КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МЕХАНИЧЕСКИМ МАНИПУЛЯТОРОМ

Румянцев Д. С.[1], Царьков К. А.[2]
[1]Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, г.Москва, Россия
[2]МАИ (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

Работа посвящена задаче оптимального управления двухзвенным механическим манипулятором. Для решения используется алгоритм синтеза квазиоптимальных стратегий управления квазилинейной динамической стохастической системы диффузионного типа с информационными ограничениями. Основные теоретические результаты и алгоритм получены авторами при поддержке М. М. Хрусталёва.

Рассматривается следующая задача. На горизонтальной плоскости находится двухзвенный механический манипулятор, каждое звено которого представляет собой абсолютно жёсткий стержень длиной l_i, i=1, 2.

Первое звено соединено с неподвижным основанием манипулятора вращательной парой O_1, а со вторым звеном – вращательной парой O_2. Масса схвата манипулятора – m, центр i-го звена находится в середине стержня – точке C_i, его масса – m_i, момент инерции i-го звена относительно своего центра масс – I_i, i=1, 2. В соединительных парах могут развиваться управляющие вращательные моменты, соответственно, u_1 и u_2. Известно положение $\Pi_1 = \overset{*}{\Pi}_1, \Pi_2 = \overset{*}{\Pi}_2$, в которое требуется перевести манипулятор.

Линеаризованные уравнения движения манипулятора в окрестности $\overset{*}{\Pi}_1, \overset{*}{\Pi}_2$ имеют вид $\dot{x} = Ax + Bu$, где

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad x_1 = \Pi_1 - \overset{*}{\Pi}_1, \; x_2 = \Pi_2 - \overset{*}{\Pi}_2, \; x_3 = \Pi_1, \; x_4 = \Pi_2, \; u = (u_1, u_2)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{b}{ab - c^2} & \dfrac{c}{ab - c^2} \\ \dfrac{c}{ab - c^2} & \dfrac{a}{ab - c^2} \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{4}[l_1^2 (m_1 + 4m_2 + 4m) + 4I_1],$$

$$b = \frac{1}{4}[l_2^2 (m_2 + 4m) + 4I_2], \quad c = \frac{1}{2(2m + m_2) l_1 l_2}.$$

Предполагается, что на движение манипулятора и процесс управления оказывают влияние случайные внешние воздействия, причём вектор случайных воздействий имеет две компоненты, первая из которых влияет на Π_1 и реализацию u_1 для управления скоростью Π_1, а вторая – на Π_2, и реализацию u_2 для управления Π_2. Управление осуществляется в условиях информационных ограничений, отражающих невозможность получения полной информации о состоянии динамической системы. Рассматриваются случаи зависимости каждой компоненты вектора управления от своего заданного набора компонент вектора состояния.

Выбраны следующие характеристики манипулятора:

- $m_1 = m_2 = m$ =30 кг;
- $l_1 = l_2 = 1$м;
- $I_1 = I_2$ =5/2 кг.

Цель управления состоит в переводе манипулятора из произвольного начального состояния и угловых скоростей Π_1, Π_2, , определяемых математическим ожиданием

$\overset{*}{m}_0 = (0,0,0,0)^T$ и матрицей ковариаций $K_0=diag(3,3,3,3)$, вектора x, в состояние Π_1, Π_2, со скоростями $\dot{\Pi}_1 = \dot{\Pi}_2 = 0$,. При этом требуется минимизировать затраты на управление. Цель должна быть достигнута за время T. Рассматриваются варианты T=1, 2, 5 с.

Таким образом, задача принимает вид

$$dx(t) = (Ax(t) + Bu(t,x))dt + g(u(t,x))dw(t), x(0) = x_0,$$

$$J = \int_0^T \int_{R^4} \left(\frac{1}{2} u^T E u\right) p(t,x) dx dt + \int_{R^4} \left(\frac{1}{2} x^T Q x\right) p(T,x) dx \to \min,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{8}{155} & -\frac{9}{155} \\ \frac{9}{155} & \frac{14}{155} \end{pmatrix}, g(u) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0.25u_1 & 0 \\ 0 & 0.15u_2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Создан алгоритм поиска близкого к оптимальному управления системой в виде линейного регулятора с полиномиальными коэффициентами. Стратегия управления ищется в виде $u=-(Px+L)$, где P, L – матрицы соответствующих размерностей, имеющие вид полиномиальных по времени функций.

В работах М. М. Хрусталёва и Д. С. Румянцева предложены численные алгоритмы поиска оптимального линейного регулятора. При этом найденные численно функции P, L во многих случаях имеют достаточно сложную явную зависимость от времени. Подход, используемый в данной работе, позволяет синтезировать значительно более простой полиномиальный вид функций P, L. Полученное управление уже не будет в общем случае оптимальным по критерию качества, но его применение значительно выгоднее в силу его простоты. Чтобы учесть имеющиеся информационные ограничения, достаточно зафиксировать значения $P_{ij}(t)\equiv 0$, если компонента u_i стратегии управления не должна зависеть от компоненты x_j вектора состояния.

Для поиска матриц P, L использован метод градиентного спуска. Метод применен к задаче безусловной минимизации критериальной функции J, зависящей неявно от полиномиальных коэффициентов элементов матриц P, L. Получена аналитическая формула вычисления компонент вектора градиента критериальной функции.

Ляпунова–Лагранжа. Метод позволяет свести задачу вычисления значения критерия к решению системы матричных дифференциальных уравнений Риккати с пятью неизвестными функциями. При этом само значение критерия вычисляется по значениям этих функций в начальный момент времени.

Алгоритм успешно применён для решения указанной задачи. Произведено сравнение полученного управления с известным оптимальным. Результаты показали, что в большинстве рассмотренных случаев уже стационарное управление лишь незначительно отличается от оптимального в смысле критерия качества. Дополнительное увеличение качества управления может быть достигнуто за счёт использования линейных, квадратичных или других полиномиальных коэффициентов линейного регулятора небольших степеней.

Результаты справедливы для различных случаев информированности о состоянии.