На правах рукописи

Рассказова Варвара Андреевна

Математическое моделирование в задачах планирования и организации железнодорожных перевозок методами теории графов и комбинаторной оптимизации и численные методы их решения

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор **Кибзун Андрей Иванович**
Официальные оппоненты:	**Лазарев Александр Алекссевич** доктор физико–математических наук, профессор, ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН», заведущий лабораторией «Теория расписаний и дискретной оптимизации»
	Жукова Галина Николаевна кандидат физико–математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский политехнический университет», доцент кафедры «Прикладная математика и моделирование систем»
Ведущая организация:	**ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук»**

Защита состоится «29» сентября 2017 г. в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А–80, ГСП–3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А–80, ГСП–3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке: https://www.mai.ru/events/defence.

Автореферат разослан «28» июля 2017 г.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, Москва, А–80, ГСП–3, Волоколамское шоссе, 4, Отдел Учёного и диссертационных советов.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04, кандидат физико–математических наук, доцент Н. С. Северина

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе исследуются задача планирования железнодорожных перевозок на этапе формирования бесконфликтного набора нормативных ниток, и задача организации железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов без учёта ограничений на использование и техническое обслуживание локомотивов. Ввиду высокой комбинаторной сложности прикладных задач управления перевозками актуальной представляется область разработки математических моделей, в рамках которых исследуемые задачи могут быть решены с помощью классического математического аппарата. Как правило точное решение задач комбинаторной оптимизации большой размерности является избыточным с точки зрения практической реализации решения, и, кроме того, поиск точного решения требует колоссальных вычислительных затрат. В этой связи особый интерес представляет область разработки эффективных вычислительных алгоритмов поиска приближённого решения. В то же время любой эвристический подход требует подтверждения работоспособности, и, таким образом, неотъемлемым этапом исследования выступает разработка комплекса прикладных программ, на основе которого осуществляется ряд вычислительных экспериментов, подтверждающих эффективность предложенных подходов к решению исследуемых задач.

В работах Гайнанова Д. Н., Сотского Ю. Н., Gholami O., Ефименко Ю. И., Осипова С. И., Орлова А. И., Берцуна В. Н., Шепитько Т. В., Гасанова А. И., Бучкина В. А., Ивахненко А. Г., Гоманкова Ф. С. получили обоснование графовый и комбинаторный методы математического моделирования в приложении к решению прикладных задач управления железнодорожными перевозками. Разработанные в диссертации теоретико–графовые модели, кроме структурных свойств железнодорожных сетей, учитывают также и комбинаторный характер исследуемых задач, что позволяет значительно расширить область разработки вычислительных алгоритмов решения.

Задача планирования железнодорожных перевозок исследуется, в том числе посредством методов теории графов и комбинаторной оптимизации, в контексте задач теории расписаний в работах Лазарева А.А., Гафарова Е.Р., Мусатовой Е.Г., Кварацхелия А.Г., Севастьянова С.В., Сотского Ю.Н., Танаева В.С., Струсевича В.А. В рамках разработанной теоретико–графовой модели исследуемая прикладная задача планирования сводится к задаче расшифровки монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом. В работах Гайнанова Д.Н., Тягунова Л.И., Хачая М.Ю., Ерёмина И.И., Мазурова Вл.Д., Астафьева Н.Н., Мирзоева Р.Г., Новокшенова В.Ю. получены важные результаты в теории противоречивых систем условий, множество максимальных совместных подсистем которых может быть специальным образом поставлено в соответствие множеству максимальных по размеру клик графа. Этот подход получил продолжение в разработке вычислительных алгоритмов для формирования верхнего нуля монотонной булевой функции, особенностью которых является оценка точности приближённого решения.

В работах Кибзуна А. И., Наумова А. В., Буянова М. В., Азанова В. М., Иванова С. В., Осокина А. В. задача организации железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов сводится к задаче стохастического программирования. Постановка задачи организации без учёта ограничений на использование и техническое обслуживание локомотивов имеет определённое практическое обоснование в части нижней оценки точности решения. В рамках разработанной теоретико–графовой модели, исследуемая прикладная задача организации сводится к задаче покрытия вершин ориентированного графа минимальным числом путей. Структурные свойства специфического ориентированного графа совместимости заданий на перевозку позволяют ограничиться рассмотрением множества максимальных по включению путей для покрытия вершин графа, и, таким образом, размерность задачи может быть существенно снижена.

В области разработки алгоритмов комбинаторной оптимизации, линейного, целочисленного и динамического программирования, а также алгоритмов на графах, в том числе приближённых алгоритмов, существенные результаты получены Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У., Корте Б., Фиген Й., Скиена С. Вычислительные алгоритмы формирования верхнего нуля монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом, и алгоритм покрытия вершин ориентированного графа — суть комбинаторный и комбинаторно–графовый алгоритмы, на основе которых в диссертационной работе разработаны проблемно–ориентированные программные комплексы для решения исследуемых прикладных задач планирования и организации железнодорожных перевозок.

Целью работы является разработка математических моделей и вычислительных алгоритмов для решения прикладных задач планирования и организации железнодорожных перевозок, а также разработка проблемно–ориентированных программных комплексов, реализующих разработанные вычислительные алгоритмы. .

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1) разработка математической модели для решения задачи планирования железнодорожных перевозок на этапе формирования бесконфликтного набора нормативных ниток. Исследование свойств неориентированного графа конфликтов и сведение исходной задачи к задаче расшифровки монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом,

2) исследование свойств максимального верхнего нуля и разработка вычислительного алгоритма формирования верхнего нуля монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом,

3) разработка математической модели для решения задачи организации железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов без учёта ограничений на использование и техническое обслуживание локомотивов. Исследование свойств ориентированного графа совместимости заданий на перевозку и сведение исходной задачи к задаче минимального покрытия вершин ориентированного графа множеством путей,

4) исследование свойств минимального покрытия и разработка вычислительного алгоритма покрытия вершин ориентированного графа множеством максимальных по включению путей,

5) разработка и тестирование программных комплексов, реализующих алгоритм формирования верхнего нуля монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом, и алгоритм покрытия вершин ориентированного графа множеством максимальных по включению путей.

