На правах рукописи

Маслова Екатерина Игоревна

# Масштабозависимые модели стержней и пластин

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель — доктор технических наук, профессор **Лурье Сергей Альбертович.**

Официальные оппоненты: **Шоркин Владимир Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор**,** ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел;

**Белов Петр Анатольевич**, доктор физико-математических наук, начальник отдела фундаментальных исследований Научно-инновационного центра «Институт развития исследований, разработок и трансферта технологий», г. Москва.

Ведущая организация — Институт проблем машиностроения РАН – филиал федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», г. Нижний Новгород.

Защита состоится 28 декабря 2016 года в $16^{00}$ на заседании диссертационного совета Д212.125.05 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), адрес: 125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=73892.

Автореферат разослан «      » ноября 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Федотенков Г.В.

## Общая характеристика работы

Актуальность работы. С развитием аэрокосмических систем, возникновением новых прогрессивных технологий физических исследований, с появлением высокочувствительной аппаратуры и развитием микроэлектроники растёт интерес к особенностям деформирования тонких структур. Толщина элементов, исследуемых в этих структурах, соразмерна характеристикам микроструктуры материала. При этом закономерен вопрос о возможности применения классического подхода к описанию деформации таких элементов. Исходя из этого, понятна актуальность проблемы учёта масштабных эффектов, с помощью которых учитывается связь физических свойств материала с характерными размерами его микроструктуры, и увеличение роли поверхностных процессов по отношению к объёмным процессам.

В последнее время исследования тонких структур интенсивно ведутся во многих передовых странах многими учеными. При этом привлекаются неклассические градиентные теории, которые включают дополнительные параметры размерности длины и вполне подходят для моделирования масштабных эффектов. Значительные результаты за последние 10 лет в развитии неклассической теории упругости и ее применении к прикладным задачам различных областях механики деформируемых тел и смежным областям получили Х. Альтенбах, Э. Айфантис, П.А. Белов, В.В. Васильев, К. Гао, Р.В. Гольдштейн, Ф. Дел-Исолла, В. А. Еремеев, В.И. Ерофеев, С.А. Лурье, Х. Ма, В.П. Матвеенко, Н.Ф. Морозов, В.Мюллер, Д Редди, Н. Флэк, С. Форест, Д. Хадченсон, И. Н. Шардаков, В.С. Шоркин, Ф Эванс, Ф. Янг и др.

В настоящей работе предлагаются уточненные модели деформирования тонких структур, толщина которых соизмерима с масштабными параметрами, а полученные результаты сравниваются с результатами, установленными ранее другими учеными, и вносятся существенные поправки в их исследования.

Целью работы является:

- построение уточненной корректной градиентной теории масштабозависимых стержней и пластин, позволяющей учесть аномальное изменение механических свойств при уменьшении толщины системы;

- разработка вариационного метода построения теории масштабозависимых стержней и пластин для нелокальной градиентной теории упругости.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- построена уточненная корректная градиентная теория;
- установлены критерии корректности прикладных нелокальных теорий;
- использована модель поверхностных эффектов, являющаяся обобщением модели Гуртина-Мурдоха;
- установлена структура адгезионных модулей, дается их трактовка;
- построена градиентная теория упругости тонких стержней и пластин с учетом поверхностных эффектов;
- проведен анализ влияния дополнительных физических параметров, связанных со свойствами поверхности, на изгибную жесткость и на динамическую изгибную жесткость стержней и пластин.

Практическое значение работы. Уточненные модели деформирования позволяют более полно и достоверно прогнозировать поведение сверхтонких структур, которыми являются тонкие элементы конструкций, резонаторы, сенсорные устройства, устройства микроэлектроники и элементы измерительных систем (иглы атомных микроскопов), биологические системы и др. Полученные в работе результаты позволяют пересмотреть систему экспериментов и правильнее отнестись к исследованию тонких структур. Уточнение динамических свойств сверхтонких систем и тонкостенных структур может представлять интерес, например, для задач тестирования механических свойств (деградации механический свойств) с помощью метода акустической эмиссии, для повышения точности измерительных устройств.

Реализация результатов работы. Результаты, полученные в диссертации, используются в Учреждении Российской Академии Наук Институте Прикладной механики РАН.

Достоверность результатов обеспечивается применением классических, хорошо апробированных математических методов, методов механики сплошных сред, прикладной теории упругости: вариационного метода построения моделей; применения прямых вариационных методов и методов уравнений математической физики при решении тестовых задач; сопоставлением полученных в диссертации теоретических результатов с тестовыми аналитическими решениями частных задач; известными экспериментальными данными; непротиворечивостью полученных результатов физическому смыслу явлений, связанных с деформированием сред.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на 2-ой Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем», ИПРИМ РАН, 17-19 декабря 2013; Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике», Москва, МАИ, 16-18 апреля 2013; 1-ой международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций», ИМАШ РАН, Москва, 2014 г.; 5-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», посвященная 95-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова, ИПРИМ РАН, Москва, 2015 г.

Личный вклад автора – постановка задачи и разработка прикладных градиентных теорий (совместно с научным руководителем), разработка уточненных моделей масштабозависимых структур, проведение вычислений, анализ результатов.

