

На правах рукописи

Колбин Илья Сергеевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ НОРМАЛИЗОВАННЫХ  
РАДИАЛЬНО-БАЗИСНЫХ СЕТЕЙ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и программирования ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный  
руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
**Ревизников Дмитрий Леонидович**

Официальные  
оппоненты: **Кузнецов Евгений Борисович,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры дифференциальных уравнений  
ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»

**Осипов Владимир Петрович,**  
кандидат технических наук, доцент, ведущий научный  
сотрудник ФГБУН «Институт прикладной математики им.  
М.В. Келдыша Российской академии наук»

Ведущая  
организация: ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет»

Защита состоится «1» марта 2013 года в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 при ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04,  
кандидат физико-математических наук

Северина Н.С.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Нейросетевая технология является одной из самых активно развивающихся областей научно-прикладного знания. Разнообразные методы, в основу которых положены нейронные сети, успешно применяются в самых различных областях, таких как: задачи управления, прогнозирование, распознавание образов, аппроксимация многомерных данных, сжатие информации и др.

В последнее время наметился значительный интерес к применению бессеточных методов в задачах математического моделирования. Это обусловлено, в первую очередь, типичными трудностями, которые возникают при использовании сеточных методов для решения многомерных задач в областях со сложной геометрией, задач с неточно заданными коэффициентами, обратных задач при наличии погрешностей измерений и т.д. Как правило, в подобных ситуациях требуется специальная адаптация вычислительных алгоритмов к рассматриваемой проблеме. С другой стороны, применение разрабатываемых в диссертации нейросетевых методов позволяет в значительной степени преодолеть указанные трудности и использовать унифицированные подходы для решения задач различного типа. Существенным достоинством рассматриваемых алгоритмов являются их регуляризирующие свойства, что позволяет применять разрабатываемые методы в задачах идентификации.

**Целью диссертационной работы** является создание унифицированной вычислительной технологии для решения задач математического моделирования на основе нормализованных радиально-базисных сетей. Для достижения обозначенной цели предполагается:

1. Анализ современных нейросетевых методов для решения задач математического моделирования.
2. Разработка методов построения нейросетевых моделей стационарных и нестационарных процессов переноса в физических системах при наличии разнородной информации на основе нормализованных радиально-базисных сетей.
3. Разработка нейросетевых методов решения некорректных задач математической физики на основе нормализованных радиально-базисных сетей.
4. Сравнение разработанных методов с существующими нейросетевыми и классическими методами.
5. Создание программного комплекса, реализующего разработанные методы.

**Научная новизна.** Предложены новые методы для решения задач математического моделирования, построенные на основе нормализованных радиально-базисных сетей.

Разработаны бессеточные вычислительные алгоритмы решения классических и обратных задач математической физики. Отличительной чертой алгоритмов является использование подвижного функционального базиса, что позволяет адаптироваться к особенностям решения и обеспечить достаточно высокую точность при относительно низких вычислительных затратах.

Исследованы особенности применения нейросетевых алгоритмов к нестационарным задачам математической физики. Показано, что в задачах данного класса наиболее эффективным является гибридный разностно-нейросетевой алгоритм.

Рассмотрены вопросы применения разработанных алгоритмов к задачам идентификации. Анализ результатов решения представительного набора задач по восстановлению источниковых слагаемых и граничных условий в уравнениях теплопереноса показал, что разработанные алгоритмы обладают регуляризирующими свойствами и позволяют добиться высокой точности при значительной погрешности в измерениях.

**Достоверность и обоснованность** результатов, полученных в ходе диссертационного исследования, обеспечивается сопоставлением полученных решений с известными аналитическими решениями, хорошей согласованностью результатов проведенных вычислительных экспериментов с точными или приближенными решениями тестовых задач.

**Практическая ценность.** Разработанные в диссертации нейросетевые модели и алгоритмы в силу их универсальности, а также высокого потенциала к распараллеливанию вычислений, представляют значительный интерес для специалистов в области математического моделирования. Предложенные методы могут применяться для решения стационарных и нестационарных задач переноса в физических системах со сложной расчетной областью, с неточно заданными коэффициентами, при построении решений по разнородным данным. Созданный программный комплекс востребован, в первую очередь, при проектировании тепловой защиты летательных аппаратов, двигателей и энергетических установок летательных аппаратов и т.д. Результаты диссертационного исследования могут быть использованы при составлении образовательных курсов по математическому моделированию и численным методам.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались: на XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2011), на 10-й и 11-й Международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2011 и 2012), на XIV Всероссийской научно-технической конференции «Нейроинформатика-2012» (Москва, 2011), на Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике-2012» (Москва, 2012), на IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (Алушта, 2012), на семинаре международной молодежной научной школы по теории и численным методам решения обратных и некорректных задач (Воронеж, 2012).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 9 работ, среди которых 3 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК для представления результатов диссертационного исследования на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук, 1 работа принята к публикации.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 29 рисунков и 134 библиографических ссылки. Общий объем диссертации составляет 105 страниц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается обзор литературы, посвященной вопросам приложения нейросетевой технологии к задачам математического моделирования. Приводится обоснование актуальности диссертационного исследования, формулируются цели и задачи работы, приводятся данные об апробации. В диссертации развивается подход, предложенный А.Н. Васильевым и Д.А. Тарховым (*Нейросетевое моделирование. Принципы, алгоритмы, приложения.* – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009). Он основан на использовании нейросетевого функционального базиса. Отличительной чертой настоящей работы является поиск решения в виде нормализованных радиально-базисных сетей.

