

*На правах рукописи*



**Саганов Евгений Борисович**

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО  
ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ  
СПЛАВЫ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ, РАБОТАЮЩИХ НА КРУЧЕНИЕ**

Специальность 01.02.04  
«Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва – 2016 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

---

**Научный руководитель:**

Доктор физико-математических наук, профессор  
**МОВЧАН Андрей Александрович.**

**Официальные оппоненты:**

**ВОЛКОВ Александр Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Теории упругости» Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), г. Санкт-Петербург;

**ПОЛИЛОВ Александр Николаевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией безопасности и прочности композиционных конструкций Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской Академии Наук, г. Москва.

**Ведущая организация:**

ОАО «Национальный Институт Авиационных Технологий», г. Москва.

Защита диссертации состоится «28» декабря 2016 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте [https://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=73728](https://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=73728)

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Федотенков Г.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы исследования.**

Первый промышленно значимый СПФ, никелид титана NiTi, получен в Ливерморской лаборатории (США) в 50-х годах двадцатого века. В простейшем случае, NiTi может находиться в двух фазовых состояниях. При высоких температурах никелид титана находится в аустенитном состоянии с объемно-центрированной кубической кристаллической решеткой. При низких температурах NiTi находится в мартенситном фазовом состоянии, характеризующимся моноклинной кристаллической решеткой с искажениями. Переход аустенитной фазы в мартенситную есть прямое мартенситное превращение (ПМП). Оно может происходить как при охлаждении, так и при росте механических напряжений, приложенных к образцу из СПФ. Обратное мартенситное превращение (ОМП) – переход мартенситной фазы в аустенитную при нагреве либо разгрузке. В случае если ПМП происходит в отсутствие внешних напряжений, возникающие мартенситные элементы могут иметь различную ориентацию. Увеличение степени ориентированности мартенситных элементов СПФ вследствие действия внешних механических напряжений можно назвать структурным превращением, сопровождающимся раздвойникованием и переориентацией имеющихся мартенситных элементов. Совокупность перечисленных выше явлений, характерных для СПФ, позволяет применять эти материалы при решении прикладных задач.

Среди многочисленных вариантов использования СПФ следует выделить инженерные приложения, в которых данные материалы выступают в качестве активных элементов управления. Примером такого использования СПФ могут служить актуаторы, силовозбудители крутящего момента, элементы управления аэродинамическими поверхностями летательного аппарата, винтовые пружины смещения, а также устройства рассеивания механической энергии, применяемые в механизмах сейсмо-безопасности и космических ферменных конструкциях.

Так, стержень или трубка из СПФ могут быть использованы как рабочее тело торсионного актуатора или силовозбудителя крутящего момента. Принцип действия этих устройств заключается в использовании при рабочем ходе (нагреве) эффекта памяти формы (ЭПФ). Стержень или трубку из СПФ предварительно деформируют в мартенситном состоянии или переводят в данное фазовое состояние посредством охлаждения через интервал температур ПМП под действием постоянного крутящего момента. При этом накапливается неупругая (фазово-структурная) деформация, и стержень/трубка из СПФ закручивается на определенный угол, величина которого на порядок и более превышает упругое значение угла закручивания при действии равного по величине крутящего момента. Далее рабочее тело актуатора подвергается нагреву через интервал температур ОМП. Вследствие отмеченного выше ЭПФ, стержень/трубка из СПФ восстанавливает свою начальную форму. При этом снимаются фазово-структурные деформации, и уменьшается угол закручивания. Если восстановление первоначальной формы происходит при стесненном деформировании (например, при наличии постоянного противодействия или упругого контртела), то производится полезная работа.

Использование того или иного активного элемента из СПФ зависит от специфики решаемой задачи, будь то требования по жесткости или массе, предъявляемые к устройству. Кроме того, значительное влияние на термомеханический отклик актуатора из СПФ оказывает температурный режим, при котором происходит эксплуатация изделия. Условно можно выделить два класса задач, характерных для СПФ: изотермические и неизотермические. К первому классу относится, например, явление мартенситной неупругости. Неизотермические задачи включают в себя процессы протекания в СПФ прямого и обратного термоупругого мартенситного фазового превращения при охлаждении/нагреве или механическом нагружении/разгрузке.

На протекание фазовых превращений (ФП) в СПФ существенное влияние оказывают действующие механические напряжения. В простейшем случае, считается, что действующие напряжения не оказывают влияния на характерные температуры ФП. Данная постановка задачи трактуется как несвязанная. Однократно связанная постановка задачи, напротив, подразумевает зависимость температур ФП от действующих напряжений и деформаций. Так, наблюдается повышение характерных температур ФП при увеличении действующих механических напряжений. Наиболее полно поведение СПФ можно описать, учитывая влияние действующих напряжений и деформаций на температуры ФП, а также выделение/поглощение латентного тепла ФП и диссипативные свойства СПФ. Такая постановка задачи трактуется как дважды связанная.

Учитывая вышеизложенное, разработка фундаментальных основ расчета и проектирование силовозбудителей, актуаторов и других устройств, работающих на кручение, с рабочим телом из СПФ является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела. Ввиду объективной сложности определяющих соотношений, связывающих внутренние переменные материала, такие как: напряжения, деформации, объемная доля мартенситной фазы, а также учитывая влияние на характерные температуры ФП действующих напряжений и деформаций, актуальной задачей является разработка методов и алгоритмов анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) данных элементов, находящихся под действием различных силовых и температурных воздействий, а также их численная реализация.

#### **Степень разработки темы исследования.**

Решению задач кручения элементов из СПФ посвящены работы Крахина О.И., Мовчана А.А., Семенова В.Н., Aguiar R., An S-M., Andani T., Chapman C., Dolce M., Gostanza G., Icardi U., Mabe J., Mehrabi R., Mirzaeifar R., Peng X., Predki W., Spinella A., Stebner A., Sun Q., Tabesh M., Tobushi K., Wang Y., Yates S. и других. При этом в настоящее время в механике СПФ наибольшее внимание уделяется решению изотермических задач. Помимо отмеченного выше явления мартенситной неупругости, к изотермическому классу задач можно отнести процесс монотонного нагружения и разгрузки образца из СПФ, первоначально находящегося в аустенитном фазовом состоянии при температуре выше температуры окончания ОМП. Данное явление известно в литературе под термином сверхупругость. Наибольшее распространение при решении данной задачи находит постановка, в которой считается, что температура образца из СПФ не меняется в процессе нагружения/разгрузки и равна температуре окружающей среды. Реже учитываются выделение/поглощение латентного тепла ФП, диссипативные свойства СПФ и теплообмен с окружающей средой. Множество трудов посвящено разработке подходов и алгоритмов проектирования актуаторов, активным элементом которых является витая пружина смещения из СПФ. В данных работах наибольшее внимание уделяется экспериментальному исследованию поведения пружин из СПФ, при этом на основе полученных данных происходит корректировка моделей и корреляция входящих в них параметров материала, с целью обеспечения наибольшей точности расчетов. При этом задачи о прямом и обратном мартенситных ФП, протекающих под действием внешних механических напряжений, решаются крайне редко. Это вызвано необходимостью проводить связанный термомеханический анализ поведения образцов из СПФ, а также использовать модели поведения СПФ, адекватно описывающие неизотермические процессы, протекающие в этих материалах.

#### **Цели и задачи работы.**

1. Постановка задач кручения для элементов из СПФ в рамках модели нелинейного деформирования этих сплавов при фазовых и структурных превращениях.

2. Разработка алгоритмов анализа НДС элементов конструкций, содержащих СПФ при немонотонно меняющихся напряжениях в процессе протекания фазово-структурных превращений. Оценка влияния термомеханической связанности на получаемые результаты.

3. Анализ влияния материальных функций и констант СПФ, а также различных форм аппроксимации диаграммы ФП на общий характер решения рассматриваемых задач.

4. Исследование влияния структурного превращения на термомеханический отклик образцов из СПФ при различных термосиловых воздействиях.

5. Численное решение краевых задач механики СПФ для стержней сплошного круглого поперечного сечения и трубок из этих сплавов, задачи о пропорциональном изотермическом нагружении СПФ в мартенситном фазовом состоянии, задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем под действием постоянного крутящего момента, задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем под действием постоянного крутящего момента, а также на случай обратного превращения с упругим контртелом и в заневоленном состоянии, задачи о сверхупругом поведении тонкостенной трубки из СПФ при кручении с учетом выделения/поглощения латентного тепла ФП, диссипативных эффектов и теплообмена с окружающей средой.

### **Научная новизна.**

1. Разработаны алгоритмы анализа НДС элементов конструкций содержащих СПФ, работающих на кручение. Приведенные в работе подходы к оценке НДС элементов из СПФ могут быть успешно использованы при решении краевых задач механики СПФ в однократно и дважды связанной термомеханических постановках при немонотонно меняющихся напряжениях в процессе протекания фазово-структурных превращений.

2. В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, качественно верно описывающей наиболее широкий круг явлений и свойств, характерных для этих сплавов, получено численное решение, с учетом упругих деформаций, изотермических задач о пропорциональном нагружении/разгрузке стержней и трубок из СПФ в режимах мартенситной неупругости и сверхупругости. Получено аналитическое решение задачи о мартенситной неупругости.

3. В рамках той же модели проведено численное моделирование явлений как прямого, так и обратного термоупругих мартенситных фазовых превращений, протекающих под действием постоянного крутящего момента. Рассмотрение отмеченных задач велось в однократно связанной термомеханической постановке с учетом возможности протекания структурного превращения как при прямом, так и при обратном фазовом переходе.

4. В ходе работы получено численное решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне/трубке из СПФ, протекающем при переменном крутящем моменте, моделирующее рабочий ход торсионного актуатора. При этом рассмотрены случаи обратного превращения в заневоленном состоянии при фиксации полных деформаций системы, а также с упругим контртелом.

5. Проведено численное моделирование сверхупругого поведения тонкостенных трубок из СПФ при кручении. Решение выполнено в дважды связанной термомеханической постановке с учетом выделения/поглощения латентного тепла ФП, диссипативных свойств СПФ, а также теплообмена с окружающей средой.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Настоящее исследование проведено в рамках проекта РФФИ № 14-01-00189. В ходе работы получены важные с фундаментальной точки зрения результаты, которые отражают характер поведения СПФ при различных термосиловых нагружениях, в частности, кручении. Отмеченные данные успешно применяются для решения прикладных задач.

Приведенные в диссертации алгоритмы и результаты численного анализа НДС элементов конструкций, содержащих СПФ, являются практически значимыми при проектировании адаптивных устройств систем различного назначения, а именно:

1. При оценке необходимого уровня предварительного деформирования (холостой ход) актуаторов, силовозбудителей крутящего момента, а также силовых приводов в виде витых пружин смещения.

