_y^m = j_y^{m0}(u) \frac{1}{2} \frac{e^{-iux} e^{\pm \sqrt{u^2-k^2}(z-z_0)}}{\sqrt{u^2-k^2}} \quad (\text{П 2.61})$$

И ВЫЧИСЛИМ КОМПОНЕНТЫ ПОЛЯ ЛИСТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

$$E_x = \frac{\partial A_y^m}{\partial z} = \pm j_y^{m0} (u) \frac{1}{2} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}(z-z_0)} \quad (\text{П } 2.62)$$

$$E_z = -\frac{\partial A_y^m}{\partial x} = j_y^{m0} (u) \frac{1}{2} iu \frac{e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}(z-z_0)}}{\sqrt{u^2-k^2}} \quad (\text{П } 2.63)$$

$$H_y = \frac{i}{kW_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{i}{kW_0} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i \frac{k}{W_0} j_y^{m0} (u) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}(z-z_0)} \quad (\text{П } 2.64)$$

Далее вычислим магнитное поле нити магнитного тока, проинтегрировав (П 2.64) по спектру:

$$j_y^{m0} = \delta(z-z_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{iux} dx = \delta(z-z_0) \quad (\text{П } 2.65)$$

$$H_y(j_y^{m0}) = -i \frac{k}{W_0} \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} e^{-iux} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}(z-z_0)} du \quad (\text{П } 2.66)$$

Перейдем к вычислению взаимных сопротивлений между базисными функциями ψ_{zq} и ψ_{zp} . Проинтегрируем выражение (П 2.19) для электрического поля базисной функции ψ_{zp} с током базисной функции ψ_{zq} :

$$W(\psi_{zq}, \psi_{zp}) = \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} E_z(\psi_{zp}) dz dx = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^4 \sqrt{u^2-k^2} \left(1 - e^{-\sqrt{u^2-k^2}a} \right) \cos u(z_q - z_p) du \quad (\text{П } 2.67)$$

$$WZ(\psi_{zq}, \psi_{zp}) = - \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{1z}^q(z) Z_{L1}(z) \psi_{1z}^p(z) dz = - \begin{cases} \frac{l}{6} Z_{L1}(z_q) + \frac{l}{6} Z_{L1}(z_{q+1}) & p = q+1 \\ \frac{l}{6} Z_{L1}(z_{q-1}) + l Z_{L1}(z_q) + \frac{l}{6} Z_{L1}(z_{q+1}) & p = q \\ \frac{l}{6} Z_{L1}(z_q) + \frac{l}{6} Z_{L1}(z_{q-1}) & p = q-1 \end{cases} \quad (\text{П } 2.68)$$

Вычислим взаимные сопротивления между базисными функциями ψ_{zq} и ψ_{xs} . Для этого проинтегрируем выражение (П 2.9) для электрического поля базисной функции ψ_{xs} с током базисной функции ψ_{zq}

$$\begin{aligned}
 W(\psi_{zq}, \psi_{xs}) &= \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} E_z(\psi_{xs}) dz dx = \\
 &= \pm \frac{2}{\pi} \int_0^\infty i \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{i\sqrt{u^2-k^2}l}{2} / \frac{i\sqrt{u^2-k^2}}{2} \right)^2 u \sin u \frac{a}{2} \cos ux_s e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z_q} du
 \end{aligned}
 \tag{П 2.69}$$

Если $s = S$, то

$$W(\psi_{zq}, \psi_{xs}) = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\infty i \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{i\sqrt{u^2-k^2}l}{2} / \frac{i\sqrt{u^2-k^2}}{2} \right)^2 u \sin u \frac{a}{2} \cos ux_s e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z_q} du
 \tag{П 2.70}$$

Вычислим взаимные сопротивления между базисными функциями ψ_{zq} и ψ_0 . Для этого проинтегрируем выражение (П 2.39) для электрического поля базисной функции ψ_0 с током базисной функции ψ_{zq} :

$$\begin{aligned}
 W(\psi_{zq}, \psi_0) &= \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} E_z(\psi_{z0}) dz dx + \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} E_z(\psi_{x0}) dz dx = \\
 &= -i \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \left((e^{iul} - 1) \left(1 - \frac{k^2}{u^2} \right) + iul \frac{k^2}{u^2} \right) (1 - e^{-\sqrt{u^2-k^2}a}) e^{-iuz_q} du \pm \\
 &\pm \frac{1}{\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{u} \left(\sin \frac{i\sqrt{u^2-k^2}l}{2} / \frac{i\sqrt{u^2-k^2}}{2} \right)^2 \left(\cos u \left(\frac{a}{2} - l \right) - \cos u \frac{a}{2} \right) e^{-\frac{iu^2}{2}} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z_q} du
 \end{aligned}
 \tag{П 2.71}$$

Вычислим взаимные сопротивления между базисными функциями ψ_{xw} и ψ_{zp} . Для этого проинтегрируем выражение (П 2.18) для электрического поля базисной функции ψ_{zp} с током базисной функции ψ_{xw} :

$$\begin{aligned}
W(\psi_x, \psi_z) &= W(\psi_z, \psi_x) = \int_z^{x_w+l} \int_{x_w-l}^{x_w+l} \psi_{xw} E_x(\psi_{zp}) dx dz = \\
&= -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \left(\sin \left(\frac{i\sqrt{u^2-k^2}l}{2} \right) / \frac{i\sqrt{u^2-k^2}}{2} \right)^2 u e^{-\sqrt{u^2-k^2}a/2} \sin uz_p \cos(-i\sqrt{u^2-k^2}x_w) du
\end{aligned} \tag{П 2.72}$$

Если $w = S$, то

$$\begin{aligned}
W(\psi_x, \psi_z) &= W(\psi_z, \psi_x) = \\
&= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \left(\sin \left(\frac{i\sqrt{u^2-k^2}l}{2} \right) / \frac{i\sqrt{u^2-k^2}}{2} \right)^2 u e^{-\sqrt{u^2-k^2}a/2} \sin uz_p \cos(-i\sqrt{u^2-k^2}x_w) du
\end{aligned} \tag{П 2.73}$$

Вычислим коэффициенты передачи между базисными функциями ψ_{zq} и j_{y0}^{m+} . Проинтегрируем выражение (П 2.20) для магнитного поля базисной функции ψ_{zp} с магнитным током базисной функции j_{y0}^{m+} :

$$\begin{aligned}
W(\psi_z, j_{y0}^{m+}) &= -W(j_{y0}^{m+}, \psi_z) = - \int_{-a/2}^{a/2} j_{y0}^{m+} H_y(\psi_{zq}) dx = \\
&= \frac{1}{l} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \cos uz_q \left(e^{-\sqrt{u^2-k^2}a} - 1 \right) du
\end{aligned} \tag{П 2.74}$$

Вычислим коэффициенты передачи между базисными функциями ψ_{zq} и j_{yn}^{m+} . Проинтегрируем выражение (П 2.20) для магнитного поля базисной функции ψ_{zp} с магнитным током базисной функции j_{yn}^{m+} :

$$\begin{aligned}
W(\psi_{zp}, j_{yn}^{m+}) &= -W(j_{yn}^{m+}, \psi_{zq}) = - \int_{-a/2}^{a/2} j_{yn}^{m+} H_y(\psi_{zq}) dx = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{l} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2} + ik_{xn}} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 e^{ik_{xn} \frac{a}{2}} \left(e^{-\sqrt{u^2-k^2}a} e^{-ik_{xn}a} - 1 \right) \cos uz_q du + \\
&\frac{1}{2} \frac{1}{l} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2} - ik_{xn}} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 e^{-ik_{xn} \frac{a}{2}} \left(e^{-\sqrt{u^2-k^2}a} e^{ik_{xn}a} - 1 \right) \cos uz_q du
\end{aligned} \tag{П 2.75}$$

Вычислим собственное сопротивление базисной функции ψ_0 . Для этого проинтегрируем выражения (П 2.29, 2.30, 2.38, 2.39) для электрического поля базисной функции ψ_0 с током базисной функции ψ_0 :

$$\begin{aligned}
W(\psi_0, \psi_0) &= \int_x^l \int_0^1 \psi_{z0} E_z(\psi_{z0}) dz dx + 2 \int_x^l \int_{\frac{a}{2}-l}^{\frac{a}{2}} \psi_{x0} E_x(\psi_{z0}) dz dx + \\
&+ \int_x^l \int_0^1 \psi_{z0} E_z(\psi_{x0}) dz dx + 2 \int_x^l \int_{\frac{a}{2}-l}^{\frac{a}{2}} \psi_{x0} E_x(\psi_{x0}) dx dz = \\
&= i \frac{W_0}{k} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} \frac{1}{u^2} (1 - iul - e^{-iul}) \left((1 - e^{iul}) \left(1 - \frac{k^2}{u^2} \right) - iul \frac{k^2}{u^2} \right) (1 - e^{-\sqrt{u^2 - k^2} a}) du - \\
&- \frac{W_0}{k} \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - u^2} \left((1 - \sqrt{u^2 - k^2} l - e^{-\sqrt{u^2 - k^2} l}) + (1 + \sqrt{u^2 - k^2} l - e^{\sqrt{u^2 - k^2} l}) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} a} \right) \frac{1}{u} (1 - e^{iul}) du - \\
&- \frac{2}{\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 - k^2} l} + \sqrt{u^2 - k^2} l - 1}{u^2 - k^2} \frac{1}{u} \left(\cos u \left(\frac{a}{2} - l \right) - \cos u \frac{a}{2} \right) e^{-\frac{iua}{2}} du + \\
&+ i \frac{W_0}{k} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} \frac{1}{u^2} (1 + iul - e^{iul}) e^{-\frac{iua}{2}} \left((1 - e^{-iul}) e^{\frac{iua}{2}} + (1 - e^{iul}) e^{-\frac{iua}{2}} \right) \left(1 - \frac{k^2}{u^2} \right) - 2ul \frac{k^2}{u^2} \sin u \frac{a}{2} du
\end{aligned} \tag{П 2.76}$$

Вычислим взаимные сопротивления между базисными функциями ψ_0 и ψ_{xs} . Проинтегрируем выражения (П 2.8-П 2.9) для электрического поля базисной функции ψ_{xs} с током базисной функции ψ_0 :

$$\begin{aligned}
W(\psi_0, \psi_{xs}) &= \int_x^l \int_0^1 \psi_{z0} E_z(\psi_{xs}) dz dx + 2 \int_x^l \int_{\frac{a}{2}-l}^{\frac{a}{2}} \psi_{x0} E_x(\psi_{xs}) dx dz = \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2 - k^2} l} + \sqrt{u^2 - k^2} l - 1}{u^2 - k^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 u \cos ux_s e^{-\frac{iua}{2}} du - \tag{П 2.77} \\
&- i \frac{1}{\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iul} - iul - 1}{u^2} \sqrt{u^2 - k^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \cos ux_s e^{-\frac{iua}{2}} du
\end{aligned}$$

При $s = S$

$$\begin{aligned}
W(\psi_0, \psi_{x_s}) &= W(\psi_{x_w}, \psi_0) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{u^2-k^2}l} + \sqrt{u^2-k^2}l - 1}{u^2-k^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 u \cos ux_s e^{-iu\frac{a}{2}} du - \\
&- i \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{k} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iul} - iul - 1}{u^2} \sqrt{u^2-k^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \cos ux_s e^{-iu\frac{a}{2}} du
\end{aligned} \tag{П 2.78}$$

Вычислим коэффициенты передачи между базисными функциями ψ_0 и j_{y0}^{m+} . Для этого проинтегрируем выражения (П 2.52-П 2.53) для электрического поля базисной функции j_{y0}^{m+} с током базисной функции ψ_0 :

$$\begin{aligned}
W(\psi_0, j_{y0}^{m+}) &= -W(j_{y0}^{m+}, \psi_0) = 2 \int_{z=a/2-l}^{a/2} \int \psi_{x0} E_x(j_{y0}^{m+}) dx dz + \int_{x=0}^l \int \psi_{z0} E_z(j_{y0}^{m+}) dz dx = \\
&= - \int_{a/2-l}^{a/2} \frac{1}{l} (x - a/2 + l) dx + \frac{1}{\pi} i \int_0^l \frac{1}{l} (-z + l) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ua}{2} / \frac{u}{2} u \frac{e^{-iu\frac{a}{2}} e^{-\sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}} du dz = \\
&= -\frac{1}{l} - \frac{i}{\pi} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} (e^{iul} - iul - 1) \sin \frac{ua}{2} / \frac{u}{2} \frac{e^{-iu\frac{a}{2}}}{\sqrt{u^2-k^2}} du
\end{aligned} \tag{П 2.79}$$

Вычислим коэффициенты передачи между базисными функциями ψ_0 и j_{yn}^{m+} . Проинтегрируем выражения (П 2.55- П 2.56) для электрического поля базисной функции j_{yn}^{m+} с током базисной функции ψ_0 :

$$\begin{aligned}
W(\psi_0, j_{yn}^{m+}) &= -W(j_{yn}^{m+}, \psi_0) = 2 \int_{z=a/2-l}^{a/2} \int \psi_{x0} E_x(j_{yn}^{m+}) dx dz + \int_{x=0}^l \int \psi_{z0} E_z(j_{yn}^{m+}) dz dx = \\
&= \frac{1}{lk_{xn}^2} \left(\cos \left(\frac{1}{2} k_{xn} a - k_{xn} l \right) - \cos \left(\frac{1}{2} a k_{xn} \right) - l k_{xn} \sin \left(\frac{1}{2} a k_{xn} \right) \right) - \\
&- \frac{i}{4\pi} \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} (e^{iul} - iul - 1) \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} / \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} / \frac{u+k_{xn}}{2} \right) \frac{e^{-iu\frac{a}{2}}}{\sqrt{u^2-k^2}} du
\end{aligned} \tag{П 2.80}$$

Вычислим взаимные сопротивления между базисными функциями

ψ_{xw} и ψ_{xs} .