**Первая глава** посвящена нейросетевым алгоритмам моделирования стационарных процессов переноса. В качестве отправной точки для описания модели объекта рассматривается краевая задача в следующей постановке: в области  $\Omega$  требуется найти решение  $u = u(\mathbf{x})$  уравнения

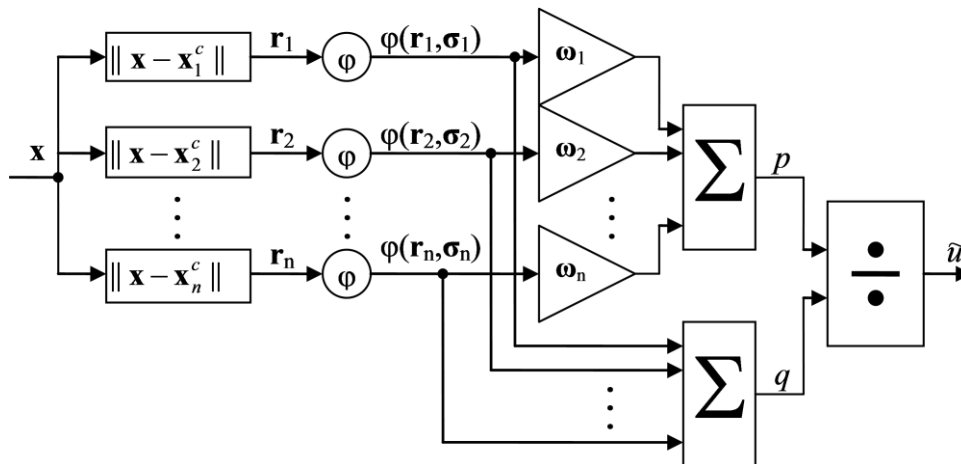
$$A(u) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset R^d,$$

удовлетворяющее условию на границе  $\Gamma$

$$B(u) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где  $\mathbf{x}$  – входной вектор,  $A, B$  – интегро-дифференциальные операторы,  $f, g$  – некоторые заданные функции. Операторы могут быть нелинейными, содержать разрывы, менять тип в подобластях и т.д. Специальных требований к границе не предъявляется.

Решение ищется в виде нормализованной радиально-базисной сети (НРБС), структурная схема которой представлена на **рис. 1**.



**Рис.1.** Структурная схема нормализованной радиально-базисной сети из  $n$  нейронов

Выход сети, состоящей из  $n$  нейронов, можно представить в виде:

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \psi) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^c\|, \sigma_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^c\|, \sigma_i)},$$

где  $\psi$  – вектор параметров,  $\omega, \sigma, \mathbf{x}^c \subset \psi$  – веса, «ширины» и координаты центров нейроэлементов,  $\varphi$  – радиально-базисная функция. В главе обсуждаются вопросы подбора параметров нейросетевой модели. Один из возможных подходов заключается в минимизации квадратичного функционала ошибки, который формируется при подстановке нейросетевого представления в исходное уравнение и граничные условия. Минимизация осуществляется с помощью процедур многомерной оптимизации. Существенным достоинством данного подхода является его универсальность, т.к. он не накладывает ограничений на конфигурацию области, на гладкость коэффициентов и т.д. Функционал ошибки имеет вид:

$$J(\hat{u}) = \int_{\Omega} w_{\Omega} [A(\hat{u}(\mathbf{x}, \psi)) - f(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} w_{\Gamma} [B(\hat{u}(\mathbf{x}, \psi)) - g(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x},$$

где  $w_{\Omega}, w_{\Gamma}$  – некоторые коэффициенты, которые «выравнивают» вклад внутренней и граничной составляющей. Подбор  $w_{\Omega}$  и  $w_{\Gamma}$  во многом зависит от условий задачи. Как правило, вычислить интегралы аналитически весьма сложно или невозможно, поэтому используется дискретный аналог функционала:

$$J(\tilde{u}) = \sum_{j=1}^{m_\Omega} w_\Omega [A(\tilde{u}(\mathbf{x}_j^\Omega, \Psi)) - f(\mathbf{x}_j^\Omega)]^2 + \sum_{j=1}^{m_\Gamma} w_\Gamma [B(\tilde{u}(\mathbf{x}_j^\Gamma, \Psi)) - g(\mathbf{x}_j^\Gamma)]^2,$$