2. При определении допустимых силовых воздействий на элементы систем, содержащих СПФ, при их рабочем ходе.

3. Приведенные в работе результаты численного моделирования позволят проводить проектные изыскания на предмет рационального выбора потребного образца из СПФ, удовлетворяющего требованиям, предъявляемым к прочности и жесткости рассматриваемого изделия. Использование указанных результатов позволит увеличить энергетическую эффективность работы перспективных адаптивных устройств, повысить надежность, улучшить массогабаритные характеристики изделия, а также сократить время их разработки.

Внедрение части результатов диссертационной работы выполнено в виде рекомендаций и технических предложений по реализации рационального варианта исполнения приводов системы управления аэродинамическими поверхностями летательного аппарата, а также методики оценки несущей способности элементов конструкций, содержащих СПФ, и подтверждено актом ПАО «Компания «Сухой» «ОКБ Сухого».

#### **Методология и методы исследования.**

1. Модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях.

2. Аналитические методы решения краевых термомеханических задач для элементов из СПФ, основанные на положении об активных процессах пропорционального нагружения (АППН).

3. Аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Явные и неявные схемы пошагового численного решения связанных задач механики СПФ в приращениях.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Постановка задач кручения для элементов круглого или кольцевого поперечного сечения из СПФ в рамках модели нелинейного деформирования этих сплавов.

2. Разработанные алгоритмы анализа термомеханического отклика образцов из СПФ при решении краевых задач в несвязанной, однократно и дважды связанной термомеханической постановках.

3. Решение задачи о пропорциональном нагружении/разгрузке стержней сплошного круглого поперечного сечения и трубок из СПФ в мартенситном фазовом состоянии.

4. Решение задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем в стержне сплошного круглого поперечного сечения и трубке из СПФ под действием постоянного крутящего момента.

5. Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем в стержне сплошного круглого поперечного сечения и трубке из СПФ под действием постоянного крутящего момента.

6. Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающего при переменном крутящем моменте, случай обратного превращения с упругим контртелом и в заневоленном состоянии.

7. Решение задачи о сверхупругом поведении тонкостенных трубок из СПФ при кручении в дважды связанной термомеханической постановке с учетом выделения/поглощения латентного тепла ФП, диссипативных свойств СПФ, а также теплообмена с окружающей средой.

**Степень достоверности и апробация результатов работы.** Достоверность результатов, полученных в ходе выполнения диссертационной работы, подтверждается следующими положениями:

1. Решение поставленных в работе задач выполнено в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Данная модель

многократно апробирована ранее. Получаемые в рамках нее результаты решения ряда тестовых задач согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Кроме этого, отмеченная модель корректно описывает теплофизические свойства СПФ. Определяющие соотношения данного блока получены непосредственно из первого и второго закона термодинамики.

2. В ходе решения задач о пропорциональном изотермическом нагружении/разгрузке образцов из СПФ (мартенситная неупругость) инкрементальные определяющие соотношения для фазово-структурных деформаций сводятся к конечному алгебраическому уравнению, что позволяет придать решению задач аналитический вид. Полученные в рамках него результаты используются для установления достоверности результатов решения задач в случае невыполнения положения об АППН.

3. При рассмотрении задач о прямом и обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в однократно связанной постановке достоверность полученных результатов подтверждается их сходимостью при уменьшении степени связанности к решению соответствующих несвязанных задач, решение которых имеет аналитический вид.

4. Достоверность решения дважды связанной задачи о сверхупругом поведении тонкостенной трубки из СПФ при кручении подтверждается сходимостью получаемых результатов (при варьировании скорости нагружения, коэффициента теплопередачи и пр.) к решению соответствующей изотермической задачи.

Основные результаты диссертационной работы апробированы на:

XVI Российской конференции пользователей программных комплексов MSC Software. Москва, 21-22 мая 2013 г.; 2-ой Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». Москва, 17-19 декабря 2013 г.; «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел» – научное наследие Ю.Н. Работнова. Москва, 24-26 февраля 2014 г.; Международной конференции «Сплавы с памятью формы: свойства, технологии, перспективы». Витебск, республика Беларусь, 26-30 мая 2014 г.; XXVI Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов МИКМУС 2014. Москва, 17-19 декабря 2014 г.; Международной молодежной научной конференции «XLI Гагаринские чтения». Москва, 7-9 апреля 2015 г.; XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015 г.; XXVII международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов МИКМУС 2015. Москва, 2-4 декабря 2015 г.; 5-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Москва, 15-17 декабря 2015 г.; Международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2016 г.

**Публикации.** По результатам диссертационной работы опубликовано 15 работ. При этом 6 статей издано в журналах из списка ВАК РФ.

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертационная работа изложена на 142 страницах. Состоит из введения, пяти глав, заключения и списка используемой литературы. Иллюстрирована 88 рисунками, 3 схемами и содержит 4 таблицы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность диссертационной работы, приводятся цели и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимости, методы и методология исследования, положения, выносимые на защиту. Кроме этого, раскрывается место диссертационной работы среди прочих научных трудов, посвященных анализу термомеханического поведения элементов из СПФ, приводятся аргументы, подтверждающие достоверность полученных в ходе работы результатов, а также перечень основных выступлений, на которых они были апробированы.

Глава 1 посвящена аналитическому обзору моделей поведения СПФ. Качественно выделено три класса моделей: микромеханические модели физической направленности, феноменологические модели и модели промежуточного уровня. Особое внимание уделено второй группе моделей, так как именно в их рамках решается большинство краевых задач механики СПФ. В данной главе изложены основные положения феноменологических моделей Бринсон, Бо и Лагудаса, Лианга и Роджерса, Танаки и др. Отмечены границы применимости указанных моделей. Кроме этого, подробно рассмотрена модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Показано, что отмеченная модель наиболее полно отражает специфику термомеханического поведения СПФ и позволяет решать весьма широкий класс задач механики СПФ. Обосновывается ее применение при решении поставленных в рамках диссертационной работы краевых задач.

В главе 2 излагается решение задачи об изотермическом кручении стержней и трубок из СПФ в режиме мартенситной неупругости. Получено аналитическое решение поставленных задач.

Пункт 2.1 посвящен рассмотрению задачи кручения тонкостенных трубок из СПФ в режиме мартенситной неупругости. Решение данной задачи, как и всех последующих, ведется в цилиндрической системе координат  $r, z, \varphi$ . Предполагается, что градиент напряжений по толщине трубки отсутствует.

При данной постановке задачи справедливо положение об АППН, поэтому на случай кручения выражение для вычисления полных деформаций системы и его безразмерный аналог имеют аналитический вид:

$$\gamma / \sqrt{3} = \rho_d F_2(\sqrt{3}\tau) + \sqrt{3}\tau / 3G_M, \quad \gamma / \sqrt{3} = \rho_d \Phi_2(s) + s / 3g_M \quad (1)$$

Здесь  $\tau, s = \sqrt{3}\tau / \sigma_0$  – касательные напряжения и их безразмерный аналог,  $\rho_d$  – интенсивность кристаллографической деформации фазового превращения,  $G_M$  – модуль сдвига мартенситной фазы СПФ и его безразмерный аналог:  $g_M = G_M / \sigma_0$ ,  $F_2(\sqrt{3}\tau) = \Phi_2(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s^\alpha)$  – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений и ее безразмерный аналог, соответствующие распределению Вейбулла,  $\sigma_0, \alpha$  – параметры материала, первое слагаемое в правой части соотношения (1) представляет собой фазово-структурные, а второе – упругие компоненты тензора деформации.

Уравнение (1) позволяет по заданному закону изменения  $s$  определить полные деформации системы. Результаты решения рассматриваемой задачи приведены ниже и представляют собой кривые мартенситной неупругости  $s-\gamma$ , рисунок 1. На рисунке 1 кривые приведены парами. Верхняя кривая получена без учета упругих деформаций, нижняя с учетом. Сплошные линии соответствуют величине  $\alpha = 2$ , штриховые –  $\alpha = 4$ , пунктирные –  $\alpha = 6$ .



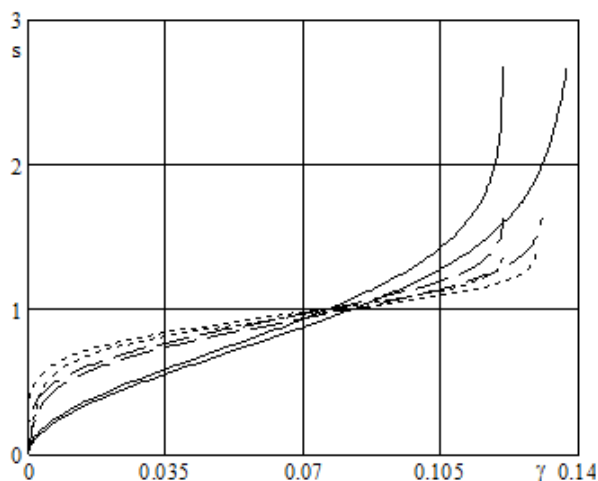


Рисунок. 1 – Кривые  $s$ - $\gamma$ ,  $\sigma_0 = 100$  МПа.

В пункте 2.2 приведено решение задачи о кручении толстостенных трубок из СПФ в режиме мартенситной неупругости. Данная задача является статически неопределимой, при этом существует градиент напряжений по толщине трубки.

Поперечное сечение трубки разбивается на заданное количество внутренних точек, в которых определяются величины напряжений и деформаций. При этом для полных деформаций системы принимается гипотеза плоских сечений, а также положение об отсутствии деформации. Тогда уравнение для определения крутящего момента и его безразмерного аналога имеет следующий вид:

$$M = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \tau r^2 dr, \quad \mu = \sqrt{3}M / (2\pi r_2^3 \sigma_0) = \int_J^1 s \xi^2 d\xi \quad (2)$$

Здесь  $r$  и  $r_{1,2}$  – текущий, внутренний и внешний радиус трубки соответственно,  $\xi = r/r_2$  – безразмерный радиус,  $J = r_1/r_2$ . После введения безразмерной крутки, так что  $\theta^1 = \theta r_2$ , уравнение для определения полных деформаций системы в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\theta^1 \xi / \sqrt{3} = \rho_d (1 - \exp(-s^\alpha)) + s / (3g_M) \quad (3)$$

При решении данной задачи удобно использовать «обратный» алгоритм. Считается заданным массив безразмерной крутки  $\theta^1$  (от нуля до величины, соответствующей интенсивности деформации крайнего волокна  $\varepsilon_i = \rho_d$ ). Используя уравнение (3), для каждой точки сечения определяются безразмерные напряжения  $s$ . В силу монотонного возрастания правой части (3) по  $s$  эта задача имеет для каждого  $\xi$  единственное решение. После, на основании соотношения (2) вычисляется безразмерный крутящий момент  $\mu$ .