Публикации. Всего по теме диссертации было опубликовано 9 работ, 3 из которых выходили в журналах и сборниках, рекомендованных ВАК. Перечень публикаций приведен в конце диссертации.

На защиту выносятся:

- Формулировка вариационной градиентной теории упругости, учитывающей масштабные эффекты и анализ условий симметрии градиентных модулей упругости шестого ранга, вывод условий корректности, как дополнительных необходимых условий симметрии.
- Формулировка вариантов прикладных градиентных теорий, удовлетворяющих условию корректности, критический анализ известных прикладных градиентных теорий.
- Вариационная формулировка корректной градиентной теории масштабозависимых стержней, метод редукции функционала Лагранжа при построении уточненной теории масштабозависимых стержней, ревизия соотношений для эффективной изгибной жесткости масштабозависимых стержней, полученных ранее Янгом, Редди, Ма и др.
- Анализ континуальной теории адгезии (поверхностных взаимодействий), обобщающей теорию Гуртина-Мурдоха, и вариационная формулировка теории пластин с адгезионно активными лицевыми поверхностями, вывод теории масштабозависимых стержней, учитывающих градиентные эффекты и масштабные эффекты поверхностных взаимодействий.
- Анализ решений тестовых статических задач уточненной теории тонких стержней и качественные выводы о поправках, вносимых за счет использования корректных градиентных теорий по сравнению с некорректными, а также принципиальный вывод о незначительной

степени влияния градиентных эффектов на эффективную жесткость по сравнению с масштабными эффектами поверхностных взаимодействий.

- Формулировка корректной градиентной теории колебаний стержней с модифицированной кинетической энергией. Анализ зависимостей динамических жесткостей и собственных частот масштабозависимых стержней от градиентных эффектов и от масштабных поверхностных эффектов, прикладные задачи масштабозависимых пластин (задача Лэмба) и оценка степени влияния поверхностных эффектов на результаты решения.
- Анализ соответствия решений уточненной теории стержней экспериментальным данным и идентификация параметров моделей, ответственных за масштабные эффекты.

## Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность и научная новизна диссертационного исследования, приводятся возможные сферы применения результатов работы, формулируются цель и задачи работы.

В первой главе приводится алгоритм построения математических моделей сред на основе «кинематического» вариационного принципа. Показано, что для описания модели среды достаточно записать выражение для потенциальной энергии. Приведены примеры построения моделей сред с полями дефектов и градиентных моделей теории упругости. Для градиентной теории упругости (модели Миндлина-Тупина), сформулирован функционал Лагранжа:

$$L = A - \iiint U_V dV, \qquad U_V = [C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkmnl} R_{i,jk} R_{m,nl}]/2 \tag{1}$$

Получены определяющие соотношения для напряжений и моментов:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn} R_{m,n}, \qquad \mu_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} = C_{ijkmnl} R_{m,nl} \tag{2}$$

Записано вариационное уравнение (условия стационарности Лагранжиана), полностью определяющее математическую постановку обобщенной теории упругости для градиентной теории упругости:

$$\delta L = \delta A - \iiint [\sigma_{ij}\delta R_{i,j} + \mu_{ijk}\delta R_{i,jk}]dV = \iiint (\sigma_{ij,j} - \mu_{ijk,jk} + P_i^V)\delta R_i dV +$$
$$+ \oiint \{[P_i^F - (\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k})n_j + (\mu_{ijk}\delta^*_{pj} n_k)_{,p}]\delta R_i - \mu_{ijk} n_j n_k \delta \dot{R}_i\} dF - \sum \oint \mu_{ijk} \nu_j n_k \delta R_i ds = 0$$

В записанных соотношениях $A = \iiint P_i^V R_i dV + \oiint P_i^F R_i dF$ - работа внешних объёмных $P_i^V$ и поверхностных $P_i^F$ сил на перемещениях $R_i$; $C_{ijmn}, C_{ijkmnl}$ - тензоры модулей четвертого и шестого рангов, $\delta^*_{pj}$ - «плоский» тензор Кронеккера, $\nu_j$ - орт, касательный к контуру и лежащий в касательной плоскости к поверхности. $\dot{R}_i = \partial R_{i,j} n_j$, $n_j$ – нормаль к поверхности тела в рассматриваемой точке.

Проведен анализ тензоров модулей упругости в (1), (2) и установлены новые критерии корректности моделей, которые связаны не только с необходимостью выполнения условий потенциальности $C_{ijkl} = C_{klij}$, $C_{ijklmn} = C_{lmnijk}$, но и с требованием дополнительного условия симметрии второго и третьего индексов (а также по пятому и шестому и индексам) $C_{ijklmn} = C_{ikjlmn}$, $C_{ijklmn} = C_{ikjmln}$. В результате новое условие корректности для градиентных моделей сформулировано в виде $\mu_{ijk} = \mu_{ikj}$.

Показано, что известная однопараметрическая прикладная градиентная теория Янга, использующаяся при моделировании сверхтонких структур, с тензором модулей упругости $C_{ijklmn} = l^2 \mu (e_{lmp} e_{ijp} \delta_{kn} + e_{lmk} e_{ijn})/4$, а также градиентная прикладная теория Алтана, Айфантиса с тензором градиентных модулей упругости $C_{ijklmn} = l^2 \lambda \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + l^2 \mu \left(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}\right)$, где $l^2$ - масштабный параметр, $\mu$, $\lambda$ - коэффициенты Ламе условиям корректности не удовлетворяют.

