

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

МАСЛОВА ЕКАТЕРИНА ИГОРЕВНА

МАСШТАБОЗАВИСИМЫЕ МОДЕЛИ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук,  
профессор Лурье Сергей Альбертович

Москва 2016

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>ОБЗОР РАБОТ ПО ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАСШТАБНЫХ И АДГЕЗИОННЫХ ЭФФЕКТОВ.....</b>	<b>8</b>
<b>ГЛАВА 1. ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ СРЕД, ГРАДИЕНТНЫЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МОДЕЛИ АДГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ.....</b>	<b>17</b>
1.1    Градиентные теории упругости.....	17
1.1.1    Введение.....	17
1.1.2    Вариационный метод построения моделей сред.....	17
1.1.3    Модель классической теории упругости .....	18
1.1.4    Модель дефектной среды .....	21
1.1.5    Модель сред Аэро-Кувшинского.....	25
1.1.6    Модель бездефектной среды Миндлина-Тупина.....	28
1.1.7    Градиентные теории упругости и условия корректности .....	31
1.1.8    Примеры некорректных моделей .....	39
1.1.9    Заключение .....	46
1.2    Градиентные теории упругости с учетом адгезии.....	47
1.2.1    Введение.....	47
1.2.2    Потенциальная энергия адгезионных взаимодействий в классической теории упругости .....	47
1.2.3    Структура тензора поверхностных модулей .....	50
1.2.4    Трактовка поверхностных модулей.....	53
1.2.5    Определяющие соотношения теории адгезии.....	55
1.2.6    Обобщение теории адгезии. Модель адгезии относительно тензора дисторсии (несимметричная теория упругости).....	57
1.3    ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	60
<b>ГЛАВА 2. УТОЧНЕННАЯ ГРАДИЕНТНАЯ ТЕОРИЯ МАСШТАБОЗАВИСИМЫХ СВЕРХТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ.....</b>	<b>61</b>
2.1    ВВЕДЕНИЕ.....	61
2.2    ПРИКЛАДНАЯ ГРАДИЕНТНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ.....	62
2.3    УРАВНЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ .....	63
2.4    МЕТОД РЕДУКЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....	74
2.5    ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	78

<b>ГЛАВА 3. О ВЛИЯНИИ АДГЕЗИОННЫХ МАСШТАБНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ СВЕРХТОНКИХ МИКРО-, НАНОСИСТЕМ .....</b>	<b>78</b>
3.1 ВВЕДЕНИЕ.....	78
3.2 ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ДЛЯ МОДЕЛИ СРЕДЫ С АДГЕЗИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ. СТРУКТУРА МОДУЛЕЙ АДГЕЗИИ .....	79
3.3 ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ АДГЕЗИИ (КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ).....	82
3.4 ВЛИЯНИЯ МАСШТАБНЫХ И АДГЕЗИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ	86
3.5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	88
<b>ГЛАВА 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ, ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ.....</b>	<b>89</b>
4.1 ВВЕДЕНИЕ.....	89
4.2 ИЗГИБ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ СТЕРЖНЕЙ. ВЛИЯНИЕ КОГЕЗИОННОГО МАСШТАБНОГО ПАРАМЕТРА.....	89
4.3 АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АДГЕЗИОННЫХ И ГРАДИЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ.....	94
4.4 ВЛИЯНИЕ АДГЕЗИОННЫХ МАСШТАБНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ.....	97
4.5 УТОЧНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЛЯ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ .....	100
4.6 КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН КИРХГОФА. АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ ЛЭМБА .....	106
4.7 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ТИПА ЗАДЕЛОК НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ БЕРНУЛЛИ.....	114
4.7.1 Классический подход.....	114
4.7.2 Уравнения неклассической теории стержней .....	115
4.7.3 Уравнения неклассической корректной теории стержней.....	120
4.7.4 Уравнения неклассической некорректной теории стержней.....	120
4.7.5 Результаты.....	121
4.8 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ МАСШТАБОЗАВИСИМЫХ СТЕРЖНЕЙ. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАСШТАБНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТА ...	123
4.9 ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	130
<b>ВЫВОДЫ.....</b>	<b>131</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>133</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. С развитием аэрокосмических систем, возникновением новых прогрессивных технологий физических исследований, с появлением высокочувствительной аппаратуры и развитием микроэлектроники растёт интерес к особенностям деформирования тонких структур. Толщина элементов, исследуемых в этих структурах, соразмерна характеристикам его микроструктуры. При этом закономерен вопрос о возможности применения классического подхода к описанию деформации таких элементов. Исходя из этого, понятна актуальность проблемы учёта масштабных эффектов, с помощью которых учитывается связь физических свойств материала с характерными размерами его микроструктуры, и увеличение роли поверхностных процессов по отношению к объёмным процессам.

В настоящее время исследования тонких структур ведутся во многих передовых странах многими учеными. В настоящей работе предлагаются уточненные модели деформирования тонких структур, толщина которых соизмерима с масштабными параметрами, а полученные результаты сравниваются с результатами, установленными ранее другими учеными и вносятся существенные поправки в их исследования.

Целью работы является: построение уточненной корректной градиентной теории масштабозависимых стержней и пластин, позволяющая учесть аномальное изменение механических свойств при уменьшении толщины системы. Разработка вариационного метода построения теории масштабозависимых стержней и пластин для нелокальной градиентной теории упругости.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Построена уточненная корректная градиентная теория, установлены критерии корректности прикладных нелокальных теорий.
- Приводится модель поверхностных эффектов, являющаяся обобщением модели Гуртина-Мурдоха.
- Устанавливается структура адгезионных модулей, дается их трактовка.

- Построена градиентная теория упругости тонких стержней и пластин с учетом поверхностных эффектов.
- Проведен анализ влияния дополнительных физических параметров, связанных со свойствами поверхности, на изгибную жесткость и на динамическую изгибную жесткость стержней и пластин.

Практическое значение работы. Уточненные модели деформирования позволяют более полно и достоверно прогнозировать поведение сверхтонких структур, которыми являются тонкие элементы конструкций, резонаторы, сенсорные устройства, устройства микроэлектроники и элементы измерительных систем (иглы атомных микроскопов), биологические системы и др. Полученные в работе результаты позволяют пересмотреть систему экспериментов и более правильно отнестись к исследованию тонких структур. Уточнение динамических свойств сверхтонких систем и тонкостенных структур может представлять интерес, например, для задач тестирования механических свойств (деградации механических свойств) с помощью метода акустической эмиссии, для повышения точности измерительных устройств.

Реализация результатов работы. Результаты, полученные в диссертации, используются в Учреждении Российской Академии Наук Институте Прикладной механики РАН.

Достоверность результатов обеспечивается применением классических, хорошо апробированных математических методов, методов механики сплошных сред, прикладной теории упругости: вариационного метода построения моделей, применения прямых вариационных методов и методов уравнений математической физики при решении тестовых задач; сопоставлением полученных в диссертации теоретических результатов с тестовыми аналитическими решениями частных задач; известными экспериментальными данными; непротиворечивостью полученных результатов физическому смыслу явлений, связанных с деформированием сред.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на 2-ой Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных

материалов и систем», ИПРИМ РАН, 17-19 декабря 2013; Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике», Москва, МАИ, 16-18 апреля 2013; 5-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», посвященная 95-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова, ИПРИМ РАН, Москва, 2015 г.; 1-ой международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций», ИМАШ РАН, Москва, 2014 г.

Публикации. Всего по теме диссертационной работы было выпущено 9 публикаций, 3 из которых выходили в журналах и сборниках, определенных ВАК. Перечень публикаций приведен в конце диссертации.

На защиту выносятся:

- Формулировка вариационной градиентной теории упругости, учитывающей масштабные эффекты и анализ условий симметрии градиентных модулей упругости шестого ранга, вывод условий корректности, как дополнительных необходимых условий симметрии.
- Формулировка вариантов прикладных градиентных теорий, удовлетворяющих условию корректности, критический анализ известных прикладных градиентных теорий.
- Вариационная формулировка корректной градиентной теории масштабозависимых стержней, метод редукции функционала Лагранжа при построении уточненной теории масштабозависимых стержней, ревизия соотношений для эффективной изгибной жесткости масштабозависимых стержней, полученных ранее Yang, Reddy, Ma и др.
- Анализ континуальной теории адгезии (поверхностных взаимодействий), обобщающей теорию Гуртина-Мурдоха, и вариационная формулировка теории пластин с адгезионно активными лицевыми поверхностями, вывод теории масштабозависимых стержней, учитывающих градиентные эффекты и масштабные эффекты поверхностных взаимодействий.

- Анализ решений тестовых статических задач уточненной теории тонких стержней и качественные выводы о поправках, вносимых за счет использования корректных градиентных теорий по сравнению с некорректными, а также принципиальный вывод о незначительной степени влияния градиентных эффектов на эффективную жесткость по сравнению с масштабными эффектами поверхностных взаимодействий.
- Формулировка корректной градиентной теории колебаний стержней с модифицированной кинетической энергией. Анализ зависимостей динамических жесткостей и собственных частот масштабозависимых стержней от градиентных эффектов и от масштабных поверхностных эффектов, прикладные задачи масштабозависимых пластин (задача Лэмба) и оценка степени влияния поверхностных эффектов на результаты решения.
- Анализ соответствия решений уточненной теории стержней экспериментальным данным и идентификация параметров моделей, ответственных за масштабные эффекты.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов и списка используемой литературы. Она содержит 143 страницы, из них 10 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 118 наименований (из них 85 на иностранном языке).

## ОБЗОР РАБОТ ПО ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАСШТАБНЫХ И АДГЕЗИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Масштабные эффекты физических свойств деформируемых тел проявляются экспериментально при изменении размеров этих тел, при их уменьшении до нанометрового диапазона. Например, теплопроводность диэлектриков связана на малых масштабах с размером структурного элемента и зависит от длины свободного пробега фонона. Определение данной зависимости при низких температурах зависит от размера структуры или расстояния между дефектами [1].

В соответствии с законом Холла-Петча [2], [3], прочностные свойства пластических материалов зависят от размера зерна и при его уменьшении изменяются в соответствии с длиной движения дислокации. А по теории разрушения, основоположником которой был Алан Гриффитс [4], при уменьшении размера начального дефекта при хрупком разрушении происходит возрастание прочности материала. Но связь с размером структуры материала характерна только для определения его прочности и не подходит для определения других его свойств, например, упругости, так как для классической теории упругости не существует характеристик среды с размерностью длины. Наблюдение за механическим поведением нанообъектов (нанопроволок, нанотрубок, наноостровков, тонких плёнок и пр.) и описание масштабного эффекта этих процессов приводит к обобщению теории упругости.

Большое количество теоретических исследований атомной структуры материалов нанообъектов при использовании молекулярного и квантово-механического моделирования и экспериментальные работы доказывают наличие масштабного эффекта при размерах нанообъектов от долей до десятка нанометров [5, 6]. Примером такого поведения являются модели обобщённой упругости нанотрубок, созданные на основе численного молекулярного моделирования [7], и упрощённые дискретные модели плёнок [8].



Масштабный эффект для композитов с дисперсными частицами заключается в зависимости свойств от размеров включений, и его нельзя описать в соответствии с классической теорией упругости. При размерах частиц порядка нескольких десятков нанометров и менее в тонкодисперсных композитах [9] наблюдается зависимость характеристик от размера включений, объясняемая наличием «промежуточной фазы» - промежуточного слоя между матрицей и включениями, свойства которого отличаются и от матрицы, и от включений (например [10, 11]).

Происхождение «промежуточной фазы» вызвано тем, что состояние молекул в ней отличается от состояния молекул, которые находятся вдали от границы. При этом различие композитов на основе неорганических соединений определяется разностью параметров кристаллических решеток и различием сил Ван-дер-ваальсового взаимодействия фаз, а в композитах на основе органических соединений она вызвана особым состоянием макромолекул в пограничном слое. В работах [12, 13, 14] для описания тонких структур на наномасштабе были развиты подходы на основе адгезионного взаимодействия.

Поверхностные свойства и энергия поверхностного взаимодействия являются ключевыми факторами, которые определяют характеристики и свойства наноструктурированных материалов, используемых в современном машиностроении. К ним относятся композиты с микро- и наноразмерными включениями, тонкие плёнки, слоистые структуры, покрытия и др.

В настоящее время важной задачей является построение моделей с учётом свойств свободных и внутренних межфазных поверхностей. Для её решения используются различные подходы – это и теория упругости с учётом поверхностных взаимодействий, и термодинамическая теория поверхности, и градиентная теория упругости, и контактная теория упругости, физика и химия поверхности, трибология и др.

Впервые поверхностные явления были исследованы ещё в XVII - XVIII веках [15, 16], тогда и появилось понятие поверхностного натяжения для жидких сред.

Классическая термодинамика поверхности была сформулирована Гиббсом в работе 1876 года [17].

В начале XIX века Томас Юнг [18], Лаплас [19] и Пуассон [20] развили теорию поверхностного натяжения на основании представлений о межмолекулярных взаимодействиях.

В 1830 году Гауссом впервые было введено понятие поверхностной энергии [21].

Наиболее детально термодинамическая теория поверхностных явлений была разработана Гиббсом в 1876 году [17] и впоследствии получила развитие в работах Шатлворта [22], Херинга [23], Орована [24], Каммарата [25] и др.

Модели, учитывающие поверхностные эффекты деформируемых сред, были впервые показаны в работах Гуртина и Мурдоха [26, 27], которые использовали закон Лапласа-Юнга для учёта поверхностных свойств модифицированных контактируемых сред в рамках теории упругости.

На контактной поверхности ставилось условие, которое связывало скачок в нормальных напряжениях с дивергенцией поверхностных напряжений:

$$[\sigma] \cdot n = -\nabla_s \tau$$

где  $[\sigma] = \sigma_2 - \sigma_1$  - разность напряжений на границе в контактирующих фазах;  $n$  – внешняя нормаль к поверхности;  $\nabla_s \tau$  - дивергенция тензора поверхностных напряжений.

При этом использовался классический закон Гука в объёме среды, по которому устанавливались основные соотношения между поверхностными напряжениями и деформациями в виде линейных соотношений. При этом в определяющие соотношения добавляется параметр, который отвечает за поверхностное натяжение, благодаря чему следует, что существуют напряжения поверхностного натяжения и без деформаций.

$$\sigma_{ij} = \tau^0 \delta_{ij} + (\lambda_s + \tau^0) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2(\mu_s - \tau^0) \varepsilon_{ij},$$

Где  $\tau^0$  - поверхностное натяжение среды, действующее в отсутствии внешних нагрузок,  $\lambda_s, \mu_s$  - поверхностные аналоги коэффициентов Ламе,  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  - тензор деформаций и напряжений на поверхности среды,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Деформации поверхности при этом определяются как деформации на границе среды. Эти деформации получаются при решении уравнения равновесия в объеме среды. Таким образом, выполняется условие полного контакта среды на границе по перемещениям. В соответствии с данным подходом граничные условия отличаются от классических тем, что содержат в себе поверхностные напряжения. При этом упругие поверхностные постоянные не связаны с объемными характеристиками среды, а представляют из себя новые физические постоянные, зависящие по своему физическому смыслу только от характеристик межатомных взаимодействий на поверхности среды.

Обобщённый закон Лапласа-Юнга, учитывающий скачок и в нормальных напряжениях и в касательных напряжениях на границе сред, был предложен в работе [28].

$$n \cdot [\sigma] \cdot n = -\tau : k$$

$$P \cdot [\sigma] \cdot n = -\nabla_s \tau$$

$P = I^{(2)} - n \otimes n$  - тензор проекции на поверхность контакта,  $I^{(2)}$  - определяющий тензор второго порядка в трёхмерном пространстве,  $k$  - тензор кривизн.

В работах [29, 30] вводятся определяющие соотношения между напряжениями и деформациями на поверхности в виде тензорных соотношений:

$$\sigma_{ij} = \tau^0 + S_{ijnm} \varepsilon_{nm} \quad [29] \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} = S_{ijnm} \varepsilon_{nm} \quad [30]$$

Где  $S_{ijnm}$  - тензор поверхностных модулей.

В случае изотропной поверхности определяющие соотношения записываются в виде [29]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu_s \varepsilon_{ij} + \lambda_s \varepsilon_{ii}$$

В соответствии с классической теорией упругости тензор упругих поверхностных модулей включает в себя два физических модуля, которые отвечают за деформации сдвига и растяжения (соответственно,  $\mu_s$  и  $\lambda_s$ ).

Из этого следует, что на поверхности могут присутствовать как деформации растяжения (поверхностное натяжение), как было в термодинамической теории поверхности, так и деформации сдвига. В работе [31] предлагается более полный вариант определяющих соотношений на поверхности. В данной работе тензор поверхностных модулей упругости для изотропной поверхности включает в себя три постоянные, которые отвечают за деформации изгиба, сдвига и растяжения поверхности.

Существует и четвертый поверхностный параметр, который возникает в соответствии с несимметричной теорией упругости (среда Коссера), и отвечает за спиновые деформации. Поверхностные модули в соответствии со свойствами контактирующих поверхностей могут быть и положительными, и отрицательными [29]. Одной из важных задач в механической теории поверхности является вычисление или экспериментальное получение значений поверхностных модулей. Работы [29, 32] содержат в себе примеры вычисления поверхностных упругих модулей для свободной поверхности алюминия на основе молекулярной динамики. В работах [33-36] показан иной подход к вычислению поверхностных характеристик. Он основывается на том, что при переходе через поверхность контакта характеристики межфазного слоя конечной толщины и скачок в напряжениях или перемещениях определяются как разность между значениями напряжений или перемещений на границах межфазного слоя.

Физическое моделирование адгезионных свойств и попытки определить эти свойства, учитывая межмолекулярные взаимодействия, предпринимались в работах Шоркина, например, [37].

Вычисление поверхностных характеристик подробно рассмотрено в работах [27, 29, 38].

В 90-е годы возникает потребность прогнозирования свойств микро- и наноструктурированных сред и композитов с наноразмерными включениями

(фуллеренами, наноразмерными порами, углеродными нанотрубками и проч.). В это время для решения прикладных задач широко используется теория упругости с учетом поверхностных эффектов.

Использованная в работе [28] формулировка основана на введении в качестве модифицированных граничных условий обобщенного закона Лапласа-Юнга. В работе [30] к ней добавлены определяющие физические соотношения на поверхности. Данная модель позволяет учитывать масштабные эффекты, и она нашла широкое применение при моделировании наноструктурированных сред и сред с нановключениями [29, 39-44]. Масштабными параметрами модели - это поверхностные модули, отличающиеся от физических модулей в объёме на масштаб длины [42], и кривизны, которые входят в обобщенный закон Лапласа-Юнга.

В работе [45] определение эффективного модуля упругости пористого материала показывает зависимость эффективного модуля от размера пор при учете свойств внутренних поверхностей пор. В классической механике композитов такой результат не может быть получен, так как влияние пор учитывается только через их объёмное содержание в материале. В работе [42] при моделировании композита с нановключениями показана зависимость механических свойств от масштабных параметров. В статье [44] демонстрируется тензор Эшелби в задаче удаленного включения, погруженного в матрицу. Он включает в себя такие масштабные параметры, как кривизны контактной поверхности. В [44] показано, что в отличие от классической теории упругости, при учёте поверхностных свойств, однородное напряжённое состояние во включении при однородном внешнем поле напряжений реализуется только в случае включений с постоянной кривизной, а именно в сферических и цилиндрических включениях.

В последнее время для описания механического поведения нанообъектов применяется обобщенная теория упругости, использующая классическую теорию, в которой не только для границ раздела, но и для поверхностей вводятся нестандартные свойства [26, 39, 46, 47, 48, 49]. При этом для аномальной

поверхностной упругости используют поверхностные определяющие уравнения, которые дополняют обычный закон Гука для объема материала, а соотношения равновесия дополняются поверхностным аналогом – уравнениями Лапласа-Юнга. Широкое распространение данная модель получила в работах В.В. Еремеева, Н.Ф. Морозова и соавторов [22, 50-55]. М.А. Грековым и соавторами был развит математический аппарат, который позволил свести двумерные задачи теории упругости с дополнительными условиями на границе указанного типа к гиперинтегральным уравнениям [56-59].

При этом нужно отметить, что теория поверхностных явлений исторически развивалась для жидкостей, в которых данные явления находят яркое проявление даже на макроуровне. При изучении поверхностных свойств твердых тел основные положения теории поверхностных эффектов переносятся автоматически, но некоторые особенности твердого тела, однако, обсуждались в работе [47] и цитированных работах выше.

При взаимодействии жидкости с твердым телом и в самой жидкости на молекулярном уровне контакт происходит за счет Ван-дер-ваальсовых сил, довольно слабых и дальнodelствующих. На основе этого, обладая минимальным набором опытных данных, объясняются явления поверхностного натяжения и контактного взаимодействия жидкости с твердым телом (смачивание и капиллярные явления). Контакт между атомами твердого тела осуществляется за счет ковалентного, ионного, металлического типов взаимодействия, где Ван-дер-ваальсовый тип взаимодействия не является основным. Контактное взаимодействие между телами определяется Ван-дер-ваальсовым взаимодействием, а проявление поверхностной энергии и поверхностной упругости связано со всем разнообразием существующих взаимодействий (ситуация может осложняться наличием поверхностных зарядов). При этом нет возможности описать все многообразие поверхностных явлений в твердых телах, исходя из такого малого количества данных и предположений. В связи с этим в твердых телах гораздо чаще реализуются метастабильные состояния за счет

высоких потенциальных барьеров. Эти состояния не соответствуют глобальному минимуму свободной энергии для данных условий.

В работе [31] впервые представлена в рамках теории Кирхгоффа модель тонких пластин с учётом адгезионных эффектов. В работе [51] дан вариант модели, в которой учтено только поверхностное натяжение без учёта изгибных свойств поверхностей. В данных работах впервые отмечался существенный вклад адгезионных эффектов в упругие свойства тонких пластин. В этих статьях указано, что при учете адгезии видоизменяется общий вид уравнений равновесия модели [31] и цилиндрическая жёсткость пластины [31] и [51]. Адгезионные эффекты увеличиваются с уменьшением толщины пластины и становятся существенными для наноразмерных пластинчатых тел.

В работах [54, 60] даны исследования модели теории оболочек с учётом поверхностных напряжений. Адгезионные модули имеют размерность, которая отличается от размерности модулей упругости в объёме (Н/м), и позволяют учитывать масштабные эффекты. В работах [61, 62] сформулирован закон масштабирования в рамках модели поверхностного натяжения. В работе [63] данный закон применен к задаче о нановключении.

В работе [32] закон масштабирования использован для нелинейной деформации с учётом поверхностных эффектов. В работе [64] проанализировано влияние поверхностных напряжений на деформации вблизи эллиптической поры и дано аналитическое решение этой задачи. В работе [65] к общей потенциальной энергии среды добавлена потенциальная энергия поверхностных деформаций и дан вариант метода конечных элементов с учетом поверхностных явлений. В данной работе смоделировано поведение металлов как для упругой, так и для пластической зон.

Поверхностные эффекты учитываются так же в рамках механики разрушений. В работах [66, 67] в рамках модели поверхностного натяжения даны аналитические решения задач с трещиной. При этом видно, что напряжения в вершине трещины остаются конечными. В работе [67] дан обзор публикаций, посвященных моделям с учётом поверхностного натяжения.

В работах [68, 69] дана трактовка адгезионных параметров, список которых расширен до 6. В них включены параметры, которые определяют межфазные взаимодействия на поверхности в направлении нормали. Эффекты адгезии возникают как следствие выхода полей дефектов на поверхность среды. В работах [68, 69] показано также, что адгезионные эффекты являются следствием градиентной постановки задачи. При этом в работах [68, 69] в моделях учитываются поля дефектов различного типа и градиентные теории основываются на их последовательной постановке. Авторы данных работ используют вариационный подход и кинематический вариационный принцип для построения и исследования моделей с учетом адгезии.

Исследование волновых процессов в твердых телах с микроструктурой предложены в работах Ерофеева, например, [70-71].

Прикладные градиентные теории были разработаны первоначально в начале восьмидесятых годов для градиента пластичности [72-73] и, соответственно, в 90-годах для теории упругости [74-76]. Содержательный обзор исследований, посвященных разработке прикладных градиентных теорий за этот период, истории их развития представлен в работе [77]. Дальнейший прогресс в области развития градиентных теорий связан с расширением области приложения этих теорий на задачи термо-упруго-пластичности [78], а также на прикладные статические и динамические задачи упругости, проблемы теплопроводности и диффузии [79]. В перечисленных работах разрабатывались варианты градиентных моделей сред для описания масштабных эффектов без учета адгезивных взаимодействий.

Зависимость напряжённо-деформированного состояния и эффективных характеристик среды от масштабных параметров задачи является одним из важнейших результатов, получаемых в результате учёта поверхностных свойств.

Наиболее полный и современный обзор работ по проблеме моделирования масштабный и адгезионных эффектов можно посмотреть в работе [80].



# ГЛАВА 1. ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ СРЕД, ГРАДИЕНТНЫЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МОДЕЛИ АДГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

## 1.1 Градиентные теории упругости

### 1.1.1 Введение

В данной главе приводится алгоритм построения математических моделей сред на основе «кинематического» вариационного принципа. Показан алгоритм построения модели сплошной среды. Приведен пример использования данного алгоритма для построения дефектных сред.

Показано, что для описания модели среды достаточно записать выражение для потенциальной энергии. Приведены примеры записи потенциальных энергий некоторых моделей сред. Приведены условия корректности моделей. Также показаны некорректные модели.

### 1.1.2 Вариационный метод построения моделей сред

Для построения математических моделей сред с учётом адгезии используется «кинематический» вариационный принцип, сформулированный в [81] и развитый в [12, 14, 82, 83-86, 87-88], позволяющий получать корректные и энергетически согласованные математические модели сред. В соответствии с этим принципом общий вид функционала энергии для исследуемой среды находится по заданным кинематическим связям. Спектр внутренних взаимодействий полностью определяется системой кинематических связей, реализующихся в среде. При этом предполагается, что рассматриваются линейные, обратимые процессы.

На первом этапе исследуются кинематические соотношения модели среды, которые позволяют сформулировать кинематические связи для исследуемой среды. В дальнейшем эти связи учитываются в рамках принципа возможных

перемещений. На втором этапе устанавливается список аргументов потенциальной энергии деформации (для обратимых процессов) и функционала Лагранжа. Приводится общий вид определяющих уравнений, соответствующих общей форме потенциальной энергии. В результате дается полная вариационная формулировка математической модели. Алгоритм построения модели сплошной среды сводится к следующему:

1. На основе анализа кинематики сред устанавливаются возможный список аргументов функционала Лагранжа и набор кинематических связей.
2. По кинематическим связям строится возможная работа внутренних сил, причем спектр внутренних сил определяется неопределенными множителями Лагранжа, на которых вводятся кинематические связи.
3. Возможная работа внутренних сил преобразуется в линейную вариационную форму. Определяется список аргументов.
4. Записываются условия интегрируемости линейной вариационной формы (условия существования потенциальной энергии) и формулы Грина.
5. В предположении физической линейности и интегрируемости линейной вариационной формы строится потенциальная энергия. По сформулированной потенциальной энергии строятся физические соотношения (уравнения закона Гука) и Лагранжиан.
6. Из условия стационарности Лагранжиана находятся уравнения Эйлера и естественные граничные условия.

### 1.1.3 Модель классической теории упругости

Пусть в среде реализуются симметричные соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{j,i}) = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}.$$

Тогда каждой точке моделируемой среды приписываются девять степеней свободы: три компоненты вектора перемещений  $R_i$  и шесть компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ . Симметричные соотношения Коши устанавливают связь между

ними. Метод неопределенных множителей Лагранжа позволяет формально сохранить равноправие всех девяти степеней свободы при формулировке физической модели выбранной среды. Это достигается тем, что вводится тензор реактивных сил, обеспечивающих вводимые связи. Этот тензор является симметричным тензором в силу свертки тензора реактивных сил с симметричным тензором кинематических связей.

Тогда, в соответствии с кинематическим вариационным методом, запишем вариацию возможной работы внутренних сил и используем интегрирование по частям. Получим:

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \iiint \sigma_{ij} \delta \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (R_{i,j} + R_{j,i}) \right] dV = \\
 &= \iiint \left[ \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij,j} \delta R_i \right] dV + \oint \left( -\sigma_{ij} n_j \right) \delta R_i dF = \\
 &= \iiint \left[ \tau_{ij} \delta \gamma_{ij} + 1/3 \sigma_{kk} \delta \theta + \sigma_{ij,j} \delta R_i \right] dV + \oint \left( -\sigma_{ij} n_j \right) \delta R_i dF
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  - компоненты симметричного тензора,

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

$n_j$  - компоненты единичного вектора нормали к поверхности, ограничивающей рассматриваемое упругое тело;

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (R_{i,j} + R_{j,i}) - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij}, \quad \theta = R_{k,k}.$$

Вариационная линейная форма (1.1) должна быть интегрируемой (должна существовать потенциальная энергия), отсюда получим:

$$\begin{aligned}
 U &= \iiint U_V dV + \oint U_F dF, \\
 U_V &= U_V (\varepsilon_{ij}, R_k) = U_V (\gamma_{ij}, \theta, R_k), \quad U_F = U_F (R_k).
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Для случая линейной среды, потенциальная энергия является квадратичной формой своих аргументов с учетом их тензорной размерности и может быть формально записана в виде:

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left[ 2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{6}(2\mu + 3\lambda)\theta^2 + 2CR_iR_i \right] dV + \iint \left[ An_in_j + B(\delta_{ij} - n_in_j) \right] R_iR_j dF \quad (1.3)$$

Последний интеграл формально описывает поверхностную энергию деформации, и указывает на естественную анизотропию, связанную с тем, что существует естественно выделенное направление - по нормали к поверхности. Определяя внутренние силовые факторы с помощью формул Грина, получаем из (1.3), что в общем случае модель сплошной среды здесь допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений  $\sigma_{ij} = \partial U_V / \partial R_{i,j}$  и объемных сил  $\sigma_i = \partial U_V / \partial R_i$ , а на поверхности - внутренних поверхностных сил  $P_i = \partial U_F / \partial R_i$ . В результате, для введенной кинематической модели среды (1.1), получим соответствующую силовую модель среды:

$$\sigma_{ij} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{k,k} \delta_{ij} \quad \sigma_i = CR_i \quad (1.4)$$

Таким образом, показано что, тензор реактивных сил  $\sigma_{ij}$  в (1.1), обеспечивающих вводимые связи (соотношения Коши) действительно является классическим тензором напряжений. На поверхности исследуемого тела справедливы следующие физические уравнения:

$$P_i = B_{ij}R_j = AR_jn_in_j + BR_j(\delta_{ij} - n_in_j) \quad (1.5)$$

Естественно считать, что  $\mu$  и  $\lambda$  равны известным в теории упругости коэффициентам Ламе ( $\mu$  - модуль сдвига). Постоянные  $A, B, C$  являются новыми упругими постоянными среды. При этом уравнения (1.4) и (1.5) являются определяющими соотношениями для модели среды с симметричным тензором напряжений и упругими внутренними связями типа объемных и поверхностных винклеровских оснований. С учетом полученных определяющих соотношений нетрудно записать и вариационное равенство, определяющее математическую модель ( $\delta L = 0, L = \bar{A} - U, \bar{A}$  - работа внешних сил на векторе перемещений  $R_k$ ).

Вопрос окончательной формулировки среды представляется весьма важным. Выбор окончательного списка физических постоянных в (1.2), (1.3) должен

диктоваться тем, что исследуемая модель среды не должна противоречить в принципе известным экспериментальным данным. Модель не должна противоречить и принципу материальной объективности (т. е. независимости определяющих соотношений от выбора системы координат - независимость от трансляций и поворотов как твердого тела). Поэтому сразу принимаем  $C = 0$ ,  $A = B = 0$  чтобы  $U_V = U_V(\varepsilon_{ij}) = U_V(\gamma_{ij}, \theta)$ ,  $U_F = 0$ . Кроме того, очевидно, что при  $C \neq 0$  в среде не может быть реализовано однородное состояние, так как при этом разрешающее уравнение имеет вид обобщенного уравнения Гельмгольца с экспоненциальными фундаментальными решениями.

Такой частной моделью является модель ньютоновской жидкости. Достаточно принять модуль сдвига равным нулю ( $\mu = 0$ ). Известно и подтверждено экспериментально, что для однородного состояния при гидростатическом растяжении выполняется условие  $\theta = const$ . С учетом закона Гука имеем для давления  $p = const$ . Это – известный закон Паскаля. Аналогично, экспериментально доказано существование однородных состояний в классической теории упругости, в частности, на примере растяжения и сдвига пластин. Нетрудно видеть, однако, что вариационная постановка (1.3)-(1.5) не позволяет получить ни однородного решения, соответствующего гидростатическому давлению, ни однородных решений, соответствующих растяжению и сдвигу, если только  $C \neq 0$ ,  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ . Отсюда следует, что в исследуемой модели можно принять  $C = 0$ ,  $A = 0$ ,  $B = 0$ .

Таким образом, использование предложенного алгоритма приводит к вариационной постановке задачи теории упругости, если в качестве кинематических связей ввести симметричные соотношения Коши.

#### 1.1.4 Модель дефектной среды

Запишем расширенные соотношения Коши для компонентов тензора дисторсии  $d_{ij}$ , которые являются кинематическими связями между двенадцатью

зависимыми степенями свободы  $\gamma_{ij}$ ,  $\theta$ ,  $\omega_k$  и  $R_i$ , которыми наделен произвольно выбранный бесконечно малый параллелепипед:

$$R_{i,j} = d_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k e_{ijk}.$$

Здесь по повторяющимся индексам осуществляется свертка,  $\gamma_{ij}$  - компоненты тензора девиатора деформаций,  $\theta$  - объемная деформация,  $\omega_k$  - вектор поворотов или упругих вращений,  $e_{ijk}$  - компоненты тензора Леви-Чивиты.

Записанное несимметричное соотношение Коши можно трактовать как условие существования векторного потенциала для тензора дисторсии  $d_{ij}$ . Условие существования такого потенциала записывается в виде:

$$d_{in,m} \mathcal{E}_{nmj} = 0 \quad (1.6)$$

Рассмотрим дефектную среду с полем дефектов - дислокациями. Если дисторсия  $d_{ij}$  не имеет непрерывного векторного потенциала, условия интегрируемости перемещений не выполняются. Тогда соотношения Папковича являются неоднородными:

$$d_{in,m} \mathcal{E}_{nmj} = \left[ \gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in} - \omega_k \mathcal{E}_{ink} \right]_{,m} \mathcal{E}_{nmj} = \Xi_{ij}. \quad (1.7)$$

Если  $\Xi_{ij} \neq 0$  - дисторсия не интегрируема, вектор перемещений как потенциал дисторсии разрывен (дисторсии неинтегрируемы). Непрерывный тензор «несовместностей»  $\Xi_{ij}$  перемещений является псевдотензором плотности дислокаций и подчиняется дифференциальному закону сохранения:

$$\Xi_{ij,j} = 0.$$

В последнем нетрудно убедиться непосредственно, если учесть несимметричность тензора  $\mathcal{E}_{nmj}$  по индексам  $m, j$ .

Решение неоднородных уравнений Папковича (1.7) представляется в виде суммы решения однородного уравнения Папковича  $d_{ij}^0$  и частного решения неоднородных уравнений Папковича  $d_{ij}^\Xi$ :  $d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^\Xi$ . Общее решение

неоднородного уравнения Папковича (1.7) можно записать в симметризованном виде:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= d_{ij}^0 + d_{ij}^{\Xi} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk}; \quad \theta = \theta^0 + \theta^{\Xi} = R_{k,k} + \theta^{\Xi}; \\ \omega_k &= \omega_k^0 + \omega_k^{\Xi} = -\frac{1}{2}R_{i,j} \mathcal{E}_{ijk} + \omega_k^{\Xi}; \\ \gamma_{ij} &= \gamma_{ij}^0 + \gamma_{ij}^{\Xi} = \frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{j,i}) - \frac{1}{3}R_{k,k} \delta_{ij} + \gamma_{ij}^{\Xi}. \end{aligned}$$

Очевидно, что здесь в качестве независимых «обобщенных перемещений» наряду с  $d_{ij}^{\Xi}$  можно рассматривать также следующие величины:  $\gamma_{ij}^{\Xi}$ ,  $\omega_k^{\Xi}$ ,  $\theta^{\Xi}$  ( $d_{ij}^{\Xi} = \gamma_{in}^{\Xi} + (1/3)\theta^{\Xi}\delta_{in} - \omega_k^{\Xi}\mathcal{E}_{ink}$ ). Эти «обобщенные перемещения» связаны со своей «обобщенной деформацией» - тензором «несовместностей»  $\Xi_{ij}$  (аналог соотношений Коши):

$$\Xi_{ij} = \left[ \gamma_{in}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{in} - \omega_k^{\Xi}\mathcal{E}_{ink} \right]_{,m} \mathcal{E}_{nmj}$$

Пользуясь терминологией Коссера,  $\omega_k^0 = -(1/2)R_{i,j} \mathcal{E}_{ijk}$  называют стесненным вращением, а  $\omega_k^{\Xi}$  - свободным вращением или спином. Аналогично, будем называть  $\gamma_{ij}^0$  и  $\theta^0$  - стесненными деформациями, а  $\gamma_{ij}^{\Xi}$  и  $\theta^{\Xi}$  - свободными деформациями.

Среду с тензором дисторсии  $d_{ij}$ ,  $d_{ij}^{\Xi} \neq 0$ , удовлетворяющим равенству, назовем дефектной средой. Подчеркнем, что в бездефектной, однородной среде тензор дисторсии является интегрируемым (он удовлетворяет условиям интегрируемости (1.6), а непрерывный вектор перемещений может быть определен из несимметричных соотношений Коши путем интегрирования в квадратурах (формулы Чезаро).

Для сред с полями дефектов непрерывными обобщенными переменными являются вектор перемещений среды  $R_i$ , непрерывная и интегрируемая часть

тензора дисторсии  $d_{ij}^0$ , непрерывная (но неинтегрируемая) часть тензора дисторсии  $d_{ij}^\Xi$  и тензор плотности дислокаций  $\Xi_{ij}$ .