Научная новизна. В рамках исследования получены следующие новые результаты:

1) разработана математическая модель для решения задачи планирования железнодорожных перевозок на этапе формирования бесконфликтного набора нормативных ниток,

2) доказано утверждение об оценке числа единиц в максимальном верхнем нуле и разработан вычислительный алгоритм формирования верхнего нуля монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом, и получена оценка вычислительной сложности разработанного алгоритма,

3) разработана математическая модель для решения задачи организации железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов без учёта ограничений на использование и техническое обслуживание локомотивов,

4) доказано утверждение о свойствах минимального покрытия и разработан вычислительный алгоритм покрытия вершин ориентированного графа множеством максимальных по включению путей.

Практическая значимость. Разработанные в диссертационной работе вычислительные алгоритмы решения исследуемых задач лежат в основе программных комплексов для технических управляющих систем, реализация которых и внедрение в эксплуатацию позволит добиться существенного экономического эффекта в области рационального распределения ресурсов. В рамках исследования разработаны на языке Visual Basic проблемно–ориентированные программные комплексы «Алгоритм расшифровки монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом» для решения задачи планирования железнодорожных перевозок, и «Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа множеством максимальных по включению путей» для решения задачи организации железнодорожных перевозок.

Методы исследования. Для разработки математических моделей для решения исследуемых задач используются методы теории графов. Для разработки алгоритмов на графах, вычислительного алгоритма формирования верхнего нуля монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом, а также для разработки вычислительного алгоритма покрытия вершин ориентированного графа, используются методы комбинаторной оптимизации. Для разработки проблемно–ориентированных программных комплексов, реализующих алгоритмы решения исследуемых задач, и для проведения вычислительных экспериментов используются компьютерные технологии.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием классического аппарата моделирования и адекватностью приложения выбранной методологии в исследуемых задачах. Реализация посредством компьютерных технологий подтверждает корректность разработанных алгоритмов, кроме того, исходные данные для вычислительных экспериментов отвечают реальным планам перевозок для существующих железнодорожных транспортных сетей и апробированы на примере оптимизации планирования железнодорожных перевозок для Московской железной дороги, имеющей наиболее развитый и сложный граф сети среди всех дорог ОАО РЖД.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: 1) Международная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2016, 2017), 2) Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2016, 2017), 3) Всероссийская научная конференция «Управление большими системами» (Самара, 2016), 4) Международная научная конференция «Математика, информатика и физика и их приложения в науке и образовании» (Москва, 2016).

Личный вклад. Автором работы сформулированы утверждение об оценке числа единиц в максимальном верхнем нуле монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом, и утверждение о свойстве специфического ориентированного графа, на основе которых, совместно с Гайнановым Д. Н., разработаны вычислительные алгоритмы решения исследуемых задач. Посредством программных комплексов на языке Visual Basic автором реализованы разработанные алгоритмы, проведены вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 работах, 4 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [1–4], в том числе 2 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Web of Science [1–2], 6 из которых опубликованы в тезисах докладов [5–10], и 1 из которых — программа для ЭВМ [11].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации 128 страниц текста с 11 рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит 71 наименование.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность исследования, проводимого в рамках работы, приводится обзор существующих результатов по теме исследования, формулируется цель и задачи, решаемые в рамках достижения цели работы, обоснована научная новизна и практическая значимость работы, а также выбор методологии исследования.

В **первой главе** приводятся основные понятия теории графов и свойства объектов теории графов, используемых в работе, разработаны теоретико–графовые модели для решения исследуемых прикладных задач планирования и организации железнодорожных перевозок.

Вводится в рассмотрение ориентированный граф железнодорожной транспортной сети

$$\overrightarrow{\Gamma} = (S, E) \ ,$$

где множество вершин $S = \{s_i \colon i = 1,2,\ldots,n\}$ характеризует множество станций, и множество дуг $E \subseteq \{(s_i,s_j) : |i-j| = 1\}$ характеризует множество ориентированных перегонов, связывающих соседние станции.

Для каждого ориентированного перегона (s_i, s_j) , соответствующего некоторой дуге ориентированного графа сети, полагаются заданными:

1) профиль дороги $h_{i,j}$,
2) вес брутто поезда Q_{ij}, допустимый к перевозке на перегоне,
3) максимальная допустимая скорость $v_{\max}(s_i, s_j)$ движения по ориентированному перегону (s_i, s_j) ,
4) скорость $\overrightarrow{v_{\text{н}}}(s_i, s_j)$ отправления поезда со станции s_i ,
5) скорость $\overrightarrow{v_{\text{к}}}(s_i, s_j)$ прибытия поезда на станцию s_j ,
6) время $t_{\text{н}}(s_i, s_j)$ отправления поезда со станции s_i ,
7) время $t_{i,j}$ движения поезда по ориентированному перегону (s_i, s_j) ,

и, при заданных $1-7$, можно выбрать график движения $g_{i,j}(t)$, как функцию расстояния, пройденного от станции s_i , таким образом, что каждому графику $g_{i,j}(t)$ соответствуют минимальные энергозатараты на перевозку $E\big(g_{i,j}(\cdot)\big)$, способ расчета которых, также как и способ задания графика движения, в рамках работы не рассматривается.