На рисунке 2 приведены кривые  $\theta^1 - \mu$  для  $J = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$  сверху вниз. Для  $J = 0,1$  и  $0,2$  кривые практически совпадают. Моделирование выполнено при  $\sigma_0 = 100$  МПа,  $\alpha = 2$ .

Пункт 2.3 настоящей главы посвящен решению задачи кручения стержней сплошного круглого поперечного сечения из СПФ в режиме мартенситной неупругости. В рамках данного раздела справедливы все принятые ранее гипотезы и положения. При этом с точки зрения модификации разрешающей системы уравнений изменения претерпевают лишь соотношения для вычисления крутящего момента и его безразмерного аналога. Так, в уравнение (2) происходит смена пределов интегрирования. Необходимо положить  $r_1 = 0$ , а  $r_2 = R$ .

Также неизменным остается и общий алгоритм решения задачи. На рисунке 3 приведены кривые  $\theta^1 - \mu$ , полученные при  $\sigma_0 = 100$  МПа. Здесь сплошная линия соответствует  $\alpha = 2$ , штриховая –  $\alpha = 4$ , пунктирная –  $\alpha = 6$ . Для большинства значений  $\theta^1$

Как видно из приведенного рисунка, учет упругих деформаций существенен при решении данной задачи, и их не учет при рассмотрении задач кручения приведет к неверным количественным заключениям о НДС элементов конструкций из СПФ.

Кроме этого, в данном пункте установлено, что влияние вариации параметра  $\sigma_0$  на получаемые при решении результаты наиболее существенно для значения  $\alpha = 2$ .

величина требуемого крутящего момента увеличивается с ростом параметра  $\alpha$ . Данная тенденция сохраняется до точки пересечения трех кривых на рисунке 3, после которой, напротив, увеличение  $\alpha$  приводит к уменьшению  $\mu$ . Отмеченные положения сохраняются и на случаи  $\sigma_0 = 125, 150$  МПа.

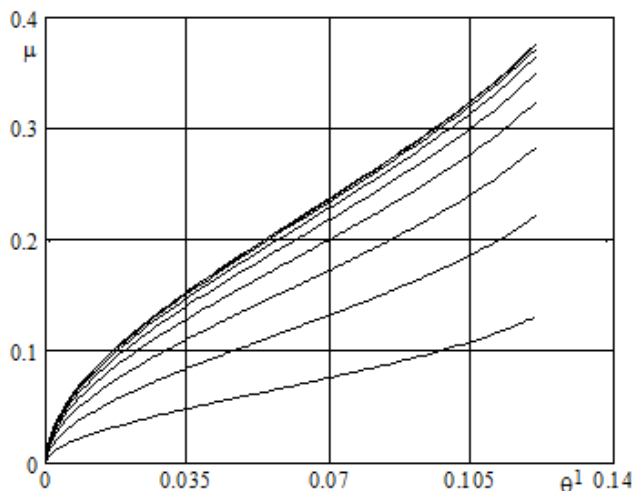


Рисунок 2 – Кривые  $\theta^1$ - $\mu$ , трубки, вариация  $\delta$ .

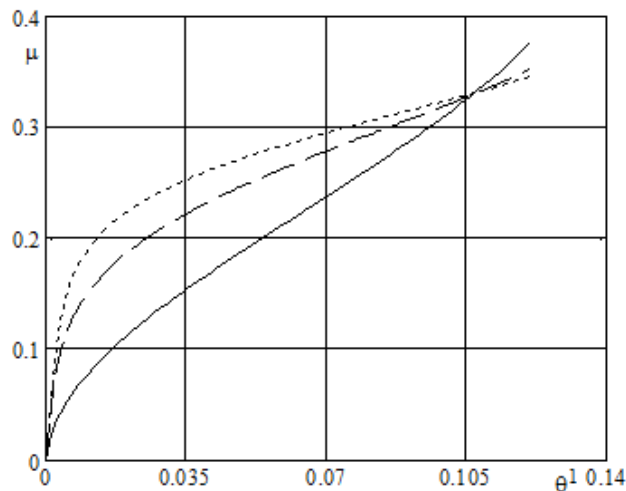


Рисунок 3 – Кривые  $\theta^1$ - $\mu$ , стержень, вариация  $\alpha$ .

На основании рисунков 2,3 можно заключить, что использование полых трубок из СПФ наиболее эффективно в качестве актуаторов и силовозбудителей крутящего момента. Так, при уменьшении их толщины понижается величина  $\mu$ , необходимая для преднагружения и создания определенного уровня  $\theta^1$ . Использование стержней сплошного круглого поперечного сечения рационально в качестве устройств поглощения и рассеивания механической энергии. К аналогичному выводу в рамках иных определяющих соотношений ранее пришел Крахин О.И.

В главе 3 рассматривается неизотермическая задача о прямом термоупругом мартенситном ФП, протекающем в стержнях и трубках из СПФ под действием постоянного крутящего момента. При этом принимаются те же кинематические гипотезы, что и в главе 2. Считается, что поле температур известно и температура равномерно распределена по отсчетным точкам сечения стержня/трубки, а вычислить необходимо компоненты тензоров напряжений и деформаций. Кроме этого, вычислению подлежит величина параметра фазового состава. Данная постановка задач трактуется как однократно связанная.

Параграф 3.1 посвящен решению задачи о прямом термоупругом ФП в тонкостенной трубке из СПФ, находящейся под действием постоянного крутящего момента. Кручение тонкостенных трубок является статически определимой задачей. При этом выражение для полных деформаций системы на основании положения об АППН записывается следующим образом:

$$\gamma / \sqrt{3} = \rho_d F_1(\sqrt{3}\tau) q + \sqrt{3}\tau / 3G(q) \quad (5)$$

Здесь  $1/G(q) = q/G_M + (1-q)/G_A$ ,  $G_A$  – модуль сдвига аустенитной фазы СПФ,  $F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s)$  или  $F_1(\sqrt{3}\tau) = \operatorname{erf}((\sqrt{3}\tau / \sigma_0) / \sqrt{2}) = \operatorname{erf}(s / \sqrt{2})$  – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном фазовом состоянии, соответствующая экспоненциальному распределению, либо распределению Лапласа. Второе слагаемое (5) обезразмеривается следующим образом:

$$\gamma_e = (s\lambda q s_{0A} + s s_{0A} (1-q)) / \sqrt{3} \quad (6)$$

где  $\lambda = G_A / G_M = 3,42$ ;  $s_{0A} = \sigma_0 / G_A = 0,0046$ . Величину крутящего момента, под действием которого происходит ПМП, удобно обезразмерить следующим образом:

$$\mu = M / (2\pi R^2 G_A \delta) \quad (7)$$

Величина  $\mu$  соответствует упругой деформации крайнего волокна трубки в аустенитном фазовом состоянии, то есть  $\mu$  можно расценивать как уровень преднагружения. При этом общий алгоритм решения задачи имеет следующий вид. В качестве параметра процесса выступает объемная доля мартенситной фазы  $q$ . В начальный момент времени  $q = 0$  и материал трубки находится в полностью аустенитном фазовом состоянии. После делается шаг по данному параметру  $dq > 0$ , и определяются деформации системы согласно (5,6). Данный процесс длится до тех пор, пока параметр фазового состава не достигнет значения  $q = 1$ .

В пункте 3.2 решена аналогичная задача (см. пункт 3.1) для толстостенных трубок и стержней из СПФ. В качестве базой системы соотношений для определения параметра фазового состава выступает блок уравнений, приведенный ниже:

$$q = \sin(\pi t_\sigma / 2), \quad t_\sigma = (M_s^\sigma - T) / (M_s^0 - M_f^0) \quad (8)$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \omega_{ij}^+ \sigma_{ij}' / \Delta S_0, \quad \omega_{ij}^+ = 3\rho_d \sigma_{ij}' (1 - qf(q)) F_1(\sigma_i) / (2\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} \quad (9)$$

Здесь функция  $f(q)$  определяет соотношение вкладов в фазовую деформацию явлений зарождения и развития мартенситных элементов,  $\Delta S_0$  – скачек объемной плотности энтропии при переходе от аустенитного к мартенситному фазовому состоянию при отсчетной температуре  $T$ . На случай кручения безразмерное соотношение для определения приращения параметра фазового состава записывается следующим образом:

$$dq = S^1 ds / \sqrt{3} - B^1 dt_0 \quad (10)$$

$$S^1 = \beta^1 \frac{\{f(q) \gamma^{phst} + \sqrt{3} \rho_d [(\Phi_1(s) + s \Phi_1'(s))(1 - f(q)q) + f(q) s q \Phi_2'(s)]\}}{1 + \beta^1 (f(q))^2 C^1} \quad (11)$$

$$\beta^1 = \pi \sqrt{1 - q^2} / (2\delta S), \quad B^1 = -\pi \sqrt{1 - q^2} / (2(1 + (f(q))^2 \beta^1 C^1)) \quad (12)$$

$$C^1 = \rho_d q s \Phi_1(s) - s \gamma^{phst} / \sqrt{3}, \quad \delta S_0 = (M_s^0 - M_f^0) \Delta S_0 / \sigma_0, \quad dt_0 = -dT / (M_s^0 - M_f^0) \quad (13)$$

В процессе охлаждения стержня/трубки положение границ начала и окончания ФП изменяется от внешнего радиуса до нейтральной линии/внутреннего радиуса, при этом в поперечном сечении можно, в общем случае, выделить три характерные зоны. Первая  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  соответствует аустенитному состоянию материала, при этом материал деформируется упруго. Во второй части сечения  $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_{00}$  происходят фазово-структурные переходы. Здесь  $\xi_0 = r_0 / r_2$ ,  $\xi_{00} = r_{00} / r_2$  – безразмерные границы начала и окончания ФП для трубки из СПФ. В третьей зоне  $\xi_{00} \leq \xi \leq r_2$  материал находится в мартенситном состоянии, при этом деформация может быть как упругой, так неупругой (при выполнении условий наличия структурного превращения). Наличие или отсутствие структурного перехода определяется выполнением следующих условий: если в отсчетной точке сечения  $d(|s|) > 0$ , а само значение модуля напряжений соответствует максимальному значению за всю предыдущую историю процесса, то в данной точке происходит структурный переход. Если одно из двух выше изложенных условий не выполняется, то материал деформируется упруго с мартенситным модулем. Таким образом, приращения напряжений в каждой из областей сечения образца из СПФ находится из следующего блока уравнений:

$$ds = \sqrt{3} \xi d\theta^1 / s_{0A}, \quad ds = \sqrt{3} \xi d\theta^1 + \sqrt{3} D^1 B^1 dt_0 / (F^1 + D^1 S^1) \quad (14)$$

$$D^1 = ((\lambda - 1) s s_{0A} / \sqrt{3}) + (\sqrt{3} \rho_d \Phi_1(s) (1 - f(q)q) + f(q) \gamma^{phst}) \quad (15)$$

$$F^1 = s_{0A} + s_{0A} q (\lambda - 1) + 3 \rho_d q \Phi_2'(s) \quad (16)$$

Если в «мартенситной» области, где завершилось фазовое превращение, не наблюдается структурного перехода, то в формулах (11) и (16) необходимо положить равным нулю множители, связанные с функцией  $\Phi_2(s)$ .

