На правах рукописи

Царьков Кирилл Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА, НЕЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»,
05.13.01 — «Системный анализ,
управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре Математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Научный руководитель:	**Хрусталев Михаил Михайлович** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией №45 «Математических методов исследования оптимальных управляемых систем» ИПУ РАН
Официальные оппоненты:	**Миллер Борис Михайлович** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории №2 «Методов анализа и цифровой обработки изображений» ИППИ РАН
	Корепанов Эдуард Рудольфович кандидат технических наук, заведующий сектором ФИЦ ИУ РАН
Ведущая организация:	**ФГБУН «Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН»**

Защита состоится "__19__"____мая____ 2017 в _10_ ч. _00_ мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ.

Отзывы на автореферат, заверенные гербовой печатью организации, просьба направлять по указанному адресу в двух экземплярах.

Автореферат разослан "____"____________ 2017.

Учёный секретарь
Диссертационного совета Д 212.125.04
кандидат физико-математических наук Северина Н.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время существует обширный класс практических задач, связанных с управлением динамическими системами в условиях неполноты информации о положении в фазовом пространстве. Такая неполнота информации может быть обусловлена ограничениями, накладываемыми на измерительные устройства вследствие реализации специальных инженерных решений или вследствие возникновения технических неисправностей произвольного характера. Возможности управления этими системами существенно зависят от той информации, которая может быть получена путём измерения и обработки наблюдений.

К таким задачам относятся любые практические задачи, связанные с высоким риском возникновения технических неисправностей измерительных устройств. Кроме того, к ним относятся задачи управления пико- и наноспутниками, для которых установка высокоточных измерительных систем не является эффективной ввиду существенного увеличения массы, выводимой на орбиту. Отдельно стоит отметить задачи гидродинамического управления на основе агрегатов струйной техники, которым в последнее время уделяется повышенное внимание в контексте конструирования высоконадёжных систем управления критически важными объектами.

Особенное значение вопросы управления при неполной информации приобретают в том случае, когда динамическая система функционирует в условиях неопределённых внешних возмущений, которые по тем или иным причинам могут быть охарактеризованы как случайные процессы. Такая ситуация позволяет применить для математического моделирования рассматриваемой динамической системы стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа и поставить задачу оптимизации стратегии управления с неполной обратной связью. Дальнейшие результаты, отыскиваемые путём решения поставленной задачи оптимального управления, существенным образом зависят от класса полученного стохастического дифференциального уравнения и соответствующей динамической системы, которую оно описывает. Если в случае линейных стохастических систем соотношения для нахождения оптимальных линейных регуляторов широко известны, то в общем нелинейном случае могут быть записаны только аналитические соотношения, которым должно удовлетворять оптимальное управление, а не конкретные равенства или численные процедуры его поиска. Однако класс линейных стохастических систем неприменим для описания многих процессов управления из ряда практических приложений, указанных выше.

Таким образом, весьма актуальными являются получение аналитических результатов, построение численных методов и разработка комплекса программ для решения задач оптимизации процессов управления такими стохастическими системами, которые достаточно реалистично описывают широкий спектр встречающихся на практике проблем, и в то же время позволяют получить конструктивные соотношения и алгоритмы поиска оптимального решения по аналогии с линейными стохастическими системами. Если подходящий класс систем подобрать удаётся, то отдельным вопросом при этом становится проблема реализации полученной стратегии управления, так как она может иметь достаточно сложную структуру или не удовлетворять заданным техническим требованиям. Простая и известная наперёд структура функции управления является обязательным критерием для её успешной реализации на управляющем устройстве жёсткой фиксированной конструкции, например построенной на основе струйных технологий. В связи с этим возникает необходимость дополнительного исследования возможности синтеза оптимального управления в заранее суженном классе функций, удобных в реализации. Такое управление называется в работе субоптимальным.

Необходимость учёта неполноты информации о текущем состоянии системы является одной из ключевых особенностей рассматриваемой проблемы. Эта особенность отделяет такие задачи от классических задач поиска оптимального программного управления (информация о текущем состоянии отсутствует – Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко) и задач синтеза управления с полной обратной связью (имеется полная информация о векторе состояния в текущий момент времени – Р. Беллман). Исследованию такого класса задач посвящено огромное количество работ, среди которых можно выделить работы N.U. Ahmed, K.L. Teo, A. Bensoussan, M.H.A. Davis, P. Varaiya, W.H. Fleming, E. Pardoux, P.J. McLane, F. Carravetta, G. Mavelli, В.В. Семёнова, А.В. Пантелеева и многих других. В случае стохастических управляемых систем обычно исследуется зависимость вектора управления от части компонент вектора состояния (В.В. Семёнов, А.В. Пантелеев) или ситуация, при которой управляющему устройству известен дополнительный вектор измерений (управление по выходу), который также может содержать шумовые составляющие (P.J. McLane, F. Carravetta, G. Mavelli). Второй вариант также тесно связан с работами по задачам оценивания и фильтрации, среди которых можно выделить работы R.E. Kalman, R.S. Bucy, Р.Л. Стратоновича, В.С. Пугачёва, Е.А. Руденко.

Оба упомянутых варианта неполной информированности о состоянии характеризуются тем, что каждая компонента вектора управления зависит от одного и того же набора компонент вектора состояния. В отличие от этого, в работах М.М. Хрусталёва и Д.С. Румянцева рассматривается более общая постановка вопроса информированности, имеющая определённую связь и практическую применимость к задачам децентрализованного управления (Д. Шильяк, A. Saberi, H. Khalil). В этих работах рассматриваются информационные ограничения, при которых каждая компонента вектора управления зависит от своего заранее заданного набора компонент вектора состояния. В диссертационной работе под информационными ограничениями (неполнотой информации) понимается именно такая априорная зависимость каждой из компонент вектора управления от своего набора компонент вектора состояния.