где  $m_\Omega$ ,  $m_\Gamma$  – число контрольных точек в области и на границе, соответственно,  $\{\mathbf{x}\}_j^\Omega \in \Omega$  – набор контрольных точек в области,  $\{\mathbf{x}\}_j^\Gamma \in \Gamma$  – на границе. Подбор параметров  $\Psi$  аппроксимирующей модели  $\tilde{u}$  осуществляется путем минимизации сформированного функционала:

$$J(\tilde{u}(\mathbf{x}, \Psi)) \xrightarrow{\Psi} \min.$$

В главе рассмотрено приложение разработанного метода к одномерным, двумерным, трехмерным задачам, были исследованы задачи с нелинейным источником, с погранслоинным характером решения, получены нейросетевые аппроксимации для задач с криволинейной границей области.

Для демонстрации работы предложенного метода рассмотрим в качестве тестовой характерную модельную краевую задачу. Ищется решение уравнения Пуассона в прямоугольной области:  $\Delta u(x, y) = f(x, y)$ ,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа,  $x \in [0, \pi]$ ,  $y \in [0, \pi]$ ; удовлетворяющее

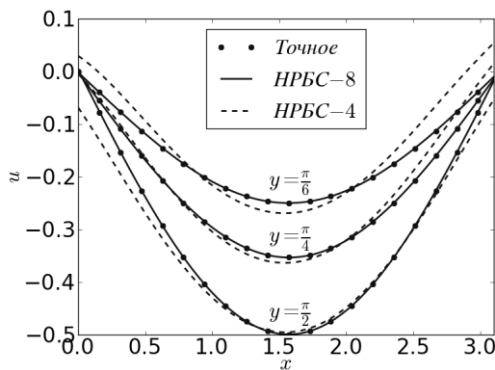
однородным условиям на границе:  $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$ .

Источниковая компонента задана как  $f(x, y) = \sin x \sin y$ . Решение ищется в виде НРБС  $\tilde{u}(\mathbf{x}, \Psi)$ , для чего составляется функционал ошибки вида:

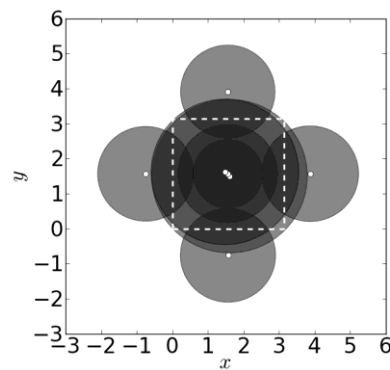
$$J(\tilde{u}) = \sum_{j=1}^{m_\Omega} w_\Omega [\Delta \tilde{u}(\mathbf{x}_j^\Omega, \Psi) - f(\mathbf{x}_j^\Omega)]^2 + \sum_{j=1}^{m_\Gamma} w_\Gamma (\tilde{u}(\mathbf{x}_j^\Gamma, \Psi))^2, \mathbf{x}^\Gamma = (x, y).$$

Подбор параметров  $\Psi$  осуществляется с использованием метода сопряженных градиентов CG\_DESCENT.

Было рассмотрено решение для сетей различных размеров. На **рис. 2** представлены НРБС-решения в различных сечениях  $y = \text{const}$ , а также аналитическое решение (точки). Штриховой линией показан выход НРБС из 4-х нейронов, сплошной – НРБС из 8-ми нейронов. На **рис. 3** дана конфигурация нейроэлементов на плоскости для восьминейронной сети после окончания процедуры подбора параметров. Пунктиром выделена область  $\Omega$ .



**Рис. 2.** Аналитическое и нейросетевые решения задачи Пуассона



**Рис. 3.** Итоговая конфигурация нейроэлементов НРБС из 8 нейронов

На **рис. 2** видно, что выход НРБС из 8-ми нейроэлементов практически совпадает с аналитическим решением. Представленное на **рис. 3** итоговое расположение нейронов аппроксимирующей модели объясняется симметрией рассматриваемой задачи.

Для оценки точности полученных приближений была вычислена среднеквадратичная погрешность  $\varepsilon$  на сетке, результаты приведены в таблице 1. Сравнение проводилось с известным аналитическим решением.

