

На правах рукописи



Архипова Наталья Игоревна

**ПРИМЕНЕНИЕ УТОЧНЕННЫХ ТЕОРИЙ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН ДЛЯ
ОПИСАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В СОСТАВНЫХ
ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена в Институте проблем машиностроения Российской академии наук (ИПМ РАН)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиностроения Российской академии наук (ИПМ РАН)

Ерофеев Владимир Иванович

Официальные оппоненты: **Котов Василий Леонидович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института механики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского" (ННГУ), профессор ННГУ, г. Нижний Новгород

Земсков Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, начальник Научно-исследовательского отдела кафедры 311 Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (ФГБОУ ВО «МАИ»), г. Москва

Ведущая организация: Южный Федеральный Университет (ЮФУ), г. Ростов-на-Дону

Защита диссертации состоится «14» июня 2017 г., в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте МАИ по ссылке:

http://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=79577

Автореферат разослан «__» _____ 2017г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Федотенков Г.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современном мире жесткие условия эксплуатации объектов из новых композиционных материалов, диктуют высокие требования к точности исследования (расчета) напряженно-деформированного состояния, поэтому использование классической теории пластин и оболочек (классических инженерных теорий) становится затруднительно. В связи с этим в инженерной практике наиболее приемлемо использовать уточненные (неклассические) теории (Рэлея-Лява, Бишопа, Миндлина-Германа, Тимошенко), которые учитывают дисперсионные, а иногда и нелинейные эффекты.

Кроме того, анализ причин технических аварий объектов показывает, что огромного их числа можно было избежать при наличии необходимых средств неразрушающего контроля и диагностики состояния составных элементов конструкций.

Задачи о распространении продольных и изгибных волн находят свое применение в следующих областях:

1. Расчеты напряженно-деформированного состояния, решение задач устойчивости элементов современных конструкций, рассматривающиеся в виде составных систем, в машиностроении.
2. Расчеты мощных ультразвуковых и виброударных установок, с учетом влияния нелинейных эффектов. Нелинейность также учитывается в задачах акустодиагностики.
3. Проверка конструкций на наличие скрытых дефектов – метод неразрушающего контроля. Данный метод применим при производстве материалов и на стадии эксплуатации конструкций. Направленные упругие волны могут распространяться на значительные расстояния без существенного затухания, что позволяет проводить дефектоскопию в труднодоступных местах.

Диссертационная работа проводилась по программе ФНИ Государственных академий наук на 2013-2020гг. (Раздел 3 «Технические науки». Подраздел 30 «Методы анализа и синтеза многофункциональных механизмов и машин для перспективных технологий и новых человеко-машинных комплексов. Динамические и виброакустические процессы в технике»). По теме 0055-2014-0002, № госрегистрации 01201458047. Развитие теории нелинейной волновой динамики и виброакустики машин и ее приложение к анализу устойчивости распределенных механических систем с высокоскоростными движущимися нагрузками, созданию методов и средств диагностики конструкций на ранних стадиях повреждения и разработке высокоэффективных адаптивных систем виброзащиты машин. (Научный руководитель: профессор Ерофеев В.И.)

и при поддержке:

– Гранта Российского научного фонда «Динамика и устойчивость систем «грунт-рельсовая направляющая – высокоскоростной движущийся объект» с

учетом эффектов излучения волн и накопления повреждений в материалах конструкций» (РНФ №14-19-01637 (конкурс «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами»); руководитель: профессор Ерофеев В.И.);

– Гранта Российского фонда фундаментальных исследований «Исследование объемных и поверхностных волн в составных элементах конструкций на основе уточненных моделей для акустической диагностики механических неоднородностей при неразрушающем контроле изделий» (РФФИ № 16-38-00426 мол_a; руководитель: аспирант Архипова Н.И.);

– Гранта в рамках государственных заданий в сфере научной деятельности по теме «Оптимизация энергетических и вибрационных характеристик регулируемых автономных электромеханических систем с новым классом адаптивных полупроводниковых преобразователей» (№8.2668.2014/К; руководитель: профессор Ерофеев В.И.).

Цель работы

состоит в исследовании дисперсионных, диссипативных и нелинейных эффектов, проявляющихся при распространении продольных и поперечных волн в составных элементах конструкций.