1) $p \geq q, p \neq S$

$$W(\psi_{xq}, \psi_{xp}) = G_{x,x}^{q,p} + G_{x,x}^{q,(2S-1)-(p-1)} + G_{x,x}^{(2S-1)-(q-1),p} + G_{x,x}^{(2S-1)-(q-1),(2S-1)-(p-1)}; \quad (\text{П 2.81})$$

2) $p = q, p = S$

$$W(\psi_{xq}, \psi_{xp}) = G_{x,x}^{q,p}; \quad (\text{П 2.82})$$

3) $p \neq q, p = S$

$$W(\psi_{xq}, \psi_{xp}) = G_{x,x}^{q,p} + G_{x,x}^{(2S-1)-(q-1),p}; \quad (\text{П 2.83})$$

где

$$G_{x,x}^{q',p'} = i \frac{W_0}{k} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{l^2} \left(\sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} \right)^4 \sqrt{u^2 - k^2} \cos u(x_{p'} - x_{q'}) du \quad (\text{П 2.84})$$

Вычислим коэффициенты передачи между базисными функциями ψ_{xw} и j_{y0}^{m+} . Проинтегрируем выражения (П 2.53-П 2.53) для электрического поля базисной функции j_{y0}^{m+} с током базисной функции ψ_{xw} :

$$\begin{aligned} W(\psi_{xw}, j_{y0}^{m+}) &= -W(j_{y0}^{m+}, \psi_{xs}) = \int_{z-x_w-l}^{-x_w+l} \int \psi_{xw} E_x(j_{y0}^{m+}) dx dz - \int_{z-x_w-l}^{x_w+l} \int \psi_{xw} E_x(j_{y0}^{m+}) dx dz = \\ &= \int_{-x_w-l}^{-x_w+l} \Delta_{2l}(x+x_w) \frac{1}{2} dx + \int_{x_w-l}^{x_w+l} \Delta_{2l}(x-x_w) \frac{1}{2} dx = l \end{aligned} \quad (\text{П 2.85})$$

Если $w = S$, то

$$W(\psi_{xw}, j_{y0}^{m+}) = -W(j_{y0}^{m+}, \psi_{xs}) = \frac{l}{2} \quad (\text{П 2.86})$$

Вычислим коэффициенты передачи между базисными функциями ψ_{xw}

и j_{yn}^{m+} .

$$\begin{aligned} W(\psi_{xw}, j_{yn}^{m+}) &= -W(j_{yn}^{m+}, \psi_{xs}) = \int_{z-x_w-l}^{-x_w+l} \int \psi_{xw} E_x(j_{yn}^{m+}) dx dz + \int_{z-x_w-l}^{x_w+l} \int \psi_{xw} E_x(j_{yn}^{m+}) dx dz = \\ &= \frac{1}{l} \left(\sin \frac{k_{xn} l}{2} / \frac{k_{xn}}{2} \right)^2 \cos k_{xn} x_w \end{aligned} \quad (\text{П 2.87})$$

Если $w = S$, то

$$W(\psi_{xw}, j_{yn}^{m+}) = -W(j_{yn}^{m+}, \psi_{xs}) = \frac{1}{2l} \left(\sin \frac{k_{xn} l}{2} / \frac{k_{xn}}{2} \right)^2 \cos k_{xn} x_w \quad (\text{П 2.88})$$

Вычислим собственную проводимость базисной функции j_{y0}^{m+} . Для этого проинтегрируем выражения (П 2.54) для магнитного поля базисной функции j_{y0}^{m+} с током базисной функции j_{y0}^{m+} :

$$\begin{aligned} W(j_{y0}^{m+}, j_{y0}^{m+}) &= \int_{z-a/2}^{a/2} \int j_{y0}^{m+} H_y(j_{y0}^{m+}) dx dz = \\ &= -i \frac{k}{W_0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iux} dx \sin \frac{ua}{2} / \frac{u}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} du = \\ &= -i \frac{k}{W_0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{ua}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} du = \\ &= -i \frac{k}{W_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\sin \frac{ua}{2} / \frac{u}{2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} du \end{aligned} \quad (\text{П 2.89})$$

Вычислим взаимную проводимость между базисными функциями j_{y0}^{m+} и j_{yn}^{m+} . Для этого проинтегрируем выражения (П 2.57) для магнитного поля базисной функции j_{yn}^{m+} с током базисной функции j_{y0}^{m+} :

$$\begin{aligned}
W(j_{y0}^{m+}, j_{yn}^{m+}) &= W(j_{ym}^{m+}, j_{y0}^{m+}) = \int_{z=-a/2}^{a/2} \int j_{y0}^{m+} H_y(j_{yn}^{m+}) dx dz = \\
&= -i \frac{k}{W_0} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left(\sin \frac{ua}{2} / \frac{u}{2} \right) \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} / \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} / \frac{u+k_{xn}}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} du
\end{aligned} \tag{П 2.90}$$

Вычислим взаимные проводимости между базисными функциями j_{ym}^{m+} и j_{yn}^{m+} . Для этого проинтегрируем выражения (П 2.57) для магнитного поля базисной функции j_{yn}^{m+} с током базисной функции j_{ym}^{m+} :

$$\begin{aligned}
W(j_{ym}^{m+}, j_{yn}^{m+}) &= W(j_{yn}^{m+}, j_{ym}^{m+}) = \int_{z=-a/2}^{a/2} \int j_{ym}^{m+} H_y(j_{yn}^{m+}) dx dz = \\
&= -i \frac{k}{W_0} \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \left(\sin \frac{(u-k_{xm})a}{2} / \frac{u-k_{xm}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xm})a}{2} / \frac{u+k_{xm}}{2} \right) \times \\
&\times \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} / \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} / \frac{u+k_{xn}}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} du
\end{aligned} \tag{П 2.91}$$

Вычислим взаимные проводимости между базисными функциями j_{ym}^{m+} и j_{yn}^{m-} . Для этого проинтегрируем выражения (1.2.18, 1.2.20) для магнитного поля базисной функции j_{yn}^{m-} с током базисной функции j_{ym}^{m+} :

$$\begin{aligned}
W(j_y^{m+}, j_y^{m-}) &= - \int_{z=-a/2}^{a/2} \int j_{ym}^{m+} H_y(j_{yn}^{m-}) dx dz = - \int_{-a/2}^{a/2} \cos k_{xm} x \frac{1}{W_{\perp n}^E} \cos k_{xn} x dx = \\
&= - \frac{1}{W_{\perp n}^E} \int_{-a/2}^{a/2} \cos k_{xm} x \cos k_{xn} x dx = - \frac{1}{W_{\perp n}^E} \begin{cases} a, & n = m = 0 \\ \frac{a}{2}, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases}
\end{aligned} \tag{П 2.92}$$

где $W_{\perp n}^E = W_0 \frac{\Gamma_n}{k}$ - поперечное волновое сопротивление; $\Gamma_n = \sqrt{k^2 - k_{xn}^2}$ - продольное волновое число

Перейдем к вычислению столбца правой части системы уравнений. Вычислим элементы столбца правой части $B(\psi_z, j_y^{m0})$. Для этого проинтегрируем выражение (П 2.60) для электрического поля нити магнитного тока j_y^{m1} с током базисной функции ψ_{zq} :

$$\begin{aligned}
 B(\psi_{zq}, j_y^{m0}) &= \int_x \int_{z_q-l}^{z_q+l} \psi_{zq} E_z(j_y^{m0}) = \\
 &= -\frac{k}{2i} \int_{z_q-l}^{z_q+l} \Delta_{2l}(z - z_q) \cos\left(\arctan \frac{|z - z_0|}{a/2}\right) H_1^{(2)}\left(k\sqrt{(z - z_0) + (a/2)^2}\right) dz
 \end{aligned} \tag{П 2.93}$$

Вычислим элементы столбца правой части $B(\psi_0, j_y^{m0})$. Для этого проинтегрируем выражения (П 2.59- П 2.60) для электрического поля нити магнитного тока j_y^{m0} с током базисной функции ψ_0 :

$$\begin{aligned}
 B(\psi_0, j_y^{m1}) &= 2 \int_z \int_{a/2-l}^{a/2} \psi_{x0} E_x(j_y^{m0}) dx dz + \int_x \int_0^l \psi_{z0} E_z(j_y^{m0}) dz dx = \\
 &= \frac{k}{2i} \frac{1}{l} \int_{a/2-l}^{a/2} (x - a/2 + l) \sin\left(\arctan \frac{z_0}{|x|}\right) H_1^{(2)}\left(k\sqrt{z_0^2 + x^2}\right) dx - \\
 &\quad - \frac{k}{i} \frac{1}{l} \int_0^l (-z + l) \cos\left(\arctan \frac{|z - z_0|}{a/2}\right) H_1^{(2)}\left(k\sqrt{(z - z_0) + (a/2)^2}\right) dz
 \end{aligned} \tag{П 2.94}$$

Вычислим элементы столбца правой части $B(\psi_x, j_y^{m0})$. Для этого проинтегрируем выражения (П 2.59) для электрического поля нити магнитного тока j_y^{m0} с током базисной функции ψ_{xw} :

$$\begin{aligned}
B(\psi_{xw}, j_y^{m0}) &= 2 \int_{z=a/2-l}^{a/2+l} \int \psi_{xq} E_x(j_y^{m0}) dx dz = \\
&= I_0 \frac{k}{2i} \int_{x_w-l}^{x_w+l} \Delta_{2l}(x-x_w) \sin\left(\arctan \frac{z_0}{|x|}\right) H_1^{(2)}\left(k\sqrt{z_0^2+x^2}\right) dx
\end{aligned}
\tag{П 2.95}$$

Вычислим элементы столбца правой части $B(j_{y0}^{m+}, j_y^{m0})$. Для этого проинтегрируем выражения (П 2.66) для магнитного поля нити магнитного тока j_y^{m0} с магнитным током базисной функции j_{y0}^{m+}

$$\begin{aligned}
B(j_{y0}^{m+}, j_y^{m0}) &= - \int_{z=-a/2}^{a/2} \int j_{y0}^{m+} H_y(j_y^{m0}) dx dz = \\
&= I_0 i \frac{k}{W_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sin \frac{ua}{2} \Big/ \frac{u}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} e^{-\sqrt{u^2-k^2}z_0} du
\end{aligned}
\tag{П 2.96}$$

Вычислим элементы столбца правой части $B(j_{ym}^{m+}, j_y^{m0})$. Для этого проинтегрируем выражения (П 2.66) для магнитного поля нити магнитного тока j_y^{m0} с магнитным током базисной функции j_{ym}^{m+} :

$$\begin{aligned}
B(j_{ym}^{m+}, j_y^{m0}) &= - \int_{z=-a/2}^{a/2} \int j_{ym}^{m+} H_y(j_y^{m0}) dx dz = \\
&= I_0 i \frac{k}{W_0} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left(\sin \frac{(u-k_{xm})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xm}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xm})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xm}}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} e^{-\sqrt{u^2-k^2}z_0} du
\end{aligned}
\tag{П 2.97}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Математическая модель дифракции поля Е-поляризации на полуплоскости с полупрозрачным окончанием

Рассмотрим модель дифракции поля стороннего электрического источника на полуплоскости с полупрозрачным окончанием. На полупрозрачной части экрана выполняются граничные условия (1.1.1). Геометрия модели такая же, как на рис. 1.1, только вместо магнитного источника электрический.

$$\mathbf{j}^e = \delta(x) \mathbf{y}_0 \left(\delta(z) + \delta(z + \Delta H) e^{-i(k\Delta H + \pi)} \right) \quad (\text{П } 3.1)$$

Суммарное поле данной системы состоит из поля электрического источника (П 1.1) и поля вторичного тока на экране \mathbf{j}^e . Задача нахождения тока так же, как в п. 1.2.1, сводится к решению интегрального уравнения (1.2.3) методом моментов, но с разложением тока на экране по прямоугольному базису.