Таблица 1

Результаты расчетов

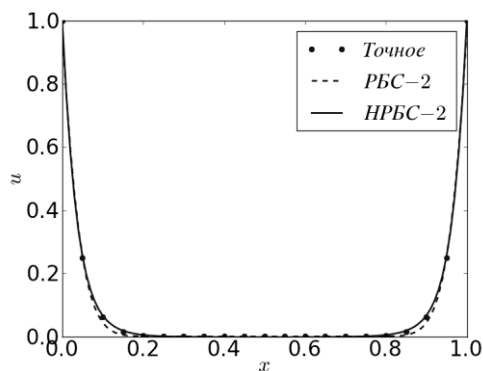
| Число нейроэлементов, $n$ | Итоговый функционал ошибки, $J$ | Среднеквадратичная погрешность, $\varepsilon$ |
|---------------------------|---------------------------------|---|
| 2                         | 0,0027                          | 0,02513                                       |
| 4                         | 0,0014                          | 0,02212                                       |
| 6                         | $5,61 \cdot 10^{-5}$            | 0,00119                                       |
| 8                         | $1,17 \cdot 10^{-5}$            | 0,00067                                       |

Из таблицы 1 видно, что увеличение размерности аппроксимирующей сети влечет повышение точности результирующих приближений. Важно отметить, что происходит одновременное уменьшение функционала ошибки и погрешности аппроксимации.

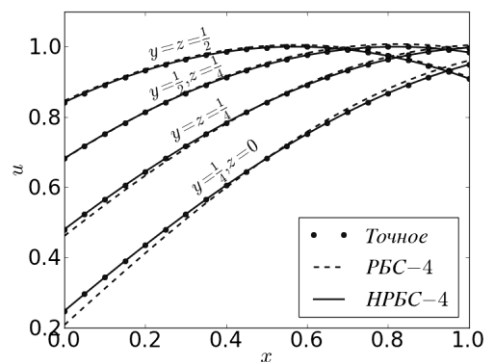
В следующем разделе производится сравнительный анализ нейросетевых методов, основанных на классических радиально-базисных и на нормализованных радиально-базисных сетях, для набора характерных модельных задач. Рассматривается одномерное уравнение следующего вида:  $u'' = k^2 u$ , требуется найти решение, удовлетворяющее граничным условиям  $u(0) = u(1) = 1$ . Особенностью данной задачи является погранслойный характер решения, который проявляется в большей степени при возрастании коэффициента  $k$ . В работе был принят  $k = 27,79$ , при котором ярко выражен подобный эффект. На **рис. 4** представлены выходы полученных нейронных сетей из двух элементов. Видно, что НРБС-приближение лучше отражает характер решения, чем ненормализованная сеть.

Решалась трехмерная краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности с нелинейным источником:  $\Delta u = \sin(u^2) + f(x, y, z)$ , расчетная область  $\Omega$  – единичный куб, граничные условия:  $u|_{\Gamma} = \sin(x + y + z)$ . На графике **рис. 5** представлены аппроксимации для задачи сетями из 4-х нейроэлементов в различных сечениях. Видно, что решение, полученное с использованием НРБС, практически совпадает с аналитическим.





**Рис. 4.** Решение одномерной задачи с погранслойным характером решения



**Рис. 5.** Решение трехмерной задачи с нелинейным источником

Проведенные численные эксперименты показали, что в среднем метод, основанный на НРБС, производит аппроксимации с большей точностью, однако время подбора параметров выше. Для ряда задач, при этом, НРБС-метод сходится быстрее. Так, например, трехмерная задача с нелинейным источником для сетей из 4-х нейронов решается НРБС-методом примерно в два раза быстрее, чем РБС, при этом точность аппроксимации выше почти в сто раз.

В следующем разделе диссертационной работы проводится сравнение нейросетевого метода с методом конечных разностей. В конечно-разностной реализации использовался метод погруженной границы с фиктивными ячейками, для итерационного решения систем линейных алгебраических уравнений применялся стабилизированный метод бисопряженных градиентов с предобуславливателем. Рассматривался ряд модельных задач с криволинейной границей области. Сравнительный анализ показал, что методы имеют схожую точность и время сходимости. Важно отметить, что переход от задач с прямоугольными границами области к задачам с криволинейными границами практически не внес изменений в нейросетевой алгоритм решения. Это является существенным преимуществом нейросетевого метода по сравнению с методом конечных разностей, который требует значительной модификации для решения задач с криволинейными границами.

В последнем разделе первой главы дан обзор созданного в процессе диссертационной работы вычислительного комплекса, реализующего разработанные методы, рассмотрены вопросы повышения эффективности вычислений.

Во **второй** главе рассматриваются нейросетевые алгоритмы моделирования нестационарных процессов переноса. Приводятся два метода: *прямой*, при использовании которого временная компонента заносится во входной вектор, и *гибридный*, с конечно-разностным разбиением по времени.

