НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Чичерова Е. В.
ОАО «Климов», г. Санкт-Петербург, Россия

В настоящей работе рассматриваются вопросы наблюдаемости (управляемости) и n-идентифицируемости линейных стационарных динамических систем. Пусть объект управления описывается системой линейных уравнений в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = C^T X + DU \end{cases} \qquad (1)$$

где X – вектор состояния размерности $n\times1$, $\dot{X}$ – производная вектора состояния размерности $n\times1$, A – матрица размерности $n\times n$, B и C – векторы размерности $n\times1$, U – скалярный вход системы, Y – скалярный выход системы.

Задача наблюдаемости (управляемости) может быть сформулирована следующим образом:

- найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять матрица A, чтобы она образовала наблюдаемую (управляемую) пару хотя бы с одним вектором C (вектором B);

наблюдаемую (управляемую) пару.

В работах [1-3] приведено решение задачи n-идентифицируемости для случая различных собственных чисел матрицы A. В работе [4] рассматривается вопрос управляемости линейного объекта в случае кратных собственных чисел матрицы A. Однако, приводятся только необходимые условия управляемости.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия наблюдаемости и управляемости, когда матрица A может иметь кратные собственные числа, а матрицы B и C имеют размерность $n\times1$, т.е. являются векторами. При доказательстве использован математический аппарат, изложенный в работе [5]. Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Для того, чтобы система (1) была n-идентифицируемой с вектором X_0, необходимо и достаточно, чтобы все элементарные делители матрицы A были попарно взаимно просты, а вектор X_0 удовлетворял соотношению:

$$X_0 = \gamma_1 U_1^{(1)} + \gamma_2 U_1^{(2)} + \ldots + \gamma_n U_s^{(k_s)}, \gamma_i \neq 0, i \in J_k. \qquad (2)$$

Здесь $U_i^{(1)}, U_i^{(2)}, \ldots, U_i^{(k_s)}, i \in J_s$ – жорданова цепочка векторов, отвечающих элементарному делителю $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ матрицы A; γ_i – произвольные величины, $i \in J_n$.

Иными словами, вектор X_0 должен иметь ненулевую проекцию на последние столбцы в жордановых цепочках векторов, отвечающих соответствующим элементарным делителям.

В частности, для того, чтобы система (1) n-идентифицируема с вектором $X_0 = e_i$ тогда и только тогда, когда все собственные векторы матрицы A^T имеют i-ю ненулевую компоненту, а элементарные делители матрицы A попарно взаимно просты.

Аналогично, система (1) наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняются условия приведённой выше теоремы для матрицы A^{T} и вектора C.

В частности, для того, чтобы система (1) была наблюдаемой с вектором $C = e_i$, необходимо и достаточно, чтобы элементарные делители матрицы A были попарно взаимно просты, и все её собственные векторы (их будет $s \leq n$) имели i-ю ненулевую компоненту.

Полученные результаты могут быть использованы для определения структуры системы автоматического управления в процессе её разработки, обеспечивающей наблюдаемость и управляемость, в том числе при отказе отдельных элементов, а также обеспечить возможность идентификации системы в процессе эксплуатации.

Также результаты могут быть полезны при решении задач оптимального управления (обеспечения условия общности положения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Балонин Н. А., Попов О. С. Критерий идентификации линейных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. Том XXIX. № 4. 1986. С 25 – 29.

2. Балонин Н. А. Теоремы идентифицируемости. – СПб.: Изд-во «Политехника», 2010. 48 с.

3. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление / Пер. с англ. Ю.Ф. Кичатова и Л.П. Сысоева под. ред. Я.З. Цыпкина. СПб.: Изд-во «ЁЁ

Медиа», 2013. [Lee R.C.K. Optimal Estimation, Identification and Control, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964.] – 176 с.
4. Гроп Д. Методы идентификации систем / Пер. с англ. канд. техн. наук В.А. Васильева и канд. техн. наук В.И. Лопатина под ред. д-ра техн. наук, проф. Е.И. Кринецкого. М.: Мир, 1979. 302 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2004. 560 с.