Уравнение, связывающее приращение крутки и приращение крутящего момента, имеет следующий безразмерный вид:

$$d\theta = I_3 / \left( (\xi_0^4 - J^4) / 4s_{0A} + I_1 + I_2 \right) \quad (17)$$

$$I_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_{00}} \frac{\xi^3}{F^1 + D^1 S^1} d\xi, \quad I_2 = \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi^3}{\lambda s_{0A} + 3\rho_d q \Phi_2'(s)} d\xi, \quad I_3 = dt_0 \int_{\xi_0}^{\xi_{00}} \frac{D^1 B^1 \xi^2}{F^1 + D^1 S^1} d\xi \quad (18)$$

Уравнение (17) верно для толстостенных трубок, для стержней из СПФ необходимо положить равным нулю параметр  $J = 0$ . Соотношения (18) получены путем подстановки (14) в продифференцированное уравнение для определения крутящего момента. Температура, при которой ФП начнется на внешнем радиусе, определяется из приведенного ниже соотношения, в котором необходимо положить  $\xi_0 = 1$ :

$$t_0 = -\sqrt{3}\theta^1 \xi_0 \rho_d \Phi_1 \left( \sqrt{3}\theta^1 \xi_0 / s_{0A} \right) / (\delta S_0 s_{0A}) \quad (19)$$

Полные  $\gamma$  и упругие  $\gamma^e$  деформации системы вычисляются на основании приведенных ниже соотношений. При этом фазово-структурные деформации есть их разность.

$$\gamma = \theta^1 \xi, \quad \gamma^e = (s \lambda q s_{0A} + s s_{0A} (1 - q)) / \sqrt{3} \quad (20)$$

Алгоритм решения задачи будет один как для стержня, так и для трубки из СПФ. Его основные положения на случай движения границы начала ФП приведены ниже на схеме.

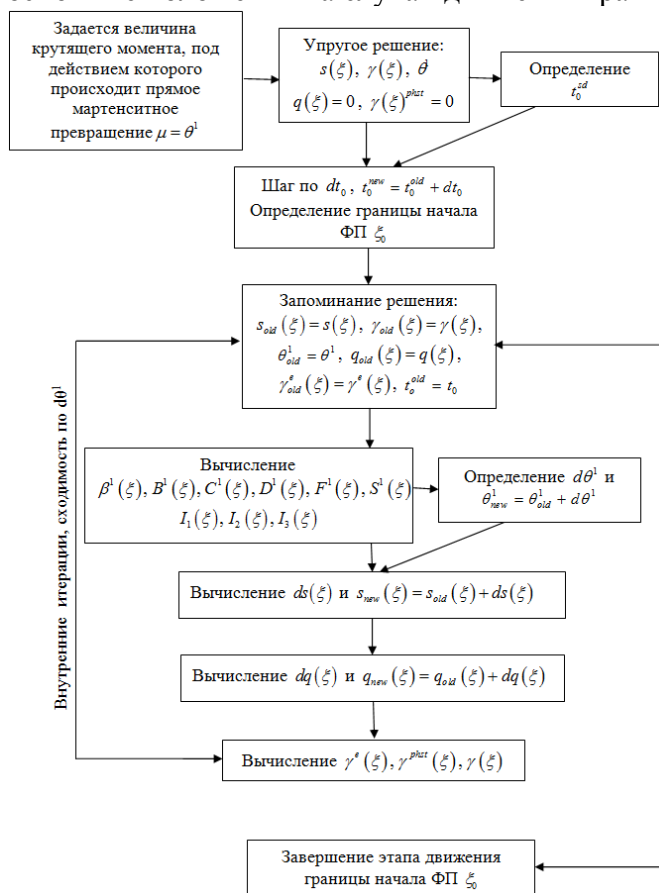


Схема 1 – Алгоритм решения задачи.

При решении задачи использованы приведенные ранее параметры материала, такие как:  $\lambda$ ,  $s_{0A}$  и пр., соответствующие СПФ типа равноатомного никелида титана. Принимается, что  $f(q) = a_0 = 0$ ,  $\delta S_0 = 0,1288$ . На рисунках 4а и 4б приведены эпюры безразмерных напряжений  $s - \xi$ , полученные при решении поставленной задачи для стержня сплошного круглого поперечного сечения. Моделирование выполнено при величине  $\mu = 2M / \pi G_A R^3 = 0,002$  и  $0,01$  соответственно. Пунктирные линии на рисунках соответствует этапу движения границы начала ФП до нейтральной линии стержня, сплошные – этапу движения границы завершения ФП. Сплошная жирная линия – решение соответствующей упругой задачи. Как видно из приведенных рисунков, в процессе охлаждения стержня напряжения по его сечению меняются немонотонно. Кроме этого, в процессе протекания ПМП наблюдается существенная перегрузка внешних слоев стержня при разгрузке внутренних.

Отмеченные явления происходят тем интенсивнее, чем выше величина  $\mu$ , под действием которого протекает ПМП. При этом рост напряжений в крайнем волокне стержня

может привести к разрушению рассматриваемого элемента из СПФ, что недопустимо в процессе эксплуатации изделия. Кроме этого, следует отметить, что при больших значениях  $\mu$  внутренняя часть сечения стержня не включается в работу, рисунок 4б.

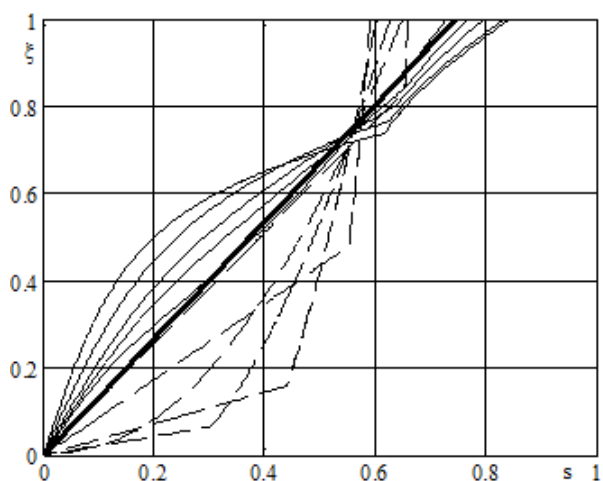


Рисунок 4а – Эпюры  $s-\xi$ ,  $\mu = 0,002$ .

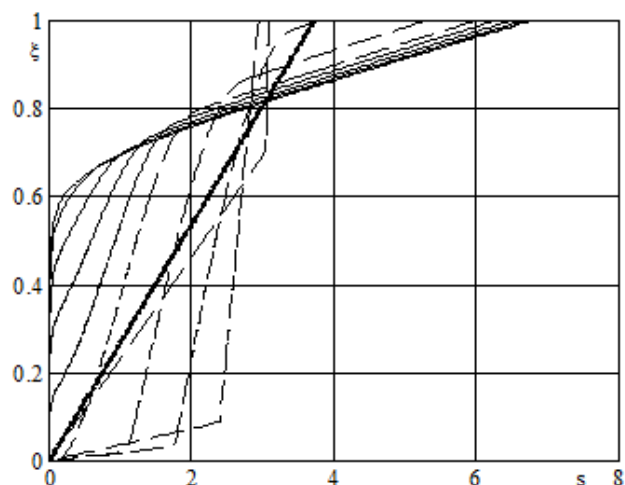


Рисунок 4б – Эпюры  $s-\xi$ ,  $\mu = 0,01$ .

На рисунках 5а и 5б приведено сравнение эпюр  $s-\xi$  на момент окончания ПМП, полученных при решении рассматриваемой в данном параграфе задачи, в связанной, с учетом протекания структурного перехода, и несвязанной постановках соответственно.

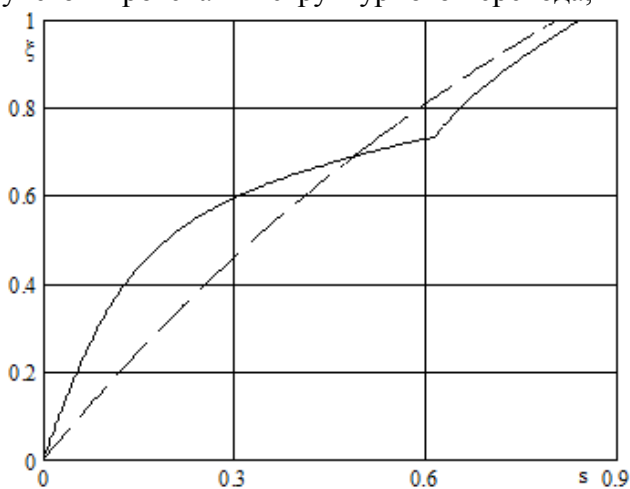


Рисунок 5а – Эпюры  $s-\xi$ ,  $\mu = 0,002$ .

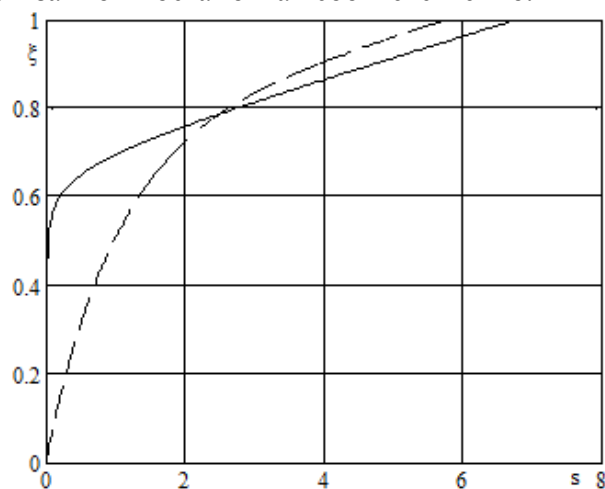


Рисунок 5б – Эпюры  $s-\xi$ ,  $\mu = 0,01$ .