М.М. Хрусталёв и Д.С. Румянцев сформулировали условия оптимальности в задаче оптимизации стратегий управления с информационными ограничениями для нелинейных управляемых систем диффузионного типа и конкретизировали их для линейных систем, правые части которых содержат линейные по состоянию и управлению слагаемые в матрице диффузии. Такие системы было предложено называть квазилинейными. В диссертационной работе дополнительно рассматривается более общий случай квазилинейных систем, коэффициенты сноса и диффузии которых могут быть нелинейными функциями вектора управления. В связи с этим квазилинейные системы, содержащие линейные по управлению коэффициенты, в работе называются обыкновенными квазилинейными системами. Различные отечественные и зарубежные авторы также применяют для их наименования такие термины, как «линейные системы с мультипликативными возмущениями», «linear systems with state- and control-dependent noise», «билинейные системы» и ряд других.

Сам термин «квазилинейные стохастические системы», понимаемый в указанном смысле, был введён Ю.И. Параевым и представляется достаточно удачным ввиду того, что он подчёркивает существенные отличия от широко изученных линейных стохастических систем, наиболее явно проявляющиеся на практике. Одними из первых работ, в которых исследовались задачи оптимизации стратегий управления квазилинейными стохастическими системами с непрерывным временем и их обобщениями, были работы Н.Н. Красовского, А.Б. Куржанского, Ю.И. Параева и В.М. Вонэма. В дальнейшем такими задачами при наличии полной информации о состоянии также занималось достаточно большое число авторов (см., например, работы М.Е. Шайкина). Гораздо меньше работ связано с задачами построения для квазилинейных систем оптимального управления с неполной обратной связью. Результаты, наиболее близкие к полученным в диссертации, сформулированы в работах P.J. McLane, F. Carravetta и G. Mavelli, однако в этих работах рассматривается менее общий случай информационных ограничений.

Целью диссертационной работы является разработка методов синтеза оптимальных стратегий управления квазилинейными стохастическими системами с информационными ограничениями, оптимального программного управления квазилинейными системами с нелинейными по управлению коэффициентами, а также субоптимального управления этими системами.

В соответствии с целью исследования ставятся следующие задачи:

1) исследовать класс математических моделей линейных по состоянию и управлению динамических стохастических систем диффузионного типа с мультипликативными возмущениями, в которых управление имеет вид линейного регулятора с неполной обратной связью (класс обыкновенных квазилинейных систем с информационными ограничениями);

2) формализовать и исследовать новый класс математических моделей линейных по состоянию динамических стохастических систем диффузионного типа, коэффициенты которых могут быть нелинейными функциями программного управления (класс квазилинейных систем, нелинейных по управлению);

3) получить необходимые условия оптимальности в задачах оптимизации:

   - стратегий управления обыкновенными квазилинейными системами с информационными ограничениями;

- программного управления квазилинейными системами, нелинейными по управлению;

4) получить необходимые условия субоптимальности (оптимальности в заранее суженном классе управлений) в данных задачах;

5) разработать численные методы поиска оптимального и субоптимального управления, основанные на процедуре градиентного спуска в функциональном пространстве;

6) разработать комплекс программ, реализующих эти численные методы;

7) при помощи полученных результатов провести решение ряда модельных примеров и прикладных задач оптимального управления и стабилизации движения.

Основным методом исследования является метод функций Ляпунова–Лагранжа, разработанный М.М. Хрусталёвым и являющийся развитием метода функций В.Ф. Кротова на стохастические управляемые системы.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты для квазилинейных задач, нелинейных по управлению, являются новыми, в частности, сформулированы и доказаны необходимые условия оптимальности; получены конструктивные соотношения для определения оптимального управления; разработан численный метод градиентного типа для поиска оптимального управления; разработаны алгоритмы поиска субоптимального управления; полученные результаты конкретизированы для задач оптимизации стратегий управления обыкновенными квазилинейными системами с информационными ограничениями.

Достоверность научных утверждений и выводов, представленных в диссертационной работе, подтверждена строгими математическими доказательствами, численными экспериментами, сравнением полученных результатов с уже существующими.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в получении конструктивных необходимых условий оптимальности и эффективных численных алгоритмов синтеза оптимального управления динамическими стохастическими системами наиболее общего вида, для которых такие конструктивные условия и алгоритмы могут быть получены. Ряд известных результатов, связанных с задачами поиска оптимальных стратегий управления линейными и обыкновенными квазилинейными системами при различной степени информированности о состоянии, могут быть получены в виде частных случаев представленных в работе результатов в предположении линейности искомых оптимальных стратегий.

Апробация работы и публикации. Существенные результаты диссертационной работы получены при поддержке РФФИ (гранты №13-08-01120, №15-07-09091, №16-08-00472). Основные результаты опубликованы в журналах из перечня ВАК [1, 2, 3, 4] и в журнале [5], обсуждались на международных конференциях [6, 7, 8, 9, 10, 11], Всероссийском совещании по проблемам управления в 2014 году [12] и научных семинарах Института проблем управления РАН в 2015 году. Кроме того, некоторые результаты диссертации опубликованы в издании IEEE [13]. Работа [14] заняла 3-е место на международном конкурсе научно-технических работ «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики» в 2013 году.

Личный вклад автора. Все новые научные результаты получены лично автором. В работах [1, 7] построены алгоритмы синтеза субоптимальных стратегий управления в задачах оптимизации обыкновенных квазилинейных динамических стохастических систем с информационными ограничениями. В основу алгоритмов положен метод градиентного спуска. В [1, 2, 14] эти алгоритмы применены к задаче стабилизации двухзвенного механического манипулятора. Работа [12] посвящена развитию градиентных методов синтеза субоптимальных стратегий управления на проблемы поиска оптимальных стратегий управления в задачах оптимизации квазилинейных систем с информационными ограничениями. В качестве практических приложений исследованы различные постановки задач стабилизации спутника, снабженного балкой гравитационной стабилизации [5, 8, 9, 10]. Обобщения полученных теоретических результатов формулируются в работах [4, 11, 13] в виде необходимых условий оптимальности и численных методов на основе процедуры градиентного спуска в функциональном пространстве для задач оптимизации программного управления квазилинейными стохастическими системами, нелинейными по управлению.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографического списка из 85 наименований. Работа изложена на 118 страницах машинописного текста, содержит 27 рисунков и 7 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся обзор известных методов оптимального управления динамическими стохастическими системами, обосновывается научная новизна проведенных исследований и актуальность получения новых результатов, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность, представлены положения, выносимые на защиту и описана структура диссертации.

