

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



До Чунг Бо

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЯ
ДЕФОРМИРУЕМОГО СПУТНИКА В ЦЕНТРАЛЬНОМ
ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СИЛ**

Специальность: 01.02.01 – “Теоретическая механика”

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

СКОРОБОГАТЫХ Игорь Владимирович

Москва - 2016

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. Необходимые сведения из механики деформируемых твёрдых тел.....	14
§ 1.1. Вариационный принцип Даламбера - Лагранжа.....	14
§ 1.2. Функционалы внутренних упругих и диссипативных сил.....	16
§ 1.3. Малые деформации. Функционалы потенциальной энергии малых деформаций.....	20
§ 1.4. Модальный подход.....	24
§ 1.5. Уравнения Лагранжа, Гамильтона и Рауса.....	26
ГЛАВА 2. Эволюция вращения спутника с полусферической антенной, движущегося по эллиптической орбите.....	32
§ 2.1. Постановка задачи.....	32
§ 2.2. Функционал потенциальной энергии гравитационного поля.....	37
§ 2.3. Уравнения для модальных переменных.....	49
§ 2.4. Переменные Андуайе и уравнения Рауса.....	51
§ 2.5. Быстрая эволюция вращательного движения спутников.....	59
§ 2.6. Медленная диссипативная эволюция.....	63

ГЛАВА 3. Быстрые эволюционные процессы в задаче о поступательно-вращательном движении деформируемого спутника.....	75
§ 3.1. Постановка задачи.....	75
§ 3.2. Уравнения движения.....	82
§ 3.3. Быстрая эволюция долготы восходящего узла и аргумента широты перигея.....	91
§ 3.4. Эволюция остальных переменных.....	93
ГЛАВА 4. Медленная эволюция в задаче о поступательно-вращательном движении деформируемого спутника.....	94
§ 4.1. Гравитационные приливы.....	94
§ 4.2. Усреднённые уравнения поступательно - вращательного движения.....	98
ГЛАВА 5. О частотах лунно-солнечных приливов деформируемой Земли.....	102
§ 5.1. Постановка задачи.....	102
§ 5.2. Вычисление деформаций в мантии Земли	107
§ 5.3. Вычисление частот приливов Лунно-Солнечных.....	110
Заключение.....	113
Список литературы.....	115

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации изучаются задачи механики, рассматривающие вопросы эволюции вращательного и поступательно-вращательного движения деформируемого спутника, а также изучающие деформации Земли под действием приливных сил со стороны Луны и Солнца.

Первая глава является вспомогательной. В ней содержатся сведения, используемые в последующих главах. В §1.1 на основе работ [5,11-13,15,26,31] излагается обобщение вариационных принципов Гамильтона-Остроградского и Даламбера-Лагранжа на механику деформируемого тела. Принцип Даламбера – Лагранжа применяется для получения уравнений для упругих перемещений в большинстве задач данной диссертации. В §1.2 изложен подход к построению функционалов внутренних упругих и диссипативных сил в деформируемых телах. В §1.3 рассматривается модель линейной теории малых деформаций, а также модель линейной теории вязкоупругости. Здесь же кратко рассмотрен вопрос выбора связанной системы координат. §1.4 посвящен модальному подходу при получении уравнений динамики. §1.5 касается обобщения классических уравнений Лагранжа, Гамильтона и Рауса на механику деформируемых систем. Уравнения Рауса далее применяются в главах 2, 3 и 4 диссертации.

Вторая глава посвящена исследованию задачи об эволюции вращательных движений относительно центра масс спутника, движущегося по неизменяющейся эллиптической орбите вокруг притягивающего центра. Спутник предполагается осесимметричным, состоящим из абсолютно твердой и вязкоупругой частей. Вязкоупругая часть представляет собой

полусферическую антенну, с осью симметрии в недеформированном состоянии, совпадающей с осью симметрии твердой части. В §2.1 дается постановка задачи. В §2.2 получено приближенное выражение для гравитационного потенциала, далее используемое в данной главе. В §2.3 на основе метода разделения движений В.Г.Вильке [18] из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа выводятся уравнения для модальных переменных. Там же приводится приближенное решение этой системы уравнений. В §2.4 для получения уравнений вращения спутника как целого применяются уравнения Рауса и канонические переменные Андуайе. Эти уравнения рассматриваются как возмущенные по отношению к уравнениям движения абсолютно твердого тела (когда перемещения $\mathbf{u}=0$). Возмущающие члены функционала Рауса появляются из-за деформаций, вызванных силами инерции, а также приливных деформаций, вызванных силами гравитации притягивающего центра. При первоначально быстром вращении спутника силы инерции оказываются существенно больше сил гравитации, что позволяет разбить эволюцию вращений на два этапа. Первый этап – быстрой эволюции вследствие деформаций, вызванных силами инерции, второй – медленной вследствие приливных деформаций. Параграф 5 рассматривает эффекты быстрой эволюции. Сначала в нем выводятся уравнения, получающиеся из уравнений Рауса явной подстановкой выражений для перемещений. Затем для упрощения уравнений проводится операция усреднения по быстрой переменной φ_{10} (угол поворота вокруг оси симметрии). В результате оказывается, что быстрая эволюция приводит к тому, что вектор кинетического момента будет стремиться занять положение вдоль оси симметрии спутника (если осевой момент инерции больше

экваториального), либо будет стремиться попасть в экваториальную плоскость эллипсоида инерции (если осевой момент инерции меньше экваториального). Параграф 6 рассматривает медленную диссипативную эволюцию. Здесь предполагается, что быстрая эволюция уже завершилась (в случае, когда осевой момент инерции больше экваториального). Далее выводятся уравнения движения для данного случая. Для упрощения уравнений последовательно проводится три операции усреднения по быстрым переменным φ_{20} (угол поворота оси симметрии спутника вокруг вектора кинетического момента), $\tau = \omega_0 t$ (орбитальное движение), и φ_3 (угол прецессии кинетического момента относительно нормали к орбите). В итоге получаем, что осевое вращение замедляется, растет угол δ_1 между нормалью к орбите (если вначале он острый) и вектором кинетического момента, то есть вектор кинетического момента наклоняется к плоскости орбиты, если же угол δ_1 тупой, то наоборот он уменьшается. Определено стационарное значение угла δ_1 .

Третья глава. Здесь рассматривается задача об эволюции поступательно-вращательного движения вязкоупругого спутника, имеющего форму шара и движущегося вокруг притягивающего центра. В первом параграфе дается постановка задачи и выводится выражение для функционала Рауса. В следующем параграфе получены уравнения для упругих перемещений в виде уравнений в частных производных. Используется известное решение этого уравнения [11,12], представляющее вектор упругих перемещений в виде суммы трех слагаемых - осесимметричных деформаций, сферически-симметричных и

гравитационных приливов. В §3 данной главы исследуется влияние только осесимметричных деформаций. Показывается, что осесимметричные деформации приводят к быстрой эволюции – прецессии плоскости орбиты, и в плоскости орбиты – вращению ее перицентра. Кроме того, происходят колебания орбитального и собственного кинетического моментов шара в противофазе друг другу, а также прецессия оси вращения шара. Далее, в §3.4 устанавливается, что сферически-симметричные деформации дадут вклад только в угловую скорость вращения перицентра орбиты.

Четвертая глава посвящена продолжению исследования главы 3, в ней рассмотрено влияние на эволюцию третьего члена в выражении вектора упругих перемещений, приведенного в главе 3, а именно, отвечающего за гравитационные приливы. В первом параграфе главы получены члены функционала Рауса, получающиеся вследствие гравитационных приливов. В следующем параграфе получены уравнения, учитывающие все виды деформаций. Показано, что стационарным движением будет движение по круговой орбите с угловой скоростью спутника равной орбитальной угловой скорости, при этом вектор кинетического момента будет ортогонален плоскости орбиты.

Пятая глава. Здесь ставится задача о вычислении частот приливов на Земле вследствие влияния Луны и Солнца. Земля представляется как осесимметричное тело, состоящее из твердого ядра и вязкоупругой мантии. В первом параграфе приводится постановка задачи. Во втором параграфе на основе модального подхода выводятся и приближенно решаются уравнения для модальных переменных. В параграфе 3 на основе уравнений для

модальных переменных дается анализ, позволяющий приближенно определить значения частот приливных деформаций. Полученные значения частот в согласуются с известными, что говорит об адекватности используемой модели.

В заключении перечислены основные результаты работы.

Актуальность темы исследования. Вопросы эволюции поступательного и вращательного движений космического объектов (естественных и искусственных) под действием гравитационно-приливных сил ранее исследовались в работах Дарвина [24], Манка и Макдональда [37], Голдрайха и Пила [23], Белецкого [3,4], Вильке [7-9, 11-21], Маркова [1,25,39-41], Маркеева [38] и других авторов [46,53]. Теоретическое исследование движения сложных механических систем – достаточно трудная математическая задача. Поэтому научный и практический интерес представляет решение модельных задач, позволяющих понять характерные закономерности движения сложных многокомпонентных тел и конструкций, т.е. систем, состоящих из твердых тел, материальных точек, а также звеньев с распределенными параметрами, для которых процессы деформирования обратимы и существует потенциальная энергия упругих деформаций.

Актуальной научно-технической задачей является разработка и создание многофункциональной космической солнечной энергостанции (КСЭС) с высокоточной ориентацией, обеспечивающей все возрастающее энергопотребление на Земле и в космосе. В крупногабаритных системах, которой является КСЭС имеет место деформируемость ее элементов. Подобная математическая модель рассматривается в данной диссертации.

Цели и задачи диссертационной работы состоят в изучении эволюции вращательного движения вязкоупругого спутника, движущегося по эллиптической орбите вокруг притягивающего центра, относительно его центра масс, а также эволюции его поступательно-вращательного движения; кроме того использующаяся в предыдущих задачах модель осесимметричного вязкоупругого спутника применена для исследования Лунных и Солнечных приливов на Земле.

Научная новизна:

1. Изучена эволюции вращений относительно центра масс осесимметричного спутника, состоящего из абсолютно твердой части и вязкоупругой полусферической антенны; показано, что эволюция может быть разбита на два этапа – быструю и медленную. Показано, что быстрая эволюция вращений относительно центра масс заключается в том, что вектор кинетического момента расположится вдоль оси симметрии спутника, (в случае, если осевой момент инерции больше экваториального), и в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (в случае, если экваториальный момент инерции больше осевого).
2. Показано, что медленная эволюция заключается в замедлении осевого вращения, наклонении вектора кинетического момента к плоскости орбиты. Найдены стационарные значения углов отклонения вектора кинетического момента от нормали к плоскости орбиты и исследована их устойчивость.

3. В задаче о движении вязкоупругого шарообразного спутника в поле притягивающего центра на основе решения уравнений квазистатических деформаций, получен эффект быстрой эволюции – прецессия плоскости орбиты спутника и вращение перицентра орбиты в ее плоскости.
4. Найдено стационарное решение задачи – орбита является круговой, вектор кинетического момента ортогонален плоскости орбиты и угловая скорость орбитального движения совпадает с угловой скоростью спутника.
5. На основе модели деформируемой Земли, состоящей из абсолютно твердого ядра и вязкоупругой мантии, получены уравнения для упругих перемещений, вызванных гравитацией Луны и Солнца, и найдены приближенные значения частот приливов.

Теоретическая и практическая значимость:

В работе исследована задача об эволюции вращений спутника с вязкоупругой полусферической антенной на эллиптической орбите. Полученные результаты предсказывают характерные черты эволюции движения подобных спутников. Предложенная модель может различным образом усложняться, отражая черты реального устройства спутника, а также может быть использована для численного моделирования. Все это, в конечном итоге, позволяет улучшить точность ориентации спутников.

Вторая задача, рассмотренная в диссертации, является некоторым обобщением первой. В ней рассмотрено поступательно-вращательное движение спутника. Однако здесь спутник моделируется однородным и изотропным

вязкоупругим шаром, что делает модель несколько отличной от первой задачи. Здесь результаты исследования позволяют оценить эволюцию не только вращения вокруг центра масс спутника, но и эволюцию его траектории.

Последняя задача предлагает модель, позволяющую приближенно вычислять приливные деформации Земли, и, на их основе получить значения частот лунно-солнечных приливов. Данная теоретическая модель может явиться основой для более точных численных моделей приливов.

Методология и методы исследования: для получения уравнений движения использовался вариационный принцип Даламбера – Лагранжа, и уравнения Рауса, распространенные на механику сплошных сред, а также общие теоремы механики. Разложение упругих перемещений в ряд по собственным формам позволило свести уравнения для перемещений к счетной, а далее, в некоторых случаях, и к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных переменных. Наличие естественных малых параметров, таких как малая диссипация энергии, сильно различающиеся характерные размеры в механической системе, а также разные характерные времена движений, позволило применить асимптотические методы для исследования полученных уравнений.

Положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что в задаче об эволюции вращений спутника относительно центра масс в результате быстрой эволюции вектор кинетического момента расположится вдоль оси симметрии спутника (если осевой момент инерции больше экваториального) и в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, если наоборот.

2. Установлено, что в результате медленной диссипативной эволюции под действием гравитационно-приливных моментов от притягивающего центра будет происходить замедление быстрого осевого вращения, а вектор кинетического момента будет наклоняться к плоскости орбиты, а в случае обратного вращения переворачиваться в прямое вращение.
3. В задаче о поступательно-вращательном движении шарообразного вязкоупругого спутника, вследствие осесимметричных деформаций, возникающих из-за сил центробежных сил инерции, происходит быстрая эволюция орбиты спутника заключающаяся в прецессии плоскости орбиты (т.е. изменении долготы восходящего узла), а также вращении перицентра орбиты в ее плоскости.
4. Получено, что медленная эволюция спутника, обусловленная гравитационными приливами, приводит орбиту к круговой, при этом вектор кинетического момента спутника становится ортогональным к плоскости орбиты, а угловая скорость вращения стремится к его орбитальной скорости.
5. Найдены приближенные значения частот лунно-солнечных приливов на основе модели деформируемой Земли, состоящей из твердого ядра и вязкоупругой мантии.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность построенных математических моделей и сделанных выводов обеспечена корректной постановкой математических задач, а также согласованностью их с результатами других авторов. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах и научных конференциях.

Публикации. Научные результаты диссертации опубликованы в статьях журналов из списка ВАК [1-3].

Результаты работы докладывались и обсуждались на:

- Международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, 5-9 июля 2013 г.
- Международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, 3-7 июля 2015 г.
- Семинарах кафедры теоретической механики факультета прикладной математики и физики Московского авиационного института, руководимых проф. Б.С. Бардиным и проф. П.С. Красильниковым.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы, и получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Подготовка к публикации проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы 59 наименований. Ее общий объем 120 страниц, из которых 7 занимают рисунки.

ГЛАВА 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

§ 1.1. Вариационный принцип Даламбера - Лагранжа

Известно, что на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского может быть построена вся аналитическая механика систем с конечным числом степеней свободы. Принцип остается верным и для непрерывных систем (сплошных сред), однако появляются дополнительные усложняющие обстоятельства, связанные с тем, что для описания состояния среды помимо механических величин – положений и скоростей точек, необходимы и другие параметры, например, температура и химические характеристики. Тем не менее, в большом числе случаев возможно описание движения сплошной среды независимо от немеханических параметров. Это модели упругих сред, идеальной жидкости и т.д. Принцип Гамильтона – Остроградского [5,10-13,33] часто представляет наиболее естественный способ составления уравнений движения таких систем.

В диссертации будут рассматриваться только такие непрерывные механические системы, а именно деформируемые твёрдые тела, которые могут быть описаны в рамках обобщения классической механики, без привлечения термодинамических процессов [10-13,15].

Механической системой называется множество Ω в евклидовом пространстве E^3 вместе с кольцом измеримых подмножеств множества Ω и

мерой μ , заданной на кольце. При этом $d\mu = \gamma dx$, где функция $\gamma = \gamma(\mathbf{r})$ - плотность тела.

Движение механической системы представляет собой одно-параметрическое отображение множества Ω в евклидово пространство E^3 :

$$g: \Omega \rightarrow E^3, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{r}_0 \in \Omega, \quad t \in R^1,$$

причем параметр t представляет собой время.

Для непрерывных систем принцип Гамильтона – Остроградского записывается в виде [15,33]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - E) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (1.1)$$

Здесь T , E – функционалы кинетической энергии и потенциальной энергии упругих деформаций, δA - элементарная работа внешних сил, вычисленная на соответствующих виртуальных перемещениях. Учитывая определение функционала кинетической энергии как

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{r}}^2 d\mu \quad (1.2)$$

из (1.1) получается принцип Даламбера – Лагранжа:

$$\int_{\Omega} \left(\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{\gamma} \nabla E - \mathbf{f} \right) \delta \mathbf{r} \gamma dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \delta \mathbf{r} d\sigma = 0 \quad (1.3)$$

В (1.3) через \mathbf{f} обозначены массовые, а через \mathbf{F} – поверхностные внешние силы, ∇E - градиент функционала энергии упругих деформаций, $\partial\Omega$ - граница Ω .

§ 1.2. Функционалы внутренних упругих и диссипативных сил

Кратко приведем сведения о принципах построения функционалов внутренних упругих и диссипативных сил в деформируемых системах. Дополнительную информацию и подробное изложение теории упругости можно найти в работах [30-32,34-36,46,51,52,54,56].

Важным признаком, по которому теория упругости выделяется из других теорий деформируемого твердого тела (теория пластичности и др.) является тот факт, что все процессы деформирования по определению обратимы и существует потенциальная энергия упругой деформации.

Пусть тело в недеформированном естественном состоянии занимает область Ω и $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{r} \in \Omega$) - перемещение точек среды при деформациях относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Деформации будем задавать линейным отображением

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= Jd\mathbf{r}, \quad J = \left\| J_{ij} \right\|, \quad J_{ij} = \delta_{ij} + u_{ij}, \\ u_{ij} &= \delta u_i / \delta x_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, δ_{ij} - тензор Кронекера. Отображение (1.4) преобразует окрестность точки \mathbf{r} при деформациях.

Лемма. [12,13,22]. Оператор J представим в виде:

$$J = O_1 \Lambda O_2, \quad O_1, O_2 \in SO(3), \quad \Lambda = \|\lambda_i \delta_{ij}\|, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Здесь O_1, O_2 - ортогональные операторы, принадлежащие группе вращений $SO(3)$ трехмерного евклидова пространства E^3 . При конечных деформациях частицы среды преобразование, описываемое оператором J , состоит из вращения ее как твердого тела, задаваемого матрицей O_2 , растяжения-сжатия (собственно деформации) по трем взаимно ортогональным направлениям (матрица Λ) и вращения как твердого тела (деформированной частицы), задаваемого матрицей O_1 .

Тензор $C = J \cdot J^T$ носит название тензора Коши-Грина, а тензор $\hat{E} = \frac{1}{2}(C - I)$ - тензора конечных деформаций (или Коши). Через I обозначен единичный тензор δ_{ij} .

В теории упругости удельный потенциал упругих деформаций в общем случае неоднородной неизотропной среды задается в виде:

$$\tilde{E} = \tilde{E}(\mathbf{r}, O, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad O \in SO(3), \quad (1.5)$$

где \mathbf{r} – лагранжевы координаты частицы среды (в задачах теории упругости, как правило, требуется найти смещения индивидуальных частиц среды, например, изменение формы внешних границ твердого тела и поэтому используются переменные Лагранжа), $O(\mathbf{r})$ - ориентация репера, связанного с частицей, по отношению к инерциальным осям, λ_i ($i = 1, 2, 3$) - главные удлинения при деформации частицы.

Собственные числа λ_i выражаются через инварианты $I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon$ тензора конечных деформаций

$$\hat{E} = \|\varepsilon_{ij}\|, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji} + \sum_{k=1}^3 u_{ki}u_{kj}),$$

$$I_\varepsilon = tr \|\varepsilon_{ij}\| = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 - 3 \right), \quad (1.6)$$

$$II_\varepsilon = \sum_{i<j}^3 (\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}^2) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i<j}^3 \lambda_i^2 \lambda_j^2 - 2 \sum_{i<j}^3 \lambda_i^2 + 3 \right),$$

$$III_\varepsilon = \det \|\varepsilon_{ij}\| = \frac{1}{8} (\lambda_1^2 - 1)(\lambda_2^2 - 1)(\lambda_3^2 - 1).$$

Из (1.6) следует, что для удельного потенциала упругих деформаций справедливо

$$\hat{E} = \hat{E}(\mathbf{r}, O, I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon) \geq 0,$$

Причем равенство нулю достигается только при $I_\varepsilon = II_\varepsilon = III_\varepsilon = 0$, то есть когда оператор J принадлежит группе вращений трёхмерного пространства.

Потенциальная энергия упругих деформаций среды представляет собой функционал вида

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \tilde{E}(\mathbf{r}, O, u_{ij}) dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3. \quad (1.7)$$

Здесь учтено, что $d\mu = \gamma dx$, где $\gamma(\mathbf{r})$ - плотность тела в естественном состоянии, dx - объём элемента среды.

Далее будем рассматривать только однородные изотропные среды, для которых исключается зависимость удельной потенциальной энергии от ориентации репера и явное вхождение в ее выражение координат точек среды. Тогда (1.7) представится в виде [12,13]:

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \tilde{E}(u_{ij}) dx.$$

Сила взаимодействия между двумя частицами в классической механике имеет вид $\mathbf{F} = \mathbf{F}(|\mathbf{r}|, (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}))\mathbf{r}$, где \mathbf{r} - взаимный радиус-вектор частиц. В случае упругих сил отсутствует второй аргумент функции \mathbf{F} . При рассмотрении напряжений в сплошной среде, возникающих при движении одних элементов среды относительно других (называемых вязкими напряжениями, или напряжениями вязкого трения) остается зависимость только от второго аргумента. Из определения тензора конечных деформаций

$$(d\mathbf{R}, d\mathbf{R}) = ((2\tilde{E} + I)d\mathbf{r}, d\mathbf{r}),$$

и далее

$$(d\dot{\mathbf{R}}, d\mathbf{R}) = (\dot{\tilde{E}}d\mathbf{r}, d\mathbf{r}),$$

То есть диссипация энергии зависит от тензора скоростей деформации $\dot{\tilde{E}}$, точнее от его инвариантов [6,12,13]

$$I_\varepsilon = \sum_{i=1}^3 \dot{\varepsilon}_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{i,m=1}^3 (\delta_{mi} + u_{mi}) \dot{u}_{mi},$$

$$II_{\dot{\varepsilon}} = \sum_{i<j}^3 (\dot{\varepsilon}_{ii} \dot{\varepsilon}_{jj} - \dot{\varepsilon}_{ij}^2), \quad III_\varepsilon = \det \|\dot{\varepsilon}_{ij}\|,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji} + \sum_{m=1}^3 (u_{mi} \dot{u}_{mj} + u_{mj} \dot{u}_{mi})].$$

В случае однородного изотропного тела диссипативный функционал будет иметь вид:

$$D[\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}] = \int_{\Omega} d(i_{ij}, \dot{u}_{ij}) dx \quad (1.8)$$

Функционал (1.8) неотрицателен, инвариантен относительно группы вращений-перемещений трехмерного пространства и обращается в нуль только тогда, когда деформированный объем среды перемещается в пространстве как твердое тело.

§ 1.3. Малые деформации. Функционал потенциальной энергии малых деформаций

Рассмотрим модель линейной теории упругости малых деформаций (около недеформированного состояния). Если вектор перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ незначительно меняется при изменении \mathbf{r} , то частные производные u_{ij} малы и говорят, что имеют место малые деформации. Предполагается, что величины $|u_{ij}|$ порядка малого параметра ε , а $|u_{ij} u_{mn}|$ порядка ε^2 , поэтому

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) + O(\varepsilon^2).$$

Тензор $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji})$ называется линеаризованным тензором деформаций. Функционал потенциальной энергии упругих деформаций принимает вид

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \sum_{i,j,m,n}^3 a_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} dx, \quad (1.9)$$

Причём имеет место неравенство:

$$\tilde{E}(u_{ij}) = c_1 \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}^2, \quad c_1 > 0.$$

Аналогично выписывается диссипативный функционал

$$D[\dot{\mathbf{u}}] = \int_{\Omega} \sum_{i,j,m,n}^3 d_{ijmn} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{mn} dx,$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}). \quad (1.10)$$

В случае однородной изотропной среды в формулах (1.9) и (1.10) коэффициенты a_{ijmn} и d_{ijmn} постоянны, симметричны по первым двум и последним двум индексам, а также по их парам. Соответствующие квадратичные формы положительно определены по переменным ε_{ij} и $\dot{\varepsilon}_{ij}$.

