

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)» – МАИ

На правах рукописи

УДК 539.3



Саганов Евгений Борисович

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО
ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СПЛАВЫ
С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ, РАБОТАЮЩИХ НА КРУЧЕНИЕ**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф., Мовчан А.А.

Москва – 2016 г.

Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Аналитический обзор моделей поведения сплавов с памятью формы.....	14
Глава 2. Изотермическое кручение стержней и трубок из сплава с памятью формы в мартенситном фазовом состоянии.....	23
2.1. Решение задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме мартенситной неупругости.....	24
2.2. Решение задачи кручения толстостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме мартенситной неупругости.....	29
2.3. Решение задачи кручения стержней сплошного круглого поперечного сечения из сплава с памятью формы в режиме мартенситной неупругости.....	31
2.4. Выводы.....	39
Глава 3. Прямое термоупругое мартенситное фазовое превращение, протекающие в стержнях и трубках из сплава с памятью формы, под действием постоянного крутящего момента.....	40
3.1. Решение задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении в тонкостенной трубке из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного крутящего момента.....	41
3.2. Решение задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении в толстостенной трубке и стержне сплошного круглого поперечного сечения из сплава с памятью формы, находящихся под действием постоянного крутящего момента.....	44
3.3. Выводы.....	72
Глава 4. Обратное термоупругое мартенситное фазовое превращение, протекающие в стержнях и трубках из сплава с памятью формы, под действием постоянного и переменного крутящего момента.....	74
4.1. Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в тонкостенной трубке из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного крутящего момента.....	75
4.2. Решение задачи об обратном мартенситном превращении в толстостенной трубке и стержне сплошного круглого поперечного сечения из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного крутящего момента.....	76
4.3. Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне сплошного круглого поперечного сечения из сплава с памятью формы, протекающем при стесненном деформировании.....	95

4.4 Выводы.....	107
Глава 5. Кручение тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости.....	109
5.1. Решение задачи об изотермическом кручении тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости.....	110
5.2. Решение дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости.....	114
5.3. Выводы.....	129
Заключение.....	130
Список используемой литературы.....	133

Введение.

Актуальность темы исследования. В 1948 г. Г.В. Курдюмовым и Л.Г. Хандорсом были открыты термоупругие-мартенситные фазовые превращения [1], протекающие в сплавах с памятью формы (СПФ). На сегодня, известны и другие сплавы на основе Ti-Ni, Ti-Ni-Cu, Mn-Cu, Fe-Mn, Cu-Zn-Al [2], обладающие свойством памяти формы.

Первый промышленно значимый СПФ – никелид титана NiTi, получен в Ливерморской лаборатории (США) в 50-х годах двадцатого века. В простейшем случае, NiTi может находиться в двух фазовых состояниях. При высоких температурах никелид титана находится в аустенитном состоянии с объемно-центрированной кубической кристаллической решеткой. При низких температурах NiTi находится в мартенситном фазовом состоянии, характеризующимся моноклинной кристаллической решеткой с искажениями. Переход аустенитной фазы в мартенситную есть прямое мартенситное превращение (ПМП). Оно может происходить как при охлаждении, так и при росте механических напряжений приложенных к образцу из СПФ [3]. Обратное мартенситное превращение (ОМП) – переход мартенситной фазы в аустенитную при нагреве либо разгрузке [3]. В случае если ПМП происходит в отсутствие внешних напряжений, возникающие мартенситные элементы могут иметь различную ориентацию. Увеличение степени ориентированности мартенситных элементов СПФ вследствие действия внешних механических напряжений можно назвать структурным превращением, сопровождающимся раздвойникованием и переориентацией имеющихся мартенситных элементов [4]. Совокупность перечисленных выше явлений, характерных для СПФ, позволяет применять эти материалы при решении прикладных задач.

Среди многочисленных вариантов использования СПФ, следует выделить инженерные приложения, в которых данные материалы выступают в качестве активных элементов управления. Примером такого использования СПФ могут служить актуаторы [5], силовозбудители крутящего момента [6], элементы управления аэродинамическими поверхностями летательного аппарата [7], винтовые пружины смещения [8], а также устройства рассеивания механической энергии, применяемые в механизмах сейсмо-безопасности [9] и космических ферменных конструкциях. Работа отмеченных выше устройств основана на новых физических принципах [10-18].

Первоочередным вопросом, при проектировании механизмов с использованием СПФ является способ придания элементу управления «обратимой памяти формы» [19], то есть способности накапливать деформации при охлаждении и нагреве в отсутствие напряжений. Так, наиболее распространены следующие способы: «пластическое» деформирование СПФ в аустенитном состоянии, «пластическое» деформирование в мартенситном состоянии,

охлаждение образца из СПФ через интервал температур ПМП под действием внешнего напряжения.

В первом случае реализуется так называемая аустенитная память формы. Образец из СПФ находится в высокотемпературном состоянии и нагружается монотонно возрастающим напряжением. Последующая упругая разгрузка и охлаждение приводит к тому, что образец деформируется в сторону противоположную начальной деформации. Нагрев, напротив, приведет к росту деформаций в направлении предварительного нагружения.

Пусть обратимая память формы создана вторым способом (мартенситная память формы). При деформировании образца из СПФ в низкотемпературном состоянии, реализуется явление мартенситной неупругости [20]. Оно заключается в нелинейном росте деформаций при монотонном росте приложенных напряжений. Нагрев образца из СПФ приведет к переходу его в аустенитное фазовое состояние и восстановлению первоначального, недеформированного состояния. Дальнейшее охлаждение, в отсутствие внешних напряжений, приведет к росту деформаций в ту же сторону, что и при предварительном деформировании. Последующее термоциклирование приводит к стабильной деформационной петле, размах которой зависит от величины предварительной деформации.

В случае если обратимая память формы создана в процессе ПМП под действием внешнего напряжения (реализуется мартенситная память формы), то при охлаждении, деформации будут развиваться в сторону ранее приложенного напряжения, при нагреве, напротив, в обратную сторону.

Реализация аустенитной памяти формы затруднена из-за необходимости проведения предварительного нагружения при высоких температурах. Для NiTi необходимая температура составляет порядка 400 °С. Вследствие этого, на практике, наибольшее распространение нашло использование мартенситной памяти формы. При этом требуется контролировать величину напряжений в образце из СПФ. Так уровень напряжений не должен превышать дислокационный предел текучести мартенситной фазы. Превышение данной величины напряжений может привести к ухудшению функциональных свойств СПФ [3].

Наиболее перспективными устройствами с точки зрения величины обратимой деформации являются механизмы, работающие на кручение. Так, стержень или трубка из СПФ могут быть использованы как рабочее тело торсионного актуатора или силовозбудителя крутящего момента. Принцип действия этих устройств заключается в использовании при рабочем ходе (нагреве) эффекта памяти формы (ЭПФ) [3]. Стержень или трубку из СПФ предварительно деформируют в мартенситном состоянии или переводят в данное фазовое состояние посредством охлаждения через интервал температур ПМП под действием постоянного крутящего момента. При этом накапливается неупругая (фазово-структурная деформация) и

стержень/трубка из СПФ закручивается на определенный угол, величина которого на порядок и более превышает упругое значение угла закручивания при действии равного по величине крутящего момента. Далее рабочее тело актуатора подвергается нагреву через интервал температур ОМП. Вследствие отмеченного выше ЭПФ, стержень/трубка из СПФ восстанавливает свою начальную форму. При этом снимаются фазово-структурные деформации, и уменьшается угол закручивания. Если восстановление первоначальной формы происходит при стесненном деформировании (например, при наличии постоянного противодействия или упругого контртела), то производится полезная работа.

Использование того или иного активного элемента из СПФ (стержень или трубка) зависит от специфики решаемой задачи, будь то требования по жесткости или массе, предъявляемые к устройству. Кроме того, значительное влияние на термомеханический отклик актуатора из СПФ оказывает температурный режим, при котором происходит эксплуатация изделия. Условно можно выделить два класса задач характерных для СПФ: изотермические и неизотермические. К первому классу относится, например, явление мартенситной неупругости при достаточно медленном нагружении и (или) интенсивном теплообмене, когда выделяющееся из-за диссипации тепло успевает рассеиваться и температура не меняется. Неизотермические задачи включают в себя процессы протекания в СПФ прямого и обратного термоупругого мартенситного превращения при охлаждении/нагреве с достаточной скоростью и (или) плохом теплообмене с окружающей средой, не достаточным для поддержания фиксированной температуры.

На протекание фазовых превращений (ФП) в СПФ существенное влияние оказывают действующие механические напряжения. В простейшем случае, считается, что действующие напряжения не оказывают влияния на характерные температуры ФП. Данная постановка задачи трактуется как несвязанная [21,22]. Однократно связанная постановка задачи напротив подразумевает зависимость температур ФП от действующих напряжений и деформаций [20]. Так наблюдается повышение характерных температур ФП при увеличении действующих механических напряжений. Наиболее полно поведение СПФ можно описать, учитывая влияние действующих напряжений на температуры ФП, а также выделение/поглощение латентного тепла ФП и диссипативные свойства СПФ. Такая постановка задачи трактуется как дважды связанная [23,24].

Учитывая вышеизложенное, разработка фундаментальных основ расчета и проектирование силовозбудителей, актуаторов и других устройств, работающих на кручение, с рабочим телом из СПФ является актуальной проблемой механики деформированного твердого тела. В виду объективной сложности определяющих соотношений, связывающих внутренние переменные материала, такие как напряжения, деформации, объемная доля мартенситной фазы,

а также влияние на характерные температуры фазовых превращений действующих напряжений и деформаций, актуальной задачей является разработка методов и алгоритмов анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) данных элементов, находящихся под действием различных силовых и температурных воздействий, а также их численная реализация.

Степень разработки темы исследования. В настоящее время в механике СПФ наибольшее внимание уделяется решению изотермических задач. Помимо отмеченного выше явления мартенситной неупругости, к изотермическому классу задач можно отнести процесс монотонного нагружения образца из СПФ, находящегося в полностью аустенитном фазовом состоянии при температуре выше температуры окончания обратного ФП. Данное явление известно в литературе под термином сверхупругость [25]. Наибольшее распространение, при решении данной задачи, находит постановка, в которой считается, что температура образца из СПФ не меняется в процессе нагружения и равна температуре окружающей среды. Реже учитываются выделение/поглощение латентного тепла ФП, диссипативные свойства СПФ и теплообмен с окружающей средой.

Так, в работе [26] выполнено численное моделирование явления сверхупругости при кручении и кручении совместно с растяжением для стержней сплошного круглого поперечного сечения из СПФ. Рассмотрение задачи ведется в рамках модели [27], при этом предполагается, что температура образца из СПФ остается неизменной в процессе нагружения/разгрузки. Кроме этого в работе [26] проведен эксперимент, целью которого является изучение поведения СПФ при восстановлении формы в условиях фиксации внешнего крутящего момента. Предполагается, что данные полученные при анализе будут использованы при проектировании устройств, управляющих углом атаки лопастей летательных аппаратов. В [28,29] в рамках модели, предложенной в [30,31] рассматривается задача кручения стержней из СПФ в режиме сверхупругости. При этом в [29] решение задачи выполнено с учетом выделения/поглощения латентного тепла ФП и теплообмена с окружающей средой. В рамках той же модели в работе [32] выполнено сравнение численного и конечно-элементного моделирования явления сверхупругости при кручении и кручении совместно с растяжением. В работе [33] предложена модификация модели поведения СПФ, изложенной в [30,31] и [34], с целью корректного описания поведения СПФ при биаксиальном нагружении в режиме сверхупругости с учетом скорости нагружения [35]. Результаты, полученные при решении, сравнивались с имеющимися у авторов экспериментальными данными. В [36,37] изучено поведение тонкостенных трубок из СПФ при кручении и кручении совместно с растяжением в режиме сверхупругости. Рассмотрение задачи ведется в рамках модели, предложенной в [38,39]. Полученное решение сравнивается с результатами конечно-элементного анализа. Аналогичная работа проведена в

[40], за той разницей, что решение задачи выполнено в рамках моделей [41,42], интегрированных в коммерческие пакеты конечно-элементного анализа. В работе [43] выполнено моделирование явления сверхупругости при кручении тонкостенных трубок из СПФ. Решение проведено для различных толщин трубок, в рамках моделей [30,31] и [44,45]. В [46] изучается поведение пружин смещения из СПФ, находящихся под действием осевых усилий в режиме сверхупругости. Решение выполнено в рамках модели [30,31], интегрированной в конечно-элементный комплекс Simulia Abaqus. Аналогичная задача решена в [47]. В данном случае использована модель поведения СПФ, предложенная в [27] и ее модификация на случай, конечно-элементного анализа [48]. В работах [49,50] выполнено сравнение результатов, полученных в ходе численного моделирования явления сверхупругости для пружин смещения из СПФ, в рамках моделей [51-55] и [56,57] соответственно, с приведенными в данных работах экспериментальными данными. Труды [58-68] посвящены разработке подходов и алгоритмов проектирования актуаторов, активным элементом которых является витая пружина смещения из СПФ. В данных работах наибольшее внимание уделяется экспериментальному исследованию поведения пружин из СПФ, при этом на основе полученных данных происходит корректировка моделей и корреляция входящих в них параметров материала, с целью обеспечения наибольшей точности расчетов. Кроме того, экспериментальному исследованию поведения стержней и трубок СПФ при кручении и кручении совместно с растяжением в режиме сверхупругости посвящены работы [66-76]. Качественно отличается работа [77], в которой в рамках модели [78] изложен подход к проектированию торсионного актуатора. При этом выполнен эксперимент на прямое и обратное мартенситное превращение при кручении.

В целом, задачи о прямом и обратном мартенситных ФП, вызванных изменением температуры и протекающих под действием внешнего крутящего момента решаются крайне редко. Это вызвано необходимостью проводить связанный термомеханический анализ поведения образцов из СПФ, а также использовать модели поведения СПФ, адекватно описывающие неизотермические процессы, протекающие в этих материалах.

Среди подобных работ следует выделить следующие труды. Так, в [6] приведено решение задачи о прямом термоупругом мартенситном ФП в стержне из СПФ, находящемся под действием постоянного крутящего момента. Рассмотрение задачи велось в несвязанной постановке, в рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [79-81]. В работе [82] в рамках той же модели решена аналогичная задача, но уже в однократно связанной постановке. В [83] решена несвязанная задача о ПМП в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, находящегося под действием постоянного крутящего момента и аналогичная задача для пружины смещения, находящейся под действием постоянной осевой

растягивающей силы. Решение задачи выполнено в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [84-88], при этом упругая составляющая тензора деформаций не учитывалась.

Цели и задачи работы.

1. Постановка краевых задач механики СПФ на случай кручения в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях.
2. Разработка алгоритмов анализа НДС элементов конструкций, содержащих СПФ при немонотонно меняющихся напряжениях в процессе протекания фазово-структурных превращений. Оценке влияния термомеханической связанности на получаемые результаты.
3. Анализ влияния материальных функций и констант СПФ, а также различных форм аппроксимации диаграммы ФП на общий характер решения рассматриваемых задач.
4. Исследование влияния структурного превращения на термомеханический отклик образцов из СПФ при различных термосиловых воздействиях.
5. Численное решение краевых задач механики СПФ для стержней сплошного круглого поперечного сечения и трубок из этих сплавов, задачи о пропорциональном изотермическом нагружении СПФ в мартенситном фазовом состоянии, задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем под действием постоянного крутящего момента, задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем под действием постоянного крутящего момента, а также на случай обратного превращения с упругим контртелом и в заневоленном состоянии, задачи о сверхупругом поведении тонкостенной трубки из СПФ при кручении с учетом выделения/поглощения латентного тепла ФП, диссипативных эффектов и теплообмена с окружающей средой.

Научная новизна.

1. Разработаны алгоритмы анализа НДС элементов конструкций содержащих СПФ, работающих на кручение. Приведенные в работе подходы к оценке НДС элементов из СПФ могут быть успешно использованы при решении краевых задач механики СПФ в однократно и дважды связанной термомеханической постановках при немонотонно меняющихся напряжениях в процессе протекания фазово-структурных превращений.
2. В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, качественно верно описывающей наиболее широкий круг явлений и свойств, характерных для этих сплавов, получено численное решение, с учетом упругих деформаций, изотермических задач о пропорциональном нагружении/разгрузке стержней и трубок из СПФ в

режимах мартенситной неупругости и сверхупругости. Получено аналитическое решение задачи о мартенситной неупругости.

3. В рамках той же модели проведено численное моделирование явлений как прямого, так и обратного термоупругих мартенситных фазовых превращений, протекающих под действием постоянного крутящего момента. Рассмотрение отмеченных задач велось в однократно связанной термомеханической постановке, с учетом возможности протекания структурного превращения как при прямом так и при обратном фазовом переходе.

4. В ходе работы получено численное решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне/трубке из СПФ, протекающем при переменном крутящем моменте, моделирующее рабочий ход торсионного актуатора. При этом рассмотрены случаи обратного превращения в заневоленном состоянии при фиксации полных деформаций системы, а также с упругим контртелом.

5. Проведено численное моделирование сверхупругого поведения тонкостенных трубок из СПФ при кручении. Решение выполнено в дважды связанной термомеханической постановке с учетом выделения/поглощения латентного тепла ФП, диссипативных свойств СПФ, а также теплообмена с окружающей средой.

Теоретическая и практическая значимость работы. Настоящее исследование проведено в рамках проекта РФФИ № 14-01-00189. В ходе работы получены важные с фундаментальной точки зрения результаты, которые отражают характер поведения СПФ при различных термосиловых нагружениях, в частности кручении. Отмеченные данные успешно применяются для решения прикладных задач.

Приведенные в диссертации алгоритмы и результаты численного анализа НДС элементов конструкций, содержащих СПФ, являются практически значимыми при проектировании адаптивных устройств различного назначения, а именно:

1. При оценке необходимого уровня предварительного деформирования (холостой ход) актуаторов, силовозбудителей крутящего момента, а также силовых приводов виде витых пружин смещения.

2. При определении допустимых силовых воздействий на элементы систем, содержащих СПФ, при их рабочем ходе.

3. Приведенные в работе результаты численного моделирования позволят проводить проектные изыскания на предмет рационального выбора потребного образца из СПФ, удовлетворяющего требованиям, предъявляемым к прочности и жесткости рассматриваемого изделия. Использование указанных результатов позволит увеличить энергетическую эффективность

работы перспективных адаптивных устройств, повысить надежность, улучшить массогабаритные характеристики изделия, а также сократить время их разработки.

Внедрение части результатов диссертационной работы выполнено в виде рекомендаций и технических предложений по реализации рационального варианта исполнения приводов системы управления аэродинамическими поверхностями летательного аппарата, а также методики оценки несущей способности элементов конструкции, содержащих СПФ и подтверждено актом ПАО «Компания «Сухой» «ОКБ Сухого».

Методология и методы исследования.

1. Модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях.
2. Аналитические методы решения краевых термомеханических задач для элементов из СПФ, основанные на положении об активных процессах пропорционального нагружения (АППН).
3. Аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Явные и неявные схемы пошагового численного решения связанных задач механики СПФ в приращениях.

Положения, выносимые на защиту:

1. Постановка задач кручения для элементов из СПФ в рамках модели нелинейного деформирования этих сплавов при фазовых и структурных превращениях.
2. Разработанные алгоритмы анализа термомеханического отклика образцов из СПФ при решении краевых задач в несвязанной, однократно и дважды связанной термомеханической постановках.
3. Решение задачи о пропорциональном нагружении/разгрузке стержней сплошного круглого поперечного сечения и трубок из СПФ в мартенситном фазовом состоянии.
4. Решение задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем в стержне сплошного круглого поперечного сечения и трубке из СПФ под действием постоянного крутящего момента.
5. Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем в стержне сплошного круглого поперечного сечения и трубке из СПФ под действием постоянного крутящего момента.
6. Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающего при переменном крутящем моменте, случай обратного превращения с упругим контртелом и в заневоленном состоянии.

7. Решение задачи о сверхупругом поведении тонкостенных трубок из СПФ при кручении в дважды связанной термомеханической постановке с учетом выделения/поглощения латентного тепла ФП, диссипативных свойств СПФ, а также теплообмена с окружающей средой.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Достоверность результатов, полученных в ходе выполнения диссертационной работы, подтверждается следующими положениями:

1. Решение поставленных в работе задач выполнено в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Данная модель многократно апробирована ранее. Получаемые в рамках нее результаты решения ряда тестовых задач, согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Кроме этого отмеченная модель корректно описывает теплофизические свойства СПФ. Определяющие соотношения данного блока получены непосредственно из первого и второго закона термодинамики.

2. В ходе решения задач о пропорциональном изотермическом нагружении/разгрузке образцов из СПФ (мартенситная неупругость и сверхупругость), инкрементальные определяющие соотношения для фазово-структурных деформаций сводятся к конечному алгебраическому уравнению, что позволяет придать решению задач аналитический вид. Полученные в рамках него результаты используются для установления достоверности результатов решения задач в случае невыполнения положения об АППН.

3. При рассмотрении задач о прямом и обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в связанной постановке достоверность полученных результатов подтверждается их сходимостью к решению соответствующих несвязанных задач, решение которых имеет аналитический вид.

4. Достоверность решения дважды связанной задачи о сверхупругом поведении тонкостенной трубки из СПФ при кручении, подтверждается сходимостью получаемых результатов (при варьировании скорости нагружения, коэффициента теплопередачи и пр.) к решению соответствующей изотермической задачи, которое также имеет аналитический вид.

Основные результаты диссертационной работы апробированы на:

1. XVI Российской конференции пользователей программных комплексов MSC Software. Москва, 21-22 мая 2013 г.

2. 2-ой Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». Москва, 17-19 декабря 2013 г.

3. «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел» – научное наследие Ю.Н. Работнова. Москва, 24-26 февраля 2014 г.

4. Международной конференции «Сплавы с памятью формы: свойства, технологии, перспективы». Витебск, республика Белорусь, 26-30 мая 2014 г.
5. XXVI Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов МИКМУС 2014. Москва, 17-19 декабря 2014 г.
6. Международной молодежной научной конференции «XLI Гагаринские чтения». Москва, 7-9 апреля 2015 г.
7. XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015 г.
8. XXVII международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов МИКМУС 2015. Москва, 2-4 декабря 2015 г.
9. 5-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Москва, 15-17 декабря 2015 г.
10. Международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2016 г.

Глава 1. Аналитический обзор моделей поведения сплавов с памятью формы.

Ключевым вопросом при оценке надежности работы элементов конструкций, содержащих СПФ, является выбор модели поведения этих материалов корректно описывающей характерное свойство СПФ или явление, присущие рассматриваемой задаче. Качественно можно выделить следующие группы моделей. Это микромеханические модели физической направленности, феноменологические модели и модели промежуточного уровня. К микромеханическим моделям можно отнести модель В.А. Лихачева - В.Г. Малинина [89-93], А.Е. Волкова - В.А. Лихачева - А.И. Разова [92-94]. Среди моделей промежуточного уровня отмечаются работы А.Е. Волкова [95-98] и Г.А. Малыгина [99-102]. Отмеченные модели физической направленности качественно верно описывают основные явления и процессы, протекающие в СПФ при термосиловом воздействии. Предполагается использование данных о микроструктуре СПФ для предсказания его макроскопического поведения. При этом их применение требует больших вычислительных мощностей и определения специфических параметров материала, которые не могут быть напрямую получены из экспериментов. Кроме этого, в рамках отмеченных моделей система определяющих соотношений имеет достаточно сложный вид, решение которой затруднено при рассмотрении задач механики СПФ.

В целом, данная работа посвящена решению краевых задач и не рассматривает микроструктурные процессы в СПФ, поэтому наибольшее внимание будет уделено моделям феноменологической направленности. Применение отмеченных моделей предполагает использование данных полученных непосредственно из испытаний образцов из СПФ. Они относительно просты для численного применения и решения прикладных задач, а также менее требовательны к вычислительным ресурсам. При этом данная группа моделей, качественно верно описывает макроскопическое поведение образцов из СПФ под действием различных термосиловых воздействий. Среди феноменологических моделей известны работы С.А. Абдрахманова [103-106], Ауричио [107], Бринсон [27], Лианга и Роджерса [78,108], Лекселента [109,110], Бо и Лагудаса [30,31], Танаки [111] и других авторов. Наибольшее распространение при решении задач кручения элементов из СПФ сыскали модели Танаки, Лианга и Роджерса, Бринсон, Бо и Лагудаса, которые в дальнейшем, для краткости, будут называться первая, вторая, третья и четвертая модель соответственно. Так в основе моделей один, два и три лежит схожее определяющее соотношение (с точностью до обозначений), устанавливающие связь между напряжениями, деформациями, температурой и используемыми в моделях внутренними переменными, такими как объемная доля мартенситной фазы. На случай приращений отмеченных величин, определяющее соотношение имеет следующий вид:

$$\dot{\sigma} = D : \dot{\varepsilon} + \Theta \dot{T} + \Omega \dot{\xi} \quad (1.1)$$

В данных моделях используются конечные деформации Грина-Лагранжа ε , поэтому σ представляет здесь второй тензор напряжений Пиола-Кирхгоффа, T – актуальная температура образца из СПФ, ξ – объемная доля мартенситной фазы. Тензора D, Θ, Ω – есть тензор упругих модулей, термомеханический тензор и тензор фазового перехода соответственно. Здесь точка обозначает производную по времени, а двоеточие – суммирование по повторяющемуся индексу. При этом тензора D и Ω связаны следующим соотношением:

$$\varepsilon_l = -D^{-1} : \Omega \quad (1.2)$$

где ε_l – максимальная восстанавливаемая (снимаемая) фазово-структурная деформация при ОМП.

Уравнения (1.1) и (1.2) являются базовыми соотношениями модели Танаки, при этом для определения величины объемной доли мартенситной фазы принимаются соотношения приведенные ниже:

$$\xi = 1 - \exp[b_M C_M (M_s - T) + b_M \sigma] \quad (1.3)$$

$$\xi = \exp[b_A C_A (A_s - T) + b_A \sigma] \quad (1.4)$$

где M_s и A_s – температуры начала и окончания прямого и обратного мартенситного превращения соответственно, $b_{A,M}, C_{A,M}$ – параметры материала, связанные с влиянием внешних напряжений на температуры фазовых переходов. Соотношение (1.3) верно на случай прямого превращения, (1.4) на случай обратного.

Рассматривая уравнения (1.3) и (1.4) можно заключить, что параметр ξ асимптотически стремится к единице, в случае прямого превращения, и нулю, в случае обратного, но никогда не достигает отмеченных величин. Данный факт приводит к проблеме определения момента завершения соответствующего фазового перехода. Для решения этого вопроса в работе [111] предлагается считать ФП завершенным в том случае, когда объемная доля мартенситной или аустенитной фазы равна 0.99.

Дальнейшее развитие модель Танаки получила в работах Лианга и Роджерса. Главное отличие модели номер два от модели Танаки заключается в соотношениях для определения объемной доли мартенсита ξ . Так, в работе [108] предложены следующие уравнения для определения ξ :

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ \cos [a_M (T - M_f) + b_M \sigma] + 1 \right\} \quad (1.5)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ \cos [a_A (T - A_s) + b_A \sigma] + 1 \right\} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5) и (1.6) лишены недостатка соотношений (1.3) и (1.4) и позволяют получить качественно верные диаграммы фазовых переходов для различных СПФ.

Модель три является продолжением работ отмеченных выше авторов. Ключевое отличие данной модели от моделей Танаки и Лианга-Роджерса, заключается в следующих двух положениях. В рамках первого постулируется, что объемная доля мартенситной фазы состоит из двух компонент, ξ_T – мартенсита, появление которого вызвано температурным воздействием, имеющим хаотическую структуру и ξ_s – мартенсита, инициированного действием внешних напряжений, имеющего ориентированную структуру. Данное положение приводит к тому, что объемная доля мартенсита вычисляется как $\xi = \xi_T + \xi_s$.

В рамках второго положения принимается, что тензора D и Ω есть функции объемной доли мартенсита ξ так, что $D(\xi) = D_A + \xi(D_M - D_A)$, $\Omega(\xi) = -\varepsilon_l D(\xi)$. Здесь нижний индекс « A, M » означает значение величины в аустенитном и мартенситном фазовом состоянии. Кроме этого считается, что существуют пороговые напряжения начала и окончания раздвойникового мартенсита, σ_s^{cr} и σ_f^{cr} , в случае деформировании образца из СПФ в низкотемпературном состоянии. При этом данные критические напряжения являются функциями температуры, такими, что уменьшение температуры ниже M_s приводит к росту величин σ_s^{cr} и σ_f^{cr} .

Рассмотрим применимость отмеченных выше моделей (один, два и три) к моделированию фазовых и структурных переходов в СПФ. В качестве первого примера рассмотрим процесс ПМП под действием постоянного внешнего напряжения. Так в случае постоянства напряжений уравнение (1.1) примет следующий вид:

$$0 = D : \dot{\varepsilon} + \Theta \dot{T} + \Omega \dot{\xi} \quad (1.7)$$

Очевидно, что в рамках соотношения (1.7) деформация, накапливаемая за процесс ПМП, не зависит от величины приложенного напряжения, что не согласуется с имеющимися экспериментальными данными [20].

Во втором примере, используем соотношение (1.1) для предсказания поведения СПФ при его монотонном нагружении в режиме мартенситной неупругости. При этом объемная доля мартенситной фазы и температура образца из СПФ являются постоянными величинами. Тогда уравнение (1.1) переписывается следующим образом:

$$\dot{\sigma} = D : \dot{\varepsilon} \quad (1.8)$$

В рамках соотношения (1.8) зависимость деформаций от приложенных напряжений есть линейная функция σ . Это положение не соответствует экспериментальным данным, в которых нелинейный характер деформирования образца из СПФ в режиме мартенситной неупругости отмечается с самого начала нагружения [4,20].

Кроме этого, в рамках отмеченных моделей для определения связи между напряжениями, деформациями, температурой и объемной долей мартенсита предлагается использовать конечное соотношение, полученное из уравнения (1.1) путем интегрирования его по частям. С учетом представления объемной доли мартенсита как $\xi = \xi_T + \xi_s$, отмеченное уравнение имеет следующий вид:

$$\sigma + K = D_A \varepsilon + (D_M - D_A) \xi \varepsilon + C(\xi) - \varepsilon_l D_A \xi_s - \varepsilon_l (D_M - D_A) \left[\frac{\xi_s^2}{2} + \xi_T \xi_s \right] + \Theta T \quad (1.9)$$

где $K, C(\xi)$ – произвольная постоянная и произвольная функция ξ , определяемые из начальных условий.

В то же время использование конечных соотношений при решении задач механики СПФ может привести к некорректным результатам, в виду того что деформации связанные с фазовыми и структурными превращениями зависят от истории нагружения образца.

Также недостаточно обоснованным является разделение объемной доли мартенситной части на температурную и силовую компоненту, в виду того, что образованию мартенситных элементов есть связанный термомеханический процесс. К тому же, четкое выделение одного вида мартенсита на микроуровне не представляется возможным, рисунок 1.1 [4].

Учитывая вышеизложенное, использование моделей один, два и три при решении задач механики СПФ приведет к неизбежным ошибкам в оценке НДС исследуемых образцов.

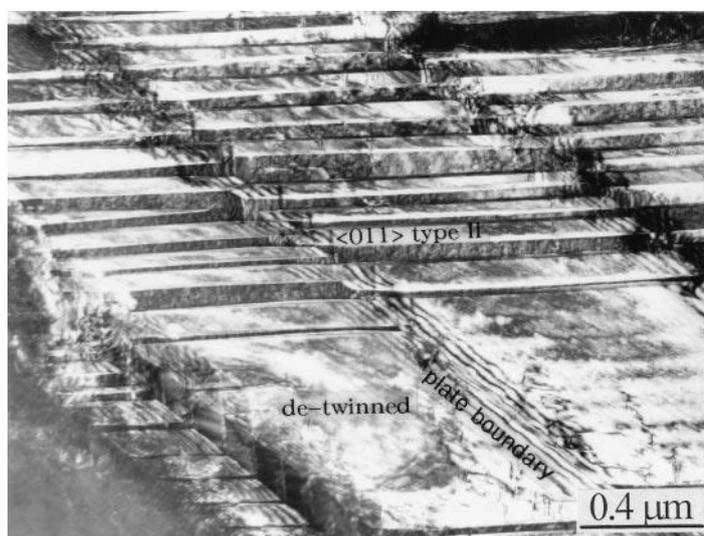


Рисунок 1.1 – Мартенситные элементы.

Далее рассмотрим возможности и границы применения модели номер четыре. Основные положения данной модели приведены в работах [30,31]. При этом в работе [34] проведен ряд модификаций модели Бо-Лагудаса, в соответствии с наблюдаемыми в экспериментах зависимостями, характерными для СПФ. В частности уравнение связывающие приращение неупругой деформации с приращением объемной доли мартенсита имеет следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}^t = \Lambda^t \dot{\xi}, \quad \Lambda^t = \begin{cases} \Lambda_{fwd}^t, & \dot{\xi} > 0 \\ \Lambda_{rev}^t, & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\Lambda_{fwd}^t = \frac{3}{2} H^{cur}(\bar{\sigma}) \frac{\sigma'}{\bar{\sigma}}, \quad \Lambda_{rev}^t = \frac{\varepsilon^{t-r}}{\xi^r} \quad (1.11)$$

здесь нижний индекс «fwd» обозначает прямое, а «rev» – обратное мартенситное превращение, параметр $H^{cur}(\bar{\sigma})$ коррелирует с ранее введенной величиной ε_t , за той разницей, что он является функцией интенсивности напряжений $\bar{\sigma}$, σ' – девиатор напряжений, ε^{t-r} – текущая фазово-структурная деформация. В ранее опубликованных работах этих авторов предполагалось, что величина H^{cur} является константой. Легко показать, что в этом случае деформация, накапливаемая за процесс ПМП, не зависит от величины действующих напряжений. Как уже отмечалось выше, данное положение не согласуется с экспериментальными данными. В тоже время считается, что существует некое пороговое напряжение $\bar{\sigma}_{crit}$ и в случае действия напряжений ниже $\bar{\sigma}_{crit}$ не происходит накопления неупругих фазово-структурных деформаций. Это положение также не подтверждается экспериментально, в виду наличия у СПФ объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения [93]. Кроме того, в процессе ПМП, протекающего под действием внешнего напряжения, фазово-структурная деформация накапливается не только за счет образования, но и за счет развития уже имеющихся мартенситных элементов. Блок уравнений (1.10,1.11) не позволяет оценить вклад развития мартенситных элементов в фазово-структурную деформацию образца из СПФ. Используя данную модель, возможно учесть только процесс зарождения мартенсита, и в рамках нее не представляется возможным моделировать явления, при которых либо весь, либо часть ФП происходит при нулевых напряжениях. Аналогичные недостатки присущи модели, предложенной в работах С. LExcellent с соавтрами [109,110].

В рассматриваемой модели, в качестве термодинамического потенциала, в рамках которого идет описание поведения СПФ, выбран потенциал Гиббса G . Предполагается, что он состоит не только из аддитивных слагаемых по отношению к параметру фазового состава (объемная доля мартенсита), но и имеет неаддитивную часть, связанную с взаимодействием аустенитной и мартенситной фазы, при этом в качестве переменных состояния выступают величины напряжений σ , температуры T , неупругой деформации ε^t , объемной доли мартенсита ξ и энергии упрочнения g^t :

$$G(\sigma, T, \varepsilon^t, \xi, g^t) = (1 - \xi)G^A(\sigma, T) + \xi G^M(\sigma, T) + G^{mix}(\sigma, \varepsilon^t, g^t) \quad (1.12)$$

Неаддитивной части потенциала Гиббса приписывают различные выражения для прямого и обратного мартенситного превращения:

$$G^{mix}(\sigma, \varepsilon^t, g^t) = -\frac{1}{\rho} \sigma : \varepsilon^t + \frac{1}{\rho} g^t \quad (1.13)$$

$$g^t = f^t \dot{\xi}, \quad f^t = \begin{cases} f_{fwd}^t, & \dot{\xi} > 0 \\ f_{rev}^t, & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

$$f_{fwd}^t = \frac{1}{2} a_1 \left(1 + \xi^{n_1} - (1 - \xi)^{n_2} \right) + a_3 \quad (1.15)$$

$$f_{rev}^t = \frac{1}{2} a_2 \left(1 + \xi^{n_3} - (1 - \xi)^{n_4} \right) + a_3 \quad (1.16)$$

где f^t – функция упрочнения, ρ – плотность материала, параметры $a_{1,2,3}$ и $n_{1,2,3,4}$ определяются экспериментально. Наличие неаддитивной части приводит к тому, что данный термомеханический потенциал (1.12) становится функционалом истории изменения входящих в него переменных состояния и перестает быть однозначной их функцией.

Для скорости механической диссипации принимается следующее соотношение:

$$(\sigma : \Lambda^t + p - f^t) \dot{\xi} = \pi^t \dot{\xi} > 0, \quad \forall \dot{\xi} \neq 0 \quad (1.17)$$

$$p = -\rho \frac{\partial G}{\partial \xi} \quad (1.18)$$

где π^t – термодинамическая сила, которая априорно считается положительной в случае прямого и отрицательной, в случае обратного мартенситного превращения. При этом данная гипотеза не может быть проверена непосредственно из эксперимента.

На основании выше изложенного можно заключить, что в рамках рассматриваемой модели возможно качественно верное описание поведения СПФ при неизотермических процессах. В тоже время, отмеченные недостатки модели не позволяют оценить НДС образца из СПФ с достаточной точностью, а также корректно определить его текущую температуру.

Рассмотрев четыре модели поведения СПФ можно выделить основные требования, предъявляемые к ним, с точки зрения применения их при проектировании работающих на кручение активных элементов, выполненных из СПФ:

- Модель должна качественно и количественно верно описывать как изотермическое, так и неизотермическое поведение образца из СПФ при термосиловом воздействии. Для этого основные определяющие соотношения для неупругих фазово-структурных деформаций должны быть представлены в дифференциальном виде, в виду ее зависимости от термомеханического пути нагружения.

- Основные гипотезы модели, а также результаты, получаемые при моделировании, должны согласовываться с имеющимися экспериментальными данными.

• Модель должна корректно описывать теплофизические свойства СПФ, такие как выделение/поглощение латентного тепла ФП, а также диссипативные свойства СПФ. При этом формулировка термомеханического потенциала должна быть наиболее проста. Кроме этого, не следует принимать априорных гипотез относительно скорости механической диссипации, которые не могут быть проверены непосредственно из эксперимента.

Отмеченным положениям удовлетворяет модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, предложенная в трудах [84-88]. В рамках данной модели предполагается аддитивное представление тензора деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{phst} + \varepsilon_{ij}^T \quad (1.19)$$

где ε_{ij}^e – упругие деформации:

$$\varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G(q)}, \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K(q)}, \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A} \quad (1.20)$$

Неупругие и температурные деформации:

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{phst'}, d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st}, \varepsilon_{ij}^T = \alpha(T - T_0)\delta_{ij} \quad (1.21)$$

Приращение фазовых деформаций:

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}^+ dq, \omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho_d \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} (1 - qf'(q)) F_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'}, \text{ при } dq > 0 \quad (1.22)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}^- dq, \omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}, \text{ при } dq < 0 \quad (1.23)$$

Приращение структурных деформаций как при прямом, так и при обратном мартенситном превращении:

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_d \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q F_2'(\sigma_i) d\sigma_i, \text{ при } d\sigma_i > 0, \text{ иначе } d\varepsilon_{ij}^{st} = 0 \quad (1.24)$$

Для определения параметра фазового состава справедлив следующий блок уравнений:

$$q = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi t_\sigma)) \quad (1.25)$$

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f}, M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma_{ij}' + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S_0}, \text{ при } dq > 0 \quad (1.26)$$

$$t_\sigma = 1 - \frac{A_s^\sigma - T}{A_s^0 - A_f}, A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^- \sigma_{ij}' Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S_0}, \text{ при } dq < 0 \quad (1.27)$$

$$6Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{K_A K_M} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{G_A G_M}, \Delta(K, G) = K_A, G_A - K_M, G_M \quad (1.28)$$

В рассматриваемой модели в качестве термодинамического потенциала выбран потенциал Гиббса Ψ , причем та его разновидность, которая получается из свободной энергии с помощью преобразования Лежандра с применением термоупругих, а не полных деформаций. В качестве внутренних переменных выступают напряжения σ_{ij} , температура T , параметр фазового состава q и девиатор фазово-структурной деформации $\varepsilon_{ij}^{phst'}$. Считается, что Ψ зависит только от первых трех величин, $\Psi = \Psi(\sigma_{ij}, T, q)$. Здесь Ψ – объемная плотность термодинамического потенциала.

Выражение для скорости механической диссипации, получается непосредственно из второго закона термодинамики и имеет следующий вид:

$$D_1 = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{phst'} - \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q} \geq 0 \quad (1.29)$$

В итоге, для замыкания системы уравнений, используется связанное уравнение энергетического баланса [23,112,113]:

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T \alpha \dot{\sigma}_{kk} - \left(\Delta U_0 + \frac{\sigma_{kk} \varepsilon_0}{3} + \omega_{ij} \sigma_{ij}' \right) \dot{q} - \rho_d q F_2'(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i \quad (1.30)$$

где $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^T$ – полная и температурная деформации, штрихом обозначены компоненты девиатора, $\sigma_{ij}, \sigma_{kk}, \sigma_i, \sigma_{ij}'$, – тензор, первый инвариант, интенсивность и девиатор напряжений, K, G – утроенный объемный модуль и модуль сдвига, нижний индекс «М» – значение величины в мартенситной фазе, «А» – в аустенитной, ρ_d – интенсивность кристаллографической деформации фазового превращения, ε_0 – линейная деформация объемного эффекта реакции прямого превращения, δ_{ij} – единичный тензор. M_s, M_f, A_s, A_f – температуры начала и окончания прямого/обратного мартенситного превращения, верхний индекс 0 соответствует случаю отсутствия напряжений, σ – наличие напряжений, $\Delta U_0, \Delta S_0$ – скачки объемных плотностей внутренней энергии и энтропии при переходе от мартенситного фазового состояния в аустенитное для отсчетной температуры T_0 , k_q – коэффициент теплопроводности, ΔT – градиент температуры, C_σ – теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении, α – коэффициент линейного температурного расширения. $F_{1,2}(\sigma_i)$ – интегральные функции распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном и мартенситном фазовом состояниях соответственно, штрих у функции $F_2(\sigma_i)$ обозначает производную по σ_i , $f(q)$ – материальная функция определяющая вклад в приращение фазовой деформации процессов

зарождения и развития мартенситных элементов. Точка в уравнении энергетического баланса обозначает производную по времени.

На основании уравнений (1.21-1.24) можно заключить, что неупругая деформация в рамках данной модели вычисляется на основе дифференциальных соотношений, что позволяет верно оценить ее вклад в суммарную деформацию системы, учитывая тот путь термомеханического нагружения, который проходит образец из СПФ. Рассмотрев уравнение (1.22) становится очевидно, что данная модель позволяет учесть вклад развития мартенситных элементов в фазовую деформацию, за счет наличия в нем функции $f(q)$, которая может быть определена непосредственно из опыта на ориентированное превращение [114]. Кроме того, в рамках данной модели предполагаются одинаковые выражение для термомеханического потенциала как для прямого, так и для обратного мартенситного превращения. При этом не используются никакие априорные гипотезы относительно скорости механической диссипации.

Учитывая вышеизложенное, использование нелинейной модели деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях позволяет решать широкий класс задач, характерных для СПФ. В том числе моделировать процессы термоупругих фазовых превращений при действии или отсутствии внешнего механического напряжения. Рассматривать совокупность изотермических задач (мартенситная неупругость), а также проводить связанный термомеханический анализ поведения СПФ в режиме сверхупругости. Кроме того, данная модель может быть успешно применена при анализе НДС систем, содержащих конструктивные элементы из СПФ, работающие на кручение, разработке алгоритмов и методов анализа поведения которых посвящены дальнейшие главы настоящей работы.