Представим ток, возбуждаемый на экране, как разложение по прямоугольным базисным функциям $\xi_y^p(z)$ с амплитудами C^p

$$j_y^e = \sum_{p=1}^P C^p \xi_y^p(z), \text{ где} \quad (\text{П } 3.2)$$

$$\xi_y^p(z) = \delta(x - a/2) \text{rect}_l(z - z_p), \quad (\text{П } 3.3)$$

$$\text{rect}_l(z - z_p) = \begin{cases} 1, & z_p - l/2 < z < z_p + l/2 \\ 0, & z < z_p - l/2, z > z_p + l/2 \end{cases} \quad - \text{ прямоугольная функция,}$$

длиной l и с центром в точке z_p

Проинтегрируем интегральное уравнение (1.2.3) с базисной функцией ξ_y^q при $q = 1, 2, \dots, P$, получим систему из P уравнений с неизвестными C_1^p

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{z_1-l/2}^{z_1+l/2} \xi^1_y \sum_{p=1}^P C^p (E_y(\xi^p_y) - \xi^p_y Z_L) dz = - \int_{z_1-l/2}^{z_1+l/2} \xi^1_y E_y(\mathbf{j}^{e0}) dz \\ \int_{z_2-l/2}^{z_2+l/2} \xi^2_y \sum_{p=1}^P C^p (E_y(\xi^p_y) - \xi^p_y Z_L) dz = - \int_{z_2-l/2}^{z_2+l/2} \xi^2_y E_y(\mathbf{j}^{e0}) dz \\ \vdots \\ \int_{z_p-l/2}^{z_p+l/2} \xi^p_y \sum_{p=1}^P C^p (E_y(\xi^p_y) - \xi^p_y Z_L) dz = - \int_{z_p-l/2}^{z_p+l/2} \xi^p_y E_y(\mathbf{j}^{e0}) dz \end{array} \right. \quad (\text{П } 3.4)$$

Систему (П 3.4) можно записать в виде матричного уравнения

$$(W + WZ)C = B, \quad (\text{П } 3.5)$$

где W - матрица взаимных сопротивлений при нулевом импедансе; WZ - матричное слагаемое, обусловленное конечной проводимостью материала экрана; B - столбец правой части системы уравнений.

Перейдем к выводу выражений для вычисления элементов матрицы и столбца правой части системы уравнений (П 3.5). В соответствии с (П 3.4) получим слагаемое элементов матрицы взаимных сопротивлений, обусловленное импедансом Z_L

$$WZ^{q,p} = - \int_{z_q-l/2}^{z_q+l/2} \xi^q_y(z) Z_L(z) \xi^p_y(z) dz \quad (\text{П } 3.6)$$

Теперь представим распределение импеданса по экрану, как разложение по прямоугольному базису:

$$Z_L(z) = \sum_{p=1}^P Z_L(z_p) \text{rect}_l(z - z_p) \quad (\text{П } 3.7)$$

Тогда, подставив (П 3.7) в (П 3.6), получим

$$WZ^{q,p} = - \int_{z_q-1/2}^{z_q+1/2} \xi_y^q(z) Z_L(z) \psi_y^p(z) dz = - \begin{cases} lZ_L(z_q), & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \quad (\text{П 3.8})$$

Вычислим спектральную плотность тока базисной функции

$$\xi_y^p = \delta(x-a/2) \int_{z_p-1/2}^{z_p+1/2} \text{rect}_l(z-z_p) e^{iuz} dz = \delta(x-a/2) e^{iuz_p} \frac{2}{u} \sin \frac{ul}{2} \quad (\text{П 3.9})$$

и найдем поле листа электрического тока.

$$j_y^e(z, u) = \xi_y^p \delta(x-a/2) e^{-iuz} \quad (\text{П 3.10})$$

Для этого проинтегрируем выражение для листа тока с функцией Грина:

$$\begin{aligned} A_y^e &= \int_{z'=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \delta(x'-a/2) \xi_y^p e^{-iuz'} \frac{1}{4\pi} \int_{\chi=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(z-z')} e^{\pm\sqrt{\chi^2-k^2}(x-x')}}{\sqrt{\chi^2-k^2}} d\chi dz' dx' = \\ &= \frac{1}{2} \xi_y^p \frac{e^{-iuz} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}(x-a/2)}}{\sqrt{u^2-k^2}} \end{aligned} \quad (\text{П 3.11})$$

$$E_y = -ikW_0 A_y^e = -\xi_y^p \frac{ikW_0}{u} \sin \frac{ul}{2} \frac{e^{-iu(z-z_p)} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}(x-a/2)}}{\sqrt{u^2-k^2}}, \quad (\text{П 3.12})$$

где знаки “+” и “-” берутся при $x < 0$ и $x > 0$ соответственно; при $u^2 - k^2 < 0$ берется мнимый положительный корень.

Проинтегрировав (П 3.12) по спектральной переменной u , получим выражение для поля прямоугольной базисной функции:

$$E_y(\psi_y^p) = \frac{1}{2\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} E_y du = -\frac{ikW_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_y^p \frac{1}{u} \sin \frac{ul}{2} \frac{e^{-iu(z-z_p)} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}(x-a/2)}}{\sqrt{u^2-k^2}} du \quad (\text{П 3.13})$$

Теперь проинтегрируем выражение для поля базисной функции ξ_y^p с током базисной функции ξ_y^q

$$W^{q,p} = \int_{z_q-l/2}^{z_q+l/2} \xi^q E_y(\xi^p_y) dz = -\frac{2ikW_0}{\pi} \int_0^\infty \cos u(z_q - z_p) \frac{1}{u^2} \sin^2 \frac{ul}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} du$$

(П 3.14)

Сделаем замену переменных в выражении (П 3.14) для исключения особенности в точке $u = k$

$$W^{q,p} = \int_{z_q-l/2}^{z_q+l/2} \xi^q E_y(\xi^p_y) dz = -\frac{2ikW_0}{\pi} \int_0^k \cos u(z_q - z_p) \frac{1}{u^2} \sin^2 \frac{ul}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} du -$$

$$-\frac{2ikW_0}{\pi} \int_k^\infty \cos u(z_q - z_p) \frac{1}{u^2} \sin^2 \frac{ul}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} du$$

(П 3.15)

Для первого интеграла (П 3.15) произведем замену $u = k \sin \chi$, $du = k \cos \chi d\chi$,

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} = \frac{1}{i\sqrt{k^2 - u^2}} = \frac{1}{i\sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 \chi}} = \frac{1}{ik \cos \chi}$$

$$-\frac{2ikW_0}{\pi} \int_0^k \cos u(z_q - z_p) \frac{1}{u^2} \sin^2 \frac{ul}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} du =$$

$$= -\frac{2W_0}{\pi k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(k \sin \chi(z_q - z_p)) \frac{1}{\sin^2 \chi} \sin^2 \frac{kl \sin \chi}{2} d\chi$$

(П 3.16)

Для второго интеграла (П 3.15) произведем замену $u = k \operatorname{ch} \chi$, $du = k \operatorname{sh} \chi d\chi$,

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 \operatorname{ch}^2 \chi - k^2}} = \frac{1}{k \operatorname{sh} \chi}$$

$$-\frac{2ikW_0}{\pi} \int_k^\infty \cos u(z_q - z_p) \frac{1}{u^2} \sin^2 \frac{ul}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} du =$$

$$-\frac{2iW_0}{\pi k} \int_0^\infty \cos(k \operatorname{ch} \chi(z_q - z_p)) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \chi} \sin^2 \frac{kl \operatorname{ch} \chi}{2} d\chi$$

(П 3.17)

Таким образом, интеграл (П 3.15) равен

$$\begin{aligned}
W^{q,p} &= \int_{z_q^{-1/2}}^{z_q^{+1/2}} \xi_y^q E_y(\psi^p) dz = \\
&= -\frac{2W_0}{\pi k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(k \sin \chi (z_q - z_p)) \frac{1}{\sin^2 \chi} \sin^2 \frac{kl \sin \chi}{2} d\chi - \\
&\quad - \frac{2iW_0}{\pi k} \int_0^{\infty} \cos(k \operatorname{ch} \chi (z_q - z_p)) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \chi} \sin^2 \frac{kl \operatorname{ch} \chi}{2} d\chi
\end{aligned} \tag{П 3.18}$$

Перейдем к вычислению элементов столбца правой части B системы уравнений (П 3.5). Выпишем выражение для поля стороннего источника:

$$E_y^0 = -\frac{kW_0}{4} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{x^2 + z^2}\right) - e^{-i(k\Delta H + \pi)} \frac{kW_0}{4} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{x^2 + (z + \Delta H)^2}\right) \tag{П 3.19}$$

Проинтегрировав выражение (П 3.19) с базисной функцией ξ_y^q , получим:

$$\begin{aligned}
B^q &= - \int_{z_q^{-1/2}}^{z_q^{+1/2}} \xi_y^q E_y^0 dz = \\
&= \frac{kW_0}{4} \int_{z_q^{-1/2}}^{z_q^{+1/2}} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{z^2 + (a/2)^2}\right) dz + \frac{kW_0}{4} e^{-i(k\Delta H + \pi)} \int_{z_q^{-1/2}}^{z_q^{+1/2}} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{(z + \Delta H)^2 + (a/2)^2}\right) dz
\end{aligned} \tag{П 3.20}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Математическая модель дифракции поля Е-поляризации на системе полуплоскостей с полупрозрачными окончаниями

Рассмотрим модель дифракции поля стороннего электрического источника на системе экранов с полупрозрачными окончаниями (рис. 1.11). Геометрия модели такая же, как в п. 1.2.3. Источник в виде двух нитей электрического тока.

$$\mathbf{j}^e = \delta(x)\mathbf{y}_0 \left(\delta(z) + \delta(z + \Delta H)e^{-i(k\Delta H + \pi)} \right) \quad (\text{П 4.1})$$

Введем базисные функции для тока на системе экранов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{1,y}^p(z) = \text{rect}_l(z - z_p), \quad x = a_1/2 \\ \xi_{2,y}^p(z) = \text{rect}_l(z - z_p), \quad x = a_2/2 \\ \vdots \\ \xi_{N,y}^p(z) = \text{rect}_l(z - z_p), \quad x = a_N/2 \end{array} \right., \quad (\text{П 4.2})$$

Запишем систему уравнений для системы экранов

$$\begin{bmatrix} W_{1,1} + WZ_{1,1} & W_{1,2} & \cdots & W_{1,N} \\ W_{2,1} & W_{2,2} + WZ_{2,2} & & W_{2,N} \\ \vdots & & \ddots & \\ W_{N,1} & W_{N,2} & & W_{N,N} + WZ_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}, \text{ где } (\text{П 4.3})$$

$W_{1,1} + WZ_{1,1}, W_{2,2} + WZ_{2,2}, \dots, W_{3,3} + WZ_{3,3}$ - блоки матрицы взаимных сопротивлений базисных функций, расположенных на одном экране, которые определяются выражениями (П 3.8, П 3.21);

$W_{1,2}^{q,p} = W_{2,1}^{p,q}, \dots, W_{1,N}^{q,p} = W_{N,1}^{p,q}$ - блоки матрицы взаимных сопротивлений базисных функций, расположенных на разных экранах, которые определяются выражением

$$\begin{aligned}
W_{m,n}^{q,p} = & -\frac{2W_0}{\pi k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(k \sin \chi (z_q - z_p)) \frac{1}{\sin^2 \chi} \sin^2 \frac{kl \sin \chi}{2} e^{-ik \cos \chi |a_m - a_n|/2} d\chi - \\
& -\frac{2iW_0}{\pi k} \int_0^{\infty} \cos(k \operatorname{ch} \chi (z_q - z_p)) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \chi} \sin^2 \frac{kl \operatorname{ch} \chi}{2} e^{-k \operatorname{sh} \chi |a_m - a_n|/2} d\chi
\end{aligned} \tag{П 4.4}$$

вывод которого аналогичен выводу (П 3.21).