Из приведенных выше рисунков видно, что учет термомеханической связанности существенно меняет характер решения рассматриваемой задачи. Кроме этого, можно заключить, что в рамках данного термомеханического процесса не выполняется положение об АППН. Поэтому дифференциальные определяющие соотношения не могут быть приведены к виду конечных соотношений по аналогии с задачей о ПМП в тонкостенной трубке из СПФ.

На рисунке 6 приведены кривые  $t_0 - \theta^I$ , отражающие зависимость решения задачи от учета или не учета структурного превращения. Пары приведенных кривых соответствуют значению  $\mu = 0,001; 0,002; 0,003; 0,005; 0,008; 0,01$  снизу вверх (верхняя кривая – учет структурного перехода, нижняя – без учета). Для  $\mu = 0,001; 0,008$  и  $0,01$  кривые практически совпадают. Как видно из приведенного рисунка, учет структурного перехода наиболее актуален для средних значений моментов.

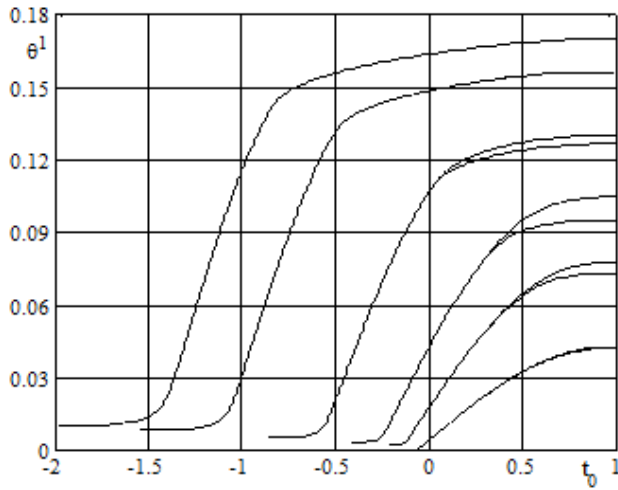


Рисунок 6 – Зависимости  $t_0 - \theta^1$ .

Кроме этого, в данном параграфе проведено сравнение результатов моделирования задачи о ПМП в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ для двух вариантов аппроксимации диаграммы ФП. Первая зависимость соответствует соотношению (8), вторая имеет вид, приведенный ниже:

$$q = (1 - \cos(\pi t_\sigma)) / 2 \quad (21)$$

Достоверность приведенных в данном параграфе результатов подтверждается согласованностью приведенных решений с аналитическим решением соответствующих задач в несвязанной постановке в предположении о равномерном распределении параметра фазового состава по сечению образца в процессе охлаждения.

Глава 4 посвящена решению неизотермической задачи об обратном термоупругом мартенситном ФП, протекающем в стержнях и трубках из СПФ под действием постоянного и переменного крутящего момента.

В пункте 4.1 рассматривается задача об обратном термоупругом мартенситном ФП, протекающем в тонкостенной трубке из СПФ под действием постоянного крутящего момента после прямого превращения под действием того же значения момента. Данный термомеханический процесс моделирует рабочий ход активного элемента актуатора или привода. Так как для данной задачи справедливо положение об АППН, а также все принятые ранее гипотезы параграфа 3.1, то уравнение для полных деформаций системы как для прямого, так и для обратного ФП будет иметь вид соотношения (5). При этом материал трубки из СПФ будет проходить один и тот же термомеханический путь деформирования в координатах  $\gamma - q$ .

Параграф 4.2 посвящен решению задачи об обратном термоупругом мартенситном ФП в толстостенной трубке и стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, находящихся под действием постоянного крутящего момента. Искомыми величинами по-прежнему выступают распределения напряжений, деформаций и параметра фазового состава по сечению стержня/трубки.

При обратном фазовом переходе для  $q$  справедлив следующий блок уравнений:

$$q = \sin(\pi t_\sigma / 2), \quad t_\sigma = 1 - (A_s^\sigma - T) / (A_s^0 - A_f^0), \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij}{}^{phst} / (q \Delta S_0) \quad (22)$$

Безразмерное уравнение для вычисления приращения параметра фазового состава записывается следующим образом:

$$dq = S^1 ds / q - B^1 dt_0, \quad S^1 = \beta^1 (\gamma^{phst} / q + A^1) \quad (23)$$

$$B^1 = -(\pi \sqrt{1 - q^2}) / 2, \quad A^1 = \sqrt{3} \rho_d \Phi'_2(s) s, \quad dt_0 = -dT / (A_s^0 - A_f^0), \quad \delta S_0 = (A_f^0 - A_s^0) \Delta S_0 / \sigma_0 \quad (24)$$

Приращения безразмерных напряжений в аустенитной зоне и области протекания фазово-структурного перехода определяются на основе приведенных ниже соотношений:

$$ds = \sqrt{3}\xi d\theta^1 / s_{0A}, \quad ds = \sqrt{3}(\xi d\theta^1 + B^1 D^1 dt_0) / (F^1 + D^1 S^1) \quad (25)$$

$$D^1 = (\lambda - 1) s s_{0A} / \sqrt{3} + \gamma^{phst} / q, \quad F^1 = s_{0A} + s_{0A} q (\lambda - 1) + 3\rho_d q \Phi_2'(s) \quad (26)$$

Безразмерное уравнение, связывающее приращение крутки и приращение крутящего момента, имеет следующий вид:

$$d\theta^1 = \frac{I_3}{(\xi_{00}^4 - J^4) / 4s_{0A} + I_1 + I_2} \quad (26)$$

$$I_1 = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi^3}{F^1 + D^1 S^1} d\xi, \quad I_2 = \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi^3}{F^1} d\xi, \quad I_3 = dt_0 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{D^1 B^1 \xi^2}{F^1 + D^1 S^1} d\xi \quad (27)$$

Соотношение (26) верно для толстостенных трубок из СПФ, для стержней необходимо положить равным нулю параметр  $J$ . Величина безразмерного параметра температуры, при котором в рассматриваемой точке сечения начинается ОМП, определяется на основе соотношения, приведенного ниже:

$$t_0 = 1 - \gamma^{phst} s / \sqrt{3} q \delta S_0 \quad (28)$$

Уравнения для вычисления деформаций системы идентичны соотношениям (20). Алгоритм решения задачи об обратном ФП под действием постоянного крутящего момента един как для стержня, так и для трубки из СПФ и в целом аналогичен алгоритму задачи о ПМП, изложенному в пункте 3.2.

На рисунке 7 приведены зависимости  $t_0 - \theta^1$ , полученные при решении задачи об ОМП, протекающем в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ при постоянном крутящем моменте. Кривые приведены парами для значений  $\mu = 0,001; 0,002; 0,003; 0,005; 0,008; 0,01$  снизу вверх. Пунктирная кривая соответствует учету структурных деформаций, сплошная – получена без учета. На рисунке 8 приведены эпюры  $s - \xi$ , соответствующие  $\mu = 0,002$ . Данные эпюры получены из решения, не учитывающего структурного превращения.

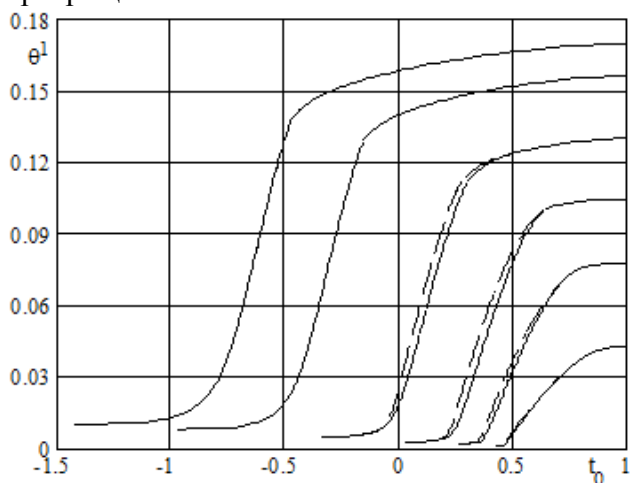


Рисунок 7 – Зависимости  $t_0 - \theta^1$ .

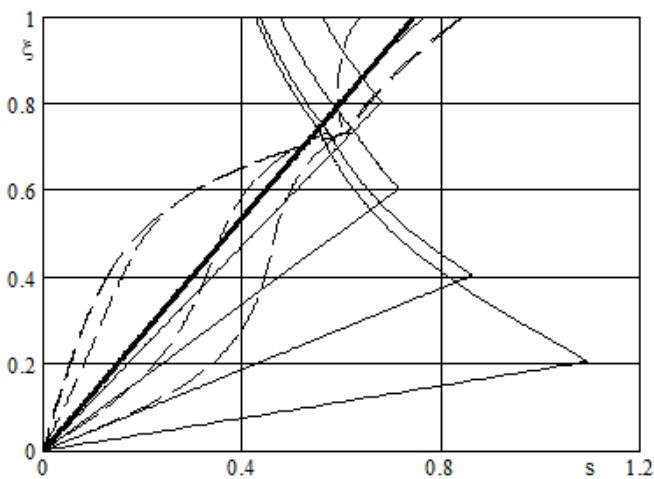


Рисунок 8 – Эпюры  $s - \xi$ ,  $\mu = 0,002$ .

В ходе решения установлено, что в процессе нагрева стержня напряжения по его сечению меняются немонотонно. При этом максимальный уровень напряжений отмечается не в конечной точке процесса, а на момент, когда в сечении стержня находится в двухфазном состоянии. Данный факт является важной особенностью термомеханического поведения СПФ, которое необходимо учитывать при проектировании актуаторов и силовозбудителей крутящего момента. Показано, что учет структурного превращения наиболее существенен для средних значений моментов и в значительной степени разгружает внутреннюю часть сечения, рисунки 9а, 9б. Здесь сплошная линия получена с учетом структурного перехода, штриховая – без учета.

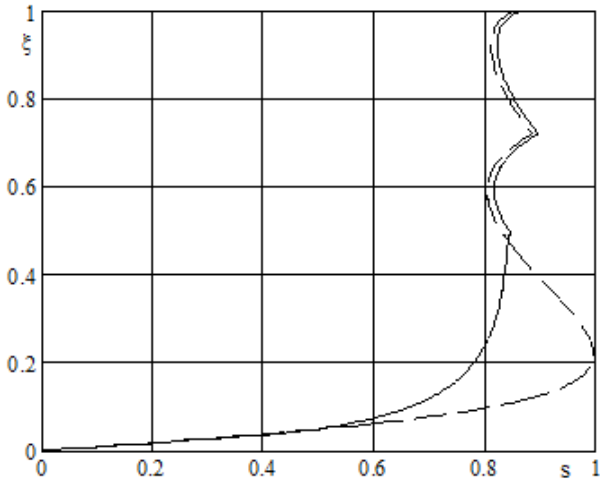


Рисунок 9а – Эпюры s-ξ, μ = 0,003.