В первой главе для удобства изложения приводятся используемые в диссертации результаты работ М.М. Хрусталёва, конкретизированные для случая полного отсутствия информации о состоянии системы, рассматриваемого во второй главе при поиске оптимального программного управления. Новых научных результатов данная глава не содержит.

Пусть процесс управления описывается системой уравнений Ито

$$\begin{gathered} dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $t \in T = [t_0; t_1]$ – время; $x \in R^n$ – вектор состояния системы; $w(\cdot)$ – ν-мерный стандартный винеровский процесс; $u \in R^m$ – вектор управления.

Случайный вектор x_0 имеет плотность распределения $x \to p_0(x) : R^n \to \ R^1$. Функция p_0 считается заданной.

Предположим, что для рассматриваемого здесь случайного процесса x плотность распределения вероятности $(t,x) \to p(t,x) : T \times R^n \to R^1$ существует, имеет конечные первый и второй моменты и удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \\ &\quad = -\sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i} \left[f_i(t,x,u(t)) p(t,x) \right] + \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[a_{ij}(t,x,u(t)) p(t,x) \right], \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $a_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{\nu} g_{il}\, g_{jl}/2$, с начальным условием

$$p(t_0,x) = p_0(x). \tag{1.3}$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим множество допустимых процессов управления $z = (p^*(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих условию: при заданном управлении $u(\cdot)$ функция $t \to p^*(t) \ = \ p(t,\cdot)$ абсолютно непрерывна и такова, что плотность p является решением уравнения (1.2) с начальным условием (1.3).

Для процесса $z \in \mathcal{D}$ определим функционал качества управления

$$\begin{aligned} &z \to J(z) = \\ &\quad = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} f^c(t,x,u(t)) p(t,x) dx dt + \int_{R^n} F^c(x) p(t_1,x) dx : \mathcal{D} \to R^1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Цель управления состоит в минимизации функционала (1.4) на множестве $\mathcal{D}$.

Введём в рассмотрение функцию $(t,x) \to \psi^0(t,x)$ и составим конструкцию

$$\begin{aligned} h(t,x,u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x,u) \tfrac{\partial}{\partial x_i} \psi^0(t,x) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u) \tfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \psi^0(t,x) + f^c(t,x,u), \end{aligned} \tag{1.5}$$

при помощи которой запишем функционал Лагранжа–Кротова. Для заданного процесса $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ он будет иметь вид

$$\begin{aligned} L(z) = \int_{R^n} \psi^0(t_0,x) p_0(x) dx + \\ + \int_{R^n} \left[F^c(x) - \psi^0(t_1,x) \right] p(t_1,x) dx + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} \left[\tfrac{\partial}{\partial t} \psi^0(t,x) + h(t,x,u(t)) \right] p(t,x) dx dt. \end{aligned} \tag{1.6}$$

<u>Л е м м а 1.</u> Для всех $z \in \mathcal{D}$ определён функционал (1.6) и справедливо равенство

$$J(z) = L(z). \tag{1.7}$$

<u>Лемма 2.</u> Если процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ и функция ψ^0 удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^0(t,x) + h(t,x,u(t)) = 0,\ (t,x) \in (T \setminus T_0) \times R^n, \tag{1.8}$$

$$\psi^0(t_1, x) = F^c(x),\ x \in R^n, \tag{1.9}$$

то справедливо равенство

$$J(z) = \int\limits_{R^n} \psi^0(t_0, x) p_0(x) dx. \tag{1.10}$$

Во второй главе формулируются результаты диссертационной работы, связанные с построением оптимального программного управления квазилинейными стохастическими системами, коэффициенты которых могут быть в общем случае нелинейными функциями управления.

Процесс управления описывается системой уравнений Ито

$$\begin{gathered} dx(t) = \left[A(t,u(t))x(t) + B(t,u(t))\right]dt + \\ + \sum_{l=1}^{\nu} \left[G^{(l)}(t,u(t))x(t) + C^{(l)}(t,u(t))\right] dw_l(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{gathered} \tag{2.1}$$

Функционал качества управления имеет вид

$$\begin{gathered} z \to J(z) = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left[\tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} D(t,u(t)) x + S^{\mathrm{T}}(t,u(t)) x + E(t,u(t))\right] p(t,x) dx dt + \\ + \int\limits_{R^n} \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x p(t_1,x) dx : \mathcal{D} \to R^1, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где при каждом $(t,u) \in T \times R^m$ выполнены условия $D(t,u) \geq 0,\ Q \geq 0.$

Будем искать функцию $\psi^0(t,x)$ в формуле (1.6) в виде

$$\psi^0(t,x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} M(t) x + \lambda^{\mathrm{T}}(t) x + \gamma(t). \tag{2.3}$$

<u>Лемма 3.</u> Если процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ и функции $M,\ \lambda,\ \gamma$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \frac{d\gamma}{dt}(t) = -\lambda^{\mathrm{T}}(t) B(t,u(t)) - E(t,u(t)) - \\ -\tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{\nu} C^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t)) M(t) C^{(l)}(t,u(t)), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} \frac{d\lambda}{dt}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t,u(t))\lambda(t) - S(t,u(t)) - M(t)B(t,u(t)) - \\ - \sum_{l=1}^{\nu} G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t)) M(t) C^{(l)}(t,u(t)), \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt}(t) = -M(t)A(t,u(t)) - A^{\mathrm{T}}(t,u(t))M(t) - D(t,u(t)) -\\ -\sum_{l=1}^{\nu} G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t))M(t)G^{(l)}(t,u(t)),\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\gamma(t_1) = 0, \quad \lambda(t_1) = 0, \quad M(t_1) = Q, \tag{2.7}$$

то справедливо равенство

$$J(z) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(M_0K_0) + \frac{1}{2}m_0^{\mathrm{T}}M_0m_0 + \lambda_0^{\mathrm{T}}m_0 + \gamma_0, \tag{2.8}$$

где $M_0 = M(t_0)$, $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, $\gamma_0 = \gamma(t_0)$. Здесь и далее через tr обозначен оператор следа квадратной матрицы.