Столбцы B_1, \dots, B_N определяются выражением (П 3.21), где вместо $a/2$ нужно брать $a_n/2$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Математическая модель дифракции поля E -поляризации на замкнутом экране

Рассмотрим структуру, которая представляет собой две полубесконечные полуплоскости с полупрозрачными окончаниями, образующие плоскопараллельный волновод шириной a , возбуждаемую источником E -поляризации, геометрия которой показана на рис. 1.26, где источник H -поляризации следует заменить источником E -поляризации. На полупрозрачных окончаниях полуплоскостей выполняются граничные условия (1.1.1). На остальной части полуплоскостей выполняются граничные условия для идеального проводника $E_z = 0$. Полупрозрачная часть полуплоскостей имеет длину h . Система координат расположена таким образом, что начало координат находится на расстоянии L по оси z от окончания плоскопараллельного волновода и на расстоянии $a/2$ по оси x от полуплоскостей. Ось x перпендикулярна полуплоскостям, ось z - ориентирована в направлении окончания плоскопараллельного волновода. На высоте z_0 относительно начала координат находится источник E -поляризации, который определяется выражением (1.3.1).

Для решения задачи будем использовать подход, описанный в п. 1.2.3, который заключается в решении интегральных уравнений (1.2.28-1.2.29) для электрического и магнитного поля методом моментов. Однако, в силу сказанного в п. 1.3.1, здесь мы будем использовать кусочно-постоянную аппроксимацию электрического тока на окончаниях полуплоскостей и на идеально проводящей перегородке. Геометрия модели показана на рис. П 5.1.

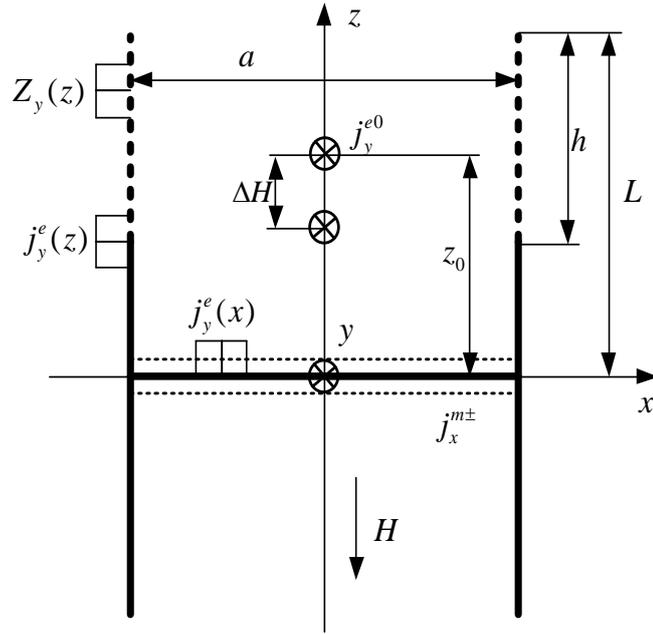


Рис. П 5.1. Геометрия модели плоскопараллельного волновода

Решение во внутренней области представляет совокупность гармоник плоскопараллельного волновода, которые возбуждаются в данной геометрии. К их числу относятся H -волны. Выпишем выражения для компонент поля H -волн, возбуждаемых в плоскопараллельном волноводе:

$$E_{yn} = -U_n e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (\text{П 5.1})$$

$$H_{xn} = -\frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{W_{\perp n}} U_n e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (\text{П 5.2})$$

$$H_{zn} = i \frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} = i \frac{1}{W_0} \frac{k_{xn}}{k} U_n e^{i\Gamma_n z} \sin k_{xn} x, \quad (\text{П 5.3})$$

$$\text{где } W_{\perp n} = W_0 \frac{k}{\Gamma_n}, \quad \Gamma_n = \sqrt{k^2 - k_{xn}^2}, \quad k_{xn} = \frac{2(n-1/2)\pi}{a}$$

Докритические гармоники определяются неравенством: $n < \frac{ak}{2\pi} + \frac{1}{2}$

Итак, получим, что поле во внутренней области представляется в виде суммы гармоник плоскопараллельного волновода. Выпишем поперечные компоненты полей:

$$E_y = -\sum_{n=1}^{\infty} U_n e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (\text{П } 5.4)$$

$$H_x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{W_{\perp n}} U_n e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (\text{П } 5.5)$$

Магнитный ток над и под проводящей перегородкой:

$$\mathbf{j}_{\tau}^{m\pm} = [\pm \mathbf{z}_0, \mathbf{E}_{\tau}] = \mp \mathbf{x}_0 E_y = \pm \mathbf{x}_0 \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos k_{xn} x \quad (\text{П } 5.6)$$

Представим электрический ток на окончаниях полуплоскостей, расположенных над идеально проводящей перегородкой, в виде разложения по кусочно-постоянным базисным функциям:

$$j_y^{1e} = \sum_{p=1}^P C_y^1 \psi_{yp}^1, \text{ где} \quad (\text{П } 5.7)$$

$$\psi_{yp}^1 = \begin{cases} \text{rect}_l(z - z_p), & x = a/2 \\ \text{rect}_l(z - z_p), & x = -a/2 \\ 0, & x \neq a/2, x \neq -a/2 \end{cases} \quad (\text{П } 5.8)$$

Представим электрический ток на перегородке между полуплоскостями в виде разложения по кусочно-постоянным базисным функциям:

$$j_y^{2e} = \sum_{s=1}^S C_{ys}^2 \psi_{ys}^2, \text{ где} \quad (\text{П } 5.9)$$

$$\psi_{y_s}^2 = \begin{cases} \text{rect}_l(x - x_s) + \text{rect}_l(x + x_s), & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{П 5.10})$$

Введем базисные функции поверхностного магнитного тока, текущего под и над идеально проводящей перегородкой:

$$j_{xn}^{m\pm} = \begin{cases} \pm \cos k_{xn} x, & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{П 5.11})$$

Введем обозначения для полей базисных функций: $E_y(\psi_{y_s}^1)$, $H_z(\psi_{y_s}^1)$, $H_x(\psi_{y_s}^1)$ - поле базисной функции электрического тока $\psi_{y_p}^1$; $E_y(\psi_{y_s}^2)$, $H_z(\psi_{y_s}^2)$, $H_x(\psi_{y_s}^2)$ - поле базисной функции электрического тока $\psi_{y_s}^2$; $E_y(j_{xn}^{m\pm})$, $H_x(j_{xn}^{m\pm})$, $H_z(j_{xn}^{m\pm})$ - компоненты поля базисных функций поверхностного магнитного тока, текущего под и над идеально проводящей перегородкой; $E_y(j_y^{e0})$, $H_z(j_y^{e0})$, $H_x(j_y^{e0})$ - поле стороннего источника:

Проинтегрируем интегральное уравнение (1.2.28) с базисной функцией $\psi_{y_p}^1$

$$\begin{aligned} & \int_x \int_{z_q-1/2}^{z_q+1/2} \psi_{y_q}^1 \sum_{p=1}^P C_{yp}^1 E_y(\psi_{y_p}^1) dz dx - \int_x \int_{z_q-1/2}^{z_q+1/2} \psi_{y_q}^1 \sum_{p=1}^P C_{yp}^1 \psi_{y_p}^1 \sum_{m=1}^M Z_{ym} \text{rect}_l(z - z_m) dz dx + \\ & + \int_x \int_{z_q-1/2}^{z_q+1/2} \psi_{y_q}^1 \sum_{s=1}^S C_{ys}^2 E_y(\psi_{y_s}^2) dz dx + \sum_{n=0}^N U_n \int_x \int_{z_q-1/2}^{z_q+1/2} \psi_{y_q}^1 E_y(j_{xn}^{m+}) dz dx = \\ & = - \int_x \int_{z_q-1/2}^{z_q+1/2} \psi_{y_q}^1 E_y(j_y^{e0}) dz dx \end{aligned} \quad (\text{П 5.12})$$

Проинтегрируем интегральное уравнение (1.2.28) с базисной функцией $\psi_{y_p}^2$

$$\begin{aligned}
& \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \psi_{yw}^2 \sum_{p=1}^P C_{yp}^1 E_y(\psi_{yp}^1) dx dz + \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \psi_{yw}^2 \sum_{s=1}^S C_{ys}^2 E_y(\psi_{ys}^2) dx + \sum_{n=1}^N \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \psi_{yw}^2 E_y(j_{yn}^{e+}) dx dz = \\
& = - \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \psi_{yw}^2 E_y(j_y^{e0}) dx dz
\end{aligned}
\tag{П 5.13}$$

Проинтегрируем интегральное уравнение (1.2.29) с базисной функцией гармоника эквивалентного магнитного тока

$$\begin{aligned}
& \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{xn}^{m+} \sum_{p=1}^P C_{yp}^1 H_x(\psi_{yp}^1) dx dz + \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{xn}^{m+} \sum_{s=1}^S C_{ys}^2 H_x(\psi_{ys}^2) dx dz + \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{xn}^{m+} \sum_{n=1}^N U_n H_x(j_{xn}^{m+}) dx dz \\
& - \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{xn}^{m+} \sum_{n=1}^N U_n H_x(j_{xn}^{m-}) dx dz = - \int_{z=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} j_{xn}^{m+} H_x(j_x^{e0}) dx dz
\end{aligned}
\tag{П 5.14}$$

Уравнения (П 5.12-П 5.14) образуют систему уравнений относительно амплитуд C_{yp}^1 , C_{ys}^2 , U_n

$$\begin{pmatrix} W(\psi_y^1, \psi_y^1) + WZ(\psi_y^1, \psi_y^1) & W(\psi_y^1, \psi_y^2) & W(\psi_y^1, j_x^{m+}) \\ W(\psi_y^2, \psi_y^1) & W(\psi_y^2, \psi_y^2) & W(\psi_y^2, j_x^{m+}) \\ W(j_x^{m+}, \psi_y^1) & W(j_x^{m+}, \psi_y^2) & W(j_x^{m+}, j_x^{m+}) - W(j_x^{m+}, j_x^{m-}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_y^1 \\ C_y^2 \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\psi_y^1, j_y^{e1}) \\ B(\psi_y^2, j_y^{e1}) \\ B(j_x^{m+}, j_y^{e1}) \end{pmatrix}
\tag{П 5.15}$$

Далее рассмотрим вывод формул для вычисления элементов матрицы и столбца правой части системы уравнений (П 5.15).