Тогда (1.9) можно переписать так

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \tilde{E} dx, \quad \tilde{E}(u_{ij}) = \bar{\lambda}/2 \left(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} \right)^2 + \bar{\mu} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}^2, \quad (1.11)$$

где $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ - коэффициенты Ламе. Аналогично можно представить и (1.10)

Линеаризованные постановки составляют основу теории упругости в рамках малых деформаций. Для упругого тела перемещения его точек определяются как функции координат при решении линейных уравнений в области недеформированного состояния с линеаризованными граничными условиями. Пусть область Ω , занятая упругим телом в естественном состоянии, имеет границу $\partial\Omega$. Диссипативные силы будем предполагать отсутствующими. Уравнения движения тела относительно инерциального пространства можно получить из принципа Даламбера-Лагранжа (1.2) в виде:

$$\int_{\Omega} \gamma \left(\ddot{\mathbf{u}} + \frac{1}{\gamma} \nabla E[\mathbf{u}] - \mathbf{f} \right) \delta \mathbf{u} dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} d\sigma = 0 \quad (1.12)$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla E[\mathbf{u}] \delta \mathbf{u} dx &= \delta E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 P_{ij} \delta u_{ij} dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) \delta \mathbf{u} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{P}) \delta \mathbf{u} dx, \quad P_{ij} = \delta \tilde{E} / \delta u_{ij} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь $\mathbf{P} = \|P_{ij}\|$ - тензор напряжений, \mathbf{n} - нормаль к поверхности $\partial\Omega$.

Выражение $\nabla \cdot \mathbf{P}$ определяет внутреннюю упругую силу (напряжения), \mathbf{f} - внешняя массовая сила, \mathbf{F} - внешняя поверхностная сила, $\delta \mathbf{u}$ - вектор возможных перемещений. Из (1.11), (1.12) следует классическое уравнение теории упругости и естественные граничные условия. Действительно, учитывая произвольность вариации $\delta \mathbf{u}$ в области Ω , и на границе $\partial\Omega$, а также основную лемму вариационного исчисления, получим равенства:

$$\begin{aligned} \gamma \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{f}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} &= \mathbf{F} \quad \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.14)$$

Соотношения (1.14) представляют собой уравнения движения и динамические граничные условия. Второе условие (1.15) обычно выполняется на той части границы $\partial\Omega$, перемещения точек которой произвольны. На остальной части границы задаются кинематические условия. Поверхностные силы \mathbf{F} могут зависеть от деформированного состояния тела на границе и от времени. Описание массовых, поверхностных сил и граничных условий зависит от конкретной рассматриваемой задачи.

Используя соотношение (1.11) найдем

$$\nabla \cdot P = (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \bar{\mu}\Delta \mathbf{u} \quad (1.15)$$

что позволяет переписать уравнения и граничные условия (1.14) в виде [15]:

$$\begin{aligned} \gamma \mathbf{u} &= (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \bar{\mu}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \bar{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \gamma_k + \bar{\mu} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \mathbf{n} + \bar{\mu} \nabla u_k \mathbf{n} &= \mathbf{F}_k, \quad (k=1,2,3) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $\mathbf{n} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, \mathbf{F}_k - компоненты поля поверхностных сил \mathbf{F} .

Если упругое тело совершает большие перемещения и повороты как целое, то деформации отсчитываются в подвижной, связанной со средой, системе координат. При этом к массовым силам добавляются силы инерции. Различные способы выбора подвижной системы координат рассмотрены в [26, 57]. Например, если свободная механическая система может быть представлена состоящей из «несущего» абсолютно твердого тела и «носимых» упругих тел то подвижные оси связываются с твердой частью системы и деформации отсчитываются относительно несущего тела [34]. В

случае отсутствия абсолютно твердого тела, начало и оси связанной системы координат определяются из условий

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) d\mu = 0, \quad \int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) d\mu = 0 \quad (1.17)$$

Условия (1.17) характеризует координатный трехгранник, относительно которого тело в среднем (по всем частицам) не перемещается и не поворачивается. Введенная система координат называется средней. Заметим также, что эту систему координат можно получить из условий равенства нулю векторов относительного количества движения и относительного кинетического момента, после их линеаризации и интегрирования по времени [26].

§ 1.4. Модальный подход

При изучении линейных колебаний упругих система используется метод разложения по собственным формам – метод модального анализа. Полагая в (1.14) $\mathbf{f} = \mathbf{F} = 0$ получим задачу о свободных колебаниях системы

$$\gamma \ddot{\mathbf{u}} + A\mathbf{u} = 0, \quad A\mathbf{u} = -\nabla \cdot P \quad (1.18)$$

A – дифференциальный оператор, который в случае однородной изотропной среды имеет вид (1.15) или [45]

$$A = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \text{grad div} - \bar{\mu} \text{rot rot}$$

где $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ – константы Ламе.

Если задача о свободных колебаниях обладает осевой симметрией (упругое тело – тело вращения), то величины, задающие деформацию, являются периодическими функциями цилиндрической координаты φ [35].

Решение однородного уравнения (1.18) ищется методом разделения переменных:

$$\mathbf{u} = q(t) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r})$$

Тогда функции $q(t)$ и $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ должны удовлетворить уравнениям

$$\begin{aligned} \ddot{q} + v^2 q &= 0, \\ \gamma^{-1} A\mathbf{U} - v^2 \mathbf{U} &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Первое уравнение системы (1.19) имеет решение в виде гармонических функций времени. Значения v_k , при которых второе уравнение в (1.19) имеет нетривиальное решение, являются собственными частотами упругих колебаний тела. Вектор-функции $\mathbf{U}_k(\mathbf{r})$ - решения (1.19), совместные с граничными условиями, являются собственными или главными формами колебаний. Метод модального анализа требует, чтобы собственные формы \mathbf{U}_k образовывали полный базис, и заключается в том, что решение неоднородного уравнения (1.12) (или (1.14)) ищется в виде разложения по формам \mathbf{U}_k , которые считаются известными функциями координат \mathbf{r} :

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) \cdot \mathbf{U}_k(\mathbf{r}).$$

Отметим, что следуя [12,13,29] и (1.13) и используя для упругой силы выражение $A\mathbf{u} = \nabla E[\mathbf{u}]$ можно получить

$$\frac{1}{\gamma} \nabla E[\mathbf{U}_k] = v_k^2 \mathbf{U}_k.$$

Метод модального анализа является наиболее строгим методом дискретизации. В различных модификациях векторы $\mathbf{U}_k(\mathbf{r})$ являются некоторым приближением к собственным формам, но обязательным условием остается полнота системы этих базисных функций.

Удобно бывает использовать базис из ортонормированных собственных форм, подчиняющихся условиям:

$$(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_j) = \int_{\Omega} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_j dx = \delta_{kj} \quad (1.20)$$

где δ_{kj} - символ Кронекера.

§1.5. Уравнения Лагранжа, Гамильтона и Рауса

Кроме вариационных принципов (1.1), (1.2) возможно также применение метода Лагранжа для получения уравнений движения механической системы.

Пусть голономные связи заданы соотношениями [12]:

$$F[r, t] = 0, \quad F[r, t]: Y \times R^1 \rightarrow K, \quad K \subset X. \quad (1.21)$$

Здесь Y – область определения отображения (1.21), K – функциональное пространство. В сплошных средах (1.21) может иметь смысл граничных условий (заданы перемещения некоторых подмножеств области Ω), а также условий сохранения объемов (площадей, длин) при движении среды.

Связи (1.21) могут, вообще говоря говоря, определять класс допустимых функций, описывающих движение системы. Отображение (1.21) дифференцируемо и задает конфигурационное пространство системы (конфигурационное многообразие)

$$M = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} \in Y, F[\mathbf{r}, t] = 0\}. \quad (1.22)$$

Возможные перемещения есть векторы из касательного пространства $T_r M$:

$$\delta \mathbf{r} \in T_r M = \{\delta \mathbf{r} : \delta \mathbf{r} \in Y, (\nabla_r F[\mathbf{r}, t], \delta \mathbf{r}) = 0\}. \quad (1.23)$$

Структура дифференцируемого многообразия предполагает наличие локальных координат на M [28]:

$$q(\mathbf{r}_0) \in B, \quad \mathbf{r} \in M, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t). \quad (1.24)$$

Здесь B – линейное функциональное пространство, а отображение (1.24) и переводит область в B в открытое множество на M . Функции $q \in B$ играют роль независимых лагранжевых координат на M .

Полагая $q = q(\mathbf{r}_0, t)$ и выполняя известные преобразования, представим принцип Даламбера – Лагранжа и уравнения Лагранжа второго рода в виде [12,53]:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} T) - \nabla_q T - Q \right] \delta q d\mu = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} T) - \nabla_q T = Q, \quad Q = \mathbf{f} \nabla_q \mathbf{r}.$$

Здесь $\nabla_{\dot{q}}T, \nabla_q T$ обозначают градиенты функционала кинетической энергии $T[\dot{q}, q, t]$ по соответствующим аргументам, Q – обобщенные силы. Первое соотношение (1.25) понимается в смысле распределений (обобщенных функций) на отрезке времени $[0, T]$, а второе – в смысле распределений на отрезке времени $[0, T]$, со значениями в B' – пространстве, сопряженном к B . Соотношения (1.25) справедливы для идеальных связей, для которых верно равенство

$$\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{R} \delta \mathbf{r} d\mu dt = 0. \quad (1.26)$$

Заметим, что реакции связей понимаются как обобщенные функции на отрезке времени $[0, T]$ со значениями в Y' . Определение идеальных связей (1.25) годится для случая активных сил, имеющих характер ударной нагрузки.

Замечание 1. Функционал кинетической энергии $T[\dot{q}, q, t]$ представляется в форме

$$T[\dot{q}, q, t] = T_2[\dot{q}, q, t] + T_1[\dot{q}, q, t] + T_0[q, t],$$

где

$$T_2[\dot{q}, q, t] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla_q \mathbf{r}(q, t) \cdot \dot{q})^2 d\mu,$$

$$T_1[\dot{q}, q, t] = \int_{\Omega} (\nabla_q \mathbf{r}(q, t) \cdot \dot{q}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} d\mu,$$

$$T_0[q, t] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)^2 d\mu,$$

где T_n , $n=0,1,2$ есть однородные функционалы степени n относительно обобщенных скоростей \dot{q} .

Замечание 2. В случае, если существует функционал потенциальной энергии $\Pi[q, t]$, то функционал Лагранжа определяется формулой

$$L[\dot{q}, q, t] = T[\dot{q}, q, t] - \Pi[q, t], \quad (1.27)$$

и уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{q}}L) - \nabla_q L = 0. \quad (1.28)$$

Определяя обобщенные импульсы p с помощью преобразования Лежандра

$$p = \nabla_{\dot{q}}T = (\nabla_q \mathbf{r})^T \left(\nabla_q \mathbf{r} \cdot \dot{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right). \quad (1.29)$$

Из (1.29) можно выразить \dot{q} через p , поскольку оператор $A[q, t] = (\nabla_q \mathbf{r})^T (\nabla_q \mathbf{r})$ положительно определен, самосопряжен и имеет обратный оператор.

Функционал Гамильтона и канонические уравнения Гамильтона представятся в виде [12,53]:

$$\begin{aligned} H[p, q, t] &= \left(\int_{\Omega} p \dot{q} d\mu - T + \Pi \right) \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(p, q, t)}, \\ \dot{p} &= -\nabla_q H + Q^*, \\ \dot{q} &= -\nabla_p H, \\ Q^* &= Q(\dot{q}, q, t) \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(p, q, t)} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Первое уравнение в (1.30) понимается в смысле распределений на $[0, T]$ со значениями в B' , а второе – в смысле распределений на $[0, T]$ со значениями в $T_q B$. В зависимости от свойств массовых сил функционал потенциальной энергии $\Pi[q, t]$ или обобщенные силы Q^* могут равняться нулю.

Канонические уравнения Гамильтона (1.30) при $Q^* = 0$ являются экстремальями функционала

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} p \dot{q} d\mu - H[p, q, t] \right) dt,$$

при условии, что вариации $\delta p(0) = \delta p(T) = \delta q(0) = \delta q(T) = 0$ (принцип наименьшего действия в форме Пуанкаре).

Функционал Рауса и уравнения Рауса являются соответствующими обобщениями из классической механики. Они удобны для применения в случае, когда, например, механическая система имеет координаты, определяющие ее движение как целого, и деформируемую часть, положение точек которой требует нахождения упругих перемещений \mathbf{u} . Если q, p – координаты и импульсы, описывающие движение как целого, то функционал Рауса представляется в виде

$$R[p, q, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t] = \left(\sum p \dot{q} - L[p, q, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t] \right) \Big|_{\dot{q} = \dot{q}(p, q, t)},$$

а уравнения Рауса распадаются на две группы – первую

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\nabla_q R[p, q, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t], \\ \dot{q} &= \nabla_p R[p, q, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t], \end{aligned} \tag{1.31}$$

уравнения которой имеют форму уравнений Гамильтона, и

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}R) - \nabla_{\mathbf{u}}R = 0, \quad (1.32)$$

вторую, в которой уравнения (для перемещений) имеют форму уравнений Лагранжа второго рода.

ГЛАВА 2. ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА С ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ АНТЕННОЙ, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

§ 2.1. Постановка задачи

Рассматривается задача об эволюции вращательного движения спутника, несущего полусферическую антенну (рис. 1) и движущегося по эллиптической орбите вокруг притягивающего центра. Спутник состоит из твёрдой части, соединённой тонкой ножкой с вязкоупругой полусферической антенной. Предполагается, что твёрдая часть спутника является однородной и осесимметричной, причем ее ось симметрии совпадает с осью симметрии полусферической антенны (при отсутствии деформаций). Центр масс спутника движется по эллиптической орбите вокруг притягивающего центра, причем орбита предполагается неизменной. Антенна предполагается однородной и изотропной, представляющей собой достаточно жёсткое твёрдое тело, деформации которого малы, а частоты собственных колебаний намного больше угловой скорости вращения спутника.

Пусть твердая часть спутника занимает область $\Omega_1 \in E^3$, а вязкоупругая антенна занимает область $\Omega_2 \in E^3$, при этом области Ω_1 и Ω_2 имеют общую границу ненулевой площади, на которой перемещения точек упругой части равны нулю. Весь спутник занимает область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, его плотность обозначим через ρ , при этом $\rho = \rho_1$, когда точка принадлежит твердой части и $\rho = \rho_2$, когда принадлежит упругой.

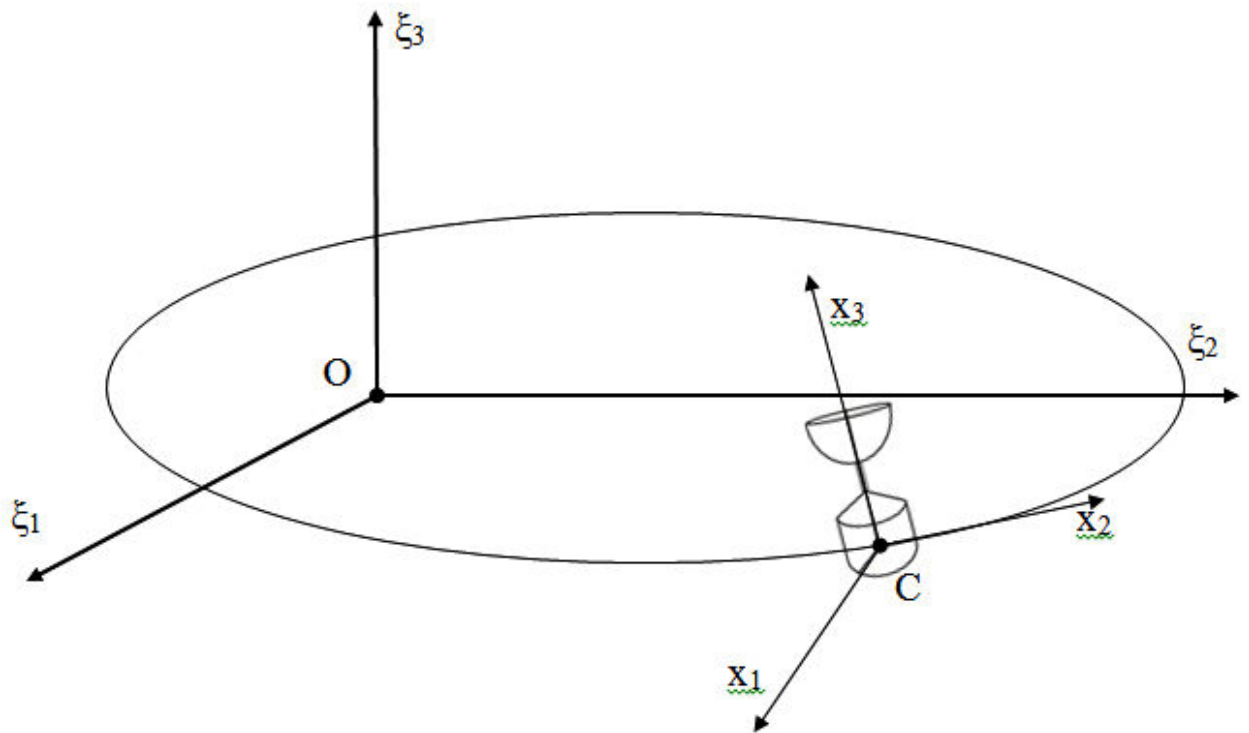


Рис 1: Спутник с полусферической антенной

В инерциальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в притягивающем центре O орбита центра масс спутника лежит в плоскости $O\xi_1\xi_2$. Движение центра масс C спутника задаётся его радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 R, \quad \mathbf{R}^0 = \cos\vartheta \xi_1^0 + \sin\vartheta \xi_2^0, \quad (2.1)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\omega_0(1+e\cos\vartheta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad R = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}.$$

Здесь обозначено: ω_0 - среднее движение центра масс спутника, e , a - эксцентриситет и большая полуось орбиты, ϑ - истинная аномалия, ξ_i^0 - орт по оси $O\xi_i$, $i=1,2,3$.

Пусть точка C' - центр масс недеформированного спутника, а оси системы координат $C'x'_1x'_2x'_3$ направлены по его главным центральным осям инерции (в недеформированном состоянии) и жестко связаны с твердой частью. При этом ось $C'x'_3$ является осью динамической симметрии и совпадает с осью симметрии антенны. Пусть \mathbf{u}_C - радиус-вектор центра масс C относительно C' , а оси Cx_i параллельны осям $C'x'_i$ ($i=1,2,3$). Радиус-вектор произвольной точки спутника относительно точки C' будет равен

$$\mathbf{r} + \mathbf{u}',$$

а относительно центра масс C будет равен

$$\mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}_C, \quad \mathbf{u}_C = M^{-1} \int_{\Omega_2} \rho_2 \mathbf{u}' dx.$$

Здесь $M = \int_{\Omega} \rho dx$ – масса спутника; \mathbf{u} и \mathbf{u}' – соответственно вектор перемещений частицы упругой части спутника относительно систем координат $Cx_1x_2x_3$ и $C'x'_1x'_2x'_3$, занимавшей в недеформированном состоянии положение $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$. Обозначим координаты вектора \mathbf{u} в системе координат $Cx_1x_2x_3$ через u_1, u_2, u_3 .

Будем использовать модель линейной теории вязкоупругости малых деформаций. Функционал потенциальной энергии упругих деформаций представим в виде

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega_2} e dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3, \quad e = \sum_{m,n,i,j} a_{mnij} e_{mn} e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}), \quad u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

а диссипативный функционал как

$$D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b E[\dot{\mathbf{u}}].$$

Здесь обозначено, $e = e(\mathbf{u})$ – удельная потенциальная энергия упругих деформаций, представляющая собой положительно определенную квадратичную форму компонент тензора малых деформаций e_{ij} .

Коэффициенты a_{mnij} постоянны и симметричны по первым двум и последним двум индексам.

Заметим, что, вообще говоря, функционал энергии упругих деформаций должен зависеть от перемещений \mathbf{u}' относительно системы координат $C'x'_1x'_2x'_3$, связанной с центром масс недеформированного

спутника, и неподвижной относительно твердой части, то есть $E = E[\mathbf{u}']$. Но, поскольку вектор \mathbf{u}_C не зависит от координат x_i , то следовательно

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x_i} = \frac{\partial(\mathbf{u} + \mathbf{u}_C)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i},$$

и можно записать

$$\begin{aligned} E[\mathbf{u}'] &= \int_{\Omega_2} \sum_{m,n,i,j} \frac{1}{4} a_{mnij} \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u'_n}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) dx = \\ &= \int_{\Omega_2} \sum_{m,n,i,j} \frac{1}{4} a_{mnij} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx = E[\mathbf{u}], \end{aligned}$$

то есть, совершенно корректно можно писать $E = E[\mathbf{u}]$. То же самое, конечно, справедливо и для диссипативного функционала.

Потенциальная энергия гравитационного поля запишется в виде

$$U = - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{[(\mathbf{R} + O(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2]^{1/2}} dx, \quad (2.2)$$

где μ - гравитационная постоянная притягивающего центра, $O=O(t)$ - матрица перехода от осей $Cx_1x_2x_3$ к осям Кёнига $C\xi_1'\xi_2'\xi_3'$.

§ 2.2. Функционал потенциальной энергии гравитационного поля

Преобразуем выражение (2.2) для функционала потенциальной энергии гравитационного поля, разложив его в ряд по степеням малого параметра $\varepsilon \sim |u|/|r|$. Кроме того, поскольку можно считать $|u| \ll |r| \ll |R|$ будем считать справедливыми следующие соотношения эквивалентности

$$\frac{|r|}{|R|} \sim \varepsilon, \quad \frac{|u|}{|R|} \sim \varepsilon^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} U &= - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{[R^2 + (Or)^2 + (\mathbf{u})^2 + 2(\mathbf{R}, Or) + 2(\mathbf{R}, Ou) + 2(Or, Ou)]^{1/2}} dx = \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{R [1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{u^2}{R^2} + 2 \frac{(\mathbf{R}^0, Or)}{R} + 2 \frac{(\mathbf{R}^0, Ou)}{R} + 2 \frac{(Or, Ou)}{R^2}]^{1/2}} dx = \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{R} [1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{u^2}{R^2} + 2 \frac{(\mathbf{R}^0, Or)}{R} + 2 \frac{(\mathbf{R}^0, Ou)}{R} + 2 \frac{(Or, Ou)}{R^2}]^{-1/2} dx \end{aligned}$$

Отбрасывая члены порядка ε^4 и выше получим

$$\begin{aligned} U &\approx - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{u})}{R^2} - \frac{(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})}{R} - \frac{(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u})}{R} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} \left(\frac{r^2}{R^2} + 2 \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{u})}{R^2} + 2 \frac{(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})}{R} + 2 \frac{(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u})}{R} \right)^2 + \dots \right] dx \approx \\ &\approx - \frac{\mu M}{R} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} r^2 \rho dx + \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega_2} \mathbf{r} \mathbf{u} \rho dx + \frac{\mu}{R^2} \left(O^{-1} \mathbf{R}^0, \int_{\Omega} \mathbf{r} \rho dx \right) + \frac{\mu}{R^2} \int_{\Omega_2} (O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u}) \rho dx - \\ &\quad - \frac{3}{8} \frac{\mu}{R} \int_{\Omega} \left(\frac{4(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})^2}{R^2} + \frac{4r^2(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})}{R^3} + 8 \frac{(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u})}{R^2} \right) \rho dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

Упростим выражение для гравитационного потенциала (2.3). Для этого заметим, что первое слагаемое не зависит от параметров вращения спутника, и следовательно, даст нуль при дифференцировании в уравнениях Рауса, поэтому его можно сразу отбросить. Второе слагаемое дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} r^2 \rho dx &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \rho dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) \rho dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x_1^2 + x_3^2) \rho dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2) \rho dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} \left(\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} A \right) = \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} \left(\frac{C}{2} + A \right). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения для моментов инерции недеформированного спутника: C – момент инерции относительно оси симметрии $C'x'_3$ и $A=B$ – моменты инерции относительно осей $C'x'_1$ и $C'x'_2$. Это слагаемое может быть отброшено по тем же соображениям, что и первое. Четвертое слагаемое равняется нулю, поскольку $\int_{\Omega} r \rho dx = 0$. Пятое слагаемое также обращается в нуль, так как

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \rho dx = \int_{\Omega} (\mathbf{u}' - \mathbf{u}_C) \rho dx = \int_{\Omega} \mathbf{u}' \rho dx - \int_{\Omega} \mathbf{u}_C \rho dx = M \mathbf{u}_C - \mathbf{u}_C M = 0. \quad (2.4)$$

Вычислим предпоследний член

$$-\frac{3}{2} \frac{\mu}{R^4} \int_{\Omega} r^2 (O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \rho dx = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{R^4} (O^{-1} \mathbf{R}^0, \int_{\Omega} r^2 \mathbf{r} \rho dx).$$

Далее

$$\int_{\Omega} r^2 \mathbf{r} \rho dx = \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rho dx = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 \\ x_1^2 x_2 + x_2^3 + x_2 x_3^2 \\ x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_3^3 \end{pmatrix} \rho dx = 0.$$

При вычислении интеграла использован факт, что нечетная функция дает нуль при интегрировании по симметричной области. Отсюда следует, что предпоследний член также равен нулю. В итоге получаем для гравитационного потенциала выражение

$$U \approx -\mu R^{-3} \int_{\Omega_2} [3(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u}) - (\mathbf{r}, \mathbf{u})] \rho_2 dx - \frac{3}{2} \mu R^{-3} \int_{\Omega} (O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})^2 \rho dx. \quad (2.5)$$

§ 2.3. Уравнения для модальных переменных

Принцип Даламбера – Лагранжа для определения упругих перемещений запишем в виде

$$\int_{\Omega} \left[O^{-1} \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \right] \delta \mathbf{u} \rho dx + (O^{-1} \nabla U[\mathbf{R} + O(\mathbf{r} + \mathbf{u})], \delta \mathbf{u}) + (\nabla E[\mathbf{u}] + \nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) = 0, \forall \delta \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Далее, введем некоторые физические предположения, позволяющие перейти к квазистатической постановке задачи вычисления упругих перемещений. Используем метод разделения движений, предложенный Вильке [18,12,13]. Будем предполагать, что наименьшая частота свободных упругих колебаний

намного превосходит как угловую скорость орбитального движения спутника, так и угловую скорость его вращения относительно центра масс. Кроме того, будем считать, что вследствие вязкого трения свободные колебания затухли. Эти предположения позволяют отбросить члены с $\ddot{\mathbf{R}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}$ в уравнении (2.6):

$$\int_{\Omega} [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]] \delta \mathbf{u} \rho dx + (O^{-1} \nabla U[\mathbf{R} + O(\mathbf{r} + \mathbf{u})], \delta \mathbf{u}) + (\nabla E[\mathbf{u}] + \nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) = 0, \forall \delta \mathbf{u}. \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.7) будем искать в соответствии с § 4 главы 1 в виде ряда по собственным формам свободных упругих колебаний:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k, m=0}^{\infty} [q_{km}(t) \mathbf{V}_{km}(\mathbf{r}) + p_{km}(t) \mathbf{W}_{km}(\mathbf{r})]. \quad (2.8)$$

Подставим выражение (2.8) в уравнение (2.7), учитывая условия ортонормированности форм и соотношения:

$$\rho_2^{-1} \nabla E[\mathbf{V}_{km}] = v_{km}^2 \mathbf{V}_{km}, \quad \rho_2^{-1} \nabla E[\mathbf{W}_{km}] = v_{km}^2 \mathbf{W}_{km},$$

а также подставляя в качестве $\delta \mathbf{u}$ поочередно формы \mathbf{V}_{km} и \mathbf{W}_{km} .