В соответствии с изложенной целью в работе поставлены и решены следующие задачи:

– Выбор математических моделей, описывающих продольные и поперечные колебания составных стержней и пластин.

– Выполнение аналитических и численных решений ряда задач о распространении упругих волн в составных элементах конструкций.

– Выявление соотношений, связывающих характеристики исследуемых математических моделей стержней и пластин с параметрами уточненных (неклассических) моделей.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в следующем:

– Впервые предложен и теоретически обоснован подход, позволяющий исследовать динамику составных элементов конструкций, основанный на применении уточненных моделей стержней и пластин.

– Впервые определено, что математическая модель, описывающая продольные колебания составного стержня, по своим дисперсионным свойствам эквивалентна модели Миндлина-Германа.

– Получено, что составная струна, совершающая поперечные колебания, эквивалентна балке Тимошенко с натягом; составная мембрана эквивалентна пластине Тимошенко с натягом.

– Проведен анализ дисперсионных и диссипативных свойств волн, распространяющихся в составном стержне с вязкоупругой силой контактного взаимодействия.

– Впервые показано, что в составном стержне могут существовать нелинейные уединенные стационарные волны, и исследованы особенности их распространения.

– В рамках математической модели составной мембраны с учетом геометрической нелинейности получены и исследованы одномерные и двумерные солитоны, а также представлены различные формы нелинейных периодических колебаний.

Практическая значимость

Дисперсионные и диссипативные зависимости, связывающие параметры упругих волн, могут найти применение при разработке методов расчета элементов конструкций на прочность, устойчивость.

Значение проводимых исследований будет способствовать разработке новых методов и средств неразрушающего контроля материалов и элементов конструкций для предприятий разных отраслей промышленности.

Методы исследования

При проведении исследований использованы методы механики сплошных сред, теории колебаний и волн.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается их согласованностью с общими положениями механики сплошных сред, теории колебаний и волн, а также согласованностью результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

На защиту выносятся

– Результаты исследований распространения продольных волн, в том числе существование нелинейных уединенных стационарных волн в составном стержне.

– Математические модели, описывающие поперечные колебания в составной струне и составной мембране с линейно-упругими силами контактного взаимодействия.

– Анализ качественно различных случаев поведения солитонов в составной мембране.

Апробация работы

Результаты работы докладывались и обсуждались: на международной инновационно-ориентированной конференция молодых ученых и студентов, (14-17 декабря, 2011, Москва), на X Всероссийском совещании-семинаре «Инженерно-физические проблемы новой техники», (17-19 апреля, 2012, Москва), на IX Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем», (24-29 сентября, 2012, Нижний Новгород), на Седьмой Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», (29-31 января, 2013, Москва), на 18-й Нижегородской сессии молодых ученых «Технические науки», (19-22 марта, 2013, Нижний Новгород), на международной научной конференция «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур», (16-20 сентября, 2013, Минск, Республика Беларусь), на 2-й Всероссийской научной

конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем», (17-19 декабря, 2013, Москва), на 19-й Нижегородской сессии молодых ученых «Технические науки», (18-21 марта, 2014, Нижний Новгород), на XLII международной конференции “Advanced Problems in Mechanics (APM-2014)”, (June 30 - July 5, 2014, St. Petersburg, Russia), Proceedings of International Conference on Informatics, Networking and Intelligent Computing (INIC 2014, 16-17 November, 2014, Shenzhen, China), на Восьмой Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», (27-29 января, 2015, Москва), на III Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (19-21 октября, 2015, Москва), на Всероссийской конференции, посвященной 95-летию со дня рождения А.Г. Угодчикова и 40-летию Научно-исследовательского института механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского «Проблемы прочности, динамики и ресурса» (16-19 ноября, 2015, Нижний Новгород), на X Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем», (26-29 сентября, 2016, Нижний Новгород), на V Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (17-19 октября, 2016, Москва).

Работа была поддержана стипендией академика Г.А. Разуваева, а также почетным дипломом «За наиболее интересное научное сообщение» на XXIII международной инновационной конференции молодых ученых и студентов (Москва, 2011г.), дипломом 3 степени министерства образования Нижегородской области на 18-й Нижегородской сессии молодых учёных в 2013г, дипломом 3 степени министерства образования Нижегородской области на 19 Нижегородской сессии молодых учёных в 2014г.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 23 научных работ, 4 из которых [1-4] - статьи из перечня журналов, рекомендуемых ВАК РФ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована ее актуальность, сформулированы основные цели, задачи и положения, выносимые на защиту, определена практическая значимость работы.