Система уравнений для функций $t \to m(t) : T \to R^n$, $t \to K(t) : T \to R^{n\times n}$, имеющих смысл математического ожидания и ковариационной матрицы случайного процесса $x(t)$, имеет вид

$$\frac{dm}{dt}(t) = A(t,u(t))m(t) + B(t,u(t)), \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt}(t) = A(t,u(t))K(t) + K(t)A^{\mathrm{T}}(t,u(t)) +\\ +\sum_{l=1}^{\nu}\Big(G^{(l)}(t,u(t))K(t)G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t)) +\\ +\left[C^{(l)}(t,u(t)) + G^{(l)}(t,u(t))m(t)\right]\cdot\\ \cdot\left[C^{(l)}(t,u(t)) + G^{(l)}(t,u(t))m(t)\right]^{\mathrm{T}}\Big),\end{aligned} \tag{2.10}$$

и для неё выполнены начальные условия

$$m(t_0) = m_0, \quad K(t_0) = K_0. \tag{2.11}$$

Возьмём некоторый допустимый процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ и подберём функцию ψ^0 вида (2.3) так, чтобы для процесса z выполнялись условия леммы 2 или, что то же самое, леммы 3.

Теперь мы можем выбрать процесс $\tilde{z} = (\tilde{p}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathcal{D}$ так, чтобы он улучшал значение функционала качества (1.4), определив управление $\tilde{u}(\cdot)$ равенством

$$\tilde{u}_r(t) = u_r(t) - \theta\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t, m(t), K(t), u(t)),\ r = \overline{1,m},\ t \in T,\ \theta > 0, \tag{2.12}$$

в котором значение θ достаточно мало, а формулы вычисления значений

$\partial I/\partial \tilde{u}_r,\ r=\overline{1,m}$, имеют вид

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t,m(t),K(t),u(t)) =$$
$$= \operatorname{tr}\left(\left[M(t)(A^u)'_r(t)+\sum_{l=1}^{\nu}(G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(G^{(l)u})'_r(t)+\frac{1}{2}(D^u)'_r(t)\right]K(t)\right)+$$
$$+m^{\mathrm{T}}(t)\left[M(t)(A^u)'_r(t)+\sum_{l=1}^{\nu}(G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(G^{(l)u})'_r(t)+\frac{1}{2}(D^u)'_r(t)\right]m(t)+$$
$$+m^{\mathrm{T}}(t)\left[((A^u)'_r)^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)+M(t)(B^u)'_r(t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{\nu}\left(((G^{(l)u})'_r)^{\mathrm{T}}(t)M(t)C^{(l)u}(t)+(G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(C^{(l)u})'_r(t)\right)+(S^u)'_r(t)\right]+$$
$$+\lambda^{\mathrm{T}}(t)(B^u)'_r(t)+\sum_{l=1}^{\nu}(C^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(C^{(l)u})'_r(t)+(E^u)'_r(t), \tag{2.13}$$

где через $(\cdot)'_r$ обозначена производная по $\tilde{u}_r$ и использованы обозначения вида $A^u(t)=A(t,u(t))$.

Т е о р е м а 1. Процедура перехода от управления u к управлению $\tilde{u}$ с помощью формулы (2.12) при условии $\partial I/\partial \tilde{u}_r(t,m(t),K(t),u(t))\neq 0,\ t\in(T\setminus T_0),\ r\in\{\overline{1,m}\}$ и достаточно малом $\theta>0$ является релаксационной по критерию J.

Основным результатом работы можно считать следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы процесс $z=(p^*(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{D}$ был оптимален, необходимо существование функций $M,\ \lambda,\ \gamma$, удовлетворяющих условиям (2.4)-(2.7), и функций $m,\ K$, удовлетворяющих условиям (2.9)-(2.11), таких, что при $t\in(T\setminus T_0)$ выполнены соотношения

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t,m(t),K(t),u(t))=0, \quad r=\overline{1,m}, \tag{2.14}$$

где значения $\partial I/\partial \tilde{u}_r$ вычисляются по формуле (2.13).

На основе полученных условий оптимальности в диссертационной работе построен численный *алгоритм поиска оптимального управления*.

Ш а г 1. Задать θ – шаг градиентного метода, $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ – требуемые максимальные погрешности приближения, $u^{(0)}$ – начальную точку приближения, и положить номер итерации $k=0$, количество успешных итераций $i=0$.

Ш а г 2. Решить (численно) задачи Коши сперва в прямом, а затем и в обратном времени для системы уравнений (2.9), (2.10), (2.4)-(2.6) с условиями (2.11), (2.7), используя управление $u=u^{(k)}$.

Ш а г 3. Вычислить значение критерия $J^{(k)}$ по формуле (2.8). Если $k=0$, перейти к шагу 5. В противном случае проверить выполнение условия $J^{(k)}<J^{(k-1)}$: если условие выполнено, увеличить i на единицу и перейти к шагу 4, иначе положить $i=0$, $u^{(k)}=u^{(k-1)}$, уменьшить θ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 6.

Ш а г 4. Если $i=2$, увеличить θ вдвое, положить $i=0$.

Ш а г 5. Для всех $r = \overline{1,m}$ вычислить $\partial I / \partial u_r$ по формуле (2.13).