Вычислим поля базисной функции ψ_{yp}^1 . Для этого разложим базисную функцию тока по полуплоскостям в спектр плоских волн по координате z

$$\psi_{yp}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_l(z - z_p) e^{iuz} dz = \sin \frac{ul}{2} / \frac{u}{2} e^{iuz_p}
\tag{П 5.16}$$

Далее вычислим поле двух листов электрического тока j_y^{1e} , с бегущей волной по оси z

$$j_y^{1e} = \begin{cases} \psi_y^1 e^{-iuz'}, & x = a/2, x = -a/2 \\ 0, & x \neq a/2, x \neq -a/2 \end{cases} \quad (\text{П 5.17})$$

Для этого вычислим электродинамический потенциал

$$A_y(j_y^{1e}) = \iint_{x' z'} G j_y^{1e} dz' dx' = \frac{1}{2} \psi_y^1 \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} \quad (\text{П 5.18})$$

и вычислим компоненты поля

$$E_y(j_y^{1e}) = -ikW_0 A_y(j_y^{1e}) = -i \frac{1}{2} kW_0 \psi_y^1 \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} \quad (\text{П 5.19})$$

$$H_x(j_y^{1e}) = -i \frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y(j_y^{1e})}{\partial z} = i \frac{1}{2} \psi_y^1 \frac{u}{\sqrt{u^2 - k^2}} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} \quad (\text{П 5.20})$$

$$H_z(j_y^{1e}) = i \frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y(j_y^{1e})}{\partial x} = \frac{1}{2} \psi_y^1 \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} - e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} \quad (\text{П 5.21})$$

Вычислим компоненты поля базисной функции электрического тока ψ_{yp}^1 , текущего по полуплоскостям, проинтегрировав по спектру выражения (П 5.19-П 5.21)

$$E_y(\psi_{yp}^1) = -ikW_0 \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ul}{2} \frac{1}{u} e^{iuz_p} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} du \quad (\text{П 5.22})$$

$$H_x(\psi_{yp}^1) = i \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ul}{2} \frac{1}{u} e^{iuz_p} \frac{u}{\sqrt{u^2 - k^2}} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} + e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} du \quad (\text{П 5.23})$$

$$H_z(\psi_{yp}^1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ul}{2} \frac{1}{u} e^{iuz_p} \left(e^{\sqrt{u^2 - k^2}(x-a/2)} - e^{-\sqrt{u^2 - k^2}(x+a/2)} \right) e^{-iuz} du \quad (\text{П 5.24})$$

Вычислим поля базисной функции $\psi_{y_s}^2$. Разложим базисную функцию тока по перегородке в спектр плоских волн по координате x

$$\begin{aligned}\psi_{y_s}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\text{rect}_l(x - x_s) + \text{rect}_l(x + x_s)) e^{iux} dx = \\ &= \left(\sin \frac{ul}{2} \Big/ \frac{u}{2} e^{-iux_s} + \sin \frac{ul}{2} \Big/ \frac{u}{2} e^{iux_s} \right) = 2 \cos ux_s \sin \frac{ul}{2} \Big/ \frac{u}{2}\end{aligned}\quad (\text{П } 5.25)$$

и вычислим поле листа электрического тока j_y^{2e} с бегущей волной по оси x

$$j_y^{2e} = \begin{cases} \psi_{y_s}^2 e^{-iux}, & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases}\quad (\text{П } 5.26)$$

Для этого вычислим электродинамический потенциал

$$A_y(j_y^{2e}) = \iint_{x' z'} G j_y^{2e} dz' dx' = \frac{1}{2} \psi_{y_s}^2 \frac{e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z}}{\sqrt{u^2-k^2}} e^{-iux}\quad (\text{П } 5.27)$$

и вычислим компоненты поля

$$E_y(j_y^{2e}) = -ikW_0 A_y(j_y^{2e}) = -i \frac{1}{2} kW_0 \psi_{y_s}^2 \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} e^{-iux}\quad (\text{П } 5.28)$$

$$H_x(j_y^{2e}) = -i \frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y(j_y^{2e})}{\partial z} = \mp \frac{1}{2} \psi_{y_s}^2 e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} e^{-iux}\quad (\text{П } 5.29)$$

$$H_z(j_y^{2e}) = i \frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y(j_y^{2e})}{\partial x} = -i \frac{1}{2} \psi_{y_s}^2 \frac{u}{\sqrt{u^2-k^2}} e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} e^{-iux}\quad (\text{П } 5.30)$$

Вычислим компоненты поля базисной функции электрического тока $\psi_{y_s}^2$, текущего по перегородке, проинтегрировав по спектру выражения (П 5.28-П 5.30)

$$E_y(\psi_{y_s}^2) = -ikW_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ul}{2} \Big/ \frac{u}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2-k^2}} \cos ux_s e^{\pm\sqrt{u^2-k^2}z} e^{-iux} du\quad (\text{П } 5.31)$$

$$H_x(\psi_{y_s}^2) = \mp \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ul}{2} \Big/ \frac{u}{2} \cos ux_s e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2} z} e^{-iux} du \quad (\text{П 5.32})$$

$$H_z(\psi_{y_s}^2) = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{ul}{2} \Big/ \frac{u}{2} \frac{u}{\sqrt{u^2 - k^2}} \cos ux_s e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2} z} e^{-iux} du \quad (\text{П 5.33})$$

Вычислим поле базисной функции j_{xn}^{m+} . Для этого разложим гармонику магнитного тока на перегородке в спектр плоских волн по координате x

$$j_{xn}^{m+} = \int_{-a/2}^{a/2} \cos k_{xn} x e^{iux} dx = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{(u - k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u - k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u + k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u + k_{xn}}{2} \right) \quad (\text{П 5.34})$$

Теперь вычислим поле листа магнитного тока j_x^m с бегущей волной по оси x

$$j_x^m = \begin{cases} j_{xn}^{m+} e^{-iux}, & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{П 5.35})$$

Для этого вычислим электродинамический потенциал

$$A_x^m(j_x^m) = \iint_{x' z'} G j_x^m dz' dx' = \frac{1}{2} j_{xn}^{m+} \frac{e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2} z}}{\sqrt{u^2 - k^2}} e^{-iux} \quad (\text{П 5.36})$$

и вычислим компоненты поля:

$$E_y(j_x^m) = -\frac{\partial A_x^m(j_x^m)}{\partial z} = \mp \frac{1}{2} j_{xn}^{m+} e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2} z} e^{-iux} \quad (\text{П 5.37})$$

$$H_x(j_x^m) = -i \frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y(j_x^m)}{\partial z} = i \frac{1}{2} \frac{1}{kW_0} j_{xn}^{m+} \sqrt{u^2 - k^2} e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2} z} e^{-iux} \quad (\text{П 5.38})$$

$$H_z(j_x^m) = i \frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y(j_x^m)}{\partial x} = \mp \frac{1}{kW_0} \frac{1}{2} j_{xn}^{m+} u e^{\pm \sqrt{u^2 - k^2} z} e^{-iux} \quad (\text{П 5.39})$$

Вычислим компоненты поля базисной функции магнитного тока j_{xn}^{m+} распределенного над перегородкой, проинтегрировав по спектру выражения (П 5.37-П 5.39)

$$E_y(j_{xn}^{m+}) = \mp \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xn}}{2} \right) e^{\pm \sqrt{u^2-k^2}z} e^{-iux} du \quad (\text{П 5.40})$$

$$H_x(j_{xn}^{m+}) = i \frac{1}{kW_0} \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xn}}{2} \right) \sqrt{u^2-k^2} e^{\pm \sqrt{u^2-k^2}z} e^{-iux} du \quad (\text{П 5.41})$$

$$H_z(j_{xn}^{m+}) = \mp \frac{1}{kW_0} \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xn}}{2} \right) u e^{\pm \sqrt{u^2-k^2}z} e^{-iux} du \quad (\text{П 5.42})$$

Вычислим поле базисной функции j_{xn}^{m-} . Поле гармоника магнитного тока j_{xn}^{m-} распределенного под идеально проводящей перегородкой определяется следующими соотношениями

$$E_y(j_{xn}^{m-}) = -U_n^H e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (\text{П 5.43})$$

$$H_x(j_{xn}^{m-}) = -\frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y(j_{xn}^{m-})}{\partial z} = -\frac{1}{W_{\perp n}^H} U_n^H e^{i\Gamma_n z} \cos k_{xn} x \quad (\text{П 5.44})$$

$$H_z(j_{xn}^{m-}) = i \frac{1}{kW_0} \frac{\partial E_y(j_{xn}^{m-})}{\partial x} = i \frac{1}{W_0} \frac{k_{xn}}{k} U_n^H e^{i\Gamma_n z} \sin k_{xn} x, \quad (\text{П 5.45})$$

где $W_{\perp n}^H = W_0 \frac{k}{\Gamma_n}$, $\Gamma_n = \sqrt{k^2 - k_{xn}^2}$, $k_{xn} = \frac{2(n-1/2)\pi}{a}$

Вычислим поле нити стороннего электрического тока j_y^{e0} . Для этого вычислим электродинамический потенциал нити электрического тока

$$A_y(j_y^{e0}) = I_0 \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(kr) \quad (\text{П 5.46})$$

Отсюда, компоненты поля нити электрического тока равны:

$$E_y(j_y^{e0}) = -ikW_0 A_y(j_y^{e0}) = -I_0 kW_0 \frac{1}{4} H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}) \quad (\text{П } 5.47)$$

$$H_x(j_y^{e0}) = -\frac{\partial A_y(j_y^{e0})}{\partial z} = I_0 \frac{k}{4i} \frac{z - z_0}{\sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}} H_1^{(2)}(k\sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}) \quad (\text{П } 5.48)$$

$$H_z(j_y^{e0}) = \frac{\partial A_y(j_y^{e0})}{\partial x} = -I_0 \frac{k}{4i} \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}} H_1^{(2)}(k\sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}) \quad (\text{П } 5.49)$$

Перейдем к вычислению взаимных сопротивлений для базисных функций ψ_{yp}^1 и ψ_{yq}^1 . Для этого проинтегрируем выражение (П 5.22) для электрического поля базисной функции ψ_{yq}^1 с током базисной функции ψ_{yp}^1 :

$$\begin{aligned} W(\psi_{yq}^1, \psi_{yp}^1) &= \int_x \int_{z_q - l/2}^{z_q + l/2} \psi_{yq}^1 E_y(\psi_{yp}^1) dz dx = \\ &= -kW_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sin \frac{kl \sin \chi}{2} / \frac{k \sin \chi}{2} \right)^2 (1 + e^{-ika \cos \chi}) \cos(k \sin \chi (z_q - z_p)) d\chi - \\ &- ikW_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\sin \frac{kl \operatorname{ch} \chi}{2} / \frac{k \operatorname{ch} \chi}{2} \right)^2 (1 + e^{-kash \chi}) \cos(k \operatorname{ch} \chi (z_q - z_p)) d\chi \end{aligned} \quad (\text{П } 5.50)$$

$$WZ(\psi_{yq}^1, \psi_{yp}^1) = \begin{cases} 2Z_{yp} l, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \quad (\text{П } 5.51)$$

Вычислим взаимные сопротивления для базисных функций ψ_{ys}^2 и ψ_{yq}^1 . Для этого проинтегрируем выражение (П 5.22) для электрического поля базисной функции ψ_{yq}^1 с током базисной функции ψ_{ys}^2 :

$$\begin{aligned}
W(\psi_{y_w}^2, \psi_{y_p}^1) &= W(\psi_{y_q}^1, \psi_{y_s}^2) = \int_{z-x_w-l/2}^{-x_w+l/2} \int \psi_{y_w}^2 E_y(\psi_{y_p}^1) dx dz + \int_{z-x_w-l/2}^{x_w+l/2} \int \psi_{y_w}^2 E_y(\psi_{y_p}^1) dx dz = \\
&= -kW_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \frac{kl \sin \chi}{2} \Big/ \frac{k \sin \chi}{2} \sin \frac{kl \cos \chi}{2} \Big/ \frac{k \cos \chi}{2} \cos(kz_p \sin \chi) \cos(kx_w \cos \chi) e^{-i \frac{ka}{2} \cos \chi} d\chi - \\
&- ikW_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \frac{kl \operatorname{ch} \chi}{2} \Big/ \frac{k \operatorname{ch} \chi}{2} \sin \frac{ikl \operatorname{sh} \chi}{2} \Big/ \frac{ik \operatorname{sh} \chi}{2} \cos(kz_p \operatorname{ch} \chi) (e^{-k(x_w+a/2)\operatorname{sh} \chi} + e^{k(x_w-a/2)\operatorname{sh} \chi}) d\chi
\end{aligned}
\tag{П 5.52}$$

Вычислим взаимные сопротивления для базисных функций j_{xm}^{m+} и ψ_{yq}^1 .

Для этого проинтегрируем выражение (П 5.23) для магнитного поля базисной функции ψ_{yp}^1 с магнитным током базисной функции j_{xm}^{m+} :

$$\begin{aligned}
W(j_{xm}^{m+}, \psi_{yp}^1) &= -W(\psi_{yq}^1, j_{xm}^{m+}) = \int_{z-a/2}^{a/2} \int j_{xm}^{m+} H_x(\psi_{yp}^1) dx dz = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{ik_{xm} \sin \frac{k_{xm} a}{2} (1 + e^{-ika \cos \chi}) - k \cos \chi \cos \frac{k_{xm} a}{2} (1 - e^{-ika \cos \chi})}{(k_{xm} + k \cos \chi)(k_{xm} - k \cos \chi)} \right) \sin \frac{kl \sin \chi}{2} \sin(kz_p \sin \chi) d\chi - \\
&- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + e^{-ka \operatorname{sh} \chi}) \frac{k_{xm} \sin \frac{k_{xm} a}{2} + k \operatorname{sh} \chi \cos \frac{k_{xm} a}{2}}{(k_{xm} - ik \operatorname{sh} \chi)(k_{xm} + ik \operatorname{sh} \chi)} \sin \frac{kl \operatorname{ch} \chi}{2} \sin(kz_p \operatorname{ch} \chi) d\chi
\end{aligned}
\tag{П 5.53}$$

Вычислим взаимные сопротивления для базисных функций ψ_{ys}^2 и ψ_{yw}^2 .