Глава 1. Некоторые уточненные модели, описывающие распространение продольных и изгибных волн в стержнях и пластинах

Глава носит обзорный характер. В главе представлены три уточненные теории продольных и изгибных колебаний стержней и изгибных колебаний пластин. Показано, что на высоких частотах при изучении продольных нормальных

волн в стержне следует пользоваться моделью Миндлина-Германа. Так же рассматривается уточненная теория изгибных колебаний стержня, введенная С.П. Тимошенко. Дополнительно показано, что результаты, относящиеся к стержням, распространяются на пластины.

Глава 2. Продольные волны в составном стержне.

Во **второй** главе рассматривается распространение одномерных продольных волн по бесконечному составному стержню. Составной стержень представляет собой совокупность двух стержней, находящихся в контакте друг с другом. Сила контактного взаимодействия предполагается линейно-упругой. Показано, что продольные колебания составного стержня можно описать уравнением Миндлина-Германа продольных колебаний некоторого гипотетического стержня. Определено, что энергия упругих волн и по составным элементам конструкций переносится с групповой скоростью.

Дополнительно показано, что уточненная стержневая модель Миндлина-Германа может быть применена для описания динамических процессов в составных элементах конструкций, с вязкоупругими силами контактного взаимодействия.

В этом случае движение стержней описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} E_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) + R_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \right), \\ E_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) + R_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right), \end{cases} \quad (2.1)$$

где u_i – продольные перемещения частиц срединных линий стержней, E_i, S_i, ρ_i ($i = 1, 2$) – их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности), R, R_1 – коэффициенты упругого и вязкого взаимодействия стержней.

Замечено, что продольные колебания составного стержня можно описать уравнением Миндлина-Германа продольных колебаний некоторого гипотетического стержня:

$$\begin{aligned} & 4 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \left(C_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{\kappa_2^2 \lambda}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{H^2 \rho}{2 \kappa_2^2 \lambda} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (C_1^2 + \kappa_1^2 C_\tau^2) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \right. \\ & \left. + C_1^2 \kappa_1^2 C_\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) + \chi \left(4 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - 4 \left(C_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{\kappa_2^2 \lambda}{\rho} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $u(x, t)$ – продольные перемещения частиц стержня, H – толщина стержня, ρ – плотность материала, $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho}}$, $C_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорости продольных и сдвиговых волн, λ, μ – константы Ламэ, κ_1, κ_2 – корректирующие коэффициенты, позволяющие увеличить частотный диапазон применимости модели.

Показано, что параметры гипотетического стержня выражаются через параметры исходных стержней. Решено уравнение (2.2) и выполнен переход к дисперсионным зависимостям.

Качественный вид дисперсионных зависимостей $\omega(k')$ приведен на рис.2.1а при $d = 0,25; \delta = 0,1; \varphi = 0,5$.