Глава 2. Изотермическое кручение стержней и трубок из сплава с памятью формы в мартенситном фазовом состоянии.

Явление мартенситной неупругости реализуется при монотонном изотермическом нагружении образца из СПФ, находящегося в низкотемпературном (мартенситном) фазовом состоянии. Оно сопровождается раздвойникованием и переориентацией имеющихся мартенситных элементов, что проявляется на макроуровне как накопление неупругой структурной деформации. При этом отсчет деформаций начинается от состояния хаотического мартенсита, обладающего уже объемной деформацией (эффект объемной реакции ПМП). Поэтому структурные деформации уже сами по себе являются девиатором.

Как правило, изотермическое нагружение образца из СПФ в мартенситном состоянии осуществляется с целью придания ему структурной деформации (холостой ход актуатора), которая будет сниматься при последующем нагреве в соответствии с явлением памяти формы (рабочий ход). Кроме этого, при эксплуатации изделия возможна вариация температуры окружающей среды, и как следствие, изменение фазового состава образца. В случае падения температуры ниже температуры окончания прямого мартенситного превращения M_f , СПФ будет находиться полностью в мартенситном состоянии. Учитывая вышеизложенное, оценка НДС устройства, содержащего СПФ невозможна без построения решения, в рамках которого удастся учесть особенности деформирования СПФ в мартенситном состоянии.

В данной главе рассматриваются задачи кручения трубок и стержней сплошного круглого поперечного сечения из СПФ в режиме мартенситной неупругости. При этом решение задачи ведется в цилиндрической системе координат r, z, φ , рисунок 2.1. Принимаются обычные кинематические гипотезы [115] (в том числе положение об отсутствии депланации сечения). Считается, что параметр фазового состава q равномерно распределен по сечению трубки/стержня и равен единице.

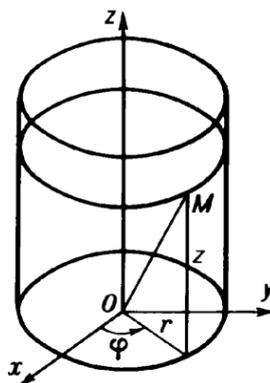


Рис. 2.1 – Цилиндрическая система координат r, z, φ .

2.1. Решение задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме мартенситной неупругости.

При решении задачи толщина трубки считается достаточно малой, так, что напряжения распределены по ее сечению равномерно. Так, касательные напряжения и упругая крутка (относительный угол закручивания на единицу длины) определяются на основе следующих соотношений:

$$\tau_{z\varphi} = \frac{M}{2\pi R^2 \delta} \quad (2.1)$$

$$\theta = \frac{M}{2\pi R^3 G \delta} \quad (2.2)$$

где M – внешний крутящий момент, G – модуль сдвига, R, δ – радиус срединной поверхности и толщина трубки соответственно.

В рамках вышеизложенной системы уравнений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, доказано следующее положение [84-88]. Пусть, во первых, осуществляется активный процесс прямого и (или) структурного перехода, когда $dq > 0$ и (или) $d\sigma_i > 0$. Во вторых, компоненты девиатора напряжений меняются пропорционально одному параметру: $\sigma'_{ij}/\sigma_i = \text{const}$ и, в третьих, функции распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном и мартенситном фазовых состояниях совпадают $F_1(\sigma_i) = F_2(\sigma_i)$, тогда решение системы определяющих уравнений для девиатора фазово-структурных деформаций $\varepsilon_{ij}^{phst'}$, при независимых переменных q, σ'_{ij} , удовлетворяющее начальному условию $\varepsilon_{ij}^{phst'}(q_0, \sigma_{ij}^{0'}) = \varepsilon_{ij}^0$ не зависит от истории изменения переменных q и σ'_{ij} , а однозначно определяются начальной и конечной точкой процесса в соответствии с зависимостью:

$$\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} F_{1,2}(\sigma_i) \rho_d q + \left(\varepsilon_{ij}^0 - \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^{0'}}{\sigma_i^0} \rho_d q_0 \right) \exp\left(\int_{q_0}^q f(q) dq\right) \quad (2.3)$$

Если начальные значения деформаций ε_{ij}^0 удовлетворяют начальному условию, такому что:

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^{0'}}{\sigma_i^0} F_{1,2}(\sigma_i^0) \rho_d q_0 \quad (2.4)$$

то решение (2.3) существенно упрощается:

$$\varepsilon_{ij}^{plast'} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F_{1,2}(\sigma_i) \rho_d q \quad (2.5)$$

При этом полные деформации системы определяются на основе соотношения приведенного ниже:

$$\varepsilon_{ij}' = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F_{1,2}(\sigma_i) \rho_d q + \frac{\sigma_{ij}'}{2G(q)} \quad (2.6)$$

При рассмотрении явления мартенситной неупругости, выполняются все отмеченные выше положения. Процесс нагружения является активным и пропорциональным, и нет необходимости требования выполнения третьего условия, так как весь материал трубки находится в мартенситном фазовом состоянии. Тогда умножая уравнение (2.6) само на себя и сворачивая по двум индексам можно получить конечное уравнение, связывающее интенсивности напряжений и деформаций:

$$\varepsilon_i = F_2(\sigma_i) \rho_d q + \frac{\sigma_i}{3G(q)} \quad (2.7)$$

При рассмотрении задачи мартенситной неупругости возможно, по крайней мере, две постановки решения задачи. В рамках первой постановки пренебрегается упругими компонентами тензора деформаций. В таком случае уравнение (2.7) принимает следующий вид:

$$\varepsilon_i = F_2(\sigma_i) \rho_d q \quad (2.8)$$

Так как задача кручения тонкостенных трубок является статически определимой, то уравнение (2.8) устанавливает однозначную связь между интенсивностями деформаций напряжений. Зная историю изменения внешнего крутящего момента в виде массива данных, можно получить соответствующий массив напряжений согласно соотношению (2.1). Зная величины напряжений для каждого уровня крутящего момента, вычисляются неупругие деформации согласно уравнению (2.8). В данном случае они составляют полные деформации системы, в виду не учета при решении упругих деформаций.

В рамках второй постановки, решение задачи происходит с учетом упругих компонент тензора деформаций. При этом общий алгоритм решения задачи остается прежним, за той лишь разницей, что полные деформации системы вычисляются согласно соотношению (2.7), которое вообще говоря, является нелинейным уравнением относительно интенсивности напряжений.

Учитывая, что на случай кручения $\varepsilon_i = \gamma / \sqrt{3}$, $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$, здесь γ, τ – деформации сдвига и касательные напряжения соответственно (здесь и далее нижний индекс у $\tau_{z\varphi}$ опущен для краткости), а также, что материал трубки находится в полностью мартенситном состоянии $G(q) = G_M$ и $q = 1$, уравнение (2.7) примет следующий вид:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \rho_d F_2(\sqrt{3}\tau) + \frac{\sqrt{3}\tau}{3G_M} \quad (2.9)$$

Дальнейшая конкретизация уравнения (2.9) требует определения функции $F_2(\sqrt{3}\tau)$, которая находится на основании экспериментальных данных. Данная функция находится из аппроксимации диаграммы мартенситной неупругости (2.8). Отмеченной диаграмме хорошо соответствуют распределения Вейбулла или распределение Лапласа с порогами [86]. В данном случае, в качестве функции распределения интенсивности микронапряжений в мартенситном фазовом состоянии используется распределение Вейбулла, так что:

$$F_2(\sqrt{3}\tau) = 1 - \exp\left(-(\sqrt{3}\tau)^\alpha\right) \quad (2.10)$$

Аргумент функции $F_2(\sqrt{3}\tau)$ удобно обезразмерить путем деления на некоторое характерное напряжение σ_0 : $F_2(\sqrt{3}\tau) = \Phi_2(\sqrt{3}\tau / \sigma_0)$ или вводя обозначение $s = \sigma_i / \sigma_0 = \sqrt{3}\tau / \sigma_0$, можно получить, что $F_2(\sqrt{3}\tau) = \Phi_2(s)$. Тогда уравнение (2.10) примет следующий вид:

$$F_2(\sqrt{3}\tau) = 1 - \exp(-s^\alpha) \quad (2.11)$$

Вводя безразмерную величину модуля сдвига $g_M = G_M / \sigma_0$, окончательно получим:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \rho_d \left(1 - \exp(-s^\alpha)\right) + \frac{s}{3g_M} \quad (2.12)$$

Параметры α и σ_0 , входящие в функцию распределения микронапряжений должны быть определены непосредственно из опыта. В данном случае, при моделировании использованы величины, соответствующие СПФ типа равноатомного никелида титана.

На рисунке 2.2 приведены кривые мартенситной неупругости, полученные для $\sigma_0 = 100$ МПа. Кривые приведены парами, так верхняя кривая получена без учета упругих деформаций, нижняя с учетом. Сплошные линии соответствуют величине $\alpha = 2$, штриховые $\alpha = 4$, пунктирные $\alpha = 6$. На фигуре s – это безразмерные напряжения, γ – полные деформации. Как видно из приведенного рисунка учет упругих деформаций существенен при решении данной задачи и их не учет при рассмотрении задач кручения приведет к неверным количественным заключениям о НДС элементов конструкций из СПФ.

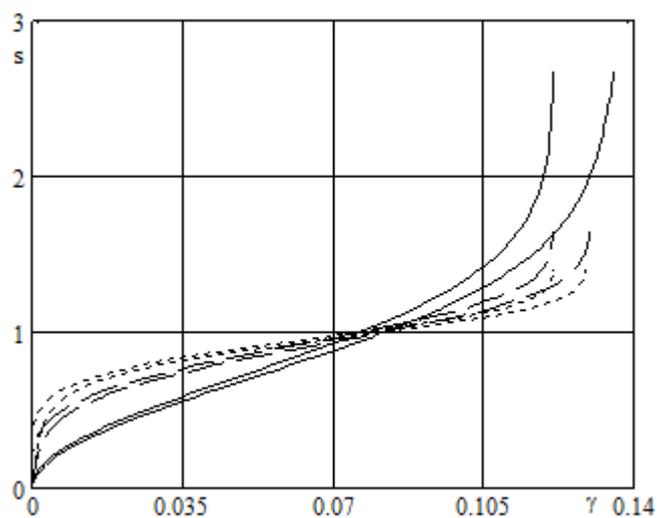


Рисунок 2.2 – Кривые $s - \gamma$, $\sigma_0 = 100$ МПа.

На рисунках 2.3, 2.4 приведены кривые мартенситной неупругости, полученные при $\sigma_0 = 125$ и 150 МПа, соответственно.

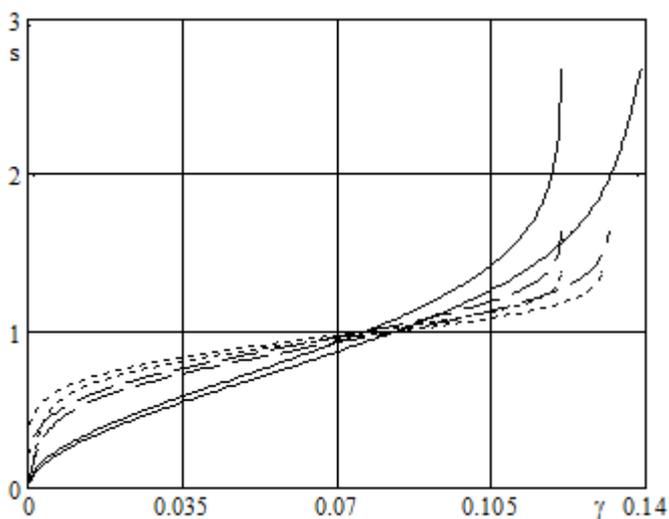


Рисунок 2.3 – Кривые $s - \gamma$, $\sigma_0 = 125$ МПа.

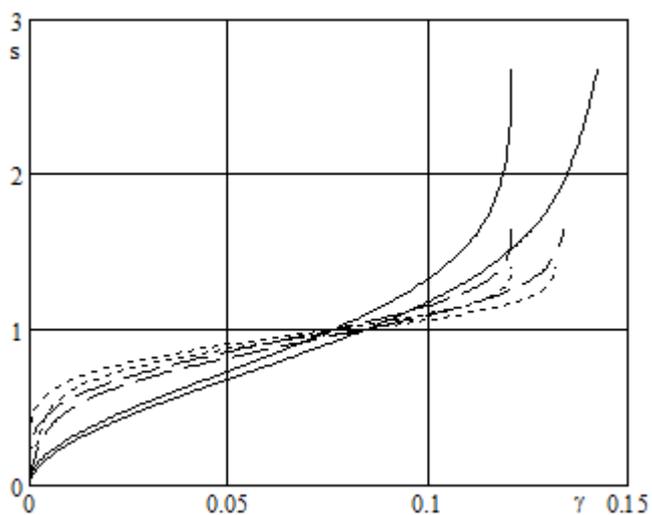


Рисунок 2.4 – Кривые $s - \gamma$, $\sigma_0 = 150$ МПа.

Из рисунков 2.2-2.4 видно, что учет упругих деформаций наиболее существенен для высоких уровней напряжений. Стоит отметить, что при решении задачи уровень деформаций ограничен сверху кристаллографической деформацией. Превышение данной величины деформаций может привести к ухудшению функциональных свойств СПФ. Также очевидно, что изменение параметра α существенно меняет характер кривых мартенситной неупругости. Так с его увеличением, уменьшается уровень напряжений, при тех же деформациях.

На рисунках 2.5-2.7 приведены результаты моделирования, отражающие зависимость кривых мартенситной неупругости от величины σ_0 . Приведенные кривые получены с учетом упругих деформаций. Здесь сплошная линия соответствует $\sigma_0 = 100$ МПа, штриховая $\sigma_0 = 125$ МПа, пунктирная $\sigma_0 = 150$ МПа.

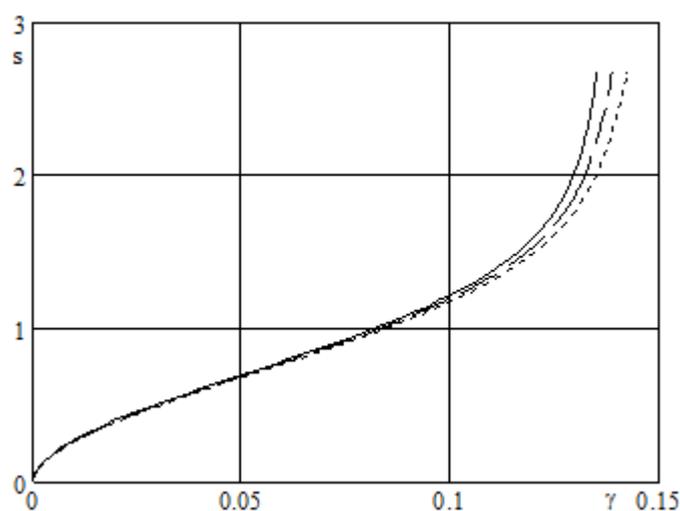


Рисунок 2.5 – Кривые $s - \gamma$, $\alpha = 2$.

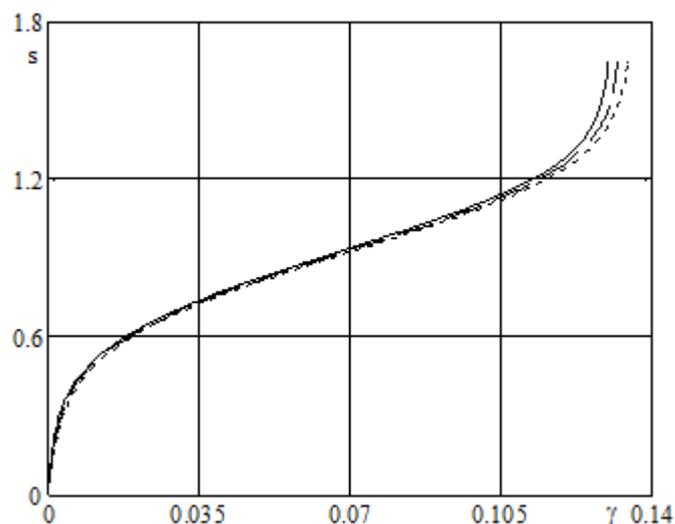


Рисунок 2.6 – Кривые $s - \gamma$, $\alpha = 4$.

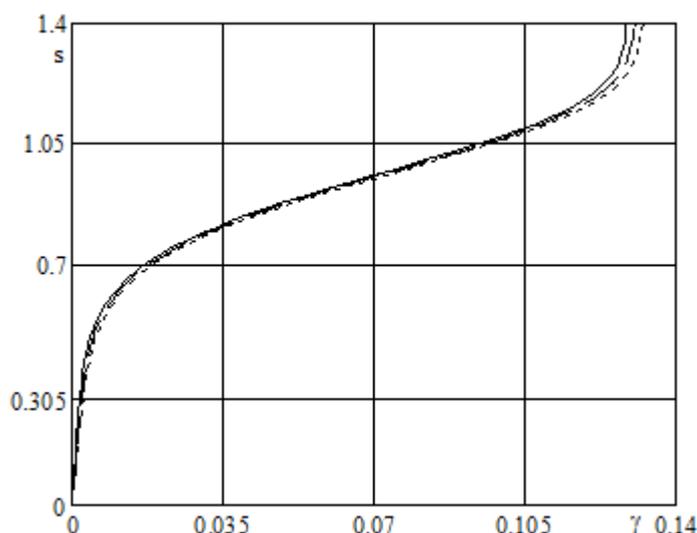


Рисунок 2.7 – Кривые $s - \gamma$, $\alpha = 6$.

Исходя из данных, приведенных на рисунках 2.5-2.7 видно, что влияние вариации параметра σ_0 наиболее существенно для значения $\alpha = 2$. Наибольшее отличие наблюдается в области высоких напряжений. Так, увеличение σ_0 приводит к росту накапливаемой деформации в процессе нагружения. Для величин $\alpha = 4,6$ изменение параметра σ_0 незначительно влияет на результаты моделирования явление мартенситной неупругости. Вообще, в выбранных координатах влияние величины σ_0 не велико, т.к. оно определяется только упругими деформациями (второе слагаемое правой части (2.12)), которые существенно меньше структурных.

2.2. Решение задачи кручения толстостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме мартенситной неупругости.

При рассмотрении задачи кручения толстостенных трубок считается, что существует градиент напряжений по толщине трубки. В силу статической неопределимости задачи, распределение напряжений по сечению заранее не известно. При этом остаются правомерны все гипотезы принятые в пункте 2.1, в том числе положение об АППН. Постановка задачи, в которой не учитываются упругие деформации, не рассматривается. В данном случае, уравнение для определения крутящего момента имеет следующий вид:

$$M = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \tau r^2 dr \quad (2.13)$$

где r и $r_{1,2}$ – текущий, внутренний и внешний радиус трубки соответственно.

Принимая гипотезу плоских сечений для полных деформаций системы, можно связать между собой сдвиговую деформацию и крутку (относительный угол закручивания на единицу длины), так что: $\gamma = \theta r$. Тогда уравнение (2.12) переписывается в следующем виде:

$$\frac{\theta r}{\sqrt{3}} = \rho_d \left(1 - \exp(-s^\alpha)\right) + \frac{s}{3g_M} \quad (2.14)$$

Приводя уравнения (2.13) к безразмерному виду получим:

$$\mu = \frac{\sqrt{3}M}{2\pi r_2^3 \sigma_0} = \int_J^1 s \xi^2 d\xi \quad (2.15)$$

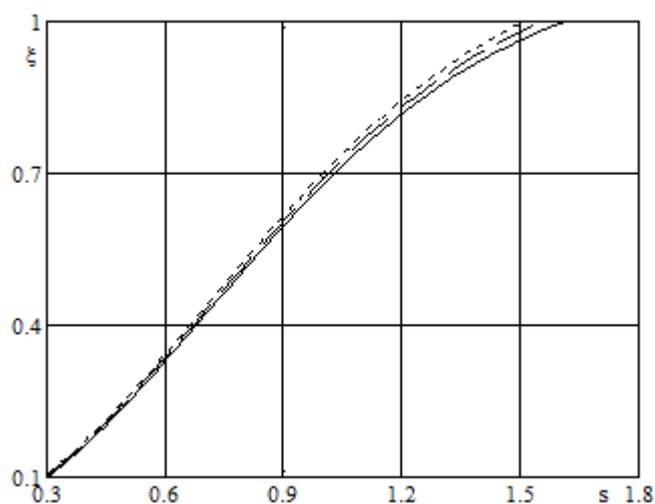
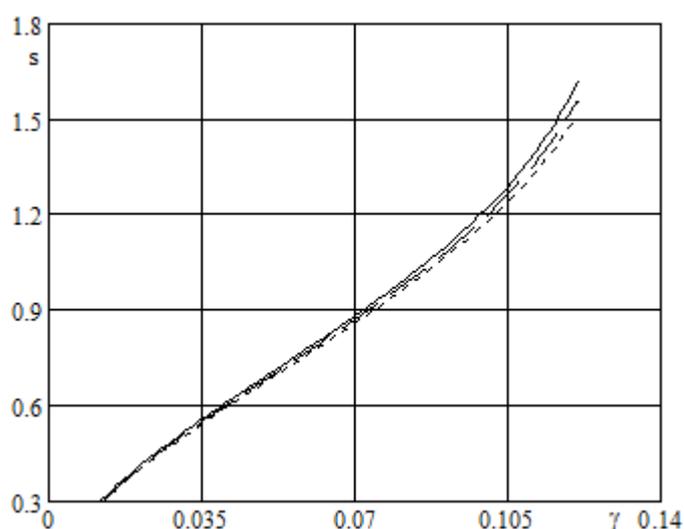
где $\xi = r/r_2$ – безразмерный радиус, $J = r_1/r_2$. После введения безразмерной крутки, так что $\theta^1 = \theta r_2$, уравнение (2.14) запишется следующим образом:

$$\frac{\theta^1 \xi}{\sqrt{3}} = \rho_d \left(1 - \exp(-s^\alpha)\right) + \frac{s}{3g_M} \quad (2.16)$$

При решении задачи поперечное сечение трубки разбивается на заданное количество внутренних точек, в которых определяются величины напряжений и деформаций.

При решении данной задачи, удобно использовать «обратный» алгоритм. Считается заданным массив безразмерной крутки θ^1 (от нуля до величины, соответствующей интенсивности деформации крайнего волокна $\varepsilon_i = \rho_d$). Используя уравнение (2.16) для каждой точки сечения определяются безразмерные напряжения s . В силу монотонного возрастания правой части (2.16) по s эта задача имеет для каждого ξ единственное решение. После, на основании соотношения (2.15) вычисляется безразмерный крутящий момент μ .

На рисунках 2.8, 2.9 приведены эпюры безразмерных напряжений $s - \xi$ и кривые $s - \gamma$ для трубки с отношением $r_1/r_2 = J = 0,1$ соответственно. Для остальных отношений J эпюры безразмерных напряжений и кривые $s - \gamma$ не приводятся, в виду того, что они являются частью более общих приведенных графиков и могут быть получены из них путем отсечения части сечения трубки. Здесь сплошная линия соответствует $\sigma_0 = 100$ МПа, штриховая $\sigma_0 = 125$ МПа, пунктирная $\sigma_0 = 150$ МПа и $\alpha = 2$. Из приведенных рисунков видно, что вариация параметра σ_0 не существенно влияет на получаемые результаты. Поэтому в дальнейшем в параграфе используется значение $\sigma_0 = 100$ МПа.

Рисунок 2.8 – Эпюры $s - \xi$, $\alpha = 2$.Рисунок 2.9 – Кривые $s - \gamma$, $\alpha = 2$.

На рисунке 2.10 приведены графические зависимости безразмерная крутка – безразмерный крутящий момент $\theta^I - \mu$ для $J = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ сверху вниз. Для $J = 0,1$ и $0,2$ кривые практически совпадают. Приведенные графики позволяют оценить величину крутящего момента, потребного для создания определенного уровня крутки. Видно, что с уменьшением толщины трубки понижается величина μ , при том же уровне θ^I . При этом, данная зависимость является нелинейной. Так, наибольший скачек значения потребного крутящего момента, наблюдается при уменьшении толщины трубки от $J = 0,3$ до $0,1$.

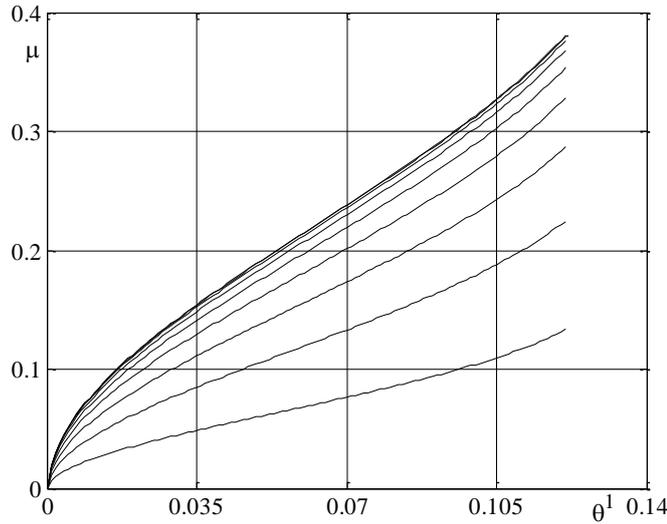


Рисунок 2.10 – Кривые $\theta^1 - \mu$, $\sigma_0 = 100$ МПа, $\alpha = 2$.

. Так, при уменьшении их толщины понижается величина μ , необходимого для преднагружения и создания определенного уровня θ^1 .

В целом, приведенная выше система уравнений (2.13-2.16) может быть успешно применена при решении задачи кручения как толстостенных, так и тонкостенных трубок из СПФ при соответствующем отношении внешнего и внутреннего радиуса. В то же время, данное решение позволяет проводить моделирование явления мартенситной неупругости и для стержней сплошного круглого поперечного сечения ($J = 0$), чему посвящен следующий параграф данной работы.

2.3. Решение задачи кручения стержней сплошного круглого поперечного сечения из сплава с памятью формы в режиме мартенситной неупругости.

Как уже отмечалось выше, система уравнений (2.13-2.16) может быть использована при рассмотрении задачи о мартенситной неупругости для стержня сплошного круглого поперечного сечения из СПФ. В данном случае соотношение для определения крутящего момента имеет следующий вид:

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr \quad (2.17)$$

где R – внешний радиус стержня. Кроме этого изменяются соотношения для определения безразмерного радиуса и крутки. Так, теперь $\xi = r/R$ и $\theta^1 = \theta R$. Тогда уравнение для вычисления безразмерного крутящего момента запишется следующим образом:

$$\mu = \frac{\sqrt{3}M}{2\pi R^3 \sigma_0} = \int_0^1 s \xi^2 d\xi \quad (2.18)$$

Для определения напряжений в каждой точки сечения стержня по-прежнему справедливо соотношение (2.16), за той разницей, что величина ξ меняется от нуля до единицы. Кроме того, неизменным остается и общий алгоритм решения задачи.

На рисунках 2.11-2.13 приведены результаты численного моделирования явления мартенситной неупругости для $\sigma_0 = 100$ МПа. Здесь сплошная линия соответствует $\alpha = 2$, штриховая $\alpha = 4$, пунктирная $\alpha = 6$.

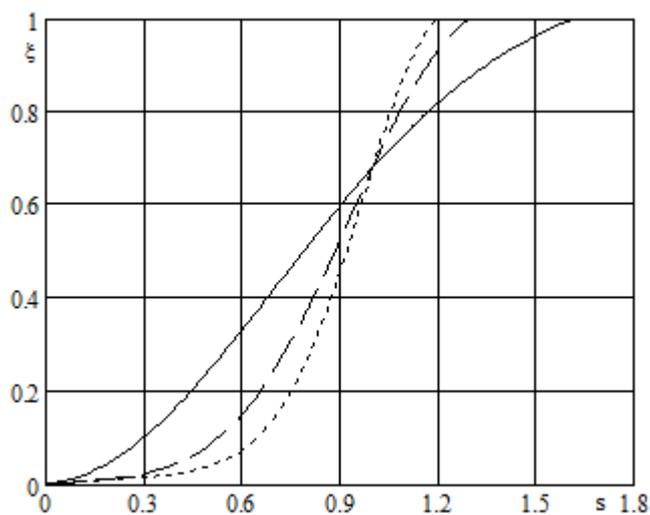


Рисунок 2.11 – Эпюры $s - \xi$, $\sigma_0 = 100$ МПа.

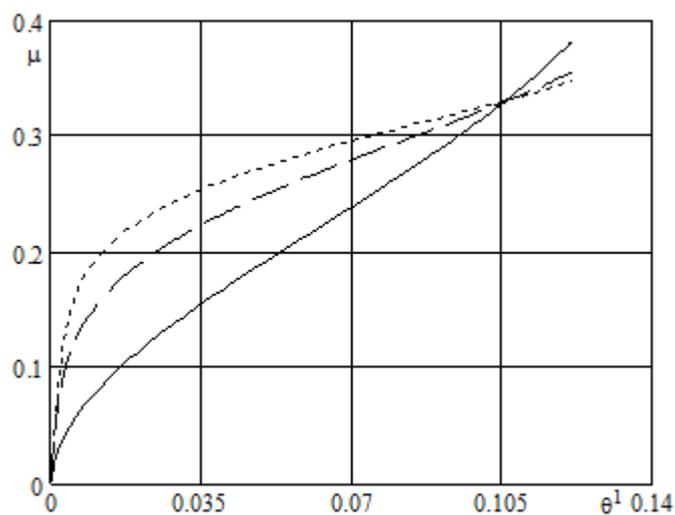


Рисунок 2.12 – Кривые $\theta^I - \mu$, $\sigma_0 = 100$ МПа.

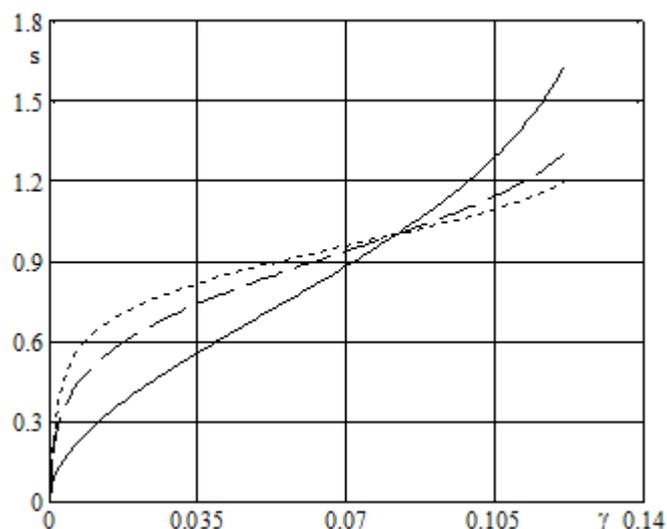


Рисунок 2.13 – Кривые $s - \gamma$, $\sigma_0 = 100$ МПа.

Из приведенных рисунков видно, что изменение параметра α существенно влияет на получаемые результаты и характер соответствующих кривых. Так с увеличением α уменьшается уровень напряжений в крайнем волокне стержня, при этом отмечается повышение величины s на внутренней части сечения стержня. Кроме того, для большинства значений θ^l величина требуемого крутящего момента μ увеличивается с ростом параметра α . Данная тенденция сохраняется до точки пересечения трех кривых на рисунке 2.12, после которой, напротив, увеличение α приводит к уменьшению μ . Рассмотрев полученные кривые $s - \gamma$, рисунок 2.13, также можно заключить, что при увеличении параметра α повышается уровень безразмерных напряжений s , при том же уровне деформаций. При этом данная тенденция верна, как и в случае зависимости $\theta^l - \mu$, до точки пересечения кривых, после которой, рост α приводит к уменьшению величины s .

Отмеченные тенденции сохраняются и на случаи $\sigma_0 = 125, 150$ МПа. Результаты моделирования, при отмеченных параметрах приведены на рисунках 2.14-2.19. Расположение кривых на графиках соответствует правилу, установленному для рисунков 2.11-2.13.

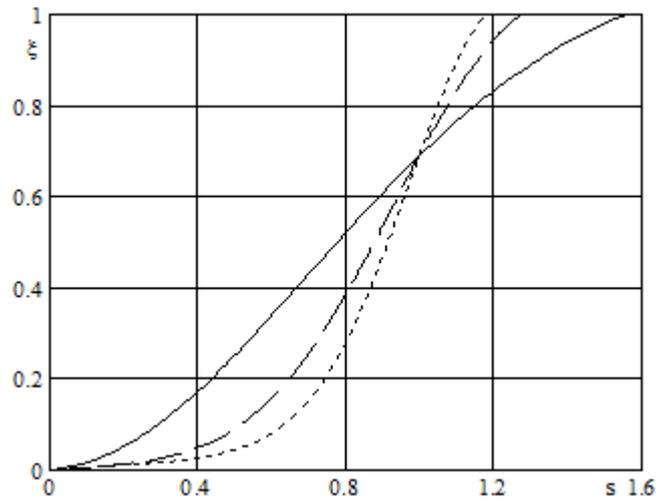


Рисунок 2.14 – Эпюры $s - \xi$, $\sigma_0 = 125$ МПа.

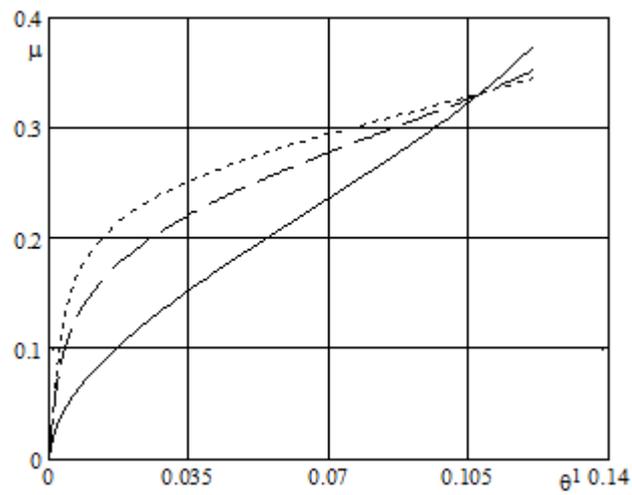


Рисунок 2.15 – Кривые $\theta^l - \mu$, $\sigma_0 = 125$ МПа.

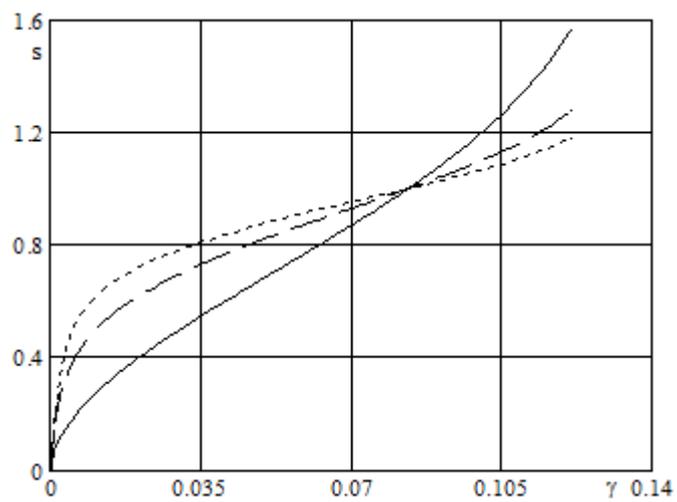


Рисунок 2.16 – Кривые $s - \gamma$, $\sigma_0 = 125$ МПа.

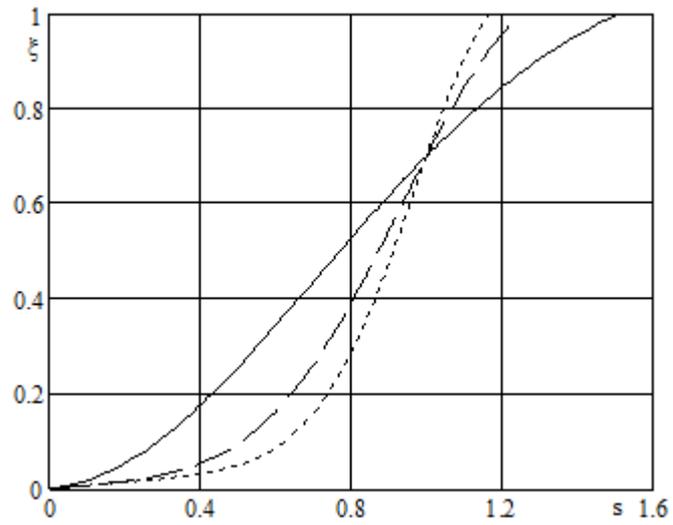


Рисунок 2.17 – Эпюры $s - \xi$, $\sigma_0 = 150$ МПа.

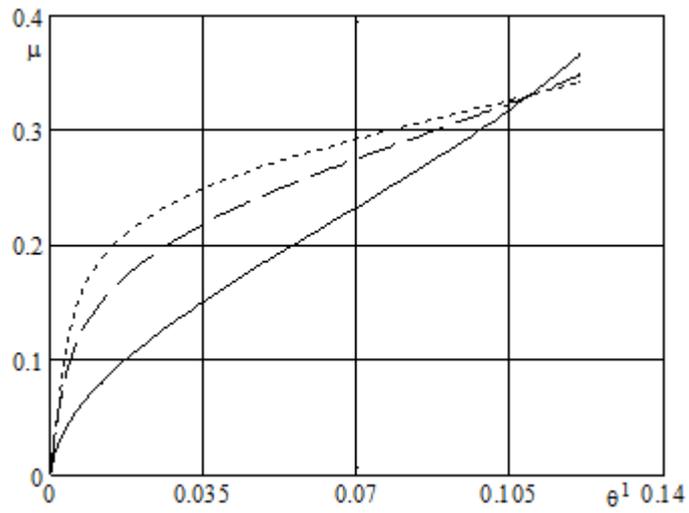


Рисунок 2.18 – Кривые $\theta^1 - \mu$, $\sigma_0 = 150$ МПа.

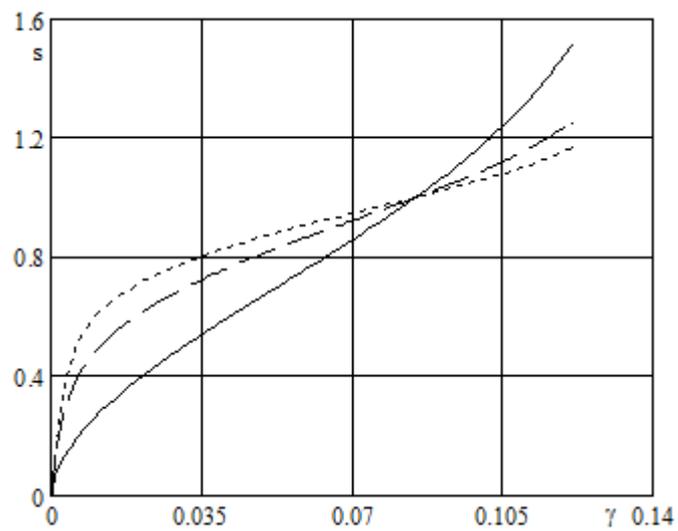


Рисунок 2.19 – Кривые $s - \gamma$, $\sigma_0 = 150$ МПа.

Из приведенных эпюр напряжений $s - \xi$, рисунки 2.11, 2.14, 2.17 и кривых мартенситной неупругости $s - \gamma$, рисунок 2.13, 2.16, 2.19, построенных для различных α и одинаковых σ_0 видно, что представленные кривые пересекаются в одной точке. Данная точка соответствует величине $s = 1$. При этом действующая интенсивность напряжений равна величине σ_0 . Это положение является важной особенностью поведения СПФ в режиме мартенситной неупругости, которое может быть успешно использовано для тестирования численных методов оценки НДС элементов конструкций, содержащих эти сплавы. При этом аналогичная тенденция наблюдается и для кривых $\theta^I - \mu$.

В параграфе 2.1 отмечено, что вариация параметра σ_0 наиболее существенна для величины $\alpha = 2$. Данное положение верно и на случай кручения стрежней из СПФ. Результаты, полученные при вариации параметра σ_0 , приведены ниже. Здесь сплошная линия соответствует $\sigma_0 = 100$ МПа, штриховая $\sigma_0 = 125$ МПа, пунктирная $\sigma_0 = 150$ МПа при $\alpha = 2$.

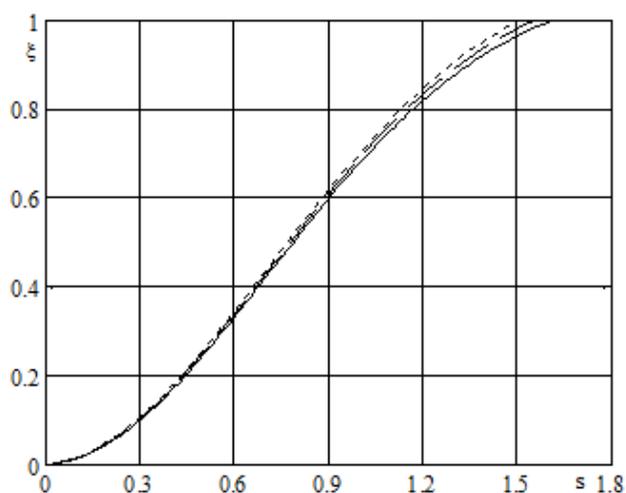


Рисунок 2.20 – Эпюры $s - \xi$, $\alpha = 2$.

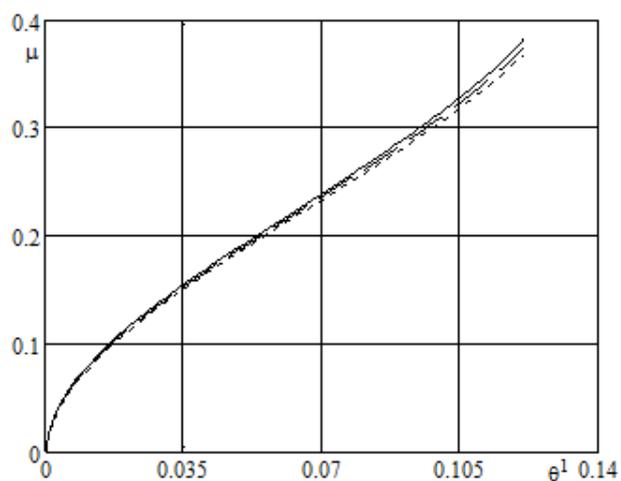


Рисунок 2.21 – Кривые $\theta^I - \mu$, $\alpha = 2$.

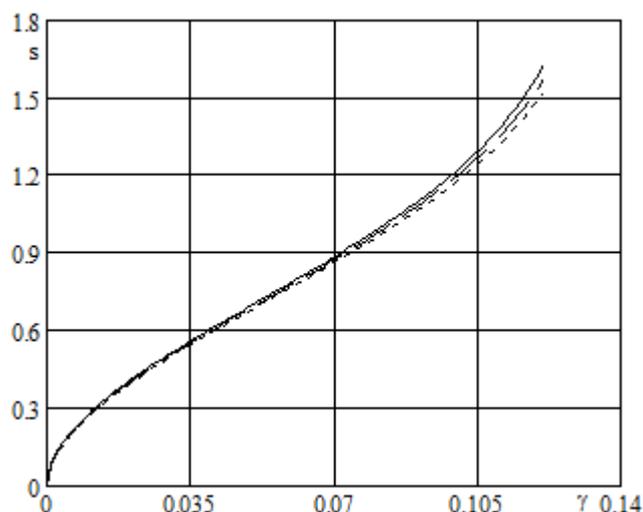


Рисунок 2.22 – Кривые $s - \gamma$, $\alpha = 2$.