Проинтегрируем выражение (П 5.31) для электрического поля базисной функции ψ_{ys}^2 с током базисной функции ψ_{yw}^2 :

$$\begin{aligned}
W(\psi_{yw}^2, \psi_{ys}^2) &= \int_{z-x_w-l/2}^{-x_w+l/2} \int \psi_{yw}^2 E_y(\psi_{ys}^2) dx dz + \int_{z-x_w-l/2}^{x_w+l/2} \int \psi_{yw}^2 E_y(\psi_{ys}^2) dx dz \\
&= -kW_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sin \frac{kl \sin \chi}{2} \Big/ \frac{k \sin \chi}{2} \right)^2 \cos(kx_s \sin \chi) \cos(kx_w \sin \chi) d\chi - \\
&- ikW_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\sin \frac{kl \operatorname{ch} \chi}{2} \Big/ \frac{k \operatorname{ch} \chi}{2} \right)^2 \cos(kx_s \operatorname{ch} \chi) \cos(kx_w \operatorname{ch} \chi) d\chi
\end{aligned}
\tag{П 5.54}$$

Вычислим коэффициенты передачи между базисными функциями j_{xn}^{m+} и ψ_{yw}^2 .

$$\begin{aligned}
 W(\psi_{yw}^2, j_{xn}^{m+}) &= -W(j_{xm}^{m+}, \psi_{ys}^2) = \int_{z=-x_w-1/2}^{-x_w+1/2} \int \psi_{yw}^2 E_y(j_{xn}^{m+}) dx dz + \int_{z=x_w-1/2}^{x_w+1/2} \int \psi_{yw}^2 E_y(j_{xn}^{m+}) dx dz = \\
 &= -\frac{1}{k_{xn}} (\sin(k_{xn}(x_w + l/2)) - \sin(k_{xn}(x_w - l/2)))
 \end{aligned}
 \tag{П. 5.55}$$

Вычислим коэффициенты передачи между базисными функциями j_{xm}^{m+} и j_{xn}^{m+} , j_{xm}^{m+} и j_{xn}^{m-} . Для этого проинтегрируем выражение (П. 5.41) для магнитного поля базисной функции j_{xn}^{m+} с магнитным током базисной функции j_{xm}^{m+} :

$$\begin{aligned}
 W(j_{xm}^{m+}, j_{xn}^{m+}) &= \int_{z=-a/2}^{a/2} \int j_{xm}^{m+} H_x(j_{xn}^{m+}) dx dz = \\
 &= i \frac{1}{kW_0} \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \left(\sin \frac{(u-k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xn}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xn})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xn}}{2} \right) \times \\
 &\quad \times \left(\sin \frac{(u-k_{xm})a}{2} \Big/ \frac{u-k_{xm}}{2} + \sin \frac{(u+k_{xm})a}{2} \Big/ \frac{u+k_{xm}}{2} \right) \sqrt{u^2 - k^2} du
 \end{aligned}
 \tag{П. 5.56}$$

Проинтегрируем выражение (П. 5.44) для магнитного поля базисной функции j_{xn}^{m-} с магнитным током базисной функции j_{xm}^{m+} :

$$\begin{aligned}
 W(j_{xn}^{m+}, j_{xm}^{m-}) &= -\int_{z=-a/2}^{a/2} \int j_{xm}^{m+} H_x(j_{xn}^{m-}) dx dz = \\
 &= \frac{1}{W_{\perp n}^H} \int_{-a/2}^{a/2} \cos k_{xm} x \cos k_{xn} x dx = \frac{1}{W_{\perp n}^H} \begin{cases} \frac{a}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{П. 5.57}$$

$$\text{где } W_{\perp n}^H = W_0 \frac{k}{\Gamma_n}, \quad \Gamma_n = \sqrt{k^2 - k_{xn}^2}, \quad k_{xn} = \frac{2(n-1/2)\pi}{a}$$

Перейдем к вычислению элементов столбца правой части. Вычислим элементы $B(\psi_y^1, j_y^{e1})$. Для этого проинтегрируем выражение (П 5.47) для электрического поля нити магнитного тока j_y^{e1} с током базисной функции ψ_{yq}^1

$$B(\psi_{yq}^1, j_y^{e0}) = - \int_x \int_{z_q^{-l/2}}^{z_q^{+l/2}} \psi_{yq}^1 E_y(j_y^{e0}) dz dx = I_0 k W_0 \frac{1}{2} \int_{z_q^{-l/2}}^{z_q^{+l/2}} H_0^{(2)}(k \sqrt{a^2/4 + (z - z_0)^2}) dz \quad (\text{П 5.58})$$

Вычислим элементы столбца правой части $B(\psi_w^2, j_y^{e0})$. Для этого проинтегрируем выражение (П 5.47) для электрического поля нити электрического тока j_y^{e0} с током базисной функции ψ_y^2

$$B(\psi_{yw}^2, j_y^{e0}) = - \int_z \int_{x_w^{-l/2}}^{x_w^{+l/2}} \psi_{yw}^2 E_y(j_y^{e0}) dx dz = I_0 k W_0 \frac{1}{2} \int_{x_w^{-l/2}}^{x_w^{+l/2}} H_0^{(2)}(k \sqrt{x^2 + z_0^2}) dx \quad (\text{П 5.59})$$

Вычислим элементы столбца правой части $B(j_{xm}^{m+}, j_y^{e0})$. Для этого проинтегрируем выражение (П 5.48) для магнитного поля нити электрического тока j_y^{e0} с током базисной функции j_{xm}^{m+}

$$\begin{aligned} B(j_{xm}^{m+}, j_y^{e0}) &= - \int_z \int_{-a/2}^{a/2} j_{xm}^{m+} H_x(j_y^{e0}) dx dz = \\ &= - \frac{1}{4} I_0 j k \int_{-a/2}^{a/2} \cos k_{xm} x \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + x^2}} H_1^{(2)}(k \sqrt{x^2 + z_0^2}) dx \end{aligned} \quad (\text{П 5.60})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Модель щелевой полупрозрачной структуры на диэлектрической подложке

Введем систему координат таким образом, что ось y параллельна щелям. Ось z направим вверх, перпендикулярно плоскости решетки. Пусть на решетку падает плоская волна в направлении уменьшения координаты z . Поляризация волны выбрана таким образом, что вектор \mathbf{H} перпендикулярен оси x , и щели, прорезанные перпендикулярно вектору \mathbf{H} , можно не учитывать. При $d \ll a$ и $a \ll \lambda$ задача дифракции на квадратной щелевой решетке может быть сведена к двумерной задаче (рис. П 6.1), в которой не участвуют щели, прорезанные перпендикулярно вектору \mathbf{H} падающей волны.

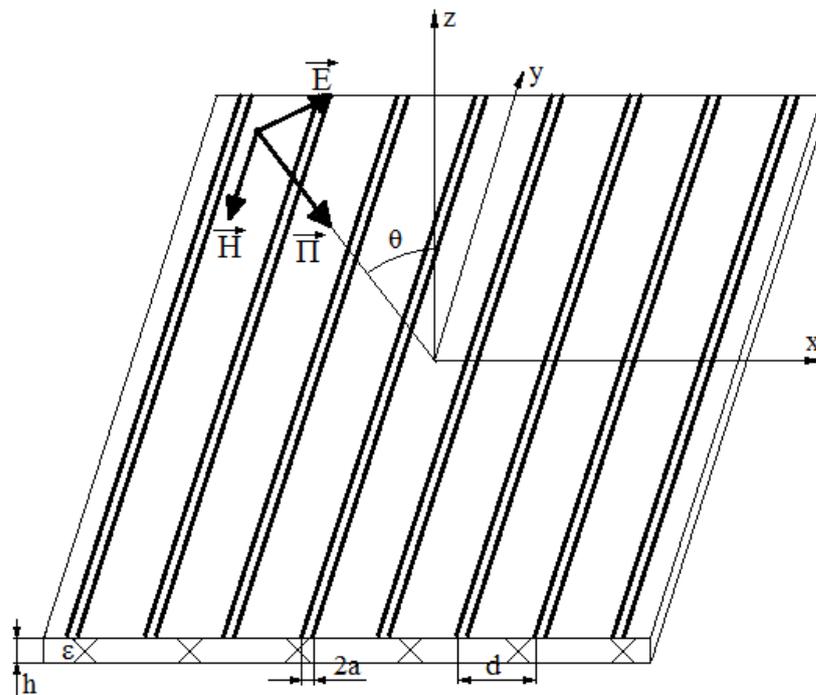


Рис. П 6.1. Геометрия двумерной модели щелевой решетки

Запишем компоненты падающей волны:

$$E_x^{na0} = \frac{k_{z01}}{k_1} e^{-ik_{x0}x} e^{ik_{z01}z}, \quad (\text{П } 6.1)$$

$$E_z^{nad} = \frac{k_{x0}}{k_1} e^{-ik_{x0}x} e^{ik_{z01}z}, \quad (\text{П 6.2})$$

$$H_y^{nad} = -\frac{1}{W_1} e^{-ik_{x0}x} e^{ik_{z01}z}, \quad (\text{П 6.3})$$

где k_1 - волновое число в свободном пространстве; k_{x0} - волновое число падающей волны по координате x ; k_{z01} - волновое число падающей волны по координате z ; W_1 - волновое сопротивление свободного пространства.

Рассмотрим периодическую бесконечную решетку. Для ее анализа применим теорему Флоке [52]. Учитывая, что возбуждение описывается выражениями (П 6.1) – (П 6.3), а структура решетки является периодической, компоненты полного поля подчиняются соотношению

$$\xi(x+d, z) = \xi(x, z)e^{-i\psi_x}, \quad (\text{П 6.4})$$

где ψ_x - фиксированный сдвиг фазы по направлению x .

Аналогичное распределение полного поля должно быть в любой поперечной плоскости $z = \text{const}$. Изменение же поля по оси z предполагается таким, что

$$\xi(x, z) = \xi(x)e^{-i\Gamma z} - \text{для волн, бегущих в направлении } z > 0 \quad (\text{П 6.5})$$

$$\xi(x, z) = \xi(x)e^{i\Gamma z} - \text{для волн, бегущих в направлении } z < 0 \quad (\text{П 6.6})$$

Построение периодического решения, удовлетворяющего граничному условию (4.74) производится с помощью теоремы Флоке [52]. Пусть известен вид распределения электрического поля между краями щели:

$$E_x^u(x, 0) = Ce^{-ik_{x0}x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J^m(x-nd) \delta(x-nd), \quad \text{где} \quad (\text{П 6.7})$$

$$J^m(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ при } |x| \leq a; C - \text{ неизвестная амплитуда.}$$

По теореме об эквивалентных поверхностных источниках, решетку из щелей в идеально проводящем экране можно представить в виде бесконечного металлического листа с периодически повторяющимся распределением поверхностного магнитного тока с линейно изменяющейся фазой (рис. 4.6). Причем магнитный ток над и под экраном отличаются знаком.

$$\mathbf{E}_\perp = [\mathbf{j}^m, \mathbf{n}] \quad (\text{П 6.8})$$

$$j_y^{m\pm}(x) = \pm E_x^u(x, 0) \quad (\text{П 6.9})$$

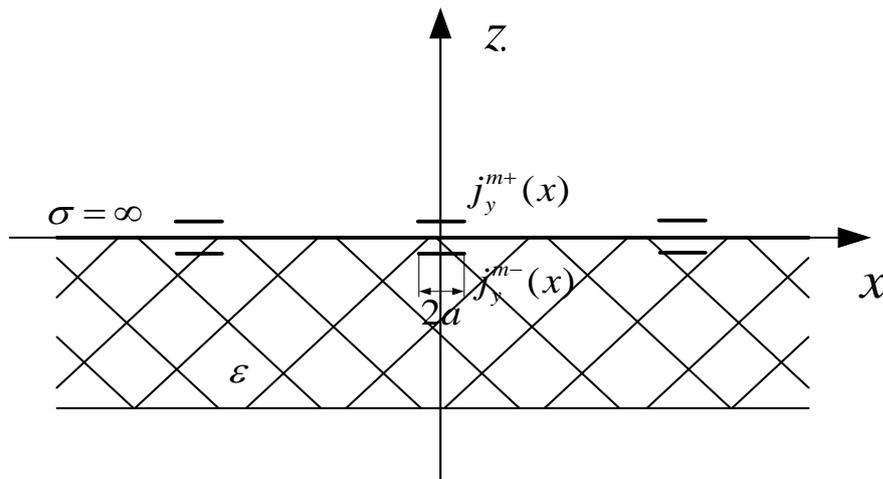


Рис. П 6.2. К двумерной модели щелевой решетки

Множитель $J^m(x)$ представим в виде ряда Фурье:

$$J^m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^m \exp\left(-i \frac{2\pi n}{d} x\right) \quad (\text{П 6.10})$$