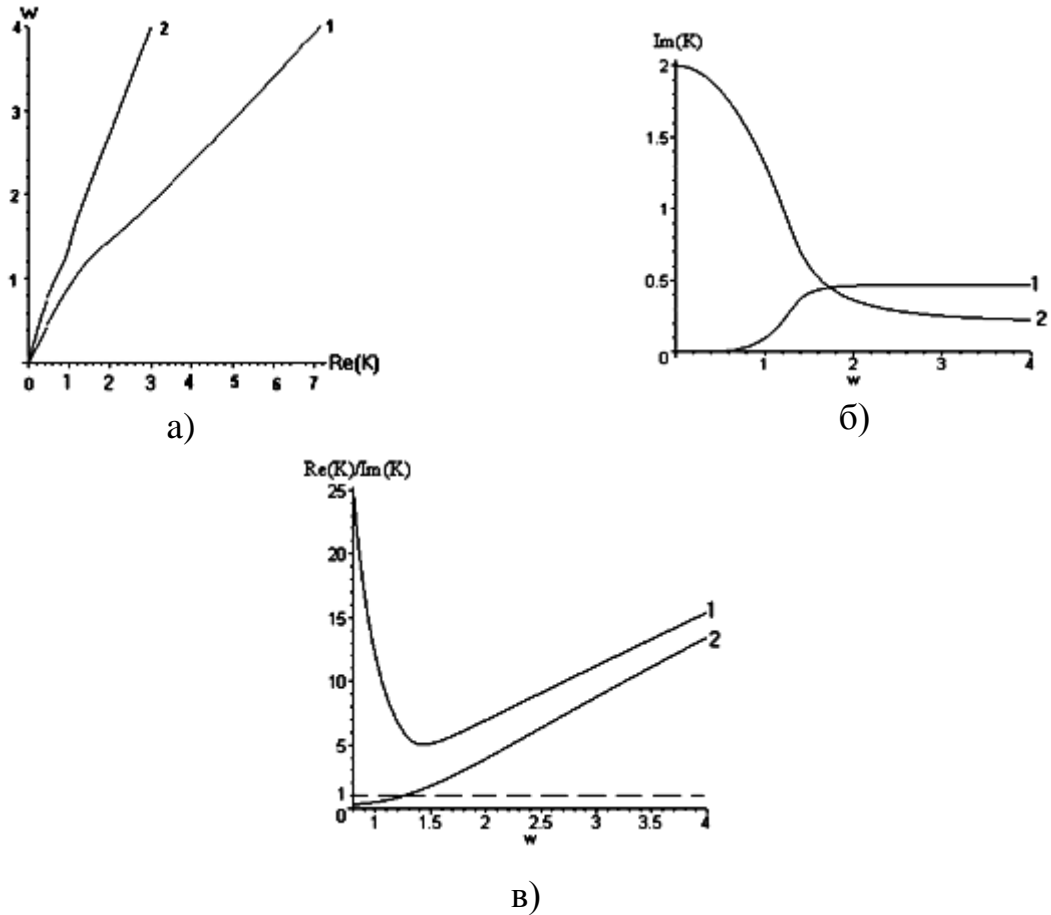


Рис. 2.1. Дисперсионные характеристики вязко-упругой среды:

а – зависимость частоты от действительной части волнового числа; б – частотная зависимость мнимой части волнового числа; в – частотная зависимость отношения действительной части волнового числа к мнимой

На рис. 2.1б приведены зависимости мнимых частей k'' волнового числа k от частоты ω . В низкочастотном диапазоне коэффициент затухания k'' зависит от частоты волны, а в высокочастотном диапазоне затухание становится частотно-независимым, так как в этом случае усиливается влияние дисперсионных эффектов.

На рис.2.1в приведены частотные зависимости отношения $Re(k)/Im(k)$.

Неравенству $\frac{Re(k)}{Im(k)} > 1$ соответствуют области частот, где процесс распространения волны преобладает над процессом ее затухания.

Рассмотрен частный случай, при $\delta = 0$. Качественный вид дисперсионных зависимостей $\omega(k)$ приведен на рис.2.2.

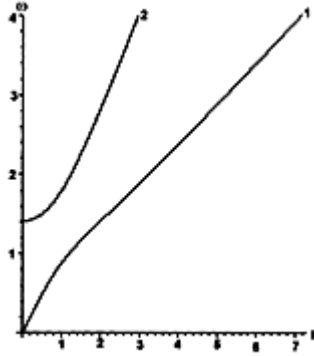


Рис. 2.2. Дисперсионные характеристики упругой среды

Сравнение дисперсионных зависимостей в обоих случаях показывает, что диссипация оказывает влияние на дисперсионные свойства волн только в низкочастотном диапазоне. В высокочастотном диапазоне диссипация не проявляется, так как дисперсионные ветви при $\delta = 0$ и при $\delta \neq 0$ выходят на одинаковые асимптоты.

В главе также изучается формирование и поведение локализованных волн (солитонов) деформации в составном нелинейно-упругом стержне.

В каждом из стержней учтена геометрическая и физическая нелинейность, тогда динамика системы описывается уравнениями:

$$\begin{cases} E_1 S_1 \left(1 + \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) \\ E_2 S_2 \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\alpha_{1,2}$ - коэффициенты, характеризующие их геометрические и физические нелинейности.