Кинематические связи определяются несимметричными соотношениями Коши и неоднородными соотношениями Папковича:

$$\begin{aligned} R_{i,j} &= d_{ij}^0 \\ \Xi_{ij} &= \left[ \gamma_{in}^\Xi + \frac{1}{3} \theta^\Xi \delta_{in} - \omega_k^\Xi \mathcal{E}_{ink} \right]_{,m} \mathcal{E}_{nmj} \end{aligned} \quad (1.8)$$

В соответствии с «кинематическим» вариационным принципом возможную работу внутренних сил на связях (1.9) следует представить в виде:

$$\overline{\delta U} = \iiint \left[ \sigma_{ij} \delta \left( d_{ij}^0 - R_{i,j} \right) + m_{ij} \delta \left( \Xi_{ij} - d_{in}^\Xi \right)_{,m} \mathcal{E}_{nmj} \right] dV \quad (1.9)$$

Здесь  $\overline{\delta U}$  - возможная работа;  $\sigma_{ij}$  и  $m_{ij}$  - тензоры множителей Лагранжа, которые имеют физический смысл реактивных силовых факторов, обеспечивающих выполнение соответствующих кинематических связей. Представим  $\overline{\delta U}$  в (1.9) как линейную форму вариаций своих аргументов.

Используя интегрирование по частям в слагаемых, содержащих производные, получим:

$$\begin{aligned} \overline{\delta U} &= \iiint \left[ \sigma_{ij} \delta d_{ij}^0 + \sigma_{ij,j} \delta R_i + m_{ij} \delta \Xi_{ij} + m_{ij,m} \mathcal{E}_{nmj} \delta d_{in}^\Xi \right] dV + \\ &+ \oint \left[ -\sigma_{ij} n_j \delta R_i - m_{ij} n_m \mathcal{E}_{nmj} \delta d_{in}^\Xi \right] dF. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Пусть существует такой потенциал  $U$  (потенциальная энергия), что возможная работа  $\overline{\delta U}$  в (1.10) является вариацией этого потенциала  $\overline{\delta U} = \delta U$ , тогда:

$$\begin{aligned} 2U_V &= 2U_V \left( d_{ij}^0; d_{ij}^\Xi; \Xi_{ij} \right) = \\ &= C_{ijnm}^{11} d_{ij}^0 d_{nm}^0 + 2C_{ijnm}^{12} d_{ij}^0 d_{nm}^\Xi + C_{ijnm}^{22} d_{ij}^\Xi d_{nm}^\Xi + C_{ijnm}^{33} \Xi_{ij} \Xi_{nm}. \\ U &= \iiint U_V dV + \oint U_F dF, \quad U_V = U_V \left( d_{ij}^0; d_{ij}^\Xi; \Xi_{ij} \right), \quad U_F = U_F \left( d_{ij}^\Xi \right). \end{aligned}$$

Так же, как и для предыдущих моделей, из списков аргументов для плотностей потенциальной энергии исключен вектор перемещений, чтобы рассматриваемая модель среды с масштабными эффектами не противоречила в



частном случае классической теории упругости и известным экспериментальным данным.

Условия интегрируемости потенциальной энергии можно записать в виде:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}^0}, \quad m_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \Xi_{ij}}, \quad p_{in} = \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}^\Xi}, \quad M_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial d_{ij}^\Xi} = A_{ijnm} d_{nm}^\Xi \quad (1.11)$$

Формулы (1.11) следует трактовать как обобщенные формулы Грина для объемных и поверхностных силовых факторов. Специально выделен новый тензор модулей  $A_{ijnm}$ , описывающий спектр поверхностных свойств.

Соотношения (1.11) позволяют записать Лагранжиан и найти соответствующие уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint \left[ (\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i - (m_{in,m} \mathcal{E}_{nmj} + p_{ij}) \delta d_{ij}^\Xi \right] dV + \\ & + \iint \left[ (P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i - (M_{in} + m_{ij} n_m \mathcal{E}_{nmj}) \delta d_{in}^\Xi \right] dF = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что аналогично могут быть построены математические модели более сложных сред с микроструктурами.

### 1.1.5 Модель сред Аэро-Кувшинского

Модель сред Аэро-Кувшинского [89] строится с использованием гипотезы о существовании кинематической связи между спинами и вихрями перемещений. Гипотеза Аэро-Кувшинского может быть записана в виде:

$$\omega_k^\Xi = -\chi R_{p,q} \mathcal{E}_{pqk} \quad (1.12)$$

При такой «жесткой» гипотезе спины алгебраически могут быть исключены из Лагранжиана сред Коссера. Таким образом, в модели Аэро-Кувшинского основными неизвестными могут быть выбраны только перемещения и относительно них может быть сформулирован Лагранжиан. При этом, плотность дислокаций в модели Аэро-Кувшинского отлична от нуля. Ненулевые спины  $\omega_k^\Xi$  связаны гипотезой (1.12) с перемещениями. Они определяют соответствующий ненулевой псевдотензор-источник дислокаций в теории Аэро-Кувшинского:

$$\Xi_{ij} = \omega_{j,i}^{\Xi} - \omega_{k,k}^{\Xi} \delta_{ij} = \chi R_{p,iq} \mathcal{E}_{pqj} \neq 0.$$

Таким образом, в модели сред Аэро-Кувшинского тензор плотности дислокаций отличен от нуля и выполняется закон сохранения дислокаций  $\Xi_{ij,j} = 0$ . Следовательно, теория сред Аэро-Кувшинского является частным случаем теории сред с сохраняющимися дислокациями. Вариационное уравнение модели Аэро-Кувшинского нетрудно получить из вариационного уравнения модели Коссера с учетом дополнительно введенной кинематической связи (1.12) [70]:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint (-\mu_{k,j}^V \mathcal{E}_{ijk} + \sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ & + \oint \left[ (P_i^F - \sigma_{ij} n_j + \mu_k^V n_j \mathcal{E}_{ijk} - \mu_{k,q}^F (\delta_{qj} - n_q n_j) \mathcal{E}_{ijk}) \delta R_i + \right. \\ & \left. + (\mu_k^F n_j \mathcal{E}_{ijk}) \delta R_{p,q} (\delta_{pi} - n_p n_i) n_q \right] dF = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \mu_k^V &= -(\chi^{12} / \chi^{22}) (m_{in,m}^{\Xi} \mathcal{E}_{nmj} + P_{ij}) \mathcal{E}_{ijk}, \\ \mu_k^F &= -(\chi^{12} / \chi^{22}) (M_{in} + m_{ij} n_m \mathcal{E}_{nmj}) \mathcal{E}_{ipk} (\delta_{pn} - n_p n_n). \end{aligned}$$

В отличие от моделей сред с сохраняющимися дефектами типа Миндлина модель Аэро-Кувшинского сформулирована только в перемещениях.

Заметим, что характерной чертой модели сред Аэро-Кувшинского является то, что в каждой неособенной точке поверхности вариационное уравнение дает не шесть (как в модели Коссера), а пять граничных условий. Действительно, для модели Аэро-Кувшинского имеют место равенства:

$$\begin{aligned} (\mu_k^F n_j \mathcal{E}_{ijk}) \delta \left( \frac{\partial R_i^0}{\partial x_q} n_q \right) &= (\mu_k^F n_j \mathcal{E}_{ijk}) \delta \left( \frac{\partial R_p^0 \delta_{pi}}{\partial x_q} n_q \right) = (\mu_k^F n_j \mathcal{E}_{ijk}) \delta \left( \frac{\partial R_p^0 (\delta_{pi} - n_p n_i + n_p n_i)}{\partial x_q} n_q \right) = \\ &= (\mu_k^F n_j \mathcal{E}_{ijk}) \delta \left( \frac{\partial R_p^0 (\delta_{pi} - n_p n_i)}{\partial x_q} n_q \right) + (\mu_k^F n_j \mathcal{E}_{ijk}) \delta \left( \frac{\partial (R_p^0 n_p)}{\partial x_q} n_q \right) \end{aligned}$$

В этом легко убедиться, обратив внимание на тождественно равную нулю свертку  $n_i n_j \mathcal{E}_{ijk} \equiv 0$ .

Именно поэтому слагаемое

$$\oint \left[ (P_i^F - \sigma_{ij} n_j + \mu_k^V n_j \mathcal{E}_{ijk} - \frac{\partial \mu_k^F}{\partial x_q} (\delta_{qj} - n_q n_j) \mathcal{E}_{ijk}) \delta R_i + (\mu_k^F n_j \mathcal{E}_{ijk}) \delta \frac{\partial R_i}{\partial x_q} n_q \right] dF,$$

определяющее краевые условия (шесть краевых условий) в вариационном уравнении в теории сред Коссера после учета (1.12), сводится к поверхностному интегралу (1.13) с пятью краевыми условиями.

Гипотеза Аэро-Кувшинского о пропорциональности спинов и вихрей может быть обобщена на случай сред с сохраняющимися дислокациями и представлена в следующем виде:

$$d_{ij}^{\Xi} = aR_{k,k} \delta_{ij} + bR_{i,j} + cR_{j,i}. \quad (1.14)$$

Обобщенная гипотеза Аэро-Кувшинского в виде (1.14) дает возможность перейти от дефектных сред к моделям градиентных сред.

Модель Аэро-Кувшинского записывается только в перемещениях, имеет повышенный порядок и дополнительные граничные условия. Если для модели Аэро-Кувшинского использовать условие интегрируемости (1.6), то можно утверждать, что построена бездефектная среда. Модель Аэро-Кувшинского (1.13) содержит как классическую часть, так и неклассическую повышенного порядка.

Мы специально рассмотрели здесь подробно модель Аэро-Кувшинского как прикладную модель в рамках теории сред Коссера по следующим причинам:

1. Модель Аэро-Кувшинского сформулирована только в перемещениях, что удобно и наглядно.
2. Основные свойства среды описывается уравнениями в перемещениях, однако краевая задача является более простой.
3. «Жесткая» гипотеза Аэро-Кувшинского о пропорциональности спинов и вихрей позволяет перенести эту гипотезу на общий случай сред с сохраняющимися дислокациями и сформулировать обобщенную гипотезу Аэро-Кувшинского в следующем виде:

$$d_{ij}^{\Xi} = a \frac{\partial R_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + b \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + c \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \quad (1.15)$$

Гипотеза Аэро-Кувшинского в виде (1.15) даст возможность сформулировать прикладную теорию среды с сохраняющимися дислокациями в перемещениях с шестью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности тела.

### 1.1.6 Модель бездефектной среды Миндлина-Тупина

Теория сред Миндлина-Тупина [90] является одной из наиболее популярных неклассических моделей сплошной среды. В отличие от теории Аэро-Кувшинского в ней не делается никаких предположений. Лагранжиан  $L$  теории Миндлина-Тупина может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV$$

$$U_V = [C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl}] / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{ijmn} = C_{mnij}$$

$$C_{ijkml} = C_{mnljk}$$

Кроме того, в силу симметрии тензоров стесненных кривизн  $R_{i,jk}$  и  $R_{m,nl}$  относительно перестановок индексов  $j,k$  и  $n,l$ , тензор Миндлина-Тупина  $C_{ijkml}$  так же должен быть симметричным при перестановках в этих парах индексов.

Требования указанной симметрии здесь следует связывать с требованием корректности модели, которая будет обсуждаться далее. Отсюда следует:

$$C_{ijkml} =$$

$$= C_1 (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) +$$

$$+ C_2 (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml}) +$$

$$+ C_3 (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) +$$

$$+ C_4 (\delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk}) +$$

$$+ C_5 \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl}$$

Вообще говоря, во многих работах дается другое представление для тензора градиентных модулей упругости для изотропных сред. В большинстве случаев при этом учитывается условие потенциальности (симметрия по тройкам индексов) и симметрия по первым индексам каждой из троек, которое соответствует градиентной теории деформации.

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии  $U_V$  следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn} R_{m,n}$$

$$\mu_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} = C_{ijkml} R_{m,nl}$$

Таким образом, теория сред Миндлина-Тупина допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: симметричного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  второго ранга и тензора «моментных» напряжений  $\mu_{ijk}$  третьего ранга.

Вариационное уравнение теории сред Миндлина-Тупина получено из условия стационарности Лагранжиана:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \mu_{ijk} \delta R_{i,jk}] dV = \\ &= \delta A - \iiint (\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}) \delta R_{i,j} dV - \oint \mu_{ijk} n_k \delta R_{i,j} dF = \\ &= \iiint (\sigma_{ij,j} - \mu_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}) n_j] \delta R_i - \mu_{ijk} n_k \delta R_{i,p} (\delta_{pj}^* + n_p n_j) \} dF = \\ &= \iiint (\sigma_{ij,j} - \mu_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ &+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}) n_j + (\mu_{ijk} \delta_{pj}^* n_k)_{,p}] \delta R_i - \mu_{ijk} n_j n_k \delta \dot{R}_i \} dF - \sum \oint \mu_{ijk} v_j n_k \delta R_i ds = 0 \end{aligned}$$

Отметим, что формулировки теорий Миндлина-Тупина, Аэро-Кувшинского и полностью симметричной теории в «напряжениях» совпадают, а в перемещениях отличаются в силу различной структуры тензоров «моментных» модулей  $C_{mnljk}$ .

В кинематических переменных (перемещениях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L &= \iiint (C_{ijmn} R_{m,nj} - C_{ijkml} R_{m,nlkj} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ &+ \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn} R_{m,n} - C_{ijkml} R_{m,nlk}) n_j + (C_{ijkml} \delta_{pj}^* n_k R_{m,nl})_{,p}] \delta R_i - C_{ijkml} n_j n_k R_{m,nl} \delta \dot{R}_i \} dF - \\ &- \sum \oint C_{ijkml} v_j n_k R_{m,nl} \delta R_i ds = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, формулировка теории сред Миндлина-Тупина определяется тремя дифференциальными уравнениями четвертого порядка. Спектр краевых

задач определен шестью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности.

Рассмотрим отдельно наиболее общий вид плотности потенциальной энергии в градиентной теории упругости

$$\begin{aligned} w(R_{i,j}, R_{i,jk}) &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}R_{i,j} + \mu_{ijk}R_{i,jk}) = \\ &= \frac{1}{2}[C_{ijkl}R_{i,j}R_{k,l} + A_{ijklmn}R_{i,jk}R_{l,mn} + 2B_{lmijk}R_{l,m}R_{i,jk}] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для градиентной теории упругости (градиентная теория дисторсий) плотность потенциальной энергии (1.16) полностью определяет физическую модель, которая строится с помощью формул Грина.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}R_{k,l} + B_{ijklm}R_{k,lm}, \quad \mu_{ijk} = B_{lmijk}R_{l,m} + A_{ijklmn}R_{l,mn} \quad (1.17)$$

В общем случае компоненты  $A_{ijklmn}$ ,  $B_{lmijk}$  и  $C_{ijkl}$  упругих тензоров **A**, **B** и **C** удовлетворяют условию потенциальности:

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad A_{ijklmn} = A_{lmnijk}$$

Но не удовлетворяют условиям симметрии, соответствующим теории деформаций.

Если дополнительно удовлетворить условия симметрии деформаций, то получим:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad B_{ijklm} = B_{jiklm} = B_{ijlkm}, \quad A_{ijklmn} = A_{ijkmln} \quad (1.18)$$

В результате, определяющие соотношения (1.17) записываются в деформациях:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + B_{ijklm}\varepsilon_{kl,m}, \quad \mu_{ijk} = B_{lmijk}\varepsilon_{lm} + A_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n} \quad (1.19)$$

Рассмотрим снова общий случай изотропного материала. Для центральносимметричных материалов тензор пятого ранга **B** отсутствует. В результате число независимых упругих постоянных материала уменьшается, определяющие соотношения градиентной теории дисторсий (1.17) становятся независимыми:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}R_{k,l}, \quad \mu_{ijk} = A_{ijklmn}R_{k,lm}, \quad C_{ijkl} \neq C_{ijlk}, \quad A_{ijklmn} \neq A_{ijkmln} \quad (1.20)$$

Соответственно, для градиентной теории деформаций (1.18) вместо (1.19) получим:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \mu_{ijk} = A_{ijklmn} \varepsilon_{kl,m} \quad (1.21)$$

Соотношения (1.21) могут быть также представлены в форме (1.20), если воспользоваться равенством  $\varepsilon_{ij} = (R_{i,j} + R_{j,i})/2$ .

### 1.1.7 Градиентные теории упругости и условия корректности

Рассмотрим вариационную постановку линейной градиентной теории упругости в перемещениях для изотропных centrosymmetric материалов ( $B_{lmijk} = 0$  в (1.17)). Используя принцип Лагранжа, получим:

$$\delta L = 0, \quad L = U - A$$

$$U = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} R_{i,j} R_{k,l} dV + \frac{1}{2} \int C_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mn} dV \quad (1.22)$$

$$A = \int f_i R_i dV + \oint (t_i + q_i R_{i,j} n_j) dS$$

Здесь  $U$  – потенциальная энергия деформации обобщенной среды, записанная с учетом градиентов дисторсий,  $A$  – работа внешних сил, заданных в объеме тела и на его поверхности,  $R_i$  – вектор перемещений,  $R_{i,j} = \partial R_i / \partial x_j$ ,  $R_{i,jk} = \partial^2 R_i / \partial x_j \partial x_k$ ,  $f_i$  и  $t_i$ ,  $q_i$  – векторы заданных сил в объеме тела  $V$  и на его поверхности  $S$ ,  $n_i$  – нормаль к поверхности тела в рассматриваемой точке,  $C_{ijkl}$  и  $C_{ijklmn}$  соответственно тензор модулей классической теории упругости и тензор шестого ранга градиентных модулей для изотропных материалов. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и псевдо-тензора и «моментных» напряжений  $\mu_{ijk}$  определяются равенствами Грина:

$$\sigma_{ij} = \partial E / \partial R_{i,j} = C_{ijkl} R_{k,l}, \quad \mu_{ijk} = \partial E / \partial R_{i,jk} = C_{ijklmn} R_{l,mn} \quad (1.23)$$

Предполагается, что для тензоров классических и градиентных модулей выполняются следующие необходимые условия потенциальности:

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad C_{ijklmn} = C_{lmnijk} \quad (1.24)$$

Для изотропной симметричной теории упругости тензор модулей упругости  $C_{ijkl}$  определяется через коэффициенты Ламе  $\lambda, \mu$ :  $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ , где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Градиентную теорию упругости, в которой потенциальная энергия определяется тензором дисторсии будем называть градиентной теорией дисторсии. Более частным случаем, когда имеет место симметрия по первым двум индексам в тензорах упругости, является градиентная теория деформаций. Для определения структуры тензоров градиентных модулей упругости в теории деформаций следует ввести дополнительно условия симметрии по первой паре индексов:

$$C_{ijklmn} = C_{jiklmn}$$

Требую стационарность Лагранжиана (1.22) получим уравнения равновесия и естественные статические граничные условия для градиентной теории упругости:

$$\sigma_{ij,j} - \mu_{ijk,kj} + f_i = 0 \quad (1.25)$$

$$\sigma_{ij} n_j - \mu_{ijk,k} n_j - (\mu_{ijk} n_k)_{,j} + (\mu_{ijk} n_j n_k)_{,l} n_l = t_i, \quad \mu_{ijk} n_j n_k = q_i, \quad (1.26)$$

Если на части поверхности упругого тела заданы поля перемещений и поворотов  $\bar{R}_i$ ,  $\overline{\partial R_i / \partial n}$ , то статические граничные условия (1.26) должны быть дополнены кинематическими краевыми условиями для вектора перемещений  $R_i$  и вектора нормальных первых производных  $\dot{R}_i$  ( $\dot{R}_i = \partial R_i / \partial n = n_j (\partial R_i / \partial x_j)$ ):

$$R_i = \bar{R}_i, \quad R_{i,j} n_j = \overline{\partial R_i / \partial n}$$

Система разрешающих уравнений (1.25), записанная в перемещениях, имеет повышенный порядок по сравнению с уравнениями Ламе классической теории упругости. Расширенный спектр краевых условий обеспечивает полноту формулировки краевой задачи и, в частности, позволяет обеспечить более полное сопряжение по кинематическим и статическим факторам в контактных задачах. Неклассические граничные условия, для «моментных» напряжений позволяют, дополнительно к усилиям на поверхности, учесть влияние заданных внешних



моментных факторов, приложенных на границе поверхности тела.

Рассмотрим подробнее тензор модулей упругости шестого ранга, определяющий физические свойства сред, связанные с масштабными характеристиками рассматриваемых материальных структур. Для изотропных тел тензор неклассических градиентных модулей (шестого ранга) имеет в общем следующую структуру [91, 92]:

$$\begin{aligned}
 C_{ijklmn} = & C_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + C_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + C_4 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + C_5 \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \\
 & + C_6 \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + C_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + C_8 \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + C_9 \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + C_{10} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \\
 & + C_{11} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + C_{12} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + C_{13} \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + C_{14} \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + C_{15} \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}
 \end{aligned} \quad (1.27)$$

При этом тензор градиентных модулей упругости  $C_{ijklmn}$  (1.27) должен удовлетворять условиям потенциальности (1.24). Отметим одно важное обстоятельство. В градиентной теории упругости тензор кривизн  $R_{i,jk} = R_{i,kj}$  является симметричным в отношении индексов  $jk$ , т.е. вторые производные от вектора перемещений не должны зависеть от порядка дифференцирования. Это соответствует условию существования непрерывных дисторсий  $R_{i,j}$ . Рассмотрим выражение для псевдотензора «моментных» напряжений  $\mu_{ijk}$  в (1.23) и представим в этом выражении тензор градиентных моделей упругости в виде симметричной и антисимметричной составляющих относительно индексов  $mn$ :

$$\mu_{ijk} = (1/2)(C_{ijklmn} + C_{ijklnm})R_{l,mn} + (1/2)(C_{ijklmn} - C_{ijklnm})R_{l,mn} = \mu_{ijk}^s + \mu_{ijk}^a$$

Если учесть, что тензор  $R_{l,mn}$  симметричен в отношении порядка дифференцирования, то

$$\mu_{ijk} = C_{ijklmn} R_{l,mn} = (1/2)(C_{ijklmn} + C_{ijklnm})R_{l,mn}$$

Следовательно, можно говорить о том, что антисимметричная часть тензора градиентных модулей  $C_{ijklmn}$  в отношении второго-третьего и пятого-шестого индексов является "невидимой" в отношении тензора моментов  $\mu_{ijk}$ . Более того, очевидно, что антисимметричная часть тензора градиентных модулей  $C_{ijklmn}$  является "энергетически невидимой" и в выражении для градиентной плотности энергии деформации  $C_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mn}$  в силу того, что свертка симметричных и

несимметричных тензоров равна нулю. Аналогично, нетрудно видеть, что антисимметричная часть тензора градиентных с модулей  $C_{ijklmn}$  относительно второго-третьего и пятого-шестого индексов является и "статически невидимой". Т.е. уравнение равновесия (1.25) выполняется при любых значениях  $(1/2)(C_{ijklmn} - C_{ijklnm})$ . С другой стороны, нетрудно проверить, что антисимметричная часть тензора градиентных модулей упругости  $C_{ijklmn}$  дает ненулевой вклад во второе краевое условие (1.26), сформулированное относительно перемещений, что недопустимо для корректной теории. Таким образом, корректная градиентная теория не имеющая "паразитных" составляющих должна подчиняться условиям  $\mu_{ijk} = \mu_{ijk}^s$ ,  $\tilde{\mu}_{ijk}^a = 0$ . Это сразу приводит к требованиям независимости от порядка дифференцирования, что соответствует специфическому условию симметрии для тензора градиентных моделей упругости (симметрия по второму-третьему и пятому-шестому индексам):

$$C_{ijklmn} = C_{ikjlnm} \quad (1.28)$$

Только симметричная часть тензора градиентных модулей  $C_{ijklmn}$  является энергетически существенной. Псевдотензор «моментных» напряжений  $\mu_{ijk}$  может быть представлен в виде следующего разложения

$$\mu_{ijk} = (1/2)(\mu_{ijk} + \mu_{ikj}) + (1/2)(\mu_{ijk} - \mu_{ikj}) = \hat{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{ijk} \quad (1.29)$$

где  $\hat{\mu}_{ijk}$ ,  $\tilde{\mu}_{ijk}$  - компоненты симметричного и антисимметричного тензоров  $\hat{\mu}$  и  $\tilde{\mu}$  соответственно.

Так как в градиентной теории упругости в силу симметрии тензора  $R_{l,mn}$  по порядку дифференцирования имеет место равенство  $\delta R_{l,mn} = \delta R_{l,nm}$ , то только симметричная часть  $\hat{\mu}_{ijk}$  тензора моментов определяет вариацию градиентной части плотности потенциальной энергии  $\delta w = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \hat{\mu}_{ijk} \delta R_{i,jk}$ . Следовательно, и уравнения равновесия и естественные граничные условия определяются только симметричной частью тензоров моментов по порядку дифференцирования. Антисимметричная часть является энергетически невидимой и должна быть исключена из рассмотрения (равна нулю).

Приведем математическое доказательство этого утверждения. Рассмотрим вариацию плотности упругой энергии  $\delta w$  :

$$\delta w = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \mu_{ijk} \delta R_{i,jk} \quad (1.30)$$

Так как  $R_{i,jk} = R_{i,kj}$ , то вариация  $\delta R_{i,jk}$  (1.30) не может использоваться как свободная независимая переменная. Следуя методу множителей Лагранжа, мы записываем:

$$\delta \bar{w} = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \mu_{ijk} \delta R_{i,jk} + \lambda_{ijk} \delta \tilde{R}_{i,jk}, \quad (1.31)$$

где  $\delta \bar{w}$  - расширенный функционал,  $\tilde{R}_{i,jk}$  - компоненты антисимметричной части второго градиента вектора перемещений  $\nabla \nabla R$  в (1.30), (1.31) и  $\lambda_{ijk}$  - компоненты тензора третьего ранга, неизвестного пока тензора множителей Лагранжа.

Используя разложение (1.29) для тензора  $\mu_{ijk}$  и  $\delta R_{i,jk}$ , найдем:

$$\mu_{ijk} \delta R_{i,jk} = \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{R}_{i,jk} + \tilde{\mu}_{ijk} \delta \tilde{R}_{i,jk}$$

И соответственно:

$$\delta \bar{w} = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{R}_{i,jk} + (\lambda_{ijk} + \tilde{\mu}_{ijk}) \delta \tilde{R}_{i,jk}.$$

Можно добиться исключения  $\delta \tilde{R}_{i,jk}$ , используя свойства множителей Лагранжа и полагая  $\lambda_{ijk} = -\tilde{\mu}_{ijk}$ . В результате из (1.29) получим следующее вариационную задачу со свободными переменными, записанную в терминах симметричной части  $\hat{\mu}$  :

$$\delta \bar{w} = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{R}_{i,jk} = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \hat{\mu}_{ijk} \delta R_{i,jk} = 0,$$

где  $\delta R_{i,jk}$  может быть рассмотрена как свободная переменная.

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

### Теорема

Вариационное уравнение для градиентной теории упругости может быть записано только для симметричной части тензора моментов (из-за условия  $R_{i,jk} = R_{i,kj}$ ). Следовательно, для градиентной упругости и краевая задачи в целом должна быть сформулирована только для симметричной части тензора  $\mu$  :

$$\mu_{ijk} = \mu_{ikj}.$$

Таким образом для градиентной теории упругости тензор градиентных модулей  $C$  должен удовлетворять условию потенциальности  $C_{ijkl} = C_{klij}$ ,  $C_{ijklmn} = C_{lmnijk}$  (1.24) и условию симметрии по порядку дифференцирования (1.28).

Заметим, что доказанная теорема остается справедливой и для более общей теории когда  $B_{lmijk} \neq 0$ .

Рассмотрим алгоритм построения модели, который обеспечивает автоматическое удовлетворение и условия потенциальности и условия симметрии по порядку дифференцирования (по второму и третьему, также по пятому и шестому индексам).

Учтем в (1.27) свойства потенциальности (1.24) и независимости от порядка дифференцирования (1.28). Тогда общее выражение для тензора градиентных модулей упругости принимает вид:

$$\begin{aligned} C_{ijklmn} = & C_1 (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln}) + \\ & + C_2 (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln}) + \\ & + C_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + C_8 (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km}) + \\ & + C_{11} (\delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Это выражение с точностью до переобозначений совпадает с выражением (стр. 29), следует только заменить  $C_1, C_2, C_7, C_8, C_{11}$  на  $C_1, C_2, C_5, C_4, C_3$  соответственно. Главное, что имеет место пять независимых параметров.

В результате, в корректной градиентной теории упругости, построенной с учетом условий симметрии (1.28), имеем следующие выражения для «моментных» напряжений:

$$\begin{aligned} \mu_{ijk} = & C_1 (\delta_{ij} \nabla^2 R_k + \delta_{ik} \nabla^2 R_j + 2\delta_{jk} \theta_{,i}) + 2C_2 (\delta_{ij} \theta_{,k} + \delta_{ik} \theta_{,j}) + \\ & + C_7 \delta_{jk} \nabla^2 R_i + 2C_8 R_{i,jk} + 2C_{11} (R_{k,ij} + R_{j,ki}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Особенность этой модели, состоит в том, что:

$$\mu_{ijk} = \mu_{ikj}$$

Последнее условие симметрии является важным признаком корректности модели.

Получим систему разрешающих уравнений корректной градиентной теории упругости в перемещениях. Для этого подставим (1.23) в (1.26) и учтем (1.32). В результате уравнения равновесия для градиентной симметричной модели, записанные относительно вектора перемещений имеют вид:

$$\mu \nabla^2 R + (\mu + \lambda) \nabla \theta - \nabla^2 [(C_7 + 2C_8) \nabla^2 R + 4(C_1 + C_2 + C_{11}) \nabla \theta] + f = 0$$

$$\theta = \operatorname{div} R$$

Последние уравнения можно переписать в координатной форме:

$$\begin{aligned} H_{ij} L_{jk} R_k + f_k &= 0 \\ H_{ij} &= \delta_{ij} - l_1^2 \delta_{ij} \nabla^2 - l_2^2 \partial_i \partial_j \\ l_1^2 &= (C_7 + 2C_8) / \mu \\ l_2^2 &= [4\mu(C_1 + C_2 + C_{11}) - (\lambda + \mu)(C_7 + 2C_8)] / [\mu(\lambda + 2\mu)] \end{aligned} \quad (1.34)$$

В случае градиентной теории деформаций, когда при построении градиентной теории упругости от тензоров модулей  $\mathbf{C}$  (1.27) требуется выполнение и условий потенциальности и условий симметрии теории деформаций (симметрия по первым парам индексов в обеих тройках для компонент (1.27)), получим:

$$\begin{aligned} C_{ijklmn} &= C_1 (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm}) + C_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \\ &+ C_4 (\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn}) \\ &+ C_8 (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn}) + C_9 (\delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Соотношения (1.35) описывают общий класс градиентных теорий деформаций, для которых, вообще говоря, не выполняются условия корректности - условия симметрии по порядку дифференцирования. В результате, есть опасность получить градиентную теорию, не являющуюся корректной.

Введем в (1.35) дополнительно условие симметрии по порядку дифференцирования, получим выражения для компонент градиентного тензора модулей упругости в полностью симметричной градиентной теории:

$$\begin{aligned} C_{ijklmn} &= C_1 (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} \\ &+ \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn}) \\ &+ C_8 (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Нетрудно убедиться, что корректная полностью симметричная градиентная теория упругости (1.36) может быть формально получена сразу из соотношений (1.32)-(1.34), если принять  $C_1 = C_2 = C_7$ ,  $C_8 = C_{11}$ .

Тензор моментов приобретает вид:

$$\begin{aligned} \mu_{ijk} = C_1 \left[ (\Delta R_i + 2\theta_{,i}) \delta_{jk} + (\Delta R_j + 2\theta_{,j}) \delta_{ki} + (\Delta R_k + 2\theta_{,k}) \delta_{ij} \right] + \\ + 2C_8 (R_{i,jk} + R_{j,ki} + R_{k,ij}), \quad \Delta R_i = R_{i,kk}, \quad \theta = R_{k,k} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Тем самым доказано утверждение, что полностью симметричная корректная градиентная теория деформаций является в общем случае двухпараметрической и ее физическая модель определяется равенствами (1.23), (1.36).

Запишем разрешающие уравнения для корректных градиентных теорий упругости общего вида, тогда для полностью симметричной теории деформации имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \\ \mu_{ijk} = C_1 \left[ (2\varepsilon_{il,l} + \theta_{,i}) \delta_{jk} + (2\varepsilon_{jl,l} + \theta_{,j}) \delta_{ki} + (2\varepsilon_{kl,l} + \theta_{,k}) \delta_{ij} \right] + \\ + 2C_8 (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

здесь  $\theta = \varepsilon_{ll}$  объемная деформация и  $\mu_{ijk} = C_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}$

Нетрудно убедиться, что вариационная постановка дает следующие уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} - \mu_{ijk,kj} + f_i = 0 \quad (1.39)$$

Учитывая физические уравнения (1.23) и соотношения Коши получим:

$$H_{ij} L_{jk} R_k + f_i = 0, \quad \text{где } L_{ij} = (\lambda + \mu) \partial_i \partial_j + \mu \delta_{ij} \Delta \text{ и } H_{ij} = \delta_{ij} - l_1^2 \delta_{ij} \Delta - l_2^2 \partial_i \partial_j \quad (1.40)$$

где  $f_i$  - компоненты вектора объемных сил,  $L_{ij}$  - оператор Ламе - оператор уравнений равновесия изотропной классической упругости,  $H_{ij}$  оператор Гельмгольца изотропной теории деформаций,  $\Delta = \partial_i \partial_i$  - лапласиан,  $l_1$  и  $l_2$  - два масштабных параметра.

Для общей корректной теории, удовлетворяющей условиям симметрии по порядку дифференцирования, (1.32), (1.38) имеем:

$$l_1 = \sqrt{\frac{C_1 + 2C_8}{\mu}}, \quad l_2 = \sqrt{\frac{4\mu(C_1 + C_2 + C_{11}) - (\lambda + \mu)(C_7 + 2C_8)}{\mu(\lambda + 2\mu)}} \quad (1.41)$$

Общее решение для корректной градиентной теории зависит от двух дополнительных параметров  $l_1$  и  $l_2$ , однако краевые условия, записанные с учетом (1.20), (1.32) будут содержать все пять дополнительных постоянных  $C_1, C_2, C_7, C_8, C_{11}$ .

Для полностью симметричной градиентной теории (1.36), (1.37) имеем:

$$l_1 = \sqrt{\frac{C_1 + 2C_8}{\mu}}, \quad l_2 = \sqrt{\frac{4\mu(2C_1 + C_8) - (\lambda + \mu)(C_1 + 2C_8)}{\mu(\lambda + 2\mu)}} \quad (1.42)$$

Решение для полностью симметричной теории зависит только от двух дополнительных постоянных, т.е. модель градиентных эффектов является двухпараметрической.

### 1.1.8 Примеры некорректных моделей

В данном разделе приведены примеры некорректных моделей. Янгом была предложена теория, для которой плотность энергии деформации имеет вид:

$$w = l^2 \mu \chi_{ij} \chi_{ij} \quad (1.43)$$

Где  $\mu$  - модуль сдвига,  $l$  - масштабный параметр и  $\chi_{ij}$  - симметричный тензор кривизн, определенный на векторах поворотов  $\theta_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kli} R_{k,l}$ :

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) = -\frac{1}{4} (\varepsilon_{kli} R_{k,lj} + \varepsilon_{kli} R_{k,li}) \quad (1.44)$$

$\varepsilon_{kli}$  - символ перестановки.

Подставим (1.44) в (1.43) и поменяем последовательность суммирования, тогда получим:

$$w = \frac{1}{8} l^2 \mu (e_{lmp} e_{ijp} \delta_{kn} + e_{lmk} e_{ijn}) R_{i,jk} R_{l,mn}$$

Соответствующий тензор модулей упругости имеет вид:

$$C_{ijklmn} = \frac{1}{4} l^2 \mu (e_{lmp} e_{ijp} \delta_{kn} + e_{lmk} e_{ijn}) \quad (1.45)$$

Выражение для модуля упругости (1.45) удовлетворяет условиям потенциальности, но не удовлетворяет условию порядка дифференцирования, то есть можно показать, что:

$$C_{123132} - C_{132123} = -\frac{1}{2}l^2\mu$$

Из (1.45) можно заметить, что  $C_{ijklmn} = -C_{jiklmn}$ .

Таким образом, данная теория является некорректной.

Вторым примером некорректной теории может служить теория, предложенная Алтаном и Айфантисом [93]. Данная теория широко используется в настоящее время. В 2007 году Гао [77] уточнил данную теорию, представив подробную вариационную постановку.

Для рассматриваемого здесь варианта градиентной теории деформаций имеют место следующие определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{и} \quad \mu_{ijk} = l^2\sigma_{ij,k} = l^2\lambda\theta_{,k}\delta_{ij} + 2\mu l^2\varepsilon_{ij,k}$$

Тензор градиентных модулей упругости этой теории:

$$C_{ijklmn} = \partial\mu_{ijk} / \partial\varepsilon_{lm,n} = l^2\lambda\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + l^2\mu(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}) \quad (1.46)$$

Тензор градиентных модулей  $\mathbf{C}$  (1.46) удовлетворяет условиям потенциальности и симметрии по первым двум индексам. Такая градиентная теория относится к градиентным теориям деформаций. Однако, как нетрудно убедиться непосредственными вычислениями, тензор градиентных модулей  $\mathbf{C}$  не удовлетворяет условиям симметрии по порядку дифференцирования, т.е. является вообще говоря некорректной. Попытка «улучшить» эту теорию, вводя симметрирование для псевдотензора моментов по последним двум индексам приводит к равенству:

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{1}{2}l^2(\sigma_{ij,k} + \sigma_{ik,j}) = \frac{1}{2}l^2\lambda(\theta_{,k}\delta_{ij} + \theta_{,j}\delta_{ik}) + \mu l^2(\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ik,j})$$

и, в результате, приводит к следующему выражению для компонент тензора градиентных модулей упругости

$$C_{ijklmn} = l^2\lambda(\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm}) + l^2\mu(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jl}\delta_{im}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jn} + \delta_{kl}\delta_{im}\delta_{jn}) \quad (1.47)$$



Тензор модулей, определяемый формулами (1.47), удовлетворяет условиям симметрии по порядку дифференцирования и условиям симметрии в отношении деформаций (в первой паре индексов). Однако этот тензор не удовлетворяет фундаментальным условиям потенциальности. Следовательно, рассматриваемая прикладная теория является некорректной и не может быть улучшена.

### Тестовая задача. Решения задачи изгиба стержня без привлечения гипотез

Рассмотрим еще один вариант градиентной теории упругости, полученный из теории пористых сред путем использования обобщенной гипотезы Аэро-Кувшинского. Для этого варианта градиентной упругости получим решение задачи чистого изгиба стержня без привлечения каких-либо гипотез. В результате такая задача может являться тестом для выяснения вопроса: «Приводит ли учет градиентных эффектов (масштабных эффектов) к изменению "классических" изгибных жесткостей в сверхтонких стержнях, когда толщина стержней становится соизмеримой с масштабными характеристиками структуры (материала)?».