Ш а г 6. Вычислить величину $||\nabla I||$ и проверить выполнение условий $||\nabla I|| < \varepsilon_1$, $\theta < \varepsilon_2$: если любое из условий выполнено, искомое значение $\overline{u}$ положить равным $u^{(k)}$ и закончить расчет, иначе вычислить $u^{(k+1)}$ по формуле (2.12) и перейти к шагу 7.

Ш а г 7. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

При помощи данного алгоритма в работе решается модельный пример.

В третьей главе рассматривается задача синтеза оптимальной стратегии управления квазилинейными динамическими стохастическими системами с информационными ограничениями в классе линейных регуляторов.

Процесс управления описывается системой уравнений Ито

$$\begin{gathered} dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t, x(t))]\, dt + \\ + \sum_{l=1}^{\nu} \left[G^{(l)}(t)x(t) + F^{(l)}(t)u(t, x(t)) + C^{(l)}(t) \right] dw_l(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $(t, x) \to u(t, x) : T \ \times \ R^n \to R^m$ – стратегия управления.

Рассматривается функция управления $t \to u^*(t) = u(t, \cdot) : T \to V$, где V – множество, задающее информационные ограничения, которые состоят в том, что каждая компонента вектора стратегии $u(\cdot)$ зависит от своего априори назначаемого набора компонент вектора состояния x. Указанные ограничения отражают возможности получения информации о состоянии.

Функционал качества управления имеет вид

$$\begin{gathered} z \to J(z) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} \left[\tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} D(t) x + u^{\mathrm{T}} S(t) x + \tfrac{1}{2} u^{\mathrm{T}} E(t) u \right] p(t, x) dx dt + \\ + \int_{R^n} \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x p(t_1, x) dx : \mathcal{D} \to R^1, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где квадратичные формы в подынтегральных выражениях неотрицательно определены, и выполнено условие $E(t) \geq E_0 > 0, \ t \in T$.

Оптимальная стратегия управления ищется в виде линейного регулятора

$$u(t, x) = -(P(t)x + L(t)). \tag{3.3}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае информационные ограничения можно учесть, зафиксировав элементы $P_{ij}(t) \equiv 0$, если компонента u_i вектора стратегии управления не должна зависеть от компоненты x_j вектора состояния.

Принимая совокупность оставшихся ненулевых элементов матрицы $P(\cdot)$ и компонент вектора $L(\cdot)$ за функцию управления $t \to \hat{u}(t) : T \to R^p, \ p \leq m \cdot (n+1)$, получим новую постановку задачи в виде

$$\begin{gathered} dx(t) = \left[\hat{A}(t, \hat{u}(t))x(t) + \hat{B}(t, \hat{u}(t)) \right] dt + \\ + \sum_{l=1}^{\nu} \left[\hat{G}^{(l)}(t, \hat{u}(t))x(t) + \hat{C}^{(l)}(t, \hat{u}(t)) \right] dw_l(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$J(z) = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left[\tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \hat{D}(t, \hat{u}(t)) x + \hat{S}^{\mathrm{T}}(t, \hat{u}(t)) x + \hat{E}(t, \hat{u}(t)) \right] p(t,x) dx dt + \\ + \int\limits_{R^n} \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x p(t_1, x) dx, \tag{3.5}$$

где

$$\begin{gathered} \hat{A}(t,\hat{u}) = A(t) - B(t)P, \\ \hat{B}(t,\hat{u}) = -B(t)L, \\ \hat{G}^{(l)}(t,\hat{u}) = G^{(l)}(t) - F^{(l)}(t)P, \\ \hat{C}^{(l)}(t,\hat{u}) = C^{(l)}(t) - F^{(l)}(t)L, \\ \hat{D}(t,\hat{u}) = D(t) - P^{\mathrm{T}}S(t) - S^{\mathrm{T}}(t)P + P^{\mathrm{T}}E(t)P, \\ \hat{S}^{\mathrm{T}}(t,\hat{u}) = L^{\mathrm{T}}E(t)P - L^{\mathrm{T}}S(t), \\ \hat{E}(t,\hat{u}) = 1/2 \cdot L^{\mathrm{T}}E(t)L. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Полученная задача (3.4)-(3.5) представляет собой частный случай задачи (2.1)-(2.2), и к ней могут быть применены предложенные в главе 2 процедуры улучшения процесса управления, а также конкретизированы необходимые условия оптимальности теоремы 2.

Т е о р е м а 3. Для того чтобы процесс $z = (p^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathcal{D}$, стратегия управления $u(t,x)$ которого есть линейный регулятор (3.3), был оптимален, необходимо существование функций $m,\ K,\ \gamma,\ \lambda,\ M$ и H, удовлетворяющих совместно с коэффициентами регулятора $P,\ L$ перечисленным ниже условиям.

1. Функции $m,\ K$ являются решением системы уравнений

$$\frac{dm}{dt}(t) = \tilde{A}(t)m(t) - B(t)L(t), \tag{3.7}$$

$$\frac{dK}{dt}(t) = \tilde{A}(t)K(t) + K(t)\tilde{A}^{\mathrm{T}}(t) + \\ + \sum_{l=1}^{\nu} \Big(\tilde{G}^{(l)}(t)K(t)\tilde{G}^{(l)^{\mathrm{T}}}(t) + \\ + \left[\tilde{C}^{(l)}(t) + \tilde{G}^{(l)}(t)m(t) \right] \left[\tilde{C}^{(l)}(t) + \tilde{G}^{(l)}(t)m(t) \right]^{\mathrm{T}} \Big), \tag{3.8}$$