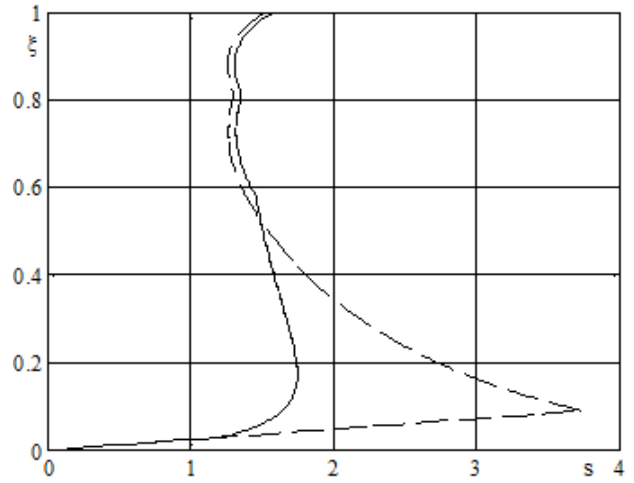


Рисунок 9б – Эпюры s-ξ, μ = 0,005.

Результаты, приведенные в данном параграфе, получены в рамках блока уравнений (22) для параметра фазового состава. Однако, как и в случае прямого превращения, рассмотрению подлежит случай, когда величина объемной доли мартенситной фазы определяется на основе соотношения (21).

В пункте 4.3 приводится решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающем при стесненном деформировании. В качестве базовой системы уравнений и алгоритма решения поставленной задачи используются положения, приведенные ранее на случай ОМП, протекающем под действием постоянного крутящего момента. При этом рассмотрению подлежат обратное превращение с упругим контртелом и в заневоленном состоянии. Контртело имеет такую же форму и размеры, что и рабочее тело из СПФ.

В случае ОМП с упругим контртелом модифицируется только безразмерное уравнение, связывающее приращение крутки и крутящего момента, которое в общем случае имеет следующий вид:

$$d\theta^1 = -4s_{0e}I_3 / 1 \left( +4 \left[ \lambda_e \xi_{00}^4 / 4 + s_{0e}I_1 + s_{0e}I_2 \right] \right) \quad (29)$$

$$I_1 = \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{\xi^3}{F^1 + D^1 S^1} d\xi, \quad I_2 = \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi^3}{\lambda_{me} s_{0e} + 3\rho_d q \Phi'_2(s)} d\xi, \quad I_3 = dt_0 \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{D^1 B^1 \xi^2}{F^1 + D^1 S^1} d\xi \quad (30)$$

Здесь  $s_{0e} = \sigma_0 / G$ , где  $G$  – модуль сдвига материала контртела. Остальные соотношения не изменяются по сравнению с пунктом 4.2.

В случае ОМП в заневоленном состоянии приращение крутки в процессе нагрева равно нулю. Тогда уравнение (29) записывается, как приведено ниже:

$$d\mu = 4s_{0A} dt_0 \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \left( D^1 B^1 \xi^2 / (F^1 + D^1 S^1) \right) d\xi \quad (31)$$

Кроме этого, изменению подвергается соотношение для определения приращения напряжений в области, где протекает фазово-структурный переход, новый вид которого приведен ниже:

$$ds = \sqrt{3} B^1 D^1 dt_0 / (F^1 + D^1 S^1) \quad (32)$$

В ходе работы рассмотрено четыре варианта материала контртела, отличающихся своими механическими свойствами. При этом варьировалась величина безразмерной жесткости контртела на кручение  $G / G_M = \lambda_{me}$ . Рассмотрены случаи  $\lambda_{me} = 1; 2,57; 3; 7,5$ .

В ходе решения установлено, что повышение жесткости контртела на кручение приводит к уменьшению восстанавливаемых деформаций при ОМП. При этом в процессе нагрева стержня из СПФ большинство его сечения испытывает рост напряжений вследствие противодействия контртела, что приводит к росту величины крутящего момента и



необходимости учета при решении структурного превращения. При этом данный рост тем интенсивнее, чем больше величина  $\lambda_{me}$ .

В случае ОМП в заневоленном состоянии установлено, что в процессе нагрева все сечение стержня испытывает рост напряжений. Этот рост напряжений («реактивные напряжения») приводит к увеличению значения крутящего момента в процессе нагрева стержня из СПФ. При этом интенсивность роста величины крутящего момента значительно больше по сравнению со случаем ОМП с контртелом. Так ОМП в заневоленном состоянии можно трактовать как ОМП с бесконечно жестким контртелом  $\lambda_{me} = \infty$ .

Достоверность приведенных в данной главе результатов подтверждается их сходимостью к аналитическому решению задачи об ОМП в несвязанной постановке, полученных в предположении о равномерном распределении параметра фазового состава по сечению образца из СПФ.

Глава 5 посвящена рассмотрению задач кручения тонкостенных трубок из СПФ в режиме сверхупругости.

В пункте 5.1 получено решение задачи об изотермическом кручении тонкостенных трубок из СПФ в режиме сверхупругости. В качестве базовой постановки задачи устанавливается следующая система положений. Считается, что нагружение/разгрузка трубки осуществляется достаточно медленно, так что температура трубки из СПФ  $T$ , в рамках данных процессов, не изменяется и равна температуре окружающей среды  $T_{env}$ . Принимается, что трубка является тонкостенной, тогда градиент напряжений и температуры по ее толщине равен нулю.

Для определения параметра фазового состава используется следующий блок уравнений:

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t_\sigma)), \quad t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0} \text{ при } dq > 0, \quad t_\sigma = \frac{A_f^\sigma - T}{A_f^0 - A_s^0} \text{ при } dq < 0 \quad (33)$$

$$M_{s,f}^\sigma = M_{s,f}^0 + \frac{s\omega^+(M_s^0 - M_f^0)}{\delta S_0}, \quad A_{s,f}^\sigma = A_{s,f}^0 + \frac{s\omega^-(A_f^0 - A_s^0)}{\delta S_0}, \quad \omega^- = \varepsilon'^{phst} / q \quad (34)$$

Приращение фазовых деформаций определяется как приведено ниже:

$$d\gamma^{ph} = \sqrt{3}\omega^+ dq \text{ при } dq > 0; \quad d\gamma^{ph} = \sqrt{3}\omega^- dq \quad (35)$$

Здесь  $\omega^+$  определяется на основе второго соотношения (9), а  $\omega^-$  в соответствии с (34).

Приращение структурных деформаций, как при прямом, так и при обратном превращении равно:

$$d\gamma^{st} = 3\rho_d q \Phi_2'(s) ds \text{ при } d\tau > 0 \text{ и } s \geq s^{\max} \quad (36)$$

иначе  $d\gamma^{st} = 0$ .

Для определения упругих деформаций системы справедливо второе соотношение (20).

Общий алгоритм решения задачи будет следующий. В начальный момент трубка из СПФ находится в аустенитом фазовом состоянии при температуре  $T_0 \geq A_f^0$ . Первым этапом решения является определение величины безразмерных напряжений  $s_{dir}^{cr}$  из первого соотношения (34), при которой инициируется ПМП. После того как напряжения превысят величину  $s_{dir}^{cr}$ , решение задачи принимает пошаговый характер. Совершается малый шаг по  $s$ ,  $ds > 0$ , и вычисляется новое значение самих напряжений  $s^{new} = s + ds$ . Далее, на основании (33,34) вычисляется величина параметра фазового состава  $q$ . После, согласно (20), вычисляются упругие деформации. На основании (35,36) определяются приращения фазово-структурных деформаций. Полные деформации системы есть сумма упругих и

фазово-структурных компонент. Процесс активного нагружения с шагом  $ds > 0$  продолжается до тех пор, пока параметр  $q$  не станет равным единице. После следует упругая разгрузка с мартенситным модулем. При этом шаг по напряжениям становится величиной отрицательной  $ds < 0$ . При достижении напряжением величины  $s_{rev}^{cr}$ , полученной из второго соотношения (34), инициируется, вызванное падением напряжений, ОМП. В ходе данного этапа снимаются неупругие деформации (36), и по его завершению в трубке из СПФ отсутствуют фазово-структурные деформации, а  $q = 0$ . Последующее снижение напряжений приводит к упругой разгрузке с аустенитным модулем.

На рисунках 10а, 10б приведены кривые сверхупругости  $s - \gamma$ . На рисунке 10а кривые соответствуют экспоненциальному распределению для функции  $F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s)$ , а на рисунке 10б – распределению Лапласа  $F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = \text{erf}(s / \sqrt{2})$ . Представленные кривые сверхупругости соответствуют начальной температуре трубки  $T_0$  в 343, 353 и 363 К сверху вниз соответственно и  $F_2(\sqrt{3}\tau) = \Phi_2(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s^2)$ .

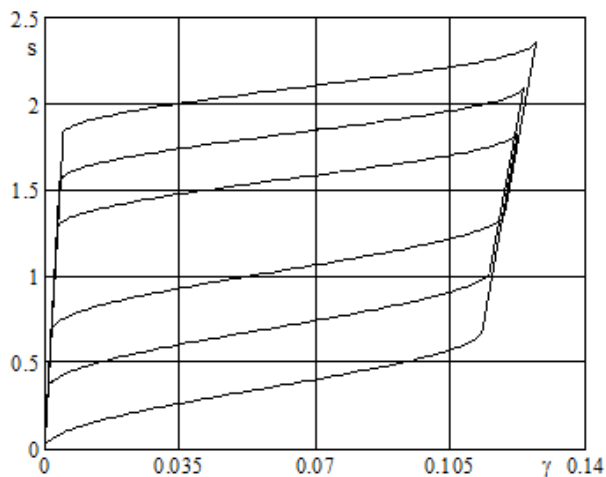


Рисунок 10а – Кривые  $s - \gamma$ ,  $\Phi_1 = 1 - \exp(-s)$ .

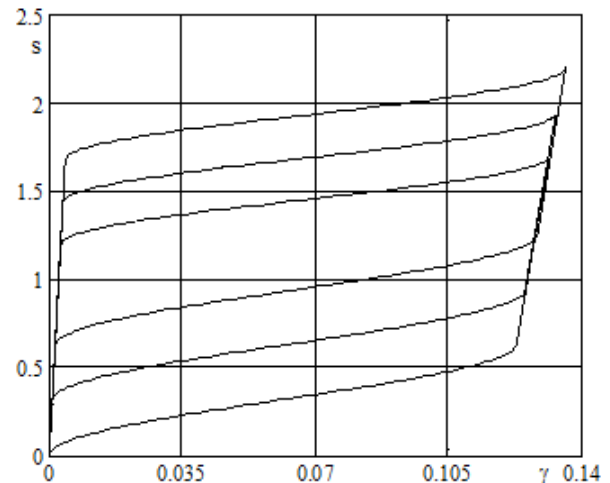


Рисунок 10б –  $s - \gamma$ ,  $\Phi_1 = \text{erf}(s/\sqrt{2})$ .