На основании рисунков 2.20-2.22 можно заключить, что тенденции, отмеченные в параграфе 2.1, сохраняются и при кручении стержней сплошного круглого поперечного сечения из СПФ. Так, отмечается увеличение накапливаемой деформации в процессе нагружения с ростом величины σ_0 . Кроме того, наблюдается незначительное падение безразмерных напряжений s на внешнем радиусе стержня, а также величины безразмерного крутящего момента μ при тех же значениях безразмерной крутки θ^1 . Достоверность приведенных в данной главе результатов обусловлена аналитической формой решения поставленных задач. Так, положение об АППН позволяет свести инкрементальные определяющие соотношения модели для фазово-структурных деформаций к конечному алгебраическому уравнению.

На основании рисунков, приведенных в пунктах 2.2, 2.3 можно заключить, что использование полых трубок из СПФ наиболее эффективно в качестве актуаторов и силовозбудителей крутящего момента. Так, при уменьшении их толщины понижается величина μ , потребного для преднагружения и создания определенного уровня θ^1 . Использование стержней сплошного круглого поперечного сечения рационально в качестве устройств поглощения и рассеивания механической энергии. К аналогичному выводу, в рамках иных определяющих соотношений, ранее пришел Крахин О.И.

В заключении следует отметить, что явление мартенситной неупругости может быть успешно применено для придания элементу из СПФ начальной неупругой деформации ("холостой ход"), которая будет сниматься в процессе последующего нагрева за счет явления памяти формы ("рабочий ход"). Кроме того, данное явление может быть использовано для доориентации образца до потребного угла закручивания после прямого мартенситного превращения под действием внешнего напряжения.

2.4. Выводы.

1. В данном разделе разработан подход к оценке НДС элементов конструкций содержащих СПФ, работающих в режиме мартенситной неупругости при кручении.

2. Изложен алгоритм решения, а также получена система разрешающих уравнений, позволяющая проводить численное моделирование явления мартенситной неупругости для тонко- и толстостенных трубок, а также стержней сплошного круглого поперечного сечения из СПФ.

3. Отмечено влияние упругих деформаций, на получаемые при решении задач результаты, их не учет при рассмотрении задач кручения приведет к неверным количественным заключениям о НДС элементов конструкций из СПФ и наиболее существенен для высоких значений напряжений.

4. Проведен анализ влияния вариации параметров функции распределения микронапряжений (σ_0 и α) на характер кривых мартенситной неупругости, а также зависимости безразмерная крутка – безразмерный крутящий момент.

5. Отмечено, что для тонкостенных трубок из СПФ изменение параметра σ_0 наиболее существенно для $\alpha = 2$. Повышение σ_0 приводит к росту накаливаемой структурной деформации в процессе нагружения.

6. Установлено, что для толстостенных трубок и стержней из СПФ вариация параметра σ_0 оказывает наибольшее влияние на получаемы результаты при $\alpha = 2$.

7. Показано, что при уменьшении толщины трубки из СПФ падает величина требуемого крутящего момента, необходимого для создания определенного уровня крутки.

8. Для стержней сплошного круглого поперечного сечения из СПФ отмечено, что увеличение параметра σ_0 при $\alpha = 2$, приводит к уменьшению напряжений в крайнем волокне, однако наблюдается повышение s на внутренней части сечения.

9. В задаче о кручении стержней из СПФ отмечается, что для большинства значений безразмерной крутки θ^1 величина требуемого безразмерного крутящего момента μ увеличивается с ростом параметра α .

10. Отмечено, что использование полых трубок из СПФ наиболее эффективно в качестве актуаторов и силовозбудителей крутящего момента. Использование стержней сплошного круглого поперечного сечения рационально в качестве устройств поглощения и рассеивания механической энергии.

Глава 3. Прямое термоупругое мартенситное фазовое превращение, протекающие в стержнях и трубках из сплава с памятью формы, под действием постоянного крутящего момента.

Кроме явления мартенситной неупругости, элементу из СПФ, работающему на кручение, можно задать начальную неупругую деформацию путем следующего термомеханического процесса. Пусть трубка или стержень из СПФ находится полностью в высокотемпературном аустенитном фазовом состоянии. Текущая температура образца выше или равна температуре начала прямого превращения под действием определенной величины крутящего момента. При приложении внешнего крутящего момента такой величины трубка или стержень будет деформироваться упруго и закрутится на определенный угол. Если зафиксировать величину крутящего момента и начать охлаждать элемент из СПФ через интервал температур ПМП, то трубка или стержень начнет накапливать неупругие фазово-структурные деформации. Девиатор данных деформаций будет соосен девиатору действующих напряжений. Это явление известно в литературе как явление накопления неупругих деформаций прямого мартенситного фазового превращения и соответствующих структурных деформаций. Величина этих деформаций зависит от значения крутящего момента, под действием которого происходит прямой переход. При этом результирующий угол закручивания многократно превосходит соответствующую упругую величину. Варьируя значение крутящего момента можно регулировать результирующую деформацию и тем самым контролировать работоспособность и надежность изделия.

При прямом мартенситном превращении температура стержня/ трубки уменьшается от величины M_s до M_f , а величина параметра фазового состава q изменяется от нуля (аустенитное фазовое состояние) до единицы (мартенситное фазовое состояние). Фазовое превращение начнется тогда, когда температура трубки/стержня достигнет величины M_s^σ . Данная величина трактуется как температура начала прямого мартенситного превращения при действии напряжений. В работе [116] отмечено, что с ростом напряжений величина M_s^σ растет, что несколько ускоряет процесс протекания прямого перехода.

В данном разделе рассматривается процесс охлаждения стержня/трубки из СПФ через интервал температур ПМП под действием постоянного крутящего момента. При этом принимаются те же кинематические гипотезы, что и в главе 2. Кроме того, при рассмотрении задачи учитывается влияние действующих напряжений на характерные температуры фазовых превращений. Данная постановка задачи трактуется как однократно связанная. В дальнейшем при рассмотрении задач отдельно для трубок и стержня будут приняты дополнительные

гипотезы относительно распределения параметра фазового состава q и температуры по сечению образца из СПФ.

3.1 Решение задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении в тонкостенной трубке из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного крутящего момента.

Тонкостенные трубки из СПФ активно применяются в качестве рабочего тела актуаторов, работающих на кручение. Как уже было отмечено выше, явление накопления деформаций ПМП под действием внешнего напряжения может быть использовано для придания данному элементу из СПФ начальной неупругой деформации. Кроме того, трубка из СПФ претерпевает охлаждение через интервал температур ПМП и в случае холостого хода актуатора. При этом действующие напряжения будут оказывать влияние на температуры начала и окончания ПМП M_s и M_f соответственно. Рассмотрение задачи кручения ведется в цилиндрической системе координат r, z, φ . Так как кручение тонкостенных трубок является статически определимой задачей, то касательные напряжения и упругая крутка (в аустенитном фазовом состоянии) будут однозначно определяться из следующих соотношений:

$$\tau_{z\varphi} = \frac{M}{2\pi R^2 \delta}, \quad \theta = \frac{M}{2\pi R^3 G_A \delta} \quad (3.1)$$

В дальнейшем для краткости нижний индекс у $\tau_{z\varphi}$ будет опущен. При этом считается, что параметр фазового состава равномерно распределен по сечению трубки. Также принимается положение об однородности распределения температуры по сечению трубки. Учитывая выше изложенное, очевидно, что ПМП будет происходить при постоянном уровне напряжений, определяемом из первого уравнения (3.1). Тогда положение об АППН, сформулированное в предыдущей главе, является правомерным. В этом случае для решения системы определяющих уравнений справедливо конечное соотношения между неупругими деформациями, напряжениями и параметром фазового состава, тогда решение задачи принимает аналитический вид. При этом суммарные деформации системы вычисляются следующим образом:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \rho_d F_1(\sqrt{3}\tau) q + \frac{\sqrt{3}\tau}{3G(q)} \quad (3.2)$$

где F_1 представляет собой функцию распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном фазовом состоянии. Для ПМП данная функция представляется в виде:

$$F_1(\sqrt{3}\tau) = 1 - \exp(-(\sqrt{3}\tau)) \quad \text{либо} \quad F_1(\sqrt{3}\tau) = \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{3}\tau} \exp(-t^2/2) dt. \quad \text{Аргумент данных}$$

функций обезразмеривается по аналогии с функцией F_2 (см. главу 2), так что $F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(s)$, $s = \sqrt{3}\tau / \sigma_0$. При этом общий алгоритм решения задачи имеет следующий вид. В качестве параметра процесса выступает объемная доля мартенситной фазы q . В начальный момент времени $q = 0$ и материал трубки находится в полностью аустенитном фазовом состоянии. После делается шаг по данному параметру $dq > 0$, и определяются полные деформации системы, согласно (3.2). Данный процесс длится до тех пор, пока параметр фазового состава не достигнет значения $q = 1$, что соответствует мартенситному фазовому состоянию материала. Вводя безразмерные переменные, такие, что $\lambda = G_A / G_M$, $s_{0A} = \sigma_0 / G_A$, уравнение для определения упругих деформаций запишется как представлено ниже:

$$\gamma_e = \frac{s\lambda q s_{0a} + s s_{0a} (1-q)}{\sqrt{3}} \quad (3.3)$$

Величину крутящего момента, под действием которого происходит ПМП удобно обезразмерить следующим образом:

$$\mu = \frac{M}{2\pi R^2 G_A \delta} \quad (3.4)$$

По сути, величина μ соответствует упругой крутке крайнего волокна трубки в аустенитном фазовом состоянии, то есть μ можно расценивать как уровень преднагружения. Ниже представлены численные результаты моделирования ПМП. Так, на рисунке 3.1 приведены зависимости суммарной сдвиговой деформации γ от параметра фазового состава q . Кривые соответствуют величине $\mu = 0,01; 0,009; 0,008; 0,007; 0,006; 0,005; 0,004; 0,003; 0,002; 0,001$ сверху вниз соответственно. При этом в качестве функции F_1 используется экспоненциальное распределение, $F_1 = 1 - \exp(-\sqrt{3}\tau)$.

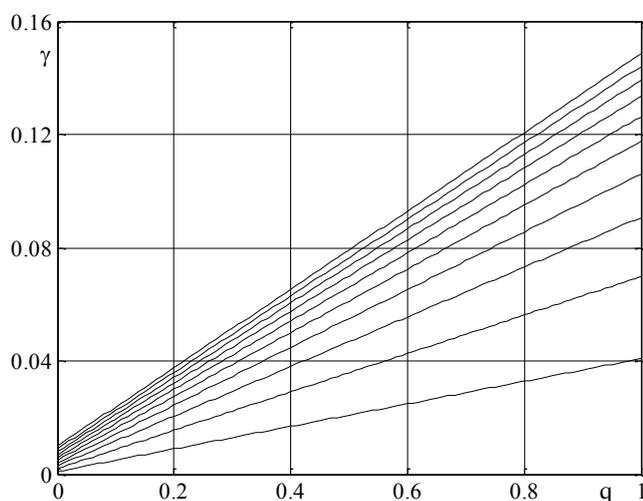


Рисунок 3.1 – Зависимости $q - \gamma$.

Видно, что с увеличением параметра μ повышается уровень накапливаемых деформаций на момент окончания ПМП, при этом наибольший скачек деформаций наблюдается для малых и средних (до 0,004) значений μ . Кроме этого, полученные зависимости согласно (3.2) являются линейными.

На рисунке 3.2 приведены те же зависимости на случай распределения микронапряжений в аустенитном фазовом состоянии в соответствии с функцией распределения Лапласа, $F_1(\sqrt{3\tau}) = \text{erf}(\sqrt{3\tau} / \sqrt{2})$.

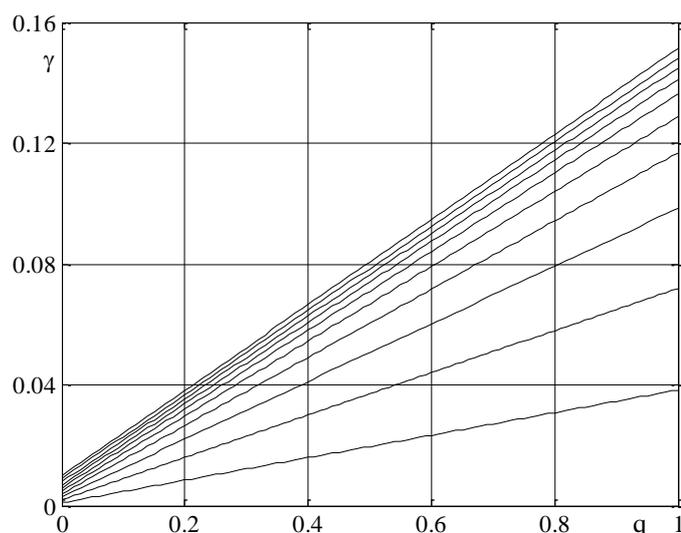


Рисунок 3.2 – Зависимости $q - \gamma$.

Очевидно, что тенденции, отмеченные выше, справедливы и на случай распределения Лапласа. На рисунке 3.3 приведено сравнение результатов моделирования, кривые приведены парами для значений $\mu = 0,002; 0,004; 0,006; 0,008; 0,01$ снизу вверх. Здесь сплошная линия соответствует $F_1(\sqrt{3\tau}) = 1 - \exp(-(\sqrt{3\tau}))$, а штриховая – $F_1(\sqrt{3\tau}) = \text{erf}(\sqrt{3\tau} / \sqrt{2})$.

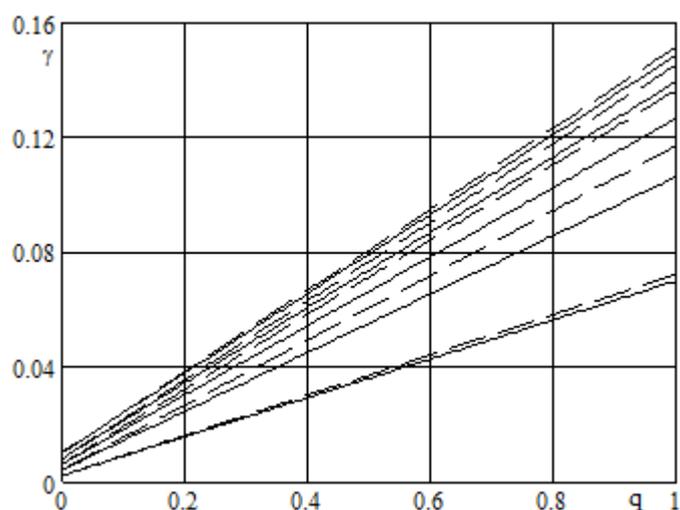


Рисунок 3.3 – Зависимости $q - \gamma$.

Как видно из рисунка 3.3, распределение Лапласа дает большое значение деформаций при том же уровне q . Следует также отметить, что наибольшая разница в полученных результатах отмечается при $\mu = 0,004$.

В целом, полученное решение задачи может быть использовано для определения потребного начального нагружения, необходимого для придания элементу из СПФ заданного угла закручивания.

3.2 Решение задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении в толстостенной трубке и стержне сплошного круглого поперечного сечения из сплава с памятью формы, находящихся под действием постоянного крутящего момента.

Как уже отмечалось выше, в главе 2, решение задачи для стержня сплошного круглого поперечного сечения может быть получено из решения задачи для толстостенной трубки путем замены пределов интегрирования при вычислении крутящего момента. Так, в случае толстостенных трубок крутящий момент вычисляется следующим образом:

$$M = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \tau r^2 dr \quad (3.5)$$

Для стержня соотношение (3.5) переписывается, как приведено ниже:

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr \quad (3.6)$$

В случае рассмотрения упругой задачи касательные напряжения определяются в соответствии с законом Гука:

$$\tau = G\gamma = Gr\theta \quad (3.7)$$

Тогда подставляя (3.7) в (3.5) и (3.6) можно получить:

$$M = \frac{\pi G\theta (r_2^4 - r_1^4)}{2} \text{ - для трубки} \quad (3.8)$$

Здесь и далее формулы для стержня получаются из формул для трубки если в последней положить $r_1 = 0$ и $r_2 = R$.

Величина упругой крутки определяется из (3.8) путем выражения ее через крутящий момент.

В рамках данного параграфа также принимается, что распределение поля температур известно. Считается, что температура равномерно распределена по отсчетным точкам сечения, а вычислить необходимо компоненты тензоров напряжений и деформаций. Кроме этого, вычислению подлежит величина параметра фазового состава q .

Задачи кручения толстостенных трубок и стержней являются статически неопределимыми. Поэтому распределение напряжений, деформаций и параметра фазового

состава по сечению образца из СПФ заранее не известно. Кроме этого, действующие напряжения оказывают влияние на температуры начала и окончания ПМП. Данная постановка задачи трактуется как однократно связанная. Тогда для параметра фазового состава справедливо следующее соотношение [84,86]:

$$q = \varphi(t_\sigma), \varphi(t_\sigma) = \sin\left(\frac{\pi}{2} t_\sigma\right) \quad (3.9)$$

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0} \quad (3.10)$$

Ниже приведено уравнение для определения температуры начала ПМП при действии напряжений.

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma'_{ij}}{\Delta S_0} + \frac{Z(\sigma_{ij})}{\Delta S_0} + \frac{\sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S_0} \quad (3.11)$$

Слагаемое, зависящее от функции $Z(\sigma_{ij})$, связано с переменностью упругих модулей СПФ при фазовых превращениях и для напряжений ниже дислокационного предела текучести достаточно мало. Также следует отметить, что второе слагаемое (3.11) на порядок больше третьего и четвертого, если сравнивать их при одинаковой по величине интенсивности действующих напряжений и гидростатическом напряжении [112]. Учитывая вышеизложенное, уравнение (3.12) можно переписать следующим образом:

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma'_{ij}}{\Delta S_0} \quad (3.12)$$

Тогда для приращения параметра фазового состава справедлив блок уравнений, полученный для трехмерного случая в [117]:

$$dq = \beta \frac{f(q) \varepsilon_{ij}^{phst} ' d\sigma_{ij} ' + Ad\sigma_i + Bd\sigma_{kk} - dT\Delta S}{1 + \beta(f(q))^2 C} \quad (3.13)$$

$$\beta = \frac{\pi \sqrt{(1-q^2)}}{2\Delta S_0 (M_s^0 - M_f^0)} \quad (3.14)$$

$$A = \rho_D [(F_1(\sigma_i) + \sigma_i F_1'(\sigma_i))(1 - f(q)q) + f(q)\sigma_i q \Psi_2(\sigma_i)] + \Delta G / (3G_A G_M) \sigma_i \quad (3.15)$$

$$C = \rho_D q \sigma_i F_1(\sigma_i) - \sigma_{ij} ' \varepsilon_{ij}^{phst} \quad (3.16)$$

$$\Psi_2 = F_2' \quad (3.17)$$

Учитывая только девиаторные составляющие тензора деформаций, соотношения (3.13) и (3.15) запишутся в следующем виде:

$$dq = \beta \frac{f(q) \varepsilon_{ij}^{phst} d\sigma_{ij}' + Ad\sigma_i - dT\Delta S_0}{1 + \beta(f(q))^2 C} \quad (3.18)$$

$$A = \rho_D \left[(F_1(\sigma_i) + \sigma_i F_1'(\sigma_i))(1 - f(q)q) + f(q)\sigma_i q \Psi_2(\sigma_i) \right] \quad (3.19)$$

На случай кручения получим:

$$dq = Sd\tau + BdT \quad (3.20)$$

$$S = \beta \frac{\left\{ f(q) \gamma^{phst} + \sqrt{3} \rho_d \left[(F_1(\sqrt{3}\tau) + \sqrt{3}\tau F_1'(\sqrt{3}\tau))(1 - f(q)q) + M \right] \right\}}{1 + \beta(f(q))^2 C} \quad (3.21)$$

$$M = f(q) \sqrt{3}\tau q \Psi_2(\sqrt{3}\tau), \quad C = \rho_d q \sqrt{3}\tau F_1(\sqrt{3}\tau) - \tau \gamma^{phst} \quad (3.22)$$

$$B = - \frac{\pi \sqrt{(1-q^2)}}{2(M_s^0 - M_f^0) (1 + (f(q))^2 \beta C)} \quad (3.23)$$

В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях предполагается аддитивное представление деформаций. Полагая, что температурные деформации малы по сравнению с фазово-структурными и пренебрегая объемными упругими деформациями, а также не учитывая объемный эффект реакции ПМП можно получить, что:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e'} + \varepsilon_{ij}^{phst} \quad (3.24)$$

Таким образом в рамках данной задачи тензор деформаций представляет собой сумму девиаторов упругой и фазово-структурной деформаций. Девиатор упругой деформации определяется из следующего соотношения:

$$\varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G(q)}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A} \quad (3.25)$$

Приращение девиатора фазовых деформаций при ПМП определяется согласно уравнению, приведенному ниже:

$$d\varepsilon_{ij}^{phst} = \omega_{ij}^+ dq, \quad \omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho_d \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} (1 - qf(q)) F_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst}, \quad \text{при } dq > 0 \quad (3.26)$$

Структурные деформации отсчитываются от состояния хаотического мартенсита, который обладает объемной деформацией, связанной с эффектом реакции ПМП. Поэтому тензор структурных деформаций представляет собой девиатор. Тогда приращение структурных деформаций при ПМП будет вычисляться на основе следующего соотношения:

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_d \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q F_2'(\sigma_i) d\sigma_i, \quad \text{при } d\sigma_i > 0, \quad \text{иначе } d\varepsilon_{ij}^{st} = 0 \quad (3.27)$$

На случай кручения, в соответствии с гипотезой плоских сечений для полных деформаций, уравнение (3.24) с учетом второго соотношения (3.25) примет следующий вид:

$$r\theta = \tau \left(\frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A} \right) + \gamma^{phst} \quad (3.28)$$

Дифференцируя (3.28) получим соотношение для определения приращения напряжений по сечению стержня/трубки из СПФ:

$$rd\theta = \frac{d\tau}{G(q)} + \frac{\Delta G\tau}{G_A G_M} dq + d\gamma^{phst} \quad (3.29)$$

$$\Delta G = G_A - G_M \quad (3.30)$$

На случай кручения, соотношения (3.26,3.27) принимают следующий вид:

$$d\gamma^{ph} = \left(\sqrt{3}\rho_d (1-f(q)q)\varphi_1(\sqrt{3}\tau) + f(q)\gamma^{phst} \right) dq, \text{ при } dq > 0 \quad (3.31)$$

$$d\gamma^{st} = 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau) d\tau, \text{ при } d\tau > 0 \quad (3.32)$$

Подставляя (3.31,3.32) в (3.29) можно получить:

$$rd\theta = \frac{d\tau}{G(q)} + \frac{\Delta G\tau dq}{G_A G_M} + \left(\sqrt{3}\rho_d F_1(\sqrt{3}\tau)(1-f(q)q) + f(q)\gamma^{phst} \right) dq + 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau) d\tau \quad (3.33)$$

Группируя множители при $d\tau$ и dq в соотношении (3.33) получим:

$$rd\theta = Fd\tau + Ddq \quad (3.34)$$

$$F = \left(\frac{1}{G(q)} + 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau) \right) \quad (3.35)$$

$$D = \frac{\Delta G\tau}{G_A G_M} + \left(\sqrt{3}\rho_d F_1(\sqrt{3}\tau)(1-f(q)q) + f(q)\gamma^{phst} \right) \quad (3.36)$$

Учитывая (3.20), (3.34) перепишется, как представлено ниже:

$$rd\theta = Fd\tau + D(Sd\tau + BdT) \quad (3.37)$$

Разрешая (3.37) относительно приращения касательных напряжений $d\tau$ получим:

$$d\tau = \frac{rd\theta - DBdT}{F + DS} \quad (3.38)$$

Соотношение (3.38) справедливо в той части сечения, где происходят как фазовый, так и(или) структурный переходы. Оно справедливо в интервале $r_0 \leq r \leq r_{00}$, где:

r_0 – граница начала фазово-структурного перехода;

r_{00} – граница окончания фазово-структурного перехода.

Материал деформируется упруго с аустенитным модулем в зоне $r_1 \leq r \leq r_0$:

$$d\tau = G_A rd\theta \quad (3.39)$$

В области $r_2 \geq r \geq r_{00}$ фазовый переход уже завершен, однако может идти структурный, при этом приращение касательных напряжений определяется на основе следующего соотношения:

$$d\tau = \frac{rd\theta}{F} \quad (3.40)$$

В случае наличия структурного перехода:

$$F = \left(\frac{1}{G_M} + 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau) \right) \quad (3.41)$$

В случае упругого деформирования:

$$F = \frac{1}{G_M} \quad (3.42)$$

Дифференцируя (3.5,3.6) можно получить выражение для определения приращений крутящего момента для стержня и трубки из СПФ:

$$dM = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} d\tau r^2 dr \quad (3.43)$$

Соотношение (3.43) вычисляется на основе уравнений для $d\tau$, рассматривая три участка сечения образца из СПФ. Так, для упругого участка с аустенитным модулем ($r_1 \leq r \leq r_0$), приращение касательных напряжений вычисляется, как представлено ниже:

$$d\tau = G_A r d\theta \quad (3.44)$$

Подставляя (3.44) в (3.43) получим уравнения для определения приращения крутящего момента:

$$dM = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} G_A r^3 d\theta dr = \frac{2\pi G_A (r_0^4 - r_1^4)}{4} d\theta \quad (3.45)$$

В зоне, где протекает фазово-структурный переход $r_0 \leq r \leq r_{00}$:

$$d\tau = \frac{rd\theta - DBdT}{F + DS} \quad (3.46)$$

$$dM = 2\pi \int_{r_0}^{r_{00}} \frac{rd\theta - DBdT}{F + DS} r^2 dr = 2\pi \int_{r_0}^{r_{00}} \frac{r^3 d\theta}{F + DS} dr - 2\pi \int_{r_0}^{r_{00}} \frac{DBdT r^2}{F + DS} dr \quad (3.47)$$

Участок, где уже закончился фазовый, но может происходить структурный переход ($r_2 \geq r \geq r_{00}$):

$$d\tau = \frac{rd\theta}{1/G_M + 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau)} \quad (3.48)$$

$$dM = 2\pi \int_{r_{00}}^{r_2} \frac{r^3 d\theta}{1/G_M + 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau)} dr \quad (3.49)$$

Учитывая (3.45,3.47,3.49) соотношение (3.43) примет следующий вид:

$$dM = 2\pi \left\{ \left[\frac{G_A (r_0^4 - r_1^4)}{4} + \int_{r_0}^{r_{00}} \frac{r^3}{F + DS} dr + \int_{r_0}^{r_2} \frac{r^3}{F} dr \right] d\theta - dT \int_{r_0}^{r_{00}} \frac{DBr^2}{F + DS} dr \right\} \quad (3.50)$$

Так как прямое мартенситное превращение происходит под действием постоянного по величине крутящего момента, то его приращение равно нулю $dM = 0$. Введем следующие обозначения:

$$I_1 = \int_{r_0}^{r_{00}} \frac{r^3}{F + DS} dr \quad (3.51)$$

$$I_2 = \int_{r_0}^R \frac{r^3}{\frac{1}{G_M} + 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau)} dr, \quad I_2 = \int_{r_0}^{r_2} \frac{r^3}{\frac{1}{G_M} + 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau)} dr \quad (3.52)$$

$$I_3 = \int_{r_0}^{r_{00}} \frac{DBr^2}{F + DS} dr \quad (3.53)$$

Подставляя (3.51-3.53) в (3.50) можно получить соотношение для определения приращения крутки:

$$d\theta = \frac{I_3 dT}{\frac{G_A (r_0^4 - r_1^4)}{4} + I_1 + I_2} \quad (3.54)$$

Соотношение (3.54) является общим, в том понимании, что оно справедливо, когда в сечении стержня или трубки можно выделить три отмеченные выше области. То есть пока граница начала фазового превращения не достигнет нейтральной линии или внутреннего радиуса образца из СПФ. В случае, когда все сечение образца испытывает фазово-структурный переход уравнение (3.54) принимает следующий вид:

$$d\theta = \frac{I_3 dT}{I_1 + I_2} \quad (3.55)$$

Считается, что фазовый переход начнется в точке сечения образца из СПФ с координатой r_0 при выполнении следующего условия:

$$M_s^\sigma = T \quad (3.56)$$

где T – текущая температура в точке сечения стержня или трубки. Величина M_s^σ определяется на основе соотношения (3.11). Полагая, что на случай кручения $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$, соотношение (3.56), с учетом (3.12) примет следующий вид:

$$T = M_s^0 + \frac{\sqrt{3}\tau\rho_d (1 - qf(q)) F_1(\sqrt{3}\tau) + \frac{f(q)}{\sqrt{3}} \gamma^{phst}}{\Delta S_0} \quad (3.55)$$

В случае, когда все сечение образца из СПФ находится в аустенитном фазовом состоянии ($q = 0$ и $\gamma^{phst} = 0$) касательные напряжения определяются из уравнения приведенного ниже:

$$\tau = \frac{2M}{\pi(r_2^4 - r_1^4)} r \quad (3.56)$$

Подставляя (3.56) в соотношение (3.55) и производя замену $r = r_0$ можно получить:

$$(T - M_s^0) \Delta S_0 = \frac{2\sqrt{3}M_{kp}}{\pi(r_2^4 - r_1^4)} r_0 \rho_d \varphi_1 \left(\frac{2\sqrt{3}M_{kp}}{\pi(r_2^4 - r_1^4)} r_0 \right) \quad (3.57)$$

Величина температуры T_0 , с которой на внешнем радиусе стержня/трубки из СПФ начнется фазовое превращение, определится из (3.57), в котором необходимо положить $r_0 = r_2$:

$$(T - M_s^0) \Delta S_0 = \frac{2\sqrt{3}M}{\pi(r_2^4 - r_1^4)} r_2 \rho_d \varphi_1 \left(\frac{2\sqrt{3}M}{\pi(r_2^4 - r_1^4)} r_2 \right) \quad (3.58)$$

В случае, когда граница ФП сдвинулась с внешней поверхности образца из СПФ и $q \neq 0$, а также $\gamma^{phst} \neq 0$, касательные напряжения на границе упругой области и зоны протекания ФП определяются на основе следующего уравнения:

$$\tau = G_A \theta r_0 \quad (3.59)$$

Тогда граница начала фазового перехода определяется из (3.55) путем подстановки в него (3.59):

$$(T - M_s^0) \Delta S_0 = \sqrt{3} G_A \theta r_0 \rho_d (1 - qf(q)) F_1(\sqrt{3} G_A \theta r_0) + \frac{f(q) \gamma^{phst}}{\sqrt{3}} \quad (3.60)$$

Однако на границе упругой области и зоны ФП $q = 0$ и $\gamma^{phst} = 0$. Тогда уравнение (3.60) принимает следующий вид:

$$(T - M_s^0) \Delta S_0 = \sqrt{3} G_A \theta r_0 \rho_d F_1(\sqrt{3} G_A \theta r_0) \quad (3.61)$$

Соотношения (3.5-3.61) представляют собой размерное решение задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне/трубке из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего момента. Однако при решении задачи удобно использовать следующие безразмерные величины и параметры.

Безразмерная радиальная координата:

$$\xi = \frac{r}{R} \quad (3.62)$$

Безразмерная радиальная координата начала ФП:

$$\xi_0 = \frac{r_0}{r_2} \quad (3.63)$$

Безразмерная радиальная координата окончания ФП:

$$\xi_{00} = \frac{r_{00}}{r_2} \quad (3.64)$$

Безразмерный крутящий момент и крутка определяются из следующего блока уравнений:

$$\mu = \frac{2M}{G_A \pi (r_2^4 - r_1^4)} r_2, \quad \theta^1 = \theta \cdot r_2 \quad (3.65)$$

Вводится понятие безразмерных напряжений:

$$s = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0} \quad (3.66)$$

Кроме этого, модифицируются жесткостные параметры СПФ, так что:

$$s_{0A} = \frac{\sigma_0}{G_a}, \quad \lambda = \frac{G_A}{G_M} \quad (3.67)$$

Тогда функции распределения микронапряжений обезразмериваются следующим образом:

$$F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1\left(\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0}\right) = \Phi_1(s), \quad F_1'(\sqrt{3}\tau) = \frac{1}{\sigma_0} \Phi_1'\left(\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{\sigma_0} \Phi_1'(s) \quad (3.68)$$

$$\Psi_2(\sqrt{3}\tau) = \frac{1}{\sigma_0} \Phi_2'\left(\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{\sigma_0} \Phi_2'(s) \quad (3.69)$$

Учитывая (3.62-3.69) основные соотношения для приращений параметра фазового состава, напряжений, крутящего момента, крутки, радиальной координаты границы начала ФП переписутся следующим образом. Так, для приращения параметра фазового состава dq справедливо соотношение приведенное ниже:

$$dq = \frac{1}{\sqrt{3}} S^1 ds - B^1 dt_0 \quad (3.70)$$

$$S^1 = S\sigma_0 = \beta^1 \frac{\left\{ f(q)\gamma^{phst} + \sqrt{3}\rho_d \left[(\Phi_1(s) + s\Phi_1'(s))(1 - f(q)q) + f(q)sq\Phi_2'(s) \right] \right\}}{1 + \beta^1 (f(q))^2 C^1} \quad (3.71)$$

$$\beta^1 = \beta\sigma_0 = \frac{\pi\sqrt{(1-q^2)}}{2\delta S_0} \quad (3.72)$$

$$B^1 = (M_s^0 - M_f^0)B = -\frac{\pi\sqrt{(1-q^2)}}{2(1 + (f(q))^2 \beta^1 C^1)} \quad (3.73)$$

$$C^1 = \frac{C}{\sigma_0} = \rho_d q s \Phi_1(s) - \frac{s \gamma^{phst}}{\sqrt{3}} \quad (3.74)$$

Для прямого мартенситного превращения безразмерный параметр температуры и его приращение имеют следующий вид:

$$t_0 = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad dt_0 = \frac{-dT}{M_s^0 - M_f^0} \quad (3.75)$$

Для приращения напряжений в упругой зоне справедливо соотношение приведенное ниже:

$$ds = \frac{\sqrt{3} \xi d\theta^1}{s_{0A}} \quad (3.76)$$

В области, где протекает фазово-структурный переход, приращение напряжений определяется согласно следующему уравнению:

$$ds = \frac{\sqrt{3} \xi d\theta^1 + \sqrt{3} D^1 B^1 dt_0}{F^1 + D^1 S^1} \quad (3.77)$$

$$D^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\lambda - 1) s s_{0A} + \left(\sqrt{3} \rho_d \Phi_1(s) (1 - f(q)q) + f(q) \gamma^{phst} \right) \quad (3.78)$$

$$F^1 = F \sigma_0 = s_{0A} + s_{0A} q (\lambda - 1) + 3 \rho_d q \Phi_2'(s) \quad (3.79)$$

Если в «мартенситной» области, где завершилось фазовое превращение не наблюдается структурного перехода, то материал деформируется упруго. Тогда в формулах (3.71) и (3.79) необходимо положить равным нулю множители, связанные с функцией $\Phi_2(s)$.

Приращение безразмерного крутящего момента определяется на основе приведенного ниже соотношения:

$$\frac{d\mu}{4} = \left[\frac{(\xi_0^4 - J^4)}{4} + \int_{\xi_0}^{\xi_0} \frac{s_{0A} \xi^3 d\xi}{F^1 + D^1 S^1} + \int_{\xi_0}^1 \frac{s_{0A} \xi^3 d\xi}{\lambda s_{0A} + 3 \rho_d q \Phi_2'(s)} \right] d\theta^1 + \int_{\xi_0}^{\xi_0} \frac{s_{0A} D^1 B^1 \xi^2 d\xi dt_0}{F^1 + D^1 S^1} \quad (3.80)$$

$$\text{где } J = r_1 / r_2 \quad (3.81)$$

Здесь и далее приведены формулы для трубки. Чтобы получить из них формулы для стержня, необходимо положить в них $J = 0$.

Тогда вводя обозначения по аналогии с (3.51-3.53) получим:

$$I_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_0} \frac{\xi^3}{F^1 + D^1 S^1} d\xi \quad (3.82)$$

$$I_2 = \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi^3}{\lambda s_{0A} + 3 \rho_d q \Phi_2'(s)} d\xi \quad (3.83)$$

$$I_3 = \int_{\xi_0}^{\xi_{00}} \frac{D^1 B^1 \xi^2}{F^1 + D^1 S^1} d\xi \quad (3.84)$$

Для этапа движения границы начала ФП приращение крутки определяется из следующего соотношения, при условии что $d\mu = 0$.

$$d\theta = \frac{I_3 dt_0}{\left(\frac{\xi_0^4 - J^4}{4s_{0A}}\right) + I_1 + I_2} \quad (3.85)$$

В случае, когда все сечение образца из СПФ претерпевает фазово-структурное превращения соотношение (3.85) переписывается в следующем виде:

$$d\theta = \frac{I_3}{I_1 + I_2} \quad (3.86)$$

Соотношение (3.55) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$t_0 = - \frac{\sqrt{3}\mu\xi_0\rho_d\Phi_1\left(\frac{\sqrt{3}\mu\xi_0}{s_{0A}}\right)}{\delta S_0 s_{0A}} \quad (3.87)$$

$$\delta S_0 = \frac{(M_s^0 - M_f^0)\Delta S_0}{\sigma_0} \quad (3.88)$$

В уравнении (3.87) μ определяется из (3.65). Для вычисления величины безразмерного параметра температуры, при котором начнется ФП на внешнем радиусе образца из СПФ в (3.87) необходимо положить $\xi_0 = 1$:

$$t_0 = - \frac{\sqrt{3}\mu\rho_d\Phi_1\left(\frac{\sqrt{3}\mu}{s_{0A}}\right)}{\delta S_0 s_{0A}} \quad (3.89)$$

Соотношение (3.89) верно на случай когда, все сечение находится в аустнитном фазовом состоянии. В противном варианте уравнение (3.89) имеет следующий вид:

$$t_0 = - \frac{\sqrt{3}\theta^1\xi_0\rho_d\Phi_1\left(\frac{\sqrt{3}\theta^1\xi_0}{s_{0A}}\right)}{\delta S_0 s_{0A}} \quad (3.90)$$

Кроме этого, обезразмериванию также подлежит уравнение для вычисления упругих деформаций системы, которое записывается следующим образом:

$$\gamma^e = \frac{s}{\sqrt{3}} \lambda q s_{0A} + \frac{s}{\sqrt{3}} s_{0A} (1 - q) \quad (3.91)$$

Алгоритм решения задачи будет един как для стержня, так и для трубки из СПФ. Его основные положения приведены ниже.

Сечение образца из СПФ разбивается на N внутренних точек в соответствии с безразмерной радиальной координатой $\xi [0...1]$. В данных точках сечения производится вычисление искомых величин.

Первоначально материал стержня/трубки из СПФ находится в аустенитном фазовом состоянии. Осуществляется преднагружение образца крутящим моментом величиной μ и решается упругая задача кручения ($q(\xi) = 0$ и $\gamma^{phst}(\xi) = 0$). По сути, μ представляет собой деформацию сдвига крайнего волокна образца. В качестве результата решения данной задачи выступают распределения безразмерных напряжений $s(\xi)$ и полных сдвиговых деформаций $\gamma(\xi)$ по сечению стержня/трубки из СПФ, а также величина безразмерной крутки θ^1 . Далее определяется безразмерный параметр температуры t_0^{sd} , согласно (3.89), при котором начнется ПМП в крайнем волокне образца из СПФ. На основании вычисленного значения t_0^{sd} определяется шаг по данной величине dt_0 . После начинается так называемый этап «движения границы начала ФП». Первоначально запоминаются величины, полученные с предыдущего этапа, для этого формируются соответствующие массивы данных: $s_{old}(\xi) = s(\xi)$, $\gamma_{old}(\xi) = \gamma(\xi)$, $\gamma_{old}^{phst}(\xi) = \gamma^{phst}(\xi)$, $q_{old}(\xi) = q(\xi)$, $\theta_{old}^1 = \theta^1$, $t_o^{old} = t_0^{sd}$. Далее следует шаг по dt_0 и определяется новое значение температуры $t_0^{new} = t_0^{old} + dt_0$. Данная величина используется для определения нового положения границы начала фазового перехода ξ_0 , согласно уравнению (3.90). После, на основе старых распределений $s_{old}(\xi)$, $\gamma_{old}^{phst}(\xi)$, $q_{old}(\xi)$ вычисляются параметры $\beta(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$, $F(\xi)$, $S(\xi)$ согласно (3.72,3.73,3.74,3.78,3.79,3.71) соответственно. Далее вычисляются интегралы $I_1(\xi)$, $I_2(\xi)$, $I_3(\xi)$ на основе уравнений (3.82-3.84). После определяется приращение крутки (3.85) и новое значение крутки $\theta_{new}^1 = \theta_{old}^1 + d\theta^1$. По сути, θ_{new}^1 есть функция старых распределений $s_{old}(\xi)$, $\gamma_{old}^{phst}(\xi)$, $q_{old}(\xi)$. Зная приращение крутки, вычисляется приращение напряжений $ds(\xi)$ для каждой области образца из СПФ (3.76,3.77) и новое значение напряжений $s_{new}(\xi) = s_{old}(\xi) + ds(\xi)$. Далее определяется приращение параметра фазового состава $dq(\xi)$ (3.70) и новое распределение его по сечению $q_{new}(\xi) = q_{old}(\xi) + dq(\xi)$. После вычисляется полная деформация системы на основе гипотезы плоских сечений $\gamma(\xi) = \theta^1 \xi$. Упругая деформация $\gamma^e(\xi)$ определяется на основе соотношения (3.91). Разница полной и упругой деформаций есть накопленная на данный момент процесса фазово-структурная деформация $\gamma^{phst}(\xi) = \gamma(\xi) - \gamma^e(\xi)$. Учитывая тот факт, что θ_{new}^1

определяется на основе старых распределений $s_{old}(\xi)$, $\gamma_{old}^{phst}(\xi)$, $q_{old}(\xi)$ производится повторный расчет, начиная с вычисления параметров $\beta(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$, $F(\xi)$, $S(\xi)$ до вычисления деформаций системы. Данные «внутренние» итерации продолжаются до тех пор, пока приращение крутки за один этап приращения температуры не станет величиной достаточно малой, что обеспечивает сходимость изложенного алгоритма. После следует новый шаг по dt_0 и вычисления повторяются вновь. Данный этап движения границы начала ФП продолжается до тех пор, пока положение границы, определяемое из (3.90) не достигнет нейтральной оси стержня или внутреннего радиуса трубки из СПФ.

После того как граница ФП достигла нейтральной оси стержня или внутреннего радиуса трубки, все сечение претерпевает фазово-структурный переход. Следующим этапом в процессе охлаждения выступает этап «движения границы окончания ФП. Он аналогичен предыдущему, за той разницей, что отысканию подлежит граница окончания ФП ξ_{00} . Она определяется на основе вектора $q(\xi)$. Так, если в какой либо точки сечения стержня/трубки из СПФ данный параметр, в процессе вычисления, принимает значение $q = 1$, то считается, что граница окончания ФП находится в отмеченной точке сечения. Процесс охлаждения образца из СПФ происходит до тех пор, пока все сечение стержня/трубки не перейдет в мартенситное фазовое состояние, $q(\xi) = 1$. Общий вид приведенного алгоритма решения задачи, на случай движения границы начала ФП ξ_0 , представлен на схеме № 3.1.