где $\tilde{A} = A - BP$, $\tilde{G}^{(l)} = G^{(l)} - F^{(l)}P$, $\tilde{C}^{(l)} = C^{(l)} - F^{(l)}L$, с начальными условиями

$$m(t_0) = m_0, \quad K(t_0) = K_0. \tag{3.9}$$

2. Функции $\gamma,\ \lambda,\ M$ являются решением системы уравнений

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \lambda^{\mathrm{T}}(t)B(t)L(t) - \tfrac{1}{2}L^{\mathrm{T}}(t)E(t)L(t) - \\ - \tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{\nu} \tilde{C}^{(l)^{\mathrm{T}}}(t)M(t)\tilde{C}^{(l)}(t), \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\lambda}{dt}(t) = -\tilde{A}^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) + S^{\mathrm{T}}(t)L(t) + P^{\mathrm{T}}(t)E(t)L(t) + \\ + M(t)B(t)L(t) - \sum_{l=1}^{\nu} \tilde{G}^{(l)^{\mathrm{T}}}(t)M(t)\tilde{C}^{(l)}(t),\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\frac{dM}{dt}(t) = -M(t)\tilde{A}(t) - \tilde{A}^{\mathrm{T}}(t)M(t) - D(t) + S^{\mathrm{T}}(t)P(t) + \\ + P^{\mathrm{T}}(t)S(t) - P^{\mathrm{T}}(t)E(t)P(t) - \sum_{l=1}^{\nu} \tilde{G}^{(l)^{\mathrm{T}}}(t)M(t)\tilde{G}^{(l)}(t),\end{gathered} \tag{3.12}$$

с условиями, заданными при $t = t_1$,

$$\gamma(t_1) = 0, \quad \lambda(t_1) = 0, \quad M(t_1) = Q. \tag{3.13}$$

3. Функции P и L удовлетворяют соотношениям

$$P(t) = (E(t) + \Theta(t))^{-1} \left[B^{\mathrm{T}}(t)M(t) + \Pi(t) + S(t) - H[K(t)]^{-1}\right], \tag{3.14}$$

$$L(t) = (E(t) + \Theta(t))^{-1} \left[B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) + \Lambda(t) + H[K(t)]^{-1}m(t)\right], \tag{3.15}$$

где $\Pi = \sum\limits_{l=1}^{\nu} F^{(l)^{\mathrm{T}}} M G^{(l)},\ \Lambda = \sum\limits_{l=1}^{\nu} F^{(l)^{\mathrm{T}}} M C^{(l)},\ \Theta = \sum\limits_{l=1}^{\nu} F^{(l)^{\mathrm{T}}} M F^{(l)}$, а ненулевые элементы матрицы $H(t) = \aleph H^*(t),\ t \in T$, являются решением уравнения

$$\begin{gathered}\aleph \Big\{ (E(t) + \Theta(t))^{-1} \big[B^{\mathrm{T}}(t)M(t) + \Pi(t) + \\ + S(t) - (\aleph H^*(t))[K(t)]^{-1}\big]\Big\} = 0.\end{gathered} \tag{3.16}$$

Символом $\aleph$ в уравнении (3.16) обозначен линейный оператор структуры управления, который определён на множестве матриц размеров $(m \times n)$ и действует на матрицу $H^*(t)$ так, что если компонента u_i вектора стратегии управления зависит от компоненты x_j вектора состояния, то соответствующий элемент $H_{ij}(t)$ матрицы $H(t) = \aleph H^*(t)$ будет равен нулю, в противном случае $H_{ij}(t) = H^*_{ij}(t)$.

Численный метод синтеза оптимальной стратегии управления совпадает по структуре с численным методом главы 2.

Четвертая глава диссертационной работы посвящена построению оптимального управления в заранее суженном классе функций достаточно простой структуры (субоптимального управления) для задач, рассматриваемых в главах 2 и 3.

Для определения структуры управления введём набор параметров $s = (s_1, ..., s_N)$ и обозначим через $\tilde{u}_i(t, s),\ i = \overline{1, m}$, полиномы от t с коэффициентами s_j, вообще говоря различными для всех $\tilde{u}_i$. Здесь N определяется значением m и заранее выбранным порядком полиномов. Коэффициенты $s_j,\ j = \overline{1, N}$, требуется подобрать так, чтобы минимизировать критерий качества управления J.

Таким образом, получена задача безусловной минимизации критериальной функции $J(z(s)) = \hat{J}(s)$, зависящей неявно от $s = (s_1, ..., s_N)$.

<u>Теорема 4.</u> Для того чтобы управление $u(t) = \tilde{u}(t, \overline{s})$ было субоптимальным, необходимо существование функций $M,\ \lambda,\ \gamma$, удовлетворяющих условиям (2.4)-(2.7), и функций $m,\ K$, удовлетворяющих условиям (2.9)-(2.11), таких, что выполнены соотношения

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial s_j}(\overline{s}) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \tag{4.1}$$

в которых значения $\partial \hat{J}/\partial s_j$ вычисляются по формуле

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial \hat{J}}{\partial s_j}(\overline{s}) = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ \mathrm{tr} \left(\left[M(t)(A^u)'_j(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t) M(t) (G^{(l)u})'_j(t) + \tfrac{1}{2}(D^u)'_j(t) \right] K(t) \right) + \\ + m^{\mathrm{T}}(t) \left[M(t)(A^u)'_j(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t) M(t) (G^{(l)u})'_j(t) + \tfrac{1}{2}(D^u)'_j(t) \right] m(t) + \\ + m^{\mathrm{T}}(t) \Bigg[((A^u)'_j)^{\mathrm{T}}(t) \lambda(t) + M(t)(B^u)'_j(t) + \\ + \sum_{l=1}^{\nu} \left(((G^{(l)u})'_j)^{\mathrm{T}}(t) M(t) C^{(l)u}(t) + (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t) M(t) (C^{(l)u})'_j(t) \right) + (S^u)'_j(t) \Bigg] + \\ + \lambda^{\mathrm{T}}(t)(B^u)'_j(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (C^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t) M(t) (C^{(l)u})'_j(t) + (E^u)'_j(t) \Bigg\} \, dt,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где через $(\cdot)'_j$ обозначена производная по s_j и использованы обозначения вида $A^u(t) = A(t, u(t)) = A(t, \tilde{u}(t, \overline{s}))$.