Рассмотрим основное вариационное равенство теории пористых сред, приведенное в разделе [83]:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint \{ [\mu^{11} \Delta R_i + (\mu^{11} + \lambda^{11}) \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{3} (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) \frac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_i} + P_i^V ] \delta R_i + \\ & + \frac{1}{3} [ \frac{4}{3} \chi^{33} \Delta \theta^{\Xi} - (2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) \theta^{\Xi} + (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) \theta^0 ] \delta \theta^{\Xi} \} dV + \\ & + \oint \{ P_i^F - [ \mu^{11} \dot{R}_i + \mu^{11} \frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_j + \lambda^{11} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} n_i - \frac{1}{3} (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) \theta^{\Xi} n_i ] \} \delta R_i dF - \\ & - \frac{4}{9} \oint \{ \chi^{33} \dot{\theta}^{\Xi} + (\mu^F + \lambda^F) \theta^{\Xi} \} \delta \theta^{\Xi} dF = 0 \end{aligned}$$

Подчеркнутое выражение в этом равенстве дает уравнение баланса - уравнение эволюции пор как уравнение Эйлера. Предположим, что в этом уравнении можно пренебречь первым слагаемым по отношению к второму. Иначе говоря, предположим, что вторые производные от  $\theta^{\Xi}$  малы по сравнению с величиной пористости  $\theta^{\Xi}$ . Тогда рассматриваемое уравнение баланса дает

алгебраическую связь между стесненной и свободной пористостью (дефектностью):

$$\theta^{\Xi} = \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}\theta^0, \quad \theta^{\Xi} = \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}\theta^0 = a\theta^0 = aR_{j,j}, \quad a = \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})} \quad (2.1)$$

Фактически, соотношения (2.1) – это и есть вариант обобщенной гипотезы Аэро-Кувшинского для случая пористых дефектных сред.

Градиентная теория упругости в этом случае полностью характеризуется следующим функционалом Лагранжа:

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2} \iiint \{2\mu \gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{3}(2\bar{\mu} + 3\bar{\lambda})\theta\theta + (\lambda + 2\mu)l^2\theta_{,k} \theta_{,k}\} dV - \frac{1}{2} \oint \{(\mu^F + \lambda^F)\theta\theta\} dF \\ &= A - \frac{1}{2} \iiint \{2\mu \gamma_{ij}\gamma_{ij} + \bar{K}\theta\theta + (\lambda + 2\mu)l^2\theta_{,k} \theta_{,k}\} dV - \frac{1}{2} \oint \{(\mu^F + \lambda^F)\theta\theta\} dF \\ \bar{K} &= (2\bar{\mu} + 3\bar{\lambda})/3 = \frac{(2\mu + 3\lambda)}{3} \left(1 - \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})(2\mu + 3\lambda)}\right) = K \left(1 - \frac{(K^{12})^2}{K^{22}K}\right), \quad K = (2\mu + 3\lambda)/3 \\ (4/9)\chi^{33} &= (\lambda + 2\mu)l^2 \end{aligned}$$

Считаем, что модуль сдвига  $\mu$  остается неизменным [83], тогда Лагранжиан можно записать в следующем традиционном виде:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{2\mu \gamma_{ij}\gamma_{ij} + K\theta\theta + (\lambda + 2\mu)l^2\theta_{,k} \theta_{,k}\} dV - \frac{1}{2} \oint \{(\mu^F + \lambda^F)\theta\theta\} dF$$

$$\text{Тогда имеем в виду, что } K = (2\mu + 3\bar{\lambda})/3 = \frac{(2\mu + 3\lambda)}{3} \left(1 - \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})(2\mu + 3\lambda)}\right), \text{ т.е.}$$

объемный модуль упругости уменьшается из-за поврежденности, если в качестве начальных свойств среды рассматривать свойства полностью бездефектной среды. Следовательно, любая градиентная среда уже рассматривается как поврежденная среда с "алгебраической" поврежденностью.

В дальнейшем, однако, мы не будем учитывать такие эффекты, считая приближенно, что при  $l^2 \rightarrow 0$  имеется бездефектная среда. Наша цель состоит в том, чтобы оценить влияние масштабных градиентных эффектов. Эффекты, связанные с особыми свойствами поверхности рассматривать не будем, т.е. полагаем, что  $(\mu^F + \lambda^F) = 0$ .

Имеют место следующие соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{j,i})$$

и определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad m_i = (\lambda + 2\mu) l^2 \theta_{,i} = (\lambda + 2\mu) l^2 \varepsilon_{kk,i} \quad (2.2)$$

Уравнения равновесия (уравнения Эйлера) непосредственно следуют из вариационного равенства  $\delta L = 0$  после интегрирования по частям:

$$\sigma_{ij,j} - m_{j,i} + P_i^V = 0,$$

Краевые условия определяются формально выражениями при вариациях перемещений и нормальной производной от перемещений на поверхности тела. Последнее краевое условие является неклассическим и запишется в виде:

$$m_j n_j = 0$$

Статическое краевое условие для "классических напряжений", в общем случае записывается в виде суммы "классического напряжения"  $(\sigma_{ij} - m_{j,i})n_j$  и касательной производной от вектора моментов  $(m_p n_p)_{,q} \delta_{qi}^*$ ,  $\delta_{qi}^* = \delta_{qi}^* - n_q n_i$ . В дальнейшем рассматриваются плоские границы с постоянной нормалью. Тогда, учитывая неклассическое граничное условие для моментов, получим что классическое граничное условие записывается только через "классические" напряжения, если неклассические краевые условия формулируются на моменты, а не на пористость. В результате задачу определяют следующие граничные условия:

$$\sigma_{ij} n_j - m_{j,i} n_j = P_i^F, \quad m_j n_j = 0$$

Краевая задача может быть переписана в перемещениях если учесть определяющие соотношения (2.2):

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} - (2\mu + \lambda) l^2 u_{k,kji} + P_i^V = 0$$

$$\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i - ((2\mu + \lambda) l^2 u_{k,kji}) n_i = P_i^F$$

$$(2\mu + \lambda) l^2 u_{k,kj} n_j = 0$$

Рассмотрим задачу чистого изгиба тонкого стержня, нагруженного по торцам моментом. В общем случае изучаем изгиб трехмерной балки призматической формы с размерами  $L \times 2h \times 2b$ . Балка, которая изгибается под

действием моментов  $M$ , приложенных на её торцах. Ось балки совпадает с осью  $Z$ , прогибы в направлении оси  $X$ .

Будем строить решение полуобратным методом. Полагаем, что решение для призматического стержня ищется в следующем виде  $R_1 \equiv u(x, y, z)$ ,  $R_2 \equiv v(x, y, z)$ ,  $R_3 \equiv w(x, y, z)$ ,  $u$  – прогибы балки,  $v$  и  $w$  – поперечные и продольные смещения. Схема нагружения стержня показана на рисунке 1.

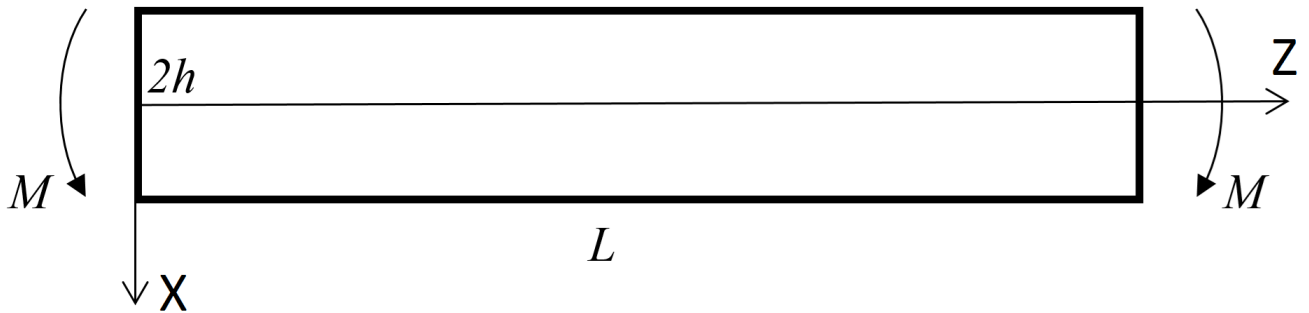


Рисунок 1 – Схема нагружения стержня

Граничные условия:

1. Все поверхности балки, кроме торцов, свободны от внешней нагрузки.
2. На торцах действуют моменты:

$$z = 0, L: 2b \int_{-h}^h x \sigma_z dx = -M \quad (2.3)$$

3. Боковые поверхности балки являются плоскими. Предполагается, кроме того, что они свободны от действия моментов, т.е.:

$$y = \pm b: \int_{-h}^h x \sigma_y dx = 0 \quad (2.4)$$

Для построения решения полуобратным методом, задаем функции перемещений в следующем виде ( $u$  – прогибы балки,  $v$  и  $w$  – поперечные и продольные смещения):

$$R_1(x, y, z) = -\frac{1}{2} C_1 z^2 - \frac{1}{2} C_2 y^2 + R(x), R_2 = C_2 x y, R_3 = C_1 x z. \quad (2.5)$$

Находим деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= u'(x), \quad \varepsilon_{yy} = C_2 x, \quad \varepsilon_{zz} = C_1 x, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \\ \theta &= \varepsilon_{kk} = u'(x) + C_2 x + C_1 x.\end{aligned}$$

Моментные напряжения имеют вид:

$$\begin{aligned}m_x &= (\lambda + 2\mu) l^2 (u''(x) + C_2 + C_1), \\ m_y &= m_z = 0.\end{aligned}$$

Полные напряжения, подчиняются классическому закону Гука и имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (2\mu + \lambda) u'(x) + \lambda (C_1 + C_2) x, \\ \sigma_y &= (2\mu + \lambda) C_2 x + \lambda (u'(x) + C_1 x), \\ \sigma_z &= (2\mu + \lambda) C_1 x + \lambda (u'(x) + C_2 x).\end{aligned}$$

Подставим перемещения (2.5) в уравнение равновесия в направлении толщины балки (2.2):

$$l^2 (\lambda + 2\mu) u'''' - (\lambda + 2\mu) u'' - \lambda (C_2 + C_1) = 0$$

Найдем общее решение, учитывая требования симметрии и пренебрегая постоянным членом, соответствующим перемещению балки, как жесткого тела:

$$u = A_1 x + A_2 \operatorname{ch}(x/l) - \frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)} (C_1 + C_2) x^2$$

Подставляя общее решение в граничные условия на верхней и нижней поверхностях балки (при  $x = \pm h$ :  $\sigma_x - m_x' = 0$ ,  $m_x = 0$ ), находим значения констант  $A_1, A_2$ :

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{l}{\operatorname{ch}(h/l)} (C_1 + C_2)$$

Далее из рассмотрения граничных условий (2.3) и (2.4) на торцах и боковых поверхностях балки определяем константы  $C_1, C_2$ :

$$\begin{aligned}C_{1,2} &= \frac{3M}{16bh^3} \frac{1}{\mu} \left( \mp 1 - \frac{\lambda + 2\mu}{S} \right), \\ S &= (3\lambda + 2\mu) + 6(l/h)^3 \lambda (\operatorname{th}(h/l) - h/l).\end{aligned}$$

Окончательно получаем следующие выражения для полных напряжений, действующих в направлении оси балки:

$$\sigma_z = -\frac{M}{I} \left( \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{S} \right) - l \frac{\lambda}{S} \frac{\operatorname{sh}(x/l)}{\operatorname{ch}(h/l)} \right) \quad (2.6)$$

где  $I = 4bh^3/3$  – момент инерции поперечного сечения балки размером  $2h \times 2b$  относительно поперечной оси  $Y$ .

В случае малых значений масштабного параметра  $l$  получаем классическое выражение для напряжений:  $\sigma_z = -\frac{M}{I}x$ .

Теперь рассмотрим поведение решения при  $h \rightarrow 0$ . Используя разложения в степенные ряды для выражения  $(\text{th}(h/l) - h/l)$ , получим

$$S = (\lambda + 2\mu) + O(h/l)$$

Рассмотрим выражение для напряжений (2.6) при  $x = \pm h$ . используя ту же процедуру разложения, очевидно найдем:

$$\sigma_z = -\frac{M}{I}(h + O(h/l))$$

Таким образом, получено точное решение задачи чистого изгиба по градиентной теории упругости, которое показывает, что нет никакого изменения жесткости на изгиб по сравнению с классическим решением теории упругости (определяется величиной момента инерции  $I$ ) за счет градиентных масштабных эффектов.

### 1.1.9 Заключение

В данной главе приведен метод построения градиентных моделей как дефектных, так и бездефектных сред. Приведены примеры таких сред. Рассмотрены условия корректности данных моделей. Приведены примеры некорректных моделей.

## 1.2 Градиентные теории упругости с учетом адгезии

### 1.2.1 Введение

В данном разделе развивается вариационная модель адгезионных взаимодействий. Дается формулировка определяющих соотношений (физическая модель), устанавливается структура модулей упругости, приводится формулировка краевых задач как для классической теории упругости, так и для градиентной теории упругости.

### 1.2.2 Потенциальная энергия адгезионных взаимодействий в классической теории упругости

Построение моделей деформирования упругих тел с адгезионно активными поверхностями с использованием «кинематического» принципа предложено в работах [12, 14, 83-87].

Рассмотрим линейно упругое тело, занимающее объем  $V$ . Считаем, что упругое тело ограничено адгезионно активной поверхностью  $F$ . Запишем Лагранжиан, позволяющий моделировать адгезионные свойства идеальных (бездефектных) поверхностей классических сред в следующем виде:

$$L = A - \iiint_V U_V dV - \iint_F U_F dF$$

$$A = \iiint_V P_i^V R_i dV + \iint_F P_i^F R_i dF$$

Где  $A$  - работа внешних объемных сил  $P_i^V$ , распределенных в объеме упругого тела  $V$ , и поверхностных сил  $P_i^F$  заданных на поверхности тела  $F$  на перемещениях  $R_i$ ,  $U_V$  - объемная плотность потенциальной энергии,  $U_F$  - поверхностная плотность потенциальной энергии адгезионно активной поверхности  $F$ .

Заметим, что в случае контактирующих тел, поверхностные взаимодействия определяются через разность потенциальных энергий поверхности контактирующих тел в каждой точке контакта. Действительно, рассмотрим адгезионное взаимодействие двух контактирующих тел с объемами  $V_i$ ,  $i=1,2$ , ограниченными, соответственно поверхностями  $F_i$ , ( $i=1,2$ ). Контакт тел осуществляется через общую поверхность контакта  $C$ :  $F_i = \bar{F}_i \cup C$ , ( $i=1,2$ ),  $\bar{F}_i$  - свободные от контакта поверхности тел. Лагранжиан для составного тела определяется, очевидно, следующим равенством

$$\begin{aligned}
 L &= L^{(1)} + L^{(2)} = A^{(1)} - \iiint_{V_1} U_V^{(1)} dV - \iint_{F_1} U_F^{(1)} dF + \\
 &+ A^{(2)} - \iiint_{V_2} U_V^{(2)} dV - \iint_{F_2} U_F^{(2)} dF = \\
 &= A^{(1)} + A^{(2)} - \iiint_{V_2} U_V^{(2)} dV - \iiint_{V_2} U_V^{(2)} dV - \iint_{\bar{F}_1} U_F^{(1)} dF - \iint_{\bar{F}_2} U_F^{(2)} dF - \\
 &- \iint_C (U_F^{(1)} - U_F^{(2)}) dF
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Здесь  $A_k = \iiint_{V_k} P_i^{(V_k)} R_i^{(1)} dV + \iint_{\bar{F}_k} P_i^{(\bar{F}_k)} R_i^{(1)} dF$ ;  $U_V^{(k)}, U_F^{(k)}$ , ( $k=1,2$ ) - плотности потенциальной энергии деформации в объеме, а  $U_F^{(k)}$ , ( $k=1,2$ ) - плотности энергии адгезионно активной поверхности каждого из контактирующих тел.

Последнее выражение в уравнении (1.48) доказывает сформулированное утверждение. Оно определяет адгезионные взаимодействия по границе контакта. Следовательно, классификацию теорий адгезии можно осуществить, опираясь на выражение поверхностной плотности потенциальной энергии, присущей изолированному телу с адгезионно активной поверхностью.

Для построения модели сред с учётом свойств поверхностей, предполагается, что кинематические связи в виде соотношений Коши присутствуют не только в объёме среды, но и на её поверхности [12]:

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \iiint \sigma_{ij} \delta \left( \varepsilon_{ij} - (1/2)(R_{i,j} + R_{j,i}) \right) dV + \\
 &+ \iint a_{ij} \delta \left( \varepsilon_{ik} - (1/2)(R_{i,k} + R_{k,i}) \right) (\delta_{kj} - n_k n_j) dF
 \end{aligned}$$



Где  $a_{ij}$  - тензор неопределённых множителей - реактивных сил, обеспечивающих кинематические связи на поверхности. Следует учитывать, что в отличие от девяти соотношений Коши в объёме среды, на поверхности возможно сформулировать только шесть соотношений, так как нормальные производные на поверхности не определены. Это соображение и определяет появление множителя  $(\delta_{kj} - n_k n_j)$  в поверхностной плотности возможной работы. Выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \delta U = & \iiint (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij, j} \delta R_i) dV + \\ & + \iint ((a_{ij} \delta \varepsilon_{ik} + a_{ij, k} \delta R_i) (\delta_{kj} - n_k n_j) - \sigma_{ij} n_j \delta R_i) dF - \\ & - \oint a_{ij} n_k \delta R_i (\delta_{kj} - n_k n_j) dS \end{aligned} \quad (1.49)$$

где  $n_k$  - внешняя единичная нормаль к рёбрам поверхности рассматриваемого упругого тела.

Постулируя интегрируемость линейной вариационной формы (1.49) получаем потенциальную энергию среды со следующим списком аргументов:

$$U = \iiint U_V(\varepsilon_{ij}, R_i) dV + \iint U_F(\varepsilon_{ij} (\delta_{kj} - n_k n_j), R_i) dF + \oint U_S(R_i) dS$$

В предположении линейных деформаций, потенциальная энергия является квадратичной формой своих аргументов:

$$U = \frac{1}{2} \iiint C_{ijnm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm} dV + \frac{1}{2} \iint A_{ijnm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm} dF$$

Где  $C_{ijnm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn})$  - классический тензор модулей упругости,  $A_{ijnm} = A_{ijkl}^* (\delta_{nk} - n_n n_k) (\delta_{ml} - n_m n_l)$  - тензор поверхностных модулей упругости, являющийся трансверсально-изотропным (из представления через  $A_{ijnm}^*$ ).

Для изотропной среды упругие свойства определяются двумя параметрами Ламе. При этом используется разложение тензора деформаций в объёме на девиаторную и шаровую части. Аналогичное представление возможно ввести в поверхностной части энергии деформаций. Для этого рассмотрим структуру тензора поверхностных модулей  $A_{ijnm}$ .

### 1.2.3 Структура тензора поверхностных модулей

Структура тензора  $A_{ijnm}$  может быть определена через его разложение по тензорам четвёртого ранга [93], определённым, как произведения пар «плоских» тензоров Кронекера  $(\delta_{ij} - n_i n_j)$  и тензоров, образованных произведением векторов единичной нормали, вида  $n_i n_j$  со всевозможными перестановками индексов. В общем случае, разложение включает в себя десять таких базисных векторов, то есть тензор  $A_{ijnm}$  включает в себя десять независимых поверхностных модулей:

$$\begin{aligned}
A_{ijnm} = & A_1 (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + A_2 (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + \\
& + A_3 (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n) + A_4 (\delta_{ij} - n_i n_j) n_n n_m + A_5 (\delta_{in} - n_i n_n) n_j n_m + \\
& + A_6 (\delta_{im} - n_i n_m) n_j n_n + A_7 n_i n_j (\delta_{nm} - n_n n_m) + A_8 n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + \\
& + A_9 n_i n_m (\delta_{jn} - n_j n_n) + A_{10} n_i n_j n_n n_m
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Вследствие существования плотности потенциальной энергии, тензор  $A_{ijnm}$  (1.50) должен обладать симметрией при перестановке первой и второй пары индексов, при этом количество базисных тензоров сокращается до восьми:

$$\begin{aligned}
A_{ijnm} = & A_{nmij} : \\
A_{ijnm} = & A_1 (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + A_2 (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + \\
& + A_3 (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n) + A_5 (\delta_{in} - n_i n_n) n_j n_m + \\
& + \frac{(A_6 + A_9)}{2} ((\delta_{im} - n_i n_m) n_j n_n + n_i n_m (\delta_{jn} - n_j n_n)) + \\
& + \frac{(A_7 + A_4)}{2} (n_i n_j (\delta_{nm} - n_n n_m) + (\delta_{ij} - n_i n_j) n_n n_m) + \\
& + A_8 n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + A_{10} n_i n_j n_n n_m
\end{aligned}$$

В предположении изотропии свойств поверхности, тензор  $A_{ijnm}$  (1.50) обладает симметрией при перестановке индексов отдельно в первой паре и отдельно – во второй:

$$\begin{aligned}
A_{ijnm}(\mathfrak{A}_{ijr}n_r) &= 0 \\
A_{ijnm}(\mathfrak{A}_{nmr}n_r) &= 0
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Из (1.51) количество модулей сводится к семи:

$$\begin{aligned}
A_{ijnm} &= A_1(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m) + \\
&+ \frac{(A_2 + A_3)}{2} [(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + (\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n)] + \\
&+ A_5(\delta_{in} - n_i n_n)n_j n_m + \\
&+ \frac{(A_6 + A_9)}{2} ((\delta_{im} - n_i n_m)n_j n_n + n_i n_m(\delta_{jn} - n_j n_n)) + \\
&+ \frac{(A_7 + A_4)}{2} (n_i n_j(\delta_{nm} - n_n n_m) + (\delta_{ij} - n_i n_j)n_n n_m) + \\
&+ A_8 n_i n_n(\delta_{jm} - n_j n_m) + A_{10} n_i n_j n_n n_m
\end{aligned}$$

Трансверсальная изотропия тензора  $A_{ijnm}$  (1.50) следует из его определения через тензора  $A_{ijnm}^*$ , причём, из неопределённости нормальных производных вектора перемещений на поверхности вытекает требование:

$$A_{ijnm}n_j = 0 \text{ и } A_{ijnm}n_m = 0 \tag{1.52}$$

Удовлетворяя эти требования 1.52) получим:

$$\begin{aligned}
A_{ijnm}n_j &= A_1(\delta_{ij}n_j - n_i n_j n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m) + \\
&+ \frac{(A_2 + A_3)}{2} [(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm}n_j - n_j n_j n_m) + (\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn}n_j - n_j n_j n_n)] + \\
&+ A_5(\delta_{in} - n_i n_n)(n_j n_j)n_m + \\
&+ \frac{(A_6 + A_9)}{2} ((\delta_{im} - n_i n_m)n_j n_j n_n + n_i n_m(\delta_{jn}n_j - n_j n_j n_n)) + \\
&+ \frac{(A_7 + A_4)}{2} (n_i n_j n_j(\delta_{nm} - n_n n_m) + (\delta_{ij}n_j - n_i n_j n_j)n_n n_m) + \\
&+ A_8 n_i n_n(\delta_{jm}n_j - n_j n_j n_m) + \\
&+ A_{10} n_i (n_j n_j)n_n n_m = \\
&= A_5(\delta_{in} - n_i n_n)n_m + \frac{(A_6 + A_9)}{2}(\delta_{im} - n_i n_m)n_n + \\
&+ \frac{(A_7 + A_4)}{2} n_i(\delta_{nm} - n_n n_m) + A_{10} n_i n_n n_m = 0
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Из (1.53) следует:

$$\begin{cases} A_5 = 0 \\ A_6 + A_9 = 0 \\ A_7 + A_4 = 0 \\ A_{10} = 0 \end{cases}$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} A_{ijnm} &= A_1 (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \\ &+ \frac{(A_2 + A_3)}{2} [(\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)] + \\ &+ A_8 n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) \end{aligned}$$

Введём принятые в работах [82, 93] обозначения:

$$\begin{aligned} A_{ijnm} &= \lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \\ &+ \mu^F ((\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)) + \\ &+ \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\text{Где } \lambda^F = A_1, \mu^F = \frac{(A_2 + A_3)}{2}, \delta^F = A_8$$

Если положить в (1.54)  $\delta^F = A_8 = 0$  то получим симметричный тензор поверхностных модулей, содержащий только два модуля:

$$\begin{aligned} A_{ijnm} &= \lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \\ &+ \mu^F ((\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)) \end{aligned} \quad (1.55)$$

В случае несимметричных соотношений Коши (несимметричная теория упругости) тензор поверхностных модулей принимает вид [101]:

$$\begin{aligned} A_{ijnm} &= \lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \\ &+ \mu^F ((\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)) + \\ &+ \chi^F ((\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) - (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)) + \\ &+ \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) \end{aligned} \quad (1.56)$$

где  $\chi^F$  - поверхностный аналог третьего параметра Ламе несимметричной теории упругости.

С учетом определения «плоского» тензора Кронекера  $\delta_{ij}^* = \delta_{ij} - n_i n_j$ , тензор адгезионных модулей (1.56) принимает вид:

$$A_{ijnm} = \lambda^F \delta_{ij}^* \delta_{nm}^* + \mu^F (\delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \delta_{im}^* \delta_{jn}^*) + \chi^F (\delta_{in}^* \delta_{jm}^* - \delta_{im}^* \delta_{jn}^*) + \delta^F n_i n_n \delta_{jm}^*$$

Если положить, что  $\chi^F = 0$  и  $\delta^F = 0$ , можно видеть аналогию представления симметричного тензора адгезионных модулей с тензором объёмных модулей:

$$C_{ijnm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn})$$

Очевидно, что  $\lambda^F$  и  $\mu^F$  являются поверхностными аналогами классических параметров Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ . Более подробно трактовку поверхностных модулей рассмотрим в следующем пункте.

#### 1.2.4 Трактовка поверхностных модулей

Для определения физического смысла введённых параметров адгезии запишем выражение для плотности поверхностной энергии с учётом представления тензора адгезионных модулей

$$\begin{aligned} U_F &= A_{ijnm} R_{i,j} R_{n,m} = \lambda^F R_{i,j} (\delta_{ij} - n_i n_j) R_{n,m} (\delta_{nm} - n_n n_m) + \\ &+ \mu^F (R_{i,j} (\delta_{in} - n_i n_n) R_{n,m} (\delta_{jm} - n_j n_m) + R_{i,j} (\delta_{im} - n_i n_m) R_{n,m} (\delta_{jn} - n_j n_n)) + \\ &+ \delta^F R_{i,j} R_{n,m} n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) \end{aligned}$$

Представим деформации в виде разложения на «плоский девиатор»:

$${}^2\gamma_{ij} = R_{n,m} (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) - \frac{1}{2} R_{n,m} (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m)$$

«Плоский» шаровой тензор:

$${}^2\theta = R_{n,m} (\delta_{nm} - n_n n_m)$$

И «плоский» вектор углов поворота поверхности при её изгибе:

$${}^2\alpha_i = R_{n,m} n_n (\delta_{mi} - n_m n_i)$$

Индекс «2» означает, что соответствующие компоненты тензора деформаций вычисляются на поверхности тела.

В результате получим разложения тензора деформаций:

$$R_{i,k}(\delta_{jk} - n_j n_k) = {}^2\gamma_{ij} + \frac{1}{2} {}^2\theta(\delta_{ij} - n_i n_j) + {}^2\alpha_j n_i \quad (1.57)$$

Проверка на основании представлений для  ${}^2\gamma_{ij}$ ,  ${}^2\theta$ ,  ${}^2\alpha_j$  даёт:

$$\begin{aligned} R_{i,k}(\delta_{jk} - n_j n_k) &= {}^2\gamma_{ij} + \frac{1}{2} {}^2\theta(\delta_{ij} - n_i n_j) + {}^2\alpha_j n_i = \\ &= [R_{n,m}(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) - \frac{1}{2} R_{n,m}(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m)] + \\ &+ \frac{1}{2} [R_{n,m}(\delta_{nm} - n_n n_m)](\delta_{ij} - n_i n_j) + \\ &+ [R_{n,m} n_n(\delta_{mj} - n_m n_j)] n_i = \\ &= R_{n,m}(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + R_{n,m} n_i n_n(\delta_{mj} - n_m n_j) = \\ &= R_{n,m} \delta_{in}(\delta_{jm} - n_j n_m) = \\ &= R_{i,m}(\delta_{jm} - n_j n_m) \end{aligned}$$

Подставим представление (1.57) в выражение для плотности поверхностной потенциальной энергии и убедимся, что потенциальная энергия в новых переменных является канонической положительно определенной квадратичной формой:

$$\begin{aligned} 2U_F &= A_{ijm} R_{i,j} R_{n,m} = \\ &= [\lambda^F \delta_{ij}^* \delta_{nm}^* + \mu^F (\delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \delta_{im}^* \delta_{jn}^*) + \delta^F n_i n_n \delta_{jm}^*] R_{i,j} R_{n,m} = \\ &= (\mu^F + \lambda^F) (R_{i,j} \delta_{ij}^*) (R_{n,m} \delta_{nm}^*) + \mu^F (\delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \delta_{im}^* \delta_{jn}^* - \delta_{ij}^* \delta_{nm}^*) R_{n,m} R_{i,j} + \\ &+ \delta^F (R_{n,m} n_n) (R_{i,j} n_i) \delta_{jr}^* \delta_{mr}^* = \\ &= (\mu^F + \lambda^F) (R_{i,j} \delta_{ij}^*) (R_{n,m} \delta_{nm}^*) + 2\mu^F (\delta_{in}^* \delta_{jm}^* / 2 + \delta_{im}^* \delta_{jn}^* / 2 - \delta_{ij}^* \delta_{nm}^* / 2) R_{n,m} R_{i,j} + \\ &+ \delta^F (R_{i,j} n_i \delta_{jr}^*) (R_{n,m} n_n \delta_{mr}^*) = \\ &= (\mu^F + \lambda^F) ({}^2\theta^2 \theta) + 2\mu^F ({}^2\gamma_{ij} {}^2\gamma_{ij}) + \delta^F ({}^2\alpha_r {}^2\alpha_r) \end{aligned}$$

Получаем:

$$2U_F = (\lambda^F + \mu^F) {}^2\theta^2 \theta + 2\mu^F {}^2\gamma_{ij} {}^2\gamma_{ij} + \delta^F \alpha_i \alpha_i \quad (1.58)$$

Из канонического представления (1.58) следует, что на поверхности осуществляются три типа адгезионных взаимодействий, связанных, соответственно с  ${}^2\theta$ ,  ${}^2\gamma_{ij}$  и  $\alpha_i$ . При этом параметр  $(\lambda^F + \mu^F)$  характеризует деформации всестороннего расширения элемента поверхности, параметр  $2\mu^F$  связан с деформациями сдвига элемента поверхности в плоскости поверхности и параметр  $\delta^F$  характеризует жёсткость поверхности на изгиб.

### 1.2.5 Определяющие соотношения теории адгезии

Получим простейшую модель адгезионных взаимодействий, Лагранжиан  $L$  которой имеет вид:

$$L = A - U$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint C_{ijnm} R_{i,j} R_{n,m} dV + \frac{1}{2} \iint A_{ijnm} R_{i,j} R_{n,m} dF \quad (1.59)$$

Определяющие соотношения рассматриваемой модели ставятся как внутри объёма среды, так и на её поверхности. В объёме реализуются классические соотношения – обобщённый закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijnm} R_{n,m} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \quad (1.60)$$

Физические соотношения на поверхности среды определяются с помощью формул Грина и имеют вид:

$$a_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial \varepsilon_{ij}} = A_{ijnm} \varepsilon_{nm}.$$

С учётом представления (1.54) и учитывая, что тензор напряжений на поверхности следует преобразовать к «плоскому» тензору, получаем:

$$a_{ij} = ({}^2\sigma_{ij}) = (\lambda^F + \mu^F) \cdot {}^2\theta (\delta_{ij} - n_i n_j) + 2\mu^F \cdot {}^2\gamma_{ij} + \delta^F \cdot {}^2\alpha_j n_i,$$

где  $a_{ij}$  - «плоский» тензор поверхностных напряжений.

Вариационный подход позволяет сформулировать краевую задачу с учетом адгезионного взаимодействия. В соответствии с вариационным принципом Лагранжа, найдем:

$$\begin{aligned} \delta L &= 0, \\ L &= \bar{A} - U_V - U_F, \end{aligned} \quad (1.61)$$

После подстановки (1.59) в (1.61) и интегрирования по частям, получаем вариационную постановку модели теории упругости с учётом адгезии, включающую уравнения равновесия в качестве уравнений Эйлера и естественные граничные условия:

$$\begin{aligned} &\iiint (C_{ijnm} R_{i,jm} + P_i^V) \delta R_n dV + \\ &+ \oint\!\!\!\oint [P_i^F - (C_{ijnm} R_{i,j} n_m - A_{ijnm} R_{i,jm}) \delta R_n dF - \frac{1}{2} \oint A_{ijnm} R_{i,j} n_m^F \delta R_n dS = 0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

где  $n_m^F$  - внешняя единичная нормаль к рёбрам поверхностей тела, направленная по касательным к данным поверхностям.

Последнее слагаемое определяет краевые условия на ребрах, ограничивающих поверхность тела. В случае гладкой поверхности это слагаемое равно нулю.

Вариационное уравнение (1.62) дает замкнутую формулировку краевых задач с учетом адгезионной активности поверхности, ограничивающей тело. Уравнения равновесия получаются при этом, как уравнения Эйлера.

Классические уравнения равновесия в объёме:

$$\sigma_{ij,j} + P_i^V = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

Статические и кинематические условия на поверхности тела  $S = S_R \cup S_\sigma$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j - a_{ik,k} \Big|_{S_\sigma} &= P_i^F, \\ R_i \Big|_{S_R} &= R_i^F, \end{aligned} \quad (1.63)$$

где  $P_i^F$  - напряжения, заданные на части поверхности  $S_\sigma \subset S$  и  $R_i^F$  - перемещения, заданные на  $S_R \subset S$ .



### 1.2.6 Обобщение теории адгезии. Модель адгезии относительно тензора дисторсии (несимметричная теория упругости)

Это обобщение представляется существенным, если модель адгезии используется для градиентной теории дисторсии.

В этом случае постулируется лишь квадратичность поверхностной плотности потенциальной энергии по дисторсиям, что соответствует физической линейности теории:

$$2U_F = A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} \quad (1.64)$$

Очевидно, что (1.64) может быть получено и с использованием процедуры вариационного кинематического метода.

В таком случае формулы Грина определяют адгезионные напряжения  $a_{ij}$ :

$$a_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial R_{i,j}} = A_{ijmn} R_{m,n} \quad (1.65)$$

Заметим, что учитывая равенства (1.65) можно записать следующее выражение для энергии деформации поверхности контакта двух контактирующих тел  $\iint_C (U_F^{(1)} - U_F^{(2)}) dF = \iint_C (A_{ijmn}^{(1)} - A_{ijmn}^{(2)}) d_{ij} d_{nm} dF$ ,  $d_{ij} = \partial R_i / \partial x_j$ ,  $A_{ijmn}^{(1)}$ ,  $A_{ijmn}^{(2)}$  - модули упругости адгезионных взаимодействий поверхности контакта для каждого из тел.

Имеет место следующее утверждение относительно общей структуры адгезионных модулей упругости для классического линейно упругого тела. Пусть рассматривается линейно упругое тело с адгезионно активной поверхностью. Тогда имеет место утверждение:

1. Модули упругости адгезионных взаимодействий имеют следующий вид:

$$A_{ijmn} = \lambda^F \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + \mu^F (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{in}^* \delta_{jm}^*) + \chi^F (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* - \delta_{in}^* \delta_{jm}^*) + \delta^F n_i n_m \delta_{jn}^* \quad (1.66)$$

где  $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ ,  $\delta_{ij}$  - символ Кронеккера  $\lambda^F$ ,  $\mu^F$  упругие постоянные, аналогичные коэффициентам Ламе в законе Гука в объеме тела, определяющие адгезионные взаимодействия в модели Гуртина и Мурдоха [26, 27],  $\chi^F$  -

адгезионный модуль упругости, характеризующий жесткость поверхности при асимметричном деформировании поверхности,  $\delta^F$  - модуль упругости, определяющий сопротивление поверхности при изгибе

2. В случае поверхности, обладающей парностью касательных адгезионных напряжений в касательной плоскости  $a_{ij}(\partial_{ijk}n_k) = 0$ , адгезионные модули упругости имеют вид  $A_{ijmn} = \lambda^F \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + \mu^F (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{in}^* \delta_{jm}^*) + \delta^F n_i n_m \delta_{jn}^*$ .

Доказательство утверждения (1.66) можно найти в работах [26, 27]. Оно основано на представлении адгезионных тензоров модулей  $A_{ijmn}$  в форме разложения по системе базисных тензоров четвертого ранга. Эти тензоры строятся как произведения «плоских» тензоров Кронекера  $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$  и тензоров вида  $(n_i n_j)$  со всеми возможными перестановками индексов. В общем случае они дополняются также тензорами вида  $n_i n_j n_m n_n$  и условно разбиваются на три группы. В первую входят только такие тензоры, которые содержат в качестве сомножителей «плоские» тензоры Кронекера, во вторую – такие, которые содержат в качестве сомножителей «плоский» тензор Кронекера и тензор  $(n_i n_j)$ , в третью – те, которые содержат два тензора вида  $(n_i n_j)$ .

Приведем краткое доказательство утверждения об общем виде тензора  $A_{ijmn}$ .

Наиболее общая структура трансверсально изотропного тензора четвертого ранга содержит десять адгезионных модулей и имеет вид:

$$\begin{aligned} A_{ijmn} = & \lambda^F \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + (\mu^F + \chi^F) \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + (\mu^F - \chi^F) \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \\ & + \delta^F n_i n_m \delta_{jn}^* + (\alpha^F + \eta^F) n_i n_n \delta_{jm}^* + (\alpha^F - \eta^F) n_m n_j \delta_{in}^* + \\ & + (\beta^F + \xi^F) n_i n_j \delta_{mn}^* + (\beta^F - \xi^F) n_m n_n \delta_{ij}^* + B^F \delta_{im}^* n_j n_n + \\ & + A^F n_i n_j n_m n_n \end{aligned} \quad (1.67)$$

Условие существования потенциальной энергии адгезии требует, чтобы  $A_{ijmn} = A_{mnij}$ , что приводит к требованию равенства нулю коэффициентов  $\eta^F = 0$  и  $\xi^F = 0$  в равенстве (1.67).