Система (2.3), при переходе к безразмерным величинам $U = \frac{u}{u_0}$; $y = \frac{x}{X}$; $\tau = \frac{t}{T}$;

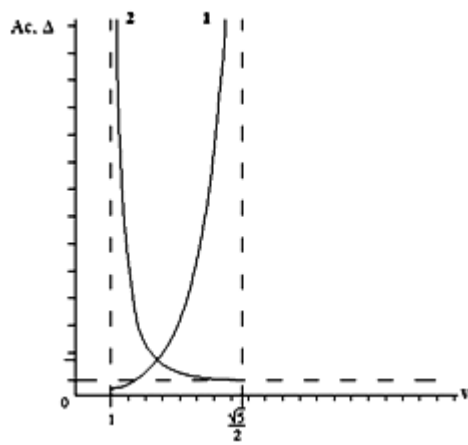
$\gamma = 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}$ и с учетом обозначений $D = C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}$; $X = \Lambda$; $T^2 = \frac{\Lambda^2 \gamma}{D}$, сведена к

нелинейно-обобщенному уравнению Миндлина-Германа:

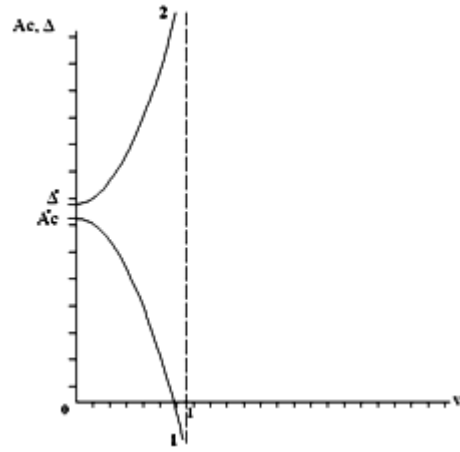
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\rho_1 S_1 D}{R \gamma^2 \Lambda^2} \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - \frac{\rho_1 S_1 (C_2^2 + C_1^2)}{R \gamma \Lambda^2} \frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial \tau^2} + \frac{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}{R \Lambda^2 D} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - \\ - \frac{\left(C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) u_0}{D} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Проведен анализ показывающий, что частными решениями уравнения (2.4) являются нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны).

На рис.2.3 (а,б) приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости.



а)



$$A_c^* = \frac{3D}{(C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1) \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \frac{u_0}{\gamma \Lambda}}; \Delta^* = \frac{2}{\sqrt{\frac{RD\Lambda^2}{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}}}$$

б)

Рис. 2.3. а – зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона положительной полярности от его скорости; б – зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона отрицательной полярности от его скорости.

Глава 3. Поперечные волны в составной струне и составной мембране

В третьей главе исследована задача о поперечных колебаниях составной струны:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\rho_{1,2}$ - погонные плотности, $N_{1,2}$ – натяжения струн.

Показано, что вышеуказанная задача сводится к задаче об изгибных колебаниях эквивалентного стержня модели Тимошенко с натяжением:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (N + kGF) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - kGF \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + kGF \left(\varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь u - поперечные отклонения срединной линии стержня, φ - угол поворота поперечного сечения балки, ρ - объемная плотность, E, G - модули сжатия и сдвига, N – натяжение, F – площадь поперечного сечения, I – момент инерции, k – поправочный коэффициент Тимошенко.

Из (3.2) следует, что погонная плотность стержня равна сумме плотностей обеих струн, а натяжение стержня складывается из натяжений струн.

Также рассматривается совокупность двух нелинейно-упругих струн, находящихся в контакте друг с другом:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.3)$$

Проведен анализ показывающий, что в нелинейно-упругой струне могут формироваться нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны).

В случае $a < 0, b > 0, 1 < v_2^2 < \frac{5}{4}$. На рис.3.1 приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости.