Предложена новая прикладная двухпараметрическая (параметры $C_1$, $C_8$) градиентная теория, удовлетворяющая критерию корректности и условиям симметрии по первой паре индексов (т. е. градиентная теория деформаций, а не дисторсия) с тензором градиентных модулей:

$$\begin{aligned}C_{ijklmn} = C_1\big(&\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm}\\ &+\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}\big)\\ &+C_8\big(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\big).\end{aligned}$$

Для этой модели записаны определяющие соотношения:

$$\mu_{ijk} = C_1\Big[\big(2\varepsilon_{il,l} + \theta_{,i}\big)\delta_{jk} + \big(2\varepsilon_{jl,l} + \theta_{,j}\big)\delta_{ki} + \big(2\varepsilon_{kl,l} + \theta_{,k}\big)\delta_{ij}\Big] + 2C_8\big(\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}\big)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\ ,$$

И разрешающие уравнения

$$H_{ij}L_{jk}R_k + f_i = 0$$

где $L_{ij} = (\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + \mu\delta_{ij}\Delta$,

$H_{ij} = \delta_{ij} - l_1^2\delta_{ij}\Delta - l_2^2\partial_i\partial_j\, , l_1 = \sqrt{(C_1 + 2C_8)/\mu}$ ,

$l_2 = \sqrt{[4\mu(C_1 + C_2 + C_{11}) - (\lambda + \mu)(C_7 + 2C_8)]/\mu(\lambda + 2\mu)}$

В дальнейшем исследуется влияние некорректности при моделировании тонких стержней.

Основное внимание в диссертации обращается на известную и широко обсуждаемую проблему влияния толщины стержней и пластин на эффективную жесткость таких структур, когда их толщина начинает быть соизмерима с материальным масштабным параметром. В связи с этим обсуждаются опубликованные недавно градиентные модели прикладной теории стержней, из которых следует, что формальное использование градиентной теории деформаций вместо классической теории упругости приводит к тому, что изгибная жесткость классической теории стержней модифицируется за счет масштабного параметра $(l/h)^2$. Таким образом, для сверхтонких структур, когда масштабный параметр $l$ соизмерим с толщиной, изгибная жесткость существенно отличается от классической изгибной жесткости и может превышать ее в несколько раз. Подобный эффект получен в работах других авторов. Этот результат оказался причиной тщательного рассмотрения теории сверхтонких стержней.

В этой же главе приводится пример, противоречащий «общепринятому» утверждению о том, что именно градиентные эффекты ответственны за эффект аномального увеличения жесткости сверхтонких структур. Для этого полуобратным методом, без привлечения вариационного подхода, получено аналитическое решения задачи о чистом изгибе балки с использованием частного варианта градиентной теории, в которой градиентные эффекты связаны с изменением объемной деформации. Вариационная модель такой среды определяется Лагранжианом:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \{2\mu\ \gamma_{ij}\gamma_{ij} + K\theta\theta + (\lambda + 2\mu) l^2 \theta,_k\ \theta,_k\} dV \tag{3}$$

где $\gamma_{ij}$, $\theta$ компоненты тензора девиатора деформаций и шарового тензора, соответственно, $\mathrm{K} = (2\mu + 3\lambda)/3$.

Установлено, что выражение для напряжений, найденное по решению задачи чистого изгиба для градиентной модели (3) имеет вид $\sigma_z = -\frac{M}{I}\left(\frac{x}{2}\left(1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{S}\right) - l\frac{\lambda}{S}\frac{\mathrm{sh}(x/l)}{\mathrm{ch}(h/l)}\right)$, $S = (3\lambda + 2\mu) + 6(l/h)^3 \lambda\left(\mathrm{th}(h/l) - h/l\right)$, а его асимптотика при уменьшении толщины $h \to 0$ дает классическое решение $\sigma_{z\,макс} = -\frac{M}{I}(h + O(h/l))$.

Этот пример, наряду с другой информацией, например, что структура решений, найденных для градиентных теорий стержней, противоречит обобщенной теореме Папковича–Нейбера, явился аргументом для дополнительного анализа, исследования и уточнения градиентной теории стержней и пластин.

В диссертации предлагается уточнить влияние градиентных эффектов и учесть также влияние поверхностных эффектов. С этой целью развивается вариационная модель адгезионных взаимодействий. Дается формулировка определяющих соотношений (физическая модель). Устанавливается структура адгезионных модулей упругости, приводится формулировка краевых задач для классической теории упругости. В предположении линейности физических соотношений, потенциальная энергия является квадратичной формой своих аргументов:

$$U = \frac{1}{2}\iiint C_{ijnm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{nm}dV + \frac{1}{2}\oiint A_{ijnm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{nm}dF \qquad (4)$$

Доказывается, что структура тензора адгезионных модулей в (4) имеет вид:

$$A_{ijnm} = \lambda^F\delta^*_{ij}\delta^*_{nm} + \mu^F(\delta^*_{in}\delta^*_{jm} + \delta^*_{im}\delta^*_{jn}) + \chi^F(\delta^*_{in}\delta^*_{jm} - \delta^*_{im}\delta^*_{jn}) + \delta^F n_i n_n \delta^*_{jm}$$

Здесь модуль $\mu^F + \lambda^F$ - определяет эффект поверхностного натяжения; модули $\mu^F$ и $\chi^F$ характеризуют энергии поверхностного формоизменения и, соответственно, энергию скручивания в плоскости, касательной к поверхности (в дальнейшем полагается $\chi^F = 0$); $\delta^F$ определяет энергию изгиба поверхностности, аналогичную энергии деформации "внутренних винклеровских пружинок".