Энергоэффективная стратегия движения по ориентированному перегону (s_i, s_j) определяется набором параметров:

$$\overrightarrow{E}\,(s_i, s_j) = \big(\overrightarrow{v_{\text{н}}}\,(s_i, s_j)\,, \overrightarrow{v_{\text{к}}}\,(s_i,s_j)\,, t_{\text{н}}\,(s_i,s_j)\,, t_{i,j}, g_{i,j}\,(\cdot)\,\big) \ ,$$

и для различных заданных и расчетных значений параметров множество энергоэффективных стратегий движения по ориентированному перегону графа сети определяется множеством:

$$E\left(s_i,s_j\right)=\Big\{\overrightarrow{E}^k\left(s_i,s_j\right)=$$
$$=\left(\overrightarrow{v_{\text{н}}}^k\left(s_i,s_j\right),\overrightarrow{v_{\text{к}}}^k\left(s_i,s_j\right),t_{\text{н}}^k\left(s_i,s_j\right),t_{i,j}^k,g_{i,j}^k\left(\cdot\right)\right)\,,\,k=1{,}2,\ldots\Big\}\,,$$

где k отвечает мощности множества различных энергоэффективных стратегий движения по ориентированному перегону.

Ориентированный мультиграф:

$$\overrightarrow{\mathrm{G}}\;=\Big(\mathrm{V}=\{\mathrm{v_i}\},\mathrm{E}=\big\{\,(\mathrm{v}_i,\mathrm{v}_j)_k)\,\big\}\Big)\,,$$
$$\mathrm{V}\colon\;\{s_1,\ldots,s_n\}\;,$$
$$\mathrm{E}\colon\bigcup\Big\{E\left(s_i,s_j\right)=\Big\{\overrightarrow{E}^k\left(s_i,s_j\right)\Big\}\colon|i-j|=1\Big\}\,,$$

имеет множество дуг, соответствующее множеству энергоэффективных стратегий движения по всем ориентированным перегонам участка $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ графа сети, и служит теоретико–графовой моделью в задаче планирования на этапе формирования множества энергоэффективных нормативных ниток графика движения поездов.

В ориентированном мультиграфе $\overrightarrow{\mathrm{G}}$ для $i\;<\;j$ допустимые $(\mathrm{v}_i,\mathrm{v}_j)$-пути определены как последовательности дуг графа таким образом, чтобы для энергоэффективных стратегий движения, соответствующих дугам

$$(\mathrm{v}_{i_1},\mathrm{v}_{i_2})_{k_1}\;,\,(\mathrm{v}_{i_2},\mathrm{v}_{i_3})_{k_2}$$

графа, следующим друг за другом в допустимом $(\mathrm{v}_i,\mathrm{v}_j)$-пути, выполнялись условия:

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_{\text{н}}}^{k_2}\left(s_{i_2},s_{i_3}\right)=\overrightarrow{v_{\text{к}}}^{k_1}\left(s_{i_1},s_{i_2}\right)\;,\\ \;t_{\text{н}}^{k_2}\;\left(s_{i_2},s_{i_3}\right)\geqslant\;t_{\text{н}}^{k_1}\;\left(s_{i_1},s_{i_2}\right)+t_{i_1,i_2}\;,\end{cases}$$

и аналогично определяются допустимые $(\mathrm{v}_j,\mathrm{v}_i)$-пути.

Определение 1. *Нормативной ниткой графика движения поездов называется любой допустимый* $(\mathrm{v}_i,\mathrm{v}_j)$*- или* $(\mathrm{v}_j,\mathrm{v}_i)$*-путь, и множество*

$$\mathcal{N}=\big\{\mathrm{n}=\big(s_{\text{н}}\left(\mathrm{n}\right),t_{\text{н}}\left(\mathrm{n}\right),s_{\text{к}}\left(\mathrm{n}\right),t_{\text{к}}\left(\mathrm{n}\right)\big)\big\}\;,$$

где $s_{\text{н}},t_{\text{н}},s_{\text{к}},t_{\text{к}}$ *отвечают параметрам энергоэффективных стратегий, соответствующих первой и последней дугам, входящим в путь, содержит все нормативные нитки графика движения поездов.*

Если для каждого ориентированного перегона (s_i,s_j) и нормативной нитки $\mathrm{n}\in\mathcal{N}$ однозначно определен номер пути $W(s_i,s_j,\mathrm{n})$, допустимого для движения, и задано $d_{\min}$ — некоторое минимальное расстояние, допустимое между поездами при движении по одному и тому же ориентированному перегону, то для рассматриваемого периода планирования $[T_0,T]$, где T_0 и T – время начала и время окончания периода планирования, соответственно, в ориентированном мультиграфе $\overrightarrow{\mathrm{G}} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ определены понятия однонаправленного и разнонаправленного конфликтов, и отношение конфликтности.

Неориентированный граф конфликтов $G = (\mathcal{N}, U)$, где $\{\mathrm{n}_i,\mathrm{n}_j\} \in U$, если нормативные нитки n_i и n_j конфликтны, служит теоретико–графовой моделью в задаче планирования на этапе формирования множества бесконфликтных наборов нормативных ниток графика движения поездов, и любое подмножество $\mathcal{N}^{'} \subset \mathcal{N}$, такое что индуцированный граф конфликтов пуст:

$$G\langle\mathcal{N}^{'}\rangle = \left(\mathcal{N}^{'}, \varnothing\right), \tag{1}$$

есть бесконфликтный набор нормативных ниток, и может служить допустимым расписанием для практической организации железнодорожных перевозок.

В ориентированном графе сети $\overrightarrow{\Gamma}$ определены размеры движения на планируемый период времени в виде матрицы корреспонденций:

$$\mathcal{R} = \left\|r\left(s_i,s_j\right)\right\| \ , i = 1, 2, \ldots, n \ , j = 1,2, \ldots ,n \ ,$$

где $r\left(s_i, s_j\right)$ – количество поездов, необходимое к отправке из станции s_i в станцию s_j в планируемый период времени, и план поездоформирования

$$\mathcal{P} = \bigcup_{(s_i,s_j)\in E} \mathrm{p}\left(s_i,s_j\right) \ ,$$

где $\mathrm{p}\left(s_i,s_j\right)$ – путь в $\overrightarrow{\Gamma}$, допустимый для выполнения перевозки из станции s_i в станцию s_j .