Как видно из приведенных рисунков, повышение  $T_0$  приводит к росту напряжений начала и окончания ФП. При этом величина накапливаемой фазово-структурной деформации на момент окончания ПМП не существенно зависит от значения  $T_0$ .

Пункт 5.2 посвящен решению дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из СПФ в режиме сверхупругости. При этом остаются правомерны основные положения, принятые в предыдущем параграфе. Однако температура трубки из СПФ в процессе нагружения может изменяться из-за следующих факторов: выделения/поглощения латентного тепла ФП, механической диссипации и теплообмена с окружающей средой. Тогда актуальная температура трубки из СПФ должна быть определена из уравнения энергетического баланса.

В простейшем варианте в уравнении энергетического баланса не учитываются слагаемые, отвечающие за механическую диссипацию, связанную как с фазовым, так и со структурным переходами. Тогда, вводя в уравнение энергетического баланса слагаемое, связанное с конвективным теплообменом с окружающей средой, можно получить:

$$C_\sigma \dot{T} - \Delta U_0 \dot{q} + h_\infty \Delta T / \delta = 0 \quad (37)$$

Здесь верхний индекс « $\cdot$ » обозначает производную по времени  $t$ ,  $C_\sigma$  – теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении,  $\Delta U_0$  – скачок объемной плотности внутренней энергии при переходе от мартенситного фазового состояния в аустенитное для

отсчетной температуры  $T$ ,  $h_\infty$  – коэффициент теплопередачи. Дальнейшая конкретизация уравнения (37) требует формулировки выражения для параметра фазового состава  $q$ .

В рамках первой модели аппроксимации диаграммы ФП считается, что  $q$  является линейной функцией текущей температуры и соответствующих температур ФП. При этом температуры ФП являются линейными функциями интенсивности напряжений:

$$q = (M_s^\sigma - T) / (M_s^0 - M_f^0) \text{ при } dq > 0 \text{ и } q = (A_f^\sigma - T) / (A_f^0 - A_s^0) \text{ при } dq < 0 \quad (38)$$

$$M_{s,f}^\sigma = M_{s,f}^0 + k\sigma_i = M_{s,f}^0 + k\sqrt{3}\tau, \quad A_{s,f}^\sigma = A_{s,f}^0 + k\sigma_i = A_{s,f}^0 + k\sqrt{3}\tau \quad (39)$$

Тогда, решая дифференциальное уравнение (37) с учетом (38,39) на случай ПМП ( $T(0) = T_{env}$ ) можно получить, что температура трубки из СПФ изменяется по приведенному ниже закону:

$$T(t) = T_{env} + A(1 - \exp(-t/B)), \quad A = \sqrt{3}H_\infty^{-1}\delta_1U_0k\lambda, \quad B = H_\infty^{-1}D_u \quad (40)$$

$$H_\infty = h_\infty / \delta, \quad \delta_1U_0 = \Delta U_0 / (M_s^0 - M_f^0), \quad \lambda = \tau / t, \quad D_u = C_\sigma + \delta_1U_0 \quad (41)$$

Здесь  $k$  – коэффициент влияния действующих напряжений на температуры ФП,  $\lambda$  – скорость нагружения.

При упругой мартенситной разгрузке температура трубки из СПФ находится из следующего соотношения:

$$T(t) = T_{env} + \exp(-F_c t)(T_{direct} - T_{env}), \quad F_c = H_\infty / C_\sigma \quad (42)$$

Здесь  $T_{direct}$  – температура трубки из СПФ на момент окончания ПМП.

При ОМП для определения температуры трубки также используется блок уравнений (40,41). Однако скорость нагружения становится величиной отрицательной  $\lambda < 0$ . Начальное условие для решения отмеченной системы уравнений будет имеет следующий вид:  $T(0) = T_{unload}$ . Здесь  $T_{unload}$  – температура трубки из СПФ на момент окончания упругой мартенситной разгрузки.

В рамках второй модели считается, что влияние внешних напряжений на характерные температуры ФП имеет нелинейный характер в соответствии с зависимостями (34). Тогда на случай ПМП без учета диссипативных слагаемых уравнение энергетического баланса, разрешенное относительно приращения температуры, запишется, как приведено ниже:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U_1 \left( \sqrt{3}\lambda\rho_d \left( 1 - \exp(\lambda t) - \sqrt{3}\lambda t \exp(\lambda t) \right) \right) - H_\infty \Delta T}{D_u} \quad (43)$$

$$U_1 = \delta_1U_0 / \Delta S_0, \quad \lambda_1 = -\sqrt{3}\lambda / \sigma_0 \quad (44)$$

При упругой мартенситной разгрузке справедливо уравнение (42). В случае ОМП температура трубки из СПФ находится путем решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U_2 \gamma_0^{phst} \lambda - H_\infty (T - T_{env})}{R_u}, \quad \delta_2U_0 = \frac{\Delta U_0}{A_f^0 - A_s^0}, \quad U_2 = \delta_2U_0 / \Delta S_0, \quad R_u = C_\sigma + \delta_2U_0 \quad (45)$$

В модели номер три используется нелинейная аппроксимация диаграммы ФП в соответствии с зависимостями (33,34). Тогда на случай ПМП уравнение энергетического баланса примет следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta U_0 \beta A \lambda - H_\infty (T - T_{env})}{(C_\sigma + \Delta U_0 \beta \Delta S_0)} \quad (46)$$

$$\beta = \pi \sqrt{q(1-q)} / (\Delta S_0 (M_s^0 - M_f^0)), \quad A = \sqrt{3}\rho_d \left( 1 - \exp(\lambda t) - \sqrt{3}\lambda t \exp(\lambda t) \right) \quad (47)$$

При ОМП температура трубки из СПФ будет определяться из следующей системы уравнений:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta U_0 \beta_1 \gamma_0^{phst} \lambda - H_\infty (T - T_{env})}{(C_\sigma + \Delta U_0 \beta_1 \Delta S_0)}, \quad \beta_1 = \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{\Delta S_0 (A_f^0 - A_s^0)} \quad (48)$$

В рамках четвертой модели предполагается учет диссипативных слагаемых в уравнении энергетического баланса. При этом для определения температур ФП и параметра фазового состава справедливы соотношения (33,34). Тогда на случай ПМП уравнение энергетического баланса, разрешенное относительно приращения температуры, будет иметь следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(\Delta U_0 + \rho_d \sqrt{3} \lambda t (1 - \exp(-\lambda_1 t))) \beta A \lambda + Z - H_\infty (T - T_{env})}{C_\sigma + (\Delta U_0 + \rho_d \sqrt{3} \lambda t (1 - \exp(-\lambda_1 t))) \beta \Delta S_0}, \quad Z = 6 \rho_d q \lambda_1^2 t^2 \exp(-\lambda_1^2 t^2) \lambda \quad (49)$$

здесь  $\beta$  и  $A$  определяются на основе соотношения (47) соответственно.

При ОМП уравнение энергетического баланса имеет следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(\Delta U_0 + \gamma_0^{phst} \lambda t) \beta_1 \gamma_0^{phst} \lambda - H_\infty (T - T_{env})}{C_\sigma + (\Delta U_0 + \gamma_0^{phst} \lambda t) \beta_1 \Delta S_0} \quad (50)$$

где  $\beta_1$  определяется на основе второго соотношения (48).

Алгоритм решения задачи в рамках четырех моделей поведения СПФ будет идентичен для каждой из приведенных моделей и аналогичен алгоритму решения изотермической задачи за той разницей, что после определения величины действующих напряжений и временного интервала, за которое она была достигнута, определяется актуальная температура трубки из СПФ. При решении задачи использованы аналогичные параметры материала трубки, соответствующие СПФ типа равноатомного никелида титана, что и в случае изотермической задачи. Однако при построении решения были введены дополнительные константы материала и геометрические параметры трубки, такие как:  $\delta_1 U_0 = \delta_2 U_0 = 4,8 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К),  $D_u = 8 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К),  $\delta = 1$  мм. При этом в качестве функций распределения интенсивности микронапряжений использовались экспоненциальное распределение для функции  $F_1$ , так что  $F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau/\sigma_0) = 1 - \exp(-s)$  и распределение Вейбулла для функции  $F_2$  –  $F_2(\sqrt{3}\tau) = \Phi_2(\sqrt{3}\tau/\sigma_0) = 1 - \exp(-s^2)$ . На рисунках 11а,11б приведены кривые сверхупругости  $s - \gamma$  и зависимости безразмерный параметр температуры  $t_0 = T/T_{env}$  – объемная доля мартенситной фазы  $q$  для четырех моделей материала трубки. Здесь сплошная жирная линия соответствует решению изотермической задачи, сплошная тонкая линия получена при использовании модели №1, штриховая – модели №2, пунктирная – модели №3 и штрихпунктирная – модели №4. Проведенное моделирование выполнено для  $\lambda = 0,5$  МПа/с,  $h_\infty = 20$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) (свободная конвекция с воздухом),  $T_{env} = 343$  К.

Из рисунка 11а видно, что решение рассматриваемой в данном параграфе задачи в дважды связанной постановке качественно отличается от изотермического решения. В ходе нагружения/разгрузки трубки из СПФ отмечается существенное изменение ее температуры, что приводит к повышению уровня напряжений окончания ПМП при активном нагружении и остаточным деформациям по завершению ОМП при отмеченных выше исходных данных. Так, рост температуры при ПМП, рисунок 11б, обусловлен выделением латентного тепла ФП, а также диссипативными эффектами. При этом максимальное значение напряжений на момент окончания ПМП наблюдается при использовании модели №4. Из рисунка 11б видно, что характер приведенных кривых значительно зависит от использованной модели поведения материала. Так, переход к нелинейной зависимости для аппроксимации диаграммы ФП значительно снижает значение температуры в процессе протекания ПМП,

однако конечное значение температуры весьма близко для всех четырех рассматриваемых моделей.