<u>Теорема 5.</u> Для того чтобы стратегия управления $u(t, x) = -(P(t)x + L(t)) = -(\tilde{P}(t, \overline{s})x + \tilde{L}(t, \overline{s}))$ была субоптимальной, необходимо существование функций $M,\ \lambda,\ \gamma$, удовлетворяющих условиям (3.10)-(3.13), и функций $m,\ K$, удовлетворяющих условиям (3.7)-(3.9), таких, что выполнены соотношения (4.1), в которых значения $\partial \hat{J}/\partial s_j$ вычисляются по формуле

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial \hat{J}}{\partial s_j}(\overline{s}) = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \mathrm{tr} \left(P_j'^{\mathrm{T}}(t) \left[(E(t) + \Theta(t)) P(t) - B^{\mathrm{T}}(t) M(t) - \Pi(t) - S(t) \right] K(t) \right) + \right. \\ + \left(P'_j(t) m(t) + L'_j(t) \right)^{\mathrm{T}} \left(\left[(E(t) + \Theta(t)) L(t) - B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) - \Lambda(t) \right] + \right. \\ \left. \left. + \left[(E(t) + \Theta(t)) P(t) - B^{\mathrm{T}}(t) M(t) - \Pi(t) - S(t) \right] m(t) \right) \right\} dt,\end{gathered} \tag{4.3}$$

где через $(\cdot)'_j$ обозначена производная по элементу s_j.

Численные методы поиска субоптимального управления совпадают по структуре с численными методами поиска оптимального управления.

Пятая глава диссертации посвящена описанию комплекса программ, разработанного в процессе диссертационного исследования, и решению ряда прикладных задач оптимизации процессов управления.

Алгоритмы, разработанные в диссертации, требуют численного решения задач Коши для вычисления функций $m(t), K(t), \gamma(t), \lambda(t), M(t)$. В связи с этим возникла необходимость разработки программного обеспечения для реализации каждого из этих алгоритмов.

Для создания программного обеспечения была выбрана система компьютерной математики (СКМ) «Maple». Она содержит широкий набор инструментов для реализации численных процедур высокой сложности и в то же время отличается возможностью активного использования символьных вычислений, которые существенным образом ускоряют процесс записи и редактирования исходного кода.

Функциональное назначение. Комплекс программ предназначен для поиска оптимального и субоптимального управления в квазилинейных системах с информационными ограничениями и нелинейных по управлению системах по заданным начальным данным, моделирования траекторий системы в процессе реализации найденного управления, а также для сохранения полученных числовых данных и построения различных графиков.

Основные характеристики. Разработанное программное обеспечение состоит из 4-х обособленных программных модулей, каждый из которых включает в себя 3 основных блока (блок ввода исходных данных, блок поиска управления, блок моделирования процесса управления и вывода результатов). При этом блоки в каждом из модулей имеют свои отличительные особенности в зависимости от решаемой задачи.

Описание логической структуры. Логическая структура является общей для всех программных модулей комплекса. Такая общность основывается на том, что все алгоритмы, описанные в диссертации, построены по одному и тому же принципу. В работе приводится блок-схема функционирования модулей.

Далее в работе приведены примеры использования данного программного обеспечения в практических приложениях.

В первом примере рассматривается плоское движение двухзвенного механического манипулятора, каждое звено которого представляет собой абсолютно жесткий стержень заданной длины. Звенья соединены между собой вращательной парой, а второе звено соединено вращательной парой с неподвижным основанием манипулятора. Массовые характеристики манипулятора заданы. В соединительных парах могут развиваться управляющие вращательные моменты u_1 и u_2. Известно положение, определяемое углами отклонения звеньев $\varphi_1 = \varphi_1^*, \varphi_2 = \varphi_2^*$ от горизонтальной плоскости, в котором требуется стабилизировать манипулятор.

Предполагается, что на движение манипулятора и процесс управления оказывают влияние вектор случайных воздействий, имеющий две компоненты, а управление осуществляется в условиях информационных ограничений, отражающих невозможность получения полной информации о состоянии. В процессе управления также требуется минимизировать затраты на управляющие воздействия. Цель должна быть достигнута за заданное время.

В качестве вектора состояния динамической системы возьмём вектор

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}, x_1 = \varphi_1 - \varphi_1^*, x_2 = \varphi_2 - \varphi_2^*, x_3 = \dot{\varphi}_1, x_4 = \dot{\varphi}_2$. Для синтеза стратегии управления манипулятором простого вида воспользуемся постоянными по времени матрицами линейного регулятора P, L и предложенным в главе 4 алгоритмом поиска субоптимальной стратегии управления с информационными ограничениями. Полученные результаты сравним по критерию качества с оптимальными, найденными при помощи численного метода главы 3. Результаты вычислений представлены в таблице 1. Запись вида $u_2(t, x_2, x_3)$ определяет информационные ограничения на компоненту вектора управления u_2 и означает, что u_2 зависит от x_2, x_3, но не зависит от x_1, x_4.

Таблица 1. Сравнение оптимальных и субоптимальных стратегий

№	Информационные ограничения	$J_{\text{опт}}$	$J_{\text{субопт}}$	Относительная погрешность, %
1	$u_1(t);\ u_2(t)$	86.14	87.11	1.1
2	$u_1(t);\ u_2(t, x_2, x_3)$	76.59	77.59	1.3
3	$u_1(t, x_1, x_2, x_4);\ u_2(t)$	78.39	79.88	1.9
4	$u_1(t, x_2, x_4);$ $u_2(t, x_1, x_2, x_4)$	62.66	63.81	1.8
5	$u_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4);$ $u_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$	52.98	53.97	1.9

Во втором примере рассматривается плоское движение абсолютно жесткого спутника, к которому прикреплён однородный гибкий стержень. На конце стержня зафиксировано тело заданной массы. Величина $\tilde{u}$, играющая роль управления, пропорциональна тяге газореактивного двигателя. Цель управления заключается в успокоении упругих колебаний, возникающих в стержне, и стабилизации спутника в орбитальной системе координат за заданное время.