Для заданного бесконфликтного набора $\mathcal{N}\left(\mathcal{P}\right)$ нормативных ниток графика движения поездов, каждый элемент которого соответствует некоторому пути из плана поездоформирования $\mathcal{P}$, и матрицы $\mathcal{R}$ вариантный график движения поездов $\mathcal{N}\left(\mathcal{P},\mathcal{R}\right) \subseteq \mathcal{N}\left(\mathcal{P}\right)$ устроен таким образом, что для каждого элемента $r\left(s_i,s_j\right) > 0$ существует не менее $r\left(s_i,s_j\right)$ нормативных ниток:

$$\mathrm{n} \in \mathcal{N}\left(\mathcal{P},\mathcal{R}\right) : s_{\text{н}}\left(\mathrm{n}\right) = s_i \ , s_{\text{к}}\left(\mathrm{n}\right) = s_j \ ,$$

и аналогично, для матрицы $\mathcal{R}^*$ вида:

$$\mathcal{R}^* = \left\|r^*\left(s_i,s_j\right)\right\| \ , i = 1,2, \ldots ,n \ , j = 1,2, \ldots ,n \ ,$$

такой, что

$$r^*\left(s_j,s_i\right) = 0 \ , \text{если } r\left(s_i,s_j\right) = 0 \ , i = 1,2, \ldots ,n \ , j = 1,2, \ldots ,n \ ,$$

вариантный график движения поездов $\mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R}^*) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{P})$ устроен таким образом, что для каждого элемента $r^*(s_i,s_j) > 0$ существует не менее $r^*(s_i,s_j)$ нормативных ниток:

$$\mathrm{n} \in \mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R}^*) : s_{\text{н}}(\mathrm{n}) = s_i \ , \ s_{\text{к}}(\mathrm{n}) = s_j \ ,$$

и любые нормативные нитки $\mathrm{n}_i \in \mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R})$, $\mathrm{n}_j \in \mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R}^*)$ являются бесконфликтными.

Множество возможных перемещений по ориентированным перегонам:

$$\mathcal{T} = \mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R}) \cup \mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R}^*) = \left\{ \mathrm{n}_i = \left(s_{\text{н}}(\mathrm{n}_i), t_{\text{н}}(\mathrm{n}_i), s_{\text{к}}(\mathrm{n}_i), t_{\text{к}}(\mathrm{n}_i) \right) \right\} ,$$

упорядочено лексикографически относительно $t_{\text{н}}(\mathrm{n}), t_{\text{к}}(\mathrm{n})$, и является бесконфликтным набором нормативных ниток $\mathrm{n} \in \mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R})$, соответствующих заданиям на перевозку, и нормативных ниток $\mathrm{n} \in \mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R}^*)$, соответствующих допустимым перемещениям локомотивов по ориентированным перегонам сети, и, при заданном действительном положительном Δ , порождает ориентированный граф совместимости заданий на перевозку $\overrightarrow{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\overrightarrow{\mathbb{G}} = \left(V,E \right) , \tag{2}$$

$$(v_i,v_j) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} s_{\text{к}}(\mathrm{n}_i) = s_{\text{н}}(\mathrm{n}_j) \ , \\ t_{\text{к}}(\mathrm{n}_i) \leqslant t_{\text{н}}(\mathrm{n}_j) + \Delta \ , \end{cases}$$

где каждая нормативная нитка $\mathrm{n}_i \in \mathcal{T}$ взаимно однозначно соответствует некоторой вершине $v_i \in V$ графа.

Ориентированный граф $\overrightarrow{\mathbb{G}}$ служит теоретико–графовой моделью в задаче организации железнодорожных перевозок.

Во **второй главе** разработаны теоретико–графовый и комбинаторный вычислительные алгоритмы для решения задачи планирования железнодорожных перевозок на этапе формирования бесконфликтного набора нормативных ниток.

Теоретико–графовый подход к решению исследуемой прикладной задачи планирования основан на свойствах неориентированного графа конфликтов. Задан период планирования K дней, разбитый на трёхчасовые интервалы

$$(I_1, I_2, \ldots, I_q) \ , q = 8K \ , \tag{3}$$

и параметр $\mathrm{init}(\mathcal{N})$ характеризует интервал, в котором начинается движение по всем нормативным ниткам $\mathrm{n} \in \mathcal{N}$. Алгоритм $\mathcal{A}$ для начальной последовательности интервалов $(I_1, \ldots, I_q)$ и некоторого бесконфликтного набора

$$\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N} : \mathrm{init}(\mathcal{N}') \subseteq I_1 \cup \ \ldots \ \cup I_q \ ,$$

определяет поднабор

$$\Delta\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}\colon \begin{cases} \mathrm{init}(\Delta\mathcal{N}) = I_{q+1} \ , \\ G\langle \mathcal{N}^{'} \cup \Delta\mathcal{N} \rangle = \Big(\mathcal{N}^{'} \cup \Delta\mathcal{N}, \varnothing \Big) \ , \end{cases}$$

и алгоритм $\mathcal{B}$ для набора $\Delta\mathcal{N}$ фиксирует некоторым образом поднабор $\Delta\mathcal{N}^{'} \subseteq \Delta\mathcal{N}$ такой, что набор $\Delta\mathcal{N}^{'}$ подлежит исполнению.