Кроме того, разложим в ряд выражение для градиента гравитационного потенциала

$$\nabla U = \nabla_{\mathbf{R}_*} U[\mathbf{R}_*] = \nabla_{\mathbf{R}_*} \left(- \int_{\Omega} \frac{\mu \rho dx}{[\mathbf{R}_*^2]^{1/2}} \right) = \int_{\Omega} \mu \rho [\mathbf{R}_*^2]^{-3/2} \mathbf{R}_* dx = \int_{\Omega} \frac{\mu \rho [O^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u}]}{[(O^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{3/2}} dx,$$

ограничившись слагаемыми порядка не выше ε :

$$\begin{aligned}
(\nabla U, \delta \mathbf{u}) &\approx \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{R^2} [O^{-1} \mathbf{R}^0 + \mathbf{r}] \left(1 + \frac{r^2}{R^2} + 2 \frac{(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})}{R} \right)^{-3/2} \delta \mathbf{u} dx \approx \\
&\approx \frac{\mu}{R^2} \left(O^{-1} \mathbf{R}^0, \int_{\Omega_2} \delta \mathbf{u} \rho_2 dx \right) - \frac{3\mu}{R^3} \left(O^{-1} \mathbf{R}^0, \int_{\Omega_2} (O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \delta \mathbf{u} \rho_2 dx \right) + \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega_2} r \delta \mathbf{u} \rho_2 dx = \\
&= -\frac{3\mu}{R^3} \left(O^{-1} \mathbf{R}^0, \int_{\Omega_2} (O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \delta \mathbf{u} \rho_2 dx \right) + \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega_2} r \delta \mathbf{u} \rho_2 dx .
\end{aligned}$$

Слагаемое $\frac{\mu}{R^2} \left(O^{-1} \mathbf{R}^0, \int_{\Omega_2} \delta \mathbf{u} \rho_2 dx \right) = 0$, поскольку $\int_{\Omega_2} \delta \mathbf{u} \rho_2 dx = \delta \left(\int_{\Omega_2} \mathbf{u} \rho_2 dx \right) = 0$, согласно формуле (2.4).

С учетом вышесказанного, уравнение (2.7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] + \frac{\mu}{R^3} \mathbf{r} - \frac{3\mu}{R^3} (O^{-1} \mathbf{R}^0)(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \right] \delta \mathbf{u} \rho dx + \\
&+(\nabla E[\mathbf{u}] + \nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u}, \quad (2.9)
\end{aligned}$$

и далее к системе уравнений для модальных переменных $q_{km}(t), p_{km}(t)$:

$$\begin{aligned}
v_{km}^2 q_{km} + \chi b v_{km}^2 \dot{q}_{km} + (\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \mathbf{V}_{km}) + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \mathbf{V}_{km}) + \frac{\mu}{R^3} (\mathbf{r}, \mathbf{V}_{km}) - \frac{3\mu}{R^3} ((O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{V}_{km})(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})) &= 0, \\
v_{km}^2 p_{km} + \chi b v_{km}^2 \dot{p}_{km} + (\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \mathbf{W}_{km}) + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \mathbf{W}_{km}) + \frac{\mu}{R^3} (\mathbf{r}, \mathbf{W}_{km}) - \frac{3\mu}{R^3} ((O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{W}_{km})(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})) &= 0, \\
&k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Для дальнейшего упрощения уравнений (2.10) необходимо использовать явный вид собственных форм.

Рэлей в [51] указал вид собственных форм для тонкой полусферической оболочки, закрепленной в полюсе (рис. 2):

$$V_k = w_k \mathbf{e}_r + v_k \mathbf{e}_\varphi + u_k \mathbf{e}_\theta = A_k t g^{k \frac{\theta}{2}} ((k + \cos \theta) \cos k\varphi, \sin \theta \sin k\varphi, \sin \theta \cos k\varphi),$$

$$W_k = A_k t g^{k \frac{\theta}{2}} ((k + \cos \theta) \sin k\varphi, -\sin \theta \cos k\varphi, \sin \theta \sin k\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Формы (2.11) заданы в сферических координатах r, φ, θ (см. рис. 2). Они зависят только от двух углов φ, θ и не зависят от r . По этой причине второй индекс m у форм отсутствует. Мы также опустим далее второй индекс в уравнениях (2.10) и перепишем их в виде:

$$v_k^2 \dot{q}_k + \chi b v_k^2 \dot{q}_k + (\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], V_k) + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, V_k) + \frac{\mu}{R^3} (\mathbf{r}, V_k) - \frac{3\mu}{R^3} ((O^{-1} \mathbf{R}^0, V_k)(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})) = 0,$$

$$v_k^2 \dot{p}_k + \chi b v_k^2 \dot{p}_k + (\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], W_k) + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, W_k) + \frac{\mu}{R^3} (\mathbf{r}, W_k) - \frac{3\mu}{R^3} ((O^{-1} \mathbf{R}^0, W_k)(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})) = 0.$$

$$k=0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Получим выражения для компонент форм в цилиндрической системе координат (рис. 3):

$$V_k = u_{kr} \mathbf{e}_{\tilde{r}} + u_{k\varphi} \mathbf{e}_\varphi + u_{kz} \mathbf{e}_z,$$

$$u_{kr} = u_k \cos \theta - w_k \sin \theta = -A_k t g^{k \frac{\theta}{2}} k \sin \theta \cos k\varphi,$$

$$u_{k\varphi} = v_k = A_k t g^{k \frac{\theta}{2}} \sin \theta \sin k\varphi,$$

$$u_{kz} = u_k \sin \theta + w_k \cos \theta = A_k t g^{k \frac{\theta}{2}} (1+k) \sin \theta \sin k\varphi.$$

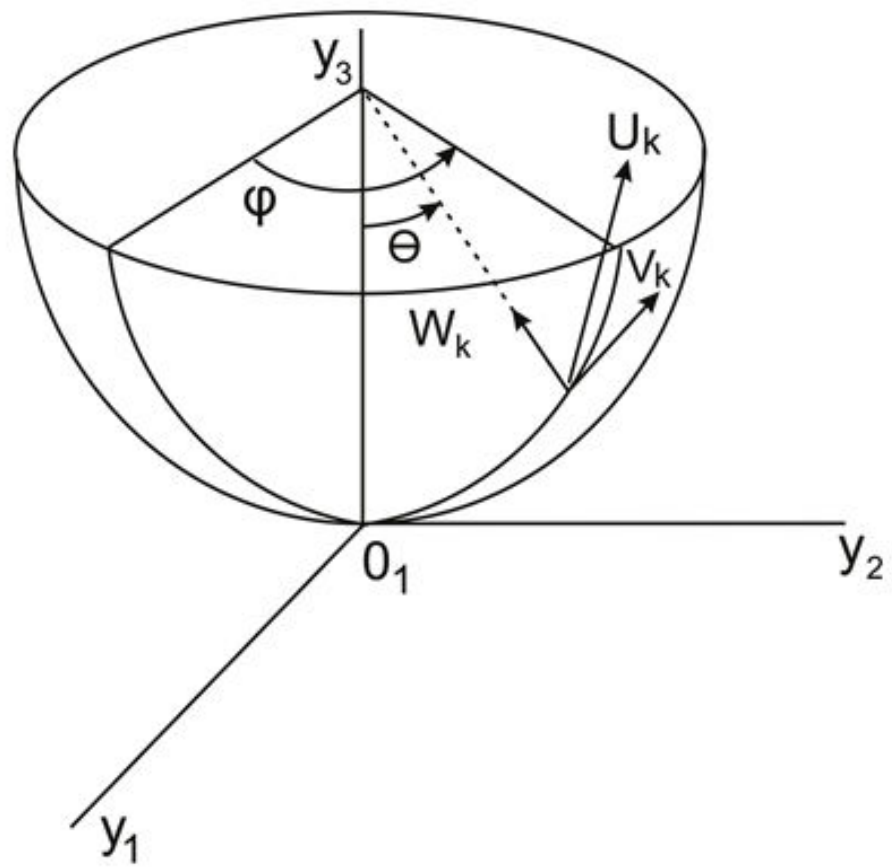


Рис 2: Компоненты собственной формы полусферы

Форма W_k , ортогональная V_k , получается из V_k подстановкой вместо угла φ угла $\left(\varphi - \frac{\pi}{2k}\right)$:

$$W_k = A_k \operatorname{tg}^k \frac{\theta}{2} (-k \sin \theta \sin k\varphi, -\sin \theta \cos k\varphi, (1+k \cos \theta) \sin k\varphi).$$

Заметим, что если формы переобозначить и взять

$$\tilde{V}_k = -W_k, \quad \tilde{W}_k = -V_k,$$

то новые формы \tilde{V}_k, \tilde{W}_k будут иметь вид, аналогичный собственным формам осесимметричного упругого тела (глава 5). Опуская знак волны над формами, окончательно запишем их в виде:

$$V_k = A_k \operatorname{tg}^k \frac{\theta}{2} (k \sin \theta \sin k\varphi, \sin \theta \cos k\varphi, -(1+k \cos \theta) \sin k\varphi),$$

$$W_k = A_k \operatorname{tg}^k \frac{\theta}{2} (k \sin \theta \cos k\varphi, -\sin \theta \sin k\varphi, -(1+k \cos \theta) \cos k\varphi). \quad (2.13)$$

Если ввести обозначения

$$U_k(\theta) = A_k \operatorname{tg}^k \frac{\theta}{2} k \sin \theta, \quad V_k(\theta) = A_k \operatorname{tg}^k \frac{\theta}{2} \sin \theta, \quad W_k(\theta) = -A_k \operatorname{tg}^k \frac{\theta}{2} (1+k \cos \theta), \quad (2.14)$$

то равенства (2.13) перепишутся в более компактной форме

$$V_k = (U_k \sin k\varphi, V_k \cos k\varphi, W_k \sin k\varphi),$$

$$W_k = (U_k \cos k\varphi, -V_k \sin k\varphi, W_k \cos k\varphi). \quad (2.15)$$

Из (2.14) видно, что при $k=0$ коэффициент $U_k=0$, а сами формы (2.15) запишутся в виде

$$V_0 = (0, V_0, 0), \quad V_0 = A_0 \sin \theta,$$

$$W_0 = (0, 0, W_0), \quad W_0 = -A_0.$$

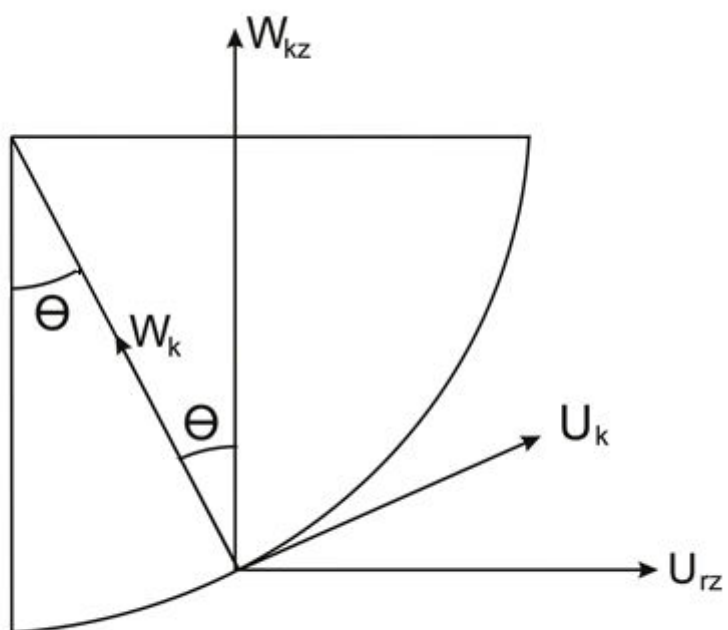


Рис 3: Преобразование координат собственных форм
к цилиндрическим координаты

Форма V_0 будет при этом описывать крутильные деформации полусферы, а форма W_0 - перемещения полусферы как целого вдоль ее оси симметрии. По этой причине форму W_0 следует исключить из ряда (2.10), Это можно сделать, приняв

$$p_0 = 0.$$

Кроме того, вместо формул (2.15) иногда удобно использовать проекции векторов V_k, W_k на оси декартовой системы координат $O_1y_1y_2y_3$:

$$\begin{aligned} V_{k1} &= U_k \sin k\varphi \cos \varphi - V_k \cos k\varphi \sin \varphi, \\ V_{k2} &= U_k \sin k\varphi \sin \varphi - V_k \cos k\varphi \cos \varphi, \\ V_{k3} &= W_k \sin k\varphi, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} W_{k1} &= U_k \cos k\varphi \cos \varphi + V_k \sin k\varphi \sin \varphi, \\ W_{k2} &= U_k \cos k\varphi \sin \varphi - V_k \sin k\varphi \cos \varphi, \\ W_{k3} &= W_k \cos k\varphi. \end{aligned}$$

Заметим, что в системе координат $C'x'_1x'_2x'_3$, получающейся из $O_1y_1y_2y_3$ сдвигом вдоль оси O_1y_3 общий вид форм (2.15) или (2.16) не изменится, хотя изменятся сами коэффициенты U_k, V_k, W_k .

Обратимся к вычислению членов уравнения (2.10), используя полученные выше формулы (2.16). Имеем

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], V_k) &= (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2, V_k) = \\ &= \int_{\Omega_2} ([\omega_1\omega_2x_2 + \omega_1\omega_3x_3 - (\omega_2^2 + \omega_3^2)x_1]V_{k1} + [\omega_1\omega_2x_1 + \omega_2\omega_3x_3 - (\omega_1^2 + \omega_3^2)x_2]V_{k2} + \\ &\quad + [\omega_1\omega_3x_1 + \omega_2\omega_3x_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)x_3]V_{k3})dx, \quad dx = dx_1dx_2dx_3. \end{aligned}$$

Переходя к цилиндрическим координатам r, φ, z , и интегрируя по углу φ от 0 до 2π , найдем:

$$(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], V_0) = 0,$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], V_1) = \omega_2 \omega_3 (b_{123} + b_{132}),$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], V_2) = 2\omega_1 \omega_2 b_{212}, \quad (2.17)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], V_k) = 0, \quad k = 3, 4, \dots,$$

$$b_{kij} = \int_{\Omega_2} V_{ki} x_j dx, \quad c_{kij} = \int_{\Omega_2} W_{ki} x_j dx,$$

$$b_{123} = \pi \int_{\Omega_*} (U_1 + V_1) z r dr dz, \quad b_{132} = \pi \int_{\Omega_*} W_1 r^2 dr dz, \quad b_{212} = \frac{\pi}{2} \int_{\Omega_*} (U_2 + V_2) r^2 dr dz.$$

Здесь Ω_* - область, полученная пересечением Ω_2 полуплоскостью, проходящей через ось симметрии твердой части спутника.

Аналогично, получим

$$(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], W_k) = (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) - r\boldsymbol{\omega}^2, W_k) =$$

$$= \int_{\Omega_2} ([\omega_1 \omega_2 x_2 + \omega_1 \omega_3 x_3 - (\omega_2^2 + \omega_3^2) x_1] W_{k1} + [\omega_1 \omega_2 x_1 + \omega_2 \omega_3 x_3 - (\omega_1^2 + \omega_3^2) x_2] W_{k2} +$$

$$+ [\omega_1 \omega_3 x_1 + \omega_2 \omega_3 x_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_3] W_{k3}) dx.$$

И далее, не забывая о том, что форма W_0 отсутствует

$$(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], W_1) = \omega_1 \omega_3 (b_{123} - b_{132}),$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], W_2) = (\omega_1^2 - \omega_2^2) b_{212}, \quad (2.18)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], W_k) = 0, \quad k = 3, 4, \dots$$

Вычислим выражение

$$(\dot{\omega} \times r, V_k) = \int_{\Omega_2} [(\dot{\omega}_2 x_3 - \dot{\omega}_3 x_2) V_{k1} + (\dot{\omega}_3 x_1 - \dot{\omega}_1 x_3) V_{k2} + (\dot{\omega}_1 x_2 - \dot{\omega}_2 x_1) V_{k3}] dx.$$

Аналогично предыдущим выражениям, найдем

$$(\dot{\omega} \times r, V_0) = 2\dot{\omega}_3 b_{021},$$

$$(\dot{\omega} \times r, V_1) = \dot{\omega}_1 (b_{132} - b_{123}),$$

$$(\dot{\omega} \times r, V_2) = 0, \tag{2.19}$$

$$(\dot{\omega} \times r, V_k) = 0, \quad k = 3, 4, \dots,$$

$$b_{021} = \pi \int_{\Omega_*} V_0 r^2 dr dz.$$

и еще

$$(\dot{\omega} \times r, W_1) = \dot{\omega}_2 (b_{123} - b_{132}),$$

$$(\dot{\omega} \times r, W_2) = 0, \tag{2.20}$$

$$(\dot{\omega} \times r, W_k) = 0, \quad k = 3, 4, \dots$$

Далее

$$(r, V_k) = \int_{\Omega_2} (x_1 V_{k1} + x_2 V_{k2} + x_3 V_{k3}) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.21}$$

и

$$(r, W_k) = \int_{\Omega_2} (x_1 W_{k1} + x_2 W_{k2} + x_3 W_{k3}) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда получаем

$$(\mathbf{r}, \mathbf{W}_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

Вычислим теперь

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{V}_k)),$$

обозначив

$$O^{-1}\mathbf{R}^0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Перепишем интеграл в виде:

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{V}_k)) = \int_{\Omega_2} ([\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3][\gamma_1 V_{k1} + \gamma_2 V_{k2} + \gamma_3 V_{k3}]) dx,$$

и после выполнения интегрирования получаем

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{V}_0)) = 0,$$

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{V}_1)) = \gamma_3 \gamma_2 (b_{123} + b_{132}),$$

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{V}_2)) = 2\gamma_1 \gamma_2 b_{212}, \quad (2.23)$$

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{V}_k)) = 0, \quad k = 3, 4, \dots$$

Точно также выведем

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{W}_1)) = \gamma_1 \gamma_3 (b_{123} + b_{132}),$$

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{W}_2)) = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) b_{212}, \quad (2.24)$$

$$((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}), (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{W}_k)) = 0, \quad k = 3, 4, \dots$$

Из формул (2.11) и (2.17)-(2.24) получаем систему уравнений для модальных переменных:

$$\begin{aligned}
 v_0^2 q_0 + \chi b v_0^2 \dot{q}_0 &= -2\dot{\omega}_3 b_{021}, \\
 v_1^2 q_1 + \chi b v_1^2 \dot{q}_1 &= -[b_{123} + b_{132}](\omega_2 \omega_3 - 3\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3) + \dot{\omega}_1 [b_{123} - b_{132}], \\
 v_1^2 p_1 + \chi b v_1^2 \dot{p}_1 &= -[b_{123} + b_{132}](\omega_1 \omega_3 - \mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3) - \dot{\omega}_2 [b_{123} - b_{132}], \\
 v_2^2 q_2 + \chi b v_2^2 \dot{q}_2 &= -2(\omega_1 \omega_2 - 3\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2) b_{212}, \\
 v_2^2 p_2 + \chi b v_2^2 \dot{p}_2 &= -[\omega_1^2 - \omega_2^2 - 3\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] b_{212}, \\
 v_k^2 q_k + \chi b v_k^2 \dot{q}_k &= 0, \quad k \geq 3, \\
 v_k^2 p_k + \chi b v_k^2 \dot{p}_k &= 0, \quad k \geq 3.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Из системы уравнений (2.25) видно, что деформации появляются только по формам с номерами $k=0,1,2$, остальные модальные переменные остаются равными нулю, т.е.

$$q_k = p_k = 0, \quad k \geq 3.$$

Известно, что решение дифференциального уравнения

$$v^2 q + \chi b v^2 \dot{q} = A$$

может быть найдено в виде ряда [12,13]:

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} (-\chi b)^k \frac{\partial^k \tilde{q}}{\partial t^k},$$

где функция \tilde{q} определяется из уравнения

$$v^2 \tilde{q} = A.$$

Будем решать данным способом систему (2.25), ограничившись первыми двумя членами ряда. В результате получим

$$\begin{aligned}
 q_0 &= q_{00} - \chi b \dot{q}_{00}, & q_{00} &= -2\nu_0^{-2} \dot{\omega}_3 b_{021}, \\
 p_0 &= 0, \\
 q_1 &= q_{10} - \chi b \dot{q}_{10}, & q_{10} &= \nu_1^{-2} [-[b_{123} + b_{132}](\omega_2 \omega_3 - 3\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3) + \dot{\omega}_1 [b_{123} - b_{132}]], \\
 p_1 &= p_{10} - \chi b \dot{p}_{10}, & p_{10} &= -\nu_1^{-2} [[b_{123} + b_{132}](\omega_1 \omega_3 - \mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3) + \dot{\omega}_2 [b_{123} - b_{132}]], \\
 q_2 &= q_{20} - \chi b \dot{q}_{20}, & q_{20} &= -2\nu_2^{-2} (\omega_1 \omega_2 - 3\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2) b_{212}, \\
 p_2 &= p_{20} - \chi b \dot{p}_{20}, & p_{20} &= -\nu_2^{-2} [\omega_1^2 - \omega_2^2 - 3\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] b_{212}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

§ 2.4. Переменные Андуайе и уравнения Рауса

Для изучения эволюции вращательного движения спутника как целого воспользуемся уравнениями Рауса. Уравнения Рауса для части переменных (в нашем случае – перемещений) имеют форму уравнений Лагранжа, а для другой части (канонических переменных) – уравнений Гамильтона. Уравнения для перемещений нами уже были получены в §2.3, поэтому нужно получить только уравнения для канонических переменных. В качестве канонических переменных используем переменные Андуайе [12,13] $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (рис. 4), где I_2 - модуль кинетического момента \mathbf{G} спутника относительно центра масс, I_1 - его проекция на ось симметрии спутника и I_3 - его проекция на нормаль к плоскости орбиты. Запишем уравнения движения для канонических переменных в форме уравнений Рауса:

$$\dot{I}_i = -\nabla_{\varphi_i} \tilde{R}, \quad \dot{\varphi}_i = \nabla_{I_i} \tilde{R}, \quad i=1,2,3. \tag{2.27}$$