Наконец, следует выполнить условия, чтобы краевые задачи для классического упругого тела содержали в каждой неособенной точке поверхности

три граничных условия. Чтобы удовлетворить это требование непротиворечивости модели адгезии с общей постановкой краевых задач классической теории упругости следует принять в (1.67):

$$\alpha^F = \beta^F = B^F = A^F = 0.$$

Действительно, выполнение условий  $\alpha^F = \beta^F = B^F = A^F = 0$  соответствует условиям  $a_{ij}n_j = A_{ijmn}n_jR_{m,n} \equiv 0$ . Очевидно, что при этом адгезионные модули упругости для поверхности классического упругого тела удовлетворяют условиям  $A_{ijmn}n_j \equiv 0$ :

$$A_{ijmn}n_j = \alpha^F n_m \delta_{in}^* + \beta^F n_i \delta_{mn}^* + B^F \delta_{im}^* n_n + A^F n_i n_m n_n = 0$$

Иначе говоря, плотность потенциальной энергии поверхности в случае упругого классического тела имеет вид:  $2U_F = A_{ijmn}(R_{i,k}\delta_{kj}^*)(R_{m,p}\delta_{pj}^*)$ .

Частным случаем при  $\lambda^F \neq 0, \mu^F \neq 0, \chi^F = \delta^F = 0$  является «теория упругости поверхности» Мурдоха-Гуртина [26, 27].

Вопрос о материальной индифферентности теории адгезии Мурдоха-Гуртина, определяемой соотношением (1.66) при условии что  $\delta^F = 0$  обсуждался в работах [26, 27]. Покажем, что и для обобщенной теории адгезии материальная индеферентность также всегда выполняется.

Дадим анализ потенциальной энергии упругого тела с адгезионными свойствами свободной поверхности с точки зрения масштабных эффектов. Обратим внимание на то, что адгезионные модули  $A_{ijmn}$ , отличаются от компонентов тензора классических модулей  $C_{ijmn}$  на размерность длины. Определим масштабный параметр  $l$ , связанный с учетом с адгезионных взаимодействий как отношение норм компонентов тензоров  $A_{ijmn}$  и  $C_{ijmn}$ , к примеру:  $A = \sqrt{A_{ijmn}A_{ijmn}}$  и  $C = \sqrt{C_{ijmn}C_{ijmn}}$ . Тогда  $l = A/C$ ,  $\bar{A}_{ijmn} = A_{ijmn}C/A$  и можно представить тензор  $A_{ijmn} = \bar{A}_{ijmn}l$ , где тензор  $\bar{A}_{ijmn}$  имеет ту же размерность, что и тензор классических модулей, Лагранжиан можно записать как линейное разложение по параметру  $l$ :

$$L = \left( A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dV \right) + \left( -\frac{1}{2} \iint \bar{A}_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dF \right) l = L_0 l^0 + L_1 l^1$$

Здесь  $L_0 = A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dV$  и  $L_1 = -\frac{1}{2} \iint \bar{A}_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dF$ .

Таким образом, любая континуальная теория адгезии вида (1.64)-(1.66), будь то «теория упругости поверхности» Мурдоха-Гуртина [26, 27] или теория идеальной адгезии [26, 27], определяет масштабные эффекты первого порядка.

Обратим внимание, что если используется градиентная теория упругости, то градиентная составляющая в потенциальной энергии имеет порядок  $l^2$ , где  $l$  – малый масштабный параметр. Следовательно, учет адгезионных эффектов будет более важным, чем учет градиентных эффектов, особенно для структур с большой долей поверхностей (примерами таких структур являются сверхтонкие стержни и пластины)

### 1.3 Заключение

В данном разделе сформулирована теория адгезионных взаимодействий сплошных бездефектных тел для изотропной упругости. Такую теорию адгезии принято называть теорией «идеальной адгезии» [95], где понятие «идеальной» относится к бездефектной среде. Эта теория адгезии обобщает известную теорию Гуртина-Мурдоха, и переходит в теорию Гуртина-Мурдоха (Янга-Лапаса) в случае, если новый адгезионный параметр  $\delta^F_{ij}$  равен нулю. Записаны определяющие соотношения теории идеальной адгезии и краевая задача в целом для упругих изотропных тел с адгезионно-активной поверхностью.

Показано, что учет адгезионно активных свойств поверхности изменяет краевые условия, поэтому следует ожидать, что дополнительные механические параметры, определяющие свойства адгезионно активной поверхности, будут влиять на поведение решения особенно для тонких структур.

## ГЛАВА 2. УТОЧНЕННАЯ ГРАДИЕНТНАЯ ТЕОРИЯ МАСШТАБОЗАВИСИМЫХ СВЕРХТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

### 2.1 Введение

В настоящее время значительный интерес проявляется к учету масштабных факторов, то есть к учету параметров характеризующих структуру материала в прикладных задачах теории упругости. Масштабные эффекты нашли экспериментальное подтверждение при исследовании изгибной жесткости консольных стержней из алюминия, полипропилена и эпоксидной смолы [96-98]. Подобные эффекты не могут быть учтены при использовании классической теории упругости, которая не принимает во внимание масштабные параметры. Наоборот, градиентные теории включают дополнительные параметры размерности длины и вполне подходят для моделирования масштабных эффектов.

В настоящее время существует значительное число публикаций, посвященных анализу деформаций стержней с учетом масштабных эффектов с использованием прикладных градиентных теорий упругости. Отметим здесь некоторые недавние интересные работы в этой области [77, 93, 99-93], в которых использованы градиентные модели первого порядка. Отметим, что в этих работах теории стержней строились путем прямого применения кинематики теории стержней Тимошенко для формулировки физических соотношений в усилиях и моментах и для получения уравнений равновесия путем интегрирования по толщине, либо путем использования вариационного подхода без анализа всего спектра краевых условий на продольных поверхностях стержня. Т.е. фактически в этих работах отсутствует анализ соответствия между классической кинематикой теории стержней и обобщенной теорией упругости с расширенным спектром силовых взаимодействий.

## 2.2 Прикладная градиентная теория упругости

Напомним вариационную постановку полностью симметричной градиентной теории:

$$\delta L = 0, \quad L = U - A \quad (2.7)$$

$$U = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} R_{i,j} R_{k,l} dV + \frac{1}{2} \int C_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mn} dV$$

$$A = \int f_i R_i dV + \oint (t_i + q_i R_{i,j} n_j) dS$$

Здесь  $U$  – потенциальная энергия деформации обобщенной среды, записанная с учетом градиентов дисторсий,  $A$  – работа внешних сил, заданных в объеме тела и на его поверхности,  $R_i$  – вектор перемещений,  $R_{i,j} = \partial R_i / \partial x_j$ ,  $R_{i,jk} = \partial^2 R_i / \partial x_j \partial x_k$ ,  $f_i$  и  $t_i$ ,  $q_i$  – векторы заданных сил в объеме тела  $V$  и на его поверхности  $S$ ,  $n_i$  – нормаль к поверхности тела в рассматриваемой точке,  $C_{ijkl}$  и  $C_{ijklmn}$  соответственно тензор модулей классической теории упругости и тензор шестого ранга градиентных модулей для изотропных материалов. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и псевдо-тензора и «моментных» напряжений  $\mu_{ijk}$  определяются равенствами Грина:

$$\sigma_{ij} = \partial E / \partial R_{i,j} = C_{ijkl} R_{k,l}, \quad \mu_{ijk} = \partial E / \partial R_{i,jk} = C_{ijklmn} R_{l,mn} \quad (2.8)$$

Предполагается, что для тензоров классических и градиентных модулей выполняются следующие необходимые условия потенциальности:

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad C_{ijklmn} = C_{lmnijk} \quad (2.9)$$

Для определения структуры тензоров градиентных модулей упругости в теории деформаций введено дополнительно условие симметрии по первой паре индексов:

$$C_{ijklmn} = C_{jiklmn} \quad (2.10)$$

И специфическое требованием независимости от порядка дифференцирования (симметрия по второму-третьему и пятому-шестому индексам):

$$C_{ijklmn} = C_{ijklmn} \quad (2.11)$$

Учитывая все условия (2.3)-(2.5) тензор градиентных модулей упругости имеет вид:

$$C_{ijklmn} = C_1 \left[ (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \delta_{mn} + (\delta_{jk} \delta_{in} + \delta_{ik} \delta_{jn} + \delta_{ij} \delta_{kn}) \delta_{lm} + (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im} + \delta_{ij} \delta_{km}) \delta_{ln} \right] + C_8 \left[ (\delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km}) \delta_{il} + (\delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{kl}) \delta_{im} + (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}) \delta_{in} \right] \quad (2.12)$$

В дальнейшем будет рассматриваться корректная полностью симметричная модель, имеющая модуль упругости, записанный по (2.12). Для нее запишем выражения для тензора напряжений и тензора моментов.

Тензор напряжений имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Тензор моментов приобретает вид:

$$\mu_{ijk} = C_1 \left[ (\Delta R_i + 2\theta_{,i}) \delta_{jk} + (\Delta R_j + 2\theta_{,j}) \delta_{ki} + (\Delta R_k + 2\theta_{,k}) \delta_{ij} \right] + 2C_8 (R_{i,jk} + R_{j,ki} + R_{k,ij}), \quad \Delta R_i = R_{i,kk}, \quad \theta = R_{k,k} \quad (2.13)$$

Можно показать, что полностью симметричная градиентная модель (2.12)-(2.13) является единственной двухпараметрической градиентной теорией деформации, удовлетворяющей потенциальности и условиям симметрии. С другой стороны, эта модель весьма привлекательна для приложений, так как имеет только два масштабных параметра. Напомним, что и классическая теория упругости является двухпараметрической, если параметры Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  считать независимыми. В практических приложениях возможны упрощения путем сведения к однопараметрической модели введением, например, конкретных соотношений между параметрами  $C_1$  и  $C_8$ ,  $\alpha = C_1 / C_8$ . Причем выбор значения параметра  $\alpha$ , например,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ , или  $\alpha = \infty$  должен быть обоснован дополнительными экспериментальными данными.

## 2.3 Уравнения неклассической теории стержней

Рассмотрим стержень прямоугольного сечения с продольной осью  $Ox$ , длиной  $L$ , толщиной  $2h$ , толщиной  $b = \text{const}$ ,  $0 \leq x \leq L$ ,  $-h \leq y \leq h$ ,  $h \ll L$ ,

$h \ll b$ . Считаем, что он изгибается под действием поперечных усилий  $p^\pm$ , приложенных соответственно на верхней  $y = h$  и нижней  $y = -h$  границах полосы. Построим вариант неклассической теории стержней в градиентной упругости, т.е. используя известные кинематические соотношения для полей перемещений, найдем обобщенные силовые факторы – усилия и моменты, определим физические соотношения и построим уравнения равновесия.

Рассмотрим сначала прямой способ получения уравнений равновесия на основе известного вариационного формализма на примере стержней с кинематикой Бернулли. Для плоской задачи теории упругости вводим вектор перемещений  $R_1, R_2$ , полагая равными нулю все компоненты  $R_3$ . Все выражения с производными по координате  $x_3$  также полагаются равными нулю. Используем кинематические соотношения теории стержней Бернулли:

$$R_1 = u(x) - zw'(x), \quad R_2 = w(x), \quad w'(x) = dw/dx \quad (2.14)$$

В данном случае выражения для дисторсий и ненулевых компонент кривизн дисторсий записываются в виде:

$$R_{1,1} = u' - yw'', \quad R_{1,2} = -w', \quad R_{2,1} = w' \quad (2.15)$$

$$R_{1,11} = u'' - yw''', \quad R_{1,12} = -w'', \quad R_{1,21} = -w'', \quad R_{2,11} = w'' \quad (2.16)$$

Используя вариационную постановку (2.7) и учитывая соотношения (2.14)-(2.16) для плоской задачи, получим

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \mu_{ijk} \delta R_{i,jk}) dV \\ &= \int_{\Omega} [\sigma_{11} \delta R_{1,1} + \mu_{111} \delta R_{1,11} + \mu_{112} \delta R_{1,12} + \mu_{121} \delta R_{1,21} + \mu_{211} \delta R_{2,11}] dV \end{aligned} \quad (2.17)$$

Будем в дальнейшем рассматривать градиентную теорию деформаций, для которой  $\mu_{ijk} = \mu_{jik}$ . В результате, учитывая, что  $R_{1,21} = -R_{2,11}$  (см. (2.16)), уравнение (2.17) перепишем в следующем виде

$$\delta U = \int_{\Omega} [\sigma_{11} \delta R_{1,1} + \mu_{111} \delta R_{1,11} + \mu_{112} \delta R_{1,12}] dV \quad (2.18)$$

С помощью уравнения (2.18) можно формальным путем получить определяющие уравнения для усилий и моментов, найти систему уравнений равновесия и граничные условия для прикладной теории стержней.



Действительно, после интегрирования по площади поперечного сечения стержня и использования процедуры интегрирования по частям в отношении продольной координаты, получим

$$\delta U = \int_0^L [N \delta u' - (M + Y) \delta w'' + Q \delta u'' - Z \delta w'''] dx \quad (2.19)$$

где  $N \equiv \int_A \sigma_{11} dA$ ,  $M \equiv \int_A \sigma_{11} z dA$ ,  $Y \equiv \int_A \mu_{112} dA$ ,  $Q \equiv \int_A \mu_{111} dA$ ,  $Z \equiv \int_A \mu_{111} y dA$ ,  $A = 2hb$ .

Тогда, в соответствии с принципом Лагранжа (2.7) уравнения равновесия в усилиях и моментах принимают вид:

$$\begin{cases} N' - Q'' = 0 \\ M'' + Y'' - Z''' + q = 0 \end{cases}$$

Учитывая далее уравнения закона Гука для напряжений Коши  $\sigma_{ij}$  (2.8), определяющие соотношения моментных напряжений  $\mu_{ijk}$  (2.13) и, полагая для простоты в (2.13)  $C_1 = C_8$ , перепишем эти уравнения равновесия в перемещениях.

Получим

$$\begin{cases} Eu'' - 5\mu l^2 u'''' = 0 \\ [1 + \frac{1}{5} \frac{\mu}{E} (\frac{l}{h})^2] w'''' - 5 \frac{\mu}{E} l^2 w^{(6)} = \frac{q}{D} \end{cases} \quad (2.20)$$

Здесь  $D$  – классическая цилиндрическая жесткость (изгибная жесткость),  $E = 2\mu + \lambda$  – модуль упругости в плоской теории деформаций,  $\mu l^2 = 3C_1$ ,  $C_1 = C_8$ .

Прежде всего, отметим основную особенность полученных уравнений прикладной теории стержней. Формальное использование градиентной теории деформаций вместо классической теории упругости привело к тому, что изгибная жесткость классической теории стержней модифицируется за счет масштабного параметра  $(l/h)$ . Таким образом, для сверхтонких структур, когда масштабный параметр  $l$  соизмерим с характеристикой толщины, изгибная жесткость таких структур существенно отличается от классической изгибной жесткости и может превышать ее в несколько раз. Подобный эффект получен в работах [102, 103] и др. В статье [102] модифицированная изгибная жесткость оказывалась равной величине  $(D + \mu A l^2)$ . В работах [102, 103] этот результат предлагалось рассматривать как главный результат и главное достижение использования

градиентной модели при прогнозе необычных свойств сверхтонких стержней (пластин).

Однако именно этот результат оказался для нас причиной более тщательного рассмотрения теории сверхтонких стержней. Действительно использование уравнений (2.20) в качестве решения прикладной проблемы изгиба стержней приводит к тому, что от масштабного параметра зависит полиномиальная часть решения. Это противоречит обобщенной теореме Папковича–Нейбера об общей структуре решений, найденных для градиентных теорий [87, 104]. Эта теорема включает следующие утверждения:

- общее решение для вектора перемещений представляется в виде разложения

$$R = U - u \quad (2.21)$$

где вектор функция  $U$  удовлетворяет классическим уравнениям Ламе с оператором  $L()$ :  $LU + F = 0$ , а вектор-функция  $u$ , зависящая от масштабных параметров, удовлетворяет обобщенному уравнению Гельмгольца с оператором  $H$  (см. (2.11)):

$$Hu + F_H = 0$$

- в случае однородных уравнений любое решение  $u$  в разложении (2.21) может быть представлено в виде

$$u(P) = l_1^{-2} f + \nabla \operatorname{div}(f^* - f)$$

через два векторных потенциала  $f$  и  $f^*$ , удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 f - l_1^{-2} f = 0, \quad \nabla^2 f^* - (l_1^2 + l_2^2)^{-1} f^* = 0$$

Структура решения уравнений (2.20) противоречит представленным утверждениям. По-видимому, это связано с тем, что кинематические соотношения теории стержней не согласованы в полной мере с градиентными теориями, имеющими расширенный спектр силовых взаимодействий, что приводит к внутренним противоречиям и не позволяет удовлетворить всем статическим граничным условиям. Более того, обсуждаемые свойства решений теории стержней, построенных с использованием прямой вариационной процедуры, не

зависят от того используется ли корректная или некорректная градиентная модель. Правда, если сравнивать сами уравнения (2.20), построенные с использованием корректной теории и уравнения изгиба стержней, найденные в рамках некорректной теории, (см., например, [102]), то различия, связанные с использованием не вполне корректных теорий, оказываются существенными. Рассмотрим несколько иной способ построения прикладной градиентной теории стержней. Рассмотрим отдельно выражение, определяющее уравнения равновесия как уравнение Эйлера:

$$\int [(\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k})_{,j} \delta R_i] dV = 0 \quad (2.22)$$

Пусть на верхней и нижней поверхностях стержня статические краевые условия записываются через ту же комбинацию напряжений и моментных напряжений

$$(\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}) n_j = t_i \quad (2.23)$$

Введем обозначения для компонент обобщенных напряжений, входящих в форме одинаковых комбинаций и в уравнения равновесия (см. (2.12)) и в статические краевые условия (2.13) при вариационной формулировке рассматриваемых задач:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \sigma_{11} - (\mu_{111,1} + \mu_{112,2}), \\ t_{12} &= \sigma_{12} - (\mu_{121,1} + \mu_{122,2}), \\ t_{22} &= \sigma_{22} - (\mu_{221,1} + \mu_{222,2}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Заметим, что на верхней и нижней поверхностях стержня граничные условия записываются именно через эти комбинации силовых факторов (2.23).

Введенные так компоненты напряжений можно условно назвать "классическими" составляющими тензора напряжений, так как при статических краевых условиях краевая задача, записанная в терминах  $t_{ij}$ , полностью совпадает с классической постановкой. Для плоской задачи уравнения (2.22) можно трактовать как соотношения, следующие из принципа возможных перемещений. Реализуемая далее процедура соответствует методу Галеркина. Учитывая равенства (2.24) перепишем равенства (2.22) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int [(\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k})_{,j} \delta r_i] dV = \frac{1}{2} \\
& = \int_A \left[ \int \underbrace{(\sigma_{11,1} - \mu_{111,11} - \mu_{112,12})}_{\partial t_{11}/\partial x} + \underbrace{(\sigma_{12,2} - \mu_{121,21} - \mu_{122,22})}_{\partial t_{12}/\partial y} \delta r_1 + \right. \\
& \left. + \underbrace{(\sigma_{21,1} - \mu_{211,11} - \mu_{212,12})}_{\partial t_{21}/\partial x} + \underbrace{(\sigma_{22,2} - \mu_{221,21} - \mu_{222,22})}_{\partial t_{22}/\partial y} \delta r_2 \right] dx dA
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Пусть статические граничные условия при  $y = \pm h$  записываются через компоненты "классических" компонент напряжений:

$$bt_{12} \Big|_{y=\pm h} = 0, \quad bt_{22} \Big|_{y=\pm h} = p^\pm \tag{2.26}$$

### Замечание

В связи с приведенной вариационной трактовкой, можно сделать вывод о том, что она дает корректные уравнения уточненной теории стержней (аналогично и пластин) в том случае, если используется градиентная теория упругости, для которой вариационная формулировка модели позволяет формулировать статические граничные условия только лишь через "классические напряжения" (через обобщенные напряжения в теоремах, введенных Е. Aifantis), т.е. через напряжения, относительно которых записываются уравнения равновесия  $t_{ij} = \sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}$ .

Такие градиентные теории существуют. Приведем в качестве такой теории однопараметрическую теорию межфазного слоя. Она была получена в работах [105-106] из вариационной градиентной модели типа Миндлина-Тупина:

$$U_V = \frac{1}{2} (E_{ijnm} R_{i,j} R_{n,m} + E_{ijknml} R_{i,jk} R_{n,ml}); \quad U_F = \frac{1}{2} A_{ijnm} R_{i,j} R_{n,m};$$

предположении, что выполняются следующие равенства  $E_{ijknml} = E_{ijrk} E_{nmrl} / C$ . В результате получим:

$$U_V = \frac{1}{2} \left[ E_{ijnm} R_{i,j} R_{n,m} + (E_{ijrk} R_{i,jk}) (E_{nmrl} R_{n,mk}) \frac{1}{C} \right]. \tag{2.27}$$

Записанные выражения (2.21) полностью определяют прикладную модель среды с одной дополнительной градиентной физической постоянной в объеме

тела. В работе [23] вариант прикладной теории межфазного слоя, приводится в более симметричной форме:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{ E_{ijnm} R_{n,m} R_{i,j} + C u_i u_i \} dV,$$

где  $\vec{u} = -(1/C)L(\vec{R})$  и  $u_i = -(1/C)L_{ij}(R_j)$ ,  $u_i$  - вектор «когезионных» перемещений, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца  $(L_{ij} - C\delta_{ij})(u_i) = 0$ , и определяющий градиентную составляющую общего решения.

$L_{ij}(\dots)$  - оператор классической теории упругости

Запишем вариационное уравнение имея ввиду (2.21):

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint \left[ E_{ijrk} \left( R_r - \frac{1}{C^V} E_{nmrl} R_{n,ml} \right)_{,jk} + P_i^V \delta R_i \right] dV + \\ & + \oint \left\{ P_i^F - E_{ijrk} n_j \left( R_r - \frac{1}{C^V} E_{nmrl} R_{n,ml} \right)_{,k} \right\} \delta R_i - \frac{1}{C^V} E_{rqnm} R_{n,qm} \delta (E_{rpj} n_p R_{i,j}) \} dF = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Соответственно, "классические напряжения" здесь определяются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E_{ijrk} R_{r,k}, \quad \mu_{ijk} = E_{ijknml} R_{n,ml}, \quad E_{ijknml} = \frac{1}{C^V} E_{ijrk} E_{nmrl} \mu_{ijk,k} \\ t_{ij} &= \sigma_{ij} - \mu_{ijk,k} = \sigma_{ij} - \frac{1}{C^V} E_{ijrk} E_{nmrl} R_{n,mlk} = E_{ijrk} \left[ R_{r,k} - \frac{1}{C^V} E_{nmrl} R_{n,mlk} \right] \end{aligned}$$

Можно дать и определения классического  $U_i$  и когезионного  $u_i$  перемещений через полное перемещение  $R_i$ :

$$U_i = R_i - \frac{1}{C^V} E_{ijnm} R_{n,jm}, \quad u_i = -\frac{1}{C^V} E_{ijnm} R_{n,jm}, \quad R_i = U_i - u_i$$

Тогда "классические" напряжения примут действительно классический вид

$$t_{ij} = E_{ijrk} U_{r,k}$$

Поэтому представляется, что термин "классические" напряжения здесь больше подходит чем термин обобщенные напряжения, введенный ранее Элиосом Айфантисом.

Обратим внимание на то, что в любой точке поверхности, где  $(E_{rpj} n_p R_{i,j}) = 0$ , потенциальная энергия адгезии в соответствии с (2.22) равна

нулю Поэтому второй поверхностный интеграл в (2.22) может обращаться в ноль для только за счет «статического» слагаемого. В дальнейшем будет показано, что результат полученный на основе (2.25) эквивалентен иному подходу, связанному с учетом неклассических краевых условий на моменты и введением редуцированного функционала.

Рассмотрим уравнение (2.25) и перепишем его, используя интегрирование по частям для выражений включающих  $\partial t_{12} / \partial y$  и  $\partial t_{22} / \partial y$ .

$$\begin{aligned} & \int \left[ \left[ (\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k})_{,j} \delta r_i \right] \right] dV = \\ & = \int \left\{ \int_A [(\partial t_{11} / \partial x) \delta r_1 - t_{12} \delta (\partial r_1 / \partial y)] + \int [(\partial t_{21} / \partial x) \delta r_2 - t_{22} \delta (\partial r_2 / \partial y)] dA + \right. \\ & \left. + bt_{12} \delta r_1 \Big|_{y=\pm h} + bt_{22} \delta r_2 \Big|_{y=\pm h} \right\} dx = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Полагаем теперь, что перемещения стержня подчиняются кинематическим соотношениям теории стержней Тимошенко (рисунок 2):

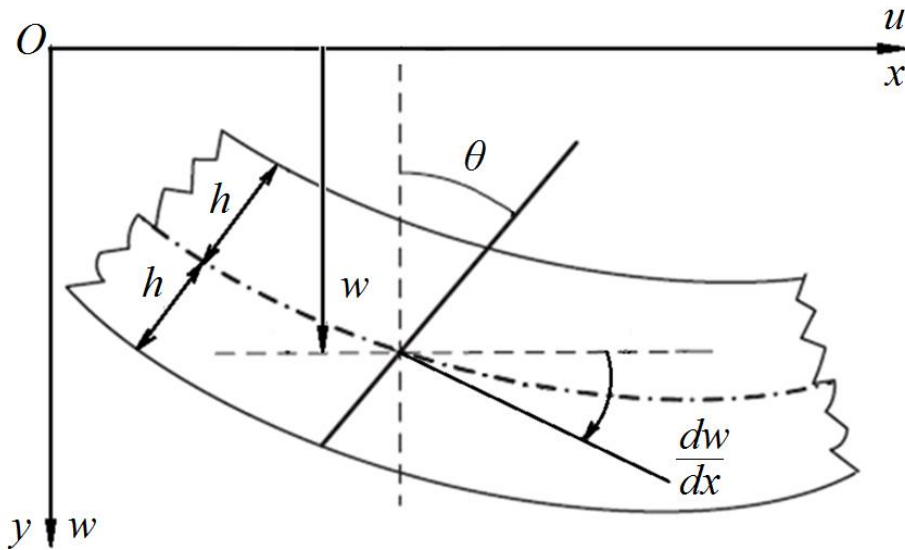


Рисунок 2 – Схема деформирования стержня

$$R_1 = u(x) + \theta y, \quad R_2 = w(x) \quad (2.30)$$

В этом случае компоненты дисторсий имеют вид:

$$\begin{aligned} R_{1,1} = \varepsilon_1 = u'(x) + \theta' y, \quad R_{1,2} = \theta, \quad R_{2,1} = w', \quad R_{2,2} = 0 \\ \varepsilon_1 = r_{1,1}, \quad \varepsilon_{12} = R_{1,2} + R_{2,1} = \theta + w' \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{12}$  – деформация растяжения-сжатия и деформация среднего сдвига.

Выражения для кривизн, соответственно, представляются следующими равенствами

$$\begin{aligned} R_{1,11} &= u''(x) + \theta'' y, \quad R_{1,12} = \theta', \quad R_{1,22} = 0 \\ R_{2,11} &= w'', \quad R_{2,21} = R_{2,12} = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Проинтегрируем выражение (2.29) по площади сечения стержня, учтем соотношения для перемещений (2.30)-(2.32) и краевые условия (2.26). Получим:

$$\int_0^L [\partial N / \partial x] \delta u \, dx + \int_0^L [\partial M / \partial x - Q] \delta \theta \, dx + \int_0^L [\partial F / \partial x + (p^+ - p^-)] \delta w \, dx = 0 \quad (2.33)$$

$$N = \int_{-h}^h t_{11} dy, \quad Q = \int_{-h}^h t_{12} dy, \quad F = \int_{-h}^h t_{21} dy, \quad M = \int_{-h}^h t_{11} y dy \quad (2.34)$$

Касательные напряжения  $t_{12}$  в (2.34) определяют перерезывающую силу  $Q$  в (2.34), что в полной мере отвечает физическому смыслу, если перерезывающую силу определять из уравнений равновесия отсеченной части стержня. Эта же перерезывающая сила должна входить в уравнение равновесия в отношении поперечной координаты. Однако в общем случае  $t_{12} \neq t_{21}$  и, следовательно,  $Q \neq F$ . Неравенство  $Q \neq F$  является следствием энергетической несогласованности кинематики в прикладных теориях стержней и пластин. Энергетически несогласованная кинематика, не позволяет выполнить все уравнения равновесия и не обеспечивает наилучшего приближения при выбранной кинематике и вариационной формулировке краевой задачи. Тем не менее кинематические соотношения (2.30) входят в класс энергетической согласованности при построении теории стержней в рамках классической теории. Следовательно, в рассматриваемом случае несогласованность связана с несоответствием между принятой кинематикой и градиентной теорией.

Выясним, может ли кинематика (2.30) быть согласованной в случае корректной градиентной теории упругости. Для этого учтем (2.24) и запишем определяющие соотношения для "классических" составляющих напряжений,

через которые определяются усилия и моменты  $N, Q, F, M$  (см. (2.34)) в уравнениях равновесия:

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= (\lambda + 2\mu)(u'(x) + \theta' y) - (4C_2 + 2C_8 + C_7 + 4C_{11} + 4C_1)(u'''(x) + \theta''' y) \\
 t_{21} &= \mu(\theta + w'(x)) - (3C_1 + 2C_2 + 4C_{11})\theta'' - (C_7 + 2C_8)w'''(x) \\
 t_{12} &= \mu(\theta + w'(x)) - (2C_1 + 2C_2 + 2C_{11} + 2C_8 + C_7)\theta'' - (2C_{11} + C_1)w'''(x) \\
 t_{22} &= \lambda(u'(x) + \theta' y) - (C_1 + 2C_2)(u'''(x) + \theta''' y)
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Нетрудно видеть из (2.35), что в общем случае  $t_{12} \neq t_{21}$ , т.е. условия энергетической согласованности не выполняются.

Рассмотрим теперь полностью симметричную градиентную теорию упругости, которая является градиентной теорией деформаций, и для которой для тензора модулей упругости выполняются не только условие потенциальности (2.9), условие симметрии (2.10), но и условие симметрии по первым двум индексам (2.11). В этом случае потенциальная энергия для градиентной модели записывается не через тензор дисторсии  $R_{i,j}$ , а через тензор деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Легко проверить, что для такой модели  $t_{12} = t_{21}$ :

$$t_{12} = \mu(\theta + w'(x)) - (5C_1 + 4C_8)\theta'' - (2C_8 + C_1)w'''(x) \tag{2.36}$$

Следовательно, полностью симметричная модель является и энергетически согласованной. Для нее уравнения равновесия записываются только в терминах усилий и моментов, аналогично классической теории стержней Тимошенко, а для выполнения граничных условий на поверхностях стержня достаточно использовать граничные условия на компоненты «классических» напряжений  $t_{12}, t_{22}$ , без привлечения моментных напряжений.

Запишем уравнения равновесия в перемещениях. Учитывая соотношения (2.33)-(2.36), найдем



$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x} &= 2h[(\lambda + 2\mu)u''(x) - (9C_1 + 6C_8)u''''(x)] = 0 \\
\frac{\partial M}{\partial x} - Q &= (\lambda + 2\mu)\frac{2h^3}{3}\theta'' - (9C_1 + 6C_8)\frac{2h^3}{3}\theta'''' - \\
&- 2h[\mu(\theta + w'(x)) - (5C_1 + 4C_8)\theta'' - (2C_8 + C_1)w''(x)] = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial x} + P &= 2h[\mu(\theta' + w''(x)) - (5C_1 + 4C_8)\theta''' - (2C_8 + C_1)w'''(x)] + P = 0 \\
P &= (p^+ - p^-)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Уравнения теории неклассических стержней Бернулли могут быть получены непосредственно из системы уравнений (2.37), приняв в них  $\theta = -w'(x)$ . В результате найдем:

$$\begin{aligned}
Eu''(x) - \mu l^2 \frac{(9 + 6\alpha)}{(1 + 2\alpha)} u''''(x) &= 0 \\
w'''' - \frac{\mu l^2}{E} \frac{(9 + 6\alpha)}{(1 + 2\alpha)} w^{(6)}(x) &= \frac{P}{D}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

здесь  $\mu l^2 = (C_1 + 2C_8)$ ,  $E = 2\mu + \lambda$ , — модуль упругости и классическая изгибная жесткость (цилиндрическая жесткость пластин) в случае плоской деформации,  $\alpha = \frac{C_1}{C_8}$ .

Нетрудно показать, что при этом для модели Бернулли выполняются статические условия на поверхностях стержня, включая условие на момент.

Действительно, из (2.18) после записи вариационного уравнения следует, что граничное условие на моменты для рассматриваемой задачи при  $y = \pm 1$  имеет вид  $\mu_{112} = 0$ . Считая полосу (стержень) тонкой полагаем, что  $\mu_{112}$  равно нулю и по всей толщине полосы. Тогда потенциальную энергию (2.18) можно упростить, полагая, что слагаемое, включающее  $\mu_{112}$  равно нулю. В результате, в выражении (2.19) следует принять  $Y = 0$ . Нетрудно убедиться, что в этом случае уравнения (2.20) совпадают с уравнениями (2.38).

Полученные уточненные уравнения градиентной теории стержней (пластин), очевидно, не противоречат утверждениям обобщенной теоремы Нейбера-Папковича, а их решения кардинально отличаются от решений, полученных ранее для масштабозависимых тонких стержней [77, 93, 99-93].

Отметим, что эффективная жесткость консольных стержней, определенная для максимальных перемещений, может существенно отличаться от классической, так как она в значительной степени контролируется жесткостью закрепления, где градиентные (масштабные) эффекты играют большую роль.

## 2.4 Метод редукции потенциальной энергии градиентной теории упругости

Рассмотрим снова для простоты проблему изгиба стержней Бернулли.

Приведем доказательство того, что использование прямого использования метода гипотез в рамках вариационных подходов является не вполне корректным. Напомним для стержней имеют место следующие кинематические гипотезы (2.14):

$$R_1 = u(x) - zw'(x), \quad R_2 = w(x), \quad R_3 = 0$$

Далее ранее были определены дисторсии  $R_{i,j}$  и ненулевые компоненты кривизн  $R_{i,jk}$  (2.15)-(2.16):

$$R_{1,1} = u' - yw'', \quad R_{1,2} = -w', \quad R_{2,1} = w'$$

$$R_{1,11} = u'' - yw''', \quad R_{1,12} = -w'', \quad R_{1,21} = -w'', \quad R_{2,11} = w''$$

Воспользуемся предварительным качественным анализом проблемы, по аналогии с тем как поступил Л. Ландау при построении теории пластин.

Рассмотрим вариационную постановку градиентной упругости общего вида (2.7) и запишем вариацию потенциальной энергии в следующем виде (2.17):

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \mu_{ijk} \delta R_{i,jk}) dV \\ &= \int_{\Omega} [\sigma_{11} \delta R_{1,1} + \mu_{111} \delta R_{1,11} + \mu_{112} \delta R_{1,12} + \mu_{121} \delta R_{1,21} + \mu_{211} \delta R_{2,11}] dV \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  и  $\mu_{ijk}$  напряжения Коши и моментные напряжения, для которых в соответствии с формулами Грина имеют место следующие определяющие соотношения (2.8):

$$\sigma_{ij} = \partial U / \partial R_{i,j} = C_{ijmn} R_{m,n}, \quad \mu_{ijk} = \partial U / \partial R_{i,jk} = C_{ijkml} R_{m,nl}$$

Отметим, что мы полагаем, что рассматриваемые градиентные теории упругости удовлетворяют недавно установленным критериям корректности (2.3)-(2.5), в соответствии с которыми тензор моментных напряжений должен быть симметричным по последним двум индексам (1.33):  $\mu_{ijk} = \mu_{ikj}$ . Так как здесь рассматривается градиентная теория, которая является градиентной теорией деформаций (не дисторсий), то должна иметь место симметрия и по первой паре индексов  $\mu_{ijk} = \mu_{jik}$ , и  $\mu_{121} = \mu_{211}$ . Рассмотрим отдельно неклассическое граничное условие на поверхности стержня которое для градиентной теории записывается в виде:

$$\mu_{ijk}n_k = 0 \quad (2.39)$$

Для рассматриваемого случая граничное условие (2.39) ведет к условию (свертка с нормалью поверхности стержня  $z=constant$ ):  $\mu_{ij2} = 0$ . Полагаем, что для тонких стержней эти же компоненты моментных напряжений должны быть равны нулю везде, то есть и по всей толщине стержня. Следовательно, имея ввиду, что в соответствии с кинематикой Бернулли (2.14),  $R_{1,21} = -R_{2,11}$ , получим вместо (2.17):

$$\delta U = \int_{\Omega} [\sigma_{11}\delta R_{1,1} + \mu_{111}\delta R_{1,11}] dV \quad (2.40)$$

Для изотропной градиентной упругости, моментные напряжения, записанные в терминах в терминах дисторсии  $R_{i,jk}$  имеют вид (1.37):

$$\begin{aligned} \mu_{ijk} = C_1 [ & (\Delta R_i + 2\theta_{,i})\delta_{jk} + (\Delta R_j + 2\theta_{,j})\delta_{ki} + (\Delta R_k + 2\theta_{,k})\delta_{ij} ] + \\ & + 2C_8 (R_{i,jk} + R_{j,ki} + R_{k,ij}) \end{aligned}$$

Учтем, что для теории стержней  $R_{3,ij} = R_{i,3j} = R_{i,j3} = 0$ , тогда имеем из (1.37):

$$\begin{aligned}
\mu_{111} &= 3C_1(\Delta R_1 + 2\theta_{,1}) + 6C_8 R_{1,11} = 3C_1(R_{1,11} + R_{1,22} + 2R_{1,11} + 2R_{2,21}) + 6C_8 R_{1,11} \\
&= 3C_1(3R_{1,11} + R_{1,22} + 2R_{2,12}) + 6C_8 R_{1,11} = (9C_1 + 6C_8)R_{1,11} + \\
&\quad + 3C_1(R_{1,22} + 2R_{2,12}) \\
\mu_{122} &= C_1(\Delta R_1 + 2\theta_{,1}) + 2C_8(R_{1,22} + R_{2,21} + R_{2,12}) \\
&= C_1(R_{1,11} + R_{1,22} + 2R_{1,11} + 2R_{2,21}) + 2C_8(R_{1,22} + 2R_{2,12}) \\
&= C_1(3R_{1,11} + R_{1,22} + 2R_{2,12}) + 2C_8(R_{1,22} + 2R_{2,12}) = 3C_1 R_{1,11} + \\
&\quad + \underline{(C_1 + 2C_8)(R_{1,22} + 2R_{2,12})}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Заметим, что для тонких стержней (пластин) имеет место (2.39) и следует принять  $\mu_{112} = 0$ . В результате, учитывая, что из второго равенства (2.41) можно исключить подчеркнутое выражение, из первого уравнения (2.41) получим:

$$\mu_{111} = (9C_1 + 6C_8)R_{1,11} - \frac{9C_1}{C_1 + 2C_8} R_{1,11} = \frac{12C_8(2C_1 + C_8)}{C_1 + 2C_8} R_{1,11} \tag{2.42}$$

В частности если в (2.42) принять, что  $C_1 = C_8$ , то  $\mu_{111} = 12C_1 R_{1,11}$ .