При использовании гибридного метода на выходе алгоритма получается набор нейронных сетей, которые осуществляют пространственную аппроксимацию на соответствующих временных слоях. Подбор параметров сети на очередном временном шаге осуществляется путем минимизации функционала ошибки. Функционал ошибки для  $k+1$  слоя при использовании явно-неявной схемы Кранка-Николсона с шагом  $\tau$  имеет вид:

$$J(\bar{u}^{k+1}) = \sum_{j=1}^{m_\Omega} w_\Omega \left[ \bar{u}^{k+1}(\mathbf{x}_j^\Omega, \Psi^{k+1}) - \frac{\tau}{2} (A(\bar{u}^{k+1}(\mathbf{x}_j^\Omega, \Psi^{k+1})) + f^{k+1}(\mathbf{x}_j^\Omega)) - \bar{u}^k(\mathbf{x}_j^\Omega, \Psi^k) - \frac{\tau}{2} (A(\bar{u}^k(\mathbf{x}_j^\Omega, \Psi^k)) + f^k(\mathbf{x}_j^\Omega)) \right]^2 + \sum_{j=1}^{m_\Gamma} w_\Gamma [B(\bar{u}^{k+1}(\mathbf{x}_j^\Gamma, \Psi)) - g^{k+1}(\mathbf{x}_j^\Gamma)]^2.$$

В следующем разделе проводится сравнение прямого и гибридного методов на примере ряда модельных задач теплопроводности.

Искалось решение двумерного нестационарного уравнения теплопроводности в прямоугольной области:  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $0 \leq y \leq \ln 2$ , удовлетворяющее начальному условию  $u(x, y, 0) = \cos(2x)\text{sh}(y)$  и смешанным граничным условиям:

$$u(0, y, t) = \text{sh}(y) \exp(-3at), u_x(0, 25\pi, y, t) = -2\text{sh}(y) \exp(-3at), u_y(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = 0,75 \cos(2x) \exp(-3at). \text{ Задача представлена в безразмерном виде, } a = 1.$$

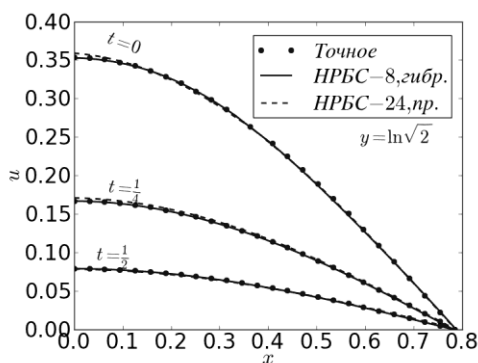


Рис. 6. Решение двумерной задачи теплопроводности

На рис. 6 показаны полученные аппроксимации и аналитическое решение на различных временных слоях. Видно, что оба метода дали высокую точность. Результаты расчетов для прямого и гибридного методов сведены в таблицу 2. Вычисления проводились на компьютере с процессором Intel Core 2 Duo E6750 2,66 ГГц.

Таблица 2

Результаты решения двумерной нестационарной задачи теплопроводности прямым и гибридным методами

| Прямой метод |                      |               |           | Гибридный метод, $\tau=0,05$ |                      |               |           |
|--------------|----------------------|---------------|-----------|------------------------------|----------------------|---------------|-----------|
| $n$          | $J$                  | $\varepsilon$ | $T$ , сек | $n$                          | $J$                  | $\varepsilon$ | $T$ , сек |
| 8            | 0,00089              | 0,00832       | 1,39      | 2                            | 0,00152              | 0,02071       | 0,06      |
| 16           | 0,00012              | 0,0056        | 2,51      | 4                            | $1,31 \cdot 10^{-5}$ | 0,00227       | 0,64      |
| 24           | $3,72 \cdot 10^{-5}$ | 0,00171       | 4,2       | 6                            | $4,3 \cdot 10^{-6}$  | 0,00097       | 0,75      |
| 32           | $1,37 \cdot 10^{-5}$ | 0,00094       | 6,54      | 8                            | $2,31 \cdot 10^{-6}$ | 0,00073       | 1,41      |

Из приведенных результатов видно, что гибридный метод обладает лучшими показателями скорости и точности решения по сравнению с прямым методом. С другой стороны, стоит отметить, что гибридный метод в значительной степени менее универсален, чем прямой метод. Во-первых, это выражается в узкой специализации алгоритма для решения конкретного типа задач. Во-вторых, из-за конечно-разностного разбиения в значительной степени ухудшаются регуляризирующие свойства нейросетевых алгоритмов, что сильно ограничивает возможность их применения для задач с неточно заданными условиями, а также для обратных задач.

В заключительном разделе диссертационной работы рассматривается приложение гибридного метода для начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса, показана высокая эффективность нейросетевого метода.