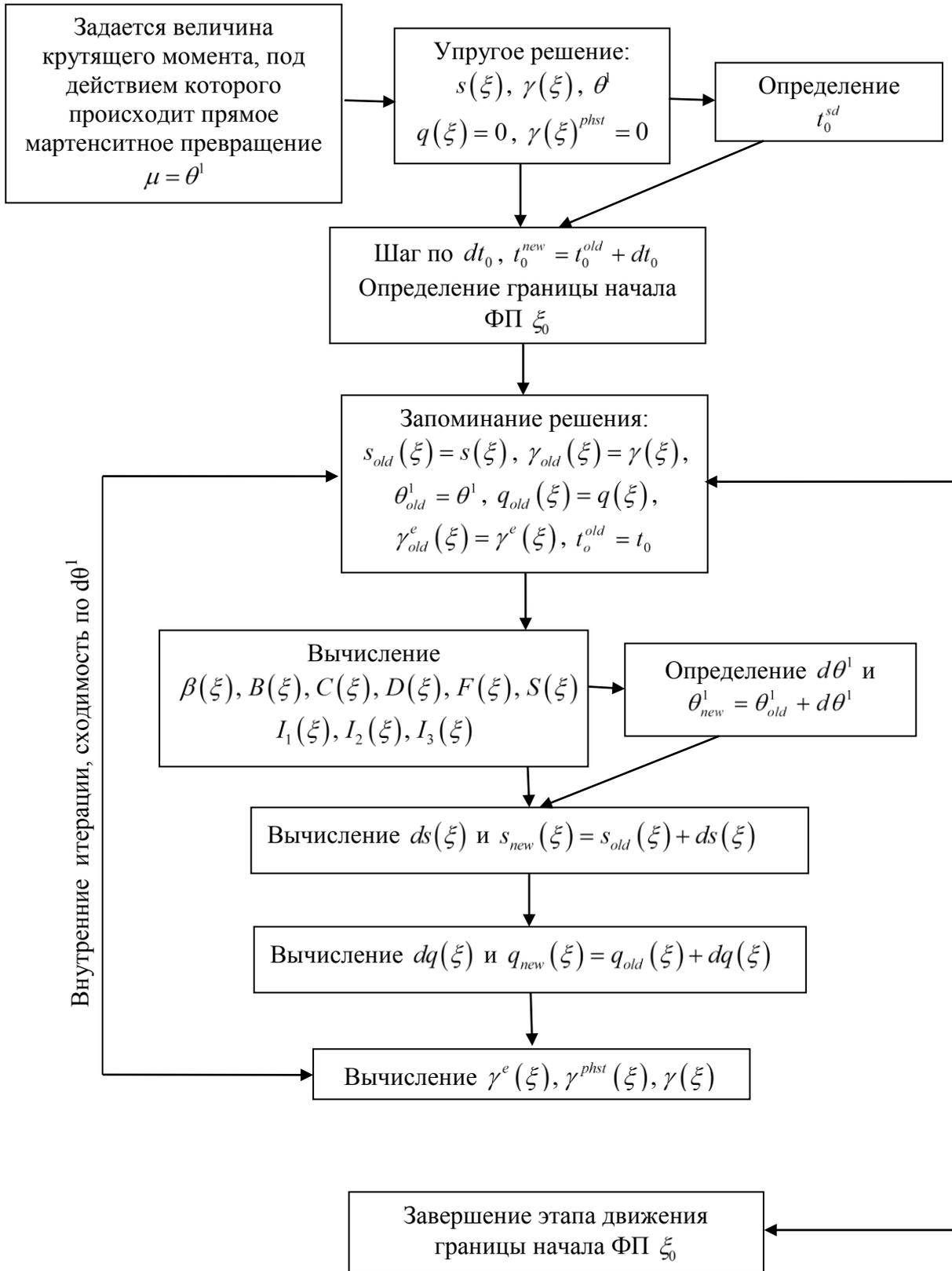


Схема 3.1 – Алгоритм решения задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне/трубке из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего момента. Этап движения границы начала ФП.

При решении задачи использованы следующие параметры материала, соответствующие СПФ типа равноатомного никелида титана $\lambda = E_A / E_M = 3$; $s_{0A} = \sigma_0 / G_A = 0,0046$; $s_{0M} = \sigma_0 / G_M = 0,0139$; $\delta S_0 = 0,1288$.

На рисунке 3.4 приведены результаты моделирования явления ПМП для стержня сплошного круглого поперечного сечения из СПФ. На графике представлены зависимости безразмерный параметр температуры t_0 – безразмерная крутка θ^1 . Данное решение получено для величины крутящего момента $\mu = 0,002$, под действием которого протекает ПМП. Оно отражает зависимость результатов от выбора параметров функции $f(q)$, определяющей вклад в фазовую деформацию явлений зарождения и развития мартенситных элементов. Так, моделирование было выполнено для $f(q) = \frac{f_a}{(q + f_c)^{f_b}}$. Принималось, что $f_a = 1$, $f_b = 1$, варьировался же параметр f_c . Кривые на рисунке 3.4 соответствуют $f_c = 0-4$, снизу вверх. Очевидно, что кривые практически совпадают. На основании приведенных графиков, можно заключить, что влияние функции $f(q)$ на результаты решения незначительно, в виду того, что наибольший вклад в фазовые деформации, при данном термомеханическом процессе, оказывает процесс зарождения, а не развития мартенситных элементов. Кроме этого, принятие функции $f(q)$ без учета развития мартенситных элементов значительно упрощает решение системы определяющих соотношений. На основании выше сформулированных положений, в дальнейшем при расчетах принимается, что $f(q) = a_0 = 0$.

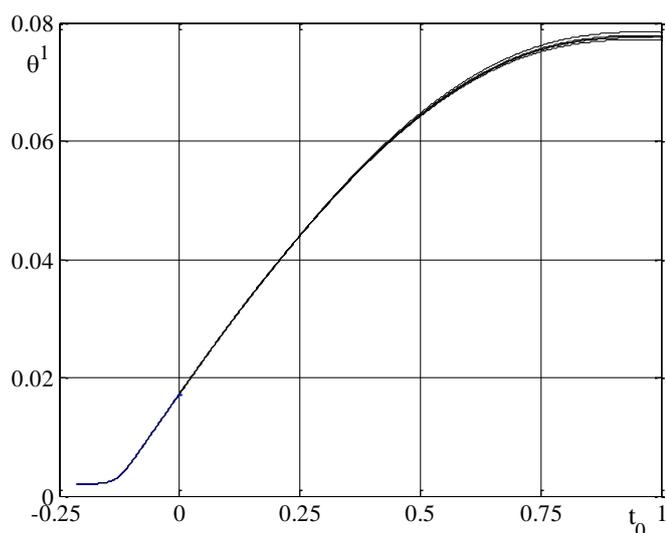


Рисунок 3.4 – Зависимости $t_0 - \theta^1$, ($\mu = 0,002$).

На рисунках 3.5-3.7 приведены эпюры безразмерных напряжений $s - \xi$ для значений безразмерного крутящего момента $\mu = 0,002$; $0,005$ и $0,01$ соответственно. Пунктирные линии

соответствует этапу движения границы начала ФП до нейтральной линии стержня, сплошные – этапу движения границы завершения ФП. Сплошная жирная линия – решение соответствующей упругой задачи.

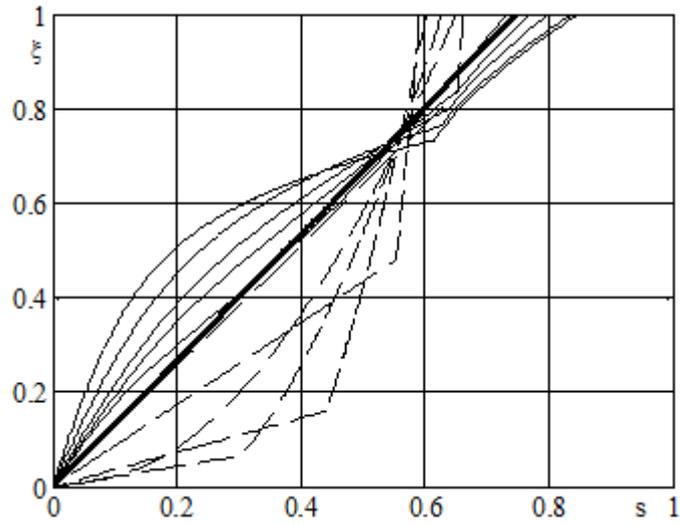


Рисунок 3.5 – Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0,002$.

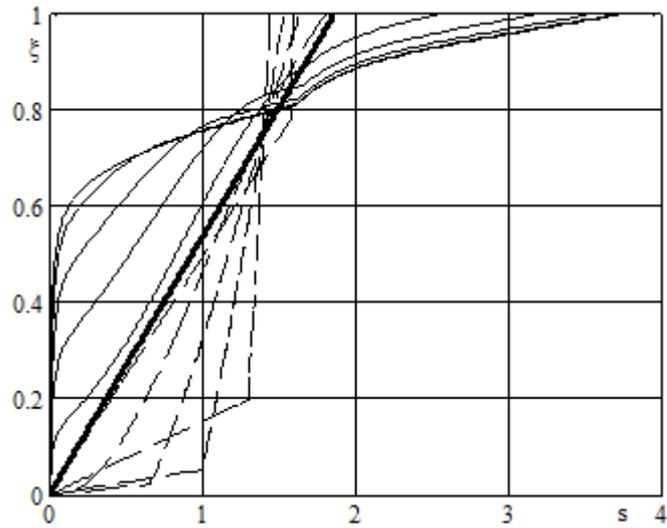


Рисунок 3.6 – Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0,005$.

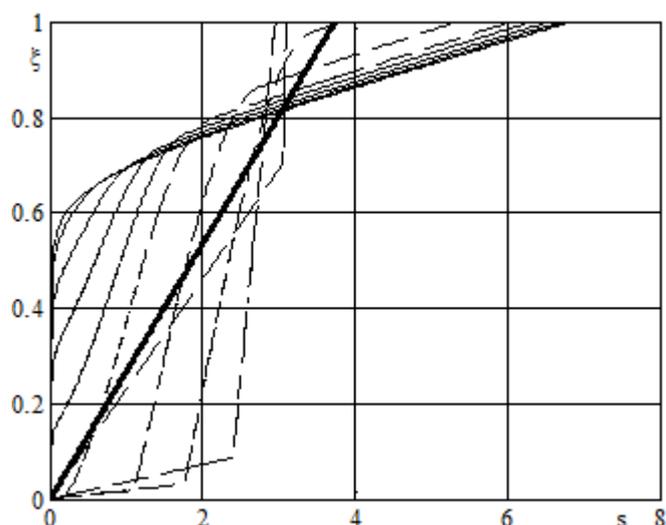


Рисунок 3.7 – Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0,01$.

Интервал температур каждого этапа разбит на 5 равных частей. Кривые на рисунках 3.5-3.7 соответствуют внутренним точкам данных интервалов.

Как видно из приведенных рисунков, в процессе охлаждения стержня напряжения по его сечению меняются немонотонно. Кроме этого в процессе протекания ПМП наблюдается существенная перегрузка внешних слоев стержня при разгрузке внутренних. Отмеченные явления происходят тем интенсивнее, чем выше величина μ , под действием которого протекает ПМП. При этом рост напряжений в крайнем волокне стержня может привести к разрушению рассматриваемого элемента из СПФ, что недопустимо в процессе эксплуатации изделия. Кроме этого следует отметить, что при больших значениях μ внутренняя часть сечения стержня не включается в работу, рисунок 3.7.

Как уже отмечалось выше, кручение толстостенных трубок и стержней является статически неопределимой задачей. Кроме того, в процессе охлаждения величина приращения безразмерных напряжений $ds(\xi)$ в отсчетной точке сечения может иметь как положительный, так и отрицательный знак (разгрузка). В том случае, когда напряжения в ходе решения задачи меняются не монотонно (рисунки 3.5-3.7), существенное влияние на получаемые результаты оказывает учет или не учет структурного превращения. По своей физической сути данное явление связано с раздвойникованием и переориентацией имеющихся мартенситных элементов. В случае наличия структурного превращения в точке сечения образца из СПФ, где фазовый переход уже начался, но еще не завершен ($0 < q < 1$), суммарная неупругая деформация является суммой фазовой и соответствующей структурной деформаций. В области, где фазовый переход полностью завершен ($q = 1$), наличие или отсутствие структурного перехода определяет механизм деформирования материала образца из СПФ согласно (3.40-3.42, 3.77). Определение наличия или отсутствия структурного превращения в рассматриваемой точке

сечения обусловлено выполнением следующих условий: если в отсчетной точке сечения $d(|\tau(\xi)|) > 0$, а само значение модуля напряжений соответствует максимальному значению за всю предыдущую историю процесса, то в данной точке происходит структурный переход. Если одно из двух выше изложенных условий не выполняется, то материал деформируется упруго с мартенситным модулем. Предложенная в [87-88] более сложная модель явления мартенситной неупругости в данной работе не используется.

На рисунке 3.8 приведены кривые безразмерный параметр температуры t_0 – безразмерная крутка θ^1 , отражающие зависимость решения задачи от учета или не учета структурного превращения.

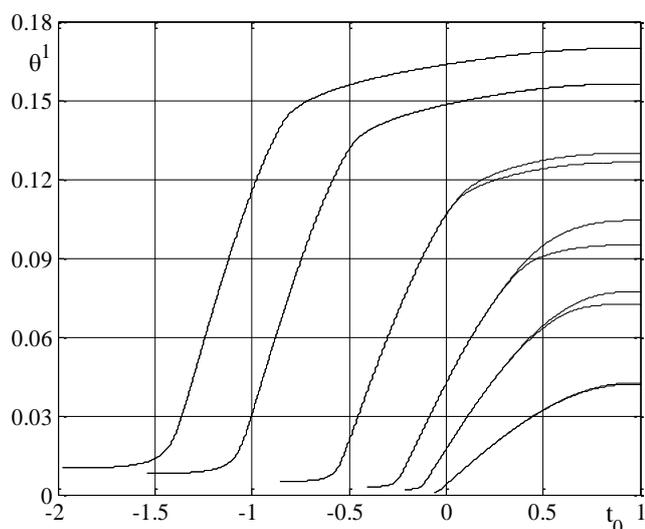


Рисунок 3.8 – Зависимости $t_0 - \theta^1$.

Пары приведенных кривых соответствуют значению $\mu = 0,001; 0,002; 0,003; 0,005; 0,008; 0,01$ снизу вверх (верхняя кривая – учет структурного перехода, нижняя – без учета). Для $\mu = 0,001; 0,008$ и $0,01$ кривые практически совпадают.

Учет структурного перехода наиболее актуален для средних значений моментов из-за существенного перераспределения напряжений по сечению стержня. На рисунке 3.9 приведены эпюры безразмерных напряжений (на момент окончания ПМП) для значения $\mu = 0,003$. Здесь сплошная линия – решение с учетом структурного перехода, штриховая линия без учета. Аналогичный результат получен для задачи чистого изгиба балки из СПФ в [87].

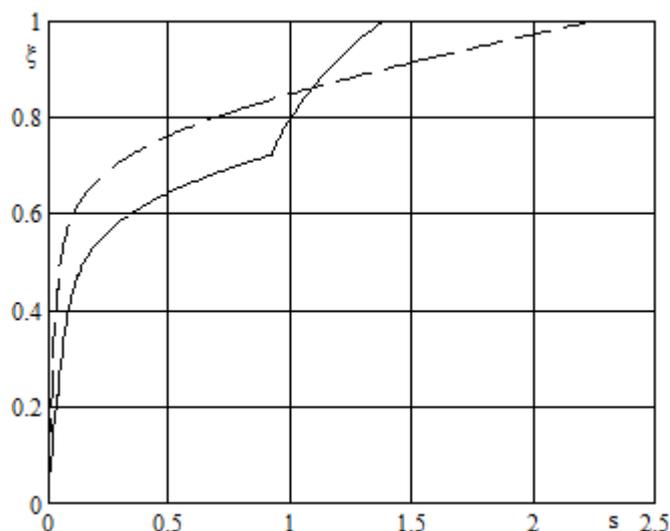


Рисунок 3.9 – Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0,003$.

В рамках настоящего параграфа также изучено поведение толстостенных трубок из СПФ. Данный элемент имеет очевидное весовое превосходство перед стержнем сплошного круглого поперечного сечения. При этом алгоритм решения соответствующей задачи не отличается от приведенного выше для стержня из СПФ.

На рисунке 3.10 приведены кривые безразмерный параметр температуры t_0 – безразмерная крутка θ^I , для трубок из СПФ с отношением $r_1/r_2 = J = 0,25; 0,5; 0,75$. Чем больше параметр, J тем тоньше трубка. Приведенные решения получены с учетом возможности протекания структурного перехода. При этом для каждой толщины трубки из СПФ подобран свой безразмерный крутящий момент, соответствующий $\mu = 0,002$, согласно (3.65).

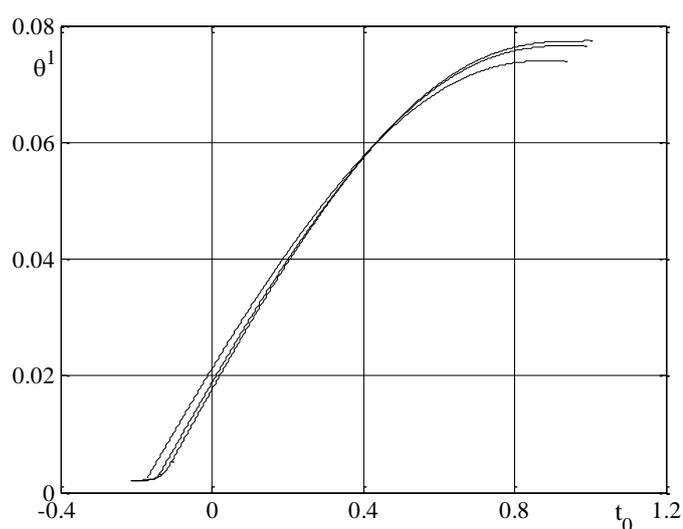


Рисунок 3.10 – Зависимости $t_0 - \theta^I$.

Здесь верхняя кривая соответствует $J = 0,25$; средняя – $0,5$; нижняя – $0,75$. Как видно из рисунка 3.10, с утонением трубки из СПФ уменьшается накапливаемая деформация на момент

окончания прямого мартенситного превращения. Кроме этого, увеличивается значение температура окончания ПМП.

На рисунках 3.11-3.13 приведены эпюры безразмерных напряжений $s-\xi$. Здесь пунктирные кривые соответствуют этапу движения границы начала ФП, сплошные – этапу движения границы окончания ФП. В данном случае кривые, приведенные для этапа движения границы начала ФП получены из следующего принципа. Поперечное сечение трубки из СПФ разбивается на пять равных участков. В тот момент, когда граница начала ФП достигает одной из пяти отсчетных точек, производится вывод результатов в качестве эпюры напряжений. Остальные кривые не претерпели изменений по сравнению с выводом результатов для стержня сплошного круглого поперечного сечения из СПФ.

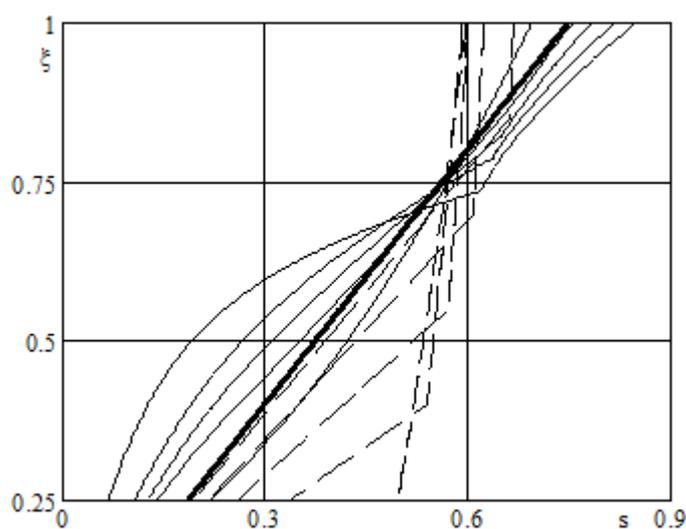


Рисунок 3.11 – Эпюры $s-\xi$, $J = 0,25$.

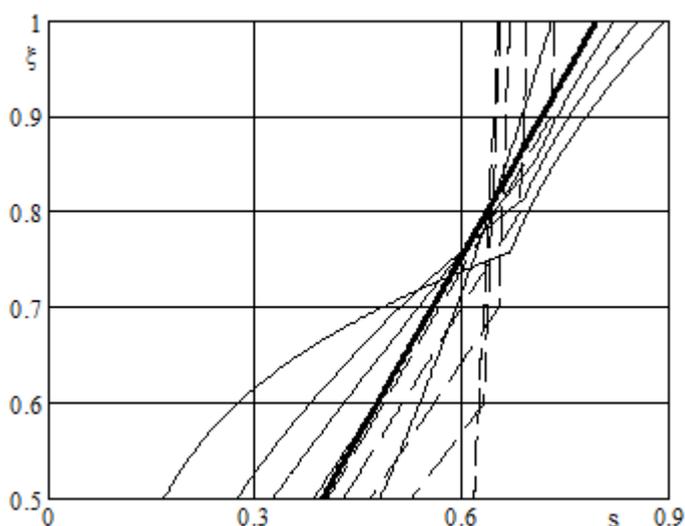
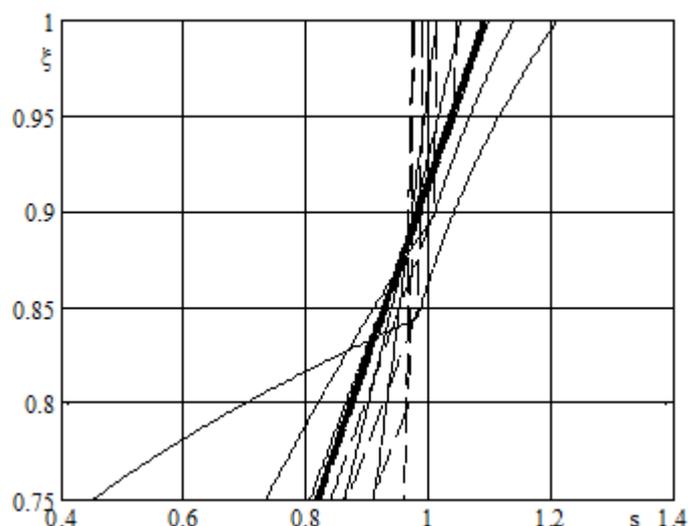


Рисунок 3.12 – Эпюры $s-\xi$, $J = 0,5$.

Рисунок 3.13 – Эпюры $s - \xi$, $J = 0,75$.

При рассмотрении задачи о ПМП в толстостенных трубках из СПФ установлено, что для больших значений крутящего момента термомеханический отклик трубки с отношением радиусов $J \approx 0,5$ весьма близок к поведению стержней сплошного сечения. Так, наблюдается наложение эпюр $s - \xi$ на момент окончания ПМП. Данный факт подтверждает принятое ранее положение об эффективности использования полых трубок из СПФ в качестве актуаторов и силовозбудителей крутящего момента.

Для понимания того с какой «скоростью» протекают фазово-структурные превращения в толстостенных трубках из СПФ составлена таблица 3.1. В ней содержится информация о величине параметра фазового состава q и фазово-структурной деформации γ^{phst} в точке сечения, соответствующей внешнему радиусу трубки на момент, когда граница начала ФП достигла внутреннего радиуса трубки.

Таблица 3.1 – Величина q и γ^{phst} на внешнем радиусе трубки.

J	q	γ^{phst}
0,25	0,064	0,0035
0,5	0,024	0,0014
0,75	0,009	0,0005

Как видно из таблицы 3.1 с уменьшением толщины трубки из СПФ понижается «скорость» протекания фазового перехода. При этом трубка с меньшей толщиной стенки оказывается более «жесткой» с точки зрения накопления фазово-структурных деформаций в процессе охлаждения под действием одинаковых безразмерных крутящих моментов.

Приведенные в данном параграфе результаты получены для аппроксимации диаграммы фазового перехода в соответствии с соотношениями (3.9-3.11). Однако конкретизация данных соотношений зависит от вида СПФ, рассмотрение которого ведется. Наряду с введенной ранее

системой уравнений (3.10-3.12) для СПФ типа равноатомного никелида титана справедливо следующее соотношение представления диаграммы ФП [108]:

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t_\sigma)) \quad (3.92)$$

Выбор соотношения для аппроксимации диаграмма ФП должен быть проведен на основе имеющихся экспериментальных данных. При использовании уравнения (3.92) и сохранении общего алгоритма решения задачи, вносятся соответствующие модификации в разрешающие соотношения. Так, модификации подлежат соотношения (3.14,3.23) и (3.72,3.73) соответственно.

$$\beta = \frac{\pi\sqrt{(q-q^2)}}{\Delta S_0 (M_s^0 - M_f^0)} \quad (3.93)$$

$$B = -\frac{\pi\sqrt{(q-q^2)}}{(M_s^0 - M_f^0)(1 + (f(q))^2 \beta C)} \quad (3.94)$$

$$\beta^1 = \beta\sigma_0 = \frac{\pi\sqrt{(q-q^2)}}{\delta S_0} \quad (3.95)$$

$$B^1 = (M_s^0 - M_f^0)B = -\frac{\pi\sqrt{(q-q^2)}}{(1 + (f(q))^2 \beta^1 C^1)} \quad (3.96)$$

На рисунке 3.14 приведено сравнение результатов моделирования задачи о ПМП в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего момента. При этом рассматривается два варианта соотношения для параметра фазового состава согласно (3.19 и 3.92). Соответствующие результаты для трубки из СПФ могут быть получены из приведенного решения, поэтому решение для толстостенных трубок не приводится. Кривые на рисунке 3.14 соответствуют значению $\mu = 0,001; 0,002; 0,003; 0,005; 0,008; 0,01$ и представлены парами. Здесь сплошная линия получена при решении согласно соотношению (3.9), пунктирная – соответствует уравнению (3.92).

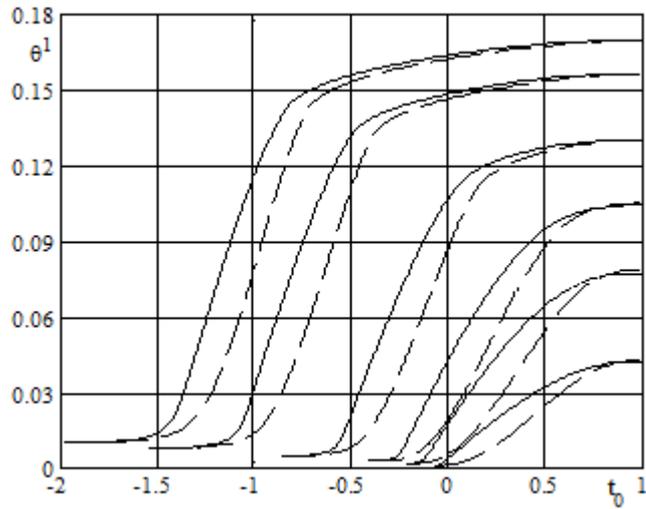


Рисунок 3.14 – Зависимости $t_0 - \theta^1$.

На рисунках 3.15-3.17 приведено сравнение эпюр $s - \xi$ для $\mu = 0,002; 0,005; 0,01$ на момент достижения границы начала ФП нейтральной линии, а также на момент окончания ПМП. Линии на рисунках соответствуют установленному правилу для рисунка 3.14. Сплошная жирная черная линия – решение соответствующей упругой задачи.

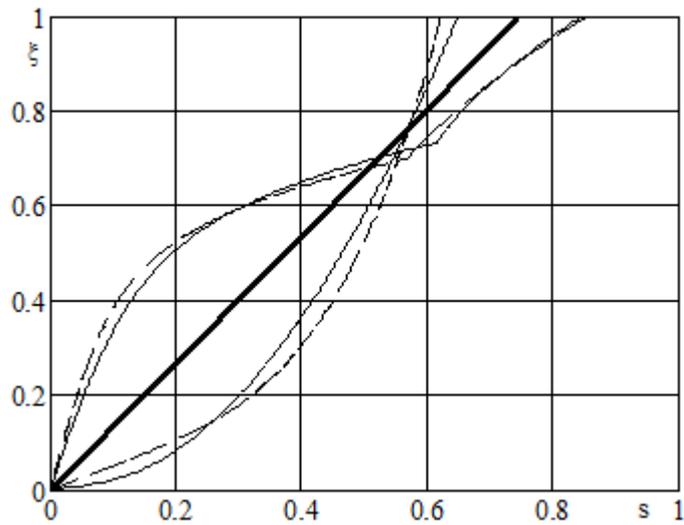
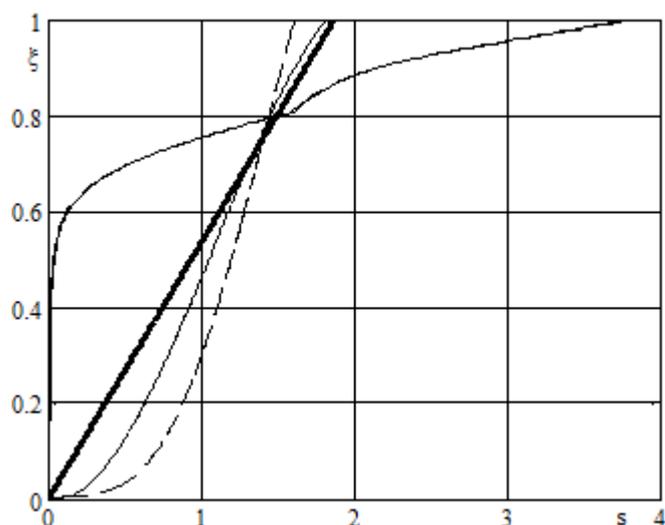
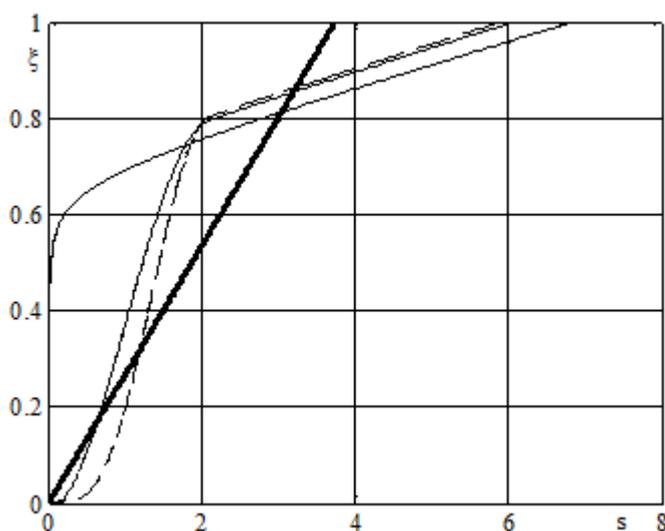


Рисунок 3.15 – Эпюры $s - \xi$ $\mu = 0,002$.

Рисунок 3.16 – Эпюры $s - \xi$ $\mu = 0,005$.Рисунок 3.17 – Эпюры $s - \xi$ $\mu = 0,01$.

На рисунках 3.16,3.17 эпюры, полученные на момент окончания ПМП, практически совпадают. При этом наибольшие отличия наблюдаются, когда все сечение образца из СПФ испытывает фазовое превращение. На основании приведенных данных можно заключить, что при использовании различных соотношений для вычисления параметра фазового состава q образец из СПФ будет проходить разный термомеханический путь в координатах $t_0 - \theta^1$.

Приведенные в рамках данного параграфа результаты получены в отсутствии априорных гипотез относительно распределения параметра фазового состава по сечению образца из СПФ. Однако решение разрешающей системы уравнений может быть существенно упрощено в случае принятия положения о том, что в любой момент охлаждения образца из СПФ величина параметра фазового состава q равномерно распределена по его сечению. При этом принимается положение об АППН. Тогда, как уже отмечалось выше для системы

определяющих уравнений справедливо конечное соотношения между неупругими деформациями, напряжениями и параметром фазового состава и решение задачи принимает аналитический вид, а суммарные деформации системы вычисляются на основе следующего соотношения:

$$\frac{\theta^1 \xi}{\sqrt{3}} = \frac{s}{3g(q)} + \rho_d q \Phi_1(s) \quad (3.97)$$

$$g(q) = G(q) / \sigma_0 \quad (3.98)$$

При этом крутящий момент обезразмеривается как приведено ниже:

$$m = \frac{\sqrt{3}M}{2\pi R^3 \sigma_0} = \int_0^1 s \xi^2 d\xi \quad (3.99)$$

Общий алгоритм решения задачи будет следующий. Первоначально материал стержня находится в аустенитном фазовом состоянии ($q = 0$). После производится шаг по $dq > 0$, вычисляется новое значение $q_{new} = q_{old} + dq$. Для нового значения q_{new} подбирается такое значение безразмерной крутки θ^1 , которое даст решение уравнения (3.97) относительно $s(\xi)$, такое, что удовлетворит соотношение (3.99). При этом параметр m является величиной заданной. Решение задачи продолжается до завершения прямого мартенситного превращения, то есть до тех пока параметр q не станет равным единице.

На рисунках 3.18,3.19 приведены эпюры безразмерных напряжений для величины $m = 0,002$ и $0,01$. Кривые на рисунках соответствуют значениям параметра фазового состава $q = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ сверху вниз до пересечения кривых с наклонной прямой. Наклонная прямая соответствует решению упругой задачи.

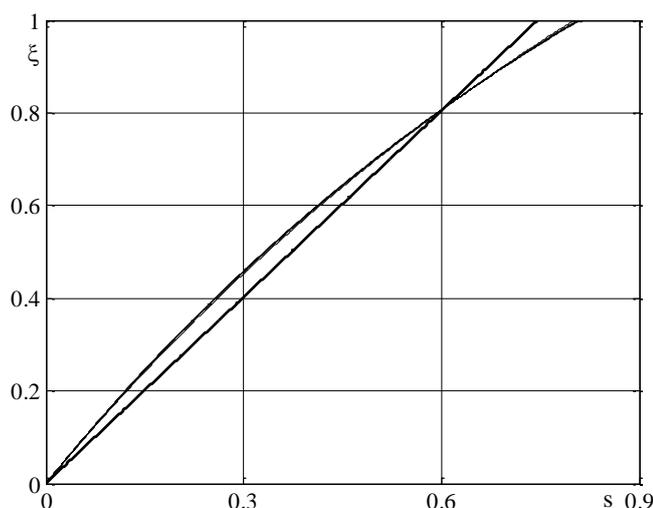


Рисунок 3.18 – Эпюры $s - \xi$, $m = 0,002$.

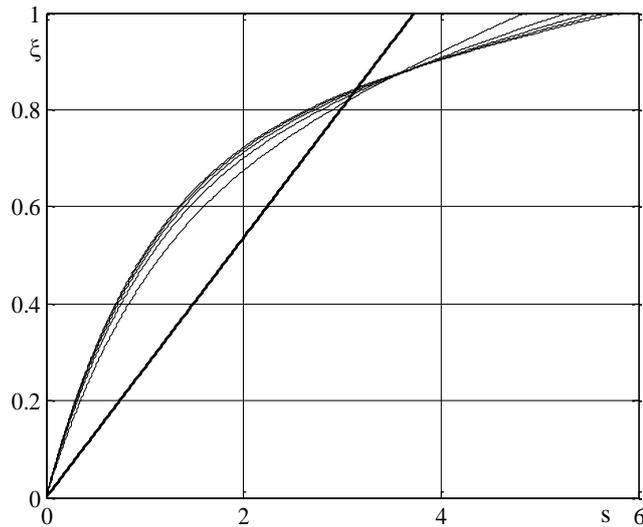


Рисунок 3.19 – Эпюры $s - \xi$, $m = 0,01$.

Как видно из рисунков 3.18,3.19 в ходе охлаждения напряжения по сечению стержня меняются не монотонно. При этом, чем больше крутящий момент, под действием которого происходит ПМП, тем выше степень перераспределения напряжений. Тогда принятое ранее положение об АППН не является правомерным.

Следует отметить, что изображенное на рис. 3.18, 3.19 перераспределение напряжений по сечению с ростом величины q связано с учетом при решении не только фазово – структурных, но и упругих деформаций. В случае пренебрежения упругими деформациями распределение напряжений по сечению не меняется при изменении q .

На рисунке 3.20 приведены зависимости безразмерной крутки θ^1 от параметра фазового состава q для значений безразмерного крутящего момента $m = 0,001; 0,002; 0,003; 0,005$ и $0,01$ снизу вверх соответственно. Как видно, зависимости θ^1 от q , полученные при решении в предположении о равномерном распределении объемной доли мартенситной фазы по сечению стержня из СПФ, весьма близки к линейным.

В случае пренебрежения упругими деформациями, по сравнению с фазово – структурными зависимости θ^1 от q сводится к прямой пропорциональности.

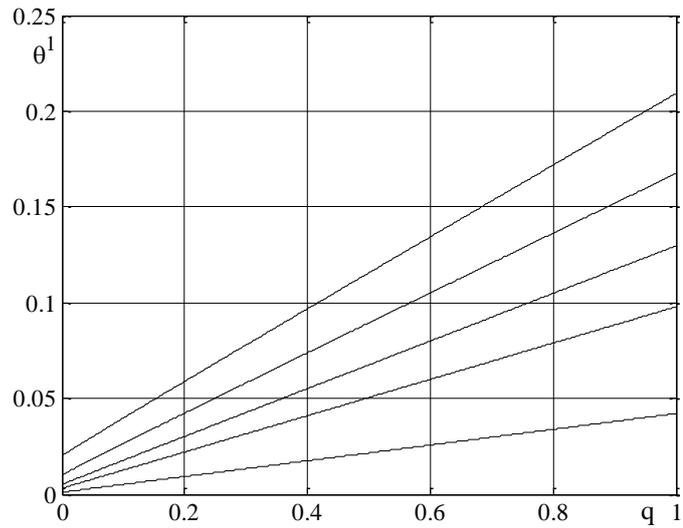


Рисунок 3.20 – Зависимости $q - \theta^1$.

Ниже представлено сравнение результатов полученных при решении задачи о ПМП в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего момента. Так, на рисунках 3.21,3.22 сплошная линия получена в предположении о равномерном распределении по материалу температуры (модель №1), пунктирная – в предположении о равномерно распределении q по сечению стержня (модель №2). Кривые соответствуют моменту окончания прямого мартенситного превращения ($q = 1$).

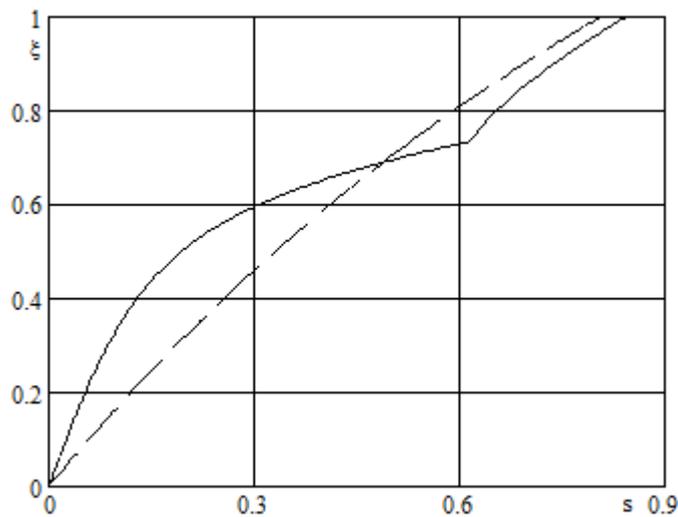


Рисунок 3.21 – Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0,002$.

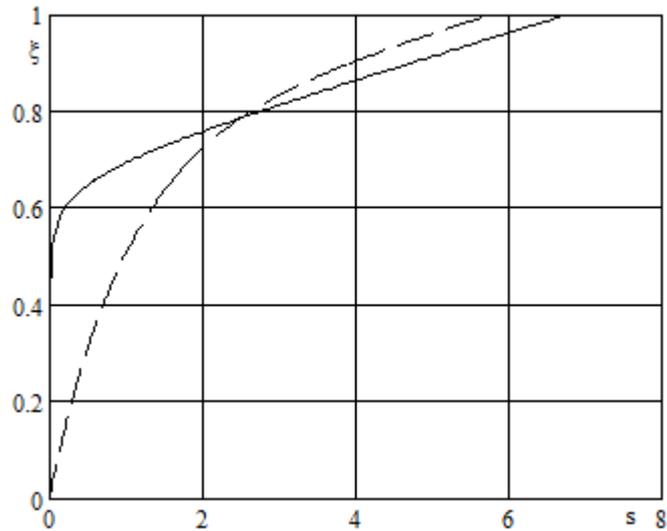


Рисунок 3.22 – Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0,01$.

Как видно из рисунков 3.21,3.22 решение, полученное в предположении о равномерном распределении параметра фазового состава по сечению образца из СПФ, отличается от решения в рамках гипотезы о равномерном распределении температуры. Объяснением данного феномена служит тот факт, что в рамках двух приведенных решений не выполняется положение об АППН. Поэтому дифференциальные определяющие зависимости не могут быть сведены к конечным соотношениям для получения результата, адекватно описывающего поведение толстостенных трубок/стержней из СПФ при моделировании ПМП, протекающего под действием постоянного крутящего момента. Так для модели №2 характерно завышенное значение напряжений на внутренней части сечения, при этом на внешнем радиусе отмечается падение напряжений в сравнении с решением, проведенным в рамках модели №1.

Однако решение в предположение о равномерном распределении параметра фазового состава по сечению стержня может быть использовано для подтверждения достоверности приведенных в данной главе результатов, так как данное решение имеет аналитическую форму записи.

Параметр материала δS_0 представляет собой скачек объемной плотности энтропии при переходе мартенситной фазы в аустенитную при отсчетной температуре T . С его увеличением степень термомеханической связанности задачи понижается. Рост величины δS_0 приведет к тому, что решение задачи в отсутствии априорных гипотез относительно распределения параметра фазового состава будет асимптотически сходиться к известному аналитическому решению, что и проиллюстрировано на рисунке 3.23.

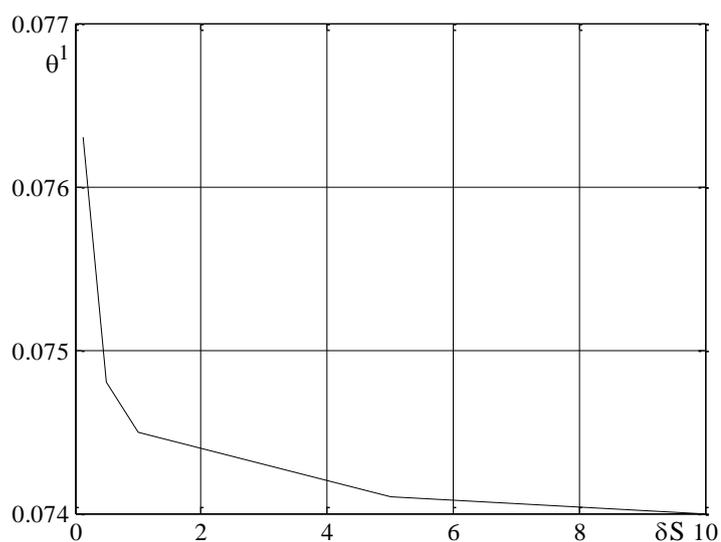


Рисунок 3.23 – Зависимость $\theta^1 - \delta S_0$.

Зависимость, представленная на рисунке 3.23, получена путем решения ряда задач для $\mu = 0.002$ при варьировании величины δS_0 . При этом в качестве соотношения для параметра фазового состава использовано уравнение (3.9). Из приведенного рисунка видно, что с ростом δS_0 значение θ^1 асимптотически стремится к решению, полученному в рамках модели №2. Тем самым подтверждается достоверность приведенных в данной главе результатов.

3.3 Выводы.

1. В данном разделе разработан алгоритм решения задачи о прямом мартенситном превращении в тонко и толстостенной трубке, а также в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего момента.