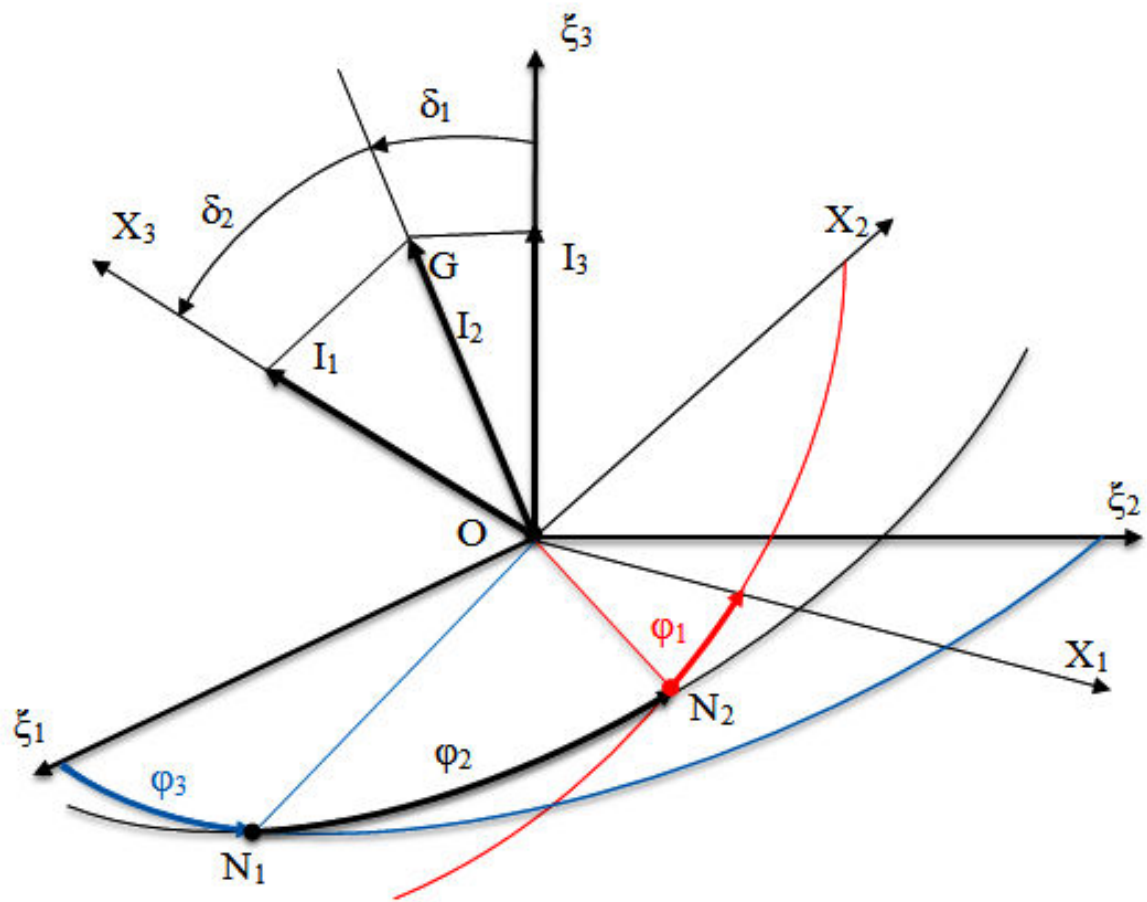


Рис 4. Переменные Андруае

Выпишем в явном виде выражение для функционала Рауса $\tilde{R} = \tilde{R}[I_i, \phi_i, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}]$. Обозначим через L функционал Лагранжа, тогда по определению функционала Рауса

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^3 I_i \dot{\phi}_i - L = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \dot{\phi}_i - L, \quad L = T - U - E[\mathbf{u}],$$

где T – кинетическая энергия, имеющая вид

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}})^2 \rho dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \rho dx + \int_{\Omega_2} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) \dot{\mathbf{u}} \rho dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx.$$

Так как

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_i} (T - U - E) = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_i} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \rho dx + \int_{\Omega_2} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) \dot{\mathbf{u}} \rho dx \right),$$

то по теореме Эйлера об однородных функциях (первое слагаемое в скобках – функция второй степени, а второе – первой) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \dot{\phi}_i - L = 2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \rho dx + \int_{\Omega_2} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) \dot{\mathbf{u}} \rho dx - T + U + E[\mathbf{u}] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \rho dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx + U + E[\mathbf{u}]. \end{aligned}$$

Кинетический момент спутника относительно центра масс записывается как:

$$\mathbf{G} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} T = \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}] \rho dx = J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}_u, \quad (2.28)$$

где

$$\mathbf{G}_u = \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \dot{\mathbf{u}} \rho dx, \quad (2.29)$$

а $J = J[\mathbf{u}]$ - тензор инерции. Используя формулы (2.28), (2.29) выражение для функционала Рауса преобразуем к виду:

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}((\mathbf{G} - \mathbf{G}_u), J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx + U + E[\mathbf{u}]. \quad (2.30)$$

Вектор кинетического момента в переменных Андуайе записывается как

$$\mathbf{G} = (\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1, \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1, I_1)^T, \quad (2.31)$$

а матрица $O(t)$ в виде

$$O(t) = \Gamma_3(\varphi_3) \Gamma_1(\delta_1) \Gamma_3(\varphi_2) \Gamma_1(\delta_2) \Gamma_3(\varphi_1), \quad (2.32)$$

где

$$\Gamma_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Кроме того, справедливо равенство

$$(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) = (\boldsymbol{\omega}, J[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}) \approx (J_0 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \dots,$$

где J_0 - тензор инерции недеформированного спутника, $J_1[\mathbf{u}]$ - линейная по \mathbf{u} компонента тензора инерции. Заметим, что вообще компоненты тензоров инерции спутника относительно центра масс C и центра масс в недеформированном состоянии C' отличаются друг от друга на члены второго порядка малости по \mathbf{u} . Поскольку

$$J[\mathbf{u}] \approx J_0 + J_1[\mathbf{u}] + \dots,$$

то следовательно

$$J^{-1}[\mathbf{u}] \approx (J_0 + J_1[\mathbf{u}] + \dots)^{-1} = (J_0(E + J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}] + \dots))^{-1}.$$

Для любых квадратных невырожденных матриц S и P справедливо

$$(SP)^{-1} = P^{-1}S^{-1},$$

а потому

$$\begin{aligned} J^{-1}[\mathbf{u}] &\approx (J_0(E + J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}] + \dots))^{-1} = (E + J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}] + \dots)^{-1}J_0^{-1} = (E - J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}] + \dots)J_0^{-1} \approx \\ &\approx J_0^{-1} - J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}]J_0^{-1}, \end{aligned}$$

$$J_0^{-1} = \text{diag}(A^{-1}, A^{-1}, C^{-1}).$$

Здесь A и C – экваториальный и осевой моменты инерции спутника в недеформированном состоянии. Найдем компоненты $J_1[\mathbf{u}] = \|J_{ij}^1\|$, раскладывая в ряд выражение для $J[\mathbf{u}]$ и оставляя слагаемые пропорциональные первой степени координат вектора \mathbf{u} :

$$J_{ii}^1 = 2 \int_{\Omega_2} (\mathbf{ru} - x_i u_i) \rho_2 dx, \quad J_{ij}^1 = - \int_{\Omega_2} (x_i u_j + x_j u_i) \rho_2 dx, \quad i \neq j,$$

или более подробно

$$\begin{aligned} J_{11}^1 &= 2 \int_{\Omega_2} (x_2 u_2 + x_3 u_3) \rho_2 dx, & J_{22}^1 &= 2 \int_{\Omega_2} (x_1 u_1 + x_3 u_3) \rho_2 dx, \\ J_{33}^1 &= 2 \int_{\Omega_2} (x_1 u_1 + x_2 u_2) \rho_2 dx, & J_{12}^1 &= J_{21}^1 = - \int_{\Omega_2} (x_1 u_2 + x_2 u_1) \rho_2 dx, \\ J_{13}^1 &= J_{31}^1 = - \int_{\Omega_2} (x_1 u_3 + x_3 u_1) \rho_2 dx, & J_{23}^1 &= J_{32}^1 = - \int_{\Omega_2} (x_2 u_3 + x_3 u_2) \rho_2 dx, \end{aligned} \quad (2.33)$$

Мы считаем, что упругая часть спутника обладает достаточно большой жесткостью. Если жесткость устремить к бесконечности, то спутник становится абсолютно твердым телом, упругие перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, а следовательно, и

$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Уравнения Рауса (2.27) в этом случае описывают вращение абсолютно твердого спутника. Получим уравнения (2.27) для этого случая.

Функция Рауса приобретает вид:

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}) + U,$$

где гравитационный потенциал

$$U \approx -\frac{3}{2}\mu R^{-3} \int_{\Omega} (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})^2 \rho dx.$$

Преобразуем выражение гравитационного потенциала:

$$U = -\frac{3}{2}\mu R^{-3} \int_{\Omega} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^2 \rho dx = -\frac{3}{2}\mu R^{-3} \int_{\Omega} (\gamma_1^2 x_1^2 + \gamma_2^2 x_2^2 + \gamma_3^2 x_3^2) \rho dx.$$

Но вследствие осевой симметрии

$$\int_{\Omega} x_1^2 \rho dx = \int_{\Omega} x_2^2 \rho dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) \rho dx = \frac{1}{2} C.$$

Кроме того

$$\int_{\Omega} x_3^2 \rho dx = \int_{\Omega} (x_3^2 + x_2^2) \rho dx - \int_{\Omega} x_2^2 \rho dx = A - \frac{1}{2} C.$$

Используя полученные формулы, выведем

$$U \approx -\frac{3}{2}\mu R^{-3} \left[\frac{C}{2} + \gamma_3^2 (A - C) \right],$$

при этом мы можем опустить константу $C/2$ в квадратных скобках, так как она не повлияет на вид уравнений Рауса, после чего выражение для U еще упростится:

$$U \approx -\frac{3}{2}\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3^2.$$

Далее, первый член функционала Рауса запишется в виде

$$\frac{1}{2}(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}) = \frac{1}{2}(A^{-1}(I_2^2 - I_1^2) + C^{-1}I_1^2),$$

и, таким образом, функционал Рауса станет

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}(A^{-1}(I_2^2 - I_1^2) + C^{-1}I_1^2) - \frac{3}{2}\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3^2, \quad (2.34)$$

а уравнения Рауса приобретут вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varphi_i} = 3\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varphi_i}, \quad i=1,2,3, \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial I_1} = \dot{\varphi}_{10} - 3\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial I_1}, \quad \varphi_{10} = I_1 A^{-1} C^{-1} (A-C), \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial I_2} = \dot{\varphi}_{20} - 3\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial I_2}, \quad \varphi_{20} = A^{-1} I_2, \\ \dot{\varphi}_3 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial I_3} = -3\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial I_3}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Уравнения (2.35) описывают движение твердого спутника относительно центра масс как прецессию оси симметрии вокруг вектора кинетического момента \mathbf{G} , в свою очередь прецессирующего вокруг нормали к плоскости орбиты [6]. Такое движение выберем в качестве невозмущенного.

Возмущающая часть потенциальной энергии гравитации будет иметь вид:

$$U \approx -\mu R^{-3} \int_{\Omega_2} [3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u}) - (\mathbf{r}, \mathbf{u})] \rho_2 dx. \quad (2.36)$$

Вычислим теперь возмущающую часть кинетической энергии вращения. Для этого вначале преобразуем выражение $\frac{1}{2}(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u))$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u)) &\approx \frac{1}{2}(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u, (J_0^{-1}-J_0^{-1}J_1J_0^{-1})(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u)) = \\ &= \frac{1}{2}\{(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}-J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G}-J_0^{-1}\mathbf{G}_u+J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G}_u)- \\ &\quad -(\mathbf{G}_u, J_0^{-1}\mathbf{G}-J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G}-J_0^{-1}\mathbf{G}_u+J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G}_u)\} = \\ &= \frac{1}{2}\{(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G})-(\mathbf{G}, J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G})-(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}_u)+(\mathbf{G}, J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G}_u)- \\ &\quad -(\mathbf{G}_u, J_0^{-1}\mathbf{G})-(\mathbf{G}_u, J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G})-(\mathbf{G}_u, J_0^{-1}\mathbf{G}_u)+(\mathbf{G}_u, J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G}_u)\} \approx \\ &\approx \frac{1}{2}\{(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G})-(\mathbf{G}, J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G})-2(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}_u)\}. \end{aligned}$$

Здесь в конце были опущены члены более высокого чем первый порядка малости по \mathbf{u} . Первый член в правой части равенства соответствует невозмущенному движению и не должен входить в возмущающую часть кинетической энергии. Таким образом, возмущающая функции Рауса будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \tilde{R} \approx \frac{1}{2}(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}) - \frac{1}{2}(\mathbf{G}, J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G}) - (\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}_u) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx - \\ - \mu R^{-3} \int_{\Omega_2} [3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u}) - (\mathbf{r}, \mathbf{u})] \rho_2 dx + E[\mathbf{u}]. \quad (2.37) \end{aligned}$$

Мы будем писать уравнения Рауса только для канонических переменных, поэтому члены выражения (2.37), не зависящие от них, также можно опустить. Функция Рауса примет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &\approx \tilde{R}^* - \mu R^{-3} \int_{\Omega_2} 3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u})\rho_2 dx, \\ \tilde{R}^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}) - \frac{1}{2}(\mathbf{G}, J_0^{-1}J_1J_0^{-1}\mathbf{G}) - (\mathbf{G}, J_0^{-1}\mathbf{G}_u).\end{aligned}\quad (2.38)$$

Очевидно, что \tilde{R}^* не зависит от углов φ_2, φ_3 и потому $\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial \varphi_3} = 0$. Уравнения

Рауса для I_i примут вид

$$\begin{aligned}\dot{I}_i &= -\nabla_{\varphi_i} \tilde{R}^* + \mu R^{-3} \left\{ \int_{\Omega_2} 3(\nabla_{\varphi_i}(O^{-1}\mathbf{R}^0), \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u})\rho_2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_2} 3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(\nabla_{\varphi_i}(O^{-1}\mathbf{R}^0), \mathbf{u})\rho_2 dx \right\}.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Заметим, что деформации упругой части, описываемые формулами (2.25), вызываются двумя основными причинами – силами инерции вращения и силами гравитации. Силы инерции при быстром вращении спутника будут значительно превосходить силы гравитации и будут вызывать быструю эволюцию вращательного движения, в отличие от медленной гравитационной эволюции. Поэтому разобьем эволюцию на два этапа: быструю под действием сил инерции вращения и медленную под действием гравитации.

§ 2.5. Быстрая эволюция вращательного движения спутников

Из формул (2.37), (2.38) следует, что уравнения для I_2, I_3 будут

$$\dot{I}_2 = 0, \quad \dot{I}_3 = 0$$

то есть переменные I_2, I_3 не эволюционируют.

Получим уравнение для I_1 . Будем искать решения уравнений для модальных переменных, опустив члены с гравитацией и приняв $\boldsymbol{\omega} \approx J_0^{-1} \mathbf{G}$.

Найдем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &\approx (A^{-1}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin\varphi_1, A^{-1}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin\varphi_1, C^{-1}I_1)^T, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &\approx (A^{-1}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10}, -A^{-1}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10}, 0)^T.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Из формул (2.26) определим

$$q_{00} = 0,$$

$$p_{00} = 0,$$

$$q_{10} = -v_1^{-2}([b_{123} + b_{132}]A^{-1}C^{-1}I_1\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos\varphi_1 - [b_{123} - b_{132}]A^{-1}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10}), \quad (2.41)$$

$$p_{10} = -v_1^{-2}([b_{123} + b_{132}]A^{-1}C^{-1}I_1\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin\varphi_1 - [b_{123} - b_{132}]A^{-1}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10}),$$

$$q_{20} = -v_2^{-2}b_{212}A^{-2}(I_2^2 - I_1^2) \sin 2\varphi_1,$$

$$p_{20} = -v_2^{-2}b_{212}A^{-2}(I_2^2 - I_1^2) \cos 2\varphi_1.$$

Из формул (2.41) вычислим производные:

$$\dot{q}_{00} = 0,$$

$$\dot{p}_{00} = 0, \quad (2.42)$$

$$\dot{q}_{10} = -v_1^{-2}([b_{123} + b_{132}]A^{-1}C^{-1}I_1\sqrt{I_2^2 - I_1^2} (-\sin\varphi_1)\dot{\varphi}_{10} + [b_{123} - b_{132}]A^{-1}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10}^2),$$

$$\dot{p}_{10} = -v_1^{-2}([b_{123} + b_{132}]A^{-1}C^{-1}I_1\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10} - [b_{123} - b_{132}]A^{-1}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10}^2),$$

$$\dot{q}_{20} = -2v_2^{-2}b_{212}A^{-2}(I_2^2 - I_1^2) \cos 2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10},$$

$$\dot{p}_{20} = -2\nu_2^{-2} b_{212} A^{-2} (I_2^2 - I_1^2) \cos 2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_{10}.$$

Используя равенства (2.41), (2.42) и соотношения

$$\alpha_1 \approx \chi b \dot{\varphi}_{10}, \quad \cos \alpha_1 \approx 1, \quad \sin \alpha_1 \approx \chi b \dot{\varphi}_{10},$$

$$\cos \varphi_1 + \chi b \sin \varphi_1 \approx \cos \varphi_1 \cos \alpha_1 + \sin \varphi_1 \sin \alpha_1 = \cos(\varphi_1 - \alpha_1).$$

получаем значения модальных переменных:

$$q_0 = 0,$$

$$p_0 = 0,$$

(2.43)

$$q_1 = -\nu_1^{-2} A^{-2} C^{-1} I_1 \sqrt{I_2^2 - I_1^2} [C b_{123} + (2A - C) b_{132}] \cos(\varphi_1 - \alpha_1),$$

$$p_1 = -\nu_1^{-2} A^{-2} C^{-1} I_1 \sqrt{I_2^2 - I_1^2} [C b_{123} + (2A - C) b_{132}] \sin(\varphi_1 - \alpha_1),$$

$$q_2 = -\nu_2^{-2} b_{212} A^{-2} (I_2^2 - I_1^2) \sin 2(\varphi_1 - \alpha_1),$$

$$\dot{p}_{20} = \nu_2^{-2} b_{212} A^{-2} (I_2^2 - I_1^2) \cos 2(\varphi_1 - \alpha_1).$$

Далее находим

$$J_0^{-1} J_1 J_0^{-1} = \begin{vmatrix} J_{11}^1 A^{-2} & J_{12}^1 A^{-2} & J_{13}^1 A^{-1} C^{-1} \\ J_{21}^1 A^{-2} & J_{22}^1 A^{-2} & J_{23}^1 A^{-1} C^{-1} \\ J_{31}^1 A^{-1} C^{-1} & J_{32}^1 A^{-1} C^{-1} & J_{33}^1 C^{-2} \end{vmatrix}, \quad (2.44)$$

$$(\mathbf{G}, J_0^{-1} \mathbf{G}_u) = (J_0^{-1} \mathbf{G}, \mathbf{G}_u) =$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[A^{-1} \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \left((x_2 \dot{u}_3 - x_3 \dot{u}_2) \sin \varphi_1 + (x_3 \dot{u}_1 - x_1 \dot{u}_3) \cos \varphi_1 \right) + C^{-1} I_1 (x_1 \dot{u}_2 - x_2 \dot{u}_1) \right] \rho_2 dx.$$

После громоздких вычислений, используя формулы (2.39), (2.40), (2.43), (2.44) получим уравнение для I_1 :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 = & A^{-1} \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \rho_2 \int_{\Omega_2} \{ (x_2 \dot{u}_3 - x_3 \dot{u}_2) \cos \varphi_1 - (x_3 \dot{u}_1 - x_1 \dot{u}_3) \cos \varphi_1 + \\
& + A^{-1} \sqrt{I_2^2 - I_1^2} [(x_2 u_2 - x_1 u_1) \sin 2\varphi_1 - (x_1 u_2 + x_2 u_1) \cos 2\varphi_1] + \\
& + 2C^{-1} I_1 [(x_2 u_3 + x_3 u_2) \sin \varphi_1 - (x_1 u_3 + x_3 u_1) \cos \varphi_1] \} dx
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Введем переменную $\varphi_{10} = \dot{\varphi}_{10} t$ (угол φ_1 описывает вращение вокруг оси симметрии спутника). Согласно уравнениям (2.35) она является быстрой переменной. Поэтому усредним уравнение (2.45) по переменной φ_{10} . Отметим, что при усреднении все коэффициенты с номером $k=0$ пропадают, что означает, что деформации по формам с индексом 0 не влияют на эволюцию вращательного движения спутника. Уравнение (2.45) заменится на усредненное:

$$\dot{I}_1 = \chi b A^{-5} C^{-1} \rho_2 (C - A) I_1 (I_2^2 - I_1^2) [4(I_2^2 - I_1^2) \lambda_2 + I_1^2 \lambda_1], \tag{2.46}$$

где

$$\lambda_1 = v_1^{-2} [b_{123} + (2AC^{-1} - 1)b_{132}]^2 > 0, \quad \lambda_2 = v_2^{-2} b_{212}^2 > 0.$$

Знак правой части уравнения (2.46) определяется знаком $C-A$. Если $C > A$, то производная $\dot{I}_1 > 0$ и переменная I_1 монотонно возрастает, в случае $C < A$ производная $\dot{I}_1 < 0$ и переменная I_1 монотонно убывает. Стационарными движениями уравнения (2.46) будут $I_1 = I_2$ и $I_1 = 0$.

Уравнение в вариациях для стационарного движения $I_1 = 0$ будет иметь вид:

$$\delta \dot{I}_1 = k \lambda_2 I_2^4 \delta I_1,$$

где

$$k = \chi b A^{-5} C^{-1} \rho_2 (C - A).$$

Следовательно, стационарное движение $I_1 = 0$ будет асимптотически устойчиво при $C < A$ и неустойчиво при $C > A$.

Уравнение в вариациях для стационарного движения $I_1 = I_2$ будет

$$\delta \dot{I}_1 = -2k\lambda_1 I_1^4 \delta I_1.$$

Следовательно, стационарное движение $I_1 = I_2$ будет асимптотически устойчиво при $C > A$ и неустойчиво при $C < A$.

Таким образом, в результате быстрой эволюции вектор кинетического момента спутника \mathbf{G} будет либо при $C > A$ стремиться занять положение вдоль оси симметрии Sx_3 (при $I_1 \rightarrow I_2$ углы $\delta_2 \rightarrow 0$, $\delta_1 \rightarrow 0$ - см. Рис.4), либо при $C < A$ стремиться занять положение в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (при $I_1 \rightarrow 0$ угол $\delta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, а угол $\delta_1 \rightarrow 0$ см. Рис. 4).

§ 2.6. Медленная диссипативная эволюция

Рассмотрим случай медленной диссипативной эволюции вследствие действия гравитационных приливов. Будем считать быструю эволюцию (в случае $C > A$) закончившейся, и примем $I_1 = I_2$, $\varphi_1 = 0$. Вычислим явно координаты вектора $O^{-1}\mathbf{R} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$. По формулам (2.32):

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = (\Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_I(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_I(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1))^{-1} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Заметим, что $\Gamma_3(\varphi_1) = \Gamma_3(0) = E$, $\Gamma_I(\delta_2) = \Gamma_I(0) = E$, поскольку $\delta_2 = 0$ после завершения быстрой эволюции. Тогда

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \Gamma_3^T(\varphi_2)\Gamma_I^T(\delta_1)\Gamma_3^T(\varphi_3))^{-1} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \cos\alpha + \sin\varphi_2 \sin\alpha \cos\delta_1 \\ -\sin\varphi_2 \cos\alpha + \cos\varphi_2 \sin\alpha \cos\delta_1 \\ -\sin\delta_1 \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

Здесь введен вспомогательной угол α :

$$\alpha = \vartheta - \varphi_3.$$

Вследствие справедливости формул $\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial \varphi_3} = 0$, уравнение (2.39) для I_2, I_3

упрощается и принимает вид

$$\dot{I}_i = \mu R^{-3} \left\{ \int_{\Omega_2} 3(\nabla_{\varphi_i}(O^{-1}\mathbf{R}^0), \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u})\rho_2 dx + \int_{\Omega_2} 3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(\nabla_{\varphi_i}(O^{-1}\mathbf{R}^0), \mathbf{u})\rho_2 dx \right\}, \quad i = 2, 3. \quad (2.49)$$

Перепишем еще раз уравнение (2.49), преобразовав его к виду:

$$\begin{aligned} \dot{I}_i = 3\mu R^{-3} \left\{ \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} [\gamma_1^2 x_1 u_1 + \gamma_2^2 x_2 u_2 + \gamma_3^2 x_3 u_3 + \right. \\ \left. + \gamma_1 \gamma_2 (x_2 u_1 + u_2 x_1) + \gamma_1 \gamma_3 (x_3 u_1 + u_1 x_3) + \gamma_2 \gamma_3 (x_3 u_2 + u_2 x_3)] \rho_2 dx \right\}, \quad i = 2, 3 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Теперь надо вычислить значения нормальных координат для случая медленной диссипативной эволюции и подставить их в уравнения (2.50).

Будем искать нормальные координаты, используя (2.26) и при их вычислении

имея в виду, что выполняются условия $I_1 = I_2$, $\varphi_1 = 0$, $I_2 = const$, $\delta_1 = const$.