**Третья глава** посвящена нейросетевым алгоритмам решения обратных задач (задач идентификации). Рассматривается обратная задача в следующей постановке: требуется найти решение  $u = u(\mathbf{x})$  уравнения

$$A(u) = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega,$$

удовлетворяющее условию на границе:

$$B(u) = g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где  $A$ ,  $B$  – известные интегро-дифференциальные операторы,  $f$ ,  $g$  – некоторые функции. Операторы могут быть нелинейными, содержать разрывы, менять тип в подобластях и т.д. Специальных требований к границе не предъявляется. В настоящей работе рассматривалось 2 типа обратных задач:

1. Идентификация правой части: в этом случае не задана (или задана не полностью) функция  $f(x)$ .
2. Идентификация граничного условия: не задана (или задана не полностью) функция  $g(x)$ .

Исследуемые задачи характерны тем, что вместо отсутствующей информации известен дополнительный набор из  $m_s$  точечных значений искомой функции (результатов измерений), причем измеренные значения содержат некоторую погрешность  $\xi$  (статистические свойства шумов известны):

$$v_j = u(\mathbf{x}_j^v) + \xi, \quad j = 1, m_s.$$

Решение ищется в виде нейросетевого представления. Для этого используется пара нейронных сетей. Первая сеть аппроксимирует искомую функцию, а вторая, в зависимости от типа задачи, приближает правую часть или граничное условие. Подбор параметров сетей ведется путем оптимизации дискретного квадратичного функционала, который получается при подстановке

нейросетевого представления в исходное уравнение, граничные условия и точечные (измеренные) значения функции:

$$J(\tilde{u}) = \sum_{j=1}^{m_{\Omega}} w_{\Omega} [A(\tilde{u}(\mathbf{x}_j^{\Omega}, \Psi_u)) - f(\mathbf{x}_j^{\Omega})]^2 + \sum_{j=1}^{m_{\Gamma}} w_{\Gamma} [B(\tilde{u}(\mathbf{x}_j^{\Gamma}, \Psi_u)) - g(\mathbf{x}_j^{\Gamma})]^2 + \sum_{j=1}^{m_s} w_s [\tilde{u}(\mathbf{x}_j^V, \Psi_u) - v_j]^2 \xrightarrow{\Psi} \min,$$

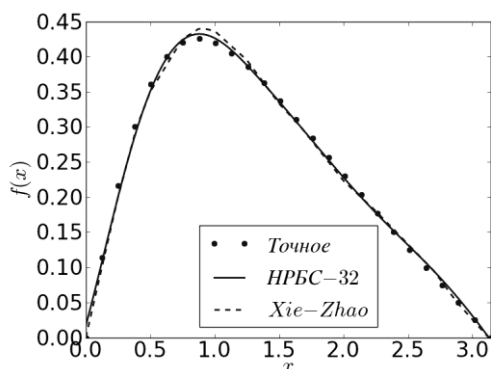
где  $\Psi$  – вектор параметров нейросетевой модели,  $\tilde{u}$  – аппроксимация точного решения краевой задачи  $u$ ,  $\Psi_u \subset \Psi$  – параметры нейронной сети  $\tilde{u}$ ,  $m_{\Omega}$ ,  $m_{\Gamma}$  – заданное число контрольных точек;  $w_{\Omega}$ ,  $w_{\Gamma}$ ,  $w_s$  – весовые коэффициенты, выравнивающие вклад составляющих функционала. Если рассматривается задача идентификации правой части, то источниковый член в первом слагаемом функционала заменяется нейросетевой аппроксимацией  $\tilde{f}(\mathbf{x}_j^{\Omega}, \Psi_f)$ , где  $\Psi_f \subset \Psi$  – вектор параметров, определяемый в результате обучения сети. Аналогично, при восстановлении граничного условия неизвестное слагаемое  $g(\mathbf{x}_j^{\Gamma})$  заменяется на  $\tilde{g}(\mathbf{x}_j^{\Gamma}, \Psi_g)$ ,  $\Psi_g \subset \Psi$ . В результате оптимизации функционала на выходе получают приближения непосредственно решения краевой задачи  $\tilde{u}$  и идентифицируемых функций  $\tilde{f}$  или  $\tilde{g}$  (в зависимости от задачи).

В следующих разделах рассматривается приложение вычислительной технологии для ряда характерных обратных задач. Решалась задача идентификации интенсивности источника тепла в стационарном уравнении теплопроводности (задача сформулирована в статье Xie O., Zhao Z. *Identifying an unknown source in the Poisson equation by a modified Tikhonov regularization method.* // International Journal of Mathematical and Computational Sciences. – 2012. – Vol. 6.):

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = f(x), & 0 < x < \pi, & 0 < y < +\infty \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 \leq y < +\infty, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