и вычислим коэффициенты ряда Фурье J_n^m

$$J_n^m = \frac{1}{d} \int_{-a}^a J^m(x') \exp\left(i \frac{2\pi m}{d} x'\right) dx' = \frac{a\pi}{d} J_0\left(\frac{2an\pi}{d}\right) \quad (\text{П 6.11})$$

Таким образом, распределение магнитного тока под экраном будет

$$j_y^{m-}(x) = -C J^m(x) e^{-ik_{x0}x} = -C \cdot \frac{a\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_0\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \exp\left(-i\left(\frac{2\pi n}{d} + k_{x0}\right)x\right) \quad (\text{П 6.12})$$

Теперь найдем поле одной гармоники магнитного тока под экраном

$$j_{yn}^{m-}(x) = -J_n^m \exp(-ik_{xn}x), \quad (\text{П 6.13})$$

$$\text{где } k_{xn} = \frac{2\pi n}{d} + k_{x0}$$

Для этого напишем систему уравнений, следующую из граничных условий для касательных составляющих E_{xn} , H_{yn} и граничного условия для магнитного тока на металле $E_{xn} = -j_{yn}^{m-}$.

$$\begin{cases} E_{xn}^1(x,0) + E_{xn}^2(x,0) = -j_{yn}^{m-}(x) \\ E_{xn}^1(x,h) + E_{xn}^2(x,h) = E_{xn}^3(x,h) \\ H_{yn}^1(x,h) + H_{yn}^2(x,h) = H_{yn}^3(x,h) \end{cases} \quad (\text{П 6.14})$$

Используя, что для волн, бегущих в направлении $z > 0$

$$\frac{E_{xn}}{H_{yn}} = -W_0 \frac{k_{zn}}{k}, \quad H_{yn} = -\frac{1}{W_0} \frac{k}{k_{zn}} E_{xn}, \quad (\text{П 6.15})$$

и для волн, бегущих в направлении $z < 0$

$$\frac{E_{xn}}{H_{yn}} = W_0 \frac{k_{zn}}{k}, \quad H_{yn} = \frac{1}{W_0} \frac{k}{k_{zn}} E_{xn} \quad (\text{П 6.16})$$

получим

$$\begin{cases} E_{xn}^1(x, 0) + E_{xn}^2(x, 0) = -j_{yn}^{m-}(x) \\ E_{xn}^1(x, h) + E_{xn}^2(x, h) = E_{xn}^3(x, h) \\ \frac{1}{W_2} \frac{k_2}{k_{zn2}} (-E_{xn}^1(x, h) + E_{xn}^2(x, h)) = -\frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} E_{xn}^3(x, h) \end{cases}, \text{ где} \quad (\text{П 6.17})$$

волна, распространяющаяся в диэлектрической подложке вниз

$$E_{xn}^1(x, z) = A_n^1 e^{-ik_{xn}x} e^{ik_{zn1}z}; \quad (\text{П 6.18})$$

волна, распространяющаяся в диэлектрической подложке вверх

$$E_{xn}^2(x, z) = A_n^2 e^{-ik_{xn}x} e^{-ik_{zn1}z}; \quad (\text{П 6.19})$$

волна, прошедшая через диэлектрическую подложку

$$E_{xn}^3(x, z) = A_n^3 e^{-ik_{xn}x} e^{ik_{zn2}z}; \quad (\text{П 6.20})$$

h - высота подложки; $k_{zn1} = \sqrt{k_1^2 - k_{xn}^2}$ - волновое число для полей n -ой гармоники по координате z в свободном пространстве; $k_{zn2} = \sqrt{k_2^2 - k_{xn}^2}$ - волновое число для полей n -ой гармоники по координате z в диэлектрической подложке; $W_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon}}$ - волновое сопротивление в диэлектрической подложке.

Подставим (П 6.18) – (П 6.20) в (П 6.17) и избавимся от множителя, зависящего от x :

$$\begin{cases} A_n^1 + A_n^2 + 0 = CJ_n^m \\ A_n^1 e^{ik_{zn2}h} + A_n^2 e^{-ik_{zn2}h} - A_n^3 e^{ik_{zn1}h} = 0 \\ -\frac{1}{W_2} \frac{k_2}{k_{zn2}} A_n^1 e^{ik_{zn2}h} + \frac{1}{W_2} \frac{k_2}{k_{zn2}} A_n^2 e^{-ik_{zn2}h} + \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} A_n^3 e^{ik_{zn1}h} = 0 \end{cases} \quad (\text{П 6.21})$$

Для решения системы (П 6.21) введем обозначения: $K_{n1} = W_1 k_{zn1} k_2$; $K_{n2} = W_2 k_{zn2} k_1$. Выпишем решение системы уравнений:

$$A_n^1 = C \frac{J_n^m}{2} \frac{(K_{n1} + K_{n2}) \exp(-ik_{zn2}h)}{K_{n1} \cos k_{zn2}h - iK_{n2} \sin k_{zn2}h} \quad (\text{П 6.22})$$

$$A_n^2 = C \frac{J_n^m}{2} \frac{(K_{n1} - K_{n2}) \exp(ik_{zn2}h)}{K_{n1} \cos k_{zn2}h - iK_{n2} \sin k_{zn2}h} \quad (\text{П 6.23})$$

$$A_n^3 = CJ_n^m \frac{K_{n1} \exp(-ik_{zn1}h)}{K_{n1} \cos k_{zn2}h - iK_{n2} \sin k_{zn2}h} \quad (\text{П 6.24})$$

Получим значение магнитного поля под экраном при $z = 0$, подставив (П 6.22) – (П 6.23) в (П 6.18) – (П 6.19), а затем подставив результат в (П 6.15-П 6.16):

$$H_{yn}^1(x, 0) = -C \frac{J_n^m}{2} \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} \frac{(K_{n1} + K_{n2}) \exp(-k_{zn2}h)}{K_{n1} \cos k_{zn2}h - iK_{n2} \sin k_{zn2}h} e^{-ik_{zn}x} \quad (\text{П 6.25})$$

$$H_{yn}^2(x, 0) = C \frac{J_n^m}{2} \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} \frac{(K_{n1} - K_{n2}) \exp(k_{zn2}h)}{K_{n1} \cos k_{zn2}h - iK_{n2} \sin k_{zn2}h} e^{-ik_{zn}x} \quad (\text{П 6.26})$$

$$H_{yn}^-(x, 0) = H_{yn}^1(x, 0) + H_{yn}^2(x, 0) = -CJ_n^m \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} \frac{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n1}}{K_{n2}} \sin k_{zn2}h}{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n2}}{K_{n1}} \sin k_{zn2}h} e^{-ik_{zn}x} \quad (\text{П 6.27})$$

Вычислим магнитное поле над экраном при $z = 0$ которое возбуждается распределением магнитного тока

$$j_y^{m+}(x) = CJ^m(x)e^{-ik_{x0}x} = C \cdot \frac{a\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_0\left(\frac{2\pi na}{d}\right) e^{-i\left(\frac{2\pi n}{d} + k_{x0}\right)x} \quad (\text{П 6.28})$$

Для этого вычислим сначала поле одной гармоники магнитного тока

$$j_{yn}^{m+}(x) = CJ_n^m \exp(-ik_{xn}x) \quad (\text{П 6.29})$$

Выпишем касательные компоненты поля падающей волны и поля волны, отраженной от металлического экрана

$$E_x^{nad}(x, z) = \frac{k_{z01}}{k_1} e^{-ik_{x0}x} e^{ik_{z01}z} \quad (\text{П 6.30})$$

$$H_y^{nad}(x, z) = -\frac{1}{W_1} e^{-ik_{x0}x} e^{ik_{z01}z} \quad (\text{П 6.31})$$

$$E_x^{omp1}(x, z) = -\frac{k_{z01}}{k_1} e^{-ik_{x0}x} e^{-ik_{z01}z} \quad (\text{П 6.32})$$

$$H_y^{omp1}(x, z) = -\frac{1}{W_1} e^{-ik_{x0}x} e^{-ik_{z01}z} \quad (\text{П 6.33})$$

Вычислим поле, излученное гармоникой магнитного тока над экраном. Решение будем искать в виде

$$E_{xn}^{omp2}(x, z) = A_n^{omp2} e^{-ik_{xn}x} e^{-ik_{zn1}z} \quad (\text{П 6.34})$$

Используем граничное условие для магнитного тока на металле (П 6.8) для определения амплитуды A_n^{omp2}

$$j_{yn}^{m+}(x) = CJ_n^m e^{-ik_{xn}x} \quad (\text{П 6.35})$$

$$E_{xn}(x, 0) = j_{yn}^{m+}(x) = CJ_n^m e^{-ik_{zn}x} \quad (\text{П 6.36})$$

Отсюда находим, что

$$E_{xn}^{omp2}(x, z) = CJ_n^m e^{-ik_{zn}x} e^{-ik_{zn}z} \quad (\text{П 6.37})$$

$$H_{yn}^{omp2}(x, z) = \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} E_{xn}^{omp2}(x, z) = \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} CJ_n^m e^{-ik_{zn}x} e^{-ik_{zn}z} \quad (\text{П 6.38})$$

Получим полное магнитное поле над экраном, просуммировав поле падающей волны (П 6.31), поле волны, отраженной от металла (П 6.33), а также все гармоники поля, возбуждаемого магнитным током над экраном (П 6.38).

$$\begin{aligned} H_y^+(x, 0) &= H_{y1}^+ + H_{y2}^+ = H_y^{nad}(x, 0) + H_y^{omp1}(x, 0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{yn}^{omp2}(x, 0) = \\ &= -E_0 \frac{2}{W_1} e^{-ik_{x0}x} + C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a\pi}{d} J_0\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{d} + k_{x0}\right)x} \end{aligned} \quad (\text{П 6.39})$$

Выражение (П 6.39) состоит из двух слагаемых, первое из которых обусловлено наличием падающей волны, а второе слагаемое обусловлено наличием стороннего магнитного тока.

$$H_{y1}^+ = H_y^{nep}(x, 0) + H_y^{omp}(x, 0) = -\frac{2}{W_1} e^{-ik_{x0}x} \quad (\text{П 6.40})$$

$$H_{y2}^+ = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a\pi}{d} J_0\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} e^{-ik_{zn1}x} \quad (\text{П 6.41})$$

Теперь получим полное магнитное поле под экраном, просуммировав все гармоники поля, возбуждаемого магнитным током под экраном (П 6.27).

$$H_y^-(x,0) = H_y^-(J^m) = -C \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a\pi}{d} J_0\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} \frac{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n1}}{K_{n2}} \sin k_{zn2}h}{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n2}}{K_{n1}} \sin k_{zn2}h} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{d} + k_{x0}\right)x}$$

(П 6.42)

Наконец, вычислим мощность магнитных источников под и над экраном, проинтегрировав магнитные токи с соответствующими магнитными полями.

$$\begin{aligned} P^m &= -\frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(j_y^{m+}(x) H_y^{*+}(x,0) + j_y^{m-}(x) H_y^{*-}(x,0) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{W_1} \int_{-a}^a J^m(x) dx \right)^* - \frac{1}{2} \left(C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a\pi}{d} J_0\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} \int_{-a}^a J^m(x) e^{-i\frac{2\pi n}{d}x} dx \right)^* - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a\pi}{d} J_0\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} \frac{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n1}}{K_{n2}} \sin k_{zn2}h}{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n2}}{K_{n1}} \sin k_{zn2}h} \int_{-a}^a J^m(x) e^{-i\frac{2\pi n}{d}x} dx \right)^* \end{aligned}$$

(П 6.43)

Так как рассматриваемая система пассивна, то мощность магнитных источников должна быть равна нулю.

$$P^m = 0 \tag{П 6.44}$$

Исходя из этого, мы получим уравнение

$$\begin{aligned} C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a\pi)^2}{d} J_0^2\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} + \\ C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a\pi)^2}{d} J_0^2\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_{zn1}} \frac{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n1}}{K_{n2}} \sin k_{zn2}h}{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n2}}{K_{n1}} \sin k_{zn2}h} = \frac{2}{W_1} a\pi \end{aligned} \tag{П 6.45}$$

Решая уравнение (П 6.45) относительно C , получим

$$C = \frac{2}{\frac{a\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_0^2\left(\frac{2\pi na}{d}\right) \frac{k_1}{k_{zn1}} \left(1 + \frac{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n1}}{K_{n2}} \sin k_{zn2}h}{\cos k_{zn2}h - i \frac{K_{n2}}{K_{n1}} \sin k_{zn2}h} \right)} \quad (\text{П 6.46})$$

Найдем коэффициент отражения от щелевой структуры. Так как $d < \frac{\lambda}{2}$, то $k_{xn} = \left| \frac{2\pi n}{d} + k_{x0} \right| > k_1$ при $|n| > 0$, откуда $k_{zn1} = \sqrt{k_1^2 - k_{xn}^2}$ при $|n| > 0$ - величина чисто мнимая. Это говорит нам о том, что гармоники с индексами $|n| > 0$ - неизлучающие. Следовательно, магнитные токи, возбуждаемые падающей волной, будут излучать только одну гармонику с индексом $n = 0$.