2. Установлено, что при рассмотрении задачи для тонкостенных трубок из СПФ правомерно положение об АППН и решение системы дифференциальных определяющих уравнений, сводится к конечному алгебраическому соотношению и решение задачи принимает аналитически вид.

3. Проведенное численное моделирование позволило установить, что зависимости параметр фазового состава – суммарные деформации качественно не зависят от используемой при решении функции распределения микронапряжений и весьма близки к линейным. При этом влияние функции распределения микронапряжений отражается на величине деформаций, накапливаемых за процесс охлаждения.

4. В ходе решения соответствующей задачи для стержня сплошного круглого поперечного сечения из СПФ установлено, что влияние материальной функции $f(q)$ на получаемые результаты незначительно.

5. Показано, что в процессе охлаждения напряжения по сечению образца из СПФ меняются не монотонно. Данная тенденция наблюдается как на случай рассмотрения задачи о ПМП в стержне, так и в толстостенной трубке из СПФ. При этом наблюдается следующий феномен. Чем больше величина безразмерного крутящего момента, под действием которого происходит ПМП, тем выше перегрузка крайних волокон стержня. Кроме этого следует отметить, что при больших значениях μ внутренняя часть сечения стержня не включается в работу.

6. Установлено, что учет структурного перехода при ПМП существенно меняет решение задачи. Так, наблюдается увеличение накапливаемой неупругой деформации на момент окончания прямого превращения. Кроме того, учет структурного перехода значительно меняет картину распределения напряжений по сечению образца из СПФ. Отмечено, что учет структурного перехода наиболее актуален для средних значений крутящего момента.

7. Показано, что с уменьшением толщины трубки из СПФ уменьшается накапливаемая неупругая деформация на момент окончания ПМП в совокупности с повышением температуры его окончания. Установлено, что с уменьшением толщины трубки понижается «скорость» протекания фазового превращения.

8. Установлено, что для больших значений крутящего момента термомеханический отклик трубки с отношением радиусов $J \approx 0.5$ весьма близок к поведению стержней сплошного

сечения. Так, наблюдается наложение эпюр $s - \xi$ на момент окончания ПМП. Данный факт подтверждает принятое ранее положение об эффективности использования полых трубок из СПФ в качестве актуаторов и силовозбудителей крутящего момента.

9. В рамках настоящей главы изучено поведение образцов из СПФ работающих на кручение для двух различных аппроксимаций диаграммы фазового перехода.

10. Выполнено сравнение решений полученных в рамках гипотез о равномерном распределении параметра фазового состава по сечению образца из СПФ, а также правомерности положения об АППН с решением в рамках предположения о равномерном распределении по сечению температуры. Показано, что в процессе охлаждения образца из СПФ, в случае учета упругих деформаций положение об АППН не выполняется, поэтому принятие априорных гипотез относительно распределения параметра фазового состава приводит к неизбежным математическим ошибкам моделирования. Так, в случае принятия гипотез о равномерном распределении q по сечению образца из СПФ наблюдается завышенное значение напряжений на внутренней части сечения, при этом на внешнем радиусе отмечается падение напряжений по сравнению с решением в рамках предположения о равномерном распределении температуры.

Глава 4. Обратное термоупругое мартенситное фазовое превращение, протекающие в стержнях и трубках из сплава с памятью формы, под действием постоянного и переменного крутящего момента.

Обратное мартенситное превращение (ОМП) заключается в переходе имеющихся мартенситных элементов в аустенитные при нагреве через соответствующий интервал температур. При этом если образец из СПФ подвергся предварительному нагружению в мартенситном фазовом состоянии или же произведено охлаждение образца через интервал температур ПМП под действием внешнего напряжения, то образец из СПФ при нагреве будет снимать накопленную на предыдущем этапе неупругую фазово-структурную деформацию. Данное явление известно в литературе как эффект памяти формы (ЭПФ) [3]. В случае если при ОМП существует воздействие, противодействующие восстановлению первоначальных размеров и формы, то рассматриваемый элемент из СПФ будет совершать полезную работу.

Простейшим примером устройств использующих в основе своей работы ЭПФ является термомеханический привод. Он может представлять собой спиральную пружину или торсионный актуатор из СПФ. Данные устройства, работающие на кручение весьма перспективны для использования в элементах механизации авиационно-космических комплексов. Они позволяют менять угол атаки аэродинамических поверхностей на различных режимах полета, тем самым обеспечивая необходимые аэродинамические характеристики летательного аппарата.

Непосредственным элементом актуатора или термомеханического привода является его активный элемент из СПФ. Конструктивно он может представлять собой трубку различных толщин или стержень сплошного круглого поперечного сечения. На первом этапе активный элемент подвергается одному из двух отмеченных выше воздействий (нагружение в мартенситном состоянии или ПМП под действием напряжений). Далее он помещается в конструктивную экспозицию. После образец из СПФ подвергается нагреву. При этом активный элемент из СПФ может быть соединен с контртелом, которое представляет собой упругий стержень один конец которого заделан, а второй соединен с актуатором из СПФ. Соединение контртела и актуатора из СПФ может быть выполнено как до так и после упругой разгрузки последнего. При нагреве (рабочий ход) активный элемент из СПФ вспоминает свое изначальное состояние и раскручивается, при этом деформируя контртело. После при охлаждении, активный элемент из СПФ вновь закручивается под действием контртела. Данный механизм деформирования реализует конструктивный двойной эффект памяти формы.

В данной главе рассматриваются задачи об ОМП в трубках и стержнях сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего

момента, под воздействием контртела или в заневоленном состоянии. Во второй и третьей постановках задач реализуется стесненное деформирование, следствием которого является возникновение реактивных напряжений, что вызывает рост величины крутящего момента. При этом считается, что напряжения в рассматриваемых процессах малы, так что обычных пластических деформаций не возникает.

4.1. Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в тонкостенной трубке из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного крутящего момента.

Данный термомеханический процесс моделирует рабочий ход активного элемента актюатора или привода. При решении поставленной задачи исходными данными выступают распределения напряжений, упругих и фазово-структурных деформаций, объемной доли мартенситной фазы по сечению образца из СПФ, а также величина крутки. Данные величины получены из решения соответствующих задач о мартенситной неупругости либо ПМП. После предварительного нагружения фиксируется величина достигнутого крутящего момента и производится нагрев трубки из СПФ через интервал температур ОМП. При этом предполагается, что температура распределена равномерно по сечению трубки. Также считается, что трубка из СПФ является достаточно тонкостенной, при этом градиент напряжений по толщине равен нулю. Данные положения дают право заключить, что напряжения в процессе нагрева изменяться не будут. Тогда параметр фазового состава q не зависит от координат точек тела. Кроме этого при данной постановке задачи справедливо положение об АППН. Тогда определяющее соотношение для фазово-структурной деформации будет иметь одинаковый вид, как для прямого, так и для обратного фазового перехода. Отмеченное соотношение получено ранее в главе 3. Соответственно и уравнение для определения полных деформаций системы будет иметь идентичный вид для прямого и обратного ФП. При этом материал трубки из СПФ будет проходить один и тот же термомеханический путь деформирования в координатах $\gamma - q$. Тогда приведенные в главе 3 зависимости $\gamma - q$ будут правомерны для поставленной задачи, за той разницей, что читать их следует справа налево при уменьшении q от единицы до нуля.

4.2 Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в толстостенной трубке и стержне сплошного круглого поперечного сечения из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного крутящего момента.

При рассмотрении задачи об ОМП принимается, что распределение поля температур известно и равномерно по сечению образца из СПФ. Считается, что напряжения в рассматриваемых процессах малы, так что обычных пластических деформаций не возникает.

Искомыми величинами по-прежнему выступают распределения напряжений, деформаций и параметра фазового состава q по сечению стержня/трубки. При этом относительно распределения q не принимается каких-либо априорных гипотез.

В качестве исходных данных для поставленной задачи выступают результаты решения задачи о ПМП в стержне/трубке из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего момента. При этом последующий нагрев образца из СПФ может происходить как до, так и после упругой разгрузки.

При обратном фазовом переходе для параметра фазового состава справедлив следующий блок уравнений:

$$q = \sin\left(\frac{\pi}{2} t_\sigma\right) \quad (4.1)$$

$$t_\sigma = 1 - \frac{A_s^\sigma - T}{A_s^0 - A_f^0} \quad (4.2)$$

$$A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^- \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S_0} \quad (4.3)$$

$$\omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}'^{phst}}{q} \quad (4.4)$$

Подставляя соотношение (4.4) в (4.3) и пренебрегая вторым и третьим слагаемым в числителе (4.3), по аналогии со случаем прямого мартенситного превращения, можно получить:

$$A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}'^{phst}}{q \Delta S_0} \quad (4.5)$$

Соотношение (4.5) получено из предположения малости объемных деформаций. По этой же причине в данной главе не учитываются температурные деформации.

Дифференцируя уравнение (4.1) получим соотношение для приращения параметра фазового состава:

$$dq = \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} t_\sigma\right)}{2(A_f^0 - A_s^0)} (dA_s^\sigma - dT) \quad (4.6)$$

Учитывая, что для $x \in [0, \pi/2]$ выполняется $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$, то соотношение (4.6) примет следующий вид:

$$dq = \frac{\pi\sqrt{1-q^2}}{2(A_f^0 - A_s^0)} (dA_s^\sigma - dT) \quad (4.7)$$

Дифференцируя (4.5) получим:

$$dA_s^\sigma = \frac{q(\varepsilon_{ij}'^{phst} d\sigma_{ij}' + \sigma_{ij}' d\varepsilon_{ij}'^{phst}) - \varepsilon_{ij}'^{phst} \sigma_{ij}' dq}{\Delta S_0 q^2} \quad (4.8)$$

Приращение девиатора неупругих деформаций определяется из соотношения приведенного ниже:

$$d\varepsilon_{ij}'^{phst} = \frac{\varepsilon_{ij}'^{phst}}{q} dq + \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \Psi_2(\sigma_i) q d\sigma_i \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в соотношение (4.8) получим:

$$dA_s^\sigma = \frac{\frac{1}{q} \varepsilon_{ij}'^{phst} d\sigma_{ij}' + A d\sigma_i}{\Delta S_0} \quad (4.10)$$

$$A = [\rho_D \Psi_2(\sigma_i)] \sigma_i \quad (4.11)$$

Учитывая (4.10,4.11) уравнение (4.7) примет следующий вид:

$$dq = \beta_1 \left(\frac{1}{q} \varepsilon_{ij}'^{phst} d\sigma_{ij}' + A d\sigma_i - dT \Delta S_0 \right) \quad (4.12)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi\sqrt{1-q^2}}{2\Delta S_0 (A_f^0 - A_s^0)} \quad (4.13)$$

Переходя к интенсивностям напряжений и деформаций можно получить:

$$dq = \beta_1 \left(\left(\frac{1}{q} \varepsilon_i'^{phst} + A \right) d\sigma_i - dT \Delta S_0 \right) \quad (4.14)$$

Вводя следующие обозначения получим:

$$dq = S d\sigma_i + B dT \quad (4.15)$$

$$S = \beta_1 \left(\frac{1}{q} \varepsilon_i'^{phst} + A \right) = \frac{\pi\sqrt{1-q^2}}{2\Delta S_0 (A_f^0 - A_s^0)} \left(\frac{1}{q} \varepsilon_i'^{phst} + \rho_D \Psi_2(\sigma_i) \sigma_i \right) \quad (4.16)$$

$$B = -\beta_1 \Delta S_0 = -\frac{\pi\sqrt{1-q^2}}{2(A_f^0 - A_s^0)} \quad (4.17)$$

На случай кручения $\varepsilon_i^{phst} = \gamma^{phst} / \sqrt{3}$, $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$. Тогда соотношения (4.15,4.16) переписуются следующим образом:

$$dq = Sd\tau + BdT \quad (4.18)$$

$$S = \beta_1 \left(\frac{1}{q} \gamma^{phst} + A \right) = \frac{\pi \sqrt{1-q^2}}{2\Delta S_0 (A_f^0 - A_s^0)} \left(\frac{1}{q} \gamma^{phst} + 3\rho_d \Psi_2(\sqrt{3}\tau) \tau \right) \quad (4.19)$$

На случай кручения уравнение для определения полных деформаций системы записывается следующим образом:

$$r\theta = \frac{\tau}{G(q)} + \gamma^{phst} \quad (4.20)$$

Соотношение (4.20) получено в рамках гипотезы плоских сечений для полных деформаций. Дифференцируя (4.20) можно получить уравнение для приращения касательных напряжений $d\tau$ в зоне, где протекает фазово-структурный переход:

$$rd\theta = Fd\tau + Ddq \quad (4.21)$$

$$F = \left(\frac{1}{G(q)} + 3\rho_d q \Psi_2(\sqrt{3}\tau) \right) \quad (4.22)$$

$$D = \frac{\Delta G \tau}{G_A G_M} + \frac{\gamma'^{phst}}{q} \quad (4.23)$$

$$\Delta G = G_A - G_M \quad (4.24)$$

Учитывая (4.18), уравнение (4.21) переписывается, как показано ниже:

$$d\tau = \frac{rd\theta - BDdT}{F + DS} \quad (4.25)$$

Соотношение (4.25) справедливо в той части сечения образца из СПФ, где наблюдается фазово-структурный переход. Так, для стержня и трубки данная область находится в диапазоне между $r_{00} \leq r \leq r_0$.

В мартенситной зоне $r_0 \leq r \leq R$ для стержня и $r_0 \leq r \leq r_2$ для трубки из СПФ справедливо следующее соотношение:

$$d\tau = \frac{rd\theta}{F} \quad (4.26)$$

В случае структурного перехода:

$$F = \left(\frac{1}{G_M} + 3\rho_d \Psi_2(\sqrt{3}\tau) \right) \quad (4.27)$$

В случае упругого деформирования:

$$F = 1/G_M \quad (4.28)$$

В области, где закончился обратный фазовый переход $0 \leq r \leq r_{00}$ для стержня и $r_1 \leq r \leq r_{00}$ для трубки из СПФ, материал деформируется упруго с аустенитным модулем:

$$d\tau = rd\theta G_A \quad (4.29)$$

Приращение крутящего момента, как и на случай ПМП определяется на основе соотношений для приращений касательных напряжений по сечению образца из СПФ (4.25,4.26,4.29).

Так для стержня:

$$dM = 2\pi \int_0^R d\tau r^2 dr \quad (4.30)$$

Для трубки:

$$dM = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} d\tau r^2 dr \quad (4.31)$$

Здесь и далее формулы для стержня получаются из формул для трубки если в последней положить $r_1 = 0$ и $r_2 = R$.

Подставляя (4.25,4.26,4.29) в (4.31) соответственно получим:

$$dM = 2\pi \left\{ \left[\frac{G_A (r_{00}^4 - r_1^4)}{4} + \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{r^3}{F + DS} dr + \int_{r_0}^{r_2} \frac{r^3}{F} dr \right] d\theta - dT \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{DBr^2}{F + DS} dr \right\} \quad (4.32)$$

Так как обратное фазовое превращение происходит под действием постоянного крутящего момента, то его приращение $dM = 0$. При нагреве образца из СПФ можно условно выделить два этапа. Первый – это движение границы начала обратного мартенситного превращения, второй – движение границы окончания фазового перехода. Введем следующие обозначения:

$$I_1 = \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{r^3}{F + DS} dr \quad (4.33)$$

$$I_2 = \int_{r_0}^R \frac{r^3}{F} dr, \quad I_2 = \int_{r_0}^{r_2} \frac{r^3}{F} dr \quad (4.34)$$

$$I_3 = \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{DBr^2}{F + DS} dr \quad (4.35)$$

Подставляя (4.33-4.34) в (4.32) можно получить уравнения для определения приращения крутки на первом этапе нагрева образца из СПФ:

$$d\theta = \frac{I_3 dT}{\frac{G_A (r_{00}^4 - r_1^4)}{4} + I_1 + I_2} \quad (4.36)$$

В случае, когда все сечение образца из СПФ испытывает фазово-структурный переход, приращение крутки вычисляется на основе следующего соотношения:

$$d\theta = \frac{I_3}{\frac{G_A (r_{00}^4 - r_1^4)}{4} + I_1} \quad (4.37)$$

Считается, что обратный фазовый переход начнется с нейтральной оси стержня/внутреннего радиуса трубки, так как в данной области либо отсутствуют напряжения, либо их значение минимально для сечения. Так, для стержня температура начала обратного фазового перехода определятся из условия $T = A_s^0$, для трубки $T = A_s^\sigma$. В общем случае в рассматриваемой точке сечения обратный фазовый переход начнется при выполнении условия $T = A_s^\sigma$. На случай кручения соотношение (4.5) записывается следующим образом:

$$A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\gamma^{phst} \tau}{q \Delta S_0} \quad (4.38)$$

Учитывая (4.38) уравнение для определения температуры начала ФП примет следующий вид:

$$T = A_s^0 + \frac{\gamma^{phst} \tau}{q \Delta S_0} \quad (4.39)$$

Соотношения (4.1-4.39) представляют собой размерное решение задачи об обратном мартенситном превращении в стержне/трубке из СПФ, протекающем при постоянном крутящем моменте. По аналогии с задачей о ПМП вводятся следующие безразмерные переменные и параметры.

Безразмерная радиальная координата:

$$\xi = \frac{r}{r_2} \quad (4.40)$$

Безразмерная радиальная координата начала ФП:

$$\xi_0 = \frac{r_0}{r_2} \quad (4.41)$$

Безразмерная радиальная координата окончания ФП:

$$\xi_{00} = \frac{r_{00}}{r_2} \quad (4.42)$$

Безразмерный крутящий момент, а также безразмерная крутка определяются как приведено ниже:

$$\mu = \frac{2M}{G_A \pi (r_2^4 - r_1^4)} r_2, \quad \theta^1 = \theta \cdot r_2 \quad (4.43)$$

Вводится понятие безразмерных напряжений и жесткостей:

$$s = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0}, \quad s_{0A} = \frac{\sigma_0}{G_A}, \quad \lambda = \frac{G_A}{G_M} \quad (4.44)$$

Кроме этого обезразмериваются функции распределения микронапряжений, так что:

$$F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1\left(\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0}\right) = \Phi_1(s), \quad F_1'(\sqrt{3}\tau) = \frac{1}{\sigma_0} \Phi_1'\left(\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{\sigma_0} \Phi_1'(s) \quad (4.45)$$

$$\Psi_2(\sqrt{3}\tau) = \frac{1}{\sigma_0} \Phi_2'\left(\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{\sigma_0} \Phi_2'(s) \quad (4.46)$$

На основе соотношений (4.40-4.46) обезразмериваются основные блоки уравнений для определения приращения параметра фазового состава, напряжений, крутящего момента, крутки, а также радиальной координаты границы начала фазового перехода. Так, для приращения параметра фазового состава, справедлив следующий блок уравнений:

$$dq = \frac{S^1}{\sqrt{3}} ds - B^1 dt_0 \quad (4.47)$$

$$S^1 = \beta^1 \left(\frac{1}{q} \gamma^{phst} + A^1 \right) \quad (4.48)$$

$$\beta^1 = \beta_1 \sigma_0 = \frac{\pi \sqrt{1-q^2}}{2\Delta S_0 (A_f^0 - A_s^0)} \sigma_0 = \frac{\pi \sqrt{1-q^2}}{2\delta S_0} \quad (4.49)$$

$$\delta S_0 = \frac{(A_f^0 - A_s^0) \Delta S_0}{\sigma_0} \quad (4.50)$$

$$A^1 = \sqrt{3} \rho_d \Phi_2'(s) s \quad (4.51)$$

$$B^1 = B_1 (A_f^0 - A_s^0) = -\frac{\pi \sqrt{1-q^2}}{2} \quad (4.52)$$

Для случая ОМП безразмерный параметр температуры определяется как показано ниже:

$$dt_0 = -\frac{d\Gamma}{A_s^0 - A_f^0} \quad (4.53)$$

В аустенитной зоне сечения уравнение для определения приращения напряжений имеет следующий вид:

$$ds = \frac{\sqrt{3} \xi d\theta^1}{s_{0A}} \quad (4.54)$$

Для области, где протекает фазово-структурный переход приращение напряжений вычисляется как приведено ниже:

$$ds = \frac{\sqrt{3} (\xi d\theta^1 + B^1 D^1 dt_0)}{F^1 + D^1 S^1} \quad (4.55)$$

$$F^1 = F\sigma_0 = s_{0A} + s_{0A}q(\lambda-1) + 3\rho_d q\Phi_2'(s) \quad (4.56)$$

$$D^1 = \frac{(\lambda-1)ss_{0A}}{\sqrt{3}} + \frac{\gamma^{phst}}{q} \quad (4.57)$$

В мартенситной области:

$$ds = \frac{\sqrt{3}\xi d\theta^1}{F^1} \quad (4.58)$$

В случае если в отмеченной зоне сечения образца из СПФ не наблюдается структурного превращения, то в соотношениях (4.51,4.56) необходимо положить равным нулю слагаемые содержащие функцию $\Phi_2(s)$.

Для приращения крутящего момента справедливо соотношение приведенное ниже:

$$\frac{d\mu}{4} = \left\{ \left[\frac{(\xi_{00}^4 - J^4)}{4} + \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{s_{0A}\xi^3}{F^1 + D^1S^1} d\xi + \int_{\xi_0}^1 \frac{s_{0A}\xi^3}{F^1} d\xi \right] d\theta^1 + dt_0 \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{s_{0A}D^1B^1\xi^2}{F^1 + D^1S^1} d\xi \right\} \quad (4.59)$$

$$\text{как и ранее } J = r_1 / r_2 \quad (4.60)$$

Так как обратное мартенситное превращение происходит под действием постоянного крутящего момента, то $d\mu = 0$. Тогда вводя следующие обозначения, уравнение для определения приращения крутки для первого этапа нагрева образца из СПФ запишется следующим образом:

$$d\theta^1 = \frac{I_3 dt_0}{\frac{(\xi_{00}^4 - J^4)}{4s_{0A}} + I_1 + I_2} \quad (4.61)$$

$$I_1 = \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{\xi^3}{F^1 + D^1S^1} d\xi, \quad I_2 = \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi^3}{F^1} d\xi, \quad I_3 = \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{D^1B^1\xi^2}{F^1 + D^1S^1} d\xi \quad (4.62)$$

В случае, когда все сечение испытывает фазово-структурный переход, то есть граница начала фазового превращения достигла нейтральной линии/внутреннего радиуса образца из СПФ, приращение крутки определяется из уравнения приведенного ниже:

$$d\theta^1 = \frac{I_3}{\frac{(\xi_{00}^4 - J^4)}{4s_{0A}} + I_1} \quad (4.63)$$

Величина безразмерного параметра температуры, при котором в рассматриваемой точке сечения начинается фазовый переход, определяется как показано ниже:

$$t_0 = 1 - \frac{\gamma^{phst}s}{\sqrt{3}q\delta S_0} \quad (4.64)$$

Кроме этого обезразмеривается уравнение для определения упругих деформаций системы, по аналогии с задачей о ПМП:

$$\gamma^e = \frac{s}{\sqrt{3}} \lambda q s_{0A} + \frac{s}{\sqrt{3}} s_{0A} (1 - q) \quad (4.65)$$

Алгоритм решения задачи об обратном фазовом переходе под действием постоянного крутящего момента един как для стержня, так и для трубки из СПФ и в целом аналогичен алгоритму задачи о прямом переходе, изложенном в предыдущей главе. Учитывая это, в данном разделе приводится только последовательность решения на случай этапа движения границы начала фазового превращения, схема 4.1.

Первоначально производится импорт исходных данных, полученных при решении задачи либо мартенситной неупругости, либо ПМП под действием постоянного крутящего момента. В их качестве выступают распределения по сечению образца из СПФ напряжений $s(\xi)$, полных, фазово-структурных и упругих деформаций соответственно $\gamma(\xi)$, $\gamma^{phst}(\xi)$, $\gamma^e(\xi)$, а также величины безразмерной крутки θ^1 , при этом $q(\xi) = 1$. Сечение образца из СПФ разбито на N внутренних точек в соответствии с безразмерной радиальной координатой $\xi [0...1]$. Как и на случай ПМП в отмеченных внутренних точках сечения производится вычисление искомых при решении задачи величин. Далее, согласно (4.64) определяется величина безразмерного параметра, t_0^{sr} при котором начнется ОМП на нейтральной линии/внутреннем радиусе образца из СПФ. На основании вычисленного значения t_0^{sr} определяется шаг по данной величине dt_0 . Следующим этапом решения задачи выступает этап «движение границы начала ФП» от нейтральной линии/внутреннего радиуса до внешнего волокна стержня/трубки. Первоначально, в соответствующие массивы данных записываются величины, полученные с предыдущего этапа, а именно: $s_{old}(\xi) = s(\xi)$, $\gamma_{old}(\xi) = \gamma(\xi)$, $\gamma_{old}^{phst}(\xi) = \gamma^{phst}(\xi)$, $q_{old}(\xi) = q(\xi)$, $\theta_{old}^1 = \theta^1$, $t_0^{old} = t_0^{sr}$. Далее выполняется шаг по dt_0 и определяется новое значение безразмерного параметра температуры $t_0^{new} = t_0^{old} + dt_0$. На основе величины t_0^{new} , пробегая по сечению образца из СПФ и подставляя в (4.64) значение величин s и γ^{phst} , определяется новое положение границы начала ФП ξ_0 . Граница начала ФП находится в той точки сечения, в которой пара величин s_{old} и γ_{old}^{phst} , обращает уравнение (4.64) в равенство с заданной точностью. Далее на основе старых распределений $s_{old}(\xi)$, $\gamma_{old}^{phst}(\xi)$, $q_{old}(\xi)$ вычисляются параметры $\beta^1(\xi)$, $B^1(\xi)$, $D^1(\xi)$, $F^1(\xi)$, $S^1(\xi)$ согласно (4.49,4.52,4.57,4.45,4.48) соответственно. Следующим шагом является вычисление интегралов (4.62) и приращение крутки $d\theta^1$ (4.63). После определяется

новое значение крутки $\theta_{new}^1 = \theta_{old}^1 + d\theta^1$. Далее для каждой области сечения образца из СПФ вычисляется приращение безразмерных напряжений $ds(\xi)$ (4.54,4.55,4.58) и новое значение напряжений $s_{new}(\xi) = s_{old}(\xi) + ds(\xi)$. После, согласно (4.47), определяется приращение параметра фазового состава $dq(\xi)$ и новое распределение его по сечению $q_{new}(\xi) = q_{old}(\xi) + dq(\xi)$. Далее вычисляется полная деформация системы $\gamma(\xi)$, на основе гипотезы плоских сечений. Упругая деформация $\gamma^e(\xi)$ определяется на основе уравнения (4.65). Разница полной и упругой деформаций есть фазово-структурная деформация $\gamma^{phst}(\xi) = \gamma(\xi) - \gamma^e(\xi)$. Данный этап движения границы начала ФП также содержит цикл внутренних итераций по аналогии с задачей о ПМП. При сходимости результатов итерации по приращению безразмерной крутки $d\theta^1$ следует новый шаг по dt_0 и вычисления повторяются вновь. Этап движения границы начала ФП продолжается до тех порка, пока положение границы, определяемое из (4.64) не достигнет нейтральной линии/внешнего радиуса образца из СПФ.

После того как граница начала ФП достигла нейтральной линии/внешнего радиуса стержня или трубки из СПФ, все их сечение претерпевает фазово-структурный переход. Следующим этапом в процессе нагрева выступает этап «движения границы окончания ОМП. Он аналогичен предыдущему, за той разницей, что отысканию подлежит граница окончания прямого перехода ξ_{00} . Она определяется на основе вектора $q(\xi)$. Так, если в какой либо точки сечения стержня/трубки из СПФ данный параметр принимает значение $q = 0$, то считается, что граница окончания обратного ФП находится в отмеченной точке сечения. Процесс нагрева образца из СПФ происходит до тех пор, пока все сечение стержня/трубки не перейдет в аустенитное фазовое состояние, $q(\xi) = 0$. При этом материал будет деформироваться упруго.

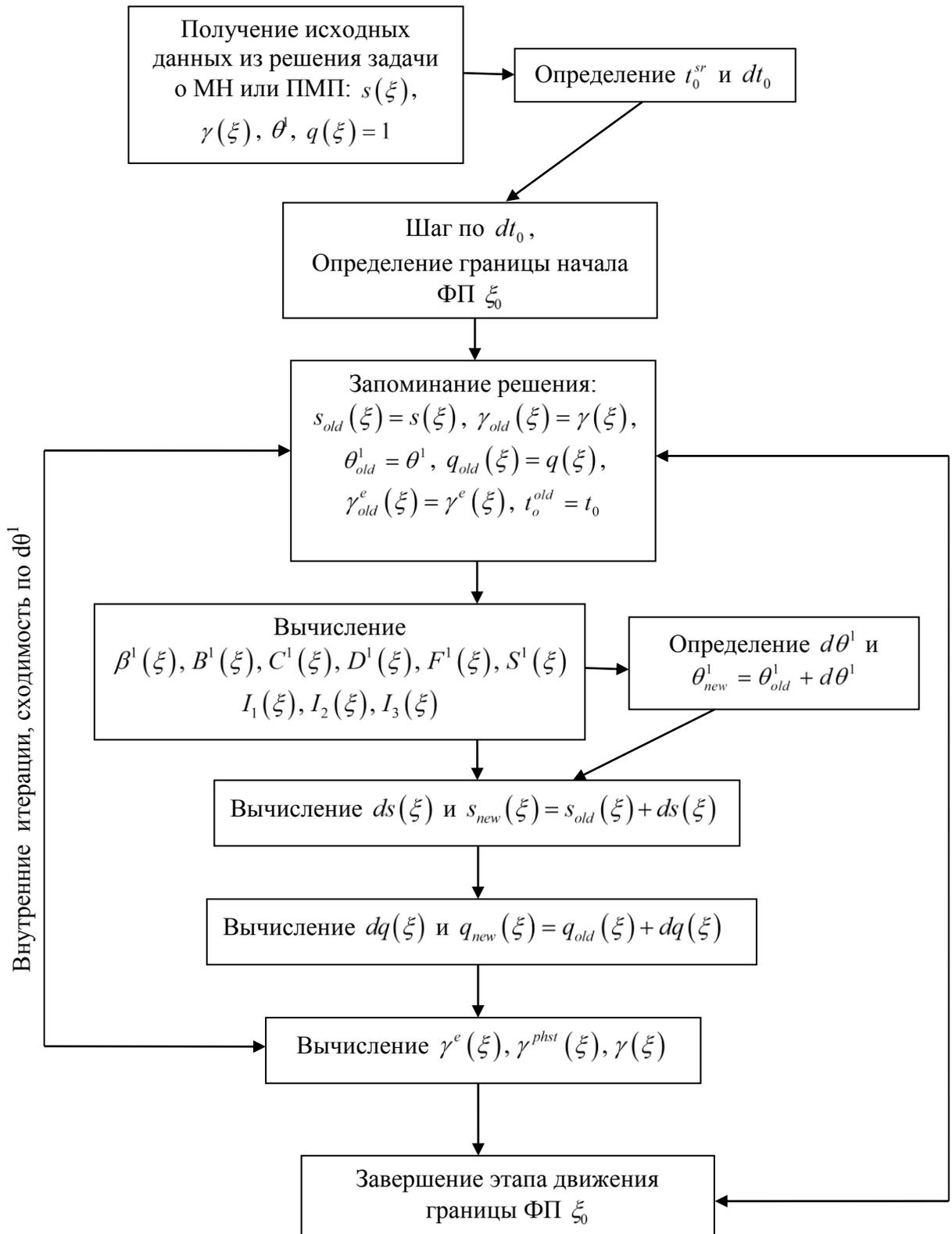


Схема 4.1 – Алгоритм решения задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне/трубке из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего момента. Этап движения границы начала ФП.

При решении задачи использованы аналогичные случаю ПМП параметры материала, соответствующие СПФ типа равноатомного никелида титана $\lambda = E_A / E_M = 3$; $s_{0A} = \sigma_0 / G_A = 0,0046$; $s_{0M} = \sigma_0 / G_M = 0,0139$; $\delta S_0 = 0,1288$; $f(q) = 0$.

На рисунках 4.1-4.3 приведены эпюры напряжений $s - \xi$ для различных толщин трубок из СПФ. Сплошные кривые соответствуют окончанию ПМП, пунктирные – упругим напряжениям, которые необходимо вычесть при разгрузке, штриховые – напряжениям после упругой разгрузки. Сплошная и пунктирная кривые являются исходными данными при решении задачи об обратном мартенситном превращении.

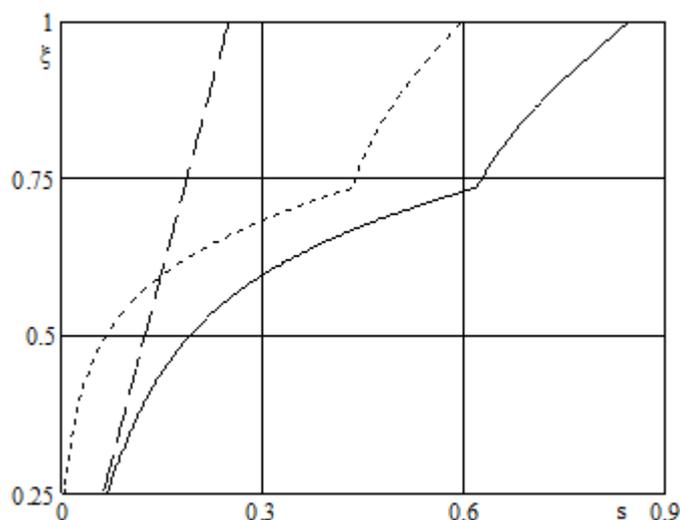


Рисунок 4.1 – Эпюры $s - \xi$, $J = 0,25$.

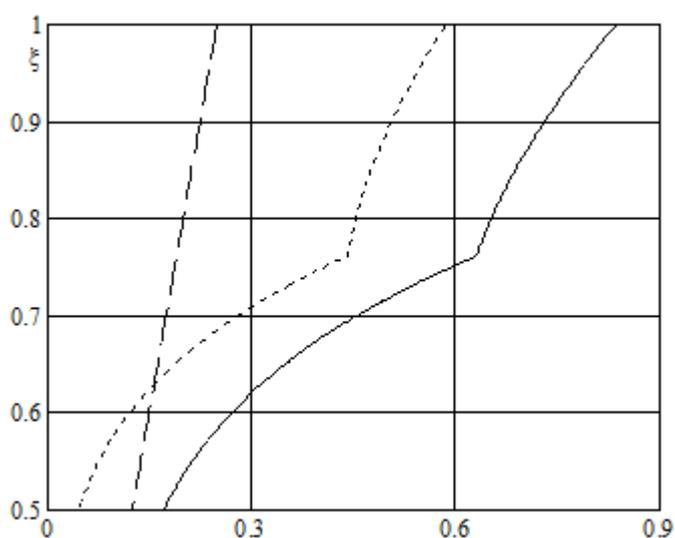


Рисунок 4.2 – Эпюры $s - \xi$, $J = 0,5$.

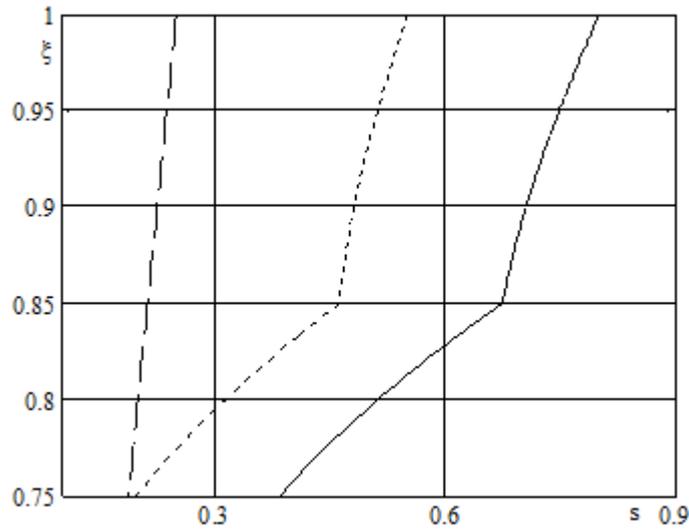


Рисунок 4.3 – Эпюры $s - \xi$, $J = 0,75$.

На рисунке 4.4 приведены зависимости безразмерный параметр температуры t_0 – безразмерная крутка θ^1 . Пары кривых соответствуют величине $J = 0,25; 0,5; 0,75$ сверху вниз. Они полученные при решении с и без предварительной разгрузки. Из данного рисунка видно, что кривые практически совпадают. То есть решение задачи практически не зависит от наличия или отсутствия упругой разгрузки перед ОМП. Единственное отличие в кривых, соответствующих одному значению J заключается в величине параметра t_0 , при котором начинается ОМП. Так, после упругой разгрузки напряжения на внутреннем радиусе трубки падают, тогда ОМП начнется быстрее, нежели в случае нагрева непосредственно после ПМП.

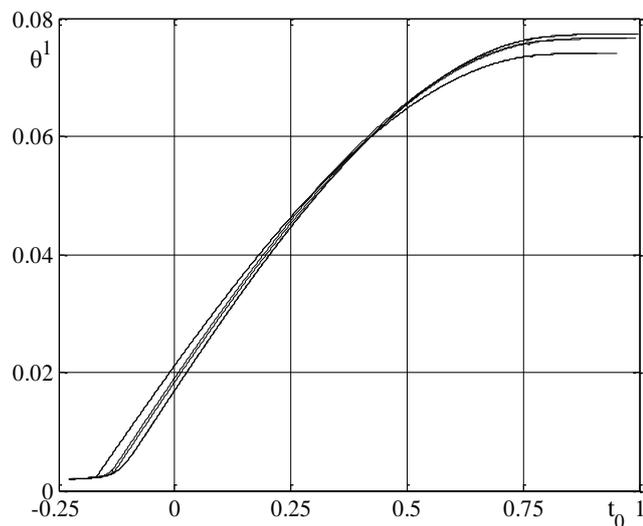


Рисунок 4.4 – Кривые $t_0 - \theta^1$.

Аналогичная тенденция отмечается и для напряжений. Поэтому, на рисунках 4.5-4.7 приведены эпюры напряжений $s - \xi$ для толстостенных трубок из СПФ с $J = 0,25; 0,5; 0,75$, полученные из решения задачи об ОМП, протекающем под действием постоянного крутящего

момента непосредственно после ПМП. Кривые на рисунках соответствуют этапам движения границы начала (пунктирные линии) и окончания ФП (сплошные линии). Сплошная жирная линия соответствует решению упругой задачи, когда все сечение трубки из СПФ перешло в аустениное фазовое состояние. Сечение трубки разбито на пять равных участков. Как только граница начала/окончания ФП достигает одной из отмеченных реперных точек сечения, происходит вывод информации в качестве эпюры $s - \xi$.

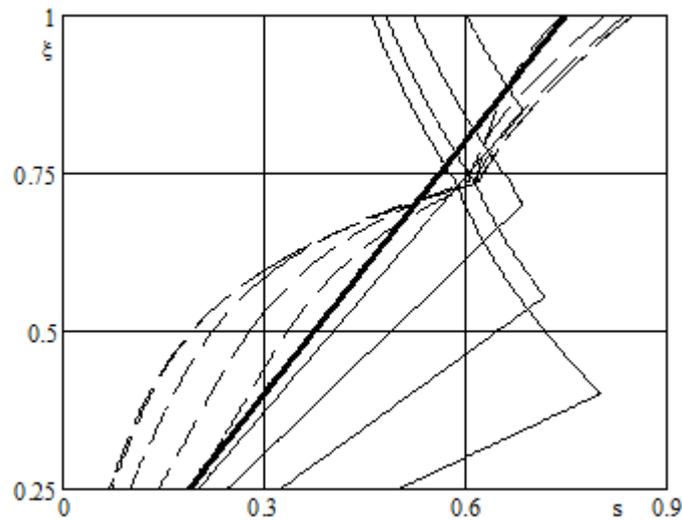


Рисунок 4.5 – Эпюры $s - \xi$, $J = 0,25$.

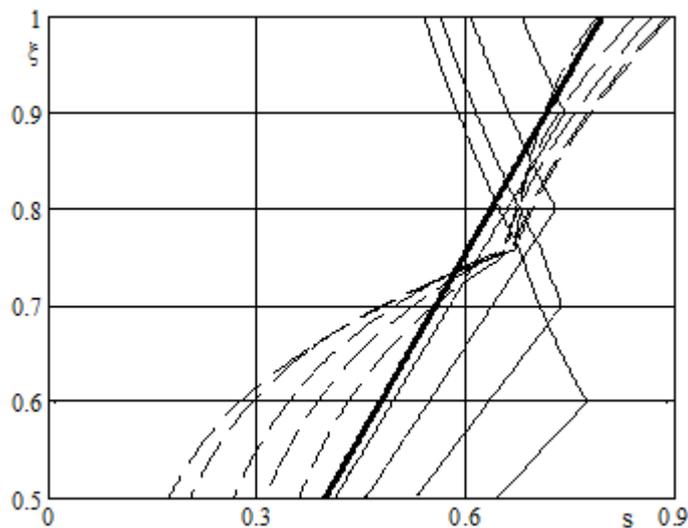


Рисунок 4.6 – Эпюры $s - \xi$, $J = 0,5$.

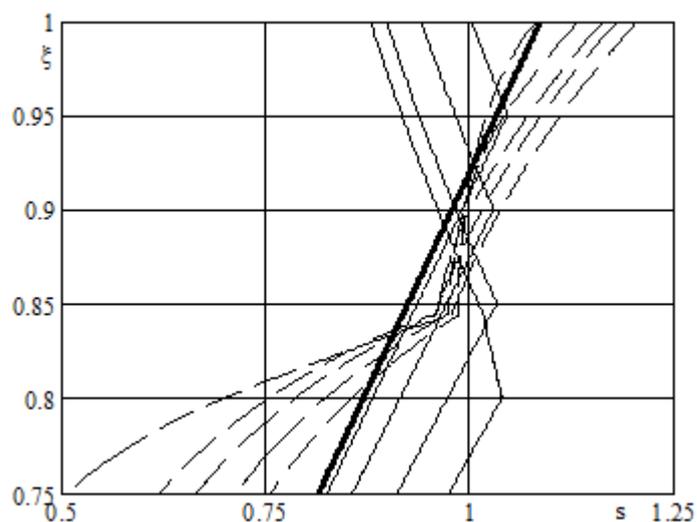


Рисунок 4.7 – Эпюры $s - \xi$, $J = 0,75$.

Приведённые рисунки соответствуют обратному фазовому переходу, протекающему под действием постоянного крутящего момента. Так, крутящий момент для каждой из трубок подобрана таким образом, чтобы он соответствовал $\mu = 0,002$ для стержня, согласно (4.43). При этом при расчете учитывалась возможность протекания структурного превращения. На основании приведенных рисунков можно заключить, что с уменьшением толщины трубки уровень напряжений становится более однородным, при этом в сечении трубки не возникает ярко выраженных пиков напряжений. Однако наблюдается увеличение величины безразмерных напряжений s на внутреннем радиусе трубки.

На рисунке 4.8 приведены зависимости безразмерный параметр температуры t_0 – безразмерная крутка θ^1 , полученные при решении задачи об ОМП, протекающем в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ при постоянном крутящем моменте. При этом нагрев образца из СПФ начинается непосредственно после ПМП.