Приводится трактовка адгезионных модулей и дается сравнение представленной модели с континуальной теорией адгезии Гуртина-Мурдоха. Записывается вариационное уравнение, устанавливающее изменение краевых условий теории упругости, связанное с учетом адгезионных эффектов:

$$\iiint (C_{ijnm}R_{i},_{jm} + P^V_n)\delta R_n dV +$$
$$+\oiint [P^F_n - \left(C_{ijnm}R_{i},_{j}\, n_m - A_{ijnm}R_{i},_{jm}\right)]\delta R_n dF = 0.$$

Оценка степени влияния адгезионных эффектов на решение теории тонких структур дана в четвертой главе.

Во второй главе приведен прямой способ получения уравнений равновесия в градиентной теории тонких стержней на основе известного вариационного формализма на примере стержней с кинематикой Бернулли. Показано, что формально полученные уравнения равновесия в отношении продольной и поперечной осей стержня в рамках кинематики теории стержней Бернулли действительно приводят к модификации приведенной изгибной жесткости:

$$u''-\frac{5\mu l^2}{E}u''''=0, \qquad [1+\frac{1}{5}\frac{\mu}{E}(\frac{l}{h})^2]w''''-5\frac{\mu}{E}l^2w^{(6)}=\frac{q}{D} \tag{5}$$

Здесь $D$ – классическая цилиндрическая жесткость (изгибная жесткость), $E=2\mu+\lambda$ – модуль упругости в плоской теории деформаций, $\mu l^2=3C_1$, $C_1=C_8$, $2h$ - толщина стержня, $l$ - масштабный параметр, $u$ - перемещения вдоль оси стержня, $w$ - прогиб стержня, $q$ - действующая нагрузка, $\mu$ - модуль сдвига.

Действительно, оказывается, что в данном случае (5) от масштабного параметра зависит полиномиальная часть решения. Это противоречит обобщенной теореме Папковича–Нейбера об общей структуре решений, найденных для градиентных теорий. Однако, исследование уравнений равновесия прикладной теории стержней, полученных с использованием корректной градиентной теории деформаций, кинематики теории стержней Тимошенко и вариационного формализма Галеркина, позволило установить, что построенные уточненные уравнения равновесия прикладной теории масштабозависимых стержней Тимошенко, не противоречат общим положениям о структуре решений градиентных теорий упругости. Уравнения градиентной теории неклассических стержней Бернулли могут быть получены непосредственно из системы уравнений, описывающих поведение стержней Тимошенко, если в них принять $\theta=-w'(x)$. Откуда получаем:

$$u''(x)-\frac{\mu l^2}{E}\frac{(9+6\alpha)}{(1+2\alpha)}u''''(x)=0, \quad w''''-\frac{\mu}{E}l^2\frac{(9+6\alpha)}{(1+2\alpha)}w^{(6)}(x)=\frac{q}{D}, \quad \alpha=C_1/C_8 \tag{6}$$

Полученные уточненные уравнения градиентной теории стержней

(6) (пластин) не противоречат утверждениям обобщенной теоремы Нейбера-Папковича, а их решения кардинально отличаются от решений,

полученных ранее для масштабозависимых тонких стержней другими авторами.

Во второй главе также рассмотрен метод редукции потенциальной энергии градиентной теории упругости, который основан на предварительном анализе краевых условий на продольных кромках полосы (краях пластины). Показано, что для корректного варианта градиентной теории вариация потенциальной энергии для кинематики теории стержней Бернулли, имеющая общий вид $\delta U = \int_{\Omega}\left[\sigma_{11}\delta R_{1,1} + \mu_{111}\delta R_{1,11} + \mu_{112}\delta R_{1,12}\right]dV$, должна быть редуцирована к более простому виду $\delta U = \int_{\Omega}\left[\sigma_{11}\delta R_{1,1} + \mu_{111}\delta R_{1,11}\right]dV$. Только в этом случае будет гарантировано выполнение краевых моментных условий на поверхностях полосы. Показано при этом, что использование формальной вариационной процедуры приводит здесь к уточненному варианту градиентной теории стержней (6).

<u>В третьей главе</u> приводится вывод уравнений и краевых условий для задачи изгиба пластин с учетом адгезионных взаимодействий на основе вариационной постановки. Установлено, что уравнения равновесия теории пластин Тимошенко с учётом адгезии имеют вид:

$$\begin{gathered}
\overline{D}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta_y}{\partial y\partial x}\right) + \overline{G}\,\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\overline{G}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y}\right) - \mu h\left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \\
\overline{D}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}\right) + \overline{G}\,\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\overline{G}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right) - \mu h\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \\
\mu h\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + 2\delta^F\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu h\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y}\right) + 2\delta^F\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p = 0
\end{gathered} \qquad (7)$$

где $\overline{D} = \dfrac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\left(\dfrac{h^3}{12}\right) + \lambda^F\,\dfrac{h^2}{2}$, $\overline{G} = 2\left(\mu\dfrac{h^3}{12} + \mu^F\,\dfrac{h^2}{2}\right)$, $w$ - прогиб пластины, $\theta_x$, $\theta_y$ - углы поворота, $h$ -толщина пластины (стержня).