Используя принцип Лагранжа  $\delta L = 0$ , (2.7) и учитывая (2.40), получим после интегрирования по частям следующие уравнения равновесия в усилиях и моментах (уравнения Эйлера):

$$\begin{cases} N' - Q'' = 0 \\ M'' - Z''' + p = 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

здесь  $p = p^+ - p^-$ ,  $p^+$ ,  $p^-$  - распределенные усилия, заданные на верхней и нижней поверхностях стержня.

Для однопараметрической градиентной упрощенной модели ( $C_1 = C_8$ ), моменты и усилия, входящие в (2.43) имеют вид:

$$\begin{aligned}
N &= b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (u' - zw'') dz = \frac{Ebu'}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} dz = \frac{EA}{1-\nu^2} u' \\
M &= b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (u' - zw'') z dz = -\frac{bEw''}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -\frac{bh^3 E}{12(1-\nu^2)} w''
\end{aligned}$$

$$Q = 12C_1 b \int_{-h/2}^{h/2} (u'' - zw''') dz = 12C_1 A u''$$

$$Z = b \int_{-h/2}^{h/2} 12C_1 (u'' - zw''') z dz = -12C_1 b w''' \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -C_1 b h^3 w'''$$

Подставляя найденные выражения для усилий и моментов в уравнения равновесия (2.43), найдем

$$\begin{cases} u'' - \hat{l}^2 u'''' = 0 \\ w'''' - \hat{l}^2 w'''' = p / D \end{cases} \quad (2.44)$$

где  $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ ,  $\hat{l} = \sqrt{12(1-\nu^2)C_1/E}$ .

В общем случае, для корректной двухпараметрической градиентной теории  $C_1 \neq C_8$  получаем также уравнения равновесия (2.44) в которых масштабный параметр имеет вид:

$$\hat{l} = \sqrt{[12C_8(2C_1 + C_8)(1-\nu^2)] / [(C_1 + 2C_8)E]} \quad (2.45)$$

Граничные условия для рассматриваемой неклассической теории масштабозависимых стержней получаются как естественные граничные условия и имеют вид:

$$\left[ (N - Q') \delta u + Q \delta u' + (M' - Z'') \delta w - (M - Z') \delta w' - Z \delta w'' \right]_0^L = 0 \quad (2.46)$$

Уравнения (2.44)-(2.46) полностью описывают теорию масштабозависимых стержней Бернулли (при  $\nu = 0$ ). Нетрудно видеть, что в предложенном варианте теории классические жесткости, (при второй и четвертой производной соответственно в уравнениях (2.44)) не модифицируются за счет масштабных градиентных параметров. Следует так же отметить, что уравнения равновесия (2.44) совпадают с уравнениями (2.38).

## 2.5 Заключение

На основе анализа определяющих соотношений и структуры потенциальной энергии градиентных теорий упругости установлено новое условие корректности, связанное со специфическими свойствами симметрии тензора градиентных модулей упругости шестого ранга. Показано, что среди градиентных теорий деформаций существует единственная двухпараметрическая градиентная теория, удовлетворяющая условиям корректности. Исследование уравнений равновесия прикладной теории стержней, полученных с использованием кинематики теории стержней Тимошенко и вариационного формализма, позволило установить, что корректная градиентная теория деформаций удовлетворяет условиям энергетической согласованности прикладной теории стержней. В результате построены уточненные уравнения равновесия прикладной теории масштабозависимых стержней Тимошенко, не противоречащие общим положениям о структуре решений градиентных теорий упругости.

Рассмотрен пример, в котором представлено прямое доказательство ошибочности решений, которые указывают на эффект увеличения жесткости при  $h \rightarrow 0$  для масштабозависимых стержней, если их рассматривать с использованием нелокальных градиентных теорий упругости. Очевидно, что если такие эффекты действительно имели бы место, то они реализовывались бы для любой градиентной модели.

## ГЛАВА 3. О ВЛИЯНИИ АДГЕЗИОННЫХ МАСШТАБНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ СВЕРХТОНКИХ МИКРО-, НАНОСИСТЕМ

### 3.1 Введение

В настоящее время проявляется большой интерес к исследованию деформирования тонких структур. Особое внимание к тонким структурам связано с перспективами развития высокочувствительных аппаратов, аэрокосмических

систем, средств микроэлектроники и биологических систем. В таких структурах толщина исследуемых элементов может становиться соизмеримой с характерными размерами микроструктуры материала. В тонких структурах необходим учет зависимости физических параметров от характерного размера микроструктуры материала. Градиентные теории включают дополнительные параметры размерности длины и подходят для моделирования масштабных эффектов. Наряду с учетом влияния градиентных параметров на физические свойства стержней и пластин идет учет влияния адгезионных параметров. Используется модель идеальных адгезионных взаимодействий, разработанная в работах [12-14, 70-82, 83-84]. Вариационные постановки модели идеальной адгезии, ее обобщения и некоторые приложения этих моделей рассматривались в работах [84-85, 95, 106-108, 109, 110-111]. Отметим, что модели тонких стержней с учетом градиентных эффектов рассматривались в работах [93, 102].

В данном разделе приводится вариационная постановка градиентной теории адгезионного взаимодействия. Дана трактовка адгезионных модулей. Представлен вывод уравнений изгиба пластин с учетом эффектов адгезии. Рассматривается цилиндрический изгиб пластин с учетом адгезионных взаимодействий. Проведен качественный анализ уравнения равновесия пластин (стержней). Показано, что адгезионные свойства поверхностей смогут оказывать значительное влияние на деформирование тонких пластин (стержней) при уменьшении толщины, в то время как влияние градиентных эффектов даёт гораздо меньший вклад, чем это было указано ранее в ряде опубликованных исследований других авторов.

### **3.2 Вариационная постановка для модели среды с адгезионными свойствами поверхностей. Структура модулей адгезии**

Как показано в работах [12-14, 70-82, 83-84] для построения математической модели градиентных теорий упругости, континуальных моделей адгезии и формулировки соответствующей краевой задачи используется «кинематический» вариационный принцип.

Для физически линейной среды плотности потенциальных энергий в объеме и на поверхности должны быть квадратичными положительно определенными формами своих аргументов [12], тогда Лагранжиан имеет следующий вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV - \frac{1}{2} \iint A_{ipnq}^* \left[ \frac{\partial R_n}{\partial x_m} (\delta_{mq} - n_m n_q) \right] \left[ \frac{\partial R_i}{\partial x_j} (\delta_{jp} - n_j n_p) \right] dF \quad (3.1)$$

Здесь поверхностная плотность энергии  $U_F$  представлена как квадратичная форма тензора дисторсии, определенного на поверхности  $\frac{\partial R_i}{\partial x_j} (\delta_{jp} - n_j n_p)$ :

$$2U_F = A_{ijmn} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

$$A_{ijmn} = A_{ipnq}^* (\delta_{mq} - n_m n_q) (\delta_{jp} - n_j n_p) \quad (3.2)$$

Тензоры модулей  $C_{ijmn}$  и  $A_{ijmn}$  должны подчиняться свойству симметрии при перестановке первой и второй пары индексов (условие потенциальности):

$$C_{ijmn} = C_{nmij}, \quad A_{ijmn} = A_{nmij}$$

Тем не менее, структура тензора модулей упругости  $C_{ijmn}$  и тензора модулей адгезионных свойств  $A_{ijmn}$  различна. Тензор объемных модулей является изотропным и имеет следующую структуру:

$$C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn})$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  - коэффициенты Ламе.

Тензор же адгезионных модулей является трансверсально изотропным, его физические свойства по направлению нормали отличаются от физических свойств в любом направлении, лежащем в касательной плоскости к поверхности. Трансверсальная изотропность следует из определения  $A_{ijmn}$  через произвольный тензор  $A_{ipnq}^*$  (3.2). Кроме того, тензор адгезионных модулей, в соответствии с тем же определением (3.2), обладает следующими уникальными свойствами:

$$A_{ijmn} n_j = 0, \quad A_{ijmn} n_m = 0$$

Доказано в работах [12-14, 70-82, 83-84], что тензор адгезионных модулей, определяющий поверхностные свойства и имеет следующий вид:



$$A_{ijm} = [\lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{mm} - n_n n_m) + \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F + \chi^F) (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F - \chi^F) (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)]$$

Здесь  $\lambda^F$ ,  $\mu^F$ ,  $\chi^F$  и  $\delta^F$  - адгезионные модули, имеющие размерность, превышающую размерность коэффициентов Ламе, на размерность длины.

Варьируя Лагранжиан (3.1) и приравнивая вариацию к нулю, получим вариационное уравнение:

$$\delta L = \iiint [C_{ijm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} + P_i^V] \delta R_i dV + \iint [P_i^F - C_{ijm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} n_j + A_{ijm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m}] \delta R_i dF - \sum \oint A_{ijm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} v_j \delta R_i ds = 0$$

Здесь суммирование производится по всем контурам, ограничивающим гладкие поверхности, составляющие кусочно-гладкую поверхность  $F$ .

Таким образом, теория сред с идеальной адгезией поверхностей имеет те же уравнения равновесия, что и классическая теория упругости, но краевая задача содержит другие статические граничные условия.

В работах [12-14, 70-82, 83-84] показано, что выражение для плотности потенциальной энергии имеет вид:

$$2U_F = A_{ijm} R_{n,m} R_{i,j} = (\mu^F + \lambda^F) (\theta^2) + 2\mu^F (\gamma_{ij}^2) + 2\chi^F (\omega_{ij}^2) + \delta^F (\alpha_k^2)$$

Что позволяет придать четкий физический смысл всем четырем физическим постоянным в выражении (3.2):

- модуль  $\mu^F + \lambda^F$  - определяет эффект поверхностного натяжения;
- модули  $2\mu^F$  и  $2\chi^F$  характеризуют энергии поверхностного формоизменения и, соответственно, энергию скручивания в плоскости, касательной к поверхности;
- $\delta^F$  определяет энергию изгиба поверхности, аналогичную энергии деформации "внутренних винклеровских пружинок".

### 3.3 Вывод уравнений теории изгиба пластин с учетом эффектов адгезии (классическая теория упругости)

Далее на основе вариационного принципа Лагранжа выводятся уравнения изгиба пластин с учетом идеальной адгезии. Для этого Лагранжиан записывается в виде [12-14, 70-82, 83-84]:

$$\begin{aligned}
 L &= A - U \\
 A &= \iiint P_i^V R_i dV + \iint P_i^F R_i dFA \\
 U &= \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dV + \frac{1}{2} \iint A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dF
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

где  $A$  - работа внешних объемных  $P_i^V$  и поверхностных  $P_i^F$  сил на перемещениях  $R_i$ ,  $U$  - потенциальная энергия,  $C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$  - тензор классических модулей упругости,  $A_{ijmn} = \lambda^F \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + \mu^F (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{in}^* \delta_{jm}^*) + \delta^F n_i n_m \delta_{jn}^*$  - тензор адгезионных модулей теории идеальной адгезии,  $\delta_{ij}^* = \delta_{ij} - n_i n_j$  - плоский тензор Кронекера на поверхности пластины как трехмерного тела,  $n_i$  - орт нормали к поверхности пластины как трехмерного тела.

В общем случае кинематические соотношения Тимошенко записываются в виде:

$$R_x = z\theta_x + R_{x0}, \quad R_y = z\theta_y + R_{y0}, \quad R_z = w(x, y) \tag{3.4}$$

Рассмотрим задачу изгиба пластины толщиной  $h$ . Для упрощения в (3.4) положим  $R_{x0} = R_{y0} = 0$ , тогда кинематические соотношения Тимошенко (3.4) переписутся в виде:

$$R_x = z\theta_x, \quad R_y = z\theta_y, \quad R_z = w(x, y) \tag{3.5}$$

где  $w$  - прогиб пластины,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  - углы поворота.

Введем гипотезу ненадавливаемости:

$$\sigma_z = 0 \tag{3.6}$$

Учитывая гипотезу ненадавливаемости (3.6) и используя закон Гука, получим:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial R_z}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right) \quad (3.7)$$

Раскроем тензорную запись Лагранжиана (3.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint & \left[ \lambda \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right)^2 + \mu \left( 2 \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial R_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial R_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial R_x}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial y} \right)^2 \right] dV - \\ & - \frac{1}{2} \iint \left[ \lambda^F \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right)^2 + \delta^F \left( \left( \frac{\partial R_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial R_z}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + \mu^F \left( 2 \left( \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial R_y}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dS \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя следствие (3.7) из гипотезы ненадавливаемости (3.6) в Лагранжиан (3.8) получим следующую постановку:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint & \left[ \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \left( \frac{\partial R_y}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \mu \left( \frac{\partial R_x}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial y} \right)^2 \right] dV - \frac{1}{2} \iint \left[ \lambda^F \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right)^2 + \delta^F \left( \frac{\partial R_z}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \delta^F \left( \frac{\partial R_z}{\partial y} \right)^2 + 2\mu^F \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} \right)^2 + 2\mu^F \left( \frac{\partial R_y}{\partial y} \right)^2 + \mu^F \left( \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x} \right)^2 \right] dS \end{aligned} \quad (3.9)$$

Учитывая кинематические соотношения (3.5), Лагранжиан (3.9) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint & \left[ \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + 2\mu \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 z^2 + 2\mu \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + \mu \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 z^2 + \right. \\ & \left. + \mu \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dV - \frac{1}{2} \iint \left[ \lambda^F \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + \delta^F \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \delta^F \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2\mu^F \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 z^2 + 2\mu^F \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + \mu^F \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 z^2 \right] dS \end{aligned} \quad (3.10)$$

Представим области интегрирования выражения (3.10) в виде:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iint \left\{ \int_{-y/2}^{h/2} \left[ \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + 2\mu \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 z^2 + 2\mu \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + \mu \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 z^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dz \right\} dx dy - \frac{1}{2} \iint \left[ \lambda^F \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + \delta^F \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \delta^F \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\mu^F \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 z^2 + 2\mu^F \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + \mu^F \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 z^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

В полученном выражении (3.11) пренебрегается энергией адгезии на торцевых поверхностях пластины по сравнению с потенциальной энергией адгезии на лицевых поверхностях пластины.

После внутреннего интегрирования последнего выражения по координате  $z$  получаем:

$$L = A - \frac{1}{2} \iint \left[ \bar{D} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + \bar{G} \left( \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \bar{G} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu h \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu h \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \delta^F \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \delta^F \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.12)$$

В результате интегрирования введены обозначения для следующих величин:

$$\bar{D} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \frac{h^3}{12} + \lambda^F \frac{h^2}{2}, \quad \bar{G} = 2 \left( \mu \frac{h^3}{12} + \mu^F \frac{h^2}{2} \right)$$

Применим к (3.12) вариационный принцип Лагранжа, получим:

$$\delta L = \delta A - \iint \left[ \left( \bar{D} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \bar{G} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \left( \bar{D} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \bar{G} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{G} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \bar{G} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \right. \\ \left. + \mu h \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \theta_x + \left( \mu h \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \delta^F \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ \left. + \mu h \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \theta_y + \left( \mu h \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \delta^F \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.13)$$

После интегрирования (3.13) по частям, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \delta A - \int (\bar{D}(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}) + \bar{G} \frac{\partial \theta_x}{\partial x}) \delta \theta_x \Big|_{x=L}^{x=0} dy - \int (\bar{D}(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}) + \bar{G} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}) \delta \theta_y \Big|_{y=b}^{y=a} dx + \\
& - \int \frac{1}{2} \bar{G} (\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}) \delta \theta_x \Big|_{x=L}^{x=0} dy - \int \frac{1}{2} \bar{G} (\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}) \delta \theta_y \Big|_{y=b}^{y=a} dx + \\
& - \int (\mu h (\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}) + \delta^F \frac{\partial w}{\partial x}) \delta w \Big|_{x=L}^{x=0} dy - \int (\mu h (\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}) + \delta^F \frac{\partial w}{\partial y}) \delta w \Big|_{y=b}^{y=a} dx \\
& + \iint \bar{D} (\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x}) + \bar{G} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \delta \theta_x dx dy + \iint \frac{1}{2} \bar{G} (\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y}) \delta \theta_x dx dy - \\
& - \iint \mu h (\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}) \delta \theta_x dx dy + \iint (\bar{D} (\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2}) + \bar{G} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2}) \delta \theta_y dx dy + \\
& + \iint \frac{1}{2} \bar{G} (\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}) \delta \theta_y dx dy - \iint \mu h (\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}) \delta \theta_y dx dy + \\
& + \iint (\mu h (\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + \delta^F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \delta w dx dy + \iint (\mu h (\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + \delta^F \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \delta w dx dy
\end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче изгиба пластин работа внешних сил записывается следующим образом:

$$\delta A = \int p \delta w$$

В итоге, получаем уравнения равновесия теории тонких пластин Тимошенко с учётом адгезии:

$$\begin{aligned}
\bar{D} (\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x}) + \bar{G} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \bar{G} (\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y}) - \mu h (\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}) &= 0 \\
\bar{D} (\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2}) + \bar{G} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \bar{G} (\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}) - \mu h (\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}) &= 0 \\
\mu h (\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + 2\delta^F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu h (\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + 2\delta^F \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p &= 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

В случае цилиндрического изгиба следует принять, что  $\theta_y = 0$  и приравнять нулю все производные по координате  $y$ . Тогда система уравнений равновесия пластин даст фактически уравнения теории стержней Тимошенко (с точностью до коэффициента Пуассона) и запишется в виде:

$$\begin{aligned}
(\bar{D} + \bar{G}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - \mu h (\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}) &= 0 \\
\mu h (\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + 2\delta^F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p &= 0
\end{aligned}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$D^* = \bar{D} + \bar{G} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \frac{h^3}{12} + \lambda^F \frac{h^2}{2} + 2\left(\mu \frac{h^3}{12} + \mu^F \frac{h^2}{2}\right) = D + (2\mu^F + \lambda^F) \frac{h^2}{2}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$$

Систему уравнений (3.14) можно свести к одному уравнению изгиба, исключив слагаемые содержащие  $\mu h(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x})$  и  $\mu h(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y})$ :

$$D^* \Delta \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + 2\delta^F \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p = 0$$

Заметим, что полученное уравнение соответствует уравнению изгиба пластин Кирхгофа, если принять, что  $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ :

$$D^* \Delta \Delta w - 2\delta^F \Delta w - p = 0 \quad (3.15)$$

Полученное уравнение (3.15) включает параметры адгезии, что позволяет сравнить влияние масштабных и адгезионных параметров. Заметим, что при использовании гипотез Кирхгофа первые два уравнения системы (3.14) выполняются с точностью до  $h^2 \Delta w$ .

Исключим из системы уравнений (3.14) выражение  $(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x})$ . Тогда получим

$$D^* \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + 2\delta^F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p = 0$$

В случае стержней Бернулли имеем  $(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \mu \rightarrow \infty)$ :

$$D^* w^{(4)} - 2\delta^F w'' = p \quad (3.16)$$

### 3.4 Влияния масштабных и адгезионных параметров на деформирование стержней

В предыдущем разделе были получены уравнения изгиба пластин Тимошенко (и Кирхгофа, как частный случай), содержащие параметры идеальной адгезии. В качестве примера рассмотрим цилиндрический изгиб пластин, когда прогиб  $w(x, y)$  зависит только от координаты  $x$ . Уравнение равновесия (3.15) записано с учетом адгезионной активности поверхности. Так как учет

адгезионных взаимодействий дает вклад только в классические составляющие уравнения равновесия (см. п. 2.3), то для получения уравнений уточненной теории изгиба стержней для градиентной теории упругости с учетом эффектов адгезии, можно не повторять вывод уравнений равновесия стержней, а сразу записать уравнения градиентной теории стержней, модифицировав только соответствующие классические составляющие. В результате уравнение равновесия, полученное с учетом масштабных эффектов и адгезии, будет выглядеть:

$$-\gamma l^2 w^{(6)} + \frac{D^*}{D} w^{(4)} - \frac{2\delta^F}{D} w'' = \frac{p}{D} \quad (3.17)$$

где  $l$  - масштабный параметр,  $\gamma$  - градиентный параметр,  $\mu$  - модуль сдвига,  $E$  - модуль упругости плоской деформации,  $D$  - классическая цилиндрическая жесткость.

Дадим качественный анализ влияния адгезионных параметров на примере шарнирно опертой балки.

Рассмотрим пример шарнирно опертого стержня, нагруженного локальной силой, приложенной в середине пролета при  $x = \frac{L}{2}$ . Решение будем искать в виде одинарного ряда Фурье:

$$w(x) = \sum_{k=1} w_k \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{L}$$

Для того, чтобы уравнение равновесия (3.17) было удовлетворено, коэффициенты  $W_k$  ряда Фурье должны определяться равенством:

$$W_k = \frac{P_k}{D^* (\lambda_k)^4 + \gamma l^2 (\lambda_k)^6 + 2\delta^F (\lambda_k)^2} \quad (3.18)$$

где  $P_k$  - коэффициенты разложения в ряд Фурье поперечной нагрузки  $p(x)$ , в частности если балка нагружена силой в середине пролета, то  $P_k = P \frac{L}{2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$ .

Полученное уравнение (3.16) определяет корректную теорию масштабозависимых стержней Бернулли. Для этой теории характерно, что

классическая изгибная жесткость  $D = \frac{Ebh^3}{12}$  не подвергается изменению за счет учета градиентных масштабных эффектов, а градиентный параметр  $l^2$  определяет оператор Гельмгольца в уравнении равновесия. Таким образом, полученная теория полностью соответствует теореме Папковича – Нейбера об общей структуре решений градиентных теорий [87, 104] в отличие от некорректных решений [102, 103]. При этом выполняются все статические граничные условия на поверхностях стержней (пластин), включая неклассические условия для моментных напряжений. Именно эти граничные условия нарушаются при прямом применении процедуры метода гипотез в рамках вариационных подходов, что и приводит в результате к ошибочным поправкам в цилиндрическую жесткость. Отметим, что в данной работе корректная теория стержней получена с помощью метода редукции потенциальной энергии для стержней Бернулли. Однако можно убедиться, что этот же метод реализуем и для теории стержней Тимошенко. В этом случае учет условий корректности градиентных теорий является весьма существенным. Уравнения равновесия (3.14) учитывают дополнительно адгезионные эффекты и являются естественным обобщением уравнений (2.38) теории стержней.

Численная иллюстрация будет приводится в главе 4.

### 3.5 Заключение

В данном разделе приведена вариационная постановка среды, учитывающая адгезионную активность поверхности. Получены уравнения изгиба пластин с учетом эффектов адгезии. Уравнения изгиба стержней получены, как цилиндрический изгиб пластины. Уравнение изгиба стержней дополнено градиентными параметрами, что позволяет провести качественный анализ влияния масштабных параметров на деформирование тонких структур. Численные результаты представлены в главе 4.



## ГЛАВА 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ, ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 4.1 Введение

В данной главе собраны все примеры диссертации и анализ полученных результатов. Здесь будут представлены сравнительные графики с работами других авторов, которые также работают в области тонких стержней и пластин. Будут показаны графики влияния адгезионных и градиентных параметров на деформирование стержней. Будут представлены экспериментальные данные по измерению жесткости тонких стержней.

### 4.2 Изгиб свободно опертых стержней. Влияние когезионного масштабного параметра

В главе 2 были получены уравнения теории неклассических стержней Бернулли. В качестве иллюстрации рассмотрим изгиб шарнирно опертых стержней Бернулли с привлечением уточненной теории, где масштабный когезионный параметр входит множителем при шестой производной в уравнении равновесия (рисунок 3).

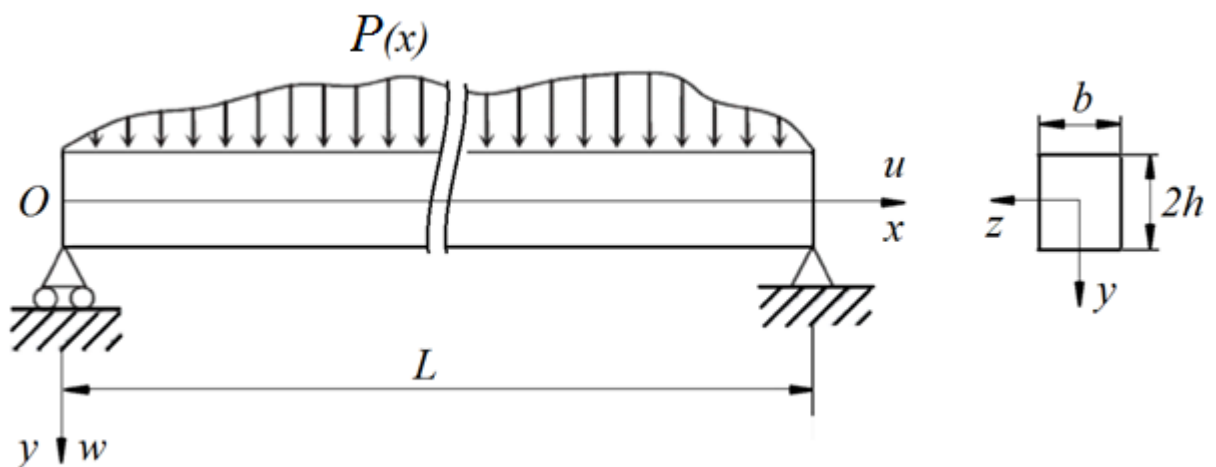


Рисунок 3 – Вид и схема нагружения шарнирно опертого стержня Бернулли

В этом случае прогиб стержней  $w(x)$  находится как решение уравнения равновесия (уравнение получено в главе 2):

$$w'''' - \gamma l^2 w^{(6)}(x) = \frac{P}{D} \quad (4.1)$$

здесь  $\mu l^2 = (C_1 + 2C_8)$ ,  $\gamma = \frac{\mu (9 + 6\alpha)}{E (1 + 2\alpha)}$  - амплитуда градиентного параметра,  $E = 2\mu + \lambda$  - модуль упругости,  $D$  - классическая изгибная жесткость (цилиндрическая жесткость пластин) в случае плоской деформации,  $\alpha = \frac{C_1}{C_8}$ ,  $P = (p^+ - p^-)$  - поперечные усилия  $p^\pm$ , приложенные соответственно на верхней  $y = h$  и нижней  $y = -h$  границах стержня.

Можно показать, что все необходимые краевые условия при  $x = 0$ ,  $x = L$ , следующие из общей вариационной постановки в данном случае выполняются, если:

$$w \Big|_{x=0} = w \Big|_{x=L} = 0, \quad w'' \Big|_{x=0} = w'' \Big|_{x=L} = 0$$

Будем искать решение для  $w(x)$  в виде одинарного ряда Фурье

$$w(x) = \sum_{k=1} W_k \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{L} \quad (4.2)$$

Для того чтобы удовлетворялось записанное выше уравнение равновесия коэффициенты ряда Фурье для прогибов  $w_k$  должны определяться равенством:

$$W_k = \frac{P_k}{D \lambda_k^4 (1 + \gamma l^2 \lambda_k^2)} \quad (4.3)$$

где  $P_k$  - коэффициенты Фурье в разложении внешней нагрузки.

Конкретное решение строится для свободно опертого стержня, нагруженного локальной силой, приложенной в середине пролета при  $x = \frac{L}{2}$ . На рисунке 4 представлены зависимости относительных прогибов  $\bar{w} = \frac{W_k}{H}$  от относительной продольной координаты  $\frac{x}{H}$ ,  $H = 2h$  для случаев  $H = 2h = l$  и  $H = 4l$  соответственно. Полученные корректные уточненные решения для сверхтонких

стержней (4.2), (4.3) показаны пунктирными линиями ( $H = 2h = l$ ) и ( $H = 4l$ ). Для сравнения на этих же рисунках представлены классические решения (точечные кривые) и решения, найденные в работе [102] на основе градиентной модели, не удовлетворяющей критерию симметрии (сплошные кривые). В случае изгиба под действием локальной силы  $P$ , приложенной в середине пролета балки в выражении (4.3) следует принять  $P_k = P \frac{L}{2} \sin(\frac{\pi k}{2})$ . Решения построены для следующих параметров [102]:  $l = 17$  мкм,  $b = 2h$ ,  $L = 20h$ ,  $E = 1,44$  ГПа,  $P = 100$  мкН. Кроме того принято, что  $\alpha = 1$  и  $\mu = \frac{E}{2}$ .

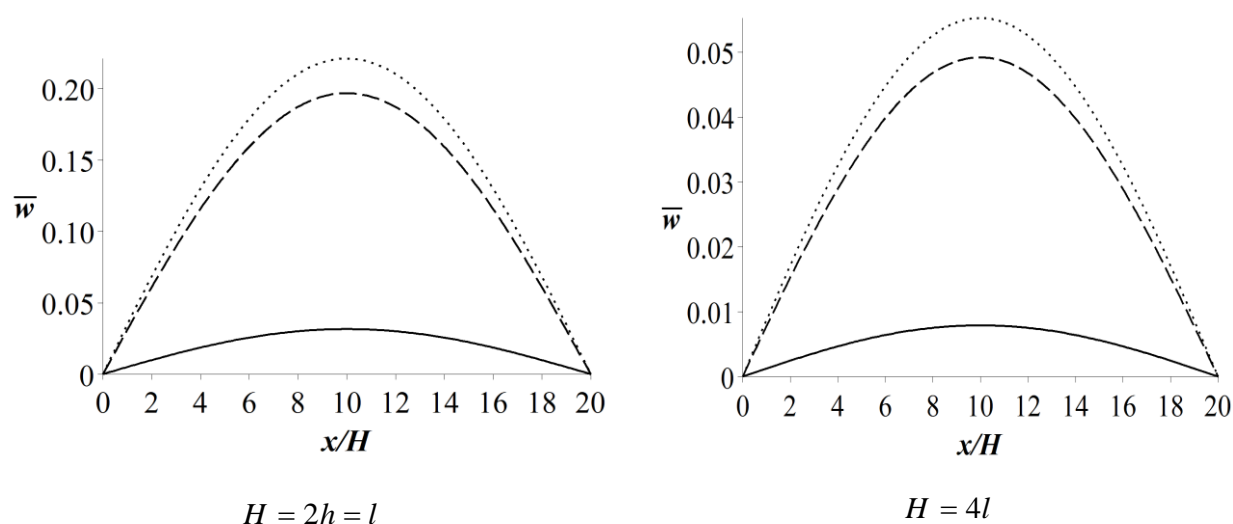


Рисунок 4 – Прогиб стержня Бернулли

Для этого же случая была решена динамическая задача и найдены собственные частоты колебаний стержня Бернулли:

$$\omega_k^2 = \frac{(1 + \gamma l^2 \lambda_k^2) D \lambda_k^4}{\rho} \quad (4.4)$$

На рисунках 5-8 сравниваются графики частотных характеристик стержня  $\Omega = \frac{\omega_k^2}{\omega_{classic}^2}$ , полученные в работе [102], и в уточненной теории (выражение (4.4)).

Точками на данных графиках показано классическое решение, пунктирной линией – уточненное решение, полученное в этой работе и сплошной линией – решение, полученное в работе [102].