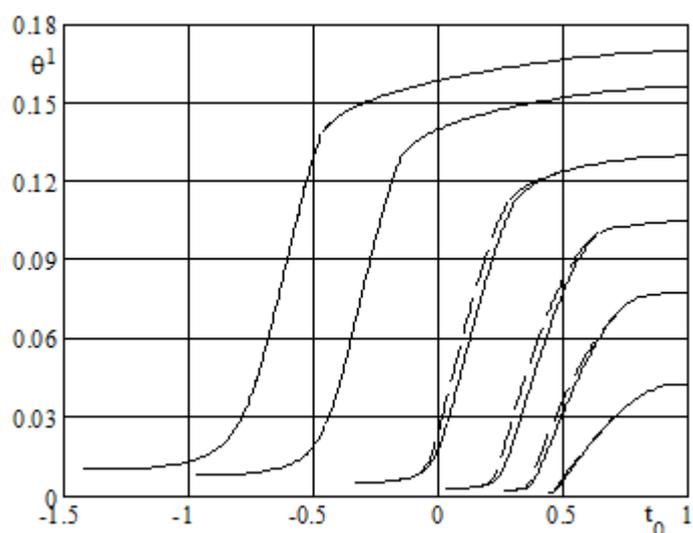


Рисунок 4.8 – Кривые $t_0 - \theta^1$.

На рисунке 4.8 кривые приведены парами для значений $\mu = 0,001; 0,002; 0,003; 0,005; 0,008; 0,01$ снизу вверх. Верхняя пунктирная кривая соответствует случаю учета структурных деформаций при ОМП, нижняя – получена без учета структурного перехода. Для величин $\mu = 0,001; 0,008$ и $0,01$ полученные зависимости практически совпадают.

На рисунках 4.9-4.11 приведены эпюры безразмерных напряжений $s-\xi$, соответствующие величине $\mu = 0,002; 0,005$ и $0,01$.

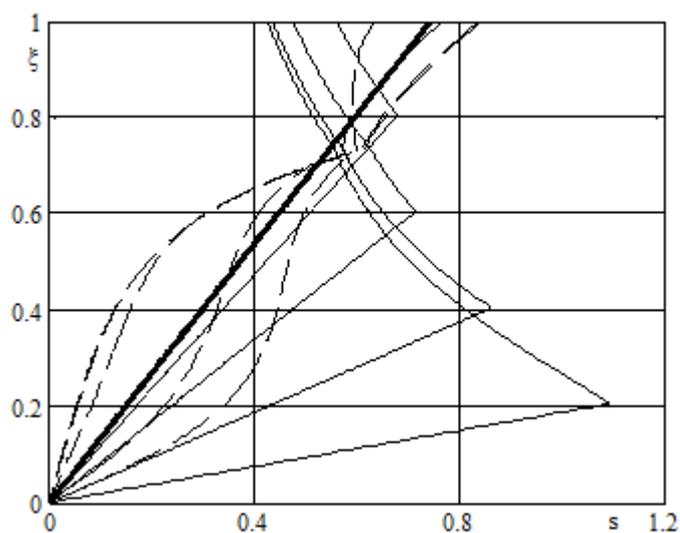


Рисунок 4.9 – Эпюры $s-\xi$, $\mu = 0,002$.

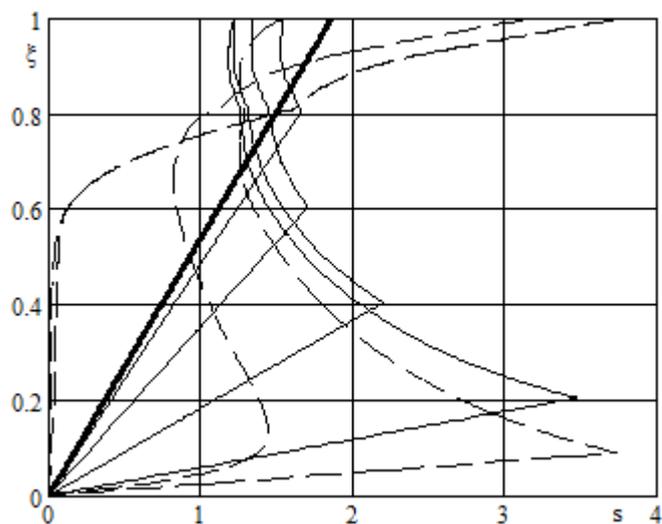


Рисунок 4.10 – Эпюры $s-\xi$, $\mu = 0,005$.

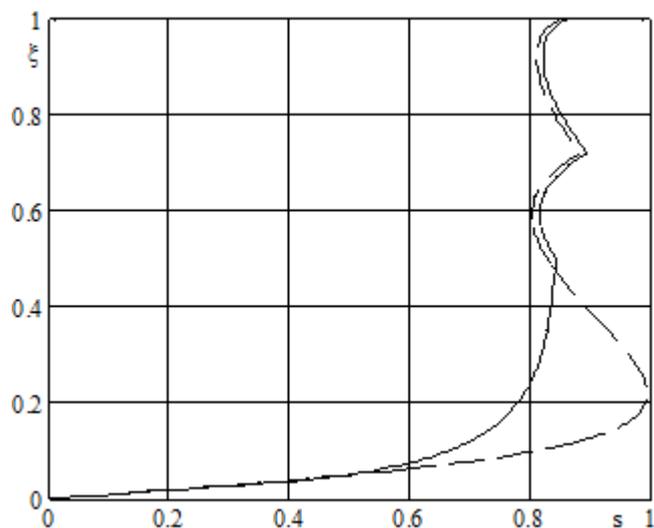


Рисунок 4.12 – Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0,003$.

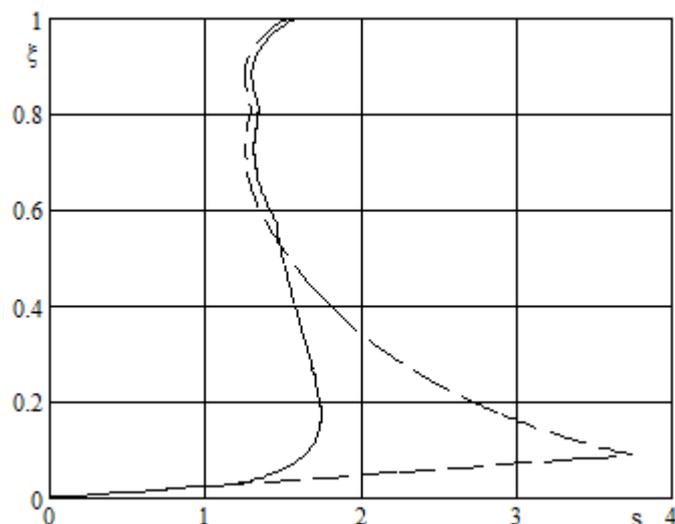


Рисунок 4.13 – Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0,005$.

Эпюры на рисунках 4.12,4.13 соответствуют моменту нагрева стержня, когда граница начала обратного ФП достигла внешнего радиуса образца из СПФ. При этом все сечение стержня испытывает фазово-структурный переход. Здесь сплошная линия получена из решения с учетом структурного перехода, штриховая – без учета. Из приведенных рисунков видно, что учет структурного перехода в значительной степени разгружает внутреннюю часть сечения.

Результаты, приведенные в данной главе, получены в рамках блока уравнений (4.1-4.4) для параметра фазового состава. Однако, как и в случае ПМП рассмотрению подлежит случай, когда величина объемной доли мартенситной фазы определяется на основе следующего соотношения:

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t_\sigma)) \quad (4.66)$$

При этом соотношения (4.2-4.4) не изменяются, однако выполняется соответствующая модификация уравнений (4.13,4.17) и (4.49,4.52):

$$\beta_1 = \frac{\pi\sqrt{q-q^2}}{\Delta S_0(A_f^0 - A_s^0)} \quad (4.67)$$

$$B = -\beta_1 \Delta S_0 = -\frac{\pi\sqrt{q-q^2}}{(A_f^0 - A_s^0)} \quad (4.68)$$

В безразмерном виде уравнения (4.67,4.68) примет следующий вид:

$$\beta^1 = \beta_1 \sigma_0 = \frac{\pi\sqrt{q-q^2}}{\Delta S_0(A_f^0 - A_s^0)} \sigma_0 = \frac{\pi\sqrt{q-q^2}}{\delta S_0} \quad (4.69)$$

$$B^1 = B_1(A_f^0 - A_s^0) = -\pi\sqrt{q-q^2} \quad (4.70)$$

На рисунке 4.14 приведено сравнение результатов численного моделирования обратного мартенситного превращения в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающего под действием постоянного крутящего момента для двух вариантов определяющих соотношений относительно параметра фазового состава. Здесь сплошные линии соответствуют уравнению (4.66), штриховые – уравнению (4.1). Полученные решения соответствуют случаю учета структурного перехода.

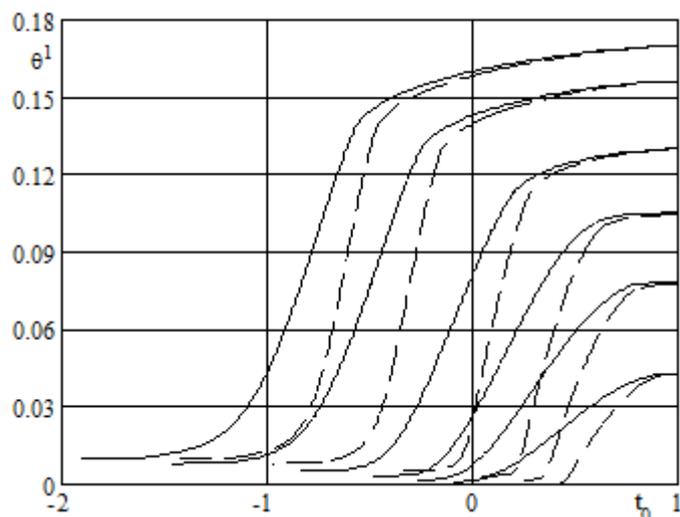


Рисунок 4.14 – Кривые $t_0 - \theta^1$.

Из рисунка 4.14 видно, что основная разница в получаемых решениях наблюдается на этапе движение границы окончания ОМП. При этом в случае использования соотношения (4.66) повышается температура окончания ФП по сравнению со случаем использования уравнения (4.1). Кроме этого отмечается разница в получаемых при решении эпюрах $s - \xi$. Данный факт проиллюстрирован на рисунках 4.15-4.17. Приведенные кривые на графиках подчиняются правилу, установленному для рисунка 4.14.

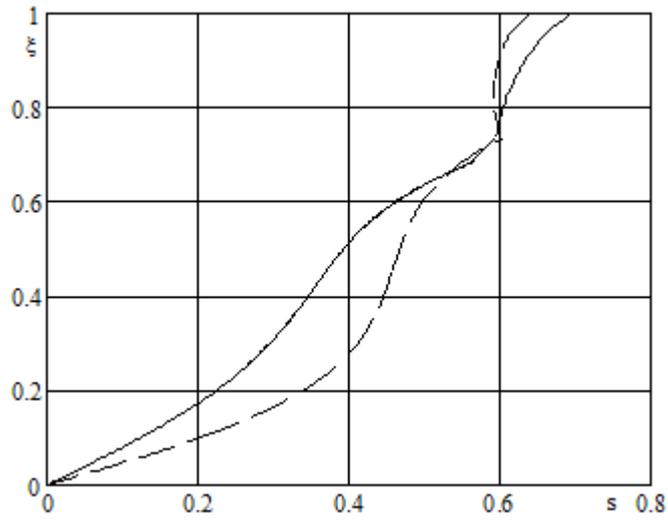


Рисунок 4.15 – Эпюры $s-\xi$, $\mu = 0,002$.

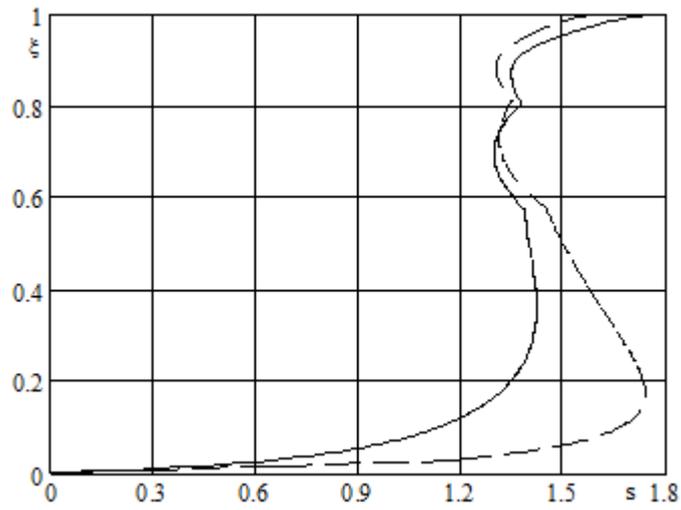


Рисунок 4.16 – Эпюры $s-\xi$, $\mu = 0,005$.

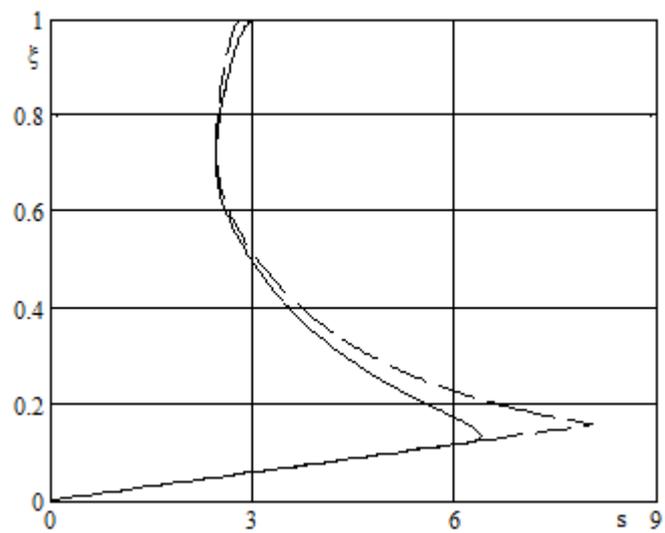


Рисунок 4.17 – Эпюры $s-\xi$, $\mu = 0,01$.

Из приведенных рисунков (4.15-4.17) видно, что при использовании соотношения (4.1) для определения параметра фазового состава эпюры $s-\xi$ имеют ярко выраженные пики, при этом уровень напряжений во внутренней области сечения существенно выше по сравнению со случаем использования соотношения (4.66). Кроме этого, при использовании уравнения (4.66) эпюры напряжений имеют более гладкий характер и пики напряжений получаются сглаженными. При этом данное соотношение будет использовано в качестве базового уравнения для определения параметра фазового при решении задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении, протекающем в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ при стесненном деформировании.

4.3. Решение задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне сплошного круглого поперечного сечения из сплава с памятью формы, протекающем при стесненном деформировании.

Обратное мартенситное превращение при стесненном деформировании реализуется в ходе нагрева стержня из СПФ один конец, которого соединен с упругим контртелом или защемлен. Данный термомеханический процесс реализуется при рабочем ходе актуатора или силовозбудителя крутящего момента. При этом стержень из СПФ (активный элемент) предварительно деформирован либо по механизму структурного превращения (МН или доориентация после ПМП), либо переведен в мартенситное фазовое состояние путем охлаждения при действии механических напряжений. В общем случае, контртело представляет собой упругий стержень, один конец которого заделан, а другой соединен с активным элементом из СПФ. Соединение контртела и актуатора из СПФ может быть выполнено как до, так и после упругой разгрузки последнего. При нагреве актуатор вспоминает свое недеформированное состояние и вследствие ЭПФ, раскручивается, при этом деформируя упругое контртело. Дальнейшее охлаждение приводит к тому, что стержень из СПФ вновь закручивается в сторону первоначального деформирования, под действием крутящего момента со стороны контртела. При этом воздействие контртела тем выше, чем больше его жесткость на кручение. Отмеченный термомеханический механизм взаимодействия контртела и актуатора из СПФ реализует конструктивный двух путевой эффект памяти формы, в этом случае со стороны актуатора осуществляется полезная работа. При рассмотрении задачи об ОМП в заневоленном состоянии, то есть при фиксации полных деформаций системы, в процессе нагрева фазово-структурные деформации будут переходить в упругие, вследствие эффекта памяти формы.

В обоих вариантах ОМП при стесненном деформировании в стержне из СПФ генерируются реактивные напряжения, что влечет за собой рост величины крутящего момента,

под действием которого происходит ФП. Считается, что напряжения в рассматриваемых процессах малы и не превышают дислокационный предел текучести, так что обычных пластических деформаций не возникает.

Учитывая выше изложенное, становится очевидным практическая ценность решения поставленных задач. Так, при эксплуатации актуатора из СПФ, действующие напряжения не должны превышать предела текучести той фазы, которая характерна для рассматриваемой области сечения стержня. В противном случае, характеристики активного элемента из СПФ снижаются, в частности падает величина восстанавливаемой деформации.

В качестве базовой системы уравнений и алгоритма решения задач, используются положения, приведенные ранее на случай ОМП, протекающего под действием постоянного крутящего момента.

В случае ОМП с контртелом принимается, что крутящий момент для контртела равен крутящему моменту для актуатора из СПФ и направлен в сторону противоположную деформированию системы. При этом стержень из СПФ и контртело деформируются совместно.

Так как контртело ведет себя упруго, то касательные напряжения τ вычисляются согласно уравнению приведенному ниже:

$$\tau = G\theta r \quad (4.71)$$

Тогда учитывая (4.71) крутящий момент и его приращение для контртела определяется на основе следующих соотношений:

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = 2\pi \int_0^R \theta G r^3 dr = \frac{\pi G \theta R^4}{2} \quad (4.72)$$

$$dM = \frac{\pi G R^4}{2} d\theta \quad (4.73)$$

где R , r , G – внешний, текущий радиус и модуль сдвига материала контртела соответственно.

Для активного элемента из СПФ приращение крутящего момента и крутки связано в соответствии с уравнением (4.32), при этом ни приращение крутки, ни приращения крутящего момента не равны нулю:

$$dM = 2\pi \left\{ \left[\frac{G_A r_{00}^4}{4} + \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{r^3}{F + DS} dr + \int_{r_0}^R \frac{r^3}{F} dr \right] d\theta - dT \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{DBr^2}{F + DS} dr \right\} \quad (4.74)$$

Приравнявая (4.74) и (4.73) можно получить:

$$-\frac{\pi G R^4}{2} d\theta = 2\pi \left\{ \left[\frac{G_A r_{00}^4}{4} + \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{r^3}{F + DS} dr + \int_{r_0}^R \frac{r^3}{F} dr \right] d\theta - dT \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{DBr^2}{F + DS} dr \right\} \quad (4.75)$$

Учитывая, что $\xi = r/R$, $\xi_0 = r_0/R$, $\xi_{00} = r_{00}/R$, $d\theta = d\theta^1/R$, $dr = R d\xi$ соотношение (4.75) примет следующий вид:

$$-GR^3 d\theta^1 = 4 \left\{ \left[\frac{R^4 G_A \xi_{00}^4}{4} + \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{R^4 \xi^3}{F + DS} d\xi + \int_{\xi_0}^1 \frac{R^4 \xi^3}{F} d\xi \right] d \left(\frac{\theta^1}{R} \right) - dT \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{R^3 DB \xi^2}{F + DS} d\xi \right\} \quad (4.76)$$

Приводя уравнение (4.76) к безразмерному виду по аналогии со случаем ОМП при постоянном крутящем моменте и разрешая его относительно приращения безразмерной крутки $d\theta^1$ получим:

$$d\theta^1 = \frac{-4s_{0e} dt_0 \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{D^1 B^1 \xi^2}{F^1 + D^1 S^1} d\xi}{1 + 4 \left[\frac{\lambda_e \xi_{00}^4}{4} + s_{0e} \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{\xi^3}{F^1 + D^1 S^1} d\xi + s_{0e} \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi^3}{\lambda_{me} s_{0e} + 3\rho_d q \Phi'_2(s)} d\xi \right]} \quad (4.77)$$

где $\lambda_e = G_A / G$, $s_{0e} = \sigma_0 / G$, $\lambda_{me} = G / G_M$. Введем следующие обозначения:

$$I_1 = \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{\xi^3}{F^1 + D^1 S^1} d\xi \quad (4.78)$$

$$I_2 = \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi^3}{\lambda_{me} s_{0e} + 3\rho_d q \Phi'_2(s)} d\xi \quad (4.79)$$

$$I_3 = \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{D^1 B^1 \xi^2}{F^1 + D^1 S^1} d\xi \quad (4.80)$$

Тогда, учитывая (4.78-4.80) на случай этапа движения границы начала ОМП уравнение (4.79) перепишется как представлено ниже:

$$d\theta^1 = \frac{-4s_{0e} I_3 dt_0}{1 + 4 \left[\frac{\lambda_e \xi_{00}^4}{4} + s_{0e} I_1 + s_{0e} I_2 \right]} \quad (4.81)$$

Для этапа движения границы окончания ОМП, приращение крутки определяется из следующего соотношения:

$$d\theta^1 = \frac{-4s_{0e} I_3 dt_0}{1 + 4 \left[\frac{\lambda_e \xi_{00}^4}{4} + s_{0e} I_1 \right]} \quad (4.82)$$

В случае ОМП в заневоленном состоянии приращение крутки в процессе нагрева равно нулю. Тогда уравнение (4.74), связывающие приращение крутки и крутящего момента примет следующий вид:

$$dM = 2\pi \left(-dT \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{DBr^2}{F + DS} dr \right) \quad (4.83)$$

Приводя соотношение (4.83) к безразмерному виду получим:

$$d\mu = 4s_{0A} dt_0 \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{D^1 B^1 \xi^2}{F^1 + D^1 S^1} d\xi \quad (4.84)$$

Учитывая выше изложенные положения, модификации также подлежат соотношения для вычисления приращения напряжений (4.54, 4.55, 4.58). Так, в аустенитной и мартенситной частях сечения стержня из СПФ, приращение касательных напряжений $d\tau$ будет равно нулю. В области, где протекает фазово-структурный переход, уравнение для вычисления приращения напряжений, также существенно упрощается и имеет следующий вид:

$$d\tau = \frac{-BDdT}{F + DS} \quad (4.85)$$

В безразмерных переменных, соотношение (4.85) записывается как представлено ниже:

$$ds = \frac{\sqrt{3}B^1 D^1 dt_0}{F^1 + D^1 S^1} \quad (4.86)$$

После вычисления приращений напряжений и новых величин самих напряжений, определению подлежит новое значение крутящего момента, на основе соотношения, приведенного ниже:

$$\mu = \left(4s_{0A} / \sqrt{3}\right) \int_0^1 s \xi^2 d\xi \quad (4.87)$$

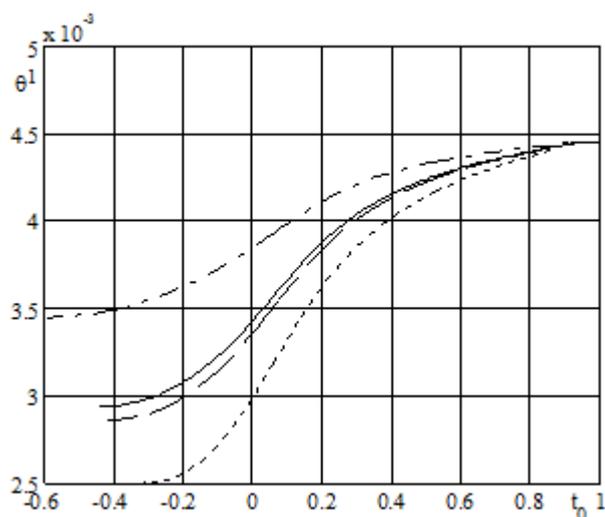
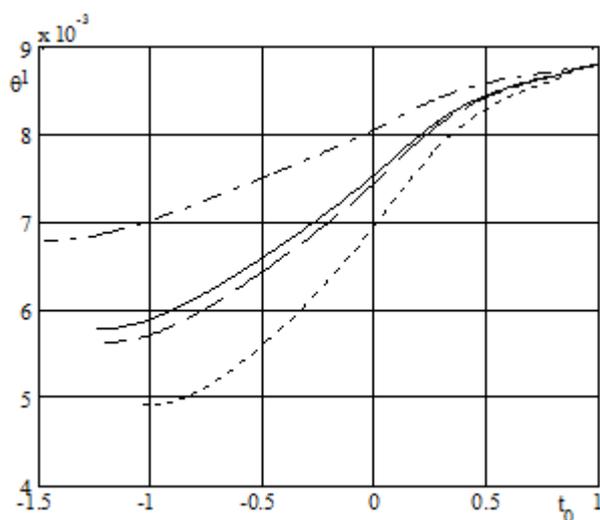
Алгоритм решения рассматриваемых задач аналогичен алгоритму, приведенному ранее для задачи об ОМП, протекающем под действием постоянного крутящего момента. При этом обратному превращению предшествует ПМП под действием постоянного крутящего момента μ_0 , за которым следует упругая разгрузка с мартенситным модулем согласно теореме Генки [118].

В ходе работы рассмотрено четыре варианта материала контртела, отличающихся своими механическими свойствами. В таблице 4.1 приведены безразмерные жесткости контртела при кручении (относительно модуля сдвига мартенситной фазы СПФ) и обозначения линий на рисунках 4.18,4.19 им соответствующих.

Таблица 4.1 – Параметры безразмерной жесткости контртела.

$G/G_M = \lambda_{me}$	Тип кривой на рисунках 4.18,4.19
1	пунктирная
2,57	штриховая
3	сплошная
7,5	штрих-пунктирная

На рисунках 4.18,4.19 приведены кривые безразмерный параметр температуры t_0 – безразмерная крутка θ^1 соответствующие ОМП с контртелом для двух величин μ_0 .

Рисунок 4.18 – Кривые $t_0 - \theta^1$, $\mu_0 = 0,001$.Рисунок 4.19 – Кривые $t_0 - \theta^1$, $\mu_0 = 0,002$.

Из приведенных рисунков видно, что при нагреве образца из СПФ крутка не снимается полностью из-за противодействия контртела. При этом ее остаточная величина является функцией жесткости контртела. Так, с увеличением параметра λ_{me} повышается значение остаточной крутки θ^1 .

В ходе решения задачи отмечена следующая тенденция. В начальный момент времени граница начала ФП находится на нейтральной линии стержня, так как в данной области отсутствуют напряжения. После при нагреве она резко достигает внешнего радиуса стержня. Поэтому запись напряженно-деформированного состояния стержня на данном этапе не производится. Эпюры напряжений $s - \xi$, приведенные ниже, соответствуют этапу движение границы окончания ФП. При этом сечение стержня разбивается на десять равных участков. В случае, когда граница окончания ФП достигает координаты, соответствующей определенному участку, производится запись результатов.

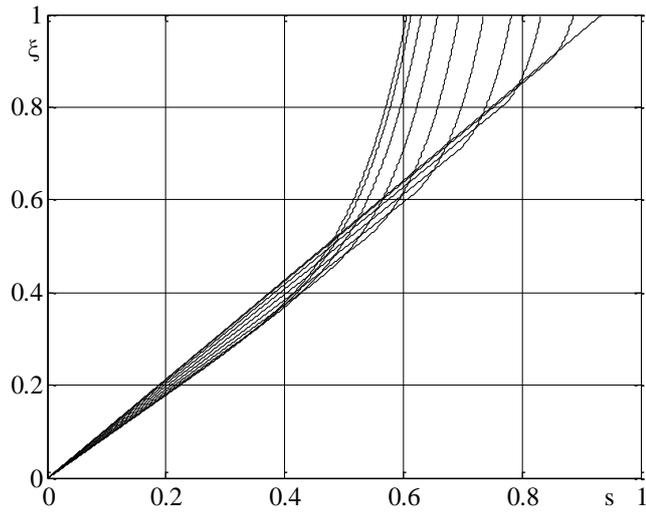


Рисунок 4.20 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,001$, $\lambda_{me} = 1$.

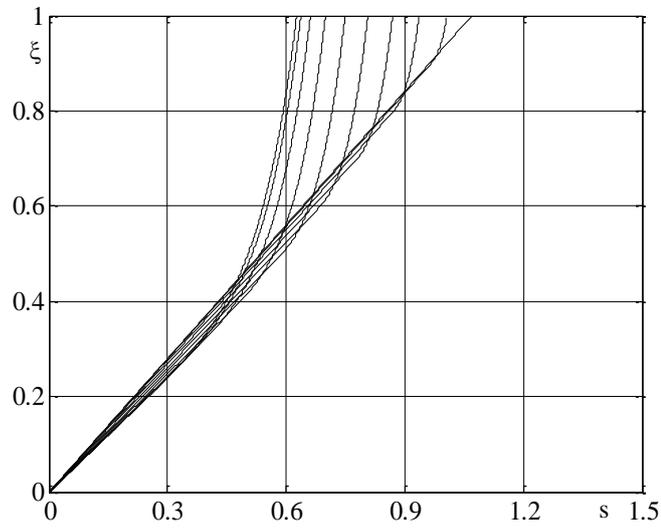


Рисунок 4.21 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,001$, $\lambda_{me} = 2.57$.

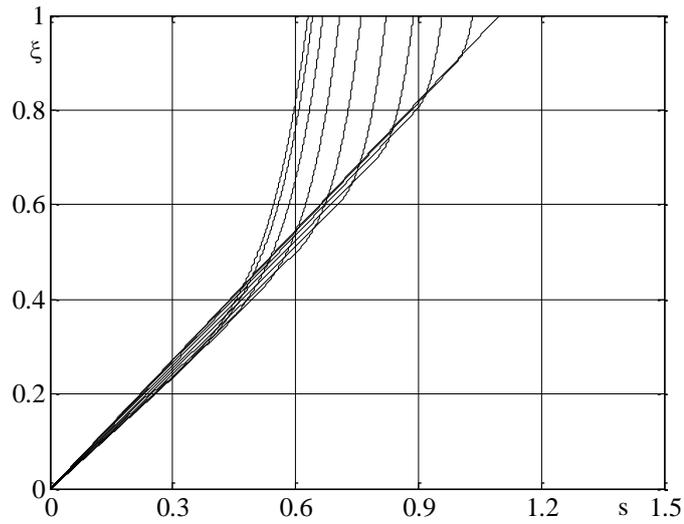


Рисунок 4.22 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,001$, $\lambda_{me} = 3$.

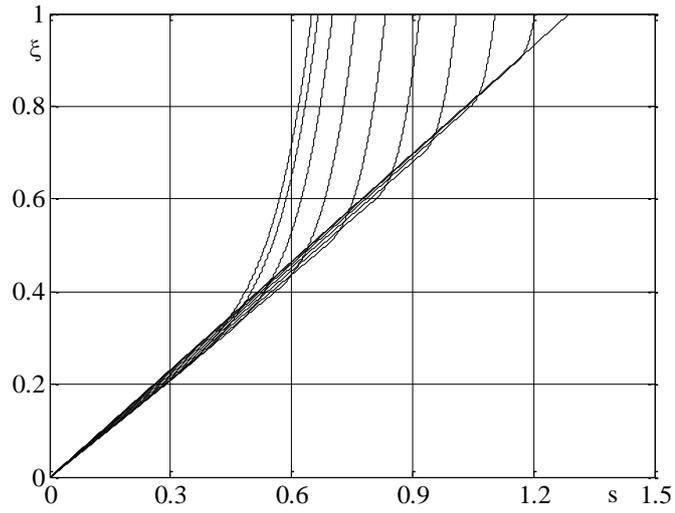


Рисунок 4.23 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,001$, $\lambda_{me} = 7,5$.

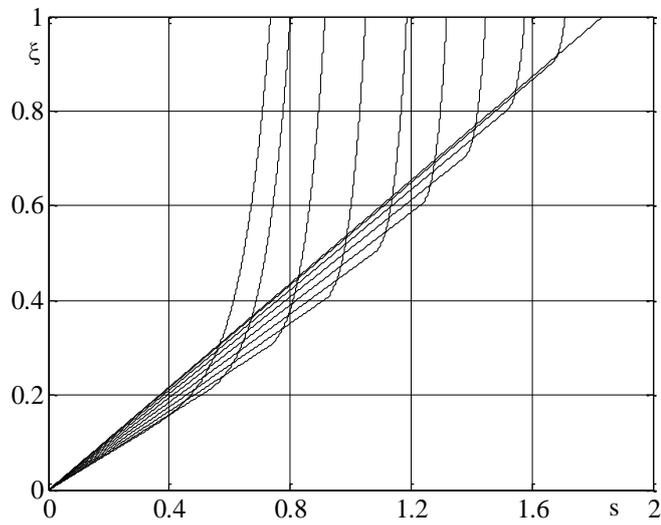


Рисунок 4.24 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,002$, $\lambda_{me} = 1$.

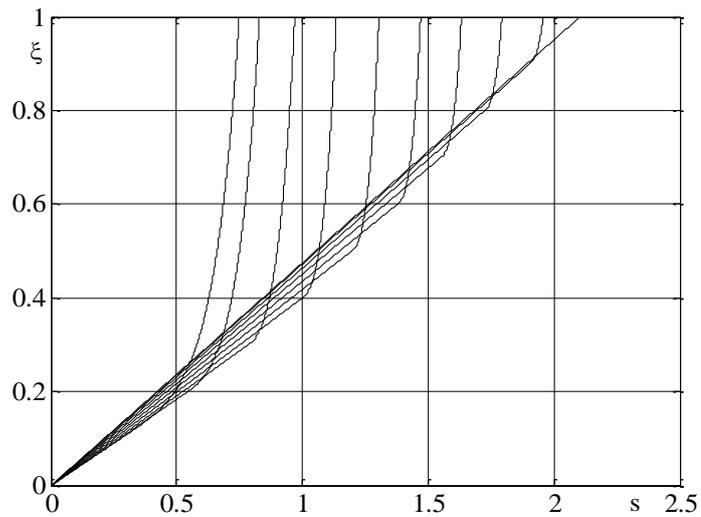


Рисунок 4.25 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,002$, $\lambda_{me} = 2,57$.

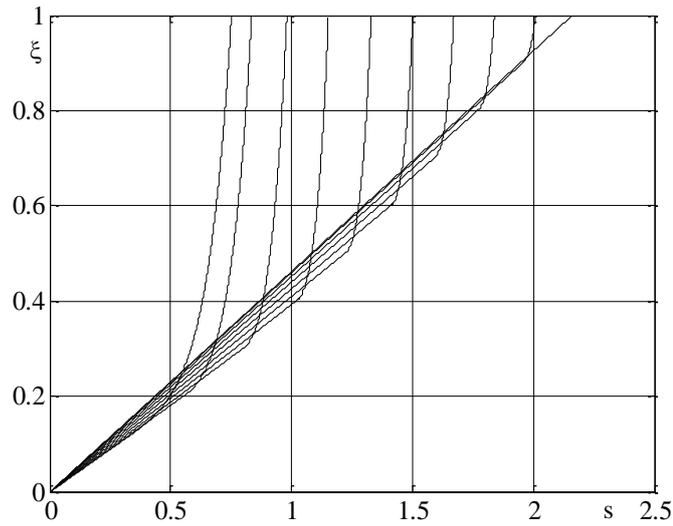


Рисунок 4.26 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,002$, $\lambda_{me} = 3$.

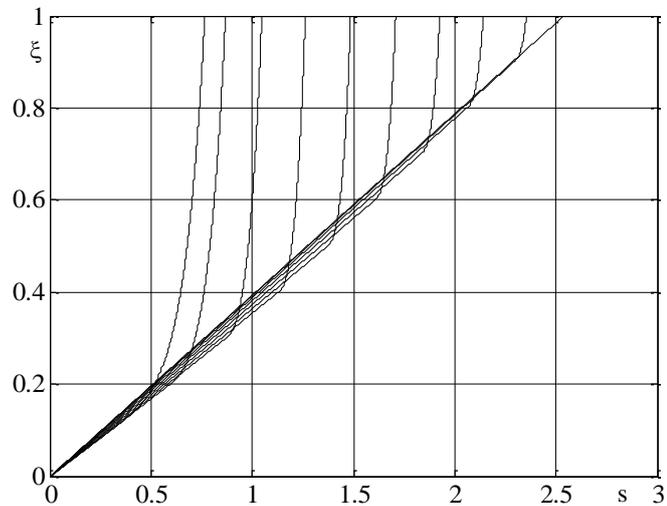
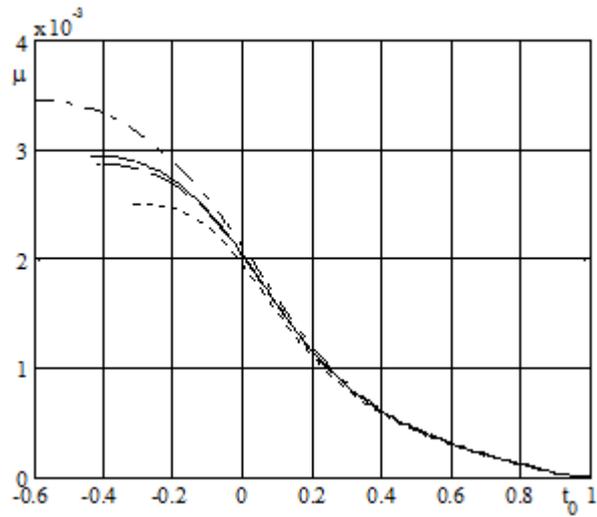
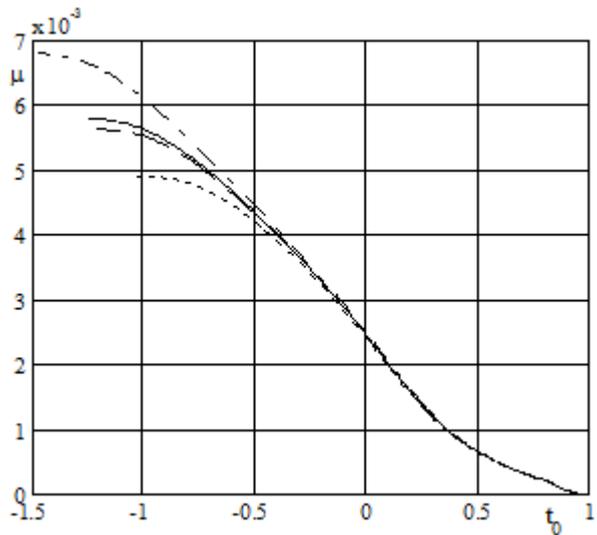


Рисунок 4.27 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,002$, $\lambda_{me} = 7,5$.

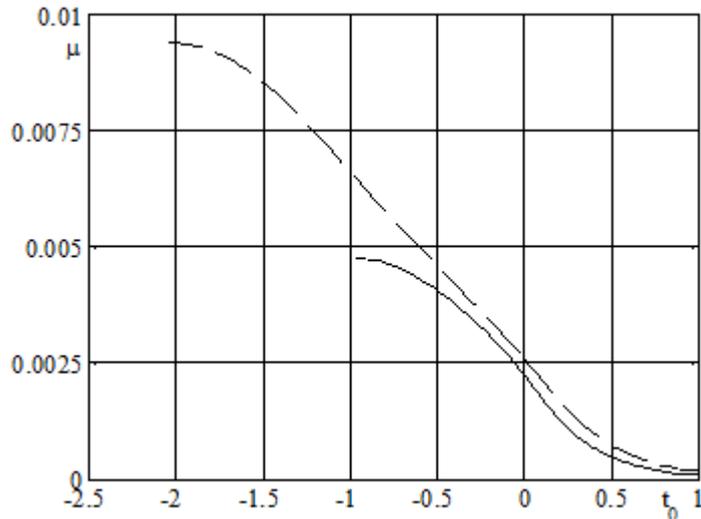
Из приведенных рисунков 4.20-4.27 видно, что в процессе нагрева стержня из СПФ, большинство его сечения испытывает рост напряжений вследствие противодействия контртела. При этом рост напряжений тем интенсивнее, чем выше значение параметров λ_{me} и μ_0 . В стержне из СПФ возникают так называемые реактивные напряжения, которые приводят к росту величины крутящего момента μ . Данное положение проиллюстрировано на рисунках 4.28,4.29. Кривые на данных рисунках приведены согласно правилу, установленному ранее для рисунков 4.18,4.19.

Рисунок 4.28 – Кривые $t_0 - \mu$, $\mu_0 = 0,001$.Рисунок 4.29 – Кривые $t_0 - \mu$, $\mu_0 = 0,002$.

На основании рисунков 4.28,4.29 можно заключить, что увеличение жесткости контртела приводит не только к росту крутящего момента, но также уменьшает температуры окончания ОМП.

Приведенные выше результаты решения задачи об ОМП с контртелом получены при условии возможности протекания структурного перехода в процессе нагрева стержня. Данное положение сохраняется и на случай рассмотрения задачи об ОМП в заневоленном состоянии.

На рисунке 4.30 представлены зависимости безразмерный параметр температуры t_0 – безразмерный крутящий момент μ для случая ОМП в заневоленном состоянии. Здесь сплошная линия соответствует $\mu_0 = 0,001$, штриховая – $\mu_0 = 0,002$.

Рисунок – 4.30 Кривые $t_0 - \mu$.

В таблице 4.2 приведены значения безразмерного крутящего момента μ на момент окончания нагрева, на случай ОМП с контртелом и в заневоленном состояниях.

Таблица 4.2 – Величина безразмерного крутящего момента на момент окончания ОМП.

μ_0/μ	$\lambda_{me} = 1$	$\lambda_{me} = 2,57$	$\lambda_{me} = 3$	$\lambda_{me} = 7,5$	$\lambda_{me} = \infty$
0,001	0,0025	0,0029	0,0029	0,0035	0,0048
0,002	0,0049	0,0056	0,00058	0,0068	0,0094

Из таблицы 4.2 видно, что с ростом жесткости контртела увеличивается величина μ на момент окончания нагрева, при этом, чем выше крутящий момент μ_0 , под действием которого происходил прямой переход, тем интенсивнее рост μ . Наибольший прирост μ наблюдается в случае ОМП в заневоленном состоянии ($\lambda_{me} = \infty$).

На рисунках 4.30-4.31 приведены эпюры напряжений по сечению стержня полученные при решении рассматриваемой задачи. Как и ранее, представленные кривые соответствуют этапу движения границы окончания ОМП.

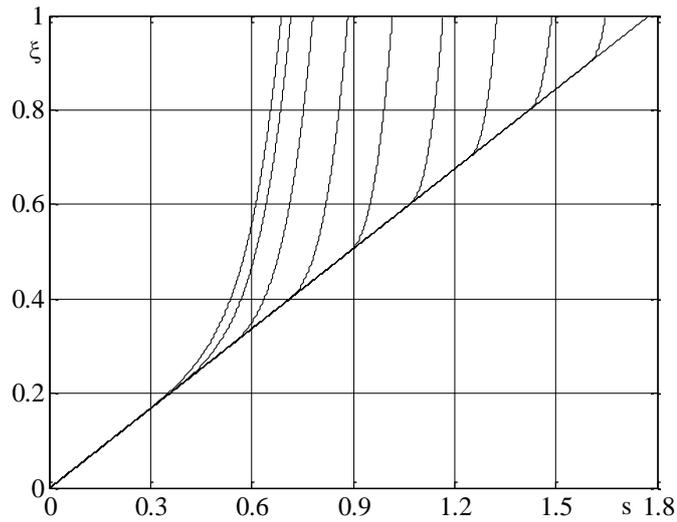


Рисунок 4.31 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,001$, $\lambda_{me} = \infty$.

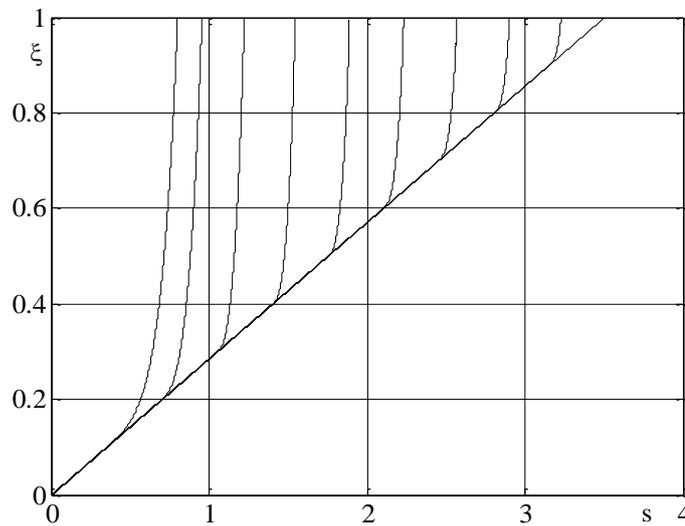


Рисунок 4.32 – Эпюры $s - \xi$, $\mu_0 = 0,002$, $\lambda_{me} = \infty$.