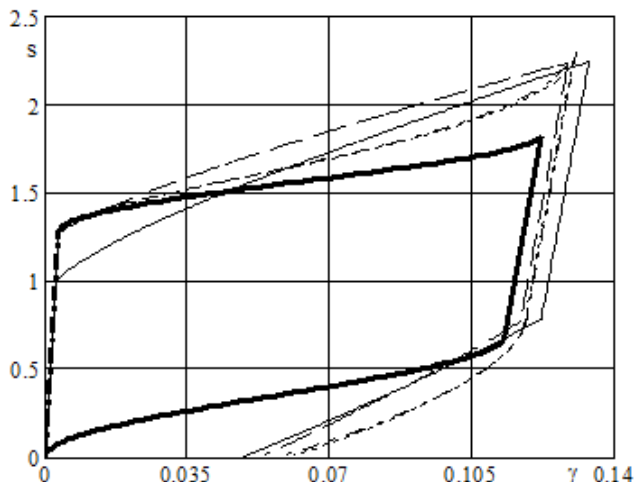


Рисунок 11а – Кривые сверхупругости  $s$ - $\gamma$ .

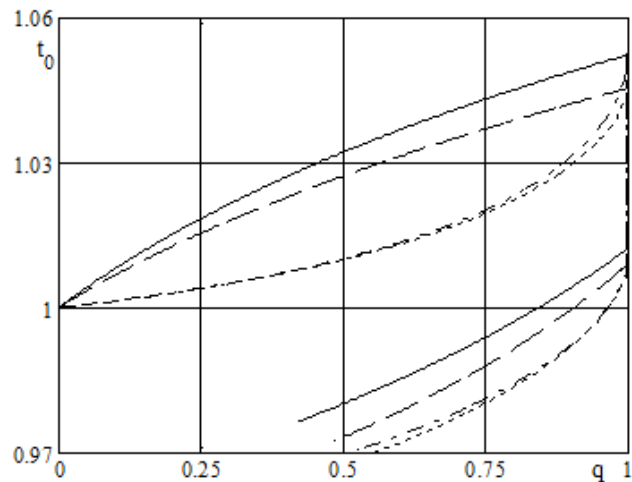


Рисунок 11б – Зависимости  $t_0$ - $q$ .

На рисунке 12а приведены кривые сверхупругости для различных скоростей нагружения при  $h_{\infty} = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  и  $T_{env} = 343 \text{ К}$ . Здесь сплошная жирная линия представляет собой решение адиабатической задачи, которую можно трактовать как задачу с бесконечно большой скоростью нагружения в отсутствии теплообмена с окружающей средой. Сплошная тонкая линия соответствует  $\lambda = 0,1 \text{ МПа}/\text{с}$ , штриховая –  $\lambda = 0,5 \text{ МПа}/\text{с}$ , пунктирная –  $\lambda = 1 \text{ МПа}/\text{с}$ , штрихпунктирная –  $\lambda = 2 \text{ МПа}/\text{с}$ . При моделировании использована модель №4.

Из рисунка 12а видно, что повышение скорости нагружения приводит к увеличению величины напряжений на момент окончания ПМП, а также снижению остаточных фазово-структурных деформаций. Данные явления объясняются существенным нагревом трубки из СПФ в процессе нагружения, рисунок 12б. При этом максимальный уровень напряжений на момент окончания ПМП наблюдается при адиабатическом решении. Кроме этого, в данном случае кривая сверхупругости получается замкнутой, в отличие от решений, полученных при конечной скорости нагружения. Однако диссипация энергии (площадь под кривой сверхупругости) при этом минимальна. Следует также отметить, что за цикл разгрузки температура трубки из СПФ успевает опуститься ниже величины  $A_f^0$ , о чем свидетельствует факт незамкнутости кривых сверхупругости при конечных скоростях нагружения.

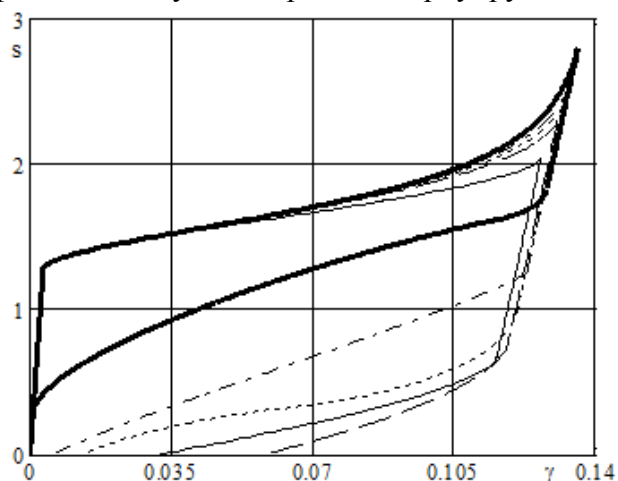


Рисунок 12а – Кривые сверхупругости  $s$ - $\gamma$ .

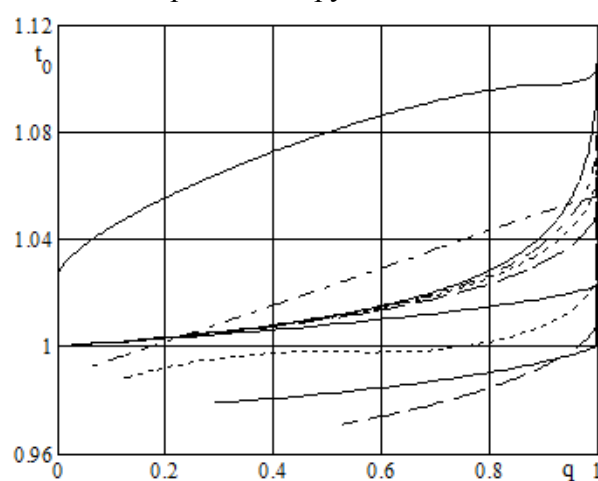


Рисунок 12б – Зависимости  $t_0$ - $q$ .

В ходе решения поставленных задач был выявлен ряд важных с фундаментальной точки зрения положений, определяющих термомеханический отклик СПФ при кручении в режиме сверхупругости. Достоверность приведенных в данной главе результатов подтверждается сходимостью решения в дважды связанной термомеханической постановке к решению изотермической задачи, имеющий аналитический вид.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. При прямом мартенситном превращении в толстостенных трубках и стержнях из СПФ ( $M=\text{const}$ ) отмечается перераспределение напряжений по сечению образца из СПФ. Наблюдается существенная перегрузка внешних слоев, при разгрузке внутренних. Данное явление тем интенсивнее, чем выше величина  $M$ , под действием которого происходит прямое мартенситное превращение.

2. При учете структурного перехода перегрузка внешней части сечения уменьшается и повышается величина накапливаемой за процесс охлаждения деформации.

3. Для больших значений крутящего момента внутренняя часть сечения стержня из СПФ не включается в работу. Отклик трубки с отношением радиусов  $J=0.5$  весьма близок к отклику стержня.

4. При обратном мартенситном превращении в толстостенных трубках и стержнях из СПФ ( $M=\text{const}$ ) установлено, что максимальный уровень напряжений наблюдается не в конечной точке процесса, как это традиционно считается, а когда сечение находится в двухфазном состоянии.

5. В процессе нагрева наблюдается перегрузка внутренних, не лежащих на оси, слоев стержня. Данный факт, как и перегрузку внешних слоев стержня при прямом мартенситном превращении необходимо учитывать при оценке прочности изделий из СПФ. Учет структурного перехода значительно снижает уровень напряжений в сечении. Традиционно в задачах об обратном мартенситном превращении структурный переход не учитывался.

6. При рассмотрении задачи о сверхупругом поведении тонкостенной трубки в дважды связанной термомеханической постановке установлено, что с увеличением скорости изменения касательных напряжений диаграмма нагружения повышается. Решение данной задачи в изотермической постановке может привести к неверным количественным оценкам НДС изделия из СПФ.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

### Статьи в журналах из списка ВАК РФ:

1. Саганов Е.Б. Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 454-468.
2. Саганов Е.Б. Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 4. – С. 663-674.
3. Саганов Е.Б. Анализ напряженно-деформированного состояния торсионного актуатора из сплава с памятью формы при рабочем ходе в условиях стесненного деформирования // Вестник Московского Авиационного Института. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 109-116.
4. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы // Ученые записки казанского университета. Серия: физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 3. – С. 97-110.
5. Саганов Е.Б. Решение дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, №4. – С. 549-563.
6. Саганов Е.Б. Моделирование процессов фазовых и структурных переходов при кручении тонкостенных трубок из сплава с памятью формы // Машиностроение и инженерное образование. – 2016. – №1. – С. 2-9.0

#### **Прочие публикации по тематике диссертационной работы:**

7. Саганов Е.Б. Применение конечно-элементного комплекса MSC Marc для моделирования термомеханических процессов, протекающих в сплавах с памятью формы // Сборник трудов XVI Российской конференции пользователей программных комплексов MSC Software. – Москва, 21-22 мая 2013 г. – 81 с.
8. Мовчан А.А., Машихин А.Е., Саганов Е.Б. Задачи предельного деформирования для элементов из сплавов с памятью формы // Тезисы докладов 2-ой Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем» – Москва, 17-19 декабря 2013 г. – С. 48-49.
9. Саганов Е.Б. Решение связанных задач кручения для сплавов с памятью формы // Тезисы докладов «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел» – научное наследие Ю.Н. Работнова – Москва, 24-26 февраля 2014 г. – С. 90-91.
10. Мовчан А.А., Мишустин И.В., Машихин А.Е., Саганов Е.Б. Краевые задачи механики деформируемого твердого тела для сплавов с памятью формы // Материалы Международной конференции «Сплавы с памятью формы: свойства, технологии, перспективы» – Витебск, 26-30 мая, 2014 г. – С. 160-162.
11. Саганов Е.Б. Решение задачи об обратном фазовом переходе для стержней из сплава с памятью формы // Сборник трудов XXVI Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов МИКМУС 2014 – Москва, 17-19 декабря 2014 г. – С. 48-52.
12. Мовчан А.А., Казарина С.А., Климов К.Ю., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы // Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики – Казань, 20-24 августа 2015 г. – С. 2601-2604.
13. Саганов Е.Б. Решение задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режимах мартенситной неупругости и сверхупругости // Труды XXVII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов МИКМУС 2015 – Москва, 2-4 декабря 2015 г. – С. 36-39.
14. Саганов Е.Б. Влияние скорости нагружения на сверхупругое поведение тонкостенной трубки из сплава с памятью формы при кручении // Сборник материалов Всероссийской конференции «Механика композиционных материалов и конструкций» – Москва, 15-17 декабря 2015 г. – С. 273-275.
15. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Левин А.С., Саганов Е.Б. Жестко-фазово-структурный анализ для элементов из сплавов с памятью формы // Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина – Москва, 20-21 января 2016 г. – С. 100-104.