Последовательная реализация алгоритмов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ названа алгоритмом «Бегущая волна» и устроена таким образом, что для очередных суток из периода планирования, заданных последовательностью интервалов

$$I_{q+1}, I_{q+2} \ , \ \ldots, I_{q+8}\colon q = 8(i-1) \ , i = 1{,}2, \ldots ,K \ ,$$

и плана перевозок, заданного по направлениям в каждые сутки

$$\mathrm{vol}\ _i^{A\to B} \ , \mathrm{vol}\ _i^{B\to A} \ ,$$

необходимо выполняются условия

$$\left| \Big(\Delta\mathcal{N}^{'}(I_{q+1}) \cup \ \ldots \ \cup \Delta\mathcal{N}^{'}(I_{q+8}) \Big)_{A\to B} \right| = \mathrm{vol}\ _i^{A\to B} \ ;$$

$$\left| \Big(\Delta\mathcal{N}^{'}(I_{q+1}) \cup \ \ldots \ \cup \Delta\mathcal{N}^{'}(I_{q+8}) \Big)_{B\to A} \right| = \mathrm{vol}\ _i^{B\to A} \ ;$$

$$G\langle \Delta\mathcal{N}^{'}(I_1) \cup \ \ldots \ \cup \Delta\mathcal{N}^{'}(I_{q+8}) \rangle = \Big(\Delta\mathcal{N}^{'}(I_1) \cup \ \ldots \ \cup \Delta\mathcal{N}^{'}(I_{q+8}), \varnothing \Big) \ ,$$

$$\mathcal{N}(I) = \mathcal{N}\colon \mathrm{init}(\mathcal{N}) = I$$

физический смысл которых состоит в формировании набора, равномощного плану перевозок, и бесконфликтного с набором нормативных ниток, актуальным для исполнения в текущие сутки.

Схема алгоритма «Бегущая волна» для решения задачи планирования железнодорожных перевозок:

1) Период планирования $K = (I_1, I_2, \ldots, I_{8K})$
2) Начальный набор интервалов пуст, $q = 0$, $\mathcal{N}^{'} = \varnothing$

Пока $q < 8K$:

3) Применяя алгоритм $\mathcal{A}$, получаем $\Delta\mathcal{N}$ такой, что $\mathrm{init}(\Delta\mathcal{N}) = I_{q+1}$
4) Применяя алгоритм $\mathcal{B}$, получаем $\Delta\mathcal{N}^{'} \subseteq \Delta\mathcal{N}$
5) $\mathcal{N}^{'} \ \leftarrow \ \mathcal{N}^{'} \cup \Delta\mathcal{N}^{'}$, $\quad q \ \leftarrow \ q+1$

Конец условия

Другой подход основан на сведении исходной задачи к задаче расшифровки монотонной булевой функции. Для заданных вариантного графика $\mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R}) = \{\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \ldots, \mathrm{n}_q\}$ и неориентированного графа конфликтов $G\big\langle \mathcal{N}(\mathcal{P},\mathcal{R}) \big\rangle = (V,E)$ определена булева функция

$$f_G\colon \{0,1\}^q \to \{0,1\} \ ,$$

такая что $f_G(x) = 1$ тогда и только тогда, когда индуцированный подграф

$$G\big\langle \{v_i \in V\colon i \in \operatorname{supp}(x)\}\big\rangle \ ,$$

где $\operatorname{supp}(x) = \{i\colon\ x_i = 1\}$, имеет по меньшей мере одно ребро, с множеством нулей

$$F(f_G) = \{x\colon f(x) = 0\} \ ,$$

множеством верхних нулей

$$\max_{\subseteq} F(f_G) = \{x\colon f(x) = 0 \ , \ f(x') = 1 \ \forall \ x' > x\} \ ,$$

и множеством максимальных верхних нулей

$$\max_{|\cdot|} \max_{\subseteq} F(f_G) = \left\{ x\colon |x| = \max\{\operatorname{supp}(x) \in \max_{\subseteq} F(f_G)\} \right\} \ ,$$

порождённая неориентированным графом.

Утверждение 1. *Пусть $v_i \in V$ и для окрестности $N(v_i)$ индуцированный подграф $G\langle N(v_i)\rangle$ графа G является полным. Тогда существует максимальный верхний нуль $x' \in \max\limits_{|\cdot|} \max\limits_{\subseteq} F(f_G)$ функции f_G такой, что $x'_i = 1$.*

На основании Утверждения 1 разработан вычислительный алгоритм $\mathcal{A}\,(G,V_0)$ формирования максимального верхнего нуля:

Входные данные: G, V_0
Выходные данные: V_0, x
  $x_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ таких, что $v_i \in V_0$
  для $v_i \in V_0$ **выполнять**
    если $v_i - |N(v_i, V_0)|$ – вершина в подграфе $G\langle V_0\rangle$ *// вершина v называется k–вершиной для целого числа k , если $|N\,(v) = k|$* и $G\langle N\,(v)\rangle$ – *полный//* **то**
      $x_i \ \longleftarrow \ 1$
      $V_0 \ \longleftarrow \ V_0 \setminus \big(\{v_i\} \cup N\,(v_i,V_0)\big)$ *// множество $N\,(v,V_0)$ – окрестность вершины в индуцированном подграфе $G\langle V_0\rangle$ //*
      $\mathcal{A}(G, V_0)$
    конец условия
  конец цикла

Реализация алгоритма $\mathcal{A}\,(G,V_0)$ позволяет определить двоичный набор, отвечающий некоторому элементу множества максимальных верхних нулей функции f_G , или, в случае $V_0 \neq \varnothing$, свести исследование к аналогичной задаче сниженной размерности для функции $f_{G' \subseteq G}$.

Утверждение 2. *Пусть* $\{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ *– семейство попарно различных ребер, не являющихся ребрами графа* G *. Тогда*

$$\max\nolimits_0 f_{G\cup\{e_1,e_2,\dots,e_n\}} \geqslant \max\nolimits_0 f_G - |\{e_1, e_2, \dots, e_t\}| \ ,$$

где $\max_0 f_G = \left|\mathrm{supp}(x)\colon x \in \max\limits_{|\cdot|} \max\limits_{\subseteq} F(f_G)\right|.$

На основе Утверждения 2 разработан вычислительный алгоритм $\mathcal{B}\left(G, V_0\right)$, реализация которого позволяет определить двоичный набор, отвечающий некоторому элементу множества верхних нулей, или двоичный набор, отвечающий некоторому элементу множества верхних нулей, количество единиц в котором служит оценкой для числа единиц в максимальном верхнем нуле. В работе представлены подходы, основанные на «жадном поиске» и «поиске с возвратом», из которых реализация последнего требует большего числа итераций, однако позволяет, в случае приближённого решения, получить лучшую оценку числа единиц в максимальном верхнем нуле.