Как видно из приведенных рисунков, в процессе нагрева все сечение стержня испытывает рост напряжений, что подтверждает оправданность учета структурного перехода при решении задачи об ОМП. Именно этот рост напряжений («реактивные напряжения») и приводит к увеличению значения крутящего момента в процессе нагрева стержня из СПФ.

Достоверность приведенных в данном разделе результатов рассмотрим на примере задачи об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, находящегося под действием постоянного крутящего момента. При этом для вычисления параметра фазового состава используется соотношение (4.66). Как и в предыдущей главе, достоверность приведенных результатов подтверждается при варьировании параметра δS_0 . Так, при его увеличении понижается степень термомеханической связанности задачи, то есть действующие напряжения не будут влиять на характерные температуры фазовых превращений и ОМП закончится при температуре A_f^0 , что соответствует величине

$t_0 = 0$. На рисунке 4.33 приведены зависимости безразмерная крутка θ^1 – безразмерный параметр температуры t_0 . Кривые, приведенные на отмеченном рисунке, получены при решении соответствующей задачи для $\mu = 0,002$ и $\delta S_0 = 0,1288$ (сплошная линия), 0,5 (пунктирная линия), 10 (штриховая линия).

Как видно из рисунка 4.33, с ростом δS_0 величина t_0 приближается к значению 0. Тем самым подтверждается достоверность полученных решений.

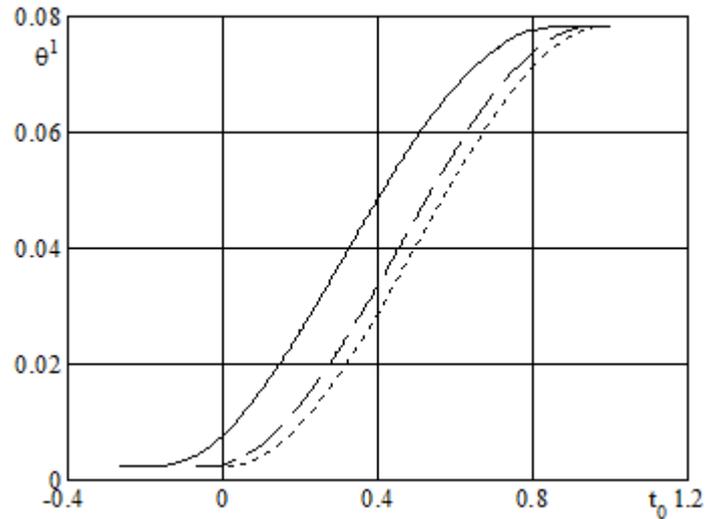


Рисунок 4.33 – Зависимости $\theta^1 - t_0$.

4.4. Выводы.

1. В данной главе разработан подход и алгоритм решения задачи об обратном мартенситном превращении, протекающем в активных элементах из СПФ, работающих на кручение, при их нагреве (рабочий ход). В качестве рабочего тела актуатора рассмотрены тонко- /толстостенная трубка, а также стержень сплошного круглого поперечного сечения из СПФ. Поведение данных элементов, а также анализ их НДС выполнен при рассмотрении задач об ОМП, протекающем под действием постоянного крутящего момента, ОМП с контртелом, а также в заневоленном состоянии.

2. Отмечено, что при решении задачи об ОМП в тонкостенной трубке из СПФ, материал трубки будет проходить один и тот же термомеханический путь деформирования в координатах $\gamma - q$ как на случай прямого, так и обратного фазового превращения.

3. При рассмотрении задачи об ОМП, протекающем в толстостенных трубках из СПФ под действием постоянного крутящего момента, установлено, что влияние предварительной разгрузки после прямого перехода, незначительно влияет на получаемые результаты. Отмечено, что с уменьшением толщины трубки, поле напряжений становится более однородным.

4. В ходе решения задачи об ОМП в стержне сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, протекающего под действием постоянного крутящего момента, отмечается существенная перегрузка внутренних слоев стержня, в процессе нагрева, при разгрузке внешних. Отмеченная перегрузка является функцией крутящего момента, под действием которого происходит обратное мартенситное превращение и тем выше, чем больше величина крутящего момента.

5. Установлено, что учет структурного перехода существенно влияет на результаты, получаемы при решении задач об ОМП в различных постановках. Так при его учете, в ходе решения задачи об ОМП при действии постоянного крутящего момента отмечается значительная разгрузка внутренних слоев стержня из СПФ.

6. В данной главе выполнено сравнение результатов задачи об ОМП в стержне из СПФ при постоянном крутящем моменте для двух различных диаграмм фазового перехода. Установлено, что в случае использования аппроксимирующей функции через «sin» на эпюрах напряжений отмечаются ярко выраженные пики. При использовании аппроксимирующей функции через «cos» эпюры напряжений, напротив, имеют более гладкий характер.

7. При рассмотрении задачи об ОМП с контртелом установлено, что с увеличением жесткости контртела уменьшается величина снимаемой при нагреве деформации, при этом из-за возникновения в стержне «реактивных» напряжений, повышается величина крутящего момента, под действием которого происходит обратный переход. При этом рост крутящего момента тем интенсивнее, чем выше жесткость контртела и величина крутящего момента, при котором происходило прямое мартенситное превращение.

8. Отмечено, что задачу об ОМП в заневоленном состоянии можно трактовать как ОМП с бесконечно-жестким контртелом. При этом в данной постановке задачи, рост крутящего момента, в процессе нагрева стержня, наиболее интенсивен.

5. Кручение тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости.

Применение СПФ в качестве материала активных элементов управления или преобразования/рассеивания энергии диктуется их уникальными термомеханическими свойствами. Наряду с рассмотренными ранее свойствами СПФ, такими как накопление фазовых деформаций ПМП, память формы, мартенситная неупругость, для этих сплавов характерно явление сверхупругости [25].

Пусть образец из СПФ находится в высокотемпературном аустенитном фазовом состоянии, выше температуры окончания обратного мартенситного превращения, но ниже температуры M_d [3] (температуры, ниже которой мартенсит может возникнуть, не только вследствие охлаждения, но и из-за приложенного внешнего напряжения). Отмеченное явление реализуется при монотонном нагружении/разгрузке образца из СПФ. Первоначально, при нагружении материал образца будет деформироваться упруго с аустенитным модулем. При достижении некоторой величины напряжений, начнется резкий рост неупругих фазово-структурных деформаций, за счет инициации прямого мартенситного превращения. Данный рост деформаций продолжается до тех пор, пока материал образца из СПФ не перейдет полностью в мартенситное фазовое состояние, при этом дальнейшее нагружение приведет к обычному пластическому деформированию и остаточным деформациям. Поэтому в случае явления сверхупругости верхний предел нагружения ограничен напряжением, соответствующим окончанию прямого мартенситного превращения. Если в данной точке процесса начать уменьшать приложенные напряжения, то вначале разгрузка будет происходить упруго, согласно закону Гука с мартенситным модулем. При достижении снижающимися напряжениями некоторой величины, начнется резкое уменьшение неупругой фазово-структурной деформации, за счет инициации обратного мартенситного превращения. По завершении данного этапа, образец из СПФ не обладает фазово-структурной деформацией. Дальнейшее же снижение напряжений до нуля приведет к упругой разгрузке с аустенитным модулем. Данный цикл является замкнутым лишь в том случае, если в процессе нагружения и разгрузки температура образца из СПФ остается в диапазоне $A_f \leq T \leq M_d$. В случае, если температура опускается ниже величины A_f , то на момент разгрузки до нуля образец из СПФ будет обладать неупругой деформацией и ее снятие возможно лишь за счет последующего нагрева образца через интервал температур $T > A_f$.

Описанное выше явление сверхупругости, позволяет использовать СПФ в качестве рабочего тела силовозбудителей крутящего момента, торсионных актуаторов, сверхупругих пружинных элементов, гасителей крутильных колебаний, демпфирующих устройств. При этом

наиболее выгодным с точки зрения массы конструктивным исполнением, отмеченных активных элементов является применение в их качестве тонкостенных трубок, работающая на кручение. Однако характер деформирования трубки из СПФ существенно зависит от ее текущей температуры, температуры окружающей среды и условий теплообмена с ней.

5.1. Решение задачи об изотермическом кручении тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости.

В качестве базовой постановки задачи устанавливается следующая система положений. Считается, что нагружение/разгрузка трубки осуществляется достаточно медленно, так что температура трубки из СПФ T , в рамках данных процессов, не изменяется. Принимается, что трубка является тонкостенной, тогда градиент напряжений и температуры по ее толщине равен нулю.

Рассмотрение задачи ведется в цилиндрической системе координат r, φ, z . Тогда при кручении отличными от нуля будут только касательные напряжения $\tau_{z\varphi}$, которые определяются на основе следующего соотношения:

$$\tau_{z\varphi} = \frac{M}{2\pi R^2 \delta} \quad (5.1)$$

где M – внешний крутящий момент, G – модуль сдвига, R, δ – радиус срединной поверхности и толщина трубки соответственно. В дальнейшем для краткости нижний индекс у $\tau_{z\varphi}$ будет опускаться. При решении поставленной задачи принимается аддитивное представление деформаций, при этом пренебрегается объемными компонентами тензора деформаций. Тогда соотношение для полных деформаций системы примет следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{re} + \varepsilon_{ij}^{phst} \quad (5.2)$$

где ε_{ij} – тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}^{re}, \varepsilon_{ij}^{phst}$ – девиатор упругой и фазово-структурной деформации соответственно. На случай кручения, уравнение (5.2) запишется следующим образом:

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^{phst} \quad (5.3)$$

где γ^e – упругая деформация:

$$\gamma^e = \frac{\tau}{G(q)}, \quad G(q) = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A} \quad (5.4)$$

где $G_{A,M}$ – модуль сдвига аустенитной и мартенситной фазы соответственно.

Приращение неупругой фазово-структурной деформации определяется на основе соотношения приведенного ниже:

$$d\gamma^{phst} = d\gamma^{ph} + d\gamma^{st} \quad (5.5)$$

На случай прямого мартенситного превращения $dq > 0$ приращение фазовых деформаций определяется как приведено ниже:

$$d\gamma^{ph} = \sqrt{3}\omega^+ dq, \quad \omega^+ = \rho_d (1 - qf(q)) F_1(\sqrt{3}\tau) + f(q) \frac{\gamma^{phst}}{\sqrt{3}} \quad (5.6)$$

При обратном превращении $dq < 0$:

$$d\gamma^{ph} = \sqrt{3}\omega^- dq, \quad \omega^- = \frac{\gamma^{phst}}{\sqrt{3}q} \quad (5.7)$$

Приращение структурных деформаций, как при прямом, так и при обратном превращении равно:

$$d\gamma^{st} = 3\rho_d q F_2'(\sqrt{3}\tau) d\tau \quad \text{при } d\tau > 0 \text{ и } \tau \geq \tau^{\max} \quad (5.8)$$

иначе $d\gamma^{st} = 0$.

Для определения параметра фазового состава используется следующий блок уравнений:

$$q = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi t_\sigma)) \quad (5.9)$$

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0} \quad \text{при } dq > 0, \quad t_\sigma = \frac{A_f^\sigma - T}{A_f^0 - A_s^0} \quad \text{при } dq < 0 \quad (5.10)$$

$$M_{s,f}^\sigma = M_{s,f}^0 + \frac{\sqrt{3}\tau\omega^+}{\Delta S_0}, \quad A_{s,f}^\sigma = A_{s,f}^0 + \frac{\sqrt{3}\tau\omega^-}{\Delta S_0} \quad (5.11)$$

Соотношения (5.1-5.11) представляют собой размерное решение задачи о сверхупругом поведении трубки из СПФ при кручении в изотермическом режиме. Отмеченное решение обезразмеривается путем введения следующих величин. Как и ранее вводится понятие безразмерных напряжений $s = \sqrt{3}\tau / \sigma_0$ и жесткостей $\lambda = E_A / E_M = 3$; $s_{0A} = \sigma_0 / G_A = 0,0046$; $s_{0M} = \sigma_0 / G_M = 0,0139$. Кроме этого, обезразмеривается величина объемного скачка плотности энтропии ΔS_0 при переходе от аустенитного фазового состояния к мартенситному. Так, его безразмерный аналог имеет разный вид на случай прямого и обратного мартенситного превращения, но идентичное значение: $\delta S_0 = \frac{(M_s^0 - M_f^0)\Delta S_0}{\sigma_0} = \frac{(A_f^0 - A_s^0)\Delta S_0}{\sigma_0} = 0,0427$. Как и в

предыдущих главах принимается, что функция $f(q) = a_0 = 0$. В качестве интегральной функции распределения микронапряжений в аустенитном фазовом состоянии будут рассмотрены две зависимости, такие что $F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s)$ – экспоненциальное распределение, либо $F_1(\sqrt{3}\tau) = \text{erf}(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = \text{erf}(s / \sqrt{2})$ – распределение Лапласа. В качестве интегральной

функции распределения микронапряжений в мартенситном фазовом состоянии принимается распределение Вейбулла со степенным показателем два, так что $F_2(\sqrt{3}\tau) = \Phi_2(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s^2)$. Учитывая изложенное выше, часть соотношений (5.1-5.11) переписутся как приведено ниже. Так, уравнение для определения упругих деформаций системы примет следующий вид:

$$\gamma^e = \frac{s}{\sqrt{3}} \lambda q s_{0A} + \frac{s}{\sqrt{3}} s_{0A} (1 - q) \quad (5.12)$$

Кроме этого, модифицируется соотношение (5.8), так что:

$$d\gamma^{st} = 6\rho_d q s \exp(-s^2) ds \quad (5.13)$$

Система соотношений (5.11) принимает следующий вид:

$$M_{s,f}^\sigma = M_{s,f}^0 + \frac{s\omega^+ (M_s^0 - M_f^0)}{\delta S_0}, \quad A_{s,f}^\sigma = A_{s,f}^0 + \frac{s\omega^- (A_f^0 - A_s^0)}{\delta S_0} \quad (5.14)$$

Общий алгоритм решения задачи будет следующий. В начальный момент трубка из СПФ находится в полностью аустенитном фазовом состоянии, при температуре $T \geq A_f^0$. Так как с приложением внешних механических напряжений в СПФ наблюдается рост температур фазовых превращений, то первым этапом решения является определение величины безразмерных напряжений s_{dir}^{cr} из соотношения (5.14), при которой инициируется прямое мартенситное превращение. До данного уровня напряжений материал трубки деформируется упруго с аустенитным модулем и параметр фазового состава q (объемная доля мартенситной фазы) равен нулю. После того как напряжения превысят величину s_{dir}^{cr} , решение задачи принимает пошаговый характер. Совершается малый шаг по s , $ds > 0$ и вычисляется новое значение самих напряжений $s^{new} = s + ds$. Далее на основании блока уравнений (5.9,5.10,5.14) вычисляется величина параметра фазового состава q . При этом считается, что температура трубки T равна температуре окружающей среды T_{env} и не меняется в процессе нагружения. После согласно (5.12) вычисляются упругие деформации. На основании (5.6,5.8) определяются приращения фазово-структурных деформаций и их новые значения $\gamma_{ph}^{new} = \gamma^{ph} + d\gamma^{ph}$, $\gamma_{st}^{new} = \gamma^{st} + d\gamma^{st}$. Полные деформации системы вычисляются согласно уравнению (5.3). Процесс активного нагружения с шагом $ds > 0$ продолжается до тех пор, пока параметр q не станет равным единице, то есть до завершения, вызванного ростом напряжений, прямого мартенситного превращения. После следует упругая разгрузка с мартенситным модулем. При этом шаг по напряжениям становится величиной отрицательной $ds < 0$. При достижении напряжения s_{rev}^{cr} (5.14) инициируется, вызванное падением напряжений, обратное мартенситное

превращение. В ходе данного этапа снимаются неупругие деформации, и по его завершению в трубке из СПФ отсутствуют фазово-структурные деформации, а $q = 0$. Последующее снижение напряжений приводит к упругой разгрузке с аустенитным модулем.

На рисунках 5.1,5.2 приведены кривые сверхупругости (безразмерные напряжения s – полные деформации γ). На рисунке 5.1 кривые соответствуют экспоненциальному распределению для функции F_1 (модель №1), а на рисунке 5.2 – распределению Лапласа (модель №2). Представленные кривые сверхупругости соответствуют начальной температуре трубки T_0 в 343, 353 и 363 К сверху вниз соответственно. Принято, что $\sigma_0 = 150$ МПа.

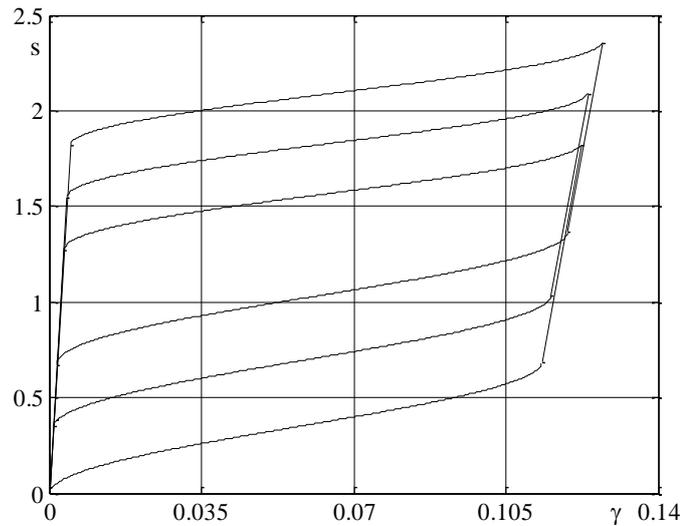


Рисунок 5.1 – Кривые $s - \gamma$, $F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s)$.

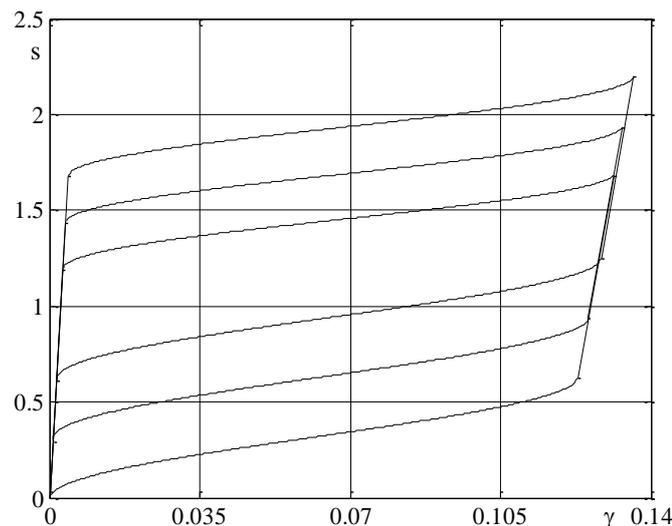


Рисунок 5.2 – Кривые $s - \gamma$, $F_1(\sqrt{3}\tau) = \text{erf}(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = \text{erf}(s / \sqrt{2})$.

Как видно из приведенных рисунков, повышение начальной температуры трубки из СПФ T_0 , приводит к росту напряжений начала и окончания прямого и обратного мартенситного

превращения. При этом величина накапливаемой фазово-структурной деформации на момент окончания ПМП не существенно зависит от значения T_0 . Кроме этого, следует отметить, что использование модели №1 дает более высокие значения безразмерных напряжений s , соответствующих началу и окончанию фазовых переходов. Однако уровень достигнутых деформаций γ в процессе нагружения/разгрузки трубки из СПФ больше в рамках модели №2.

Приведенное выше решение задачи о сверхупругом поведении трубки из СПФ при кручении не учитывает влияния изменения температуры трубки в процессе нагружения/разгрузки на ее термомеханический отклик. Однако данное решение может быть использовано в качестве базового для подтверждения результатов, полученных в следующей главе работы. Так как в случае изотермического нагружения образца из СПФ в режиме сверхупругости справедливо положение об АППН, то соотношения (5.6-5.8) можно представить в виде конечного алгебраического уравнения, которое имеет следующий вид:

$$\gamma^{phst} = \rho_d q F_1(\sqrt{3}\tau) \quad (5.15)$$

Тогда решение задачи принимает аналитический вид и приведенные в данной главе результаты должны согласовываться с решением дважды связанной задачи в случае квази-изотермического нагружения.

5.2. Решение дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости.

Рассмотрение задачи, как и ранее, ведется в цилиндрической системе координат. При этом остаются правомерны основные положения принятые в предыдущем параграфе. Считается, что трубка является достаточно тонкостенной, так что градиент напряжений и температуры по ее толщине отсутствует. Также в ходе решения пренебрегается объемными компонентами тензора деформаций. Однако принимается, что температура трубки из СПФ в процессе нагружения может изменяться из-за следующих факторов: выделения/поглощения латентного тепла фазового перехода, механической диссипации и теплообмена с окружающей средой. Тогда актуальная температура трубки из СПФ должна быть определена из уравнения энергетического баланса [23,112,113], которое в общем случае имеет следующий вид:

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T \alpha \dot{\sigma}_{kk} - (\Delta U_0 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 / 3 + \omega_{ij} \sigma_{ij}') \dot{q} - \rho_d q F_2'(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i \quad (5.16)$$

Учитывая выше изложенные положения, уравнение (5.16) значительно упрощается:

$$0 = C_\sigma \dot{T} - (\Delta U_0 + \omega_{ij} \sigma_{ij}') \dot{q} - \rho_d q F_2'(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i \quad (5.17)$$

В настоящем параграфе изучено влияние механической диссипации, скорости нагружения, а также условий теплообмена с окружающей средой на получаемые при решении

результаты. Кроме этого, при решении использовано несколько вариантов соотношений, аппроксимирующих диаграмму фазового перехода.

В простейшем варианте в уравнение (5.17) не учитываются слагаемые, отвечающие за механическую диссипацию, связанную как с фазовым, так и со структурным переходом. Тогда соотношение (5.17) принимает следующий вид:

$$C_\sigma \dot{T} - \Delta U_0 \dot{q} = 0 \quad (5.18)$$

В простейшем случае параметр фазового состава q является линейной функцией текущей температуры и соответствующих температур фазовых превращений. При этом температуры фазовых переходов будут также являться линейными функциями интенсивности напряжений [89]:

$$q = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0} \text{ при } dq > 0 \text{ и } q = \frac{A_f^\sigma - T}{A_f^0 - A_s^0} \text{ при } dq < 0 \quad (5.19)$$

$$M_{s,f}^\sigma = M_{s,f}^0 + k\sigma_i = M_{s,f}^0 + k\sqrt{3}\tau \quad (5.20)$$

$$A_{s,f}^\sigma = A_{s,f}^0 + k\sigma_i = A_{s,f}^0 + k\sqrt{3}\tau \quad (5.21)$$

где T – текущая температура трубки из СПФ, k – коэффициент влияния действующих напряжений на температуры фазовых переходов.

Дифференцируя (5.19) с учетом (5.20,5.21) можно получить:

$$\dot{q} = \frac{\sqrt{3}k\dot{\tau} - \dot{T}}{M_s^0 - M_f^0} \text{ при } dq > 0 \text{ и } \dot{q} = \frac{\sqrt{3}k\dot{\tau} - \dot{T}}{A_f^0 - A_s^0} \text{ при } dq < 0 \quad (5.22)$$

здесь верхний индекс « \cdot » обозначает производную по времени t . Подставляя (5.22) в (5.18), а также вводя в уравнение энергетического баланса слагаемое, связанное с конвективным теплообменом с окружающей средой [119], на случай прямого мартенситного превращения получим:

$$C_\sigma \dot{T} - \delta_1 U_0 (\sqrt{3}k\dot{\tau} - \dot{T}) + H_\infty \Delta T = 0 \quad (5.23)$$

$$\delta_1 U_0 = \frac{\Delta U_0}{M_s^0 - M_f^0}, \quad H_\infty = h_\infty / \delta \quad (5.24)$$

где $\Delta T = T - T_{env}$ – разность температур между трубкой из СПФ и окружающей средой, h_∞ – коэффициент теплопередачи.

В рамках данного параграфа принимается, что касательные напряжения есть линейная функция времени такая, что:

$$\tau = \lambda t, \quad \dot{\tau} = \lambda dt \quad (5.25)$$

где λ – скорость нагружения.

Подставляя (5.25) в (5.23) и разрешая это дифференциальное уравнение относительно приращения температуры получим:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\sqrt{3}\delta_1 U_0 k \lambda - H_\infty \Delta T}{D_u} \quad (5.26)$$

$$D_u = C_\sigma + \delta_1 U_0 \quad (5.27)$$

Система уравнений (5.26,5.27) справедлива на случай ПМП. Ее решение находится аналитически при начальном условии $T(0) = T_{env}$ и имеет следующий вид:

$$T(t) = T_{env} + A(1 - \exp(-t/B)) \quad (5.28)$$

$$A = \sqrt{3}H_\infty^{-1}\delta_1 U_0 k \lambda \quad (5.29)$$

$$B = H_\infty^{-1}D_u \quad (5.30)$$

Соотношения (5.28-5.30) описывают изменение температуры трубки в процессе активного нагружения, выше напряжений τ_{dir}^{cr} . По завершении данного этапа следует упругая разгрузка с мартенситным модулем, при этом $\dot{q} = 0$. Учитывая отмеченное положение, уравнение энергетического баланса, запишется следующим образом:

$$\frac{dT}{dt} = -F_c (T - T_{env}) \quad (5.31)$$

$$F_c = H_\infty / C_\sigma \quad (5.32)$$

Начальное условие для системы уравнений (5.31,5.32) имеет следующий вид:

$$T(0) = T_{direct} \quad (5.33)$$

где T_{direct} – температура трубки из СПФ на момент окончания ПМП. При этом решение отмеченной системы уравнений имеет аналитический вид:

$$T(t) = T_{env} + \exp(-F_c t)(T_{direct} - T_{env}) \quad (5.34)$$

При обратном мартенситном превращении для определения температуры трубки из СПФ также используется блок уравнений (5.28-5.30). Однако скорость нагружения становится величиной отрицательной $\lambda < 0$. Начальное условие для решения отмеченной системы уравнений будет иметь следующий вид:

$$T(0) = T_{unload} \quad (5.35)$$

где T_{unload} – температура трубки из СПФ на момент окончания упругой мартенситной разгрузки. Отметим, что система соотношений (5.28-5.35) в рамках данного параграфа, в дальнейшем, будет именоваться, как модель номер один.

Экспериментально установлено, что влияние внешних напряжений на характерные температуры фазовых превращений имеет нелинейный характер [20]. В работах [23,112,113] предложены следующие зависимости, для описания отмеченной особенности СПФ:

$$M_{s,f}^{\sigma} = M_{s,f}^0 + \frac{\sqrt{3}\tau\omega^+}{\Delta S_0}, \quad A_{s,f}^{\sigma} = A_{s,f}^0 + \frac{\sqrt{3}\tau\omega^-}{\Delta S_0} \quad (5.36)$$

Совокупность соотношений для параметра фазового состава (5.19) и температур фазовых превращений (5.36) формируют вторую модель, рассматриваемую в данном параграфе. При этом как и ранее не учитывается механическая диссипация, связанная как с фазовым, так и структурным превращениями. Тогда, выполняя те же самые действия, что и при рассмотрении модели номер один, а также принимая, что $f(q) = a_0 = 0$, уравнение энергетического баланса на случай ПМП примет следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U_1 \left(\sqrt{3}\lambda\rho_d \left(1 - \exp(\lambda_1 t) - \sqrt{3}\lambda_1 t \exp(\lambda_1 t) \right) \right) - H_{\infty} \Delta T}{D_u} \quad (5.37)$$

$$U_1 = \delta_1 U_0 / \Delta S_0, \quad \lambda_1 = -\sqrt{3}\lambda / \sigma_0 \quad (5.38)$$

Начальное условие имеет идентичный вид, как и для модели номер один $T(0) = T_{env}$.

Решение уравнения (5.37) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T(t) = & - \frac{\sqrt{3}\rho_d D_u^2 U_1 \lambda \lambda_1^2 e^{-\frac{H_{\infty} t}{D_u}} + \sqrt{3}\rho_d D_u H_{\infty} e^{\lambda_1 t} U_1 \lambda \lambda_1 + \sqrt{3} D_u H_{\infty} e^{\lambda_1 t} U_1 \lambda_1^2 t - \sqrt{3}\rho_d D_u^2 U_1 \lambda \lambda_1^2}{(D_u \lambda_1 + H_{\infty})^2 H_{\infty}} + \\ & + \frac{\sqrt{3}\rho_d D_u H_{\infty} U_1 \lambda \lambda_1 e^{-\frac{H_{\infty} t}{D_u}} + \sqrt{3}\rho_d H_{\infty}^2 e^{\lambda_1 t} U_1 \lambda + \sqrt{3} H_{\infty}^2 e^{\lambda_1 t} U_1 \lambda_1 t - 2\sqrt{3}\rho_d D_u H_{\infty} U_1 \lambda \lambda_1}{(D_u \lambda_1 + H_{\infty})^2 H_{\infty}} - \\ & - \frac{\sqrt{3} D_u H_{\infty} e^{\lambda_1 t} U_1 \lambda_1 - \sqrt{3}\rho_d H_{\infty}^2 U_1 \lambda - D_u^2 H_{\infty} T_{env} \lambda_1^2 + \sqrt{3} U_1 \lambda_1 D_u H_{\infty} e^{-\frac{H_{\infty} t}{D_u}} - 2 D_u H_{\infty}^2 T_{env} \lambda_1 - H_{\infty}^3 T_{env}}{(D_u \lambda_1 + H_{\infty})^2 H_{\infty}} \end{aligned} \quad (5.39)$$

При упругой мартенситной разгрузке справедливо уравнение (5.34) с начальным условием $T(0) = T_{direct}$.

В случае обратного мартенситного превращения температура трубки из СПФ находится путем решения следующего дифференциального уравнения, при начальном условии $T(0) = T_{unload}$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U_2 \gamma_0^{phst} \lambda - H_{\infty} (T - T_{env})}{R_u} \quad (5.40)$$

$$\delta_2 U_0 = \frac{\Delta U_0}{A_f^0 - A_s^0}, \quad U_2 = \delta_2 U_0 / \Delta S_0, \quad R_u = C_{\sigma} + \delta_2 U_0 \quad (5.41)$$

Решение уравнения (5.39) приведено ниже:

$$T(t) = A - Be^{Ct}, \quad A = T_{env} + \frac{\Delta U_0 \delta \lambda \gamma_0^{phst}}{\alpha \Delta S_0 (A_f^0 - A_s^0)} \quad (5.42)$$

$$B = \left(T_{env} - T_{unload} + \frac{\Delta U_0 \delta \lambda \gamma_0^{phst}}{\alpha \Delta S_0 (A_f^0 - A_s^0)} \right), \quad C = \frac{-h_\infty (A_f^0 - A_s^0)}{\delta (A_f^0 C_\sigma - A_s^0 C_\sigma + \Delta U_0)} \quad (5.43)$$

В модели номер три используется нелинейная аппроксимация диаграммы фазового перехода, в соответствии со следующей зависимостью [108]:

$$q = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi t_\sigma)) \quad (5.44)$$

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad \text{при } dq > 0 \quad \text{и} \quad t_\sigma = \frac{A_f^\sigma - T}{A_f^0 - A_s^0} \quad \text{при } dq < 0 \quad (5.45)$$

Как и ранее диссипативные слагаемые в уравнение энергетического баланса не учитываются. При этом начальные условия для каждого из этапов остаются неизменными. Тогда на случай прямого мартенситного превращения уравнение энергетического баланса примет следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta U_0 \beta A \lambda - H_\infty (T - T_{env})}{(C_\sigma + \Delta U_0 \beta \Delta S_0)} \quad (5.46)$$

$$\beta = \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{\Delta S_0 (M_s^0 - M_f^0)} \quad (5.47)$$

$$A = \sqrt{3} \rho_d (1 - \exp(\lambda_1 t) - \sqrt{3} \lambda_1 t \exp(\lambda_1 t)) \quad (5.48)$$

При обратном мартенситном превращении температура трубки из СПФ будет определяться из следующей системы уравнений:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta U_0 \beta_1 \gamma_0^{phst} \lambda - H_\infty (T - T_{env})}{(C_\sigma + \Delta U_0 \beta_1 \Delta S_0)} \quad (5.49)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{\Delta S_0 (A_f^0 - A_s^0)} \quad (5.50)$$

В рамках четвертой модели предполагается учет диссипативных слагаемых в уравнении энергетического баланса. При этом для определения температур фазовых превращений и параметра фазового состава справедливы соотношения (5.36) соответственно. Тогда на случай ПМП уравнение энергетического баланса, разрешенное относительно приращения температуры будет иметь следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(\Delta U_0 + \rho_d \sqrt{3} \lambda t (1 - \exp(-\lambda_1 t))) \beta A \lambda + Z - H_\infty (T - T_{env})}{C_\sigma + (\Delta U_0 + \rho_d \sqrt{3} \lambda t (1 - \exp(-\lambda_1 t))) \beta \Delta S_0} \quad (5.51)$$

$$Z = 6 \rho_d q \lambda_1^2 t^2 \exp(-\lambda_1^2 t^2) \lambda \quad (5.52)$$

где β и A определяются на основе соотношений (5.47) и (5.48) соответственно.

При обратном мартенситном превращении уравнение энергетического баланса имеет следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(\Delta U_0 + \gamma_0^{phst} \lambda t) \beta_1 \gamma_0^{phst} \lambda - H_\infty (T - T_{env})}{C_\sigma + (\Delta U_0 + \gamma_0^{phst} \lambda t) \beta_1 \Delta S_0} \quad (5.53)$$

где β_1 определяется на основе (5.47).

Алгоритм решения задачи о кручении тонкостенной трубки из СПФ в режиме сверхупругости в рамках четырех моделей поведения будет идентичен для каждой из используемых моделей. Его основные положения изложены ниже и представлены в виде схемы.

Первоначально, как и в случае изотермической задачи, решается упругая задача кручения тонкостенной трубки из СПФ, находящейся в аустенитном фазовом состоянии при температуре $T = T_{env}$. Упругое деформирование, без фазово-структурных превращений, протекает до уровня напряжений τ_{dir}^{cr} , который определяется из следующего соотношения:

$$T = M_s^\sigma \quad (5.54)$$

В качестве выражения для M_s^σ можно использовать соотношение (5.20) либо (5.36) в зависимости от принятой при решении задачи модели материала. После определения величины τ_{dir}^{cr} находится соответствующая ей упругая деформация системы. Следующий этап решения задачи носит пошаговый характер. Производится малый положительный шаг по напряжениям $d\tau > 0$ и находится новое значение самих напряжений $\tau^{new} = \tau + d\tau$. Здесь τ представляет собой напряжения с предыдущего этапа. Вначале этапа ПМП $\tau = \tau_{dir}^{cr}$. Следует отметить, что именно рост напряжений и вызывает протекание в трубки из СПФ прямого мартенситного превращения. Далее согласно (5.25) находится временной интервал t , за который было достигнуто данное напряжение. Зная величину t находится новое значение температуры трубки из СПФ на основе одного из приведенных соотношений (5.28), (5.39), (5.46), (5.51). Располагая новой величиной температуры трубки из СПФ T , определяется величина параметра фазового состава q согласно (5.19) либо (5.44). Зная новые значения напряжений τ и параметра фазового состава q определяются упругие, фазово-структурные и полные деформации системы. Далее следует новый шаг по напряжениям. Процесс активного нагружения длится до тех пор, пока

параметр фазового состава не станет равным единице $q=1$. Далее следует цикл упругой мартенситной разгрузки при $d\tau < 0$. При этом снимается только упругая деформация системы, а фазово-структурных превращений не происходит. Температура трубки из СПФ в процессе разгрузки определяется на основе соотношения (5.31). Данный этап продолжается до тех пор, пока снижающие напряжения не достигнут величины τ_{rev}^{cr} , ниже которой начинается обратное мартенситное превращение. Величина τ_{rev}^{cr} определяется из следующего условия: $T = A_s^\sigma$. При обратном мартенситном превращении порядок определения внутренних переменных системы аналогичен случаю ПМП. Однако шаг по напряжением является величиной отрицательной $d\tau < 0$. При определении промежутка времени, за который достигнута данная величина напряжений, используется их абсолютная величина. В ходе обратного перехода помимо упругих снимаются и неупругие фазово-структурные деформации системы. При этом величина параметра фазового уменьшается до нуля. Температура трубки в рамках данного процесса определяется на основе одного из соотношений (5.28), (5.42), (5.49), (5.53). По окончании обратного мартенситного превращения материал трубки не обладает фазово-структурной деформацией и находится в аустенитном фазовом состоянии $q=0$. Данное положение правомерно, в случае если в процессе разгрузки температура трубки из СПФ не опускается ниже величины A_f^0 , представляющей собой температуру окончания обратного мартенситного превращения в отсутствие внешних напряжений. После следует упругая разгрузка до нуля с аустенитным модулем. При этом может наблюдаться остаточная фазово-структурная деформация, величина которой зависит от температуры трубки в процессе протекания обратного мартенситного превращения.

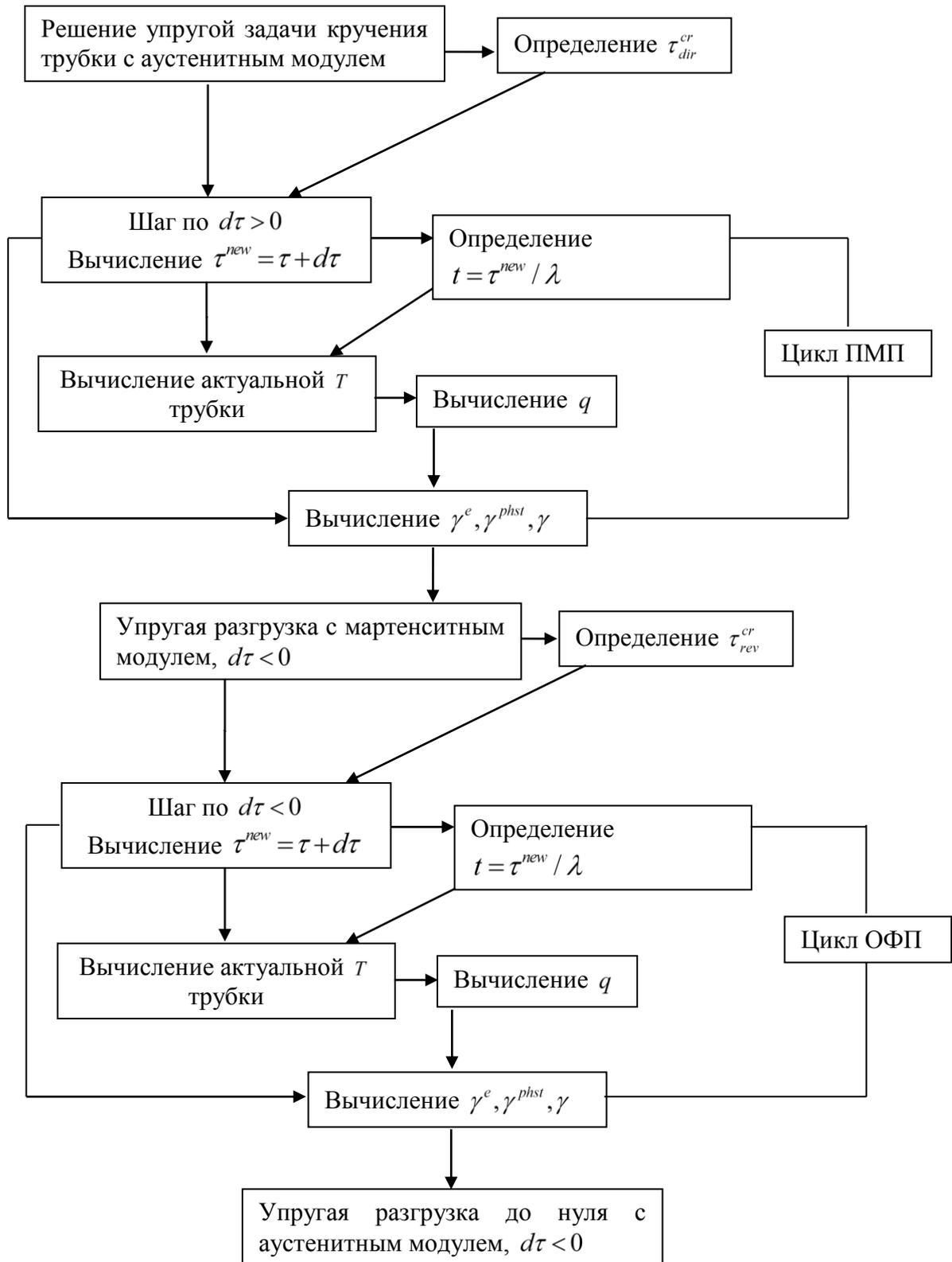


Схема 5.1. Алгоритм решения задачи о сверхупругом поведении трубки из СПФ при кручении, неизоотермическая задача.

При решении задачи использованы аналогичные параметры материала трубки, соответствующие СПФ типа равноатомного никелида титана, что и в случае изотермической задачи. Однако при построении решения были введены дополнительные константы материала и

геометрические параметры трубки, такие как: $\delta_1 U_0 = \delta_2 U_0 = 4,8 \cdot 10^6$ Дж/(м³·К), $D_u = 8 \cdot 10^6$ Дж/(м³·К), $\delta = 1$ мм. При этом в качестве функций распределения микронапряжений использовались экспоненциальное распределение для функции F_1 , так что $F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s)$ и распределение Вейбулла для функции F_2 – $F_2(\sqrt{3}\tau) = \Phi_2(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s^2)$.

На рисунке 5.3 приведены кривые сверхупругости (безразмерные напряжения s – полные деформации γ) для четырех моделей материала трубки. Здесь сплошная жирная линия соответствует решению изотермической задачи, сплошная тонкая линия получена при использовании модели №1, штриховая – модели №2, пунктирная – модели №3 и штрихпунктирная – модели №4.

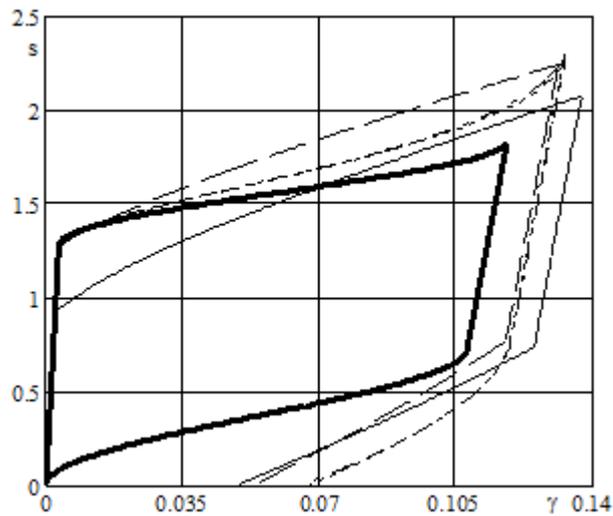


Рисунок 5.3 – Кривые $s - \gamma$.