Для кинетического момента \mathbf{G} получим

$$\mathbf{G} = (0, 0, C^{-1}I_2), \quad \boldsymbol{\omega} = J_0^{-1}\mathbf{G}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0. \quad (2.51)$$

Из (2.26) выведем

$$q_{00} = 0,$$

$$p_{00} = 0,$$

$$q_{10} = 3\nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}] \mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3,$$

$$p_{10} = 3\nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}] \mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3, \quad (2.52)$$

$$q_{20} = 6\nu_2^{-2} b_{212} \mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2,$$

$$p_{20} = 3\nu_2^{-2} b_{212} \mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Уравнения (2.52) позволяют вычислить производные от q_{i0}, p_{i0} :

$$\dot{q}_{00} = 0,$$

$$\dot{p}_{00} = 0,$$

$$\dot{q}_{10} = 3\nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}] [\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3]$$

$$\dot{p}_{10} = 3\nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}] [\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3] \quad (2.53)$$

$$\dot{q}_{20} = 6\nu_2^{-2} b_{212} [\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2]$$

$$\dot{p}_{20} = 3\nu_2^{-2} b_{212} [\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)]$$

Отсюда выведем выражения для нормальных координат

$$q_0 = 0$$

$$p_0 = 0$$

$$q_1 = 3\nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}] \left(\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3 - \chi b [\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3] \right)$$

$$p_1 = 3\nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}] \left(\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3 - \chi b [\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3] \right) \quad (2.54)$$

$$q_2 = 6\nu_2^{-2} b_{212} \left(\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2 - \chi b [\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2] \right)$$

$$p_2 = 3\nu_2^{-2} b_{212} \left(\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - \chi b [\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] \right).$$

Подставим формулы (2.53) в уравнения (2.50) и вычислим по отдельности выражения

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1^2 x_1 u_1) dx = \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1^2) [b_{212} p_2] =$$

$$= \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1^2) \left\{ 3b_{212}^2 \nu_2^{-2} \left[\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - \chi b [\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] \right] \right\}$$

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_3^2 u_3 x_3) dx = 0$$

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2^2 x_2 u_2) dx = \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2^2) [-b_{212} p_2] = \quad (2.55)$$

$$= \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2^2) \left\{ -3b_{212}^2 \nu_2^{-2} \left[\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - \chi b [\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_2 (x_2 u_1 + x_1 u_2)) dx &= \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_2) [2b_{212} q_2] = \\ &= \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_2) \left\{ 12\nu_2^{-2} b_{212}^2 \left[\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2 - \chi b [\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2] \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_3 (x_3 u_1 + x_1 u_3)) dx &= \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_3) [b_{123} + b_{132}] p_1 = \\ &= \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_3) \left\{ 3\nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}]^2 \left[\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3 - \chi b [\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3] \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2 \gamma_3 (x_3 u_2 + x_2 u_3)) dx &= \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2 \gamma_3) [b_{123} + b_{132}] q_1 = \\ &= \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2 \gamma_3) \left\{ 3\nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}]^2 \left[\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3 - \chi b [\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку мы планируем далее усреднить уравнения (2.50), чтобы выявить эволюционные процессы, то отбросим в равенствах (2.55) все недиссипативные члены, и вместо равенств (2.55) запишем

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1^2 x_1 u_1) dx &\rightarrow \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1^2) (\chi b) \left\{ 3\nu_2^{-2} b_{212}^2 [\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] \right\} \\ \rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2^2 x_2 u_2) dx &\rightarrow \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2^2) (\chi b) \left\{ 3b_{212}^2 \nu_2^{-2} [\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] \right\}, \quad (2.56) \\ \rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_2 (x_2 u_1 + x_1 u_2)) dx &\rightarrow \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_3) \left\{ -12\chi b \nu_2^{-2} b_{212}^2 [\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2] \right\}, \\ \rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_3 (x_3 u_1 + x_1 u_3)) dx &\rightarrow \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_1 \gamma_3) \left\{ -3\chi b \nu_1^{-2} [b_{123} + b_{132}]^2 [\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3] \right\}, \end{aligned}$$

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2 \gamma_3 (x_3 u_2 + x_2 u_3)) dx \rightarrow \rho_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\gamma_2 \gamma_3) \left\{ -3\chi b v_1^{-2} [b_{123} + b_{132}]^2 [\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3] \right\}.$$

Здесь вместо знаков равенств использованы стрелки, чтобы показать на какие выражения были заменены первоначальные слагаемые при отбрасывании не диссипативных членов.

В результате уравнение (2.50) переписется в виде

$$\begin{aligned} \dot{I}_i = 3\chi b \mu R^{-3} \rho_2 \left\{ 3\mu_1 \left[[\mu R^{-3} (\gamma_1 \gamma_3)] \frac{\partial (\gamma_1 \gamma_3)}{\partial \varphi_i} + [\mu R^{-3} (\gamma_2 \gamma_3)] \frac{\partial (\gamma_2 \gamma_3)}{\partial \varphi_i} \right] + \right. \\ \left. + 3\mu_2 \left[[\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] \frac{\partial (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{\partial \varphi_i} + 4[\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2] \frac{\partial (\gamma_1 \gamma_2)}{\partial \varphi_i} \right] \right\}, \quad k = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Здесь введены обозначения

$$\mu_1 = v_1^{-2} [b_{123} + b_{132}]^2 > 0, \quad \mu_2 = \lambda_2 > 0$$

Уравнения (2.57) все еще слишком сложны, поэтому усредним их по быстрой переменной $\varphi_{20} = \dot{\varphi}_{20} t$ (угол φ_2 описывает прецессию оси симметрии спутника вокруг вектора кинетического момента \mathbf{G}). Для этого воспользуемся следующими равенствами:

$$\frac{\partial \gamma_3^2}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varphi_2} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_3^2}{\partial \varphi_3} = -\sin 2\alpha \sin^2 \delta_1,$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi_2} = \gamma_2, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi_2} = -\gamma_1,$$

$$\frac{\partial (\gamma_1 \gamma_3)}{\partial \varphi_2} = \gamma_2 \gamma_2, \quad \frac{\partial (\gamma_2 \gamma_3)}{\partial \varphi_2} = -\gamma_1 \gamma_3,$$

$$\langle (\gamma_1 \gamma_2) \rangle_{\varphi_{20}} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \gamma_2^2}{\partial \varphi_2} \right\rangle_{\varphi_{20}} = 0.$$

После весьма громоздких вычислений получим:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_2 = & -9\chi b\mu^2 R^{-6} \rho_2 \left\{ \dot{\phi}_{20} \left[\sin^4 \delta_1 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\mu_1 - 4\mu_2) + \right. \right. \\
 & + \sin^2 \alpha \left[\mu_1 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 + 4\mu_2 (\cos^4 \delta_1 - 1) \right] + 4\mu_2 \left. \right] + \\
 & \left. + \dot{\vartheta} \left[\sin^2 \delta_1 \sin^2 \alpha (4\mu_2 - \mu_1) - 4\mu_2 \right] \cos \delta_1 + 4\mu_2 \right\} \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_3 = & -9\chi b\mu^2 R^{-6} \rho_2 \left\{ R^{-1} \dot{R} \sin^2 \delta_1 \sin 2\alpha \left[3\sin^2 \delta_1 \cos^2 \alpha (\mu_2 - \mu_1) + \right. \right. \\
 & + 3\sin^2 \alpha \left[\frac{1}{2} \mu_1 + \cos^2 \delta_1 (\mu_2 - \mu_1) \right] \left. \right] + \\
 & + \dot{\phi}_{20} \cos \delta_1 \left[\sin^2 \delta_1 \sin^2 \alpha (4\mu_2 - \mu_1) - 4\mu_2 \right] + \\
 & \left. + \dot{\vartheta} \left[4\sin^4 \delta_1 \sin^2 \alpha (\mu_2 - \mu_1) + \cos^2 \delta_1 (4\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Уравнения (2.58) описывают эволюцию вращений спутника на минимальном промежутке времени порядка одного оборота центра масс спутника по орбите. Эти уравнения сложны для анализа, поэтому для выделения главных эффектов медленной диссипативной эволюции, проведем еще одно усреднение уравнений (2.58) по переменной $\tau = \omega_0 t$. При усреднении следует иметь в виду равенства

$$dt = \omega_0^{-1} d\tau, \quad d\tau = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} d\vartheta,$$

$$\dot{R} = \left(\frac{p}{1+e\cos\vartheta} \right) \dot{\vartheta} = \frac{pe}{(1+e\cos\vartheta)^2} \sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta},$$

$$p = a(1-e^2).$$

Вычислим

$$\langle R^{-6} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \rangle_{\tau} = p^{-6} \Phi_1(e), \quad \Phi_1(e) = \frac{1}{4} (1-e^2)^{3/2} \left[\frac{1}{2} + \frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{32} (5 + 2 \sin^2 2\varphi_3) \right],$$

$$\langle R^{-6} \sin^2 \alpha \rangle_{\tau} = p^{-6} \Phi_2(e), \quad \Phi_2(e) = \frac{1}{4} (1-e^2)^{3/2} \left[\frac{1}{2} + \frac{3e^2}{4} (1 + 2 \sin^2 \varphi_3) + \frac{e^4}{16} (1 + 4 \sin^2 \varphi_3) \right],$$

$$\langle R^{-6} \rangle_{\tau} = p^{-6} \Phi_3(e), \quad \Phi_3(e) = (1-e^2)^{3/2} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8} e^4 \right), \quad (2.59)$$

$$\langle R^{-6} \dot{\mathfrak{G}} \sin^2 \alpha \rangle_{\tau} = \omega_0 p^{-6} \Phi_4(e),$$

$$\Phi_4(e) = \frac{1}{2} + \frac{15}{8} e^2 (1 + 2 \sin^2 \varphi_3) + \frac{15}{16} e^4 (1 + 4 \sin^2 \varphi_3) + \frac{5}{128} e^6 (1 + 6 \sin^2 \varphi_3),$$

$$\langle R^{-6} \dot{\mathfrak{G}} \rangle_{\tau} = \omega_0 p^{-6} \Phi_5(e), \quad \Phi_5(e) = 1 + \frac{15}{2} e^2 + \frac{45}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6,$$

$$\langle R^{-7} \dot{R} \sin 2\alpha \cos^2 \alpha \rangle_{\tau} = \omega_0 p^{-6} \Phi_6(e), \quad \Phi_6(e) = \frac{1}{8} \left[5 \left(e^2 + e^4 + \frac{e^6}{16} \right) \cos 2\varphi_3 + \left(\frac{5}{4} e^4 + \frac{e^6}{8} \right) \cos 4\varphi_3 \right],$$

$$\langle R^{-7} \dot{R} \sin 2\alpha \rangle_{\tau} = \omega_0 p^{-6} \Phi_7(e), \quad \Phi_7(e) = \frac{5}{4} \left(e^2 + e^4 + \frac{e^6}{16} \right) \cos 2\varphi_3,$$

$$\langle R^{-7} \dot{\mathfrak{G}} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \rangle_{\tau} = \omega_0 p^{-6} \Phi_8(e),$$

$$\Phi_8(e) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{15}{4} e^2 + \frac{15}{32} e^4 (5 + 2 \sin^2 2\varphi_3) + \frac{e^6}{64} (7 + 6 \sin^2 2\varphi_3) \right],$$

Используя (2.58) выпишем результирующие усредненные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 = -k \left\{ I_2 \left[\sin^4 \delta_1 (\mu_1 - 4\mu_2) \Phi_1(e) + [\mu_1 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 + 4\mu_2 (\cos^4 \delta_1 - 1)] \Phi_2(e) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4\mu_2 \Phi_3(e) \right] + C \omega_0 \cos \delta_1 \left[\sin^2 \delta_1 (4\mu_2 - \mu_1) \Phi_4(e) - 4\mu_2 \Phi_5(e) \right] \right\}, \quad (2.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{I}_3 = -k \left\{ C\omega_0 \sin^2 \delta_1 \left[3\sin^2 \delta_1 (\mu_2 - \mu_1) \Phi_6(e) + \right. \right. \\
\left. \left. + \left(3 \left[\frac{1}{2} \mu_1 + \cos^2 \delta_1 (\mu_2 - \mu_1) \right] + \mu_0 (1 - 3\sin^2 \delta_1) \right) \Phi_7(e) \right] + \right. \\
\left. + I_2 \cos \delta_1 \left[\sin^2 \delta_1 (4\mu_2 - \mu_1) \Phi_2(e) - 4\mu_2 \Phi_3(e) \right] + \right. \\
\left. + C\omega_0 \left[4\sin^4 \delta_1 (\mu_2 - \mu_1) \Phi_8(e) + [\cos^2 \delta_1 (4\mu_2 - \mu_1) + \mu_1] \Phi_7(e) \right] \right\},
\end{aligned}$$

где обозначено

$$k = 9\chi b\mu^2 p^{-6} \rho_2 C^{-1}.$$

Уравнения (2.60) позволяют изучать эволюцию вращений на временах порядка периода прецессии вектора \mathbf{G} вокруг нормали к плоскости орбиты центра масс.

Получим из уравнений невозмущенного движения (2.35) уравнение для угла φ_3 . Подставляя выражение для γ_3 и дифференцируя, имеем

$$\dot{\varphi}_3 = 3\mu R^{-3} (A - C) I_2^{-1} \cos \delta_1 \sin^2 \alpha.$$

Усредняя по переменной $\tau = \omega_0 t$, получаем приближенное уравнения для φ_3 :

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{3}{2} \mu p^{-3} (1 - e^2)^{3/2} (A - C) I_2^{-1} \cos \delta_1. \quad (2.61)$$

Из выражения для производной угла δ_1

$$\dot{\delta}_1 = \frac{\dot{I}_2 I_3 - \dot{I}_3 I_2}{I_2^2 \sqrt{1 - I_3^2 I_2^{-2}}}$$

и формул (2.60), (2.61) видно, что она пропорциональна, в отличие от $\dot{\varphi}_3$, малому параметру χ , то есть угол δ_1 изменяется значительно медленнее угла φ_3 . Кроме того, из формул (2.59) видно, что в течение одного оборота вектора \mathbf{G} вокруг нормали к плоскости орбиты, угол δ_1 совершает колебания с частотами $2\dot{\varphi}_3$ и $4\dot{\varphi}_3$ относительно некоторого среднего значения $\tilde{\delta}_1$. Будем рассматривать эволюцию вращений на временах существенно превышающих период прецессии вектора \mathbf{G} , для чего усредним уравнения (2.60) по углу φ_3 на периоде π . Имеем

$$\begin{aligned}\langle \Phi_1(e) \rangle_{\varphi_3} &= \frac{1}{8}(1-e^2)^{3/2} \left(1 + 3e^2 + \frac{3e^4}{8} \right), \\ \langle \Phi_2(e) \rangle_{\varphi_3} &= 4 \langle \Phi_1(e) \rangle_{\varphi_3}, \quad \langle \Phi_3(e) \rangle_{\varphi_3} = 8 \langle \Phi_1(e) \rangle_{\varphi_3}, \\ \langle \Phi_4(e) \rangle_{\varphi_3} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \right), \\ \langle \Phi_5(e) \rangle_{\varphi_3} &= 2 \langle \Phi_4(e) \rangle_{\varphi_3}, \\ \langle \Phi_6(e) \rangle_{\varphi_3} &= \langle \Phi_7(e) \rangle_{\varphi_3} = 0, \\ \langle \Phi_8(e) \rangle_{\varphi_3} &= \frac{1}{4} \langle \Phi_4(e) \rangle_{\varphi_3}.\end{aligned}\tag{2.62}$$

С учетом (2.62) усредненные уравнения (2.60) запишутся в виде

$$\dot{I}_2 = -k \left\{ I_2 \Phi_1(e) \left[\mu_1(1+2x^2-3x^4) + 4\mu_2(3+2x^2+3x^4) \right] - C\omega_0 \Phi_4(e)x \left[4\mu_2(1+x^2) + \mu_1(1-x^2) \right] \right\},$$

$$\dot{I}_3 = -k \left\{ 4I_2 \Phi_1(e)x \left[(4\mu_2 - \mu_1)(1-x^2) - 8\mu_2 \right] + \right.$$

$$+C\omega_0\Phi_4(e)\left[(\mu_2 - \mu_1)(1-x^2)^2 + 2\left[(4\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1\right]\right], \quad (2.63)$$

$$x = \cos\tilde{\delta}_1.$$

Заметим, что у нас выполняется предположение о том, что орбитальная угловая скорость много меньше угловой скорости вращения спутника

$$\varepsilon_1 = \frac{C\omega_0}{I_2} \approx 1,$$

то есть

$$C\omega_0 = \varepsilon_1 I_2.$$

С учетом вышесказанного получим еще уравнение для x :

$$\dot{x} = (\cos\tilde{\delta}_1) \dot{=} (I_3 / I_2) \dot{=} \frac{\dot{I}_3 - x\dot{I}_2}{I_2},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \dot{x} = k \{ & 4\Phi_1 x [4\mu_2(1-x^2-2) - \mu_1(1-x^2)] + \\ & + \Phi_1 x [4\mu_2(3-2x^2+3x^4) + \mu_1(1+2x^2-3x^4)] + \\ & + \varepsilon_1 \Phi_4 [(1-x^2)^2(\mu_2 - \mu_1) + 2[x^2(4\mu_2 - \mu_1) + \mu_1]] - \\ & - \varepsilon_1 \Phi_4 x^2 [4\mu_2(x^2+1) + \mu_1(1-x^2)] \}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Функция $f(x) = 1 + 2x^2 - 3x^4$ имеет корни 1, -1 и положительна при $-1 < x < 1$ а функция $f_1(x) = 3 + 2x^2 + 3x^4 > 0$ всегда. Поэтому $\dot{I}_2 < 0$ и I_2 убывает – осевое вращение спутника замедляется. Из уравнения (2.64) следует, что знак \dot{x} определяется двумя первыми слагаемыми (2.64). Перепишем их в виде

$$-\Phi_1 x [4\mu_2(1+2x^2-3x^4) + 3\mu_1(1-x^2)^2].$$

Выражение в квадратных скобках положительно при $-1 < x < 1$, поэтому знак выражения определяется знаком x . Если $x > 0$, следовательно, $\dot{x} < 0$, и $\cos \tilde{\delta}_1$ убывает, то есть угол $\tilde{\delta}_1$ растет, значит растет угол между \mathbf{G} и нормалью к плоскости орбиты, вектор \mathbf{G} наклоняется к плоскости орбиты. Если же $x < 0$, то $\dot{x} > 0$, следовательно, $\cos \tilde{\delta}_1$ возрастает и угол $\tilde{\delta}_1$ уменьшается. Поскольку угол $\tilde{\delta}_1$ - тупой, то при убывании угла происходит переворот из обратного вращения в прямое. Определим стационарные значения угла $\tilde{\delta}_1$, обозначив его через $\tilde{\delta}_{10}$. В этом случае $\dot{I}_3 - x\dot{I}_2 = 0$, и считая $x_0 = \cos \tilde{\delta}_{10} \sim \varepsilon_1$, в первом приближении получим:

$$x_0 \approx \varepsilon_1 \frac{\Phi_4(e)[\mu_1 + \mu_2]}{\Phi_1(e)[4\mu_2 + 3\mu_1]},$$

$$\tilde{\delta}_{10} \approx \arccos(x_0).$$

Заметим, что уравнение (2.64) имеет еще два стационарных значения $x_1 = -1, x_2 = 1$. Уравнение в вариациях для первого корня имеет вид

$$\delta \dot{x} = 2k(4\mu_2[4\Phi_1(e) + \varepsilon_1\Phi_4(e)] + \varepsilon_1\mu_1\Phi_4(e))\delta x, \quad x = -1 + \delta x.$$

Выражение в круглых скобках положительно, следовательно, первое стационарное решение – неустойчиво. Уравнение в вариациях для второго корня имеет вид

$$\delta \dot{x} = 2k(4\mu_2[4\Phi_1(e) - \varepsilon_1\Phi_4(e)] - \varepsilon_1\mu_1\Phi_4(e))\delta x, \quad x = 1 + \delta x.$$

Выражение в круглых скобках опять положительно, следовательно, и второе стационарное решение – неустойчиво.

ГЛАВА 3. БЫСТРЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗАДАЧЕ О ПОСТУПАТЕЛЬНО ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО СПУТНИКА

§ 3.1. Постановка задачи

Рассматривается задача о поступательно-вращательном движении вязко-упругого шара в центральном гравитационном поле сил (рис. 5). Шар – однородный и изотропный, представляет собой достаточно жёсткое твёрдое тело, деформации которого малы, а частоты собственных колебаний намного больше угловой скорости вращения. Отметим, что даже незначительная упругая податливость приводит к изменению моментов инерции тела и к «перекосу» центрального эллипсоида инерции относительно связанной с телом системы осей.

Пусть недеформированный вязкоупругий шар занимает область Ω в инерциальной системе координат. Движение точек шара задаётся векторным полем $\xi = \xi(\mathbf{r}, t)$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(t) + O(t)(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t));$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \xi \rho dx; \quad \int_{\Omega} \mathbf{u} \rho dx = \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{u} dx = 0; \quad (3.1)$$

$$M = \int_{\Omega} \rho dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

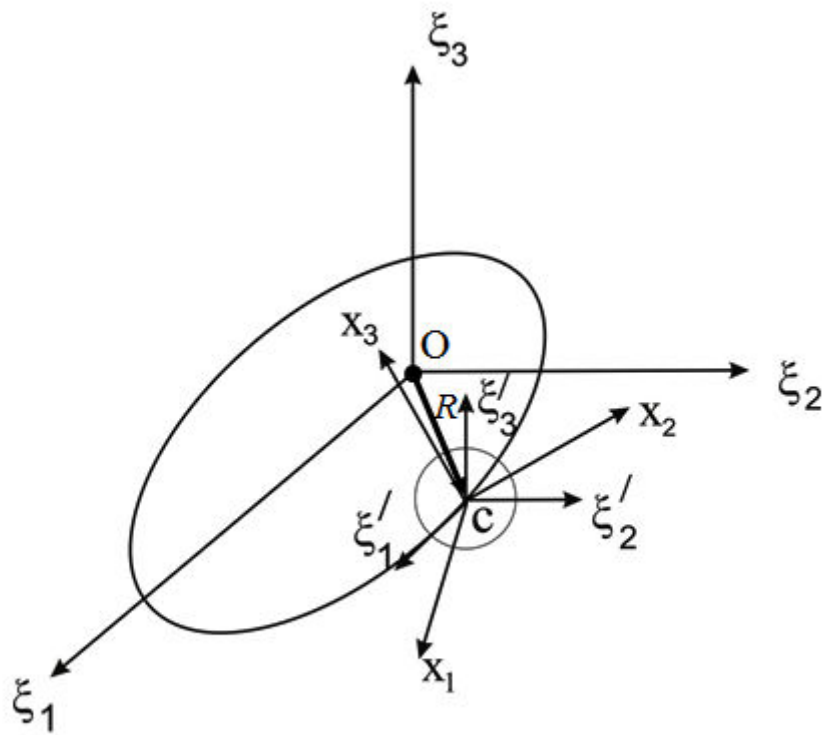


Рис 5. Инерциальная, Кёнигова и замороженная системы координат

Соотношения (3.1) однозначно определяют радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ центра масс S деформированного шара и систему координат $Sx_1x_2x_3$, относительно которой шар в интегральном смысле не вращается. Матрица $O(t)$ определяет переход от системы координат $Sx_1x_2x_3$, связанной с шаром, к осям Кёнига $S\xi_1\xi_2\xi_3$. Величина \mathbf{u} представляет собой вектор упругих перемещений. Предполагается, что величины $\partial u_i / \partial x_j$ малы и деформированное состояние тела можно описывать теорией упругости малых деформаций [26], поэтому функционал энергии упругих деформаций представляется в виде [12]

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} a'(I_E^2 - a_1 II_E) dx, \quad a' > 0; \quad 0 < a_1 < 3;$$

$$a' = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu)(1-2\nu)}; \quad a_1 = \frac{2(1-2\nu)}{(1-\nu)},$$

$$I_E = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad II_E = \sum_{i < j}^3 \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right],$$

где E и ν – модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Согласно теореме Кёнига кинетическая энергия представляется в виде

$$T = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}^2] \rho dx,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости шара.

Раскладывая в ряд потенциальную энергию гравитации по степеням малого параметра $\varepsilon_1, |r/R| \sim \varepsilon_1, |u/R| \sim \varepsilon_1^2$ и оставляя члены не выше ε_1^2 , запишем

$$\Pi \approx -\frac{\mu M}{R} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mu}{R^3} [(\mathbf{r} + \mathbf{u})^2 - 3(\mathbf{R}^0, O(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2] \rho dx,$$

где μ – гравитационная постоянная.

Для описания поступательно-вращательного движения шара воспользуемся переменными Делоне

$$L = M\sqrt{\mu a}; \quad \Lambda = M\sqrt{\mu a(1-e^2)}; \quad \Lambda \cos i = H;$$

$$l = w - e \sin w; \quad g = \omega; \quad h = \Omega,$$

(где a, e, i, ω, Ω – обычные кеплеровские элементы орбиты) и Андуайе – $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Уравнения движения представим в форме уравнений Рауса [12,41]. Если обозначить через q_i, p_i обобщённые координаты и импульсы, то функционал Рауса $\tilde{R}[L, \Lambda, H, l, g, h, I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}]$ можно представить как

$$\tilde{R} = \sum p_i q_i - \tilde{L} = \sum \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \tilde{L} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{l}} \dot{l} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{g}} \dot{g} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{h}} \dot{h} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \dot{\varphi}_i - (T - \Pi - E),$$

где \tilde{L} – лагранжиан. Заметим, что $\dot{\mathbf{R}}$ зависит только от обобщённой скорости

\dot{l} , и потому $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{h}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{g}} = 0$. Отсюда следует, что

$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{l}} \dot{l} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{g}} \dot{g} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{h}} \dot{h} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{l}} \dot{l} = \frac{\partial}{\partial \dot{l}} \left(\frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2} \right) \dot{l} = M \dot{\mathbf{R}}^2$, так как $\frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2}$ – однородная

функция 2-й степени по \dot{l} . Поскольку от $\dot{\phi}_i$ зависят только члены

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \rho dx \text{ и } \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) \dot{\mathbf{u}} \rho dx$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}_i} \dot{\phi}_i = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \rho dx + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) \dot{\mathbf{u}} \rho dx.$$

Запишем выражение первого члена формулы в двух эквивалентных видах

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \rho dx = \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}),$$

где \mathbf{G} – вращательный момент шара; $J = J[\mathbf{u}]$ – тензор инерции деформированного шара в системе координат $Cx_1x_2x_3$; $\mathbf{G}_u = \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \dot{\mathbf{u}} \rho dx$.