В **третьей главе** разработаны теоретико–множественный и теоретико–графовый вычислительные алгоритмы для решения задачи организации железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов без учёта ограничений на использование и техническое обслуживание локомотивов.

Для заданных периода планирования (3), и некоторого бесконфликтного набора нормативных ниток графика движения поездов

$$\Delta\mathcal{N} = \Big\{ n_i = \big(s_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_i\right), t_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_i\right), s_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_i\right), t_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_i\right) \big) \Big\} \ , \ i = 1{,}2{,}\dots \ ,$$

упорядоченного относительно $t_{\text{н}}, t_{\text{к}}$, вводятся понятие графа зависимостей ниток

$$\Gamma = \Big(\big\{ \mathrm{n}_i \colon \mathrm{n}_i \in \Delta\mathcal{N} \big\}, E \Big) \ ,$$

$$(\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} s_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_i\right) = s_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_j\right), \\ t_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_j\right) \geq t_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_i\right) + \Delta, \end{cases}$$

где Δ – некоторое действительное положительное число, и обозначения

$$\Gamma_I(\mathrm{n}_i) = \{\mathrm{n}_j \in \Delta\mathcal{N} \colon \ (\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j) \in E, \, \mathrm{init}(\mathrm{n}_j) = I\} \ ,$$

$$\Gamma_I^0(\mathrm{n}_i) = \{\mathrm{n}_j \in \Delta\mathcal{N} \colon \ (\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j) \in E, \, \mathrm{mark}(\mathrm{n}_j) = 0, \, \mathrm{init}(\mathrm{n}_j) = I\} \ ,$$

где массив mark длины $|\Delta\mathcal{N}|$ характеризует актуальность исполнения нитки $\mathrm{n} \in \Delta\mathcal{N}$, и задача организации железнодорожных перевозок состоит в формировании отображения

$$f \colon \Delta\mathcal{N} \ \longrightarrow \ 2^{\mathcal{L}\cup\{L_0\}} \ , \qquad (4)$$

такого, что для упорядоченного множества

$$\left| f^{-1}\left(L_i\right)(t) = \{\mathrm{n}_{i_1}, \mathrm{n}_{i_2} \dots\} = \left\{\mathrm{n}_i : t_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_i\right) \leqslant t \leqslant t_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_i\right)\right\} \right| \leqslant 1 ,$$

выполняются условия допустимого отображения

$$\begin{cases} s_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_{i_1}\right) & = s^0\left(L_i\right) \ , t^0\left(L_i\right) \leqslant t_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_{i_1}\right) \ , \\ s_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_{i_1}\right) & = s_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_{i_2}\right) \ , \ \dots \ , s_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_{i_{k-1}}\right) = s_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_{i_k}\right) \ , \\ t_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_{i_1}\right) & \leqslant t_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_{i_2}\right) + \Delta \ , \ \dots \ , t_{\text{к}}\left(\mathrm{n}_{i_{k-1}}\right) \leqslant t_{\text{н}}\left(\mathrm{n}_{i_k}\right) + \Delta \ , \end{cases}$$

при этом множество локомотивов задано начальными условиями доступности локомотивов

$$\mathcal{L} = \left\{L_i = \left(s_0\left(L_i\right), t_0\left(L_i\right)\right) , i = 1{,}2, \dots\right\} ,$$

где $\left(s_0\left(L_i\right), t_0\left(L_i\right)\right)$ – станция и время, начиная с которого соответствующий локомотив доступен для назначения, и локомотив L_0 полагается назначенным на все нитки, исполнение которых невозможно посредством заданного множества локомотивов.

Алгоритм $\mathcal{C}(\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j)$ поиска ближайшей нитки, актуальной для исполнения:

Входные данные: $(I_1, I_2, \dots, I_{8K})$, $|\Delta\mathcal{N}| = q$
Выходные данные: $\mathrm{n} \in \Delta\mathcal{N}$ *// нормативная нитка из бесконфликтного набора, ближайшая к текущей нитке и актуальная для исполнения //*

если $\left\{k \in \left[m, q\right] : \mathrm{init}(\mathrm{n}_i) = I_m,\ m = 1{,}2, \dots, q\ ,\ \Gamma^0_{I_k}(\mathrm{n}_i) \neq \varnothing\right\} = \varnothing$ **то**
$\mathcal{C}(\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j) = -1$ *// нитка n_j не определена //*
иначе
$k_0 = \min\{k \in [m, q]\}$
$j_0 = \min\left\{j \in [1, q] : \mathrm{n}_j \in \Gamma^0_{I_{k_0}}(\mathrm{n}_i)\right\}$
$\mathrm{n}_j \leftarrow \mathrm{n}_{j_0}$
$\mathcal{C}(\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j) = 1$
конец условия

Алгоритм $\mathcal{C}(\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j)$ лежит в основе теоретико–графового вычислительного алгоритма назначения и перемещения локомотивов для решения задачи организации железнодорожных перевозок.

Другой подход основан на сведении исходной задачи к задаче покрытия вершин ориентированного графа минимальным числом максимальных по включению путей. Для матрицы смежности ориентированного графа совместимости заданий на перевозку (2) справедливо утверждение.

Утверждение 3. *Пусть для ориентированного графа совместимости заданий на перевозку $\overrightarrow{\mathbb{G}} = (V,E)$, $|V| = n$, построена матрица смежности вершин*

$$\mathcal{A}_{\overrightarrow{\mathbb{G}}} = \left\|a_{ij}\right\|_{[n\times n]} \ .$$

Тогда

$$a_{ij} = 0 \colon i \geqslant j \ , \ i = 1{,}2, \ldots ,n \ , \ j = 1{,}2, \ldots ,n \ ,$$

и

$$\mathcal{A}_{\overrightarrow{\mathbb{G}}} = \left| \begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & \ldots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \ldots & \ldots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \ldots & \ldots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \right| .$$

На основании Утверждения 3 множество путей ориентированного графа может быть представлено двоичной матрицей, каждая строка которой соответствует некоторому элементу множества, и для формирования множества максимальных по включению путей ориентированного графа разработан комбинаторный вычислительный алгоритм.