На примере уточненной теории пластин Кирхгофа $D^*\Delta\Delta w - 2\delta^F\Delta w - p = 0,\ D^* = D + (2\mu^F + \lambda^F)h^2/2$, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ показано, что адгезионные свойства поверхностей смогут оказывать значительное влияние на деформирование тонких пластин (стержней) при уменьшении толщины, в то время как влияние градиентных эффектов даёт гораздо меньший вклад, чем это было указано ранее в ряде опубликованных исследований других авторов.

В частности, из уравнений равновесия (7), в случае цилиндрического изгиба, $\theta_y = 0$, после использования гипотез Кирхгофа $\theta_x = -\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\theta_y = -\dfrac{\partial w}{\partial y}$ получены уточненные уравнения равновесия градиентной теории стержней Бернулли $D^* w^{(4)} - 2\delta^F w'' = p$. В этом случае параметры адгезии дают учет влияния масштабных адгезионных параметров в теории стержней Бернулли. Приводится уравнение равновесия уточненной градиентной теории стрежней Бернулли, в которых одновременно учитывается и влияние поверхностных эффектов:

$$-\gamma l^2 w^{(6)} + \frac{D^*}{D} w^{(4)} - \frac{2\delta^F}{D} w'' = \frac{p}{D} \qquad (8)$$

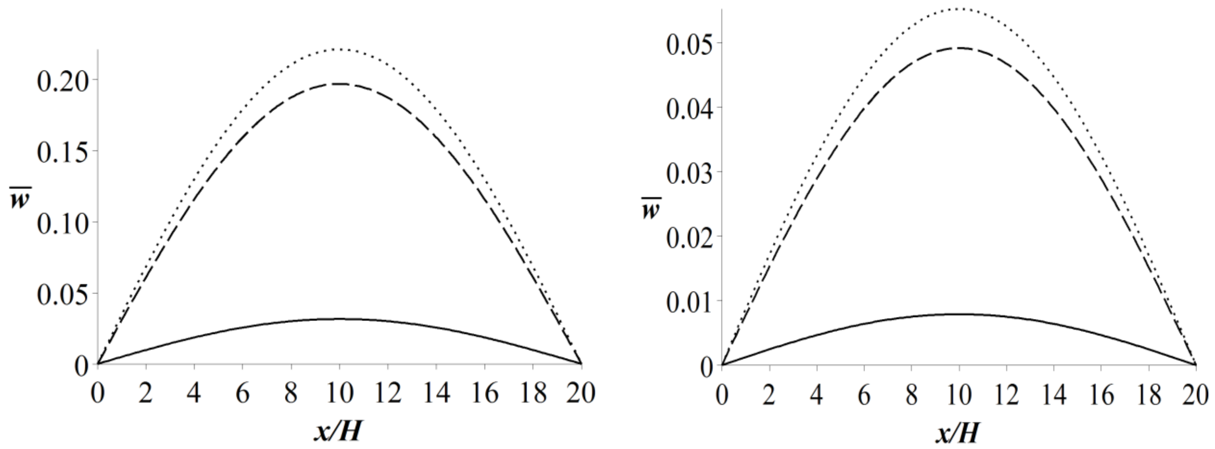
где $\gamma$ - градиентный параметр.

<u>В четвертой главе</u> на основе решений тестовых задач, полученных по уточненной теории, дается анализ влияния масштабных градиентных параметров и параметров поверхностных взаимодействий на эффективную жесткость и особенность деформирования тонких стержней и пластин, приводится качественный сравнительный анализ полученных решений с результатами решений других авторов. Дается сравнение полученных решений с известными в научной литературе экспериментальными данными по измерению эффективной жесткости тонких стержней.

В случае шарнирно опертого стержня представлены графики зависимости прогиба и частоты собственных колебаний от масштабных параметров.

На рисунке 1 представлены зависимости относительных прогибов $\bar{w} = W_k / H$, соответствующих решению уточненной теории (8) для случая шарнирного опирания от относительной продольной координаты $x/H$, $H = 2h$ для случаев $H = 2h = l$ и $H = 4l$ соответственно.

Уточненные решения для сверхтонких стержней показаны пунктирными линиями ($H = 2h = l$) и ($H = 4l$). Для сравнения на этих же рисунках представлены классические решения (точечные кривые) и решения, найденные в работе Ма, Гао и Редди, 2008 г- показаны сплошной линией. Решения построены для следующих параметров: $l = 17\ мкм$, $b = 2h$, $L = 20h$, $E = 1,44\ ГПа$, $P = 100\ мкН$, $\alpha = 1$, $\mu = E/2$.




$H = 2h = l$ $\qquad$ $H = 4l$

Рисунок 1 – Прогиб стержня Бернулли

Показано, что градиентные теории типа Ма, Гао и Редди дают существенное завышение изгибной жёсткости.