Справедливо равенство

$$\mathbf{G} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} T = \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}] \rho dx = J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}_u.$$

Используя приведённые формулы, получим выражение функционала Рауса

$$\tilde{R} = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx - \frac{\mu M}{R} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mu}{R^3} [(\mathbf{r} + \mathbf{u})^2 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{O}(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2] \rho dx + E[\mathbf{u}].$$

Выражение $\frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} - \frac{\mu M}{R}$ представляет собой функцию Гамильтона задачи о движении точки в поле притягивающего центра, поэтому в переменных

Делоне $\frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} - \frac{\mu M}{R} = -\frac{\mu^2 M^3}{2L^2}$, и функционал Рауса записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & -\frac{\mu^2 M^3}{2L^2} + \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mu}{R^3} [(\mathbf{r} + \mathbf{u})^2 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{O}(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2] \rho dx + E[\mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вектор \mathbf{G} и матрица O выражаются через переменные Андуайе

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= (\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1, \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1, I_1), \\ O(t) &= \Gamma_3(\varphi_3) \Gamma_1(\delta_1) \Gamma_3(\varphi_2) \Gamma_1(\delta_2) \Gamma_3(\varphi_1), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Gamma_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Кроме того,

$$(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) = (\boldsymbol{\omega}, J[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}) = (J_0 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (J_2[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}).$$

Поскольку справедливо равенство

$$\begin{aligned} (J_0 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 d\Omega = \int_{\Omega} [(x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2)^2 + (x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3)^2 + (x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1)^2] \rho dx = \\ &= \omega_3^2 \int_{\Omega} (x_2^2 + x_1^2) \rho dx + \omega_2^2 \int_{\Omega} (x_3^2 + x_1^2) \rho dx + \omega_1^2 \int_{\Omega} (x_3^2 + x_2^2) \rho d\Omega = A(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2), \end{aligned}$$

$$A = \int_{\Omega} (x_2^2 + x_1^2) \rho dx = \int_{\Omega} (x_3^2 + x_1^2) \rho dx = \int_{\Omega} (x_3^2 + x_2^2) \rho dx,$$

то J_0 запишется в виде:

$$J_0 = \text{diag}(A, A, A),$$

где A – момент инерции недеформированного шара относительно его диаметра. Аналогично вычислим

$$\begin{aligned} (J_1 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) &= 2 \int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \rho dx = \\ &= 2 \left(\omega_3^2 \int_{\Omega} (x_2 u_2 + x_1 u_1) \rho dx + \omega_2^2 \int_{\Omega} (x_3 u_3 + x_1 u_1) \rho dx + \omega_1^2 \int_{\Omega} (x_3 u_3 + x_2 u_2) \rho dx - \right. \\ &\quad \left. - \omega_2 \omega_3 \int_{\Omega} (x_3 u_2 + x_2 u_3) \rho dx - \omega_3 \omega_1 \int_{\Omega} (x_1 u_3 + x_3 u_1) \rho dx - \omega_1 \omega_2 \int_{\Omega} (x_2 u_1 + x_1 u_2) \rho dx \right), \end{aligned}$$

откуда следует

$$J_1[\mathbf{u}] = (J_{ij}^{(1)}), \quad J_2[\mathbf{u}] = (J_{ij}^{(2)}),$$

$$J_{ii}^{(1)} = 2 \int_{\Omega} (\mathbf{r} \mathbf{u} - x_i u_i) \rho dx, \quad J_{ij}^{(1)} = - \int_{\Omega} (x_i u_j + x_j u_i) \rho dx, \quad i \neq j.$$

Наконец, вычислим последнее слагаемое

$$\begin{aligned} (J_2[\mathbf{u}] \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})^2 \rho dx = \omega_3^2 \int_{\Omega} (u_2^2 + u_1^2) \rho dx + \omega_2^2 \int_{\Omega} (u_3^2 + u_1^2) \rho dx + \omega_1^2 \int_{\Omega} (u_3^2 + u_2^2) \rho dx - \\ &\quad - 2\omega_2 \omega_3 \int_{\Omega} u_2 u_3 \rho dx - 2\omega_1 \omega_2 \int_{\Omega} u_1 u_2 \rho dx, \end{aligned}$$

и потому,

$$J_{ii}^{(2)} = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^2 - u_i^2) \rho dx, \quad J_{ij}^{(2)} = - \int_{\Omega} u_i u_j \rho dx, \quad i \neq j.$$

§ 3.2. Уравнения движения

Уравнения Рауса, определяющие движение шара, запишутся в виде системы

$$\dot{L} = -\nabla_l \tilde{R}; \quad \dot{\Lambda} = -\nabla_g \tilde{R}; \quad \dot{H} = -\nabla_h \tilde{R}; \quad (3.4)$$

$$\dot{l} = -\nabla_L \tilde{R}; \quad \dot{g} = -\nabla_\Lambda \tilde{R}; \quad \dot{h} = -\nabla_H \tilde{R};$$

$$\dot{I}_i = -\nabla_{\varphi_i} \tilde{R}; \quad \dot{\varphi}_i = -\nabla_{I_i} \tilde{R}; \quad i=1,2,3; \quad (3.5)$$

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \tilde{R}) - \nabla_{\mathbf{u}} \tilde{R} - \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D + \lambda_1 \right) \delta \mathbf{u} + \lambda_2 \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} \right] dx = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6), представляет собой выражение принципа Даламбера – Лагранжа [12,13] и содержит два неопределённых множителя Лагранжа λ_1 и λ_2 . Для учёта сил вязкого трения в материале в это уравнение добавлен градиент диссипативного функционала $\nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D$. Согласно модели Кельвина – Фойгта предполагается, что $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi E[\dot{\mathbf{u}}]$, где χ – коэффициент внутреннего вязкого трения. Уравнение (3.6) с учётом (3.2) преобразуется так:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) \right) \delta \mathbf{u} \rho dx - \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \rho dx - \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) \right) \delta \mathbf{u} \rho dx - \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{R^3} [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - 3(\mathbf{R}^0, O(\mathbf{r} + \mathbf{u})) O^{-1} \mathbf{R}^0] + \lambda_1 \right) \delta \mathbf{u} \rho dx - \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$-\int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{u}} E[\mathbf{u}] + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D[\dot{\mathbf{u}}]) \delta \mathbf{u} dx + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\lambda}_2 \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\sigma = 0,$$

где слагаемое с $\boldsymbol{\lambda}_2$ (в предположении его независимости от координат x_1, x_2, x_3) преобразовано по формуле Остроградского – Гаусса

$$\left(\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{A} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{A} d\sigma \right)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}_2 \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} dx = \boldsymbol{\lambda}_2 \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \delta \mathbf{u} d\sigma = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times \delta \mathbf{u}) \boldsymbol{\lambda}_2 d\sigma = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\lambda}_2 \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\sigma,$$

а также вычислены выражения

$$\frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{u}} \left[\frac{\mu}{R^3} (\mathbf{r} + \mathbf{u})^2 \right], \delta \mathbf{u} \right) = \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} \left(\nabla_{\mathbf{u}} \left[2(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \right], \delta \mathbf{u} \right) = \frac{\mu}{R^3} (\mathbf{r} + \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}),$$

$$\frac{3}{2} \left(\nabla_{\mathbf{u}} \left[\frac{\mu}{R^3} (\mathbf{R}^0, O(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \right], \delta \mathbf{u} \right) = \frac{3}{2} \frac{\mu}{R^3} \left(\nabla_{\mathbf{u}} \left[(O^{-1} \mathbf{R}^0, [\mathbf{r} + \mathbf{u}])^2 \right], \delta \mathbf{u} \right) = 3 \frac{\mu}{R^3} \left((O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r} + \mathbf{u}) O^{-1} \mathbf{R}^0, \delta \mathbf{u} \right) =$$

$$= 3 \frac{\mu}{R^3} \left((\mathbf{R}^0, O(\mathbf{r} + \mathbf{u})) O^{-1} \mathbf{R}^0, \delta \mathbf{u} \right).$$

Систему уравнений (3.4), (3.5), (3.7) будем решать приближённо, учитывая то, что если жёсткость шара устремить к бесконечности, то получим абсолютно твёрдый шар, центр масс которого движется по неизменяющейся эллиптической орбите, а сам шар вращается равномерно вокруг одного из диаметров. Такое движение будем считать невозмущённым. Изменения этого движения ввиду конечной жёсткости шара будут происходить вследствие действия малых возмущающих сил и моментов, поэтому можно вначале пренебречь изменением орбиты шара и найти его деформации, предполагая их квазистационарными (т. е. упругие свободные

колебания затухшими), а затем, подставив полученный вектор перемещений в уравнения поступательно-вращательного движения (3.4) и (3.5), решать их независимо от (3.7). Для этого упростим уравнение (3.7), отбросив инерционный член, а также учтя равенство

$$J^{-1}[\mathbf{u}] = (J_0 + J_1[\mathbf{u}] + J_2[\mathbf{u}])^{-1} = J_0^{-1} - J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}]J_0^{-1} + \dots,$$

где

$$J_0^{-1} = A^{-1}E, \quad E = \text{diag}\{1, 1, 1\}; \quad J_1[\mathbf{u}] = \left. \frac{dJ[\lambda\mathbf{u}]}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}.$$

Упростим уравнение (3.7) преобразовав выражения

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) \right) \delta \mathbf{u} \rho dx,$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) \right) \delta \mathbf{u} \rho dx.$$

Вычислив, получим

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) \right) \delta \mathbf{u} \rho dx \approx - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (J_0^{-1} \mathbf{G} \times \mathbf{r}) \rho \delta \mathbf{u} dx,$$

$$\int_{\Omega} \left(\nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) \right) \delta \mathbf{u} \rho dx \approx A^{-2} \int_{\Omega} (\mathbf{G} \times [\mathbf{G} \times \mathbf{r}]) \rho \delta \mathbf{u} dx.$$

Уравнение (3.7) в результате преобразований примет вид

$$\int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} (J_0^{-1} \mathbf{G} \times \mathbf{r}) \rho - A^{-2} (\mathbf{G} \times [\mathbf{G} \times \mathbf{r}]) \rho - \nabla_{\mathbf{u}} E[\mathbf{u}] + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D[\dot{\mathbf{u}}] - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu \rho}{R^3} + \frac{3\mu \rho}{R^3} (\mathbf{R}^0, \mathbf{O} \mathbf{r}) \mathbf{O}^{-1} \mathbf{R}^0 + \lambda_1 \right] \delta \mathbf{u} dx + \int_{\partial \Omega} (\lambda_2 \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\sigma = 0. \quad (3.8)$$

Покажем теперь, что оба множителя Лагранжа равны нулю. Положим, что виртуальное перемещение $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{a} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})$ – поворот тела как твёрдого. Тогда, поскольку при невозмущённом движении $\mathbf{G} = \text{const}$, получим

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} (J_0^{-1} \mathbf{G} \times \mathbf{r}) \rho \delta \mathbf{u} dx = 0.$$

При вращении шара как твёрдого тела работа упругих и диссипативных сил равна нулю, поэтому слагаемые с упругим и диссипативным функционалами в (3.8) также исчезают. Поскольку (3.8) должно выполняться и при $\mathbf{u} = 0$, следовательно

$$\int_{\Omega} \frac{\mu r \rho}{R^3} \delta \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} \frac{\mu r \rho}{R^3} \delta \mathbf{a} \times \mathbf{r} dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} \frac{3\mu\rho}{R^3} (\mathbf{R}^0, O\mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \delta \mathbf{a} \times \mathbf{r}) dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} A^{-2} (\mathbf{G} \times [\mathbf{G} \times \mathbf{r}]) \rho (\delta \mathbf{a} \times \mathbf{r}) dx = -A^{-2} \delta \mathbf{a} \int_{\Omega} (\mathbf{G}, \mathbf{r})(\mathbf{G} \times \mathbf{r}) \rho dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} \lambda_1 (\delta \mathbf{a} \times \mathbf{r}) dx = 0,$$

отсюда $\int_{\partial\Omega} (\lambda_2 \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\sigma = 0$, что приводит к выражению

$$\int_{\partial\Omega} (\lambda_2 \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\sigma = \lambda_2 \int_{\partial\Omega} [\delta \mathbf{a}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{n}, \delta \mathbf{a})] d\sigma = (\lambda_2, \delta \mathbf{a}) \int_{\partial\Omega} r d\sigma - \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} r^{-1} (\mathbf{r}, \delta \mathbf{a}) d\sigma.$$

В последнем равенстве учтено, что $\mathbf{n} = \mathbf{r} / r$. Вычислим интегралы. Найдём

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{r_0^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

$$\int_{\partial\Omega} r d\sigma = \iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{r_0^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - \tilde{r}^2}} \tilde{r} d\tilde{r} = 4\pi r_0^3,$$

где для удобства обозначено $x = x_1, y = x_2, z = x_3$, r_0 – радиус шара, и затем сделан переход в полярные координаты $\tilde{r} = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi$. Далее запишем

$$\lambda_2 \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} r^{-1} (\mathbf{r}, \delta \mathbf{a}) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} (\lambda_{2x} x + \lambda_{2y} y + \lambda_{2z} z) (x \delta \alpha_x + y \delta \alpha_y + z \delta \alpha_z) d\sigma.$$

Так как все слагаемые, имеющие сомножители вида $x y, x z, y z$ дают нуль при интегрировании по сфере, и имеет место очевидное равенство

$$\int_{\partial\Omega} \frac{x^2}{r} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{y^2}{r} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{z^2}{r} d\sigma$$

то интеграл преобразуется к виду

$$(\lambda_2, \delta \mathbf{a}) \int_{\partial\Omega} \frac{x^2}{r} d\sigma, \int_{\partial\Omega} \frac{x^2}{r} d\sigma = 2 \iiint \frac{x^2}{\sqrt{r_0^2 - \tilde{r}^2}} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{\tilde{r}^2}{\sqrt{r_0^2 - \tilde{r}^2}} \cos^2 \varphi \tilde{r} d\tilde{r} d\varphi = \frac{4}{3} \pi r_0^3.$$

В итоге, получим

$$\int_{\partial\Omega} r d\sigma = 4\pi r_0^2, \quad \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} r^{-1} (\mathbf{r}, \delta \mathbf{a}) d\sigma = \frac{4}{3} \pi r_0^2 (\lambda_2, \delta \mathbf{a}),$$

откуда $\int_{\partial\Omega} (\lambda_2 \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^2 (\lambda_2, \delta \mathbf{a}) = 0$, и следовательно, $\lambda_2 = 0$.

Покажем теперь, что и $\lambda_1 = 0$. Допустим, $\delta \mathbf{u} = \mathbf{a}$ – произвольный вектор. Тогда опять сумма работ упругих и диссипативных сил равна нулю при перемещении тела как твёрдого. Далее вычислим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{r} \rho \, dx &= 0 \\ \int_{\Omega} (\mathbf{R}^0, O\mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{a}) \rho \, dx &= O^{-1}\mathbf{R}^0 \int_{\Omega} \mathbf{r} \rho \, dx \cdot (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{a}) = 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{G} \times [\mathbf{G} \times \mathbf{r}] \rho \, dx &= (\mathbf{G} \times [\mathbf{G} \times \int_{\Omega} \mathbf{r} \rho \, dx], \mathbf{a}) = 0 \end{aligned}$$

откуда следует $\int_{\Omega} \lambda_1 \rho \, dx = 0$, а поэтому и $\lambda_1 = 0$.

Перепишем (3.8) таким образом:

$$-A^{-2}(\mathbf{G} \times [\mathbf{G} \times \mathbf{r}]) \rho - \nabla_{\mathbf{u}} E[\mathbf{u}] - \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D[\dot{\mathbf{u}}] - \frac{\mu \mathbf{r} \rho}{R^3} + \frac{3\mu \rho}{R^3} (\mathbf{R}^0, O\mathbf{r}) O^{-1}\mathbf{R}^0 = 0. \quad (3.9)$$

Будем искать решение (3.9) в виде ряда по малому параметру $\varepsilon = E^{-1}$ (E – модуль Юнга материала шара)

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots, \quad (3.10)$$

ограничившись первым членом. Воспользовавшись соотношением

$$\frac{\mu \mathbf{r}}{R^3} - \frac{3\mu \rho}{R^3} (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) O^{-1}\mathbf{R}^0 = -\frac{2\mu \rho \mathbf{r}}{R^3} - \frac{3\mu \rho}{R^3} [O^{-1}\mathbf{R}^0 \times [O^{-1}\mathbf{R}^0 \times \mathbf{r}]]$$

и равенством (3.10), преобразуем уравнение (3.9) к виду

$$\begin{aligned} -\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_1] - \varepsilon \chi \nabla E[\dot{\mathbf{u}}_1] &= A^{-2} I_2^2 \left(\mathbf{e}_{\varphi_2} \times [\mathbf{e}_{\varphi_2} \times \mathbf{r}] \right) \rho - \frac{2\mu \rho \mathbf{r}}{R^3} + \frac{3\mu \rho}{R^3} [O^{-1}\mathbf{R}^0 \times [O^{-1}\mathbf{R}^0 \times \mathbf{r}]] \\ -\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_1] &= \left[\nabla \mathbf{u}_1 + \frac{1}{(1-2\nu)} \text{grad div} \mathbf{u}_1 \right] \frac{1}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Граничные условия функции \mathbf{u}_1 записываются в виде $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0$ в области $\partial\Omega$, где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений. Уравнение (3.11) – линейно, поэтому его решение можно представить как сумму частных решений

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{11}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t),$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} -\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_{11}] &= A^{-2} \rho I_2^2 [\mathbf{e}_{\varphi_2} \times [\mathbf{e}_{\varphi_2} \times \mathbf{r}]], \\ -\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_{12}] - \chi \varepsilon \nabla E[\dot{\mathbf{u}}_{12}] &= -\frac{2\mu\rho\mathbf{r}}{R^3}, \\ -\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_{13}] - \chi \varepsilon \nabla E[\dot{\mathbf{u}}_{13}] &= -\frac{3\mu\rho}{R^3} [O^{-1}\mathbf{R}^0 \times [O^{-1}\mathbf{R}^0 \times \mathbf{r}]]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решения (3.12) приведены в работе [12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{11}(\mathbf{r}) &= \rho I_2^2 A^{-2} \Gamma_3(-\varphi_1) \Gamma_1(-\delta_2) \mathbf{u}^* (\Gamma_1(\delta_2) \Gamma_3(\varphi_1) \mathbf{r}), \\ \mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t) &= -2\mu\rho R^{-3} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)} \left[\mathbf{r}^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu} r_0^2 \right] \left(1 + \chi \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} i \right) \mathbf{r}, \\ \mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi)^n \frac{\partial^n \mathbf{u}_{130}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^n}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{u}_{130}(\mathbf{r}, t) = -3\mu\rho R^{-3} O_1^{-1}(t) \mathbf{u}^* (O_1(t) \mathbf{r}) \left(1 + \chi \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} i \right),$$

$$O_1(t) = \Gamma_0^{-1} \Gamma_3(-\tilde{\mathcal{G}}) \Gamma_1(-i) \Gamma_3(-h) O(t),$$

$$\Gamma_0^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{r}) = [(B_1 \mathbf{r}, \mathbf{r}) B_2 + (B_3 \mathbf{r}, \mathbf{r}) B_4 + B_5] \mathbf{r}, \quad B_1 = \text{diag}\{b_1, b_2, b_3\},$$

$$B_2 = \text{diag}\{1, 1, 0\}, \quad B_3 = \text{diag}\{a_1, a_2, a_3\}, \quad B_4 = \text{diag}\{0, 0, 1\},$$

$$B_5 = \text{diag}\{c_1, c_2, c_3\}, \quad b_1 = -(4 - 3\nu - 5\nu^2) \Psi(\nu),$$

$$b_2 = -(9 - 8v - 5v^2)\Psi(v), \quad a_1 = 2(3 - v)\Psi(v), \quad a_2 = (1 + 3v)\Psi(v),$$

$$\Psi(v) = \frac{1+v}{5(1-v)(5v+7)}, \quad c_1 = r_0^2 \frac{12-8v-12v^2}{35-10v-25v^2}, \quad c_2 = -r_0^2 \frac{3+18v-3v^2-10v^3}{35-10v-25v^2}.$$

Функция $\mathbf{u}_{11}(r)$ описывает осесимметричную деформацию вследствие действия центробежных сил инерции; функция $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t)$ описывает сферически-симметричную деформацию, а $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$ - нестационарную деформацию (вследствие гравитации).

Исследуем вначале влияние частного решения $\mathbf{u}_{11}(r)$ на эволюцию движения шара. Подставим $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \sim \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ в выражение (3.2) функционала Рауса и сохраним слагаемые, содержащие ε в степени не выше первой. В частности,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u})^2 \rho dx &\approx \frac{3}{4} \frac{\mu A}{R^3} + \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} \mathbf{r} \varepsilon \mathbf{u}_1 \rho dx, \\ -\frac{3}{2} \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} (\mathbf{R}^0, O(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2 \rho dx &\approx -\frac{3}{2} \frac{\mu}{R^3} \left(\frac{A}{2} + 2\varepsilon \int_{\Omega} (O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u}_1) \rho dx \right), \\ \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) &\approx \frac{I_2^2}{2A} - \frac{A^{-2} \varepsilon}{2} (\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_1] \mathbf{G}) - A^{-1} \varepsilon (\mathbf{G}, \mathbf{G}'_u). \end{aligned}$$

В последней формуле второе слагаемое преобразуем

$$-\frac{A^{-2} \varepsilon}{2} (\mathbf{G}, J_1[\mathbf{u}_1] \mathbf{G}) = -A^{-2} \varepsilon \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{G}][\mathbf{u}_1 \times \mathbf{G}] \rho dx,$$

после чего функционал Рауса запишется как

$$\tilde{R} = -\frac{\mu^2 M^3}{2L^2} + \frac{I_2^2}{2A} - A^{-2} \varepsilon \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{G}][\mathbf{u}_1 \times \mathbf{G}] \rho dx - A^{-1} \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}_1) \rho dx -$$

$$-\frac{\mu\varepsilon}{R^3} \int_{\Omega} [3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u}_1) - (\mathbf{r}, \mathbf{u}_1)] \rho dx. \quad (3.14)$$

Уравнения Рауса для углов g и h (или эквивалентно – для ω и Ω) получим, приняв $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{11}$. Первые два члена (3.14) не влияют на уравнение.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{3\mu\varepsilon}{R^3} \int_{\Omega} (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u}_{11}) \rho dx = \\ &= -\frac{3\mu\varepsilon}{R^3} \rho I_2^2 A^{-2} \int_{\Omega} (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \Gamma_3(-\varphi_1)\Gamma_1(-\delta_2)\mathbf{u}^*(\mathbf{r}'')) \rho dx, \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}'' = \Gamma_3(\delta_2)\Gamma_1(\varphi_1)\mathbf{r}$. Пусть координаты вектора $\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)O^{-1}\mathbf{R}^0$ равны $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, а $\mathbf{R}^0 = (0, 0, 1)$ в орбитальной системе координат. Кроме того,

$$O^{-1} = \Gamma_3(-\varphi_1)\Gamma_1(-\delta_2)\Gamma_3(-\varphi_2)\Gamma_1(-\delta_1)\Gamma_3(-\varphi_3)\Gamma_3(h)\Gamma_1(i)\Gamma_3(\tilde{\vartheta})\Gamma_0,$$

$$\Gamma_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Используя эти формулы, вычислим координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, в частности

$$\alpha_3 = -\sin\delta_1[\cos(h-\varphi_3)\cos i \sin\tilde{\vartheta} + \sin(h-\varphi_3)\cos\tilde{\vartheta}] + \cos\delta_1 \sin i \sin\tilde{\vartheta},$$

тогда

$$Q_1 = -3\mu R^{-3} \rho^2 I_2^2 A^{-2} \varepsilon [D_1 + \alpha_3^2 D_2];$$

$$D_1 = b_1 f_1 + b_1 f_2 + b_2 f_2 + c_1 f_3; \quad D_2 = (a_2 - b_1) f_1 + (2a_1 - b_1 - b_2) f_2 + (c_2 - c_1) f_3;$$

$$f_1 = \int_{\Omega} x^4 dx = \int_{\Omega} y^4 dx = \int_{\Omega} z^4 dx; \quad f_2 = \int_{\Omega} x^2 y^2 dx = \int_{\Omega} y^2 z^2 dx = \int_{\Omega} z^2 x^2 dx;$$

$$f_3 = \int_{\Omega} x^2 dx = \int_{\Omega} y^2 dx = \int_{\Omega} z^2 dx.$$

Продолжив расчёты подобным образом, получим, что четвёртый член обнулится, а

$$-A^{-2}\varepsilon \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{G}][\mathbf{u}_{11} \times \mathbf{G}] \rho dx = -2\rho^2 A^{-4} I_2^4 D_1,$$

$$\mu\rho R^{-3}\varepsilon \int_{\Omega} (\mathbf{r}, \mathbf{u}_{11}) dx = \mu\rho^2 I_2^2 A^{-2} R^{-3}\varepsilon D_0,$$

$$D_0 = [(2b_1 + a_2)f_1 + (2b_2 + b_1 + 2a_1)f_2 + (c_1 + c_2 + c_3)f_3].$$

§ 3.3. Быстрая эволюция долготы восходящего узла и аргумента широты перигея

Уравнение Рауса для угла g

$$\dot{g} = \frac{\partial}{\partial \Lambda} [-3\mu\rho^2 I_2^2 R^{-3}\varepsilon (\tilde{D}_1 + \alpha_3^2 D_2)], \quad \tilde{D}_1 = D_1 - D_0/3$$

- имеет весьма громоздкий вид и неудобно для анализа, однако после усреднения по быстрым углам l и φ_3 упрощается

$$\dot{g} = 3\mu\rho^2 I_2^2 A^{-2}\varepsilon \Lambda^{-1} (1 - e^2)^{3/2} p^{-3} [6D_1 + D_2 (\frac{3}{2}(3 - 4\sin^2 i) + 4\sin^2 i - 1)].$$

Механический смысл этого уравнения в том, что деформации приводят к вращению перицентра орбиты шара. Поскольку члены, определяющие скорость изменения перицентра, не зависят от диссипативных сил, то эту эволюцию можно трактовать как быструю.