Поле падающей волны

$$E_x^{nad} = \frac{k_{z01}}{k_1} e^{-ik_{x0}x} e^{ik_{z01}z} \quad (\text{П 6.47})$$

Поле отраженной волны

$$E_x^{omp} = E_x^{omp1} + E_x^{omp2} = \left(-\frac{k_{z0}}{k_1} + C \frac{a\pi}{d} \right) e^{-ik_{x0}x} e^{-ik_{z0}z} \quad (\text{П 6.48})$$

Отсюда найдем коэффициент отражения от решетки

$$R = \frac{E_x^{omp}}{E_x^{nad}} = \frac{C \frac{a\pi}{d} - \frac{k_{z0}}{k_1}}{\frac{k_{z0}}{k_1}} \quad (\text{П 6.49})$$

Поставим в соответствие щелевой решетке импедансную поверхность с импедансом Z_L и найдем коэффициент отражения от этой импедансной поверхности. Для этого запишем граничные условия тонкого слоя:

$$H_y^-(x,0) - H_y^+(x,0) = \frac{E_x^-(x,0)}{Z_L} = \frac{E_x^+(x,0)}{Z_L} \quad (\text{П 6.50})$$

Пусть на импедансную плоскость падает плоская волна, бегущая по координатам z и x с волновыми числами k_z и k_x соответственно. Выпишем компоненты, касательные импедансной плоскости

$$E_x^{nad}(x,z) = A^{nad} e^{-ik_x x} e^{ik_z z} \quad (\text{П 6.51})$$

$$H_y^{nad}(x,z) = -A^{nad} \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_z} e^{-ik_x x} e^{ik_z z} \quad (\text{П 6.52})$$

Поле отраженной волны будем искать в виде

$$E_x^{omp}(x,z) = A^{omp} e^{-ik_x x} e^{-ik_z z} \quad (\text{П 6.53})$$

$$H_y^{omp}(x,z) = A^{omp} \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_z} e^{-ik_x x} e^{-ik_z z} \quad (\text{П 6.54})$$

Поле прошедшей волны будем искать в виде

$$E_x^{np}(x,z) = A^{np} e^{-ik_x x} e^{-ik_z z} \quad (\text{П 6.55})$$

$$H_y^{np}(x,z) = -A^{np} \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_z} e^{-ik_x x} e^{-ik_z z} \quad (\text{П 6.56})$$

Воспользовавшись граничными условиями (П 6.50), напишем систему уравнений

$$\begin{cases} E_x^{nad}(x,0) + E_x^{omp}(x,0) = E_x^{np}(x,0) \\ H_y^{np}(x,0) - H_y^{nad}(x,0) - H_y^{omp}(x,0) = \frac{1}{Z_L} E_x^{np}(x,0) \end{cases} \quad (\text{П 6.57})$$

Подставив (П 6.51-П 6.56) в (П 6.57), получим

$$\begin{cases} A^{np} - A^{omp} = A^{na\partial} \\ A^{np} \left(\frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_z} + \frac{1}{Z_L} \right) + A^{omp} \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_z} = A^{na\partial} \frac{1}{W_1} \frac{k_1}{k_z} \end{cases} \quad (\text{П 6.58})$$

и выпишем решение системы уравнений (П 6.58)

$$\begin{cases} E_x^{np}(x, z) = \frac{\frac{2}{W_1} \frac{k_1}{k_z} A^{na\partial}}{\frac{2}{W_1} \frac{k_1}{k_z} + \frac{1}{Z_L}} e^{-ik_x x} e^{ik_z z} \\ E_x^{omp}(x, z) = -\frac{\frac{1}{Z_L} A^{na\partial}}{\frac{2}{W_1} \frac{k_1}{k_z} + \frac{1}{Z_L}} e^{-ik_x x} e^{-ik_z z} \end{cases} \quad (\text{П 6.59})$$

Найдем коэффициент отражения от импедансной поверхности из второго уравнения (П 6.49) и выражения (П 6.41)

$$R = \frac{E_x^{omp}(x, 0)}{E_x^{na\partial}(x, 0)} = -\frac{1}{2 \frac{Z_L}{W_1} \frac{k_1}{k_z} + 1} = -\frac{\frac{1}{2} \frac{W_1}{Z_L} \frac{k_z}{k_1}}{\frac{1}{2} \frac{W_1}{Z_L} \frac{k_z}{k_1} + 1} \quad (\text{П 6.60})$$

Наконец, из (П 6.60) получим выражение для импеданса Z_L через коэффициент отражения R

$$Z_L = -\frac{1}{2} \frac{k_z}{k_1} \frac{1+R}{R} W_1, \quad (\text{П 6.61})$$

где R определяется выражением (П 6.49)

ПРИЛОЖЕНИЕ 7. К модели полупрозрачного полусферического препятствия

Для определения неизвестных амплитуд A_n^M , B_n^M , C_n^M , D_n^M потребуем выполнения граничных условий для скачка электрического поля на сфере с радиусом $r = r_0$ и для скачка магнитного поля на сфере с радиусом $r = R$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_n^{M+}(r_0) - \mathbf{E}_n^{M-}(r_0)] = -\mathbf{j}_n^{m,M} \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_n^{M+}(r_0) - \mathbf{H}_n^{M-}(r_0)] = 0 \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_n^{M+}(R) - \mathbf{H}_n^{M-}(R)] = \mathbf{j}_n^{e,M} = \frac{[[\mathbf{n}, \mathbf{E}_n^{M+}(R)], \mathbf{n}]}{Z_L}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}_n^{M+}(R) - \mathbf{E}_n^{M-}(R)] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{П } 7.1)$$

где знаки “+” и “-” означают значения полей на внешней и внутренней стороне поверхности сферы, причем, для первых двух уравнений радиус сферы $r = r_0$, а для последних двух уравнений радиус сферы $r = R$; n - номер гармоники; $\mathbf{j}_n^{m,M}$ - элемент разложения стороннего магнитного тока по Н-волнам; $\mathbf{j}_n^{e,M}$ - аналогично для вторичного электрического тока, текущего по сфере.

Получим из (П 7.1) граничные условия для компонент электрического и магнитного поля.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\varphi n}^{M+}(r_0) - H_{\varphi n}^{M-}(r_0) = 0 \\ E_{\theta n}^{M+}(r_0) - E_{\theta n}^{M-}(r_0) = -j_{\varphi n}^{m,M} \\ H_{\varphi n}^{M+}(R) - H_{\varphi n}^{M-}(R) = -j_{\varphi n}^{e,M} = -\frac{E_{\theta n}^{M+}(R)}{Z_L} \\ E_{\theta n}^{M+}(R) - E_{\theta n}^{M-}(R) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{П } 7.2)$$

Вычислим поле источника в свободном пространстве по обе стороны от сферы с радиусом $r = r_0$ и разложим его по Н-волнам и вычислим скачек θ -той составляющей электрического поля

$$E_{\theta n}^{M+}(r_0) = \frac{1}{2} ikI_0 m^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} e^{-im\varphi} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \xi_n^{(2)}(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) \quad (\text{П } 7.3)$$

$$E_{\theta n}^{M-}(r_0) = \frac{1}{2} ikI_0 m^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} e^{-im\varphi} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \psi_n(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \quad (\text{П } 7.4)$$

Теперь запишем выражение для φ -вой составляющей элемента разложения стороннего магнитного тока по Н-волнам, подставив (П 7.3-П 7.4) в 1-е уравнению (П 7.2)

$$\begin{aligned} -J_{\varphi n}^{m,m} &= E_{\theta n}^{M+}(r_0) - E_{\theta n}^{M-}(r_0) = \\ &= \frac{1}{2} ikI_0 m^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} e^{-im\varphi} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \times \\ &\times \left(\xi_n^{(2)}(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - \psi_n(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \right) \end{aligned} \quad (\text{П } 7.5)$$

Подставив в 1-е уравнение системы (П 7.2) выражение для n -го члена ряда (3.1.28), в котором учтено (3.1.26), получим

$$B_n^m \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) + C_n^m \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - D_n^m \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) = 0 \quad (\text{П } 7.6)$$

Подставив во 2-е уравнение системы (П 7.2) выражение для n -го члена ряда (3.1.29), в котором учтено (3.1.26), и подставив (П 7.5), получим

$$\begin{aligned} B_n^m \xi_n^{(2)}(kr_0) + C_n^m \psi_n(kr_0) - D_n^m \psi_n(kr_0) = \\ = -\frac{1}{2} iI_0 m \frac{1}{W_0} \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) \left(\xi_n^{(2)}(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - \right. \\ \left. - \psi_n(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \right) \end{aligned} \quad (\text{П } 7.7)$$

Подставив в 3-е уравнение системы (П 7.2) выражение для n -го члена ряда (3.1.28), и подставив выражение для n -го члена ряда (3.1.29), в которых учтено (3.1.26) получим

$$A_n^M \left(\frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) - iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \right) - B_n^M \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) - C_n^M \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) = 0 \quad (\text{П } 7.8)$$

Подставив в 4-е уравнение системы (П 7.2) выражение для n -го члена ряда (3.1.29), в котором учтено (3.1.26), получим

$$A_n^M \xi_n^{(2)}(kR) - B_n^M \xi_n^{(2)}(kR) - C_n^M \psi_n(kR) = 0 \quad (\text{П } 7.9)$$

Уравнения (П 7.6-П 7.9) образуют систему уравнений для Н-волн относительно амплитуд A_n^M , B_n^M , C_n^M , D_n^M

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ A_n^M \left(\frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) - iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \right) \\ A_n^M \xi_n^{(2)}(kR) \end{array} \right. \begin{array}{l} + B_n^M \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \\ + B_n^M \xi_n^{(2)}(kr) \\ - B_n^M \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) \\ - B_n^M \xi_n^{(2)}(kR) \end{array} \begin{array}{l} + C_n^M \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) \\ + C_n^M \psi_n(kr) \\ - C_n^M \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) \\ - C_n^M \psi_n(kR) \end{array} \begin{array}{l} - D_n^M \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) \\ - D_n^M \psi_n(kr) \\ + 0 \\ + 0 \end{array} = 0 = = = 0 \quad (\text{П } 7.10)$$

$$= -\frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{W_0} \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{n(n+1)} \frac{2n+1}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) \left(\xi_n^{(2)}(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - \psi_n(kr_0) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \right)$$

Запишем решение системы уравнений (П 7.10) для Н-волн:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n^M = -\frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{W_0} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) \left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) \right) P_n^m(\cos \theta_0)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) \right) + iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR)} \\ B_n^M = -\frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{W_0} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) P_n^m(\cos \theta_0) \\ C_n^M = -\frac{1}{2} I_0 R k m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{Z_L} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) \left(\xi_n^{(2)}(kR) \right)^2 P_n^m(\cos \theta_0)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) \right) + iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR)} \\ D_n^M = \frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{W_0} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \psi_n(kR) - \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \xi_n^{(2)}(kR)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) \right) + iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR)} P_n^m(\cos \theta_0) + \\ + \frac{1}{2} i I_0 m \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{1}{W_0} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{iRk \frac{W_0}{Z_L} \left(\left(\xi_n^{(2)}(kR) \right)^2 \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \psi_n(kr_0)) - \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 \xi_n^{(2)}(kr_0)) \right)}{\left(\xi_n^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \psi_n(kR)) - \psi_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} (R \xi_n^{(2)}(kR)) \right) + iRk \frac{W_0}{Z_L} \xi_n^{(2)}(kR) \psi_n(kR)} P_n^m(\cos \theta_0) \end{array} \right. \quad (\text{П } 7.11)$$