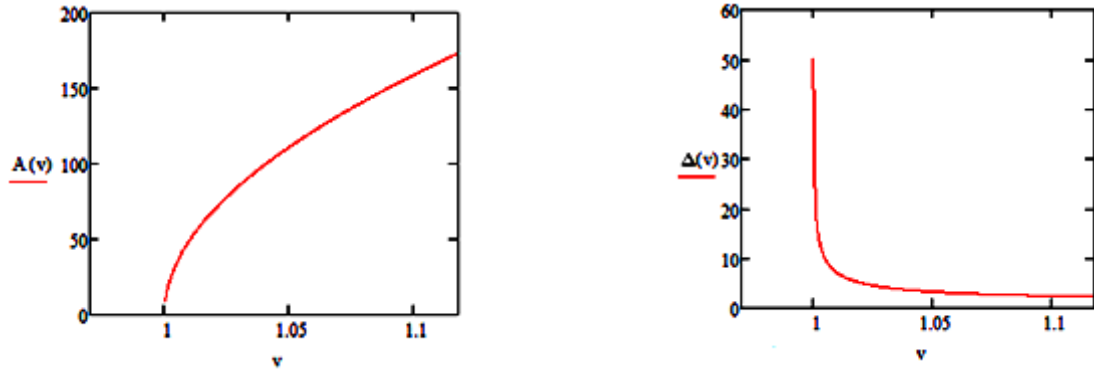


Рис. 3.1 Зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона положительной полярности от его скорости.

В случае $a > 0, b < 0, 1 < v_2^2 < \frac{5}{4}$. Зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости приведены на рис.3.2.

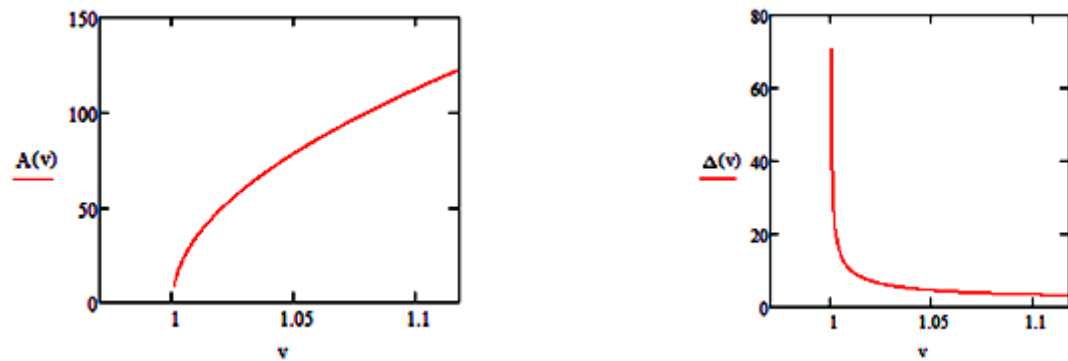


Рис. 3.2 Зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона отрицательной полярности от его скорости.

В главе показано, что составная мембрана эквивалентна пластине Тимошенко с натягом. Так же исследована задача о поперечных колебаниях составной мембраны с учетом геометрической нелинейности, получены и исследованы одномерные и двумерные солитоны, а также представлены различные формы нелинейных периодических колебаний.

В главе исследована задача о поперечных колебаниях составной мембраны:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + N_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \end{cases} \quad (3.4)$$

Система сводится к одному уравнению относительно поперечного смещения u_1 . Показано, что аналогичное уравнение получено при распространении теории Тимошенко для стержней на пластины. Также система сводится к бигармоническому уравнению, из которого получены дисперсионные зависимости.

Качественный вид дисперсионных зависимостей $\omega(k_x, k_y)$ приведен на рис.3.3.

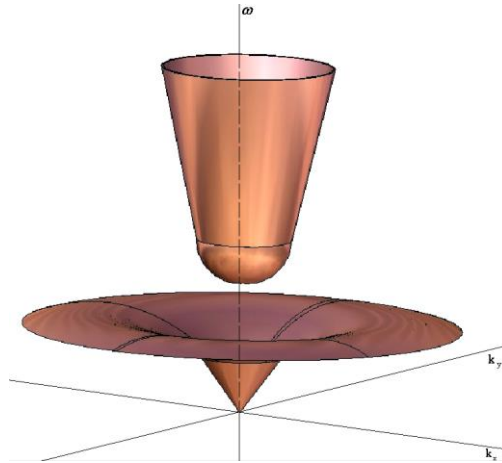


Рис. 3.3 Зависимость частоты волны от волновых чисел

Из рисунка 3.3 видно, что купол, выходящий из начала координат движется вперед по оси ω , расплываясь в стороны по осям k_x, k_y . С ростом k_x, k_y парабола $\omega(k_x, k_y)$ растёт до определенного предела, постоянно расплываясь в стороны и двигаясь вперед, приводя к крестообразной структуре.

В случае пересечения поверхности вращения плоскостью k_y , на дисперсионной плоскости (ω, k_x) , существуют две дисперсионные ветви, одна из которых выходит из начала координат и приближается к горизонтальной асимптоте.