Аналогичный анализ проведен для собственных частот шарнирно опертых балок. На графиках рисунка 2 представлены относительные значения амплитуды первой моды прогиба, полученные для тех же параметров балки, что и ранее.

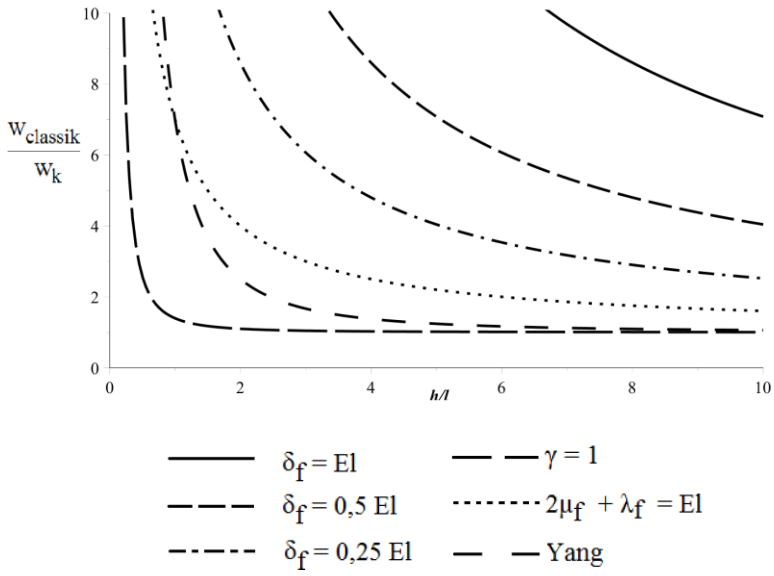



Рисунок 2 – Относительные значения амплитуды первой моды прогибов

Установлено, что учетом когезионных параметров (градиентный эффект) можно пренебречь по сравнению эффектами, которые определяются поверхностными свойствами. Учет адгезионных эффектов за счет поверхностного натяжения $(2\mu^F + \lambda^F)$ может давать значительные поправки в прогиб и обеспечивать прогноз изменения жесткостей близкий тому, как это указывалось в работах других авторов, но за счет уже адгезионных эффектов. Учет адгезионного параметра $\delta_f$, который описывает адгезионные свойства поверхности, связанные с жесткостью на изгиб, может давать более существенный вклад в решение.

В разделе 4.5 главы 4 приведена формулировка корректной градиентной теории колебаний стержней с модифицированной кинетической энергией, которая в общем случае зависит от скоростей поперечных смещений $w(x,t)$, скоростей продольных смещений, связанных с изгибом $u(x,t)$ (т.е. от скоростей углов поворота сечений при изгибе), а также от скоростей производных продольных смещений при изгибе углов $u,_x(x,t)$ и от скоростей производных прогиба $w,_x(x,t)$.

В разделе 4.7 обсуждался вопрос о различной трактовке жесткого закрепления в градиентной теории упругости, допускающей описание закрепления с помощью разных краевых условий: жесткая «жесткая» заделка при $x=0: w(0)=0,\quad w'(0)=0,\quad w''(0)=0$; и, соответственно, жесткая «мягкая» заделка при $x=0: w(0)=0,\quad w'(0)=0,\quad w'''(0)=0$. Влияние способа моделирования закрепления иллюстрируют кривые рисунка 3, построенные для консольной полосы, в соответствии с классической моделью стержней, корректной ($Y=0$ и $Y\neq 0$, $Y$ - силовой параметр, равный нулю для градиентной теории стрежней построенной по редуцированной плотности энергии деформации) и некорректной (Ма, Гао и Редди) градиентной теориями. Представленное сравнение, кроме того, указывает и на большую погрешность решения, построенного с использованием некорректных градиентных теорий даже в случае приближенного (не выполняются условия по моментам) удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях полосы (решение Ма, Гао и Редди – кривые отмеченные точками и тире). Способ моделирования закрепления может вносить значительную поправку при моделировании тонких структур, что может полностью нейтрализовать (или, наоборот, усилить) влияние масштабных эффектов. Отмечается, что это нужно учитывать при сравнении решений с экспериментальными данными и, вообще говоря, требует пересмотра экспериментов для тонких стрежней.