Для заданных ориентированного графа совместимости заданий на перевозку $\overrightarrow{\mathbb{G}} = (V, E)$ и множества $\mathbb{P}_{\max}$ максимальных по включению путей, для каждого ориентированного пути $\mathrm{p} \in \mathbb{P}_{\max}$ и некоторого подмножества $V' \subseteq V$ вершин графа вводится в рассмотрение набор индикаторов

$$\begin{aligned} ind_1\,(v) &= \left|\{\mathrm{p} \in \mathbb{P}_{\max} \colon v \in vert\,(\mathrm{p})\}\right| ; \\ ind_2\big(\mathrm{p}, V'\big) &= \left|V' \cap vert\,(\mathrm{p})\,\right| ; \\ ind_3\big(\mathrm{p}, V'\big) &= \sum \big\{ind_1\,(v) : v \in \{V' \cap vert\,(\mathrm{p})\}\big\} ; \\ ind_4\big(\mathrm{p}, V'\big) &= \min \big\{ind_1\,(v) : v \in \{V' \cap vert\,(\mathrm{p})\}\big\} , \end{aligned}$$

где множество

$$vert\,(\mathrm{p}) = \{v_i \colon v_i \in V \ , \ v_i \in \mathrm{p}\}$$

содержит вершины графа, входящие в рассматриваемый путь, и обобщённый индикатор

$$\mathrm{Ind}\big(\mathrm{p}, V'\big) = \Big(ind_2\big(\mathrm{p}, V'\big) \ , \ ind_3\big(\mathrm{p}, V'\big) \ , \ ind_4\big(\mathrm{p}, V'\big)\Big) \ ,$$

называемый обобщенным индексом пути.

Элементы семейства

$$\mathrm{S}\,(V') = \Big\{\big(\mathrm{Ind}\,(\mathrm{p}, V')\,, \mathrm{p}\big) \colon \mathrm{p} \in \mathbb{P}_{\max} \ , \ V' \cup vert\,(\mathrm{p}) \neq \varnothing\Big\} \ ,$$

посредством операции сортировки

$$\mathrm{sort}\big(\mathrm{S}\,(V')\,\big) \ ,$$

относительно обобщённого индекса $\mathrm{Ind}(\mathrm{p}, V')$, упорядочены последовательно по убыванию индикатора ind_2, по возрастанию индикатора ind_3, и по возрастанию индикатора ind_4.

Алгоритм $\mathcal{S}(\mathrm{Ind})$ покрытия вершин ориентированного графа минимальным числом максимальных по включению путей:

Входные данные: V, $\mathrm{S}(V)$
Выходные данные: $\mathrm{C}\colon \bigcup\{vert(\mathrm{p}),\ \mathrm{p} \in \mathbb{P}_{\max},\ \mathrm{p} \in \mathrm{C}\} = V$ // *покрытие вершин минимальным числом максимальных по включению путей* //

$V' = V$
$\mathrm{C} = \varnothing$
пока $V' \neq \varnothing$ **выполнять**
$\quad \mathrm{p} = prime\Big(\mathrm{sort}(\mathrm{S}(V'))\Big)$ // *первый элемент в семействе* $\mathrm{S}(V')$ //
$\quad V' \leftarrow V' \setminus vert(\mathrm{p})$
$\quad \mathrm{C} \leftarrow \mathrm{C} \cup \{\mathrm{p}\}$
конец цикла

Множество $\mathrm{C} \subseteq \mathbb{P}_{\max}$ отвечает некоторому отображению вида (4), и, таким образом, алгоритм $\mathcal{S}(\mathrm{Ind})$ лежит в основе комбинаторного вычислительного алгоритма для решения задачи организации железнодорожных перевозок.

В **четвёртой главе** приводится описание проблемно–ориентированных программных комплексов для решения исследуемых прикладных задач планирования и организации железнодорожных перевозок и результаты вычислительных экспериментов.

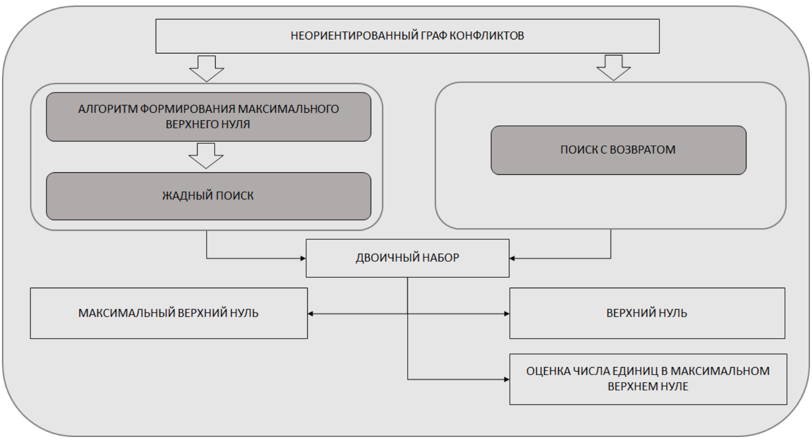

Рис. 1 Программный комплекс для решения задачи планирования железнодорожных перевозок

Программный комплекс «Алгоритм расшифровки монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом» для решения задачи планирования железнодорожных перевозок (Рис. 1) реализует вычислительный алгоритм формирования максимального верхнего нуля, а также вычислительные алгоритмы оценки числа единиц в максимальном верхнем нуле, в подходах «жадного поиска» и «поиска с возвратом». Параллельная реализация алгоритмов позволяет в некоторых случаях получить точную оценку числа единиц в максимальном верхнем нуле, и, соответственно, набор из множества максимальных верхних нулей, отвечающий некоторому бесконфликтному набору нормативных ниток графика движения поездов.