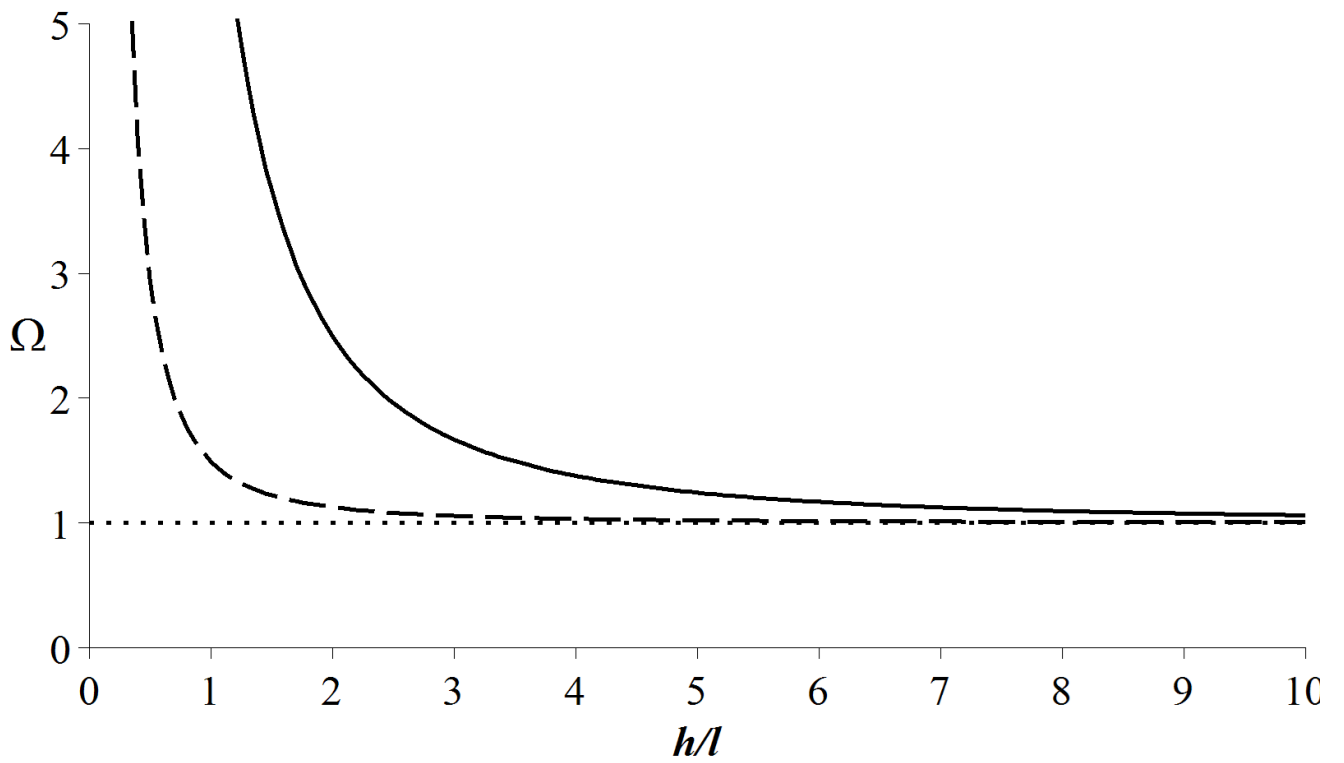


Рисунок 5 – Относительная частота колебаний стержня,  $k = 1$ ,  $L=10 h$

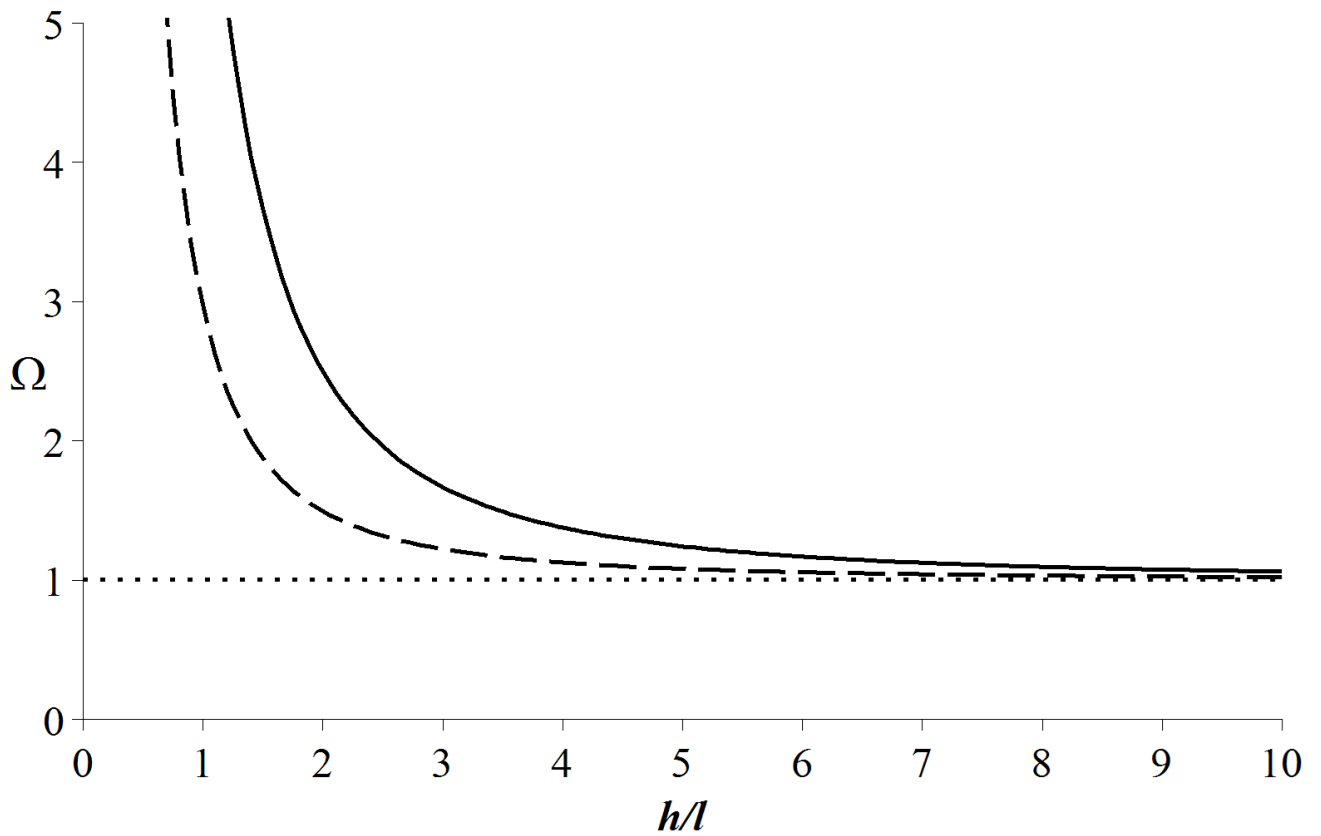


Рисунок 6 – Относительная частота колебаний стержня,  $k = 2$ ,  $L=10 h$

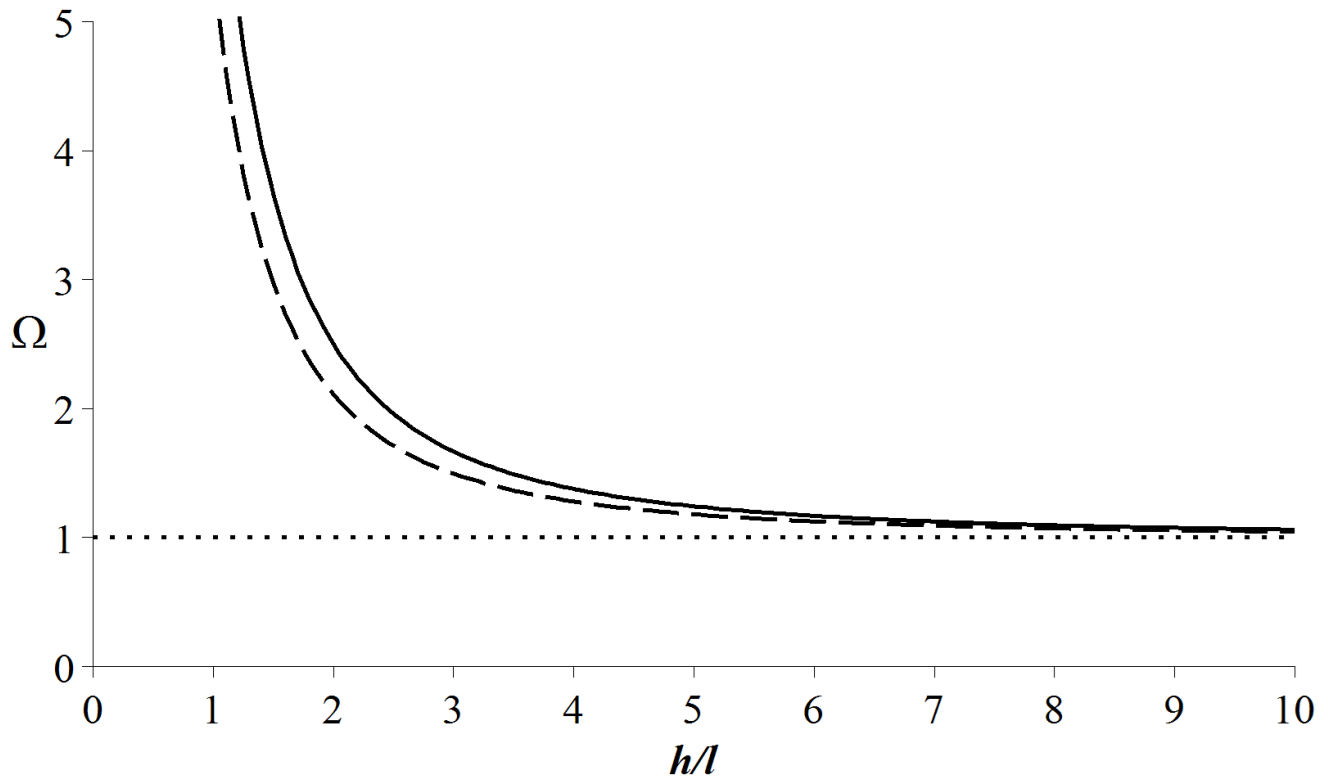


Рисунок 7 – Относительная частота колебаний стержня,  $k = 3$ ,  $L=10 h$

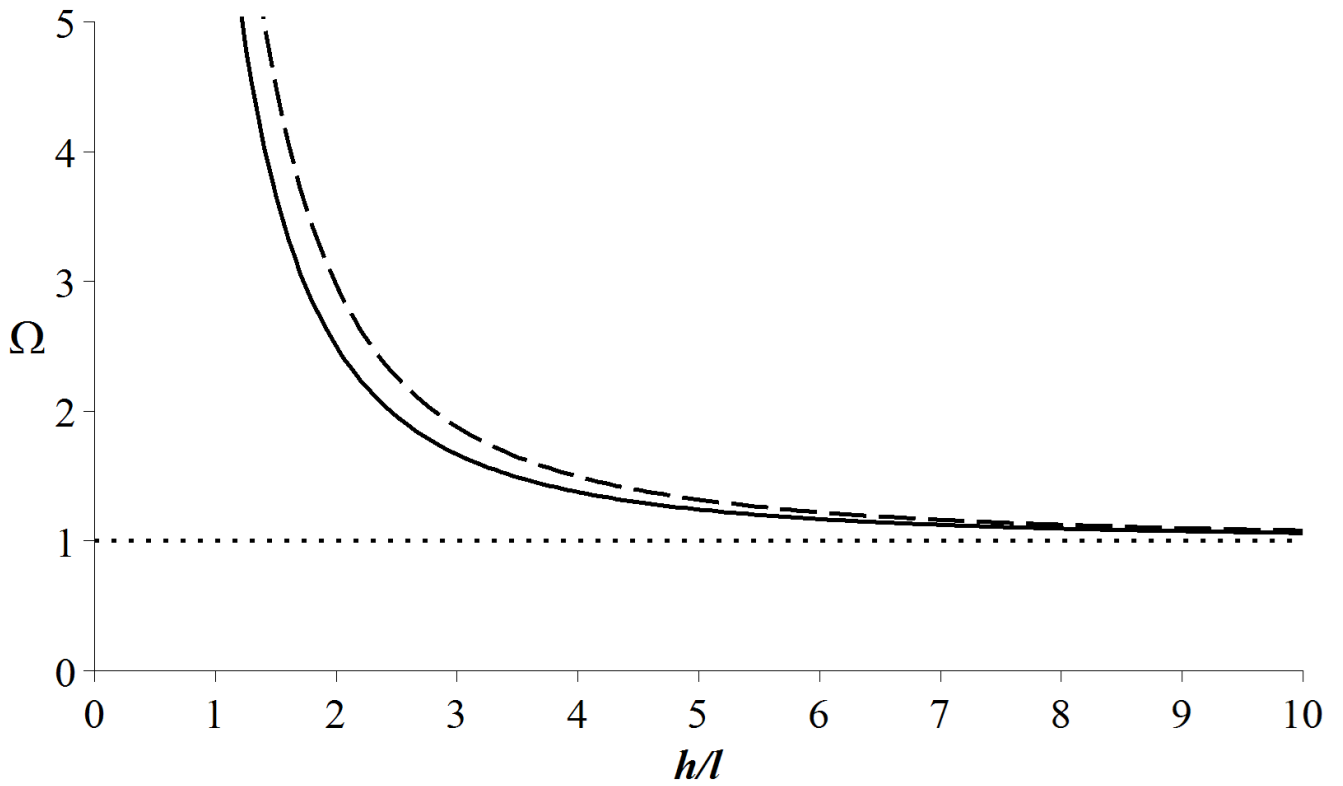


Рисунок 8 – Относительная частота колебаний стержня,  $k = 4$ ,  $L=10 h$

Отметим, что с увеличением моды частоты колебаний результаты, сравниваемых решений, учитывающих влияние градиентных параметров, сближаются. Это и понятно, ибо действительно, градиентные эффекты становятся существенными, когда длина волны становится соизмерима с масштабным параметром материала. В этом случае правильный вариант теории (пунктирные кривые) учитывает градиентные эффекты.

Результаты, полученные в работе [102], говорят о том, что влияние градиентных параметров на деформирование стержней Бернулли вносят существенные поправки (сплошные кривые значительно отличаются от классического решения). Как будет показано ниже в примерах, наибольшее значение имеют адгезионные параметры по сравнению с градиентными.

### **4.3 Анализ влияния адгезионных и градиентных параметров на деформирование стержней**

Приведем пример, показывающий, что учет адгезионных параметров существенно изменяет жесткостные характеристики масштабозависимых стержней в диапазоне толщин, обычно рассматриваемых для тонких структур [102]. Убедимся, что корректная теория, учитывающая одновременно масштабные градиентные и адгезионные параметры, вполне может описывать известные экспериментальные данные и поэтому является альтернативой некорректных теорий.

В главе 3 было получено уравнение изгиба пластин Тимошенко (и Кирхгофа, как частный случай) с учетом влияния градиентных и адгезионных масштабных параметров. В качестве иллюстрации влияния различных масштабных параметров будет рассмотрен пример цилиндрического изгиба пластин, то есть прогиб  $w(x)$  будет зависеть только от координаты  $x$ .

Следовательно, рассматривается шарнирно-пертый стержень, нагруженный сосредоточенной силой  $P$  в середине пролета. Запишем уравнение равновесия для прогиба стержня. В этом уравнении градиентный параметр стоит множителем

только при шестой производной, масштабные параметры, связанные с учетом поверхностного натяжения  $2\mu^F + \lambda^F$ , входят в определение  $D^*$ , а масштабный параметр  $\delta^F$ , отвечающий за «капиллярность» и «смачиваемость» входит множителем при дополнительном слагаемом со второй производной (см. главу 3):

$$-\gamma^2 w^{(6)} + \frac{D^*}{D} w^{(4)} - \frac{2\delta^F}{D} w'' = \frac{P}{D} \quad (4.5)$$

- здесь  $D^* = D + (2\mu^F + \lambda^F) \frac{h^2}{2}$  - жесткость, связанная с адгезионным параметром  $(2\mu^F + \lambda^F)$  поверхностного натяжения,  $D = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$  - классическая изгибная жесткость,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\gamma = \frac{\mu(9+6\alpha)}{E(1+2\alpha)}$  - амплитуда градиентного параметра,  $\delta^F$  - «изгибный» адгезионный параметр,  $l$  - масштабный параметр.

Решение для стержня с граничными условиями шарнирного опирания ищется, очевидно, в виде тригонометрического ряда  $w(x) = \sum_{k=1} W_k \sin \lambda_k x$ ,  $\lambda_k = \pi k / L$ ,  $L$  - длина стержня,  $P_k$  - коэффициенты ряда Фурье в разложении нагрузки (в данном случае сосредоточенной силы). Чтобы уравнение равновесия рассматривается шарнирно-пертый стержень, нагруженный сосредоточенной силой  $P$  в середине пролета. Запишем уравнение равновесия для прогиба стержня. В этом уравнении градиентный параметр стоит множителем только при шестой производной, масштабные параметры, связанные с учетом поверхностного натяжения  $2\mu^F + \lambda^F$ , входят в определение  $D^*$ , а масштабный параметр  $\delta^F$ , отвечающий за «капиллярность» и «смачиваемость» входит множителем при дополнительном слагаемом со второй производной (см. главу 3):

$$-\gamma^2 w^{(6)} + \frac{D^*}{D} w^{(4)} - \frac{2\delta^F}{D} w'' = \frac{P}{D} \quad (4.5)$$

удовлетворялось, коэффициенты  $W_k$  ряда Фурье должны определяться равенством:

$$W_k = \frac{P_k}{D^* (\lambda_k)^4 + D\gamma l^2 (\lambda_k)^6 + 2\delta^F (\lambda_k)^2} \quad (4.6)$$

Графики для относительного значения амплитуды первой моды прогиба приведены на рисунке 9. Они построены для следующих параметров, заимствованных в работе [102]:

$$k = 1, \quad l = 17,6 \text{ мкм}, \quad h = l, \quad L = 5h, \quad \mu = \frac{E}{2}, \quad E = 1,44 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0$$

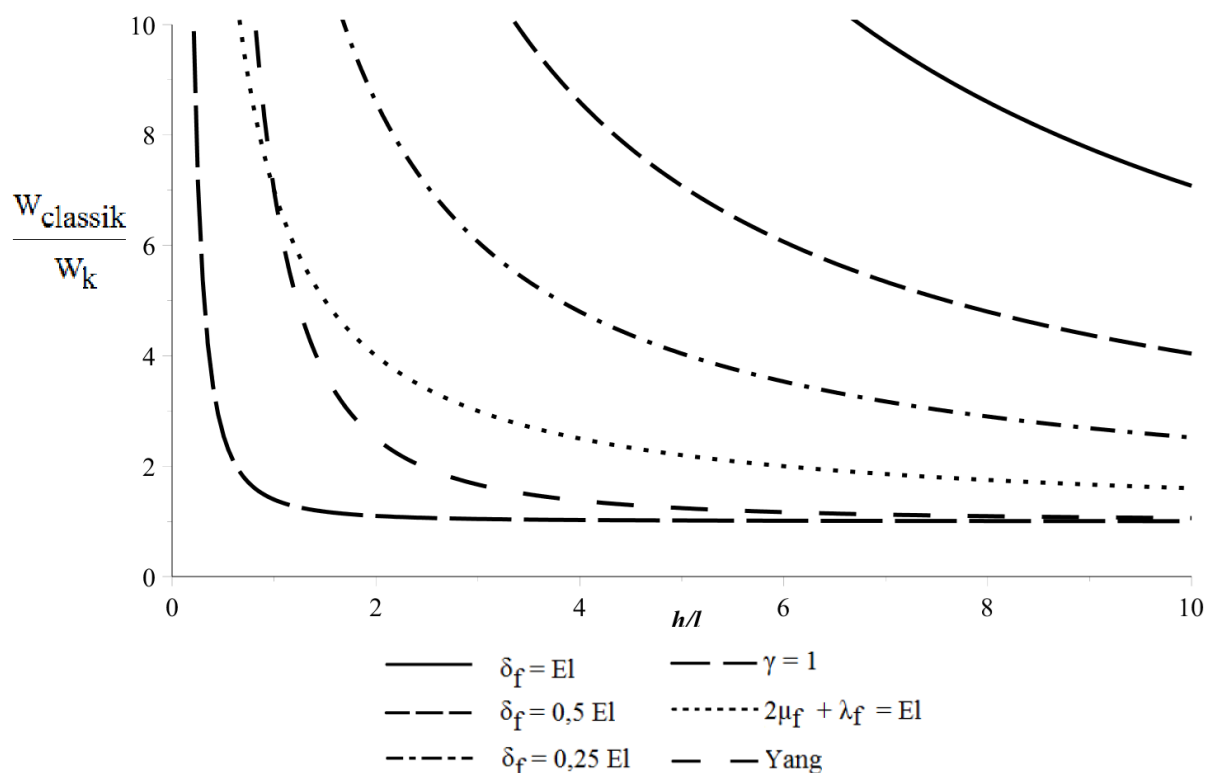


Рисунок 9 – Сравнение полученных результатов

Качественное сравнение результатов с соответствующими результатами, полученными в работе [102], представленных на рисунке 9, показывает, что корректный учет масштабных эффектов (кривая, показанная длинными штрихами), связанных с градиентными эффектами дает гораздо меньшие поправки к классическому решению, чем это было заявлено в работе [102]. Учет адгезионных эффектов за счет поверхностного натяжения ( $2\mu^F + \lambda^F$ ) может давать значительные поправки в прогиб и обеспечивать прогноз изменения жесткостей близкий тому как это указывалось в работе [102], но за счет адгезионных эффектов, а не эффектов адгезии. Учет адгезионного параметра  $\delta_f$ , который описывает адгезионные свойства поверхности, связанные с жесткостью на изгиб, может вносить наиболее существенный вклад в решение.



#### 4.4 Влияние адгезионных масштабных параметров на собственные частоты

В качестве примера исследуем собственные частоты масштабозависимых стержней, которые характеризуют динамическую жесткость системы. Для этого запишем уравнение движения стержней при изгибе, учитывая только классические инерционные составляющие, связанные с прогибом:

$$-D\gamma l^2 w^{(6)} + D^* w^{(4)} - 2\delta^F w'' = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.7)$$

здесь  $\gamma$  - амплитуда градиентного параметра,  $\delta^F$  - «изгибный» адгезионный параметр,  $l$  - масштабный параметр,  $\rho$  - плотность,  $D^* = D + (2\mu^F + \lambda^F) \frac{h^2}{2}$  - жесткость, связанная с адгезионным параметром  $(2\mu^F + \lambda^F)$  поверхностного натяжения.

Исследуем зависимость квадрата первой частоты  $\omega_1^2$  от масштабных параметров (рисунок 4). Для этого рассмотрим стержень со следующими параметрами [102]:  $L = 5h$  - длина стержня,  $h = l$  - толщина стержня,  $l = 17,6 \text{ мкм}$  - масштабный параметр,  $k = 1$  - число полуволн,  $E = 1,44 \text{ ГПа}$  - модуль упругости,  $\nu = 0$  - коэффициент Пуассона.

В случае шарнирного опирания квадрат первой частоты определяется равенством:

$$\omega_k^2 = \frac{(\gamma l^2 (\lambda_k)^2 + \frac{D^*}{D} + \frac{2\delta^F}{D(\lambda_k)^2}) D (\lambda_k)^4}{\rho}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{L}$$

На рисунке 10 представлены зависимости относительного частотного параметра для первой относительной собственной частоты  $\Omega = \frac{\omega_1^2}{\omega_{classic}^2}$  от масштабных параметров в объеме  $\gamma$  и на поверхности  $\lambda^F + 2\mu^F$ ,  $\delta^F$  ( $\omega_{classic}^2$  - квадрат первой собственной частоты «классического» стержня. Масштабный параметр в объеме (градиентный когезионный параметр) характеризуется величиной  $\gamma = \frac{\mu(9+6\alpha)}{E(1+2\alpha)}$ . Для учета масштабных параметров адгезионных

взаимодействий полагаем, что адгезионные характеристики пропорциональны масштабному параметру:  $\lambda^F + 2\mu^F = k_f El$ ,  $\delta^F = k_\delta El$ , где  $k_f$  и  $k_\delta$  - амплитудные безразмерные коэффициенты. Полученные результаты сравниваются с результатами работы [105], отмеченными на рисунке 1 точками ( $\Omega_{Ma}$ )

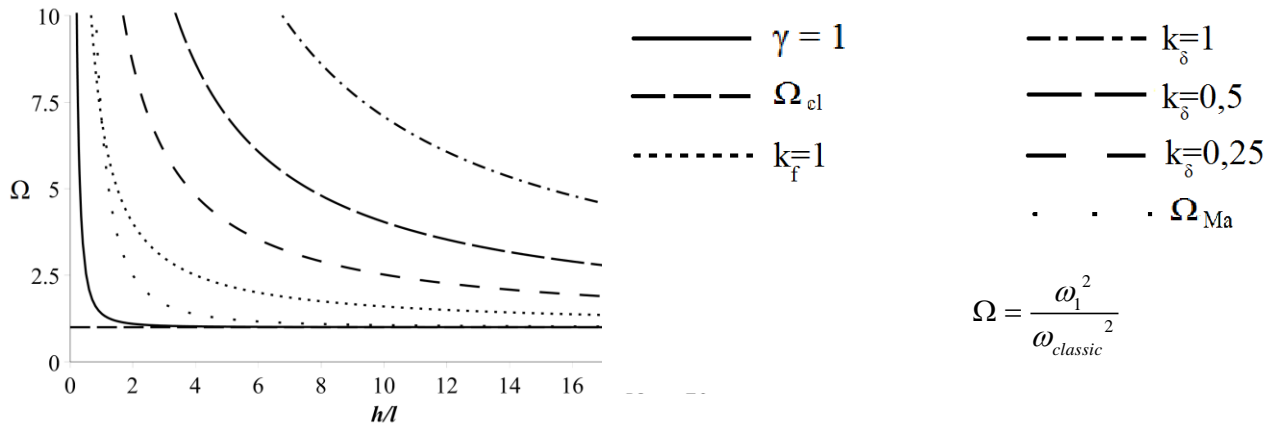


Рисунок 10 – Сравнение собственных частот, найденных по теории [102] ( $\Omega_{Ma}$ ) с результатами корректной теории, полученных с учетом эффектов поверхностных эффектов общего вида (глава 3)

В качестве общего множителя в уравнении (4.7) вынесем выражение  $D(\lambda_k)^4$ :

$$\omega_k^2 = \frac{(\gamma l^2 (\lambda_k)^2 + \frac{D^*}{D} + \frac{2\delta^F}{D(\lambda_k)^2}) D(\lambda_k)^4}{\rho} \quad (4.8)$$

Напомним, что

$$D^* = (\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{12} + (\lambda^F + 2\mu^F) \frac{h^2}{2} \quad (4.9)$$

Если в выражении (4.9) вынести как общий множитель выражение для цилиндрической жесткости  $D = (\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{12} = E \frac{h^3}{12}$ , а выражение  $(\lambda^F + 2\mu^F)$  имеет размерность равную  $lEk_f$ , то в уравнении (4.8)  $\frac{D^*}{D}$  переписывается в виде:

$\frac{D^*}{D} = 1 + 6 \frac{k_f l}{h}$ . При этом параметр  $k_f$  является безразмерным. Если принять

$\delta^F = Elk_\delta$ , то выражение в уравнении (4.8)  $\frac{2\delta^F}{D(\lambda_k)^2}$  переписывается в виде

$\frac{2\delta^F}{D(\lambda_k)^2} = 24 \frac{k_\delta}{k^2 \pi^2} \frac{l}{h} \left(\frac{L}{h}\right)^2$ . А выражение  $\gamma l^2 (\lambda_k)^2$  можно переписать в следующем виде

$\gamma l^2 (\lambda_k)^2 = k_\gamma k^2 \pi^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\frac{h}{L}\right)^2$ , где  $k$  - число полуволн,  $k_f, k_\delta, k_\gamma$  - коэффициенты пропорциональности.

Теперь можно переписать выражение для собственных частот (4.8) следующим образом:

$$\omega_k^2 = \frac{(k_\gamma k^2 \pi^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1 + 6 \frac{k_f l}{h} + 24 \frac{k_\delta}{k^2 \pi^2} \frac{l}{h} \left(\frac{L}{h}\right)^2) D(\lambda_k)^4}{\rho} \quad (4.10)$$

Полученное уравнение позволяет качественно оценить влияние адгезионных масштабных параметров  $(\lambda^F + 2\mu^F)$ ,  $\delta^F$  и градиентного параметра  $\gamma$  на частотные характеристики стержней.

Анализ зависимостей, представленных на рисунке 10, показывает, что влиянием градиентного параметра  $\gamma$  (сплошная линия) можно пренебречь по сравнению с влиянием адгезионных параметров. Можно видеть, что параметр  $\delta^F$ , который возникает в обобщенной теории адгезии, может оказывать наиболее существенное влияние на динамическую жесткость. Это объясняется тем, что график этого параметра ведет себя как функция  $\left(\frac{l}{h}\right)^3$ , при этом порядок этого параметра  $\left(\frac{L}{h}\right)^2$ . График параметра  $\lambda^F + 2\mu^F$ , описывающий эффект поверхностного натяжения, ведет себя как функция  $\left(\frac{l}{h}\right)$  (имеет порядок  $\left(\frac{l}{h}\right)$ ), график, соответствующий градиентному параметру  $\gamma$  ведет себя, как функция  $\left(\frac{l}{h}\right)^2$ , (имеет порядок  $\left(\frac{l}{L}\right)^2$ ). Это доказывает, что и при оценке первых частот колебаний стержней градиентные эффекты не существенны по сравнению с поверхностными.

#### 4.5 Уточненные уравнения динамики для градиентной теории

В классической теории упругости плотность кинетической энергии определяется выражением  $\rho_0 \dot{r}_i \dot{r}_i / 2$

$$\int_{t_2}^{t_1} \int_V \rho \frac{(\dot{R}_1)^2}{2} dt dV \Rightarrow \int_{t_2}^{t_1} \int_V \delta \rho \frac{(\dot{R}_1)^2}{2} (dt dV) \Rightarrow \int_{t_2}^{t_1} \int_V \rho \dot{R}_1 \delta \dot{R}_1 (dt dV) \Rightarrow \rho r_1 \delta r_1 \Big|_{t_2}^{t_1} - \int_{t_2}^{t_1} \int_V \rho \ddot{R}_1 \delta R (dt dV)$$

В градиентной теории кинетическая энергия зависит от скоростей деформаций:

$$K = K(\rho_0 \dot{R}_i \dot{R}_i, \rho_C \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{i,j})$$

В результате после варьирования и интегрирования по частям в уравнения движения добавятся слагаемые вида  $\rho_C \ddot{R}_{i,j}$  в  $i$ -м уравнении движения (при вариации  $\delta R_i$ ), изменятся граничные условия (в них войдут слагаемые вида  $[\rho_C \dot{R}_{i,j} n_j \delta R_i] \Big|_{x_j=const}$  и добавятся начальные условия вида  $[\rho_C \dot{R}_{i,j} \delta R_{i,j}] \Big|_t$

Кинетическая энергия постулирована как достаточно частный случай.

Более общий случай такой:

$$K = K_{classic} + K_{grad}$$

$$K_{classic} = \frac{1}{2} \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho \dot{R}_i \dot{R}_i dt dV \quad (4.11)$$

$$K_{grad} = \frac{1}{2} \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho_{ijmn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} dt dV$$

где:

$$\rho_{ijmn} = \rho_\theta \delta_{ij} \delta_{mn} + (\rho_\gamma + \rho_\omega) \delta_{im} \delta_{jn} + (\rho_\gamma - \rho_\omega) \delta_{in} \delta_{jm} \quad (4.12)$$

Соответствующий Лагранжиан:

$$L = A + K - U$$

Принцип Даламбера приводит к следующим уравнениям динамики:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta(A + K_{classic} - U) + \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho_{ijmn} \dot{R}_{m,n} \delta \dot{R}_{i,j} dt dV = \\
&= \delta(A + K_{classic} - U) + \int_V \rho_{ijmn} \dot{R}_{m,n} \delta R_{i,j} dV \Big|_{t=t_2}^{t=t_1} - \\
&- \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho_{ijmn} \ddot{R}_{m,n} \delta R_{i,j} dt dV = \\
&= \delta(A + K_{classic} - U) + \iiint \rho_{ijmn} n_j \dot{R}_{m,n} \delta r_i dF \Big|_{t=t_2}^{t=t_1} - \int_V \rho_{ijmn} \dot{R}_{m,nj} \delta R_i dV \Big|_{t=t_2}^{t=t_1} - \\
&- \iiint_{t_2}^{t_1} \rho_{ijmn} n_j \ddot{R}_{m,n} \delta R_i dt dF + \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho_{ijmn} \ddot{R}_{m,nj} \delta R_i dt dV
\end{aligned}$$

Уравнения движения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} + \frac{\partial A_V}{\partial R_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K_{classic}}{\partial \dot{R}_i} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial K_{grad}}{\partial \dot{R}_{i,j}} &= 0 \\
\left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} + \frac{\partial A_V}{\partial R_i} \right) - \rho \ddot{r}_i + [(\rho_\gamma + \rho_\omega)(\ddot{R}_{i,jj} - \ddot{R}_{j,ji}) + (2\rho_\gamma + \rho_\theta)\ddot{R}_{j,ji}] &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Таким образом, установлено, что градиентные поправки в кинетическую энергию определяют различные градиентные свойства в продольных и поперечных акустических волнах.

Действительно, для продольных волн уравнения движения имеют вид:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} + \frac{\partial A_V}{\partial R_i} \right)_{,i} - \rho \ddot{R}_{i,i} + (2\rho_\gamma + \rho_\theta) \Delta \ddot{R}_{i,i} = 0$$

Градиентная инертность для продольных волн определяется параметром  $(2\rho_\gamma + \rho_\theta)$ .

Для поперечных волн уравнения движения имеют вид:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_V}{\partial R_{m,j}} + \frac{\partial A_V}{\partial R_m} \right)_{,n} \mathcal{E}_{mnk} - \rho \ddot{R}_{m,n} \mathcal{E}_{mnk} + (\rho_\gamma + \rho_\omega) \Delta \ddot{R}_{m,n} \mathcal{E}_{mnk} = 0$$

Градиентная инертность для поперечных волн определяется параметром  $(\rho_\gamma + \rho_\omega)$ .

Таким образом, выяснен физический смысл двух линейных комбинаций параметров градиентной инерционности из трех введенных постулатами (4.11) и (4.12).

Обратим внимание на то, что каждый из трёх модулей градиентной инерционности не может быть отрицательным.

Доказательство.

Рассмотрим в соответствии с (4.11) градиентную часть удвоенной плотности кинетической энергии:

$$\begin{aligned}
 & \rho_{ijmn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} = \\
 & = \rho_\theta \delta_{ij} \delta_{mn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} + (\rho_\gamma + \rho_\omega) \delta_{im} \delta_{jn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} + (\rho_\gamma - \rho_\omega) \delta_{in} \delta_{jm} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} = \\
 & = (\rho_\theta + 2\rho_\gamma / 3) \delta_{ij} \delta_{mn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} + 2\rho_\gamma (\delta_{im} \delta_{jn} / 2 + \delta_{in} \delta_{jm} / 2 - \delta_{ij} \delta_{mn} / 3) \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} + \\
 & + 2\rho_\omega (\delta_{im} \delta_{jn} / 2 - \delta_{in} \delta_{jm} / 2) \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} = \\
 & = (\rho_\theta + 2\rho_\gamma / 3) \dot{R}_{i,i} \dot{R}_{m,m} + 2\rho_\gamma \dot{R}_{i,j} (\dot{R}_{i,j} / 2 + \dot{R}_{j,i} / 2 - \dot{R}_{m,m} \delta_{ij} / 3) + 2\rho_\omega \dot{R}_{i,j} (\dot{R}_{i,j} / 2 - \dot{R}_{j,i} / 2) = \\
 & = (\rho_\theta + 2\rho_\gamma / 3) \dot{\theta} \dot{\theta} + 2\rho_\gamma \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + 2\rho_\omega \dot{\omega}_{ij} \dot{\omega}_{ij}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{R}_{i,i} \\ \dot{\gamma}_{ij} = (\dot{R}_{i,j} / 2 + \dot{R}_{j,i} / 2 - \dot{R}_{m,m} \delta_{ij} / 3) \\ \dot{\omega}_{ij} = (\dot{R}_{i,j} / 2 - \dot{R}_{j,i} / 2) \end{cases}$$

Отсюда видно, что градиентная часть плотности кинетической энергии является канонической положительно определенной квадратичной формой скоростей деформации изменения объема  $\dot{\theta}$ , деформаций изменения формы  $\dot{\gamma}_{ij}$  и компонентов тензора поворотов  $\dot{\omega}_{ij}$ . Поэтому модули  $(\rho_\theta + 2\rho_\gamma / 3)$ ,  $\rho_\gamma$  и  $\rho_\omega$  должны быть не отрицательными.

В главе 2 было получено уравнение изгиба теории неклассических стержней Бернулли.

В качестве простого примера рассмотрим случай динамического нагружения шарнирно опертых стержней Бернулли при изгибе и учтем только инерционные слагаемые связанные с изгибом. Для этого в полученные ранее уравнения (глава 2) добавляются динамические инерционные члены. Рассмотрим уточненную градиентную теорию изгиба стержней. В этом случае, для динамической задачи изгиба стержня (инерцией осевых смещений сечений пренебрегаем) кинетическая энергия будет зависеть от скоростей поперечных смещений  $w(x,t)$ , от скоростей продольных смещений, связанных с изгибом  $u(x,t)$  (т.е. от скоростей углов поворота сечений при изгибе), а также от скоростей производных продольных смещений при изгибе углов  $u_{,x}(x,t)$  и от

скоростей производных прогиба  $w_{,x}(x,t)$ . Кинетическая энергия от смещений  $w(x,t)$  и  $u(x,t)$  пропорциональна погонной плотности стержня  $\rho$ , а кинетическая энергия от производных смещений  $u_{,x}(x,t)$  и  $w_{,x}(x,t)$  (кинетическая энергия связанная с учетом инерции производных от смещений) – пропорциональная неклассической погонной плотности  $\rho_1$ . Очевидно, что величины  $\rho$  и  $\rho_1$  имеют разную размерность, отличающуюся на квадрат длины. Т.е. при динамическом описании поведения масштабозависимых стержней (пластин) имеет еще один масштабный эффект, который был проигнорирован в работе [102]. В результате, если учесть кинематические гипотезы стержней Бернулли, то нетрудно установить, что кинетическая энергия определяется следующим соотношением:

$$\rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 + \rho_1 A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 + \rho_1 I \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x^2} \right)^2$$

где  $F, I$  - площадь сечения и момент инерции сечения стержня соответственно.

В результате, чтобы записать уравнение колебаний в рамках уточненной теории стержней с учетом градиентных когезионных масштабных эффектов следует, в соответствии с принципом Д'аламбера добавить динамические инерционные силы в правую часть уравнения (4.1). Нетрудно убедиться, что уравнение равновесия можно тогда записать в виде:

$$w'''' - \gamma l^2 w^{(6)}(x) = \frac{A}{D} \left( \left( \rho \frac{I}{A} + \rho_1 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_1 \frac{I}{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (4.14)$$

-здесь  $\mu l^2 = (C_1 + 2C_8)$ ,  $E = 2\mu + \lambda$ , – модуль упругости,  $D$  - классическая изгибная жесткость (цилиндрическая жесткость пластин) в случае плоской деформации,  $\alpha = \frac{C_1}{C_8}$ ,  $l$  - масштабный параметр,  $\rho, \rho_1$  - плотность,  $\gamma$  - амплитуда градиентного параметра,  $A$  - площадь поперечного сечения стержня,  $I$  - момент инерции стержня.

Решение уравнения (4.14) в случае граничных условий шарнирного опирания будем искать в виде разложения в ряд в виде одинарного ряда Фурье:

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{i\omega_k t}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{L} \quad (4.15)$$

После подстановки (4.15) в уравнение качества простого примера рассмотрим случай динамического нагружения шарнирно опертых стержней Бернулли при изгибе и учтем только инерционные слагаемые связанные с изгибом. Для этого в полученные ранее уравнения (глава 2) добавляются динамические инерционные члены. Рассмотрим уточненную градиентную теорию изгиба стержней. В этом случае, для динамической задачи изгиба стержня (инерцией осевых смещений сечений пренебрегаем) кинетическая энергия будет зависеть от скоростей поперечных смещений  $w(x,t)$ , от скоростей продольных смещений, связанных с изгибом  $u(x,t)$  (т.е. от скоростей углов поворота сечений при изгибе), а также от скоростей производных продольных смещений при изгибе углов  $u_{,x}(x,t)$  и от скоростей производных прогиба  $w_{,x}(x,t)$ . Кинетическая энергия от смещений  $w(x,t)$  и  $u(x,t)$  пропорциональна погонной плотности стержня  $\rho$ , а кинетическая энергия от производных смещений  $u_{,x}(x,t)$  и  $w_{,x}(x,t)$  (кинетическая энергия связанная с учетом инерции производных от смещений) – пропорциональна неклассической погонной плотности  $\rho_1$ . Очевидно, что величины  $\rho$  и  $\rho_1$  имеют разную размерность, отличающуюся на квадрат длины. Т.е. при динамическом описании поведения масштабозависимых стержней (пластин) имеет еще один масштабный эффект, который был проигнорирован в работе [102]. В результате, если учесть кинематические гипотезы стержней Бернулли, то нетрудно установить, что кинетическая энергия определяется следующим соотношением:

$$\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right)^2 + \rho_1 A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right)^2 + \rho_1 I \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x^2}\right)^2$$

где  $F, I$  - площадь сечения и момент инерции сечения стержня соответственно.

В результате, чтобы записать уравнение колебаний в рамках уточненной теории стержней с учетом градиентных когезионных масштабных эффектов



следует, в соответствии с принципом Д'аламбера добавить динамические инерционные силы в правую часть уравнения (4.1). Нетрудно убедиться, что уравнение равновесия можно тогда записать в виде:

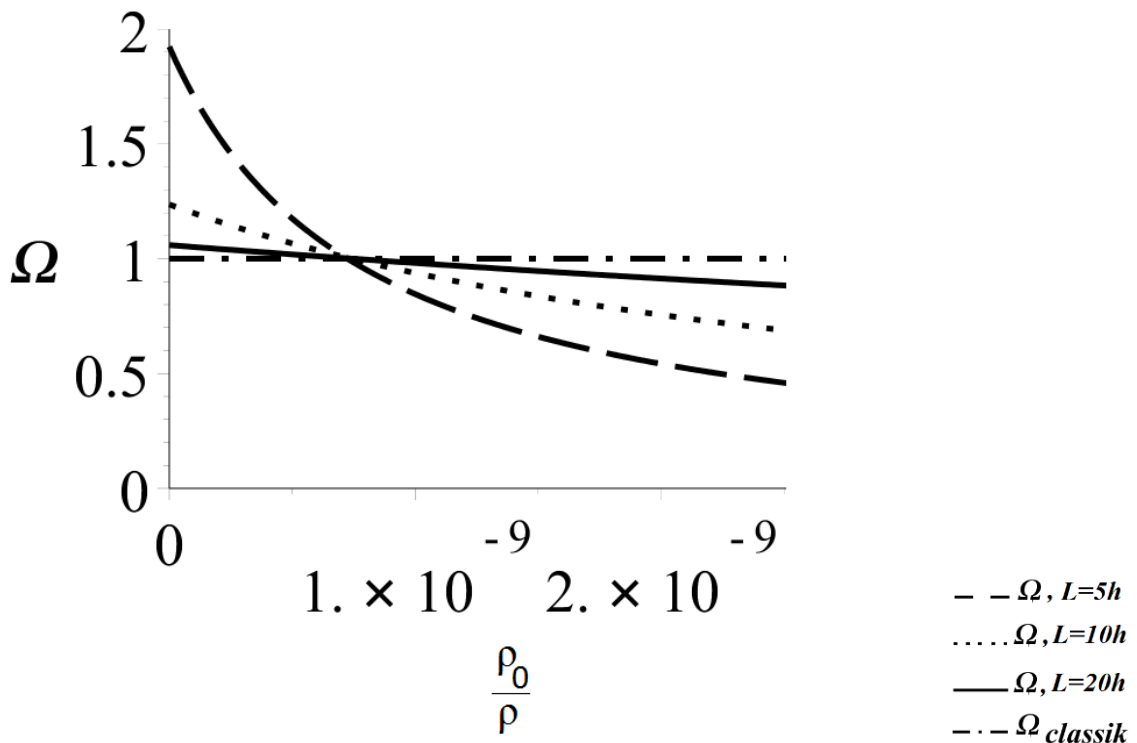
$$w'''' - \gamma l^2 w^{(6)}(x) = \frac{A}{D} \left( \left( \rho \frac{I}{A} + \rho_1 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_1 \frac{I}{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$$

(4.14), найдем выражение для квадрата собственной частоты  $\omega_k^2$ . Пусть в частности  $\frac{I}{A} = h^2 / 12$ . Тогда:

$$\omega_k^2 = \frac{D(\lambda_k)^4(1 + \gamma l^2 (\lambda_k)^2)}{(\rho_1 + \rho \frac{h^2}{12})(\lambda_k)^2 + \rho_1 \frac{h^2}{12} (\lambda_k)^4 + \rho} \quad (4.16)$$

На рисунке 11 представлены зависимости частотного параметра для первой относительной собственной частоты  $\Omega = \frac{\omega_1^2}{\omega_{classic}^2}$  от соотношений  $\frac{\rho_1}{\rho}$ ,  $\omega_{classic}^2$  - квадрат первой собственной частоты классического стержня. Графики построены для следующих параметров [102]:

$$k = 1, \quad l = 17,6 \text{ мкм}, \quad h = l, \quad L = 20h, \quad \mu = \frac{E}{2}, \quad E = 1,44 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0, \quad \rho = 1220 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$



### Рисунок 11 - Сравнение собственных частот в зависимости от соотношений плотностей

Анализ зависимости (4.16) и рисунка 11 показывает, что для таких тонких структур, как масштабозависимые стержни учет влияния скорости изменения кривизин может иметь существенное влияния.