Уравнение для угла h имеет вид

$$\dot{h} = \frac{\partial}{\partial H} [-3\mu\rho^2 I_2^2 R^{-3} \varepsilon [\tilde{D}_1 + \alpha_3^2 D_2]],$$

и после усреднения по углам l и φ_3 также упрощается

$$\dot{h} = \frac{3}{2} \mu\rho^2 I_2^2 A^{-2} \varepsilon \Lambda^{-1} (1-e^2)^{3/2} p^{-3} D_2 \cos i [2 - 3 \sin^2 \delta_1].$$

Данное уравнение показывает, что влияние деформаций обуславливают также быструю прецессию плоскости орбиты шара.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в пространственном варианте задачи при осесимметричных упругих деформациях тела плоскость его орбиты прецессирует со скоростью $\dot{\Omega}$ (Ω – долгота восходящего узла), а сама орбита, не изменяя своей формы, поворачивается в собственной плоскости – это скорость движения перицентра $\dot{\omega}$ орбиты. Известно, что такой эффект наблюдается при движении искусственных спутников Земли. Интересно заметить, что такое же влияние на эволюцию орбиты искусственного спутника оказывает сжатие Земли [3]. Вторая зональная гармоника геопотенциала обуславливает возникновение возмущений элементов орбиты ИСЗ, при этом о вековых неравенствах можно говорить только применительно к угловым элементам – долготе восходящего узла Ω , аргументу широты перигея ω и средней аномалии.

§ 3.4. Эволюция остальных переменных

В дополнение к полученным в § 3 уравнениям, выпишем усредненные по l уравнения и для остальных переменных (с ненулевыми правыми частями):

$$\begin{aligned} \dot{i} = & \frac{\mu^2 M^3}{L^3} + KD_2 \Lambda^{-1} \{6\tilde{D}_1 + D_2 [3\sin^2 \delta_1 \sin^2(h - \varphi_3) + (\cos \delta_1 \sin i - \sin \delta_1 \cos(h - \varphi_3) \cos i)] \times \\ & \times [4(\cos \delta_1 \sin i - \sin \delta_1 \cos(h - \varphi_3) \cos i) - \operatorname{cosec} i \cos \delta_1], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\dot{\varphi}_3 = KD_2 I_2^{-1} \{ \cos \delta_1 [\cos^2 i - \cos^2(h - \varphi_3) \sin^2 i] - \frac{1}{2} \cos(h - \varphi_3) \sin 2i \cos 2i \operatorname{cosec} \delta_1 \}.$$

Формулы (3.15) можно интерпретировать как изменение орбитального и собственного кинетического моментов шара в противофазе друг другу, а также прецессию оси вращения шара.

Далее, рассмотрим влияние на движение члена $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{r})$. Вычисления показывают, что член функционала Рауса

$$Q_2 = -3\mu\rho\varepsilon R^{-3} \int_{\Omega} (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u}_{12}) dx$$

дает вклад только в уравнение для переменной g , а остальные члены повлияют на уравнения для φ_2 , l и g . Таким образом, сферически-симметричная деформация окажет влияние на угловую скорость вращения перицентра орбиты в ее плоскости.

ГЛАВА 4. МЕДЛЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ В ЗАДАЧЕ О ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО СПУТНИКА

§ 4.1. Гравитационные приливы

В рамках постановки задачи главы 3 §3.1 продолжим исследование влияния частных решений (3.11), (3.12) на эволюцию движения шара.

Рассмотрим влияние слагаемого $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$. Вычислим вклад в уравнения движения члена

$$Q_3 = -3\mu\rho\varepsilon R^{-3} \int_{\Omega} (\mathbf{O}^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u}_{13}) dx. \quad (4.1)$$

Интеграл (4.1), а точнее, производные от него по каноническим переменным Делоне и Андуайе, удобнее вычислять в орбитальной системе координат $Sxuz$, так как в ней $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$ имеет наиболее простой вид. Ось Sz направлена на притягивающий центр, ось Sx – по касательной к орбите, ось Sy ортогональна к плоскости орбиты. Ограничимся в ряде для $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$ первыми двумя членами, и перейдем в интеграле (4.1) к орбитальным осям. Тогда, в новых осях, \mathbf{u}_{13} примет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}', t) = & -3\mu\rho R^{-3} \mathbf{u}^*(\mathbf{r}') \left(1 + \chi \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial l} i \right) - 3\mu\rho R^{-3} \chi \{ [(B_1 \mathbf{r}', \mathbf{r}')(SB_2 - B_2 S) + \\ & + (B_3 \mathbf{r}', \mathbf{r}')(SB_4 - B_4 S) + r_0^2 (SB_5 - B_5 S)] \mathbf{r}' - 2[(B_1 S \mathbf{r}', \mathbf{r}') B_2 + (B_3 S \mathbf{r}', \mathbf{r}') B_4] \mathbf{r}' \} \quad 4.2) \\ S = & \dot{O}_1 O_1^{-1} = -O_1 (O_1^{-1} \dot{}) \end{aligned}$$

Здесь кососимметрическая матрица S определяет угловую скорость шара относительно системы координат $Sxyz$. Выражение (4.1) перепишется в виде

$$Q_3 = -3\mu r \varepsilon R^{-3} \int_{\Omega} (O_I O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r}') (O_I O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}', t)) dx, \quad (4.3)$$

где

$$O_I O^{-1} \mathbf{R}^0 = \mathbf{e}_z = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1. \quad (4.4)$$

Воспользовавшись выражениями для матриц O_I, O из (3.13), (3.3), вычислим матрицу S :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ -s_{12} & 0 & s_{23} \\ -s_{13} & -s_{23} & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.5)$$

$$s_{12} = \sin \tilde{\mathfrak{G}} [\dot{\varphi}_2 \sin \delta_1 \cos(h - \varphi_3) \cos i - \dot{\varphi}_2 \cos \delta_1 \sin i] + \dot{\varphi}_2 \cos \tilde{\mathfrak{G}} \sin \delta_1 \sin(h - \varphi_3);$$

$$s_{13} = \dot{\varphi}_2 \cos \delta_1 \cos i + \dot{\varphi}_2 \sin \delta_1 \cos(h - \varphi_3) \sin i - \tilde{\mathfrak{G}};$$

$$s_{23} = -\dot{\varphi}_2 \sin \tilde{\mathfrak{G}} \sin \delta_1 \sin(h - \varphi_3) + \dot{\varphi}_2 \cos \tilde{\mathfrak{G}} [\sin \delta_1 \cos(h - \varphi_3) \cos i - \cos \delta_1 \sin i]$$

С помощью формул (4.2) и (4.5) получим

$$\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}', t) = \alpha \left(1 + \chi \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial l} i \right) \begin{pmatrix} b_1 x^3 + b_1 y^2 x + b_2 z^2 x + c_1 x \\ b_1 x^2 y + b_1 y^3 + b_2 z^2 y + c_1 y \\ a_1 x^2 z + a_1 y^2 z + a_2 z^3 + c_2 z \end{pmatrix} -$$

$$-\alpha \chi \begin{pmatrix} (c_2 - c_1) s_{13} z \\ (c_2 - c_1) s_{23} z \\ (c_2 - c_1)(s_{13} x + s_{23} y) \end{pmatrix} - 2\alpha \chi \begin{pmatrix} (b_1 - b_2)(s_{13} x^2 z + s_{23} x y z) \\ (b_1 - b_2)(s_{13} x y z + s_{23} y^2 z) \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha\chi \left(\begin{array}{c} -(b_1x^2 + b_1y^2 + b_2z^2)s_{13}z + (a_1x^2 + a_1y^2 + a_2z^2)s_{13}z \\ -(b_1x^2 + b_1y^2 + b_2z^2)s_{23}z + (a_1x^2 + a_1y^2 + a_2z^2)s_{23}z \\ -(b_1x^2 + b_1y^2 + b_2z^2)(s_{13}x + s_{23}y) + (a_1x^2 + a_1y^2 + a_2z^2)(s_{13}x + s_{23}y) \end{array} \right) - \quad (4.6) \\
& -2\alpha\chi \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (a_1 - a_2)(s_{13}xz^2 + s_{23}yz^2) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\alpha = -3\mu\rho R^{-3}$. Подставляя (4.6) в (4.3) и учитывая (4.4), выведем

$$Q_3 = \varepsilon\alpha[(\alpha - \chi\alpha)(D_3 + \gamma_3^2(D_4 - D_5)) - \chi\alpha D_5[\gamma_1\gamma_3s_{13} + \gamma_2\gamma_3s_{23}]], \quad (4.7)$$

где обозначено

$$D_3 = \int_{\Omega} [b_1(x^2 + y^2) + b_2z^2 + c_1]x^2 d\Omega; \quad D_4 = \int_{\Omega} [a_1(x^2 + y^2) + a_2z^2 + c_2]z^2 d\Omega;$$

$$\begin{aligned}
D_5 &= \int_{\Omega} \{[(b_1 - a_1)(x^2 + y^2) + (b_2 - a_2)z^2 + c_1 - c_2](x^2 + z^2) + \\
& \quad + 2(a_1 - a_2 + b_1 - b_2)x^2 z^2\} d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \{[(b_1 - a_1)(x^2 + y^2) + (b_2 - a_2)z^2 + c_1 - c_2](y^2 + z^2) + \\
& \quad + 2(a_1 - a_2 + b_1 - b_2)y^2 z^2\} d\Omega;
\end{aligned}$$

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения, необходимо будет дифференцировать выражение (4.7) по каноническим переменным, в частности, потребуются значения производных $\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_j}$, где q_j обозначают

канонические переменные. Для этого воспользуемся следующими формулами

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial q_j} = O_1 \frac{\partial(O^{-1} \mathbf{R}^0)}{\partial q_j}, \quad \mathbf{R}^0 = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\mathfrak{G}} \cosh - \sin \tilde{\mathfrak{G}} \cos i \sinh \\ \cos \tilde{\mathfrak{G}} \sinh + \sin \tilde{\mathfrak{G}} \cos i \cosh \\ \sin \tilde{\mathfrak{G}} \sin i \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Замечая, что величина α , входящая в выражение для Q_3 , не зависит от переменных Андуайе, а компоненты матрицы S не зависят от угла φ_2 , приходим к выводу, что усреднение по углу φ_2 производных от Q_3 по каноническим переменным, можно получить просто заменив величины $\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial q_j}$ усредненными по углу φ_2 . Поэтому, после вычисления производных в (4.8), усредним их по углу φ_2 , и получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi_1} \right\rangle_{\varphi_2} &= \begin{pmatrix} -\sin \delta_1 \cos \delta_2 \sin i \cos(h - \varphi_3) - \cos \delta_2 \cos \delta_1 \cos i \\ -\cos \delta_2 \sin \delta_1 \cos i \cos \tilde{\mathfrak{G}} \cos(h - \varphi_3) + \cos \delta_2 \sin \delta_1 \sin \tilde{\mathfrak{G}} \sin(h - \varphi_3) + \cos \delta_2 \cos \delta_1 \sin i \cos \tilde{\mathfrak{G}} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi_2} \right\rangle_{\varphi_2} &= \begin{pmatrix} -\cos \delta_1 \cos i - \sin \delta_1 \sin i \cos(h - \varphi_3) \\ \sin \delta_1 \sin \tilde{\mathfrak{G}} \sin(h - \varphi_3) - \sin \delta_1 \cos \tilde{\mathfrak{G}} \cos i \cos(h - \varphi_3) + \cos \delta_1 \cos \tilde{\mathfrak{G}} \sin i \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi_3} \right\rangle_{\varphi_2} &= \begin{pmatrix} -\cos i \\ \cos \tilde{\mathfrak{G}} \sin i \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial I_1} \right\rangle_{\varphi_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial I_3} \right\rangle_{\varphi_2} &= -\frac{1}{\sqrt{I_2^2 - I_3^2}} \begin{pmatrix} -\sin i \sin(h - \varphi_3) \\ -\cos \tilde{\mathfrak{G}} \cos i \sin(h - \varphi_3) - \sin \tilde{\mathfrak{G}} \cos(h - \varphi_3) \\ 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial l} \right\rangle_{\varphi_2} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \tilde{\mathfrak{G}}} \frac{d\tilde{\mathfrak{G}}}{dl} \right\rangle_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{d\tilde{\mathfrak{G}}}{dl}; \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \mathbf{g}} \right\rangle_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial h} \right\rangle_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} \cos i \\ -\cos \tilde{\mathfrak{G}} \sin i \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \Lambda} \right\rangle_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} -\cos i \\ \cos \tilde{\mathfrak{G}} \sin i \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial H} \right\rangle_{\varphi_2} = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 - H^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \tilde{\mathfrak{G}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

§ 4.2. Усредненные уравнения поступательно- вращательного движения

Используя равенства (4.7), (4.9), (4.8) а также результаты §1 данной главы, получим дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения шара, учитывая все виды происходящих деформаций. Для упрощения уравнений усредним их по быстрой переменной l . Кроме того, как видно из (3.15), φ_3 является быстрой переменной, т.к. перед правой частью ее уравнения отсутствует в качестве множителя малый параметр χ . Поэтому произведем усреднение и по переменной φ_3 . В результате получим приближенные уравнения:

$$\dot{I}_1 = \frac{I_1}{I_2} \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_2 = -nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} (1-e^2)^{3/2} \left[\frac{I_2^2 + I_3^2}{2I_2} \Phi_1(e) + \frac{I_2^2 - 3I_3^2}{2I_2} \Phi_4(e, g) \sin^2 i \right] - \frac{I_3}{I_2} \Phi_2(e) \cos i \right\};$$

$$\dot{I}_3 = -nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 (1-e^2)^{3/2} \left[\Phi_1(e) - \Phi_4(e, g) \sin^2 i \right] - \Phi_2(e) \cos i \right\};$$

$$\dot{\phi}_1 = 0;$$

$$\dot{L} = nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 \Phi_2(e) \cos i - (1-e^2)^{-3/2} \Phi_3(e) \right\}; \quad (4.10)$$

$$\dot{\Lambda} = nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 (1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \cos i - \Phi_2(e) \right\};$$

$$\dot{H} = -\dot{I}_3;$$

$$\dot{g} = K\Lambda^{-1} [6D_1 + D_2 \left(\frac{3}{2} (3 - 4 \sin^2 i) + 4 \sin^2 i - 1 \right)]$$

$$\dot{h} = \frac{K}{2} D_2 \Lambda^{-1} \cos i [2 - 3 \sin^2 \delta_1] - \frac{k}{2} A^{-1} I_3 \Lambda^{-1} (1-e^2)^{3/2} \left(\frac{3}{2} e^2 + \frac{1}{4} e^4 \right).$$

В уравнениях (4.10) были введены обозначения:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta)^4 d\vartheta = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8} e^4 = \Phi_1(e);$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta)^6 d\vartheta = 1 + \frac{15}{2} e^2 + \frac{45}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 = \Phi_2(e);$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta)^8 d\vartheta = 1 + 14e^2 + \frac{105}{4}e^4 + \frac{35}{4}e^6 + \frac{35}{128}e^8 = \Phi_3(e);$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta)^4 \sin^2(\vartheta + g) d\vartheta &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}e^2(1 + 2\sin^2 g) + \\ &+ \frac{1}{16}e^4(1 + 4\sin^2 g) = \Phi_4(e, g); \end{aligned}$$

$$k = 9\varepsilon\mu^2 \rho^2 D_5 p^{-6}; \quad K = 3\varepsilon\mu \rho^2 I_2^2 A^{-2} (1 - e^2)^{3/2} p^{-3}; \quad n = \frac{\mu^2 M^3}{\Lambda^3}.$$

Седьмое уравнение системы (4.10) может быть проинтегрировано, и выражает тот факт, что проекция кинетического момента системы на ось ξ_3 Кёниговой системы координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ сохраняется:

$$H + I_3 = H_0 \equiv \text{const.}$$

Сохраняется и кинетический момент системы

$$A + G = \text{const.}$$

Здесь через A обозначен орбитальный кинетический момент, а через G - вращательный. Из системы (4.10) видно, что угол φ_1 не эволюционирует, углы g и h быстро меняются, а эволюция остальных переменных происходит медленно (они пропорциональны малому параметру χ). Это позволяет усреднить систему (4.10) еще раз по углу g , вследствие чего она приобретет вид:

$$\dot{I}_1 = \frac{I_1}{I_2} \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_2 = -nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} (1 - e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \left[\frac{I_2^2 + I_3^2}{2I_2} + \frac{I_2^2 - 3I_3^2}{4I_2} \sin^2 i \right] - \frac{I_3}{I_2} \Phi_2(e) \cos i \right\};$$

$$\dot{I}_3 = -nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 (1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 i \right] - \Phi_2(e) \cos i \right\};$$

$$\dot{\Phi}_1 = 0; \tag{4.11}$$

$$\dot{L} = nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 \Phi_2(e) \cos i - (1-e^2)^{-3/2} \Phi_3(e) \right\};$$

$$\dot{\Lambda} = nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 (1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \cos i - \Phi_2(e) \right\};$$

$$H + I_3 = H_0 \equiv \text{const.}$$

Найдем стационарное решение системы (4.11). Из условия $\dot{\Lambda} = 0$ выведем, что

$$n^{-1} A^{-1} I_3 = \frac{\Phi_2(e)}{(1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \cos i} \tag{4.12}$$

Подставляя (4.12) в уравнение $\dot{L} = 0$, получим $\Phi_2^2(e) - \Phi_1(e)\Phi_3(e) = 0$, откуда следует, что $\dot{L} = 0$ при $e = 0$, что в свою очередь означает, что $L = \Lambda$. Это означает, что орбита центра масс шара в стационарном движении становится круговой. Из (4.12) также следует $I_3 A^{-1} \cos i = n$, а это означает, что угловая скорость вращения шара совпадает с его орбитальной угловой скоростью, а вектор собственного кинетического момента шара ортогонален плоскости орбиты. Заметим, что эффекты долгопериодической эволюции непосредственно связаны именно с диссипацией энергии в вязкоупругом материале шара, что отражается в наличии коэффициента χ , характеризующего вязкость в правых частях уравнений (4.10).

ГЛАВА 5. О ЧАСТОТАХ ЛУННО-СОЛНЕЧНЫХ ПРИЛИВОВ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ЗЕМЛИ

§ 5.1. Постановка задачи

Ставится задача определения деформаций Земли под влиянием гравитационных полей Солнца и Луны. Земля рассматривается как вязкоупругое тело, имеющее твердое ядро. Орбита барицентра системы Земля – Луна предполагается медленно эволюционирующей. На основе приближенных дифференциальных уравнений оказывается возможным получить выражение для вектора перемещений. Анализ вида вектора перемещений позволяет определить набор частот приливных деформаций Земли в рамках рассматриваемой модели. В иностранной литературе в большинстве случаев используются модели численного компьютерного моделирования на базе наблюдений МСВЗ [58]. В данной главе делается попытка построения численно-аналитической модели деформируемой Земли. Поскольку в настоящее время требуются высокие точности координатно-временного обеспечения, то учет приливных деформаций Земли может являться важным в задачах такого типа [2,44].

Для упрощения постановки задачи Луна и Солнце рассматриваются как материальные точки, Земля – как тело, состоящее из осесимметричного твердого ядра и вязкоупругой осесимметричной (в недеформированном состоянии) оболочки, подчиняющейся модели Кельвина – Фойгта (рис. 6).

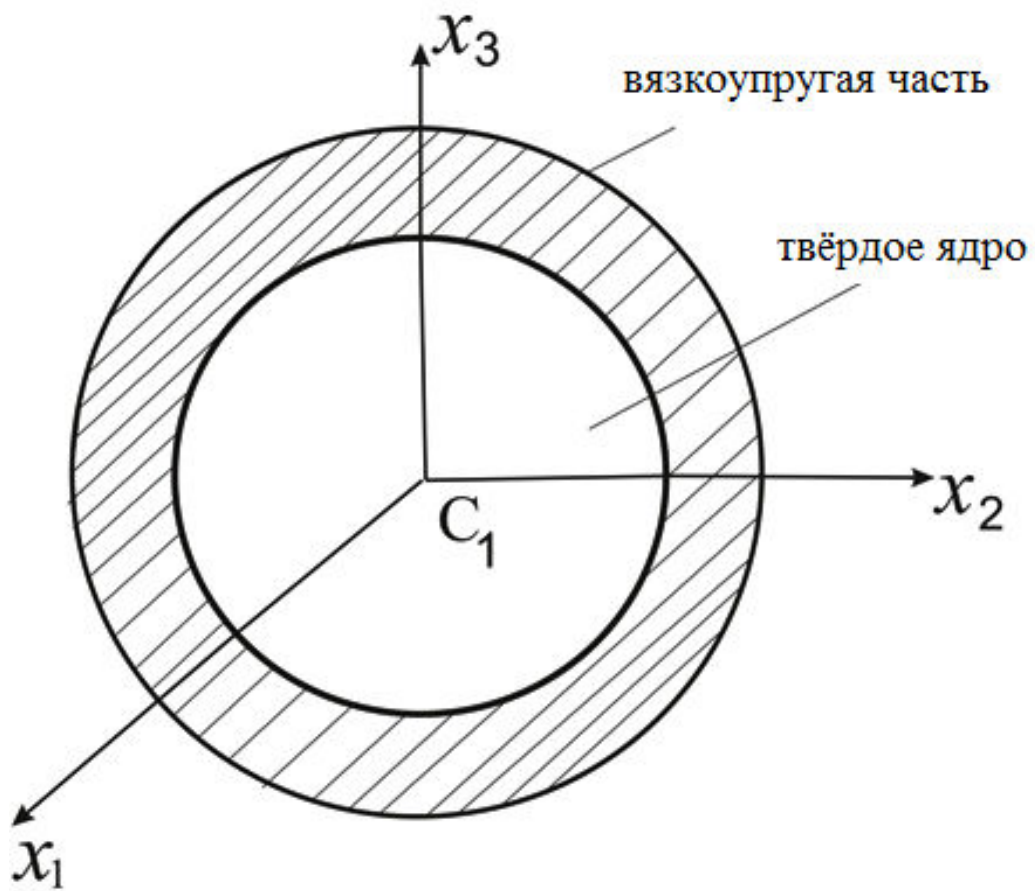


Рис 6. Модель Земли состоящей из твёрдого ядра и вязкоупругой мантии

На внутренней границе оболочки перемещения отсутствуют, а внешняя граница свободна. Предполагается, что процесс деформаций Земли можно считать квазистационарным. Начало инерциальной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ помещается в притягивающий центр (Солнце), с барицентром C связываем оси Кёнига $O\xi'_1\xi'_2\xi'_3$. С ядром Земли жестко связываются оси $C_1x_1x_2x_3$, направленные по главным центральным осям инерции планеты в недеформированном состоянии, а также принимается, что точка C_1 совпадает с центром масс Земли в недеформированном состоянии (рис. 7). Точкой C_2 на рисунке обозначена Луна. Далее, пусть $\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_C^0 R_C$, $R_C = p(1 + e \cos \vartheta)^{-1}$ - радиус-вектор барицентра, p и e - фокальный параметр и эксцентриситет его орбиты, ϑ - истинная аномалия. Аналогично представим вектор $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_{21}^0 R_{21}$ - от Луны к Земле, причем

$$\mathbf{R}_{21}^0 = \begin{pmatrix} \cos w_1 \cos \Omega_1 - \sin w_1 \sin \Omega_1 \cos i \\ \cos w_1 \sin \Omega_1 + \sin w_1 \cos \Omega_1 \cos i \\ \sin w_1 \sin i \end{pmatrix}, \quad w_1 = \vartheta_1 + \omega_1.$$