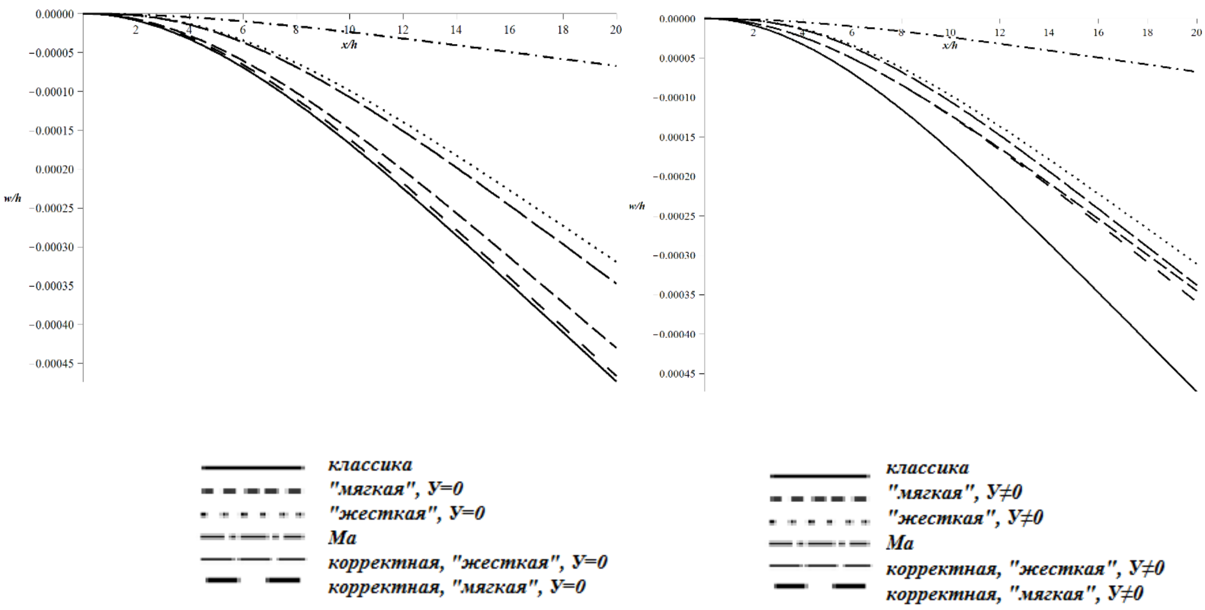



Рисунок 3 – Прогиб консольной полосы толщиной $h=l$

Рассмотрена также задача оценки частотных характеристик в задаче Лэмба, которая может быть полезна с точки зрения приложений. Решение неклассического уравнения колебаний, учитывающее масштабные и градиентные и поверхностные эффекты (первого и второго порядка) имеет вид:

$$w(x,t) = Q\sum_k \frac{\sin(\lambda_k x_0)}{D^*(\lambda_k)^4 + D\gamma l^2(\lambda_k)^6 + 2\delta^F(\lambda_k)^2}\cos(\omega_k t)\sin(\lambda_k x_s) = \sum_k W_k \cos(\omega_k t),$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{L}, \qquad \omega_k = \lambda_k \sqrt{\frac{-D\gamma l^2 \lambda_k{}^4 + D^* \lambda_k{}^2 - 2\delta^F}{(\frac{h^2 \lambda_k{}^2}{6} + 1)\frac{h}{2}\rho}}$$

$$W_k = \frac{Q\sin(\lambda_k x_0)\sin(\lambda_k x_s)}{D^*(\lambda_k)^4 + D\gamma l^2(\lambda_k)^6 + 2\delta^F(\lambda_k)^2}$$

$t$ - время, $\rho$ - плотность, $Q$ - амплитуда нагрузки, $L$ - длина стерня, $x_0$ - начальная координата источника, $x_s$ - начальная координата датчика.

Показано, что учет влияния адгезионных масштабных параметров может существенно уточнить характеристики фиксируемого сигнала – сдвиг фаз и амплитуду.

Особое внимание уделяется сравнению результатов с экспериментальными данными, так как эти эксперименты, полученные в работах Лиеболда (Германия) и в работах других авторов, для эффективного модуля предлагается использовать для определения масштабных параметров в градиентных теориях стержней. Эксперименты указывают на увеличение эффективной жесткости тонких структур с уменьшением толщины. В диссертации показано, что этот эффект не может быть объяснен корректно за счет градиентности, а связан с учетом именно поверхностных эффектов.

Действительно, для приближенной оценки эффективной жесткости $E^*$ было получено следующее соотношение:

$$E^* = E[\tilde{k}_\gamma \pi^2 (\frac{l}{L})^2 + 1 + 6\tilde{k}_f (\frac{l}{h}) + 24\frac{\tilde{k}_\delta}{\pi^2}(\frac{l}{h})(\frac{L}{h})^2] \tag{9}$$

Здесь $\tilde{k}_\gamma = k_\gamma l^2$ - градиентный масштабный параметр, $\tilde{k}_f = k_f l$ - масштабный параметр поверхностного натяжения, $\tilde{k}_\delta = k_\delta l$ - «изгибный» масштабный параметр, $h$ - толщина стержня.

В выражении (9) градиентный параметр $\tilde{k}_\gamma$ входит множителем при чрезвычайно малом параметре $(l / L)^2$. При этом масштабный параметр поверхностного взаимодействия определяет изменение жесткости с уменьшением толщины по закону гиперболы первого порядка (сравни с решением Янга, Ма, Гао, Редди и других - $E^* = E(1 + 6(l / h)^2)$). Данные, представленные на рисунке 4, показывают, что эффект увеличения жесткости изгибаемых тонких структур хорошо описывается предложенной моделью, учитывающей адгезионные взаимодействия (изображено плюсами (+)). На этом же графике линией из точек представлено решение Янга, Ма, Гао, Редди и др. Экспериментальные данные представлены квадратиками (□) для стержней с разной толщиной (диапазон толщин от 8,4 мкм до 39 мкм, диапазон длин стержня от 80 мкм до 900 мкм) и получены для стержней из эпоксидного связующего модулем упругости $E = 4\,ГПа$.