#### 4.6 Колебания пластин Кирхгофа. Антисимметричные волны Лэмба

При исследовании состояния тонкостенных конструкций из ПКМ для авиационной техники методами ультразвуковой дефектоскопии и акустической эмиссии, возникает необходимость в уточнении модели колебаний пластин. Эта потребность диктуется тем, что при возникновении и при локации дефектов в ПКМ каждый дефект имеет свой уникальный амплитудно-частотный спектр, по которому возможно провести мониторинг не только факта возникновения дефекта, определения его координат, времени и энергии, но и идентификацию. К примеру, последовательность появления таких дефектов как межфазное расслоение между волокном и матрицей, расслоение (растрескивание матрицы между слоями) и разрывы волокон может дать не только качественное, но и количественное представление о степени деградации физических свойств исходной конструкции и её остаточной прочности. Задачу идентификации, таким образом, можно разделить на две подзадачи: математическую модель источника акустической эмиссии и математическую модель колебаний пластины от конкретного источника. При апробации математических моделей колебаний обычно пользуются двумя типами имитаторов источников акустической эмиссии. Первый – источник Су-Нильсена, второй – низкоскоростной удар шарика. Первый источник имитирует задание поля начальных прогибов, второй – задание начального поля импульсов.

В данном разделе исследуется практически важное приложение, позволяющее предсказать (построить) осциллограмму датчика перемещений, установленного в заданной точке пластины при возбуждении колебаний пластины источником Су-Нильсена, расположенном в некоторой другой заданной точке пластины.

В упругих средах различают несколько видов волн. В упругих средах различают несколько видов волн. Одна из них – это волна Лэмба – сложная упругая волна, распространяющаяся в упругой среде, образованная комбинацией стоячих и бегущих волн. Название происходит от имени первооткрывателя — Горация Лэмба. Нормальные волны распространяются только в пластинах с толщиной, сопоставимой с длиной волны. В этом случае в пластине возникают сложные резонансные явления, ведущие к образованию стоячих волн.

Нормальная волна состоит из различных мод, движущихся с различной скоростью. Различают симметричные и асимметричные моды нормальной волны. Характерной особенностью нормальной волны является дисперсия — зависимость скорости распространения от длины волны. Скорость движения волны зависит также от толщины пластины.

Можно выделить еще один вид волн – это волны Рэлея. Поверхностные акустические волны. Волны Рэлея распространяются вблизи поверхности твердого тела. Фазовая скорость таких волн направлена параллельно поверхности. Частицы среды в такой волне совершают эллиптическое движение в плоскости, в которой лежат вектор скорости и нормали к поверхности. Амплитуды колебаний затухают при удалении от поверхности по экспоненциальным законам и энергия волны сосредоточена в области на расстоянии порядка длины волны от поверхности.

Третий вид волн, который может представлять практический интерес – это волны Лява. Это упругая волна с горизонтальной поляризацией, которая может быть как объёмной, так и поверхностной. Волны Лява имеют горизонтальную

поляризацию, а именно в однородной изотропной среде смещение частиц в этой волне перпендикулярно вектору скорости.

Рассмотрим пластину Кирхгофа, для которой в соответствии с гипотезами Кирхгофа перемещения постулируются линейными по толщине:

$$U(x, y, z, t) = -w_{,x}(x, y, t)z$$

$$V(x, y, z, t) = -w_{,y}(x, y, t)z$$

$$W(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

В соответствии с гипотезой ненадавливаемости, нормальные напряжения выражаются через прогибы следующим образом:

$$\sigma_{xx}(x, y, z, t) = -\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{(2\mu + \lambda)} w_{,xx} z - \frac{2\mu\lambda}{(2\mu + \lambda)} w_{,yy} z$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z, t) = -\frac{2\mu\lambda}{(2\mu + \lambda)} w_{,xx} z - \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{(2\mu + \lambda)} w_{,yy} z$$

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z, t) = \frac{\lambda}{(2\mu + \lambda)} \nabla^2 w z$$

здесь,  $\lambda$ ,  $\mu$  - коэффициенты Ламе.

Касательное напряжение  $\sigma_{xy}$ :

$$\sigma_{xy}(x, y, z, t) = -2\mu w_{,xy} z$$

Касательные напряжения  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  определяются из уравнений движения:

$$\sigma_{xz}(x, y, z, t) = \left[ \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{(2\mu + \lambda)} \nabla^2 W_{,x} - \rho W_{,xtt} \right] \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right)$$

$$\sigma_{yz}(x, y, z, t) = \left[ \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{(2\mu + \lambda)} \nabla^2 w_{,y} - \rho w_{,ytt} \right] \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right)$$

Нормальное напряжение  $\sigma_{zz}$  определяется из третьего уравнения движения:

$$\sigma_{zz,z}(x, y, z, t) = -\left[ \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{(2\mu + \lambda)} \nabla^2 \nabla^2 w - \rho \nabla^2 w_{,tt} \right] \left( \frac{z^3}{6} - \frac{h^2}{8} z \right) + \rho w_{,tt} z \quad (4.17)$$

Однородные граничные условия на лицевых плоскостях пластины относительно касательных напряжений выполняются тождественно. Однородные граничные условия на лицевых плоскостях пластины относительно нормального напряжения  $\sigma_{zz}$  (4.17) дает динамическое уравнение Софи Жермен:

$$\sigma_{zz,z}(x, y, z, t) = \left[ \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{(2\mu + \lambda)} \nabla^2 \nabla^2 w - \rho \nabla^2 w_{,tt} \right] \frac{h^3}{12} + \rho w_{,tt} \frac{h}{2} \quad (4.18)$$

где  $h$  - толщина пластины.

Рассмотрим далее конкретный пример и для простоты будем рассматривать только цилиндрический изгиб пластины.

В общем случае решение ищется в виде:  $w(x,t) = w_0 e^{i\lambda(x-ct)} = w_0 e^{i\lambda x} e^{i\omega t}$ ,  $\omega = \lambda c$ .

Можем написать:

$$w(x,t) = \cos(\omega t)[w_0 \cos(\lambda_1 x) + w_1 \sin(\lambda_1 x) + w_2 \operatorname{ch}(\lambda_2 x) + w_3 \operatorname{sh}(\lambda_2 x)] = \cos(\omega t)X(x)$$

здесь  $\lambda$  - волновое число,  $\omega$  - круговая частота. Они связаны в соответствии с уравнением (4.18) дисперсионным соотношением:

$$D\lambda^4 - \rho \frac{h^3}{12} \lambda^2 \omega^2 - \frac{h}{2} \rho \omega^2 = 0 \quad (4.19)$$

Из (4.19) можно найти волновые числа:

$$D\lambda^4 - \rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \lambda^2 - \frac{h}{2} \rho \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{\rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \pm \sqrt{\frac{h^6 \omega^4 \rho^2}{144} + 2Dh\rho\omega^2}}{2D}$$

Как следствие, фазовая скорость имеет дисперсию:

$$\omega_{classic} = \lambda \sqrt{\frac{\frac{E}{1-\nu^2}}{(1 + \frac{6}{h^2 \lambda^2})\rho}} \quad (4.20)$$

Дополним уравнение (4.19) адгезионными параметрами:

$$-D\gamma l^2 \lambda^6 + D^* \lambda^4 - 2\delta^F \lambda^2 - \rho \frac{h^3}{12} \lambda^2 \omega^2 - \frac{h}{2} \rho \omega^2 = 0 \quad (4.21)$$

здесь  $\gamma$  - амплитуда градиентного параметра,  $\delta^F$  - «изгибный» адгезионный параметр,  $l$  - масштабный параметр,  $\rho$  - плотность,  $D^* = D + (2\mu^F + \lambda^F) \frac{h^2}{2}$  - жесткость, связанная с адгезионным параметром  $(2\mu^F + \lambda^F)$  поверхностного натяжения.

Тогда из (4.21) найдем выражение круговой частоты как функции волнового числа:

$$\omega = \lambda \sqrt{\frac{-D\gamma l^2 \lambda^4 + D^* \lambda^2 - 2\delta^F}{\left(\frac{h^2 \lambda^2}{6} + 1\right) \frac{h}{2} \rho}} \quad (4.22)$$

Следовательно, отношение дисперсии фазовой скорости, зависящей от градиентных и адгезионных параметров, к классической равно:

$$\Omega = \frac{\omega^2}{\omega_{classic}^2} = \frac{-D\gamma l^2 \lambda^6 + D^* \lambda^4 - 2\delta^F \lambda^2}{D\lambda^4} = -\gamma l^2 \lambda^2 + (1 + 6k_f \left(\frac{l}{h}\right)) - 24 \frac{k_\delta}{h^2} \left(\frac{l}{h}\right) \frac{1}{\lambda^2}$$

где для учета масштабных параметров адгезионных взаимодействий полагаем, что адгезионные характеристики пропорциональны масштабному параметру:  $\lambda^F + 2\mu^F = k_f El$ ,  $\delta^F = k_\delta El$ , где  $k_f$  и  $k_\delta$  - амплитудные коэффициенты.

На рисунке 12 представлен результат сравнения дисперсионного отклонения (4.22) от классического решения ( $\Omega = \frac{\omega^2}{\omega_{classic}^2}$ ). Графики построены для тех же параметров, что использовались ранее [102]:

$$l = 17,6 \text{ мкм}, \quad h = l, \quad L = 20h, \quad \mu = \frac{E}{2}, \quad E = 1,44 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0$$

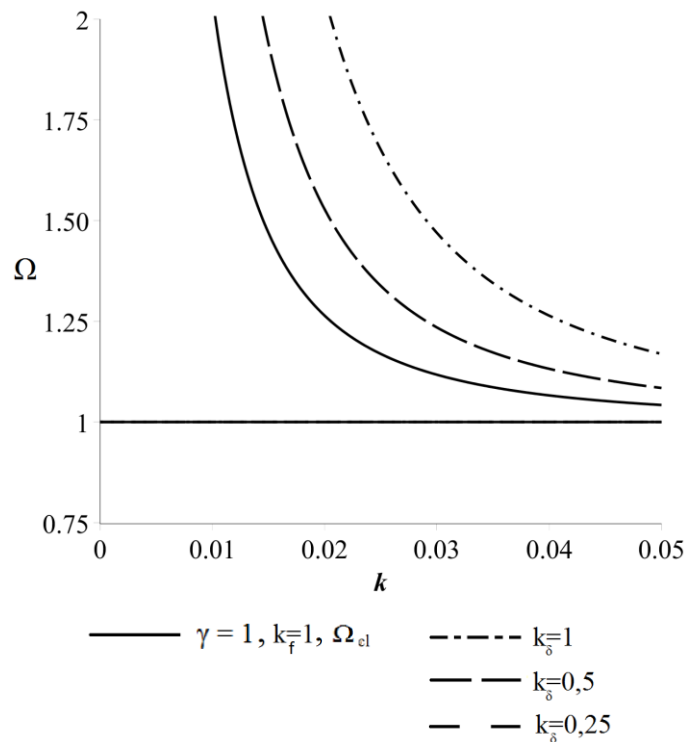


Рисунок 12 – Сравнение круговой частоты разных моделей с классикой

Влияние, вносимое градиентным параметром и адгезионным параметром поверхностного натяжения, практически равно нулю. Эти два параметра не изменяют заметно классическое решение в отличие от «изгибного» адгезионного параметра.

Начальная задача на прогибы имеет простой вид если использовать источник АЭ Су-Нильсена:

$$w(x, 0) = w^*(x)$$

где  $w^*$  - начальные прогибы пластины, которые будут определяться источником АЭ Су-Нильсена.

Пусть пластинка шарнирно оперта по краям  $x=0$ ,  $x=l$ , тогда имея в виду то, что:

$$w(x, t) = \sum_k W_k \cos(\omega_k t) X_k(x), \quad X_k(x) = \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{L} \quad (4.23)$$

Коэффициенты  $W_n$  в (4.23) находятся их начальных условий:

$$w(x, 0) = \sum_k W_k X_k(x) = W^*(x)$$

Найдем  $W^*(x)$ , как решение уравнения изгибы пластинки:

$$D \partial_x^2 \partial_x^2 w(x, y) = P \delta(x - x_0), \quad D = \frac{4\mu(\mu + \lambda) h^3}{(2\mu + \lambda) 12} = \frac{E}{1 + \nu^2} \frac{h^3}{12}, \quad \partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.24)$$

Получаем, что коэффициенты  $W_n$  определяются следующим выражением:

$$w(x, 0) = \sum_k W_k X_k(x) = W^*(x) \quad W_k = \frac{P X_k(x = x_0)}{D k_k^4} = \frac{P \sin(\lambda_k x_0)}{D (\lambda_k)^4} \quad (4.25)$$

Следовательно, после подстановки в (4.23) выражения (4.25), получим:

$$W(x, t) = \frac{P}{D} \sum_k \frac{\sin(\lambda_k x_0)}{(\lambda_k)^4} \cos(\omega_k t) \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{L} \quad (4.26)$$

$$\text{где } \omega_k^2 = \frac{\frac{E}{1 - \nu^2} \frac{h^2}{12} (\lambda_k)^4}{\rho \left( \frac{h^2}{12} (\lambda_k)^2 + 1 \right)}$$

Таким образом, получено выражение, описывающее колебания пластины Кирхгофа от источника Су-Нильсена. Классическую жесткость  $D$  можно

дополнить адгезионными и градиентными параметрами, как это было предложено в главах 2 и 3. То есть уравнение (4.24) переписывается в виде:

$$-\gamma l^2 w^{(6)} + \frac{D^*}{D} w^{(4)} - \frac{2\delta^F}{D} w'' = \frac{P\delta(x-x_0)}{D}, \quad D = \frac{4\mu(\mu+\lambda)h^3}{(2\mu+\lambda)12} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}, \quad \partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.27)$$

Напомним, что  $D^* = D + (2\mu^F + \lambda^F) \frac{h^2}{2}$  - жесткость, связанная с адгезионным параметром  $(2\mu^F + \lambda^F)$  поверхностного натяжения,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\delta^F$  - «изгибный» адгезионный параметр,  $l$  - масштабный параметр.

Следовательно, решение неклассического уравнения колебаний, учитывающее масштабные эффекты первого и второго порядка (4.27) имеет вид:

$$w(x,t) = P \sum_k \frac{\sin(\lambda_k x_0)}{D^*(\lambda_k)^4 + D\gamma l^2 (\lambda_k)^6 + 2\delta^F (\lambda_k)^2} \cos(\omega_k t) \sin(\lambda_k x_s) = \sum_k W_k \cos(\omega_k t),$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{L}, \quad \omega_k = \lambda_k \sqrt{\frac{-D\gamma l^2 \lambda_k^4 + D^* \lambda_k^2 - 2\delta^F}{(\frac{h^2 \lambda_k^2}{6} + 1) \frac{h}{2} \rho}} \quad (4.28)$$

$$W_k = \frac{P \sin(\lambda_k x_0) \sin(\lambda_k x_s)}{D^*(\lambda_k)^4 + D\gamma l^2 (\lambda_k)^6 + 2\delta^F (\lambda_k)^2}$$

Графики построены для следующих параметров [102]:

$$k=1, \quad l=17,6 \text{ мкм}, \quad h=l, \quad L=5h, \quad \mu = \frac{E}{2}, \quad E=1,44 \text{ ГПа}, \quad \nu=0, \quad x_0=0,25L, \quad t=0$$

На рисунке 13 показаны результаты расчета влияния адгезионных и градиентных масштабных параметров.



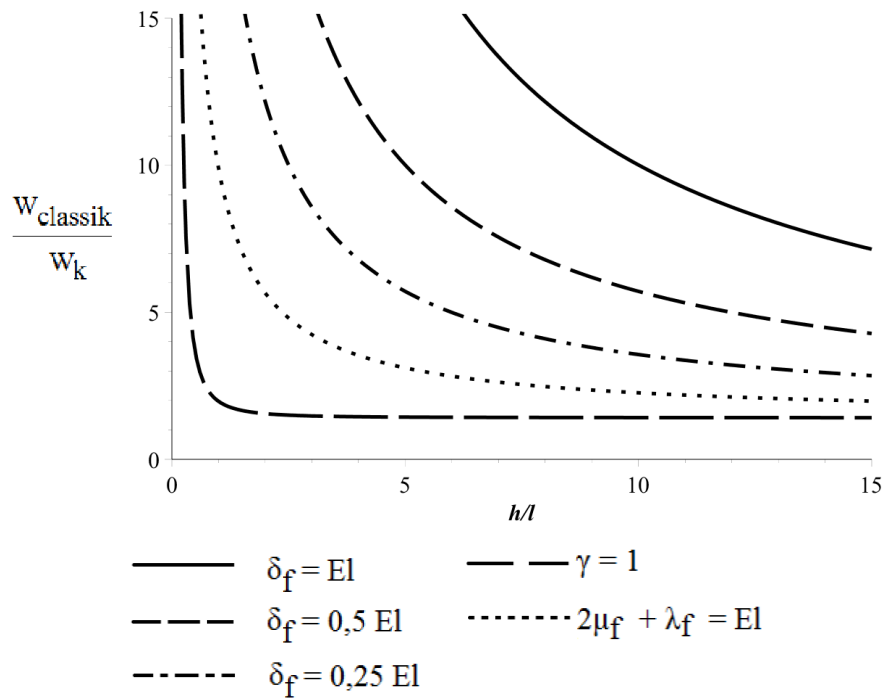


Рисунок 13 – Графики влияния адгезионных и градиентных масштабных параметров на прогиб пластины в сравнении с классическим прогибом

Коэффициенты ряда Фурье в случае исследования распределения волн Лэмба ведут аналогичным образом, как в п. 4.3 и 4.4. Наиболее существенное влияние оказывает адгезионный параметр  $\delta^f$ , который отвечает за адгезионные свойства поверхности, связанные с жесткостью на изгиб.

Для построения следующей группы графиков в (4.26) и (4.28) зададим начальную координату источника  $x_0 = 0,25L$  и координату датчика  $x = x_s = 0,35L$  и построим графики в зависимости от  $t$ , при этом будем использовать следующие параметры для расчетов [102]:

$$l = 0,7 \text{ мкм}, \quad h = 10l, \quad L = 100h, \quad \mu = \frac{E}{2}, \quad E = 1,44 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.$$

На рисунке 14 показаны графики влияния адгезионных параметров на осциллограммы.

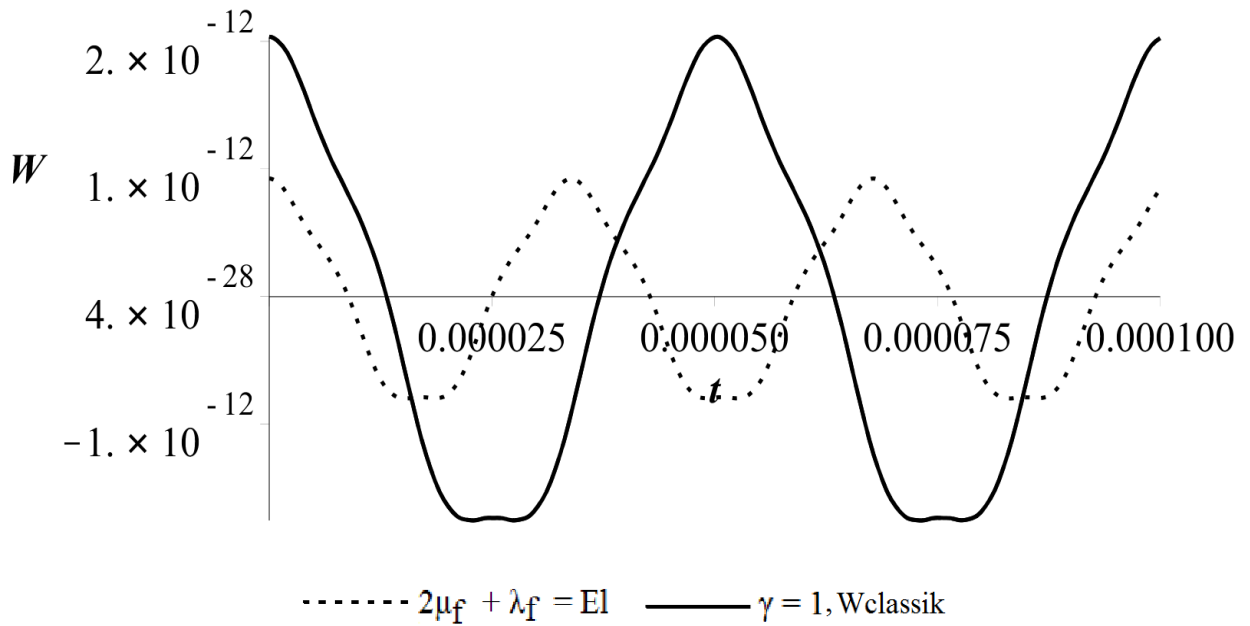


Рисунок 14 – График влияния адгезионных параметров на колебания пластины от источника Су-Нильсена

Анализ рисунка 14 позволяет сделать вывод, что градиентный параметр  $\gamma$  практически не вносит в решение поправок, поэтому график осциллограммы совпадает с классической осциллограммой, в отличие от  $2\mu^F + \lambda^F$  - адгезионного параметра, связанного с поверхностным натяжением, который вносит существенные поправки в график осциллограммы.

#### 4.7 Сравнительный анализ влияния типа заделок на деформирование стержней Бернулли

##### 4.7.1 Классический подход

В качестве примера рассмотрен консольно закрепленный стержень, нагружаемый поперечной распределенной силой  $q$ . Стержень имеет прямоугольное сечение с продольной осью  $Ox$ , длиной  $L$ , толщиной  $h$ , толщиной  $b = 2h$ ,  $0 \leq x \leq L$ ,  $-h \leq y \leq h$ ,  $h \ll L$ ,  $h \ll b$ .

Для начала получим уравнение изгиба в классической постановке. Классическое уравнение, описывающее изгиб такой балки имеет вид:

$$Dw^{(4)}(x) = -q \quad (4.29)$$

где  $D$  – классическая цилиндрическая жесткость балки.

Решение уравнения (4.29) имеет вид:

$$w = \frac{1}{24} \frac{qx^4}{D} + \frac{1}{6} C_{11}x^3 + \frac{1}{2} C_{22}x^2 + C_{33}x + C_{44} \quad (4.30)$$

где  $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}$  - неизвестные константы.

Так как стержень консольно закреплен, то в заделке перемещения и углы поворота будут равны нулю, а на свободном конце равны нулю момент и перерезывающая сила. То есть граничные условия, записанные для такого стержня, имеют вид:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ Dw''(L) = 0 \\ Dw'''(L) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

После подстановки в граничные условия (4.31) соответствующих выражений, полученных из (4.30), путем применения операции дифференцирования, найдем все константы выражения (4.30).

#### 4.7.2 Уравнения неклассической теории стержней

В неклассической теории стержней появляется дополнительный масштабный параметр  $l$ , который описывает поведение сверхтонкой структуры.

Вариационная постановка данного формального подхода (глава 2):

$$\delta U = \int_0^L [N\delta u' - (M + Y)\delta w'' + Q\delta u'' - Z\delta w'''] dx \quad (4.32)$$

Проинтегрируем по частям выражение (4.32):

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_0^L [N \delta u' - (M + Y) \delta w'' + Q \delta u'' - Z \delta w'''] dx = \\
&= N \delta u \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x} \delta u dx - (M + Y) \delta w' \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{\partial(M + Y)}{\partial x} \delta w \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \frac{\partial^2(M + Y)}{\partial x^2} \delta w dx + Q \delta u' \Big|_{x=0}^{x=L} + \\
&- \frac{\partial Q}{\partial x} \delta u \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \delta u dx - Z \delta w'' \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{\partial Z}{\partial x} \delta w' \Big|_{x=0}^{x=L} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \delta w \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} \delta w dx
\end{aligned} \quad (4.33)$$

Из выражения (4.33) получены расширенные граничные условия:

$$(Z' - M - Y) \delta w' \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (M' + Y' - Z'') \delta w \Big|_{x=0}^{x=L} \quad -Z \delta w'' \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (4.34)$$

где усилия из граничных условий (4.34) определяются по формулам:

$$N \equiv \int_A \sigma_{11} dA, \quad M \equiv \int_A \sigma_{11} z dA, \quad Y \equiv \int_A \mu_{112} dA, \quad Q \equiv \int_A \mu_{111} dA, \quad Z \equiv \int_A \mu_{111} y dA$$

Усилие  $Y$  характеризует невязку, возникающую в граничных условиях (4.34). Рассуждая, аналогично Ландау: что раз пластина тонкая, на поверхности касательные напряжения равны нулю, а значит, и внутри касательные напряжения равны нулю. Если усилие  $Y$  оставить в граничных условиях, то тогда возникнет поправка в жесткость стржня, как это было получено в работе [102].

В случае полностью симметричной градиентной теории упругости напряжения и моментные напряжения определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)(u' - yw'') \\
\mu_{111} &= 9C_1(u'' - yw''') + 6C_8(u'' - yw''') \\
\mu_{112} &= C_1(3w'' + 6\theta') + C_8(4\theta' + 2w'').
\end{aligned} \quad (4.35)$$

Используя выражения (4.35) найдем необходимые для вычислений усилия:

$$\begin{aligned}
N &= AEu' \\
Z &= -\alpha Iw''' \\
Z' &= -\alpha Iw'''' , & M &= -Dw'' \\
Z'' &= -\alpha Iw''''' & M' &= -Dw'''
\end{aligned} \quad (4.36)$$

где  $\alpha = (9C_1 + 6C_8)$ ,  $A = bh$  - площадь сечения балки,  $I$  - момент инерции балки.

Уравнения равновесия записываются в следующем виде:

$$-\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad -\frac{\partial^2(M + Y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} = 0$$

Неклассическое уравнение изгиба консоли в этом случае имеет вид:

$$\left[1 + \frac{1}{5} \frac{\mu}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^2\right] w^{(4)} - 5 \frac{\mu}{E} l^2 w^{(6)} = -\frac{q}{D}$$

здесь  $E = 2\mu + \lambda$  – модуль упругости в плоской теории деформаций,  $\mu l^2 = 3C_1$ ,  $\mu$  – модуль сдвига,  $l$  – масштабный параметр.

Решение данного уравнения:

$$w = C_{22} \frac{b^2}{a^2} e^{\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{b}}} + C_{11} \frac{b^2}{a^2} e^{-\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{b}}} - \frac{1}{24} \frac{q}{aD} x^4 + \frac{1}{6} C_{33} x^3 + \frac{1}{2} C_{44} x^2 + C_{55} x + C_{66} \quad (4.37)$$

где  $a = 1 + \frac{1}{5} \frac{\mu}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^2$ ,  $b = 5 \frac{\mu}{E} l^2$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55}$ ,  $C_{66}$  – неизвестные константы.

Так как задача имеет повышенный порядок, то и граничные условия имеют более расширенный спектр условий (4.34). В заделке могут реализовываться так называемые случаи «мягкой» и «жесткой» заделок. Для «мягкой» заделки характерно, что прогиб и угол поворота равны нулю, а для «жесткой» помимо прогиба и угла поворота равны нулю еще и вторая производная от прогиба, то есть кривизна изогнутой оси стержня.

Чтобы оценить влияние заделки на получаемые результаты данным подход следует рассмотреть для двух видов закрепления – «мягкая» и «жесткая» заделки, а также два варианта, когда оставляем и убираем невязку граничных условий ( $Y \neq 0$  и  $Y = 0$ ).

#### 4.7.2.1 «Жесткая» заделка. $Y=0$

Рассмотрим для начала оба варианта закрепления, когда нет невязки граничных условий -  $Y = 0$ .

«Жесткая» заделка характеризуется следующими граничными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w''(0) = 0 \\ Z'(L) - M(L) = 0 \\ M'(L) - Z''(L) = 0 \\ -Z(L) = 0 \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Подставляя в систему уравнений (4.38) найденные ранее выражения для усилий (4.36) и выражения для производных от (4.37), решая систему (4.38), найдем неизвестные константы выражения для прогиба (4.37). В этом случае система (4.38) переписывается в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{22} \frac{b^2}{a^2} + C_{11} \frac{b^2}{a^2} + C_{66} = 0 \\ C_{22} \frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} - C_{11} \frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} + C_{55} = 0 \\ C_{22} \frac{b}{a} - C_{11} \frac{b}{a} + C_{44} = 0 \\ -\alpha I (C_{22} e^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} + C_{11} e^{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} - \frac{q}{EIa}) + D (C_{22} \frac{b}{a} e^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} + C_{11} \frac{b}{a} e^{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EIa} + C_{33} L + C_{44}) = 0 \\ -D (C_{22} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} e^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} - C_{11} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} - \frac{qL}{EIa} + C_{33}) + \alpha I (C_{22} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} e^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} - C_{11} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} e^{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L}) = 0 \\ \alpha I (C_{22} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} e^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} - C_{11} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} L} - \frac{qL}{EIa} + C_{33}) = 0 \end{array} \right.$$

В силу того, что система приобретает громоздкий вид далее не будут приводиться примеры записи через коэффициенты.

#### 4.2.2.2. «Мягкая» заделка. $Y=0$

Теперь рассмотрим вариант, когда убираем невязку граничных условий  $Y=0$  при «мягком» закреплении в заделке. В этом случае граничные условия имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w''(L) = 0 \\ Z'(L) - M(L) = 0 \\ M'(L) - Z''(L) = 0 \\ -Z(0) = 0 \end{array} \right. \quad (4.39)$$

Проделявая аналогичные предыдущему пункту манипуляции: в систему (4.39) подставим усилия (4.36) и найдем константы выражения (4.37).

#### 4.7.2.2 «Жесткая» заделка. $Y$ не равно 0

Рассмотрим случай, когда остается невязка граничных условий  $Y \neq 0$  при «мягкой» и «жесткой» заделках, как в предыдущих случаях.

Граничные условия из (4.33) в случае, когда усилие  $Y$  не равно нулю:

$$(Z' - M - Y)\delta w|_{x=0}^{x=L} \quad (M' + Y' - Z'')\delta w|_{x=0}^{x=L} \quad -Z\delta w''|_{x=0}^{x=L},$$

где усилия  $Y$  найдены и равны:

$$Y = -A(3C_1 + 2C_8)w'' \quad (4.40)$$

Необходимая производная для  $Y$  равна:

$$Y = -A\beta w'', \quad \text{где} \quad \beta = (3C_1 + 2C_8)$$

$$Y' = -A\beta w'''$$

Граничные условия для «жесткой» заделки имеют вид:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w''(0) = 0 \\ Z'(L) - M(L) - Y(L) = 0 \\ M'(L) + Y'(L) - Z''(L) = 0 \\ -Z(L) = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Повторяем процедуру нахождения констант для выражения прогиба (4.37), подставляя в (4.41) усилия (4.36) и (4.40).

#### 4.2.2.4 «Мягкая заделка». $Y$ не равно 0

Теперь найдем чему равен прогиб при «мягком» закреплении, когда  $Y \neq 0$ .

Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w''(L) = 0 \\ Z'(L) - M(L) - Y(L) = 0 \\ M'(L) + Y'(L) - Z''(L) = 0 \\ -Z(0) = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

Подставляя в систему (4.42) выражения (4.36) и (4.40) и выражения для производных от (4.37), найдем необходимые константы выражения (4.37).

Таким образом, получены выражения, описывающие прогиб консольной балки, рассмотрены 4 случая: «мягкая» и «жесткая» заделки при  $Y = 0$  и «мягкая» и «жесткая» заделки при  $Y \neq 0$ . Полученные выражения для констант в каждом случае не приведены так, как имеют громоздкий вид.

### 4.7.3 Уравнения неклассической корректной теории стержней

Так же рассмотрен вариант «мягкой» и «жесткой» заделок, когда  $Y \neq 0$  и  $Y = 0$  в случае корректной аккуратной теории, в которой выражение для прогиба имеет вид:

$$w^4 - \gamma l^2 w^6 = \frac{q}{D} \quad (4.43)$$

здесь  $D$  – классическая цилиндрическая жесткость (изгибная жесткость),

$\gamma = \frac{9+6\alpha}{1+2\alpha} \frac{\mu}{E}$  - градиентный параметр,  $\mu l^2 = 3C_1$ ,  $\mu$  - модуль сдвига.

Решая уравнение (4.43) относительно прогиба, получим:

$$w = C_{22} c^2 e^{\frac{x}{\sqrt{c}}} + C_{11} c^2 e^{-\frac{x}{\sqrt{c}}} - \frac{1}{24} \frac{q}{D} x^4 + \frac{1}{6} C_{33} x^3 + \frac{1}{2} C_{44} x^2 + C_{55} x + C_{66} \quad (4.44)$$

где  $c = \frac{\mu}{E} l^2 \frac{9+6\alpha}{1+2\alpha}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55}$ ,  $C_{66}$  - неизвестные константы.

Для определения констант выражения (4.44) проделана процедура, аналогичная процедуре в п. 4.2.3.

### 4.7.4 Уравнения неклассической некорректной теории стержней

Полученные выше решения сравним с выражением для прогиба, полученным в работе [102]. Оно имеет следующий вид:

$$\left[1 + 3 \frac{\mu}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^2\right] w'''' = \frac{q}{D} \quad (4.45)$$



здесь  $D$  - классическая цилиндрическая жесткость (изгибная жесткость),  $\mu l^2 = 3C_1$ ,  $\mu$  - модуль сдвига.

Решение данного уравнения (4.45) записывается в следующем виде:

$$w = -\frac{1}{24} \frac{qx}{Al^2 + D} + \frac{1}{6} C_{11} x^3 + \frac{1}{2} C_{22} x^2 + C_{33} x + C_{44} \quad (4.46)$$

где  $A = bh$  - площадь сечения балки.

Для определения констант выражения использованы граничные условия как в п. 4.8.1.

#### 4.7.5 Результаты

Все выкладки, проделанные в данной главе, были перенесены в программу Maple 15 и с помощью нее были получены численные значения констант для всех выражений прогиба и построены графики, представленные на рисунках 15-17. На графиках изображены следующие результаты выражений (4.30), (4.37), (4.44), (4.46).

В процессе вычисления были использованы следующие параметры [102]:

$$E = 1,44 \text{ ГПа}, \quad l = 17,6 \text{ мкм}, \quad h = l, \quad b = 2h, \quad L = 20h, \quad \mu = \frac{E}{2}, \quad \nu = 0, \quad \alpha = 1, \quad J = \frac{bh^3}{12}, \quad A = bh$$

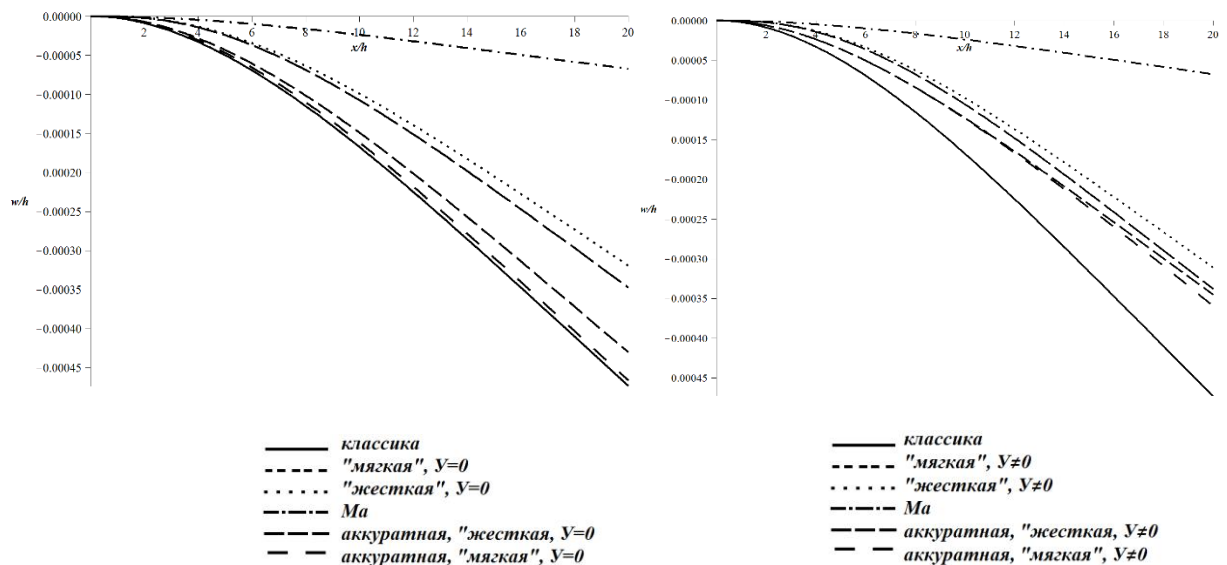
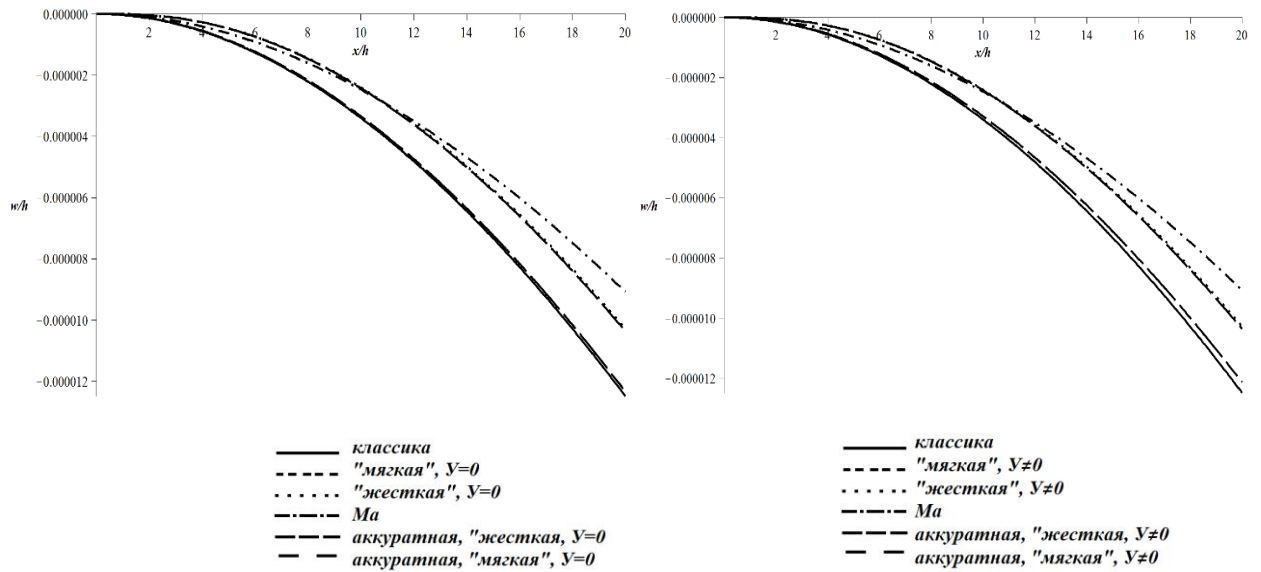
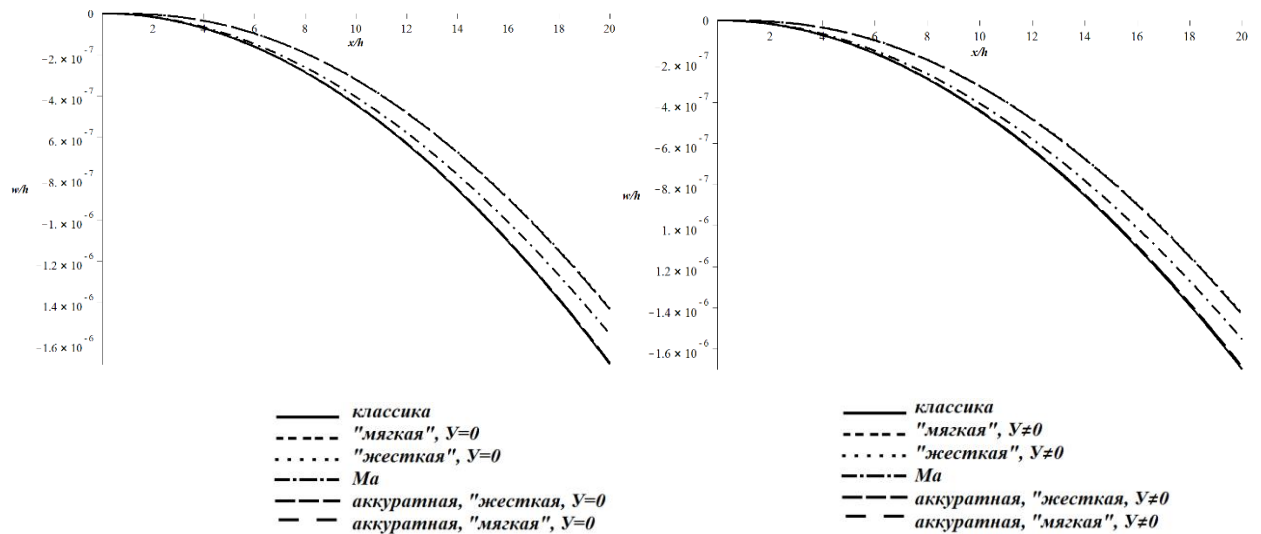


Рисунок 15 – Прогиб балки толщиной  $h=1$

Рисунок 16 – Прогиб балки толщиной  $h=4l$ Рисунок 17 – Прогиб балки толщиной  $h=8l$ 

Анализ представленных выше графиков позволяет сделать вывод, что для тонких структур, когда масштабные эффекты играют большую роль, также имеет большое значение и способ закрепления. Способ закрепления настолько сильно вносит поправку в деформирование тонких структур, что может своими эффектами полностью нейтрализовать влияние масштабных эффектов, что

говорит том, следует пересмотреть систему экспериментов тонких стержней. Наиболее предпочтительно использовать эксперименты с шарнирным опиранием для тонких стержней потому, что в этом случае жесткость заделки не будет оказывать влияние на деформирование стержня.