Программный комплекс «Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа минимальным числом максимальных по включению путей» для решения задачи организации железнодорожных перевозок (Рис. 2) реализует последовательно вычислительный алгоритм формирования множества путей ориентированного графа, вычислительный алгоритм формирования множества максимальных по включению путей ориентированного графа, и вычислительный алгоритм сортировки множества максимальных по включению путей ориентированного графа относительно обобщённого индекса пути.

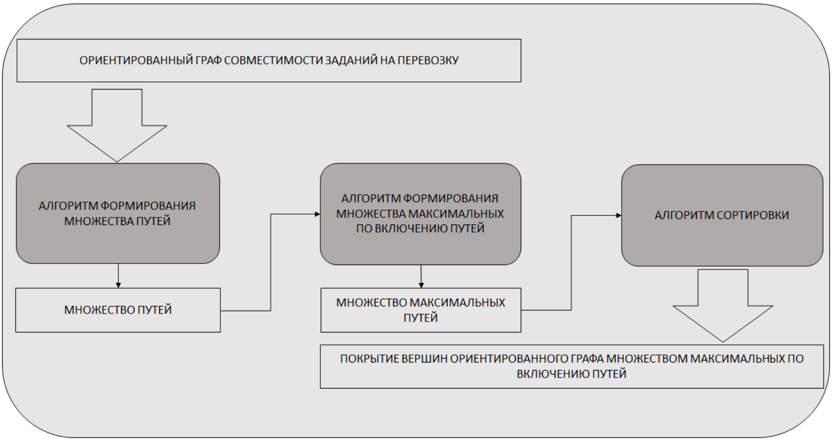

Рис. 2 Программный комплекс для решения задачи организации железнодорожных перевозок

Вычислительные эксперименты показывают, что в некоторых случаях найденное посредством реализации разработанного программного комплекса покрытие вершин ориентированного графа множеством максимальных по включению путей является минимальным.

Основные положения, выносимые на защиту:

1) разработана теоретико–графовая модель для решения задачи планирования грузовых железнодорожных перевозок на этапе формирования бесконфликтного набора нормативных ниток [2],

2) разработан и обоснован вычислительный алгоритм формирования верхнего нуля монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом, и получена оценка сложности разработанного алгоритма [2],

3) разработан программный комплекс «Алгоритм расшифровки монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом» для решения задачи планирования грузовых железнодорожных перевозок на этапе формирования бесконфликтного набора нормативных ниток [2], [11],

4) разработана теоретико–графовая модель для решения задачи организации железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов без учёта ограничений на использование и техническое обслуживание локомотивов [1], [3],

5) разработан и обоснован вычислительный алгоритм покрытия вершин ориентированного графа множеством максимальных по включению путей [3–4],

6) разработан программный комплекс «Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа множеством максимальных по включению путей» для решения задачи организации грузовых железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов без учёта ограничений на использование и техническое обслуживание локомотивов [4].

Публикации в журналах из перечня ВАК

1) *Гайнанов Д.Н., Коныгин А.В., Рассказова В.А.* Математическое моделирование грузовых железнодорожных перевозок методами теории графов и комбинаторной оптимизации // *Автоматика и телемеханика.* – 2016. – № 11. – С. 60–79 (Web of Science).

2) *Гайнанов Д.Н., Рассказова В.А.* Алгоритм расшифровки монотонных булевых функций, порождаемых неориентированными графами // *Вестник южно–уральского государственного университета.* – 2016. – Т. 9. – № 3. – С. 17–30 (Web of Science).

3) *Гайнанов Д.Н., Рассказова В.А.* Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа в задаче о назначении и перемещении локомотивов // *Труды МАИ.* – 2017. – № 92.

4) *Гайнанов Д.Н., Кибзун А.И., Рассказова В.А.* Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа минимальным числом простых ориентированных путей // *Вестник информационных и компьютерных технологий.* – 2017. – № 5. – С. 51–56.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

Кроме публикаций в печатных изданиях, рекомендованных ВАК, по теме диссертации опубликованы работы в материалах научных конференций:

5) *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Теоретико–графовый алгоритм решения задачи о назначении и перемещении локомотивов // Сборник тезисов докладов XLII международной научной конференции «Гагаринские чтения» – 12–15 апреля 2016 г., Москва. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – Т. 1, С. 203–204.

6) *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Алгоритм вершинного покрытия для минимизации холостого хода в задаче назначения и перемещения локомотивов // Сборник тезисов докладов XXI международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», 3–10 июля 2016 г., Евпатория. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – С. 133–134.

7) *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Покрытие вершин графа в задаче о назначении локомотивов // Сборник тезисов докладов всероссийской научной конференции «Управление большими системами», 5–9 сентября 2016 г., Самара. – М.: ИПУ РАН, 2016. – С. 312.

8) *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Покрытие вершин графа в задаче оптимального назначения и перемещения локомотивов // Сборник тезисов докладов международной научной конференции «Математика, информатика и физика и их приложения в науке и образовании», 12–15 декабря 2016 г., Москва. – М.: Московский технологический университет (МИРЭА), 2016. – С. 83–85.

9) *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Математическое моделирование в задаче планирования железнодорожных перевозок // Сборник тезисов докладов XLIII международной научной конференции «Гагаринские чтения» – 18–20 апреля 2017 г., Москва. – М.: Изд-во МАИ, 2017. – С. 703–704.

10) *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Покрытие вершин ориентированного графа в задаче о назначении и перемещении локомотивов // Тезисы докладов XXII международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», 2–9 июля 2017 г., Евпатория. –М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 121–122.

11) *Рассказова В. А.* Алгоритм расшифровки монотонной булевой функции, порождённой неориентированным графом // Программа для ЭВМ (принята заявка на регистрацию).

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № _____ Формат 60×90/16. Тираж 100 экз.
Типография ____