Проведенное моделирование выполнено для $\lambda = 0,5$ МПа/с, $h_{\infty} = 20$ Вт/(м²·К) (свободная конвекция с воздухом) [119], $T_{env} = 343$ К. Из приведенного рисунка видно, что учет изменения температуры материала трубки в процессе фазовых превращений существенно меняет характер решения. Так, при прямом мартенситном превращении, вызванном ростом напряжений, наблюдается рост температуры, рисунок 5.4, за счет выделения латентного тепла фазового перехода, а также диссипативных эффектов. Это приводит к повышению уровня напряжений окончания ПМП по сравнению со случаем изотермической задачи. При этом теплообмен с окружающей средой замедляет рост температуры трубки из СПФ, и как следствие повышает скорость протекания ПМП. Так, максимальное значение напряжений на момент окончания ПМП наблюдается при использовании модели №4, наиболее полно отражающей особенности термомеханического поведения СПФ.

На рисунке 5.4 приведены зависимости безразмерный параметр температуры $t_0 = T / T_{env}$ – параметр фазового состава (объемная доля мартенситной фазы) q . Сплошная линия соответствует первой модели, штриховая – второй, пунктирная – третьей, штрихпунктирная – четвертой. Из рисунка 5.4 видно, что в ходе ПМП отмечается существенный рост температуры трубки. При этом характер данных кривых значительно зависит от использованной модели поведения материала. Так, переход к нелинейной зависимости для аппроксимации диаграммы фазового перехода значительно снижает значение температуры в процессе протекания прямого превращения, однако конечное значение температуры весьма близко для всех четырех рассматриваемых моделей. Однако при использовании модели номер два температура окончания прямого мартенситного превращения несколько ниже, по сравнению с остальными моделями поведения СПФ. При рассмотрении участка, соответствующего упругой мартенситной разгрузке видно, что температура в данном процессе падает по линейному закону только за счет теплообмена с окружающей средой. Изменений температуры связанных с фазовыми переходами и механической диссипацией не происходит. При этом следует отметить, что при использовании отмеченных начальных данных, температура на момент окончания мартенситной разгрузки весьма близка к величине A_f^0 . В ходе обратного превращения температура трубки из СПФ уменьшается вследствие поглощения латентного тепла фазового перехода. В случае если ее текущая температура падает ниже величины $T_{env} = A_f^0$, то теплообмен с окружающей средой будет напротив повышать температуру трубки. Наименьшее значение температуры на момент окончания ОМП фиксируется при использовании модели номер три. При этом следует отметить, что в случае всех четырех моделей температура на момент окончания ОМП значительно ниже T_{env} . Данное положение приводит к тому, что в процессе ОМП, фазово-структурные деформации не снимаются полностью и переходят в остаточные при этом кривые сверхупругости не замыкаются.

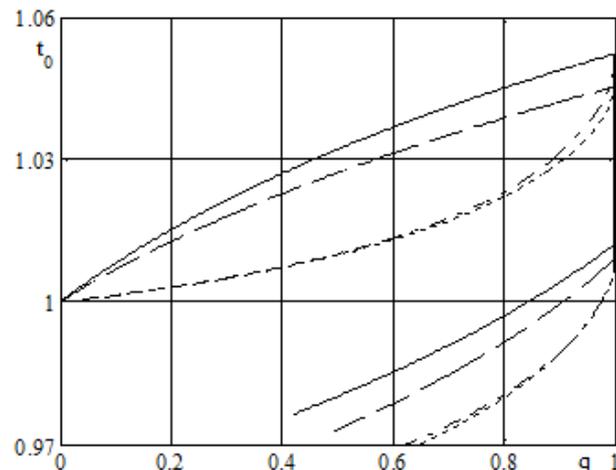


Рисунок 5.4 – Зависимости $t_0 - q$.

На рисунке 5.5 приведены кривые сверхупругости для различных скоростей нагружения λ при $h_\infty = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и $T_{env} = 343 \text{ К}$. Данные кривые получены при использовании модели номер четыре. Здесь сплошная жирная линия представляет собой решение адиабатической задачи, которую можно трактовать как задачу с бесконечно большой скоростью нагружения в отсутствии теплообмена с окружающей средой. Сплошная тонкая линия соответствует $\lambda = 0.1 \text{ МПа}/\text{с}$, штриховая – $\lambda = 0.5 \text{ МПа}/\text{с}$, пунктирная – $\lambda = 1 \text{ МПа}/\text{с}$, штрихпунктирная – $\lambda = 2 \text{ МПа}/\text{с}$.

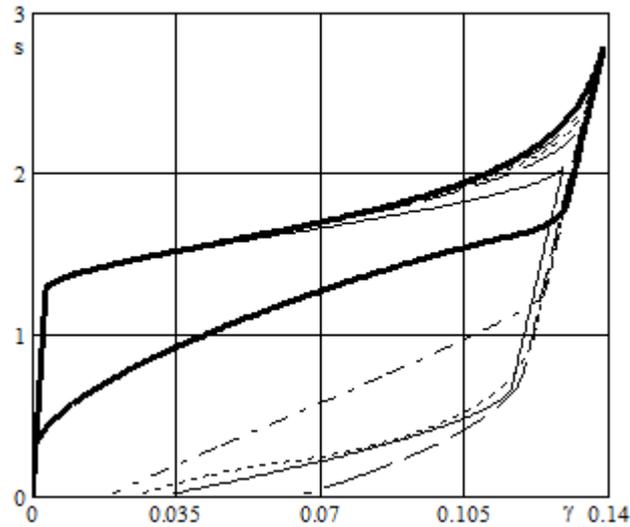


Рисунок 5.5 – Кривые $s - \gamma$.

Из приведенного рисунка видно, что повышение скорости нагружения приводит к увеличению величины напряжений на момент окончания ПМП, а также снижению остаточных фазово-структурных деформаций. Данные явления объясняются существенным нагревом трубки из СПФ в процессе нагружения. При этом максимальный уровень напряжений на момент окончания прямого мартенситного превращения наблюдается при адиабатическом решении. Кроме этого, в данном случае кривая сверхупругости получается замкнутой, в отличие от решений, полученных при конечной скорости нагружения. Однако диссипации энергии (площадь под кривой сверхупругости) при этом минимальна. Следует также отметить, что за цикл разгрузки, температура трубки из СПФ успевает опуститься ниже величины A_f^0 , о чем свидетельствует факт незамкнутости кривых сверхупругости.

На рисунке 5.6 приведены зависимости безразмерный параметр температуры t_0 – объемная доля мартенситной фазы q . Правило расположения кривых соответствует правилу, установленному для рисунка 5.5.

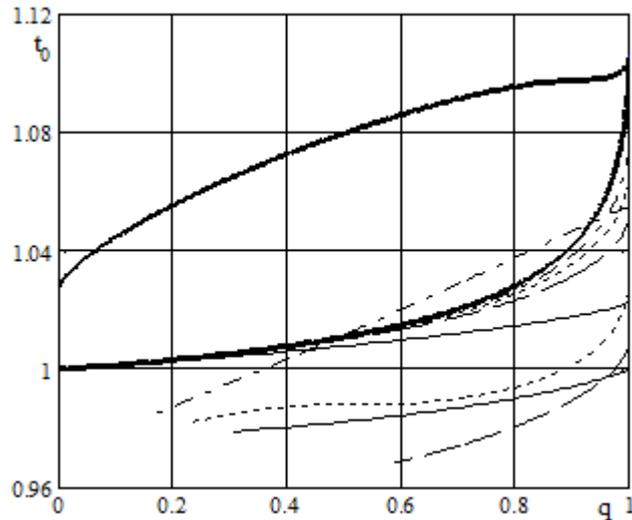


Рисунок 5.6 – Зависимости $t_0 - q$.

Как видно из приведенного рисунка, наименьшая температура на момент окончания обратного превращения наблюдается при $\lambda = 0,5$ МПа/с. Рост скорости нагружения приводит к повышению температуры трубки на момент окончания ОМП. Так, наибольший рост температуры отмечается в случае адиабатической задачи, при этом величина t_0 на момент окончания ОФП не падает ниже $t_0 = T / A_f^0 = 1$, о чем свидетельствует замкнутость соответствующей кривой на рисунке 5.5.

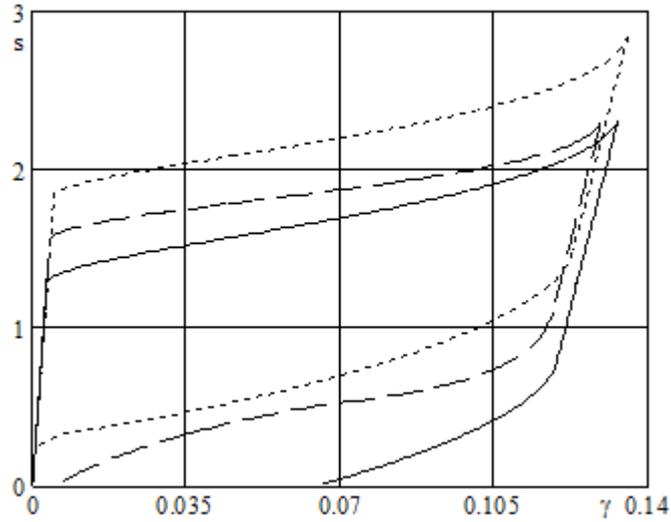
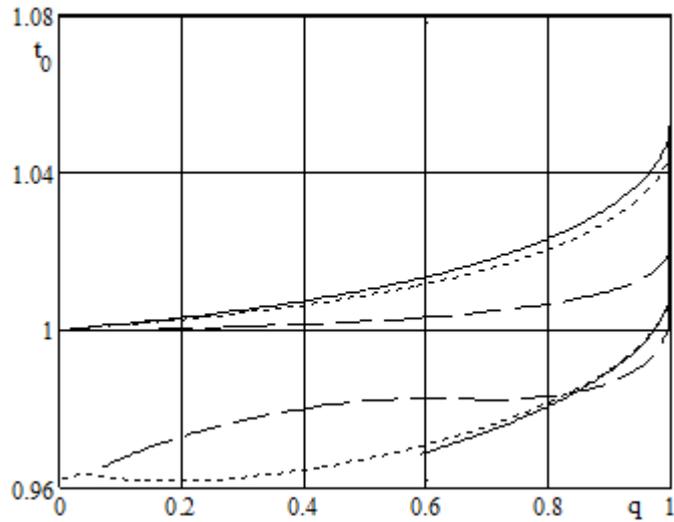
В труде [120] отмечено, что в случае свободной конвекции с воздухом коэффициент теплообмена с окружающей средой h_∞ является функцией геометрических размеров трубки из СПФ, а также разницы температур между трубкой и окружающей средой. Так, в случае теплообмена между тонкостенной трубкой из СПФ и окружающим ее воздухом параметр h_∞ варьируется от 18 до 22 Вт/(м²·К). В качестве равновесного значения, для полных циклов прямого и обратного мартенситное превращения h_∞ может быть принят равным 20 Вт/(м²·К). Для обоснования данного положения приведена таблица 5.1, содержащая данные моделирования, проведенного при варьировании параметра h_∞ .

Таблица 5.1 – Результаты моделирования явления сверхупругости в тонкостенной трубке из СПФ при кручении.

$h_\infty, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$	S_{direct}	t_0^{direct}	S_{unload}	t_0^{unload}	γ_{res}^{phst}	$t_0^{reverse}$
18	2,3202	1,0542	0,7958	1,0123	0,0669	0,9682
20	2,309	1,0521	0,77	1,001	0,0661	0,9684
22	2,2835	1,0503	0,7497	1,0081	0,0649	0,9688

Результаты, приведенные в таблице 5.1, получены для $\lambda = 0,5$ МПа/с и $T_{env} = 343$ К. Здесь s_{direct}, t_0^{direct} – безразмерные напряжения и безразмерный параметр температуры на момент окончания прямого мартенситного превращения, s_{unload}, t_0^{unload} – те же величины после упругой мартенситной разгрузки, γ_{res}^{phst} – остаточные фазово-структурные деформации, $t_0^{reverse}$ – безразмерный параметр температуры на момент окончания обратного мартенситного превращения. Как видно из приведенной таблицы, варьирование коэффициента h_∞ незначительно влияет на характерные параметры кривых сверхупругости, поэтому использование равновесного значения h_∞ правомерно в рамках данной постановки задачи.

Кроме скорости нагружения и теплообмена с окружающей средой, существенное влияние на термомеханический отклик трубки из СПФ при кручении в режиме сверхупругости оказывает начальная температура трубки. В рамках данного параграфа считается, что начальная температура трубки равна температуре окружающей среды и последняя не изменяется со временем. Так, на рисунке 5.7 приведены кривые сверхупругости при различных начальных температурах трубки из СПФ. Здесь сплошная линия соответствует 343 К, штриховая – 353 К, пунктирная – 363 К. Данные кривые получены при использовании модели номер четыре со следующими исходными данными: $\lambda = 0,5$ МПа/с и $h_\infty = 20$ Вт/(м²·К). На основании рисунка 5.7 можно заключить, что с ростом начальной температуры трубки из СПФ повышаются соответствующие напряжения начала и окончания фазовых превращений. Подобная тенденция отмечалась и на случай изотермической задачи. Кроме этого, при повышении начальной температуры трубки, понижается уровень остаточных фазово-структурных деформаций на момент разгрузки до нуля. Так, в случае $T_{env} = 363$ К кривая сверхупругости получается замкнутой. Данный факт объясняется тем, что в процессе ОФП температура трубки не падает ниже величины A_f^0 , рисунок 5.8. Кривые на данном рисунке приведены в соответствии с правилом, установленным для рисунка 5.7.

Рисунок 5.7 – Кривые $s - \gamma$.Рисунок 5.8 – Зависимости $t_0 - q$.

Достоверность приведенных в настоящей главе данных обусловлена сходимостью решения задачи, на примере кривых сверхупругости $s - \gamma$, к аналитическому решению, полученному в изотермической постановке. На рисунке 5.9 приведены кривые сверхупругости полученные при варьировании параметра h_∞ . Так с его увеличением повышается интенсивность теплообмена с окружающей средой и температура трубки из СПФ остается практически неизменной. Подобного эффекта можно добиться путем снижения скорости нагружения λ . Приведенные на рисунке 5.8 кривые сверхупругости получены для $\lambda = 0,5$ МПа/с и $T_{env} = 343$ К. Здесь сплошная жирная линия соответствует изотермической задаче, сплошная тонкая – $h_\infty = 20$ Вт/(м²·К), штриховая – $h_\infty = 100$ Вт/(м²·К), пунктирная –

$h_{\infty} = 500 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Из приведенного рисунка видно, что с увеличением параметра h_{∞} решение задачи в дважды связанной постановке асимптотически сходится к изотермическому решению.

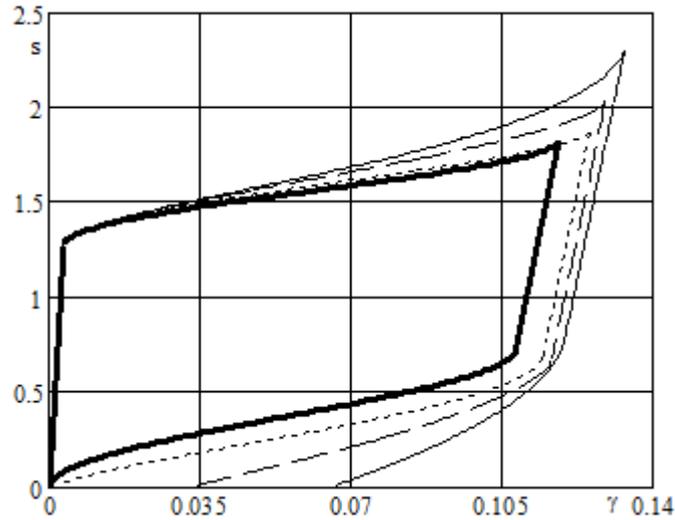


Рисунок 5.9 – Кривые $s - \gamma$.

В заключение данной главы следует отметить, что приведенные здесь решения могут быть успешно использованы при проектировании устройств рассеивания, поглощения и преобразования энергии.

В ходе решения поставленных задач был выявлен ряд важных с фундаментальной точки положений, определяющих термомеханический отклик СПФ при кручении в режиме сверхупругости.

5.3. Выводы.

1. При рассмотрении изотермической задачи кручения тонкостенных трубок из СПФ установлено, что повышение начальной температуры трубки T_0 приводит к росту напряжений начала и окончания фазовых превращений, при этом величина накапливаемой за процесс активного нагружения фазово-структурной деформации не существенно зависит от значения T_0 .

2. В случае дважды связанной задачи, максимальный уровень напряжений на момент окончания ПМП наблюдается при использовании модели №4, которая наиболее полно отражает особенности термомеханического поведения СПФ.

3. Установлено, что переход к нелинейной зависимости для аппроксимации диаграммы фазового перехода значительно снижает значение температуры трубки из СПФ в процессе активного нагружения. Однако, конечное значение температуры на момент окончания ПМП весьма близко для всех четырех рассматриваемых моделей.

4. В ходе решения установлено, что повышение скорости нагружения трубки из СПФ приводит к росту напряжений на момент окончания ПМП, а также к снижению остаточных фазово-структурных деформаций в виду существенного нагрева трубки в процессе активного нагружения.

5. Отмечено, что вариация коэффициента теплообмена с окружающей средой в рамках диапазона, соответствующего свободной конвекции с воздухом незначительно влияет на получаемые при решении результаты.

6. Отмечено, что повышение температуры окружающей среды и как следствие повышения начальной температуры трубки из СПФ приводит к росту напряжений начала и окончания фазовых превращений. Подобная тенденция отмечалась и на случай изотермической задачи. Кроме этого, повышение начальной температуры трубки приводит к уменьшению остаточных фазово-структурных деформаций на момент полной разгрузки до нуля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения диссертационной работы проработаны следующие основные позиции:

1. Выполнена модификация трехмерных определяющих соотношений модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях на случай кручения.

2. Разработан алгоритм решения задачи об изотермическом нагружении стержней и трубок из СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Получено аналитическое решение отмеченной задачи.

3. Установлено, что учет упругих деформаций существенен при рассмотрении задач о мартенситной неупругости. Их не учет приводит к неверным количественным оценкам НДС образца из СПФ. Отмечено, что влияние вариации параметра σ_0 при одинаковых значениях α не велико, так как оно определяется только упругими деформациями.

4. Уменьшение толщины толстостенных трубок из СПФ приводит к уменьшению величины потребного крутящего момента для создания необходимого уровня крутки, при этом данная зависимость является нелинейной.

5. При рассмотрении задачи о мартенситной неупругости в стержнях из СПФ установлено, что эпюры напряжений $s - \xi$, кривые $s - \gamma$, а также зависимости $\theta^1 - \mu$, полученные для различных значений σ_0 и одинаковых α пересекаются в одной точке, соответствующей напряжениям $s = 1$, то есть действующая интенсивность напряжений $\sigma_i = \sigma_0$.

6. Разработан алгоритм решения задач о прямом и обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении для стержня/трубки из СПФ, протекающем под действием постоянного крутящего момента в однократно связанной термомеханической постановке. Получено численное решение рассматриваемых задач.

7. При решении задачи о ПМП в тонкостенной трубки из СПФ при постоянном крутящем моменте $M = const$ установлено, что зависимость полных деформаций системы γ от параметра фазового состава q является линейной функцией q .

8. При рассмотрении задачи о ПМП в толстостенных трубках и стержнях из СПФ при $M = const$ отмечается перераспределение напряжений по сечению образца из СПФ в процессе охлаждения. При этом наблюдается существенная перегрузка внешних слоев, при разгрузке внутренних. Данное явление тем интенсивнее, чем выше величина момента, под действием которого происходит ПМП.

9. Установлено, что структурный переход значительно влияет на характер распределения напряжений по сечению образца из СПФ. При этом структурный переход значительно

разгружает внутреннюю часть сечения. Кроме этого учет структурного перехода повышает величину накапливаемой за процесс охлаждения деформации.

10. Показано, что для больших значений крутящего момента внутренняя часть сечения стержня из СПФ не включается в работу и термомеханической отклик трубки с отношением радиусов $J = 0,5$ весьма близок к отклику стержня.

11. На основе отмеченного в пункте 3 алгоритма, решена краевая задача об обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении для стержня сплошного круглого поперечного сечения из СПФ, находящегося под действием переменного крутящего момента на случай ОМП с контртелом и в заневоленном состоянии. Проведенное численное моделирование отмеченных задач.

12. При рассмотрении задачи об ОМП в толстостенных трубках и стержнях из СПФ при $M = const$ установлено, что максимальный уровень напряжений наблюдается не в конечной точке процесса, как это традиционно считается, а в момент, когда в сечении образца из СПФ можно выделить две области: аустенитную и зону протекания фазово-структурного превращения.

13. В процессе нагрева образца из СПФ наблюдается перегрузка внутренних слоев стержня. При этом учет структурного перехода значительно снижает уровень напряжений в сечении. Традиционно в задачах об ОМП структурный переход не учитывался. При это его не учет приведет к неверным оценкам температуры окончания ОМП.

14. При рассмотрении задачи об ОМП в заневоленном состоянии и с упругим контртелом установлено, что чем жестче контртело на кручение (заневоленное состояние можно трактовать как бесконечно жесткое контртело) уменьшается снимаемая фазово-структурная деформация в процессе нагрева. При этом интенсивно растет величина крутящего момента, что приводит к возникновению реактивных напряжений в сечении образца из СПФ.

15. Разработан алгоритм и получено аналитическое решение задачи о сверхупругом поведении тонкостенных трубок из СПФ при изотермическом кручении в режиме сверхупругости.

16. Выполнена разработка алгоритма решения дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из СПФ в режиме сверхупругости. Проведено численное моделирование, учитывающие выделение/поглощение латентного тепла фазового перехода, диссипативные свойства СПФ, а также конвективный теплообмен с окружающей средой.

17. Показано, что в процессе ПМП выделение латентного тепла ФП, а также диссипативные эффекты приводят к существенному росту температуры трубки. При этом переход к нелинейной зависимости для аппроксимации диаграммы ФП значительно снижает

значение температуры в процессе протекания ПМП по отношению к аналогичным линейным соотношениям.

18. Установлено, что повышение скорости нагружения приводит к увеличению величины напряжений на момент окончания ПМП, а также снижению остаточных фазово-структурных деформаций. При этом максимальный уровень напряжений на момент окончания ПМП наблюдается при адиабатическом решении. Кроме этого, в данном случае кривая сверхупругости получается замкнутой, однако диссипация энергии при этом минимальна.

19. Отмечено, что повышение начальной температуры T_0 приводит к увеличению напряжений начала и окончания фазовых превращений и снижению остаточных фазово-структурных деформаций.

Проведенные в рамках диссертационной работы изыскания позволили получить важные с фундаментальной и прикладной точек зрения результаты, которые в дальнейшем могут быть успешно использованы при проектировании устройств генерации силовых воздействий, преобразования или поглощения энергии, с активным элементом из СПФ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О термоупругом равновесии при мартенситном превращении // ДАН СССР. 1949. Т.66. Вып. 2. С. 211-215.
2. Беляев С.П., Волков А.Е., Ермолаев В.А., Каменцева З.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Мозгунов В.Ф., Разов А.И., Хайров Р.Ю. Материалы с эффектом памяти формы. Т.4. – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – 268 с.
3. Лихачев В.А. Кузьмин С.Л. Каменева З.П. Эффект памяти формы. – Л.: Изд. ЛГУ, 1987. – 216 с.
4. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck, Delaey L. Some results on the detwinning process in NiTi shape memory alloys // Scripta Materialia. 1999. Vol. 41. № 12. pp. 1273-1281.
5. Icardi U., Ferrero L. Preliminary study of and adaptive wing with shape memory alloy torsion actuators // Materials and Design. 2009. Vol. 30. № 10. pp. 4200-4210.
6. Мовчан А.А., Ньюнт С., Семенов В.Н. Проектирование силового двигателя крутящего момента из сплава с памятью формы // Труды ЦАГИ. 2004. Вып.2664. С. 220-230.
7. Mabe J., Ruggeri R., Rosenzweig E., Yu C-J. NiTiNol performance characterization and rotary actuator desing. 2004. Smart Structures and Materials 2004: Industrial and Commercial Application of Smart Structures Technologies. Proceedings of SPIE V. 5388 (SPIE, Bellingham, WA, 2004).
8. Yates S., Kalamkarov L. Experimental study of helical shape memory alloy actuators: effects of design and operating parameters on thermal transients and stroke // Metals 2013. Vol.3. №1. pp. 123-149.
9. Dolce M., Cardone D. Mechanical behavior of shape memory alloys for seismic applications 1. Martensite and austenite NiTi bars subjected to torsion // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43. № 11. pp. 2631-2656.
10. Кравченко Ю.Д., Лихачев В.А., Разов А.И., Трусков С.Н., Чернявский А.Г. Опыт применения сплавов с эффектом памяти формы при сооружении крупногабаритных конструкций в открытом космосе // ЖТФ. 1996. Т.66. №11. С.153-161.
11. Вяххи И.Э., Гончарук П.Д., Иванькин М.А., Лаврухин Г.Н., Мовчан А.А., Семёнов В.Н., Чевагин А.Ф. // Технические решения для адаптивных авиационных конструкций с использованием сплавов с памятью формы Ученые записки ЦАГИ. 2007. Т. XXXVIII. № 3-4. С. 158-168.
12. Крахин О. И., Кузнецов А. П., Косов М. Г. Сплавы с памятью. Основы проектирования конструкций: учебник под ред. проф., д.т.н. О. И. Крахина. – Старый Оскол: ТНТ, 2011. – 396 с.

13. Крахин О. И., Кузнецов А. П., Косов М. Г., Сплавы с памятью. Технология и применение: учебник. – Старый Оскол: ТНТ, 2011. – 332 с.
14. Крахин О.И., Глезерман Е.Г., Белотелов Ю.А. Некоторые вопросы проектирования и расчета приводов одноразового действия// Современные проблемы динамики машин и их синтез. – М. МАИ, 1985.
15. Крахин О.И. Основы расчета приводов из материалов с эффектом памяти формы. Сб. "Прочность и жесткость машиностроительных конструкций". – М., 1986, С. 150-159.
16. Крахин О.И., Хайков П.Г., Аверьянов М.П. Расчет термомеханических двигателей // Вестник МАИ. 1994. Т. 1. № 2. С. 25-29.
17. Крахин О.И., Резников Д.И. Метод конечных элементов для расчета конструкций из сплавов с памятью.// В кн.: Материалы с эффектом памяти формы. Сборник докладов XXXI семинара "Актуальные проблемы прочности". 13-17 ноября 1995 г. Санкт-Петербург. Ч. III - с. 29-33.
18. Крахин О.И., Смирнов А.А. Система термокомпенсации космической фазированной антенной решетки (ФАР)// Тезисы докладов III Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". М. "ЛАТМЭС". МГАТУ. 1997. С. 69-70.
19. Lahoz R., Puertolas J. Training and two-way shape memory in NiTi alloys: influence on thermal parameters // Journal of Alloys and Compounds. 2004. Vol. 381. № 1-2. pp. 130-136.
20. Wu D., Sun G., Wu J. The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol // Materials Letters. 2003. Vol. 57. № 7. pp. 1334-1338.
21. Мовчан А.А. Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы // ПМТФ. 1998. Т. 39. №1. С. 87 - 97.
22. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МГТ. 1998. №1. С. 79-90.
23. Мовчан А.А., Казарина С.А. Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15. № 1. С. 105-116.
24. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2015. Том 157. Книга 3.
25. Ооцука К., Симидзу К., Судзуки Ю., Сэкигути Ю., Тадаки Ц., Хомма Т., Миядзаки С. Под редакцией Фанукабо Х. Сплавы с эффектом памяти формы. Перевод с японского. – М., 1990. – 218 с.

26. Prahlad H., Chopra I. Modeling and experimental characterization of sma torsional actuator // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2007. Vol. 18. № 29. pp. 29-38.
27. Brinson L.C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 1993. Vol. 4. № 2. pp. 229-242.
28. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A. Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars // *Mechanics of Materials*. 2010. Vol. 42. № 8. pp. 797-806.
29. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A, Gall K. Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2012. Vol. 47. № 3. pp. 118-128.
30. Boyd J.G., Lagoudas D.C. A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy // *International Journal of Plasticity*. 1996. Vol. 12. № 6, pp. 805-842.
31. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. Numerical implementation of shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000. Vol. 47. № 6. pp. 1123-1168.
32. Andani T.M., Alipour A., Eshghinejad A., Elahinia M. Modifying the torque-angle behavior of rotary shape memory alloy actuators through axial loading: a semi-analytical study of combined tension-torsion behavior // *Journal of Intelligent Material Systems and Structure*. 2013. Vol. 24. № 12. pp. 1524-1535.
33. Andani T.M., Elahinia M. A rate dependent tension-torsion constitutive model for superelastic nitinol under non-proportional loading; a departure from von Mises equivalency // *Smart Materials and Structure*. 2014. Vol. 23. № 1. pp. 150012-15026.
34. Lagoudas D., Hartl D., Chemisky Y., Machado L., Popov P. Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys // *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 32-33. pp. 155-183.
35. Peng X., Yang Y., Huang S. A comprehensive description for shape memory alloys with two-phase constitutive model // *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. № 38-39. pp. 6925-40.
36. Wang Y.F., Yue Z.F., Wang J. Experimental and numerical study of the superelastic behavior on NiTi thin-walled tube under biaxial loading // *Computational Materials Science*. 2007. Vol. 40. № 2. pp. 246-254.
37. Thamburaja P., Anand L. Superelastic behavior on tension-torsion of an initially textured Ti-Ni shape-memory alloy // *International Journal of Plasticity*. 2002. Vol. 18. № 11. pp. 1607-1617.

38. Lim T.J., McDowell D.L. Cyclic thermomechanical behavior of a polycrystalline pseudoelastic shape memory alloy // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2000. Vol.50. № 3. pp. 651-676.
39. Thamburaja P., Anand L. Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2001. Vol.49. № 4. pp. 709-737.
40. Chapman C., Eshghinejad A., Elahinia M. Torsional behavior of NiTi wires and tubes: modeling and experimentation // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2011. Vol. 22. № 11. pp. 1239-1248.
41. Tabesh M., Elahnia M., Pourazady M. 2009. Modeling NiTi superelastic shape memory antagonistic beams: a finite element analysis , in: *Proceedings of the ASME 2009 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems SMASIS2009*, 21-23 September, Oxnard, CA, Paper no. SMASIS2009-1365, pp. 557-566.
42. Lagoudas D.C., Bo Z., Qidwai M.A., Entchev P.B. 2003. SMA UM: User Material Subroutine for Thermomechanical Constitutive Model of Shape Memory Alloys, Texas A&M University, College Station, TX.
43. Mehrabi R., Kadkhodaei M., Taheri M., Elahinia M. Shape memory effect behavior of niti torque tubes in torsion // *Proceedings of the ASME 2012 Conference of Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*. September 19-21, 2012 Stone Mountain, Georgia, USA.
44. Kadkhodaei M., Salimi M., Rajapakse R. Mahzoon M. Microplane modeling of shape memory alloys // *Physica Scripta*. 2008. T129. pp. 329-334.
45. Kadkhodaei M., Salimi M., Rajapakse R. Mahzoon M. Modeling of shape memory alloys based on microplane theory // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2008. Vol. 19. № 5. pp. 541-550.
46. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A. A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs // *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48. № 3-4. pp. 611-624.
47. Toi Y., Lee J., Taya M. Finite element analysis of superelastic, large deformation behavior of shape memory alloy helical springs // *Computers and Structures*. 2004. Vol. 82. № 20-21. pp. 1685-1693.
48. Brinson L. Lammering R. Finite element analysis of the behavior of shape memory alloys and their applications // *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. № 23. pp. 3261-3280.
- 49(50). Tobushi H., Tanaka K. Deformation of a shape memory alloy helical spring // *The Japan Society of Mechanical Engineers*. 1991. Vol. 34. № 1. pp. 83-89.

50. Aguiar R., Savi M., Pacheco P. Experimental and numerical investigations of shape memory alloy helical springs // *Smart Material and Structures*. 2010. Vol. 19. № 2. 9 pp.
51. Sato Y., Tanaka K., Kobayashi S. Pseudoelasticity and shape memory effect associated with stress-induced martensitic transformation // *Transactions of the Japan Society for aeronautical and space sciences*. 1985. Vol. 28. № 81. p. 150.
52. Tanaka K. A thermomechanical sketch of shape memory effect // *Res. Mechanica*. 1986. Vol. 18. pp. 251-263.
53. Tanaka K., Kobayashi S, Sato Y. Thermomechanics of transformation pseudoelasticity and shape memory effect in alloys // *International Journal of Plasticity*. 1986. Vol. 2. №1. pp. 59-72.
54. Tanaka K., Tobushi H., Iwanaga H. Continuum mechanical approach to thermomechanical behavior of TiNi alloys // *Proc. 31st Jpn. Cong. Mats. Res.* 1988, p. 51.
55. Tanaka K. Inaba A., Tobushi H., Kimura K. Analysis of recovery stress in shape memory alloys // *Advances in Plasticity*. 1989. pp. 361.
56. Fremond M. Matériaux à Mémoire de Forme. // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1987. Vol. 34. s.II. № 7. pp. 239-244
57. Fremond M. Shape memory alloy: a thermomechanical macroscopic theory // *CISM Courses and Lectures*. Springer-Verlag.
58. Follador M., Cianchetti M., Arienti A., Laschi C. A general method for the design and fabrication of shape memory alloy active spring actuators // *Smart Material and Structures*. 2012. Vol. 21. № 11. 115029 (10 pp.).
59. Khan E., Srinivasan S. A new approach to the design of helical shape memory alloy spring actuators // *Smart Material Research*. 2011. Vol. 2011. 5 pp.
60. Spinella I., Dragoni E. Analysis and design of hollow helical springs for shape memory actuators // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2010. Vol. 21. № 2. pp. 185-199.
61. Stebner A., Padula S., Noebe R., Lerch B., Quinn D. Development, characterization, and design considerations of Ni_{19.5}Ti_{50.5}Pd₂₅Pt₅ high-temperature shape memory alloy helical actuators // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2009. Vol. 20. № 17. pp. 2107-2126.
62. An S-M., Ryu J., Cho M., Cho K-L. Engineering design framework for a shape memory alloy helical coil spring actuator using a static two-state model // *Smart Material and Structures*. 2012. Vol. 21. № 5. 055009. 16 pp.
63. Kim S., Hawkes E., Cho K., Jolda M., Foley J., Wood R. Micro artificial muscle fiber using NiTi spring for soft robotics // *The 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems October 11-15, 2009 St. Louis, USA*, pp. 2228-2234.
64. Jee K., Han J., Kim Y., Lee D., Jang W. New method for improving properties of SMA coil springs // *The European Physical Journal Special Topics*. 2008. Vol. 158. № 1. pp. 261-266.

65. Costanza G., Tata M., Calisti C. Nitinol one-way shape memory springs: thermomechanical characterization and actuator design // *Sensors and Actuators A; Physical*. 2010. Vol. 157. № 1. pp. 113-117.
66. Aguiar R., Neto W., Savi M., Pacheco P. Shape memory alloy helical springs performance: modeling and experimental analysis // *Materials Science Forum, Functional and Structural Materials II*. 2013. Vol. 758. pp. 147-156.
67. Baz A., Iman K., Mccooy J. The dynamics of helical shape memory actuators // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 1990. Vol. 1. № 1. pp. 105-133.
68. Predki W., Klonne M., Knopik A. Cyclic torsional loading of pseudoelastic NiTi shape memory alloys: Damping and fatigue failure // *Materials Science and Engineering: A*. 2006. Vol. 417. № 1-2. pp. 182-189.
69. Lim J., McDowell D. Mechanical Behavior of and Ni-Ti shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading // *Journal of Engineering Materials and Technologies*. 1999. Vol. 121. № 1. pp. 9-18.
70. LExcellent C., Rejzner J. Modeling of the strain rate effect, creep and relaxation of a Ni-Ti shape memory alloy under tension (compression)-torsional proportional loading in the pseudoelastic range // *Smart Materials and Structures*. 2000. Vol. 9. № 5. pp. 613-621.
71. McNaney J., Imbeni V., Jung Y., Papadopoulos P., Ritchie R. An experimental study of the superelastic effect in a shape-memory Nitinol alloy under biaxial loading // *Mechanics of Materials*. 2003. Vol. 35. № 10. pp. 969-986.
72. Sun Q., Li Z. Phase transformation in superelastic NiTi polycrystalline micro-tubes under tension and torsion-from localization to homogeneous deformation // *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. № 13-14. pp. 3797-3809.
73. LExcellent C., Rogueda C. Some experimental results on proportional and nonproportional tensile-torsional loading test on CuZnAl shape memory alloys and modeling // *5th International Conference on Biaxial/Multiaxial fatigue and fracture, Cracow, Poland, 1997*, pp. 641-656.
74. Adler Y., Pelton Z., Duering B. On the tensile and torsional properties of pseudoelastic NiTi // *Scripta Metallurgica et Materialia*. 1990. Vol. 24. № 5. pp. 943-947.
75. Wang X., Wang Y., Lu Z., Yue Z. An experimental study of the superelastic behavior in NiTi shape memory alloys under biaxial proportional and non-proportional cyclic loadings // *Mechanics of Materials*. 2010. Vol. 42. № 3. pp. 365-373.
76. Rogueda C., LExcellent C., Bocher L. Experimental study of pseudoelastic behavior of a CuZnAl polycrystalline shape memory alloy under tension-torsion proportional and non-proportional tests // *Archives of Mechanics*. 1996. Vol. 48. № 6. pp. 1025-1047.

77. Davidson F., Liang C. Investigation of torsional shape memory alloy actuators // Proceedings SPIE, Smart Structures and Materials 1996: Smart Structures and Integrated Systems, 672 (May 1, 1996), Vol. 2717. pp.672-682.
78. Liang C., Rogers C. A multi-dimensional constitutive model for shape memory alloys // Journal of Engineering Mathematics. 1992. Vol. 26. №3. pp.429-443.
79. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47-53.
80. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 197-205.
81. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации фазовой диаграммы и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // Журнал прикладной механики и технической физики. 1995. Т. 36. № 2. С. 173-181.
82. Мовчан А.А. Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы. Известия РАН. МТТ // 2000. №6. С. 143-154.
83. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг. Анализ работы пружин из сплава с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. №4. С. 591-600.
84. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Известия РАН. МТТ. 2010. №3. С.118-130.
85. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы // Известия РАН. МТТ. 2010. №6. С. 137-147.
86. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. 2011. №2. С.44-56.
87. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Известия РАН. МТТ. 2014. №1. С. 37-53.
88. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. 2015. №2. С. 78-95.
89. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.

90. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Расчет эффектов памяти методами структурно-аналитической теории // Механика прочности материалов с новыми функциональными свойствами. Рубежное. 1990. С. 25-27.
91. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. – Новосибирск: Наука. 1985. – 229 с.
92. Волков А.Е., Лихачев В.А., Разов А.И. Механика пластичности материалов с фазовыми превращениями // Вестн. ЛГУ. 1984. №19. Вып. 4. С. 30-37.
93. Лихачев В.А., Разов А.И. Принципы построения теории механического поведения материалов, испытывающих фазовые превращения // Пластическая деформация и актуальные проблемы сплавов и порошковых материалов. Томск. 1982. С. 36-37.
94. Разов А.И. Механика материалов с мартенситными превращениями: эксперимент и расчет // Деп. рук. Ред. журн. Вестн. ЛГУ, Мат., мех., астроном. Л., 1984. 20 с. Депонирована в ВИНТИ 31.05.84 № 3556-84.
95. Волков А.Е., Евард М.Е., Курзенева Л.Н., Лихачев В.А., Сахаров В.Ю., Ушаков В.В. Математическое моделирование мартенситной неупругости и эффектов памяти формы // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 11. С. 3 34.
96. Волков А.Е. Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях // Изв. АН Физическая. 2002. Т. №6. №9. С. 1290-1297.
97. Волков А.Е., Сахаров В.Ю. Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы // Известия Академии наук. Серия физическая. 2003. Т. 67. № 6. С. 846 852.
98. Беляев Ф.С., Волков А.Е. Евард М.Е. Микроструктурное моделирование обратимой и необратимой деформации при циклическом термомеханическом нагружении никелида титана // Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и Технические Науки. 2013. Т. 18. №4-2. С. 2025-2026
99. Малыгин Г.А. Кинетическая модель эффектов сверхупругой деформации и памяти формы при мартенситных превращениях // Физ. тв. тела. 1993. Т.35. №1. С. 127-137.
100. Малыгин Г.А. О кинетике бездиффузионных фазовых превращений мартенситного типа на мезоскопическом уровне // Физ. тв. тела. 1993. Т. 35. №11. С. 2993-3002.
101. Малыгин Г.А. К теории размытых мартенситных переходов в сегнетоэластиках и в сплавах с памятью формы // Физ. тв. тела. 1994. Т.36. №5. С. 1489-1501.
102. Малыгин Г.А. Влияние структурных факторов и внешних воздействий на кинетику мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Журнал технической физики. 1996. Т. 66. № 11. С. 112-123.

103. Абдрахманов С.А. Деформация материалов с памятью формы при термосиловом воздействии. – Бишкек: ИЛИМ.1991. – 117 с.
104. Абдрахманов С.А. О теории деформации материалов, обладающих эффектом памяти формы // Изв. АН Кирг. ССР. Сер. естеств. и техн. Науки. 1988. № 4.
105. Абдрахманов С.А., Дюшекеев К.Д., Новикова Е.Ю. О реактивном давлении диска с памятью формы // Материалы со сложными функционально-механическими свойствами. Компьютерное конструирование. Ч. 2. Новгород. 1994. С. 136-139.
106. Абдрахманов С.А., Дюшекеев К.Д., Новикова Е.Ю. Расчет реактивного усилия кольца из материала с памятью формы с учетом упрочнения // Материалы со сложными функционально-механическими свойствами. Компьютерное моделирование. Ч. 2. Новгород. 1994. С. 140-143.
107. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Relai A., Sohrabpour S. A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings // International Journal of Plasticity. 2010. Vol. 26. № 7. pp. 976-991.
108. Liang C., Rogers C. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // Journal of Intelligent Material Systems and Structure. 1990. Vol. 1. № 2. pp. 207-234.
109. Leclercq S., Lexcellent C. A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1996. Vol. 44. № 6. pp. 953-980.
110. Lexcellent C., Boubakar M., Bouvet C., Calloch. About modeling the shape memory alloy behavior based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions // International Journal of Solids and Structure. 2006. Vol. 43. № 3-4. pp. 613-626.
111. Tanaka K. A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys // Journal of Pressure Vessel Technology. 1990. Vol. 112. № 2. pp. 158-163.
112. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформация и разрушение материалов. 2009. №8. С. 2-9.
113. Мовчан А.А., Ньюнт Со. Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса // Журнал прикладной механики и технической физики. 2006. Т.47. № 4. С. 98-103.
114. Витайкин Е.З., Литвин Д.Ф., Макушев С.Ю., Удовенко В.А. Структурный механизм эффекта памяти формы в сплавах // ДАН СССР 1976. Т. 229. № 3. С. 597-600.

115. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз. 1963. – 686 с.
116. Nishimura F., Watanabe N., Watanabe T., Tanaka K. Transformation conditions in an Fe-based shape memory alloy under tensile – torsional loads: Martensite start surface and austenite start/finish planes // *Materials Science and Engineering Series A*. 1999. Vol. 264. no. 1–2. pp. 232–244.
117. Мовчан А.А., Давыдов В.В. Инкрементальные определяющие соотношения для объемной доли мартенситной фазы в сплавах с памятью формы // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2010. Т. 16. № 5. С. 653-661.
118. Биргер И. А. Остаточные напряжения. – М.: Машгиз. 1963. –232 с.
19. Сапожников С.З., Китанин Э.Л. Техническая термодинамика и теплопередача: Учебник для вузов. – СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1999. – 319 с.
120. Mirzaeifar R., Desroches R., Yavari A. Analysis of the rate-dependent coupled thermo-mechanical response of shape memory alloy bars and wires in tension // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2011. Vol. 23. №. 4. pp. 363-385.