При этом функция  $f(x)$  являлась неизвестной, требовалось ее восстановить по дополнительным «измерениям». В качестве результатов «измерений» брались зашумленные точные значения функции в точках  $u(x, 1) = g(x)$  (квазиреальный эксперимент):  $g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (1 - e^{-l}) e^{-l} l^{-2} \sin lx$ ,  $g_i^{\delta} = g(h_i) + \delta\theta$ ,  $h = \pi/m_s$ ,  $i = 0, m_s$ , где  $\theta$  – случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону. Решение данной задачи известно в аналитическом виде:  $f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l} \sin lx$ . Для оценки влияния погрешностей измерений на точность итоговых аппроксимаций в «измерения» вносились шумы  $\delta$  с амплитудами:  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ . На рис. 7 представлен результат восстановления источникового члена с использованием НРБС из 32-х нейроэлементов при  $\delta = 10^{-2}$ . На графике точками показано точное

решение, пунктиром – полученное в статье с использованием модифицированного метода регуляризации Тихонова. Видно, что нейросетевой метод дал схожий по точности результат.



**Рис. 7.** Результат восстановления правой части

В следующем разделе диссертационной работы исследуются задачи идентификации граничного режима.

Рассматривалось приложение нейросетевого подхода к обратной задаче теплопереноса при ламинарном течении жидкости в плоском канале. Постановка приведена в работе Huang С.Н., Ozisik M.N. *Inverse problem of determining heat flux in laminar flow through a parallel plate duct.* // Numerical Heat Transfer, Part A. 1992. –

Vol. 21. Математически задача сформулирована следующим образом:

$$v(y)\rho C_p \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2}, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < L,$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < b, \quad k \frac{\partial T(x, L)}{\partial y} = q(x), \quad 0 < x < b, \quad T(0, y) = T_0, \quad 0 < y < L.$$

Профиль скорости считается заданным:  $v(y) = 6v_m \frac{y}{L} (1 - \frac{y}{L})$ , тепловой поток  $q(x)$  не задан и подлежит определению. Известен набор из  $m_s$  измерений, полученных с термодатчиков, размещенных на расстоянии  $y_i$  от изолированной стенки. Схема расчетной области приведена на **рис. 8**.

Исходные данные следующие (в качестве жидкости рассматривалось машинное масло):

$$T_0 = 20^\circ C = 293 K, b = 1,6 м, L = 0,01 м, y_1 = 0,009 м, v_m = 0,04 \frac{м}{с}, \rho = 840 \frac{кг}{м^3}, C_p = 2200 \frac{Дж}{кг \cdot K}.$$

«Измеренные» значения температуры определялись из решения прямой задачи с известным распределением теплового потока  $q(x)$  на границе  $y = L$  (квазиреальный эксперимент), предполагалось, что измерения содержат некоторую погрешность:  $T_i^\delta = T(h_i, L) + \delta\theta$ ,  $h = \frac{b}{m_s}$ ,  $i = 1, m_s$ , где  $\theta$  – случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону. Были рассмотрены два варианта продольного распределения теплового потока:

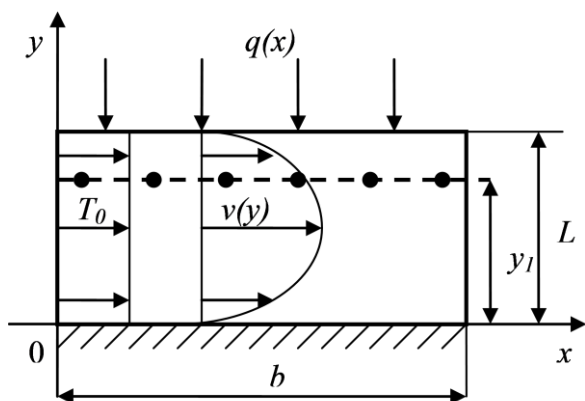
$$1) q(x) = \begin{cases} 3000 + 8750x, & 0 \leq x \leq 0,8, \\ 10000 - 8750(x - 0,8), & 0,8 < x \leq 1,6 \end{cases} \left[ \frac{Вт}{м \cdot K} \right],$$

$$2) q(x) = 7000 + 3000 \sin\left(\frac{2,5x}{1,6} \pi\right) \left[ \frac{Вт}{м \cdot K} \right].$$

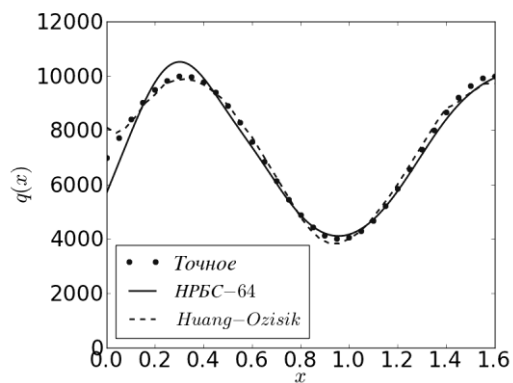
Кроме того, варьировалось число термодатчиков: в одном случае они расположены очень плотно, на расстоянии 1 см друг от друга ( $m_s = 160$ ), в другом – расстояние между ними составляет 10 см ( $m_s = 16$ ).