Потенциальную энергию Земли представим в виде

$$\Pi = \Pi_S + \Pi_M,$$

$$\Pi_S = - \int_{\Omega} \frac{fM\rho}{[(O^{-1}\mathbf{R}_C + O^{-1}\mathbf{R}_1 + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} dx,$$

$$\Pi_M = - \int_{\Omega} \frac{fm_2\rho}{[(O^{-1}\mathbf{R}_{21} + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} dx, \quad (5.1)$$

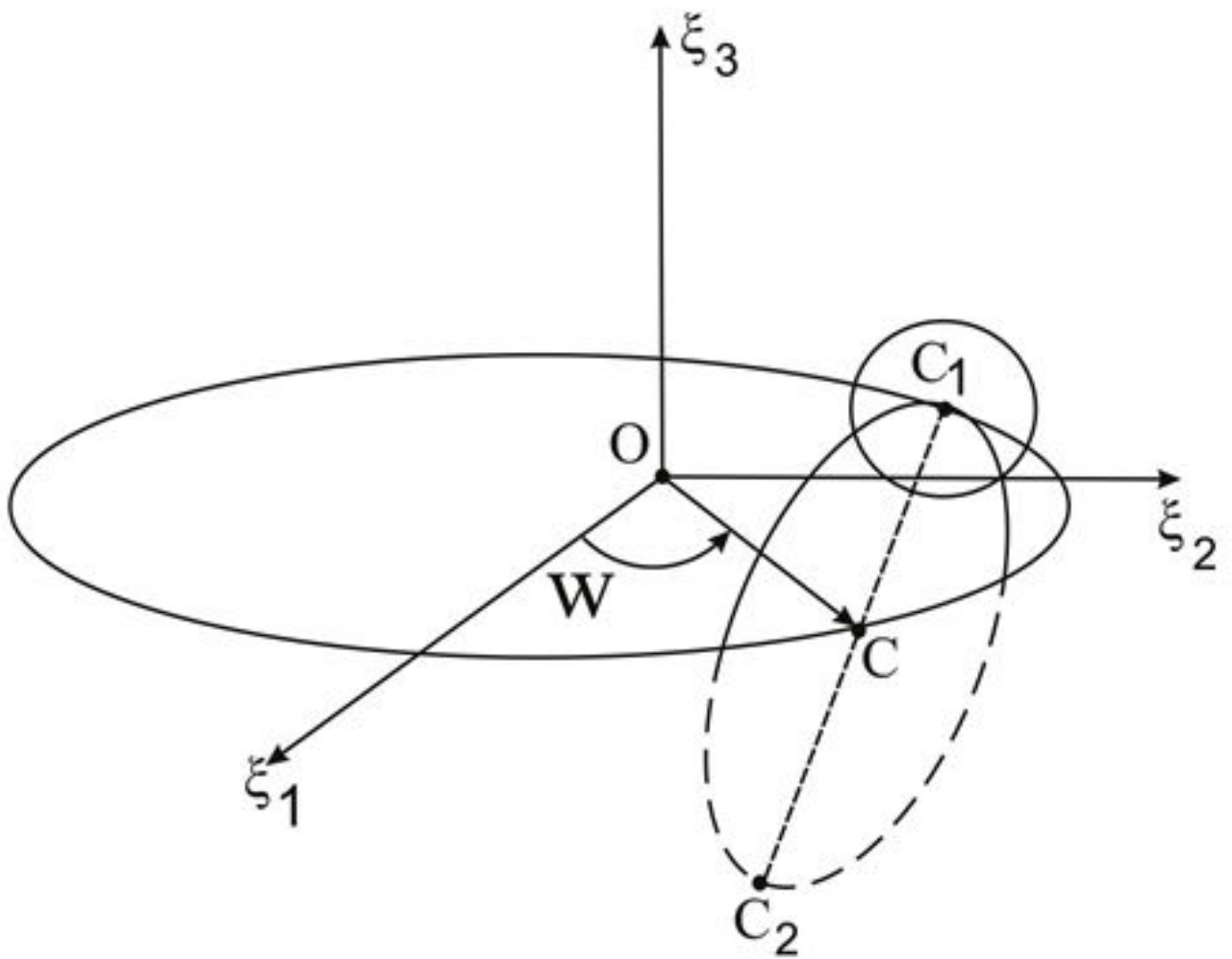


Рис 7. Барицентр системы Земли – Луна, движущийся по эллиптической орбите вокруг Солнца

где Π_S - потенциальная энергия в гравитационном поле Солнца, Π_M - потенциальная энергия в гравитационном поле Луны, Ω - область, занимаемая недеформированной Землей в осях $C_1x_1x_2x_3$, M - масса Солнца, m_1 - масса Земли, m_2 - масса Луны, $O^{-1}(t)$ - матрица перехода от инерциальной системы координат с началом в центре масс Земли, к системе координат $C_1x_1x_2x_3$, жестко связанной с твердым ядром. Матрица $O^{-1}(t)$ представляется в виде

$$O(t) = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3,$$

где

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем φ, ψ, θ - углы Эйлера. Тогда

$$O^{-1}(t) = \Gamma_3^{-1} \Gamma_2^{-1} \Gamma_1^{-1}.$$

Уравнения, определяющие деформации следуют из вариационного принципа Даламбера - Лагранжа:

$$\int_{\Omega} (O^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_C + O^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_1 + \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}) \rho \delta \mathbf{u} dx +$$

$$+(\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla \Pi[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) = 0 \quad (5.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ - векторы угловой скорости и ускорения, соответственно; $E[\mathbf{u}]$ - функционал энергии упругих деформаций, $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b E[\dot{\mathbf{u}}]$ - диссипативный функционал.

§ 5.2. Вычисление деформаций в мантии Земли

Воспользовавшись модальным подходом, разложим вектор \mathbf{u} в ряд по собственным формам (модам) колебаний аналогично [4,5]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,m=0}^{\infty} [q_{km}(t)\mathbf{V}_{km} + p_{km}(t)\mathbf{W}_{km}],$$

и выбирая $\delta \mathbf{u} = \mathbf{V}_{ij}$ или $\delta \mathbf{u} = \mathbf{W}_{ij}$, получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных переменных q_{km} и p_{km} . Заметим, что справедливы равенства

$$(\nabla E, \mathbf{V}_{km}) = v_{km}^2 q_{km}, (\nabla E, \mathbf{W}_{km}) = v_{km}^2 p_{km}, \quad (5.3)$$

а также

$$(\nabla D, \mathbf{V}_{km}) = \chi b v_{km}^2 \dot{q}_{km}, (\nabla D, \mathbf{W}_{km}) = \chi b v_{km}^2 \dot{p}_{km}. \quad (5.4)$$

В нашем случае, для получения качественного эффекта, ограничимся только двумя модальными переменными q_{20} и p_{20} , которые описывают колебания на формах \mathbf{V}_{20} и \mathbf{W}_{20} , которые достаточно хорошо моделируют приливные горбы Земли. Кроме того, отбросим инерционные слагаемые, учитывая квазистационарность деформаций. При вычислении градиента гравитационного потенциала примем, что выполняются соотношения

эквивалентности $\frac{r}{R_{21}} \sim \frac{r}{R} \sim \varepsilon_1$, $\frac{u}{r} \sim \varepsilon_1^2$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_C + \mathbf{R}_1$, ε_1 - малый параметр,

\mathbf{R}_1 - вектор, направленный из барицентра в центр масс Земли. Тогда, ограничиваясь членами порядка не выше ε_1^2 , и с учетом соотношений

$$\int_{\Omega} \mathbf{r} \mathbf{V}_{20} \rho dx = \int_{\Omega} \mathbf{r} \mathbf{W}_{20} \rho dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} (O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0)(O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{V}_{20} \rho dx = \gamma_1 \gamma_2 (b_{2021} + b_{2012}),$$

$$\int_{\Omega} (O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0)(O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{W}_{20} \rho dx = c_{2011} \gamma_1^2 + c_{2022} \gamma_2^2,$$

$$b_{2021} = \int_{\Omega} V_{202} x_1 \rho dx, \quad b_{2012} = \int_{\Omega} V_{201} x_2 \rho dx,$$

$$c_{2011} = \int_{\Omega} W_{201} x_1 \rho dx, \quad c_{2022} = \int_{\Omega} W_{202} x_2 \rho dx,$$

где V_{20i} и W_{20i} - проекции векторов \mathbf{V}_{20} и \mathbf{W}_{20} на оси x_i декартовой системы координат $x_1 x_2 x_3$, получим

$$(\nabla \Pi_M, \mathbf{V}_{20}) = -\frac{3fm_2}{R_{21}^3} (\gamma_1 \gamma_2) (b_{2021} + b_{2012}), \quad (5.5)$$

$$(\nabla \Pi_M, \mathbf{W}_{20}) = -\frac{3fm_2}{R_{21}^3} (c_{2011} \gamma_1^2 + c_{2022} \gamma_2^2),$$

и аналогично

$$(\nabla \Pi_S, \mathbf{V}_{20}) = -\frac{3fM}{R^3} (\kappa_1 \kappa_2) (b_{2021} + b_{2012}), \quad (5.6)$$

$$(\nabla \Pi_S, \mathbf{W}_{20}) = -\frac{3fM}{R^3} (c_{2011} \kappa_1^2 + c_{2022} \kappa_2^2).$$

Здесь обозначено $O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$, $O^{-1} \mathbf{R}^0 = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^T$.

Учитывая слагаемые с центробежным ускорением за счет полярного сжатия в фигуре Земли, уравнения для модальных переменных запишем в виде

$$v_{20}^2 q_{20} + \chi b v_{20}^2 \dot{q}_{20} + 2\kappa_{20} \omega_3 \dot{p}_{20} = \frac{3fm_2}{R_{21}^3} (\gamma_1 \gamma_2) (b_{2021} + b_{2012}) + \frac{3fM}{R^3} (\kappa_1 \kappa_2) (b_{2021} + b_{2012}), \quad (5.7)$$

$$v_{20}^2 p_{20} + \chi b v_{20}^2 \dot{p}_{20} - 2\kappa_{20} \omega_3 \dot{q}_{20} = \frac{3fm_2}{R_{21}^3} (c_{2011} \gamma_1^2 + c_{2022} \gamma_2^2) + \frac{3fM}{R^3} (c_{2011} \kappa_1^2 + c_{2022} \kappa_2^2).$$

Опуская малые слагаемые, возникающие вследствие кориолисового ускорения, перепишем уравнения (5.7) в векторном виде

$$v_{20}^2 \mathbf{p} + \chi b v_{20}^2 \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}. \quad (5.8)$$

Здесь обозначено

$$\mathbf{p} = (q_{20}, p_{20})^T,$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{3fm_2}{R_{21}^3} (\gamma_1 \gamma_2) (b_{2021} + b_{2012}) + \frac{3fM}{R^3} (\kappa_1 \kappa_2) (b_{2021} + b_{2012}) \\ \frac{3fm_2}{R_{21}^3} (c_{2011} \gamma_1^2 + c_{2022} \gamma_2^2) + \frac{3fM}{R^3} (c_{2011} \kappa_1^2 + c_{2022} \kappa_2^2) \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (5.8) может быть найдено в виде

$$\mathbf{p} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi b)^n \frac{\partial^n \mathbf{p}_0}{\partial t^n}, \quad (5.9)$$

где \mathbf{p}_0 - решение уравнения $v_{20}^2 \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}$, то есть $\mathbf{p}_0 = v_{20}^{-2} \mathbf{F}$.

Ограничиваясь первым приближением в (5.9), запишем

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \chi b \dot{\mathbf{p}}_0 \quad (5.10)$$

§ 5.3. Вычисление часто приливов Лунно-Солнечных

Далее следует вычислить координаты векторов $O^{-1}\mathbf{R}_{21}^0$ и $O^{-1}\mathbf{R}^0$, и подставить в (5.10). Для упрощения вычислений можно принять $i \approx const, \psi \approx const, \Omega_1 \approx const$, то есть считать, что орбита барицентра имеет постоянными наклонение и долготу восходящего узла, и пренебречь прецессией оси Земли. Разложим R_{21} и R в ряды по степеням эксцентриситета и ограничимся слагаемыми не выше первого порядка. Тогда справа в равенствах (5.10) получим ряды гармонических функций вида

$$\sum_i (A_i \cos \alpha_i + B_i \sin \alpha_i), \quad (5.11)$$

имеющих аргументами α_i комбинации углов φ, w, w_1, θ , $w = \vartheta + \omega$. Эти комбинации и будут определять частоты приливных деформаций. В частности, имеются комбинации следующего вида

$$2\varphi, \quad 2w_1, \quad \theta,$$

$$w_1 \pm w \pm \theta, \quad 2w \pm \theta, \quad 2w_1 \pm \theta,$$

определяющие периоды в половину суток, половину месяца, период нутации оси Земли (чандлеровский период), два близких к месяцу, два близких к полугодию. Эти периоды согласуются с известными периодами океанических и твердотельных приливов Земли. Кроме того, имеется также большое количество более сложных комбинаций, соответствующих периодам, близким к полусуточным, например

$$2\varphi \pm 2w_1, \quad 2\varphi \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2\theta, \quad 2\varphi \pm 2w_1 \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2w_1 \pm 2\theta,$$

$$2\varphi \pm w \pm w_1, \quad 2\varphi \pm w \pm w_1 \pm \theta, \quad 2\varphi \pm w \pm w_1 \pm 2\theta,$$

$$2\varphi \pm 2w, \quad 2\varphi \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2\theta, \quad 2\varphi \pm 2w \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2w \pm 2\theta,$$

$$2\varphi + w_1 - \omega_1, \quad 2\varphi - w_1 + \omega_1, \quad 2\varphi + 3w_1 - \omega_1, \quad 2\varphi - 3w_1 + \omega_1,$$

$$2\varphi \pm w_1 \pm \omega_1 \pm \theta, \quad 2\varphi + 3w_1 - \omega_1 \pm \theta, \quad 2\varphi - 3w_1 + \omega_1 \pm \theta,$$

$$2\varphi \pm w_1 \pm \omega_1 \pm 2\theta, \quad 2\varphi + 3w_1 - \omega_1 \pm 2\theta, \quad 2\varphi - 3w_1 + \omega_1 \pm 2\theta,$$

$$2\varphi \pm \omega \pm w_1, \quad 2\varphi + 2w - \omega \pm w_1, \quad 2\varphi - 2w + \omega \pm w_1,$$

$$2\varphi \pm 2w + w_1 - \omega_1 \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2w - w_1 + \omega_1 + \theta, \quad 2\varphi \pm 2w + w_1 - \omega_1 - \theta, \dots$$

полумесячным

$$2w_1 \pm \theta, \quad 2w_1 + w - \omega, \quad 2w_1 - w + \omega, \quad 2w_1 + w - \omega + \theta, \quad 2w_1 - w + \omega + \theta,$$

$$2w_1 + w - \omega - \theta, \quad 2w_1 - w + \omega - \theta,$$

месячным

$$w_1 + 2w - \omega_1 \pm \theta, \quad w_1 + 2w + \omega_1 \pm \theta,$$

и чандлеровским

$$\theta + w_1 - \omega_1, \quad \theta - w_1 + \omega_1, \quad \theta + w_1 - \omega_1, \quad \theta - w_1 + \omega_1.$$

Имеются также и комбинации с другими периодами, например:

$$3w_1 \pm \omega_1, \quad 3w_1 \pm \omega_1 \pm \theta,$$

$$\theta + w - \omega, \quad \theta - w + \omega.$$

Хотя уравнения (5.10) позволяют также выписать формулы для амплитуд приливов, соответствующих различным периодам, но эти коэффициенты требуют знания собственных форм колебаний Земли, точной фигуры Земли, коэффициентов Ламе, диссипативного коэффициента, и поэтому, более просто, могут определяться из результатов наблюдений. Как известно, фигура Земли в результате приливных деформаций (океанических и твердотельных приливов) является меняющейся во времени и стремится обрести форму реальной поверхности, именуемой геоидом. Гравитационный потенциал такой Земли можно приближенно получить из (5.1) заменив вектор перемещений \mathbf{u} выражением вида (5.11), где углы можно с большой степенью точности считать известными функциями времени. Заметим также, что повышение порядка разложений R_{21} и R в ряды по степеням эксцентриситета в (5.10) добавит новые слагаемые в (5.11) и, соответственно, новые частоты.

Заключение

Перечислим основные результаты диссертационной работы:

1. В задаче об эволюции вращений спутника относительно центра масс было показано, что в результате быстрой эволюции вектор кинетического момента расположится вдоль оси симметрии спутника (если осевой момент инерции больше экваториального) и в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции, если наоборот.
2. Установлено, что в результате медленной диссипативной эволюции под действием гравитационно-приливных моментов от притягивающего центра будет происходить замедление быстрого осевого вращения, а вектор кинетического момента будет наклоняться к плоскости орбиты, а в случае обратного вращения переворачиваться в прямое вращение.
3. Показано, что в задаче о поступательно-вращательном движении шарообразного вязкоупругого спутника, вследствие осесимметричных деформаций, возникающих из-за сил центробежных сил инерции, происходит быстрая эволюция орбиты, заключающаяся в прецессии плоскости орбиты (т.е. изменении долготы восходящего узла), а также вращении перицентра орбиты в ее плоскости.
4. Получено, что медленная эволюция спутника, обусловленная гравитационными приливами приводит орбиту к круговой, при этом вектор кинетического момента спутника становится ортогональным к

плоскости орбиты, а угловая скорость вращения стремится к его орбитальной угловой скорости.

5. Найдены приближенные значения частот лунно-солнечных приливов на основе модели деформируемой Земли, состоящей из твердого ядра и вязкоупругой мантии.

Список литературы

1. *Акуленко Л. Д., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Рыклова Л.В.* Внутригодовые неравномерности вращения Земли. – *Астрономический журнал*, 2008, том 85, №7, с. 657–664.
2. *Баркин М.Ю., Перепёлкин В.В., Скоробогатых И.В.* Небесномеханическая модель вращательного движения Земли и прогноз глобальной составляющей момента импульса атмосферы – *Космические исследования*, 2012, том 50, №3, с. 271–280.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд. МГУ, 1975. 308 с.
4. *Белецкий В.В.* Приливная эволюция наклонений и вращений небесных тел. Препринт № 43. М.: Институт прикл. Математики АН СССР, 1978, 20 с.
5. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики. М.: Наука, 1983. 448 с.
6. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
7. *Болотина Н.Е., Вильке В.Г.* О поступательно-вращательном движении упругого стержня в центральном ньютоновском поле сил. – *МТТ*, 1982, № 4, с. 64-69.
8. *Болотина Н.Е., Вильке В.Г.* Движение симметричного спутника вокруг центра масс на круговой орбите при наличии гибких вязкоупругих стержней. – *Космич. исслед.*, 1984, т.22, вып. 1. с. 13-19.

9. *Болотина Н.Е., Вильке В.Г., Марков Ю.Г.* О вращательном движении твердого тела, несущем вязкоупругий диск, в центральном поле сил. – ПММ, 1986, т.50, вып. 2, с. 187-193.
10. *Весницкий А.И., Крысов С.В., Уткин Г.А.* Постановка краевых задач динамики упругих систем исходя из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. Горький.: ГГУ, 1983. 65 с.
11. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы в динамике систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1982. 122 с.
12. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1986. 192 с.
13. *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Часть I. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. 215 с.
14. *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Часть II. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. 160 с.
15. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 237 с.
16. *Вильке В.Г.* О движении упругой планеты в центральном поле сил. – Космич. исслед., 1979, № 3, с. 364-370.
17. *Вильке В.Г.* Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. – ПММ, 1980, 44, вып. 3, с. 395-402.

18. *Вильке В.Г.* Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы. – Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1983, № 5. С.54.
19. *Вильке В.Г., Марков Ю.Г.* Эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты. – Астроном. журнал. 1988, т. 65, вып. 4, с. 861-867.
20. *Вильке В.Г., Демин В.Г., Марков Ю.Г.* Эволюция вращений симметричного спутника с вязкоупругими стержнями вокруг центра масс на круговой орбите. – Космич. исслед., 1985, т.24, вып. 6.
21. *Вильке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите. – Космич. исслед., 1994, т.32, вып. 4-5, с. 51-61.
22. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошных сред. М.: Наука, 1978.
23. *Голдрайх П., Пил С.* Динамика вращения планет. – Приливы и резонансы в Солнечной системе. Под ред. Жаркова В.Н. М.: Мир, 1975.
24. *Дарвин Дж.Г.* Приливы и родственные им явления в Солнечной системе. М.: Наука, 1969.
25. *Демин А.В., Марков Ю.Г., Миняев И.С.* О приливной эволюции наклонений и вращений небесных тел. – Космич. исслед., 1992, т. 30 вып. 3, с. 157-164.
26. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
27. *До Чунг Бо, Марков Ю.Г., Скоробогатых И.В.* Долгопериодическая эволюция поступательно-вращательного движения деформируемого спутника. – Космонавтика и ракетостроение, 2016, вып. 1 (86), с. 5 – 11.

28. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1986, 760 с.
29. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
30. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 310 с.
31. *Кильчевский Н.А.* Механика континуальных систем. Киев.: Наукова думка, 1984. 428 с.
32. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
33. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
34. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. М., Л.: ГИТТЛ, 1947. 465 с.
35. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
36. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1935. 672 с.
37. *Манк У, Макдональд В.* Вращение Земли. М.: Мир, 1964.
38. *Маркеев А.П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле. – Космич. исслед., 1989, т. 27, вып. 4, с. 163-165.
39. *Марков Ю.Г., Миняев И.С.* Об эволюции движений системы «планета – спутник» в поле притягивающего центра. – Астрон. журнал, 1992, т. 69, вып. 2, с. 416-427.
40. *Марков Ю.Г., Миняев И.С.* Пространственный вариант задачи «деформируемая планета - спутник» в поле притягивающего центра. – Космич. исслед., 1994, т. 32, вып. 6, с. 89-98.
41. *Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В., Скоробогатых И.В.* – Поступательно-вращательное движение как новый подход к решению астрометрических

- проблем в теории вращения Земли. – ДАН. Астрофизика, космология, 2000, т. 370, № 5.
42. *Марков Ю.Г., До Чунг Бо, Скоробогатых И.В.* О влиянии упругих деформаций на поступательно-вращательное движение тела в центральном гравитационном поле сил. – Космонавтика и ракетостроение, 2015, вып. 1 (80), с. 106 – 113.
43. *Марков Ю.Г., До Чунг Бо, Скоробогатых И.В.* О влиянии упругих деформаций на движение тела в центральном гравитационном поле сил. – Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль. 3–7 июля 2015 года, с. 94.
44. *Миняев И.С., Скоробогатых И.В.* О влиянии деформаций на плоские движения деформируемого тела в гравитационном поле. – Космические исследования, 1994, вып. 1, т.32, с. 49-57.
45. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1969. 379 с.
46. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983. Т.1, 2, 528 с., 560 с.
47. *Сидоренко В.В.* Эволюция быстрых вращений упругого кольца в гравитационном поле. – Препринт № 93, ИПМ АН СССР, 1987.
48. *Скоробогатых И.В., Тимошин Д.С., Филиппова А.В.* Многочастотный процесс возмущённых движений Земли в рамках задачи трёх тел. – Космонавтика и ракетостроение, 2012, вып. 4(69), с.121-127.
49. *Скоробогатых И.В., До Чунг Бо.* О частотах лунно-солнечных приливов деформируемой Земли. – Космонавтика и ракетостроение, 2014, вып. 1 (74), с. 113 – 117.

50. *Скоробогатых И.В., Тун Тун Вин.* Орбитально-вращательное движение спутника, содержащего деформируемые элементы, в гравитационном поле сил. – *Космонавтика и ракетостроение*, 2012, вып. 4 (69), с. 108 – 113.
51. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955, т. 1, 2, 504 с., 475 с.
52. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1965. 472 с.
53. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.: Едиториал УРСС, 2004. 504 с.
54. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 472 с.
55. *Хентов А.А.* Динамика формирования резонансных вращений естественных небесных тел. – *Астрон. журнал*, 1982, т. 59, № 4, с. 769-781.
56. *Auld B.A.* Acoustic fields and waves in solids. Vol.1,2. 1973.
57. *Canavin J.R., Likins P.W.* Floating references frames for flexible spacecraft. *Journal Spacecraft and Rockets*. 1977. Vol.14, №12, p.724-732.
58. IERS Annual Reports 2000/2002. Frankfurt am Main:KG 2001/2003.
59. *До Чунг Бо.* Динамика космического аппарата с деформируемыми элементами в режиме ориентации. – *Международная конференция по математической теории управления и механике*. Суздаль. 5–9 июля 2013 года, с. 93.