Влияние невязки в граничных условиях вносит поправки в жесткость стержней, что было получено другими авторами в работах [102, 103] и представляется нам ошибочным результатом.

#### **4.8 Моделирование эффективной изгибной жесткости масштабозависимых стержней. Идентификация масштабных параметров по результатам эксперимента**

Известна зависимость эффективных жесткостей от толщины. Такие результаты были получены в ряде экспериментов другими авторами [96, 97, 102, 103, 112-115]. В этих работах приведены подробные описания проводимых экспериментов и полученные результаты. Ранее в работах [96, 97, 102, 103] для объяснения этих эффектов привлекались градиентные модели упругости. В такой ситуации масштабные параметры могли быть определены непосредственно из эксперимента. В качестве примера укажем, что в работах [112, 113] параметры масштаба  $l$  находились путем сравнения с экспериментальными данными, полученными для консольных стержней. При этом модуль упругости в соответствии с решением, полученным по градиентной теории упругости, определялся по следующей зависимости:

$$E^* = E(1 + 6(\frac{l}{h})^2) \quad (4.47)$$

где  $E$  - классический модуль упругости испытываемого материала,  $l$  - масштабный параметр,  $h$  - толщина исследуемых стержней.

Например, для стержня из эпоксидного связующего было получено, что  $l = 1,4 \text{ мкм}$ , а модуль упругости  $E = 4 \text{ ГПа}$ .

Однако, результаты определения зависимости эффективного модуля от толщины и результаты экспериментов должны быть пересмотрены по двум причинам:

- показано было ранее, что оценка эффективных модулей проводилась на основе решений, построенных стандартным вариационным путем с помощью метода гипотез и с привлечением градиентных теорий, не удовлетворяющих критериям корректности.

- эксперимент на консольных стержнях требует уточнения, если используются градиентные теории и может приводить к неоднозначным результатам (п. 4.7).

Более корректно использовать в качестве эксперимента методику определения свойств, основанную на исследовании шарнирно-опертых стержней. В этой ситуации, когда стержень нагружен сосредоточенной силой в середине пролета, половина такой системы соответствует изгибу консольного стержня, поэтому вопросы реализации «жесткой» или «мягкой» заделки отпадает.

В соответствии с этим будем использовать решение, полученное для шарнирно опертой балки, нагруженной силой в середине пролета для оценки эффективной жесткости. Так как длина образцов для эксперимента превышает толщину стержней примерно в 10-20 раз, то в представлении прогибов в виде рядов по системам функций  $\sin(\frac{\pi kx}{L})$ . В первом приближении достаточно ограничиться первым слагаемым, тогда эффективную жесткость можно по жесткости первой формы изгиба  $\sin(\frac{\pi x}{L})$ . Отсюда сразу следует, что эффективная жёсткость определяется соотношением (4.10):

$$E^* = E[\tilde{k}_\gamma \pi^2 (\frac{1}{L})^2 + 1 + 6\tilde{k}_f (\frac{1}{h}) + 24 \frac{\tilde{k}_\delta}{\pi^2} (\frac{1}{h})(\frac{L}{h})^2] \quad (4.48)$$

Где  $\tilde{k}_\gamma = k_\gamma l^2$  - градиентный масштабный параметр,  $\tilde{k}_f = k_f l$  - масштабный параметр поверхностного натяжения,  $\tilde{k}_\delta = k_\delta l$  - «изгибный» масштабный параметр,  $h$  - толщина стержня,  $L$  - длина стержня.

Отметим, что  $k_f, k_\delta$  является безразмерными величинами,  $k_f, k_\delta$  - поверхностные модули, а  $k_\gamma$  - градиентный модуль (размерных модуль). Отметим, что для  $n$ -ной моды изгиба эффективную жёсткость можно определить:

$$E^* = E[\tilde{k}_\gamma k^2 \pi^2 (\frac{1}{L})^2 + 1 + 6\tilde{k}_f (\frac{1}{h}) + 24 \frac{\tilde{k}_\delta}{k^2 \pi^2} \frac{1}{h} (\frac{L}{h})^2] \quad (4.49)$$

здесь  $k$  - число полуволн.

Из формулы (4.48) сразу следует, что только параметр  $k_f$  может описывать эффект увеличения изгибной жесткости, инвариантных по отношению к длине и толщине балки. В работе [114] этот параметр принимается равным параметру  $l$ . Параметры же  $k_\gamma, k_\delta$  определяют зависимость изгибной жесткости от длины балки, что не физично. Более того, как показывает уточнённая модель (4.10), градиентный параметр не дает никакой зависимости от толщины. Однако параметры  $k_\gamma, k_\delta$  могут оказаться существенными при оценке динамических характеристик, так как влияют на жёсткость  $k$ -той моды в случае, если длина полуволны порядка толщины балки. Это сразу видно из формулы (4.49), если принять, что  $k$  порядка  $\frac{L}{h}$ , тогда  $k_\delta, k_\gamma$  может давать такой же вклад, как  $k_f$ . Отметим, что такие оценки являются весьма приближенными, даже очень приближенными, так как на таких длинах волн существенны трехмерные эффекты.

Используем экспериментальные данные для определения  $k_f$  из работы [115]. В таблице 1 приведены результаты измерения модуля упругости стержней на эпоксидном связующем.

Таблица 1 – Данные эксперимента [115]

Длина [мкм]	Ширина [ мкм]	Толщина, t [мкм]	E [Гпа]		
80	82	8,4	4,62		
160			4,71		
164			5,64		
176			6,36		
200			7,59		
240			5,18		
430			7,02		
430			7,62		
403			6,85		
416			7,06		
485			7,37		
135			122	14,4	4,08
139	3,65				
270	4,52				
273	4,74				
405	4,93				
408	5,0				
534	4,99				
540	5,24				
675	6,07				
679	5,62				
810	6,75				
817	6,88				
110	81	24,2			4,58
248					4,88
435			4,49		
375			4,99		

590			5,05
530			4,7
454	120	24,2	4,05
471			4,83
443			3,12
455			3,07
456			3,76
369			5,52
535			3,5
370	64	39	4,24
328			4,24
373	86	39	3,32
535			3,91
512			3,47
540	124	39	4,41
763			4,01
768			4,5
979			3,59
600			4,37
920			4,38

Используя метод наименьших квадратов — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомым переменных. Он может использоваться для «решения» переопределенных систем уравнений (когда количество уравнений превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных (не переопределенных) нелинейных систем уравнений, для аппроксимации точечных значений некоторой функции.

Как было указано ранее, только масштабный параметр  $\tilde{k}_f = k_f l$  объясняет аномальные эффекты увеличения жесткости стержней, поэтому формулу (4.48) перепишем и найдем с помощью метода наименьших квадратов значение  $\tilde{k}_f$ :

$$E^* = E[1 + 6\tilde{k}_f(\frac{1}{h})] \quad (4.50)$$

В итоге было получено, что  $\tilde{k}_f = 0,7256$ . То есть (4.50) Перепишется в связи с найденными данными следующим образом:

$$E^* = 4[1 + 6 \cdot 0,7256(\frac{1}{h})] \quad (4.51)$$

Найденная функция прекрасно ложится в диапазон эксперимента, как показано на рисунке 18. На этом рисунке квадратиками ( $\square$ ) изображены точки, измеренные в ходе эксперимента, а плюсами ( $+$ ) – найденная функция.

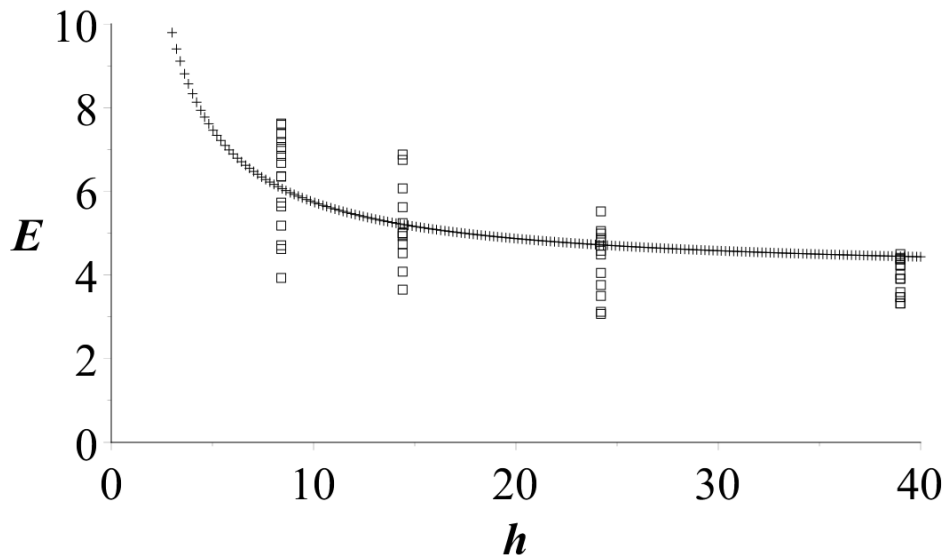


Рисунок 18 – Экспериментальные точки и функция, описывающая влияние масштабного параметра на жесткостные свойства стержней

В результате найдено значение  $\tilde{k}_f = k_f l$ , которое позволяет определить модуль поверхностного натяжения на лицевых поверхностях  $(\lambda^F + 2\mu^F)$ :

$$\lambda^F + 2\mu^F = E\tilde{k}_f = 4 \cdot 0.7256 = 2.9 \frac{kH}{м}$$

Для сравнения найдем  $l$  по формуле (4.47) [115], который использовался авторами в других работах. Также с помощью метода наименьших квадратов



было найдено следующее значение  $l = 1,4 \text{ мкм}$ . Таким образом, формулу (4.47) можно записать:

$$E^* = E(1 + 6(\frac{1,4}{h})^2) \quad (4.52)$$

На рисунке 19 представлены зависимости, определенные по формулам (4.51) и (4.52). Здесь, как и ранее, квадратиками ( $\square$ ) изображены точки, измеренные в ходе эксперимента, а плюсами (+) – найденная функция по формуле (4.51), а точками – функция по формуле (4.52).

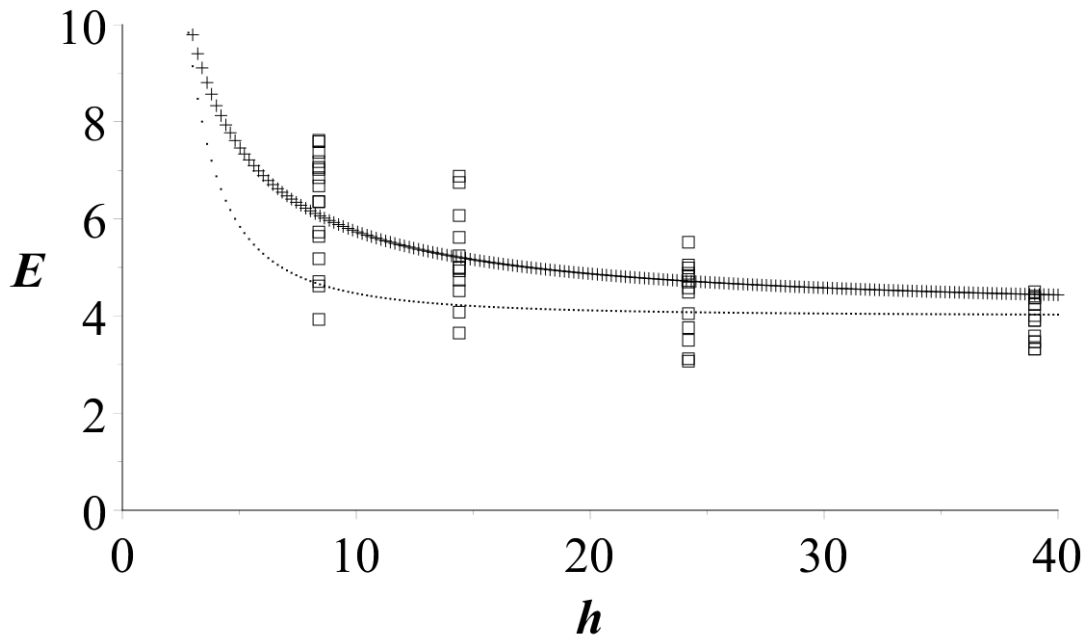


Рисунок 19 – Сравнение функций, определяющих жесткостные свойства стержней

Как было показано в работах выше масштабные эффекты проявляются для разных материалов. Но влияние адгезионных масштабных эффектов так же попадает диапазон полученных результатов. С точки зрения построения прикладной модели для расчета тел с учетом масштабных эффектов полученная полностью симметричная теория (главы 2 и 3) не имеет противоречий и подходит для описания поведения тонких стержней и пластин. Учет адгезионных параметров оказывает более существенное влияние. Полученные экспериментальные данные описываются влиянием адгезионных поверхностных эффектов.

## 4.9 Заключение

В 4 главе получены численные результаты, иллюстрирующие влияние масштабных параметров на деформирование тонких стержней. В случае шарнирно опертого стержня представлены графики зависимости прогиба и частоты собственных колебаний от масштабных параметров. Рассмотрена задача определения частотных характеристик в задаче Лэмба. В случае консольно закрепленного стержня показаны результаты влияния заделки.

Показано на примерах, что аномальное увеличение эффективной жесткости для сверхтонких стержней (пластин), связано с масштабными поверхностными эффектами, а не с масштабными когезионными эффектами как это считалось ранее.

Такой вывод имеет фундаментальный характер. Во-первых, он показывает, что формальное применение вариационного подхода со стандартной кинематикой теории стержней для градиентной теории при выводе уравнений прикладной теории стержней может приводить к ошибочным результатам. Т.е. использование вариационного подхода требует дополнительного анализа и самой градиентной теории, и краевых условий. Во-вторых, выяснение и уточнение физических причин аномального увеличения эффективной жесткости для масштабозависимых стержней ставит новый класс проблем, возникающих при исследовании устойчивости, анализе волновых свойств и пр. сверхтонких масштабозависимых систем. Таким образом показана необходимость в уточненном изучении таких задач, что связано уточнением функциональных свойств масштабозависимых систем и с широким спектром их возможных приложений.

Наконец показано, что уточненная теория позволяет качественно хорошо описывать известные экспериментальные данные. Более того, использование соответствующих экспериментальных результатов для различных материалов позволяет решать проблему идентификации масштабных параметров модели (материала). Это было продемонстрировано в последнем разделе четвертой главы.

## ВЫВОДЫ

Проведение данной исследовательской работы обусловлено непрерывно возрастающей потребностью в разработке нано- и микроструктурных элементов в таких отраслях как микроэлектроника, высокоточная аппаратура и биологические системы. В связи с недостаточной точностью стандартной математической модели расчета характеристик стержней и пластин в применении к нано- и микросистемам в данной работе предлагается использовать градиентные модели. Произведен обзор следующих наиболее популярных на текущий момент математических моделей: модель классической теории упругости, модель дефектной среды, модель среды Аэро-Кувшинского и модель бездефектной среды Миндлина-Тупина. Выявлен ряд достоинств и недостатков каждой модели в применении к расчетам характеристик нано- и микросистем. На основании данного анализа выявлена наиболее приемлемая для данных расчетов модель, а именно модель Миндлина-Тупина.

В работе проведен поиск необходимых и достаточных критериев корректности этой модели. Помимо двух (условие потенциальности  $C_{ijkl} = C_{klij}$ ,  $C_{ijklmn} = C_{lmnij}$  и условие симметрии по первой паре индексов  $C_{ijklmn} = C_{jklmni}$ ) используемых в исследованиях западных коллег критериев корректности была доказана необходимость введения третьего специфического условия корректности (условие независимости от порядка дифференцирования, то есть симметрия по второму-третьему и пятому-шестому индексам  $C_{ijklmn} = C_{ijklmn}$ ).

Был разработан собственный математический аппарат расчета характеристик выше указанных систем с учетом адгезионных параметров. Было показано, что данный аппарат полностью укладывается во все три критерия корректности математической модели. Тем самым, независимым путем была показана применимость модели с учетом адгезионной активности поверхности к расчету характеристик нано- и микросистем. С использованием выведенного математического аппарата было решено несколько практических задач. Было показано полное соответствие результатов теоретических исследований с результатом экспериментов. По ходу работы было установлено, что адгезионные

параметры вносят в поведение системы более значительный вклад нежели градиентные. При этом влияние данных параметров не ограничивается показателями деформаций, но также проявляется не менее значительно на частотных характеристиках системы.

Помимо этого, была доказана несостоятельность общепринятого подхода к проведению исследований с консольным закреплением стержня для рассматриваемого масштаба систем по причине сложности измерения жесткости заделки, которая может сильно повлиять на вклад масштабных параметров в результаты эксперимента. Предлагается вместо данного подхода использовать шарнирное опирание.

Цели и задачи, поставленные в рамках данной работы, полностью достигнуты и выполнены. Результатом работы является новая вариационная модель и новый подход к решению задач с масштабозависимыми параметрами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Casimir H.B.G. Note on the conduction of heat in crystals // *Physica*. 1938. V. 5. pp. 495-500.
2. Hall E.O. The Deformation and Ageing of Mild Steel: III Discussion of Results // *Proc. Phys. Soc. London*. 1951. V. 643. pp. 747-753.
3. Petch N.J. The Cleavage Strength of Polycrystals // *J. Iron Steel Inst. London*. 1953. V. 173. pp. 25-28.
4. Griffith A. The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Ro. Soc. London. A*. 221. 1921. pp. 163–198.
5. Korobeynikov S.N. Nonlinear equations of deformation of atomic lattices // *Archive of Mechanics*. 2005. 57. №6. pp. 435-453.
6. Korobeynikov S.N. The numerical solution of nonlinear problems on deformation and buckling of atomic lattices // *International Journal of Fracture*. 2004. V. 128. №1. pp. 315-323.
7. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Chentsov A.V., Starikov S.V., Stegailov V.V. Norman G.E. To description of mechanical properties of nanotubes. Tube wall thickness problem. Size effect // *Preprint of Institute for problems in mechanics №937. Russian Acad. Sci. Moscow* 2010.
8. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // *Докл. АН*. 2001. Т. 381. №3. С. 825-827.
9. Поверхностные слои и внутренние границы раздела в гетерогенных материалах / отв. ред. В. Е. Панин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т физики прочности и материаловедения. - Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006. 520 С.
10. Sevostianov I., Kachanov M. Effect of interphase layers on the overall elastic and conductive properties of matrix composites. Applications to nanosize inclusion // *Int. J. Sol. Struct.* 2006. V. 44. Is. 3-4. pp. 1304-1315.
11. Вильчевская Е.Н., Филиппов Р.А., Фрейдин А.Б. О переходных слоях в композитных материалах как областях новой фазы // *Изв. РАН. МТТ*. 2013. №1. С. 113-144.

12. Лурье С.А., Тучкова Н.П. Континуальная модель адгезии для деформируемых твердых тел и сред с наноструктурами // Композиты и наноструктуры. 2009. Т. 2. №2. С. 25-43.
13. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Nanomechanical modeling of the nanostructures and dispersed composites // Int. J. Comp. Mater. Sci. 2003. V. 28. №3-4. pp. 529-539.
14. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // J. Mater. Sci. 2006. V.41. №20. pp. 6693-6707.
15. Cabeon. 1629. *Philosophia Magnetica*, Ferrara. Lib. II. Cap. 20 (см. Shuttleworth. 1950. Proc. Phys. Soc. A. №63).
16. Segnerj A. 1751. *Comment. Soc. Reg. Gott.* 1. 301 (см. Parkash and P.L.Kapur. 1950. Proc. Phys. Soc. A. №63. pp. 457).
17. Young T. 1805. *Collected Works.* 1. 418. (см. *Philosophical Magazine A*, V. 78. Issue 5 November 1998. pp. 1093 – 1109).
18. Laplace S. 1806. *Mecanique celeste.* 10. (см. *Molecular theory of capillarity.* J. S. Rowlinson, B. Widom. 1982).
19. Poisson S. D. *Memoire sur l'equilibre et du mouvement des corps elastiques* // *Memoires de l'Academie des sciences de Paris.* 1829. V. 8. pp. 357-570.
20. Gauss C. F. 1830. *Werke.* 5. 31. (см. *The determination of Gauss:* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)/ V. 7. № 2. pp. 441-441).
21. Gibbs J.W. *On the Equilibrium of Heterogeneous Substances* in: *The Collected Works of J. Willard Gibbs* (Longmans. Green & Co. New York. 1928). pp. 55–353.
22. Shuttleworth R., 1950. *The surface tension of solids.* Proc. Phys. Soc. A 63. pp. 444–457.
23. Herring C. 1953. *The use of classical macroscopic concepts in surface energy problems.* In: Gomer R., Smith C.S. (Eds.), *Structure and Properties of Solid Surfaces.* The University of Chicago. Press. Chicago. pp. 5–81.

24. Orowan E. 1970. Surface energy and surface tension in solids and liquids. Proc. R. Soc. London. A316. pp. 473–491.
25. Cammarata R.C. 1994. Surface and interface stress effects in thin films. Prog. Surf. Sci. 46. pp. 1–38.
26. Gurtin M.E., Murdoch, A.I., 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. Arch. Ration. Mech. A. 57. pp. 291–323.
27. Gurtin M. E. and Murdoch A. I. 1978. Surface Stress in Solids. International Journal of Solids and Structures. 14(6). pp. 431–440.
28. Povstenko Y.Z. 1993. Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids. J. Mech. Phys. Solids 41. pp. 1499–1514.
29. Miller R.E., Shenoy V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. Nanotechnology. 11. pp. 139–147.
30. Bottomley D.J., Ogino T. 2001. Alternative to the Shuttleworth formulation of solid surface stress. Phys. Rev. B63. 165412-1–165412-5.
31. Белов П.А., Лурье С.А. Теория идеальных адгезионных взаимодействий, Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Том 13. №3.
32. Sharma P., Ganti S., Bhate N., 2003. Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nanoinhomogeneities. Appl. Phys. Lett. 82. pp. 535–537.
33. Benveniste Y., Miloh T. 2001. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. Mech. Mater. 33. pp. 309–323.
34. Hashin Z. 2002. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. J. Mech. Phys. Solids. 50. pp. 2509–2537.
35. Wang J., Duan H.L., Zhang Z., Huang Z.P. 2005. An anti-interpenetration model and connections between interphase and interface models in particle-reinforced composites. Int. J. Mech. Sci. 47. pp. 701–708.
36. Benveniste Y. 2006. A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. J. Mech. Phys. Solids. 54. pp. 708–734.
37. Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. Метод вычисления поверхностной энергии и энергии адгезии упругих тел // Вестник Пермского

НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
Механика. 2013. № 1. –С. 235 – 259.

38. Ibach H. 1997. The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures. *Surf. Sci. Rep.* 29(5–6). pp. 193–263.
39. Cuenot S., Frertigny, C. Demoustier-Champagne, S. Nysten, B. 2004. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev.* B69. pp. 165410.
40. Diao J.K., Gall K., Dunn M.L. 2004. Atomistic simulation of the structure and elastic properties of gold nanowires. *J. Mech. Phys. Solids* 52. pp. 1935–1962.
41. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2005. Eshelby formalism for nano-inhomogeneities. *Proc.R. Soc. A*461. pp. 3335–3353.
42. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2005. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress. *J. Mech. Phys. Solids.* 53. pp. 1574–1596.
43. Shenoy V.B. 2005. Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces. *Phys. Rev.* B71. pp. 094-104.
44. P. Sharma, S. Ganti. Size-Dependent Eshelby’s Tensor for Embedded Nano-Inclusions Incorporating Surface. Interface Energies *Journal of Applied Mechanics.* 2004. V. 71. pp. 663-671.
45. Zhou L.G., Huang H.C. 2004. Are surfaces elastically softer or stiffer? *Appl. Phys. Lett.* 84. pp. 1940–1942.
46. Murdoch A.I. 1976. Thermodynamical theory of elastic-material interfaces. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 29. pp. 245–275.
47. Murdoch A.I. Some fundamental aspects of surface modeling // *J. of Elasticity.* 2005. V. 80. pp. 33-52.
48. Подстригач Я. С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах / Киев: Наук. Думка. 1985. 200с.
49. Müller P., Saul A. Elastic effects on surface physics // *Surf. Sci. Rep.* 2004. V.54. pp. 157-258.



50. Altenbach H., Eremeyev V.A., Morozov N.F. Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale // *Int. J. Engineering Sci.* 2012. V. 59. pp. 83-89.
51. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses // *ZAMM.* 2010. V. 90. № 3. pp. 231-240.
52. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the shell theory on the nanoscale with surface stresses // *Int. J. Engineering Sci.* 2011. V. 49. № 12. pp. 1294-1301.
53. Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф. О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // *Докл. АН.* 2009. Т. 424. № 5. С. 618-620.
54. Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // *Докл. РАН.* 2009. Т. 429. № 4. С. 472-476.
55. Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Об эффективной жесткости нанопористого стержня // *Докл. АН.* 2010. Т. 432. № 4. С. 473-476.
56. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф. Некоторые задачи наномеханики // *Физ. мезомех.* 2013. Т. 16. № 4. С. 67-73.
57. Grekov M.A., Morozov N.F. Surface effects and problems of nanomechanics // *J. Ningbo university (NSEE).* V. 25. N. 1. 2012. pp. 60-63.
58. Викулина Ю.И., Греков М.А. Напряженное состояние плоской поверхности упругого тела нанометрового размера при периодическом силовом воздействии // *Вестн. С.-Петербур. ун-та. Серия: Математика, механика астрономия.* Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2012. Вып. 4. 72-80.
59. Grekov M.A., Vikulina Yu.I. Effect of a type of loading on stresses at a planar boundary of a nanomaterial // *Surface Effects in Solid Mechanics. Advanced Structured Materials 30*, H. Altenbach and N. F. Morozov (eds.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2013. P. 69-79.
60. Wang, J., Duan, H.L., Huang, Z.P. and Karimloo, B.L. A scaling law for properties of nano-structured materials. *Proceedings of the Royal Society.* 2006. A462. pp. 1355-1363.

61. Duan, H.L., Yi, X., Huang, Z.P. and Wang, J. A unified scheme for prediction of effective moduli of multi-phase composites with interface effects: Part II — application and scaling laws. *Mechanics of Materials*. 2007. 39. pp. 94-103.
62. Palla, P.L., Giordano, S. and Colombo, L. Lattice model describing scale effects in nonlinear elasticity of nanoinhomogeneities. *Physical Review B*. 2010. 81: Art. pp. 214113.
63. Zhang T.-Y., Wang Z.J. and Chan W.K. Eigenstress model for surface stress of solids. *Physical Review B*. 2010. 81: Art. pp. 195427.
64. Chen X.L., Ma H.S., Liang L.H. and Wei Y.G. A surface energy model and application to mechanical  $\left[ \begin{smallmatrix} \text{I} \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$  behavior analysis of single crystals at sub-micron scale. *Computational Materials Science*. 2009. 46. pp. 723-727.
65. Wang G.F., Feng X.Q., Wang T.J. and Gao W. Surface effects on the near-tip stresses for mode-I and mode-III cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 2008. 75: Art. 011001.
66. Kim C.I., Schiavone P. and Ru C.Q. The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode-III crack: complete solution. *Journal of Applied Mechanics*. 2010. 77: Art. 021011.
67. J. Wang et al. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. Vol. 24. №1. pp. 52-83.
68. П. А. Белов, С. А. Лурье. Континуальная теория микрогетерогенных сред. *Прикладная математика и механика*. Т. 73 Вып. 4, 2009. С.833-848.
69. Белов П.А., Лурье С.А. К общей теории дефектных сред // *Физ. Мезомеханика*. 2007. Т. 10. №6. С. 49–61.
70. Ерофеев В.И., Леонтьев Н.В., Павлов И.С. Математическая модель для исследования нелинейных волновых процессов в двумерной зернистой среде из сферических частиц // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2013. №3. С.299-308
71. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой // М.: Изд-во Моск. ун-та. 1999. 328 С.

72. Aifantis E.C. On the microstructural origin of certain inelastic models // *Trans ASME. J. Engng. Mat. Tech.* No. 106. 1984. pp. 326-330.
73. Aifantis E.C. The physics of plastic deformation // *Int. J. Plasticity*, No. 3. 1987. pp. 211-247.
74. Aifantis E.C. On the role of gradient in the localization of deformation and fracture // *Int. J. Engng. Sci.*, No. 30. 1992 pp. 1279-1299.
75. Ru C.Q. Ru and Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity // *Acta Mech.* No. 101. 1993. pp. 59-68.
76. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity // In: Hutchinson J.W., Wu, T.Y. (Eds.), *Advances in Applied Mechanics*. V. 33. Academic Press. New York. 1997. pp. 295-361.
77. Gao X.-L., Park S.K. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // *Int. J. Solids Struct.* 2007. V. 44. pp. 7486–7499.
78. Forest S. and Aifantis E.C. Some links between recent gradient thermo-elasto-plasticity theories and the thermodynamics of generalized continua // *Int. J. Solids Struct.* No. 47. 2010. pp. 3367-3376.
79. Askes H. and Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics an overview of formulations, length, scale identifications procedures, finite element implementation procedures and new results // *Int. J. Solids Struct.* No. 48. 2011. pp. 1962–1990.
80. Белов П.А., Лурье С.А. Математическая теория дефектных сред. Градиентные теории упругости, Формулировки. Иерархия. Сравнительный анализ. Приложения // *Palmarium Academic Publishing*. 2014. 337 С.
81. Лурье С.А. Белов П.А. 2005. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с "двойникованием". Сборник трудов конференции "Современные проблемы механики гетерогенных сред". Изд. ИПРРИМ РАН. С. 235-268.

82. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites. *Int. J. Comp Mater Sci.* 2005. A. V.36(2). pp. 145-152.
83. Волков-Богородский Д.Б., Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И., Лурье С.А. Численно-аналитический учет масштабных эффектов при расчете деформаций нанокompозитов с использованием блочного метода мультиполей // *Вычислительная математика и математическая физика*, 2006, т.46. №7. С.1318-1337.
84. Lurie S.A., Belov P.A. 2008. Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations. *Int. J. Fract.* 50(1-2). pp. 181-194.
85. Lurie S., Volkov-Bogorodsky. D, Zubov V., Tuchkova N. Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites. *Computational Materials Science.* 45(3). 2009. pp. 709-714.
86. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная модель микрогетерогенных сред. *ПММ.* 73 (5). 2009. С. 833-848.
87. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная теория адгезионных взаимодействий повреждённых сред. *МКМК.* 2009. 15(4). С. 610-629.
88. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости. *МТТ. Изв. РАН.* 2010. №4. С. 182-192.
89. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // *Физика твердого тела.* 1960. Т. 2. С. 1399-1409
90. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. 1962. *Arch. Ration. Mech. And Analysis.*
91. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964. V. 16. pp. 51-78.
92. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 1968. V. 4. pp. 109-124.

93. Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory of elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 2002. №39. pp. 2731-2743.
94. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructured materials. In: *One hundred years after the Cosserats. Series: Advances in Mechanics and Mathematics.* 2010/ V. 21. Maugin G.A., Metrikine A.V. (Eds.). 1st Ed. 2010. XIX. Springer. pp. 223-232.
95. Белов П.А., Лурье С.А. 2007. Теория идеальных адгезионных взаимодействий, *Механика композиционных материалов и конструкций.* 13 (4). С. 545-561.
96. Kakunai S., Masaki J., Kuroda R., Iwata K., Nagata R. Measurement of apparent Young's modulus in the bending of cantilever beam by heterodyne holographic interferometry // *Exp. Mech.* 1985. V.25. №4. pp. 408-412.
97. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity // *J. Mech. Phys. Solids* 2003. V. 51. pp. 1477–1508.
98. McFarland A.W., Colton J.S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors // *J. Micromech. Microeng.* 2005. V. 15. pp. 1060-1067.
99. Wang C.M., Zhang Y.Y., He X.Q. Vibration of nonlocal Timoshenko beams // *Nanotechnology.* 2007. V.18. pp. 105401, (9pp).
100. Gao X.-L., Liu M.Q. Strain gradient solution for the Eshelby-type polyhedral inclusion problem. *J. Mech. Phys. Solids.* 60. 2012. pp. 261–276.
101. Gao X.-L., Ma H.M. Solution of Eshelby's inclusion problem with a bounded domain and Eshelby's tensor for a spherical inclusion in a finite spherical matrix based on a simplified strain gradient elasticity theory. *J. Mech. Phys. Solids.* 2010. 58. pp. 779–797.
102. Ma H.M., Gao X.-L, Reddy J.N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2008. V.56. pp. 3379-3391.

103. Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory // *Acta Mech.* 2011 V.220. pp. 217–235.
104. Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Leontiev A., Aifantis E. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity. Applications to composite materials. // *International Journal of Engineering Science.* 2011. V. 49. pp. 1517-1525.
105. Lurie S., Belov P., D.Volkov-Bogorodsky, N. Tuchkova. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // *Journal of Materials Science.* Springer. 2006. pp. 6693-6707.
106. Lurie S., Belov P. Cohesion field: Barenblatts hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations // *International Journal of Fracture.* V. 150. №1-2. pp. 181-194.
107. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D. Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects // In book *Analysis and Simulation of Multifield Problems*, Springer. 2003. 12. pp. 101-110.
108. Lurie S., Kalamkarov A. General theory of continuous media with conserved dislocations // *J. of Solids and Structures.* V. 44. 2007. P. 7468-7485.
109. Лурье С.А., Белов П.А., Соляев Ю.О. Адгезионные взаимодействия в механике сплошных сред // *Математическое моделирование систем и процессов* // Сб. научных трудов. Пермь. 2008. № 16. С. 75-85.
110. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. Gradient theory of media with conserved dislocations. Particular models: generalized Cosserats media model with surface effects, porous media, media with free forming (media with “twinning”), generalized pseudo-continuum. In book *Mechanics of Generalized Continua: A hundred years after the Cosserats*, Springer. 2010. pp. 110-119.
111. С.А. Лурье. Градиентные и адгезионные эффекты в механике деформирования гетерогенных материалов с микро- и наноструктурой // *X ВСФПТИМ*, 24-30 августа 2011, Нижний Новгород. // *Вестник*

Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Часть 5. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского. С. 47-50.

112. Liebold C., Müller W. H. Applications of Strain Gradient Theories to the Size Effect in Submicro-Structures incl. Experimental Analysis of Elastic Material Parameters // Bulletin of TICMI. 2015. V. 19. №1. pp. 45–55.
113. Liebold C., Müller W. H. Measuring material coefficients of higher gradient elasticity by using AFM techniques and raman-spectroscopy // Generalized Continua as Models for Materials, V. 22. pp. 255-271.
114. Liebold C., Müller W. H. Measuring material coefficients of higher gradient elasticity by using AFM techniques and raman-spectroscopy // Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials, V. 42. pp. 237-260.
115. Liebold C. Größeneffekt in der Elastizität – Experimentelle, analytische und numerische Untersuchungen // Dissertationsschrift. 2015.
116. Лурье С. А., Кузнецова Е. Л., Рябинский Л. Н., Попова Е. И. Уточненная градиентная теория масштабо-зависимых (scale-depend) сверхтонких стержней // МТТ. 2015. №2. С. 30-43.
117. E.I. Popova, E. D. Lyksova. On the influence of adhesive scale effects on seperthin micro- and nanosystem deformation // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. 2014. 5(2). pp. 129-140.
118. Лурье С.А., Попова Е.И., Лыкосова Е.Д. О теории масштабо-зависимых стержней и пластин//МКМК. 2015. 21(4). С. 611-620.