С целью анализа влияния погрешностей «измерений» на решение задачи рассматривались два варианта. В первом принималась идеализированная ситуация, когда показания датчиков абсолютно точные ( $\delta = 0$ ), во втором считалось, что датчики дают показания с погрешностями  $\delta = 2,576$ .

На **рис. 9** приведен результат восстановления теплого потока с синусоидальным распределением для варианта с  $m_s = 16$  и погрешностями «измерений»  $\delta = 2,576$ . Точками представлено точное распределение, сплошной линией – полученная нейросетевая аппроксимация, пунктиром – приведенное в статье решение.



**Рис. 8.** Схема расчетной области, точками показаны термодатчики, теплоизолированная поверхность заштрихована



**Рис. 9.** Результат восстановления теплового потока с синусоидальным распределением,  $m_s = 16$ ,  $\delta = 2,576$

Видно, что точность НРБС-приближения сопоставима с решением, полученным в статье с использованием аппарата сопряженных уравнений. При этом важно подчеркнуть технологичность разработанного в диссертационной работе метода: при решении прямых и обратных задач используются идентичные вычислительные алгоритмы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Итогом диссертационного исследования являются следующие научные и практические результаты:

- Разработаны методы построения нейросетевых моделей стационарных и нестационарных процессов переноса в физических системах при наличии разнородной информации, основанные на использовании нормализованных радиально-базисных функций.
- Разработаны бессеточные вычислительные алгоритмы решения эллиптических задач математической физики с адаптацией нормализованного функционального базиса к особенностям решения. Показано, что разработанные алгоритмы позволяют эффективно решать задачи с погранслойным характером решения, задачи в областях со сложной геометрией, многомерные задачи.
- Построены нейросетевые и гибридные разностно-нейросетевые алгоритмы для решения параболических задач математической физики.
- Разработана модификация предложенных нейросетевых алгоритмов применительно к обратным задачам математической физики. Рассмотрены вопросы идентификации источниковых слагаемых и граничных условий для стационарных и нестационарных задач теплопереноса. Показано, что присущие нейросетевым алгоритмам регуляризирующие свойства позволяют эффективно решать задачи идентификации при значительных погрешностях измерений.
- Создан комплекс программ для математического моделирования процессов переноса в физических системах с использованием нормализованных радиально-базисных сетей.

## ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в журналах из перечня ВАК

1. **Колбин И.С.** *Решение стационарных задач математической физики с использованием нормализованных радиально-базисных сетей.* // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 5 – Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2011 – С. 178-181.
2. **Колбин И.С.** *Разработка системы нейросетевого моделирования.* // Информационные и телекоммуникационные технологии. – 2012. – № 14 – М.: Изд-во МАИ, 2012 – С. 83-86.
3. **Колбин И.С., Ревизников Д.Л.** *Решение задач математической физики с использованием нормализованных радиально-базисных сетей.* //

«Нейрокомпьютеры»: разработка, применение. – 2012. – № 2 – М.: Изд-во «РАДИОТЕХНИКА», 2012 – С. 12-19.

4. **Колбин И.С.** Программный комплекс для решения задач математического моделирования с использованием нейросетевой методологии. // Программная инженерия. – 2013. – № 2 – С. 25-30 (статья принята к публикации).

#### **Публикации в других изданиях**

5. **Колбин И.С., Ревизников Д.Л.** Применение сетей с нормализованными радиально-базисными функциями для решения эллиптических задач математической физики. // Материалы XVII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМППС-2011), Алушта – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. – С. 658-660.

6. **Колбин И.С., Ревизников Д.Л.** Сети нормализованных радиально-базисных функций для решения задач математической физики. // XIV Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2012»: Сборник научных трудов. В 3 частях. Ч. 3. – М.: НИЯУ МИФИ – 2012. – С. 207-213.

7. **Колбин И.С.** Разработка системы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с использованием нейросетевого моделирования. // 10-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2011». Москва. Тезисы докладов. – СПб.: Мастерская печати, 2011. – С. 288.

8. **Колбин И.С.** Нейросетевой метод решения граничной обратной задачи для нестационарного уравнения теплопроводности. // Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике-2012». – М.: ООО «Принт-салон», 2012 – С. 239.

9. **Колбин И.С., Ревизников Д.Л.** Решение граничных обратных задач математической физики с использованием нормализованных радиально-базисных сетей. // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2012. – С. 496-498.

10. **Колбин И.С.** Решение источниковых обратных задач математической физики с использованием нормализованных радиально-базисных сетей. // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач: материалы Международной молодежной научной школы. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. – С. 85-88.