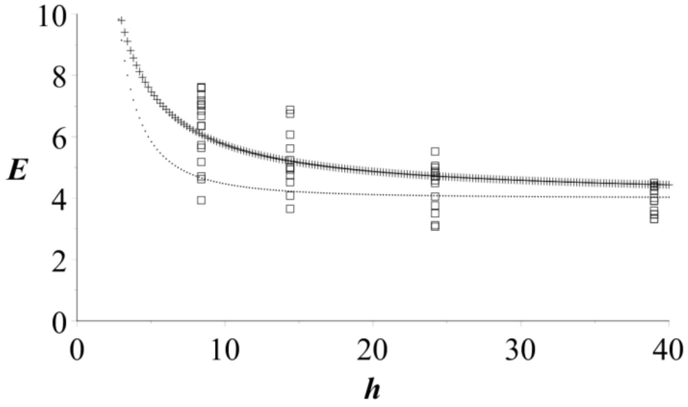



Рисунок 4 – Сравнение эффективных жесткостей, найденных теоретическим путем с экспериментальными данными, полученными для изгибаемой консольной полосы

В работе экспериментальные данные были использованы для идентификации параметров модели. Используя метод наименьших параметров, найдено значение масштабного параметра $\tilde{k}_f = 0,7256$.

Таким образом, показано, что аномальное увеличение эффективной жесткости для сверхтонких стержней (пластин), связано с масштабными поверхностными эффектами, а не с масштабными когезионными эффектами как это считалось ранее. Иначе говоря, формальное применение вариационного подхода со стандартной кинематикой теории стержней для градиентной теории при выводе уравнений прикладной теории стержней может приводить к ошибочным результатам. Уточнение физических причин аномального увеличения эффективной жесткости для масштабозависимых стержней ставит новый класс проблем, возникающих при исследовании устойчивости, анализе волновых свойств и пр. сверхтонких систем

<u>Основные результаты диссертационной работы:</u>

- Представлена формулировка вариационной градиентной теории упругости, учитывающей масштабные эффекты, дан анализ условий симметрии градиентных модулей упругости шестого ранга, предложено условие корректности, которое предлагается использовать в качестве критерия корректности прикладных градиентных теорий упругости.

- Предложена двухпараметрическая прикладная градиентная теория, удовлетворяющая условию корректности.
- Построена уточненная теория корректной градиентной теории масштабозависимых стержней (пластин) учитывающая масштабные эффекты поверхностных взаимодействий на основе обобщенной теории адгезии Гуртина-Мурдоха.
- Получены уточненные соотношения для расчета и прогноза эффективных жесткостных свойств масштабозависимых стержней (пластин) и обосновано положение о незначительной степени влияния градиентных эффектов на эффективную жесткость по сравнению с масштабными эффектами поверхностных взаимодействий. Проведен анализ влияния масштабных параметров, на изгибную жесткость и на динамическую изгибную жесткость стержней и пластин.
- Дана идентификация параметров моделей, ответственных за масштабные эффекты, доказано хорошее соответствие теоретических решений уточненной теории стержней экспериментальным данным.

Цели и задачи, поставленные в рамках данной работы, полностью достигнуты и выполнены. Результатом работы является новая вариационная модель и новый подход к решению задач с масштабозависимыми параметрами.

*Результаты работы использовались при выполнении проекта с уникальным идентификатором RFMEFI57714X0131 при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.*

## Основные публикации по теме диссертации

1. Лурье С. А., Кузнецова Е. Л., Рябинский Л. Н., Попова Е. И. Уточненная

градиентная теория масштабо-зависимых (scale-depend) сверхтонких стержней // МТТ. 2015. №2. С. 30-43.

2. E.I. Popova, E. D. Lykosova. On the influence of adhesive scale effects on seperthin micro- and nanosystem deformation // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. 2014. 5(2). pp. 129-140.
3. Лурье С.А., Попова Е.И., Лыкосова Е.Д. О теории масштабо-зависимых стержней и пластин//МКМК. 2015. 21(4). С. 611-620.
4. Лурье С. А., Лыкосова Е. Д., Бабайцев А. В., Попова Е. И. О масштабнозависимых моделях стержней градиентной теории упругости // Сборник трудов 2-ой всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». Москва. ИПРИМ РАН. 17-19 декабря 2013. Т. 3. С. 89-95.
5. Лурье С. А., Попова Е. И., Харченко К. Д. Об уточненной теории стержней с использованием согласованной кинематики // Сборник тезисов докладов московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике». Москва. МАИ.16-18 апреля 2013 г. С. 296-297.
6. Лурье С. А., Попова Е. И. О масштабнозависимых моделях стержней, построенных с привлечением градиентных теорий упругости // Тезисы2-ой всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». Москва. ИПРИМ РАН. 17 – 19 декабря 2013. С. 140.
7. Лурье С. А., Попова Е. И. Масштабнозависимые модели стержней // Тезисы докладов 1-ой международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций». Москва. ИМАШ РАН. 10-13 ноября 2014. С. 16.
8. Лурье С. А., Попова Е. И. Неклассические модели стержней // Тезисы докладов международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных

конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва. МАИ. 8-10 декабря 2014. С. 215.

9. Попова Е. И. О влиянии адгезионных масштабных эффектов на деформирование сверхтонких микро, наносистем // Тезисы докладов 5-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», посвященная 95-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова. Москва. ИПРИМ РАН. 15-17 декабря 2015. С. 253-254.