Дополнительно предполагается, что управление реализуется со случайными ошибками так, что $\tilde{u}(t) = u(t) \cdot (1 + k_\xi dw(t)/dt)$, где величина u характеризует точные управляющие воздействия, а производная $dw(t)/dt$, понимаемая в обобщённом смысле (белый шум), вместе с коэффициентом k_ξ характеризует флуктуации величины тяги двигателя.

Для данной задачи строится оптимальная стратегия управления при использовании предложенного в главе 3 численного метода и уточняется точность приближения, путём её сравнения с оптимальной стратегией, найденной из непосредственного использования соотношений, которые записаны в главе 3 в виде необходимых условий оптимальности. Результаты расчётов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Сравнение численного метода и аналитических результатов

№	Информационные ограничения	$J_{\text{ну}}$	$J_{\text{чм}}$
1	$u(t)$	375.877	375.877
2	$u(t,\ x_1,\ x_3,\ x_5)$	4.325	4.646
3	$u(t,\ x_2,\ x_4,\ x_6)$	3.232	3.331
4	$u(t,\ x_1, \ldots,\ x_6)$	1.357	1.447

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1) Исследован класс математических моделей линейных по состоянию и управлению динамических стохастических систем диффузионного типа с мультипликативными возмущениями, в которых управление имеет вид линейного регулятора с неполной обратной связью (класс обыкновенных квазилинейных систем с информационными ограничениями) [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14].

2) Формализован и исследован новый класс математических моделей линейных по состоянию динамических стохастических систем диффузионного типа, коэффициенты которых могут быть нелинейными функциями программного управления (класс квазилинейных систем, нелинейных по управлению) [4, 10, 11, 13].

3) Получены необходимые условия оптимальности в задачах оптимизации [4, 10]:

   - стратегий управления обыкновенными квазилинейными системами с информационными ограничениями;
   - программного управления квазилинейными системами, нелинейными по управлению.

4) Получены необходимые условия субоптимальности (оптимальности в заранее суженном классе управлений) в данных задачах [1, 2, 7, 14].

5) Разработаны численные методы поиска оптимального и субоптимального управления, основанные на процедуре градиентного спуска в функциональном пространстве [1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14].

6) Разработан комплекс программ, реализующих эти численные методы [1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13].

7) Проведено решение задач оптимального управления и стабилизации двухзвенного механического манипулятора и спутника с упругой штангой при помощи полученных результатов [1, 2, 5, 8, 9, 14].

Результаты диссертационной работы соответствуют пп. 2,4 паспорта специальности 05.13.18 и пп. 4,5 паспорта специальности 05.13.01.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации по теме диссертации в журналах из перечня ВАК

[1] *Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М., Царьков К.А.* Алгоритм поиска субоптимальных стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами диффузионного типа // Известия РАН. Теория и системы управления, 2014, №1, с. 74-86 (Web of Science)

[2] *Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Управление квазилинейными стохастическими системами с неполной информацией на примере механического манипулятора // Труды МАИ, №74, http://www.mai.ru (25.04.2014)

[3] *Хрусталев М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Метод Галеркина в задачах оптимизации квазилинейных динамических стохастических систем с информационными ограничениями // Труды МАИ, №66, http://www.mai.ru (27.06.2013)

[4] *Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // Автоматика и телемеханика, 2017, № 5 (Web of Science)

Публикации по теме диссертации в других изданиях

[5] *Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Метод оптимизации квазилинейных стохастических систем в приложении к задаче оптимальной стабилизации спутника с упругой штангой // Программные системы: теория и приложения, 2015, 6:2(25), с. 3-17

[6] *Царьков К.А., Румянцев Д.С.* Стабилизация орбиты искусственного спутника Земли при информационных ограничениях // Тезисы докладов 11-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика - 2012», М.: МАИ, 2012. с. 164-165

[7] *Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Алгоритм численного поиска простых квазиоптимальных стратегий управления динамическими стохастическими системами диффузионного типа // Тезисы докладов 18-ой Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС - 2013), Алушта: МАИ, 2013. с. 783-784

[8] *Царьков К.А.* Оптимальная стабилизация спутника с гибким стержнем при наличии информационных ограничений и неточной реализации управляющих воздействий // Тезисы докладов 19-ой Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС - 2015), Алушта: МАИ, 2015. с. 672-674

[9] *Царьков К.А.* Оптимальное управление спутником с упругой штангой при наличии случайных возмущений и неточной реализации управляющих воздействий // Тезисы докладов 14-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика-2015» (Москва). М.: МАИ, 2015. с. 467-468

[10] *Царьков К.А., Румянцев Д.С., Хрусталев М.М.* Необходимые условия оптимальности в задаче оптимизации квазилинейных динамических

стохастических систем, нелинейных по управлению // Сборник тезисов докладов 42-ой Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения-2016». М.: МАИ, 2016. Т.1. с. 471-472

[11] *Царьков К.А., Румянцев Д.С.* Оптимизация нелинейных по управлению динамических стохастических систем // Материалы 13-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). М.: ИПУ РАН, 2016. с. 410-413

[12] *Царьков К.А., Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С.* Градиентный метод оптимизации стратегий управления квазилинейными стохастическими системами при наличии информационных ограничений // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. с. 2383-2392

[13] *Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S., Tsarkov K.A.* Numerical Method for Optimization of Quasi-Linear Dynamical Stochastic Systems, Nonlinear in Control // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). M.: IEEE, http://ieeexplore.ieee.org, 2016

[14] *Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Квазиоптимальные стратегии в задаче оптимального управления двухзвенным механическим манипулятором // Аннотация конкурсной работы на Межрегиональном молодёжном конкурсе научно-технических работ и проектов «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики», г. Москва, 2013