Вторая ветвь выходит из точки $\omega = \sqrt{\frac{R(\rho_2 + \rho_1)}{\rho_1 \rho_2}}$ и с увеличением частоты приближается к наклонной асимптоте $\omega = \pm k_x$.

Также рассматривается задача о поперечных колебаниях составной мембраны с учетом геометрической нелинейности:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right] \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right] \end{cases} \quad (3.5)$$

При переходе к безразмерным величинам и с учетом преобразований система (3.5) сведена к модифицированному уравнению Кадомцева-Петвиашвили:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial W}{\partial \eta} + GW^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} + \Gamma \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \chi^2},$$

$$\text{где } G = \frac{u_0^2}{12\Lambda^2 \varepsilon}; \quad \Gamma = \frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{R\gamma\rho_2\Lambda^2} - \frac{\rho_1 D}{R\Lambda^2\gamma^2\rho_2} - \frac{N_1 N_2}{R\Lambda^2 D} \right]$$

Решения модифицированного уравнения получены в виде одномерных и двумерных солитонов. Представлены нелинейные колебания, которые имеют пилообразную форму, описываются дельта-амплитудой. Как частный случай представлен вид сепаратрисного решения. Также изображены нелинейные колебания, которые не имеют линейного вырождения.

В заключении приводятся основные результаты и выводы по работе.

Основные результаты диссертации:

1. Предложен подход к исследованию динамики составных элементов конструкций, основанный на применении уточненных моделей стержней и пластин, и сходстве дисперсионных зависимостей.

Выявлено, что составной стержень, совершающий продольные колебания по своим дисперсионным свойствам эквивалентен модели Миндлина-Германа. Составная струна, совершающая поперечные колебания, эквивалентна балке Тимошенко с натягом. Составная мембрана эквивалентна пластине Тимошенко с натягом.

2. В рамках математической модели составного стержня с вязкоупругой силой контактного взаимодействия проведен анализ дисперсионных и диссипативных свойств волн, показывающий, что в низкочастотном диапазоне коэффициент затухания зависит от частоты, в высокочастотном диапазоне усиливается влияние дисперсионных эффектов, а коэффициент затухания становится частотно-независимым.

3. В результате проведения аналитических исследований показано, что в нелинейно-упругом составном стержне могут существовать нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны). Исследование зависимости между основными параметрами (амплитудой, скоростью, шириной) солитона показывает, что поведение нелинейных уединенных волн может быть как классическим, когда с ростом скорости уединенной стационарной волны ее амплитуда возрастает, а ширина уменьшается, так и неклассическим, когда с ростом скорости волны ее амплитуда убывает, а ширина возрастает.

4. Показано, что поперечные колебания составной мембраны с учетом геометрической нелинейности можно описать модифицированным уравнением Кадомцева-Петвиашвили, решения которого получены в виде одномерных и двумерных солитонов. Проведен расчёт параметров волн (амплитуды, пространственной частоты) и представлены различные формы нелинейных периодических волн.

Основные результаты работы опубликованы в следующих работах

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Семерикова Н.П. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с помощью уточненных стержневых моделей // Вестник Нижегородского университета им Н.И. Лобачевского. 2011. №4. С. 130-133. (из списка ВАК)
2. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Распространение продольных волн в составном вязко-упругом стержне // Приволжский научный журнал. 2013. №3. С.18-23. (из списка ВАК)
3. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Миклашевич И.А., Сандалов В.М. Уединенные волны деформации в составном нелинейно-упругом стержне // Приволжский научный журнал. 2013. №4. С.19-23. (из списка ВАК)
4. N.I.Arkhypova, V.I.Erofeev Solitary strain waves in the composite nonlinear elastic rod // Informatics, Networking and Intelligent Computing - Zhang (Ed.), 2015 Taylor & Francis Group, London, ISBN: 978-1-138-02678-0. p.225-226. (индексируется в базе данных Web of Science)

Публикации в сборниках и сборниках материалов конференций

5. Архипова Н.И. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с линейно-упругими и вязко-упругими силами контактного взаимодействия с помощью уточненных стержневых моделей // XXIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2011): материалы конференции (Москва, 14-17 декабря 2011г.). /М: Изд-во ИМАШ РАН, 2011. С. 69.
6. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Уединенные волны в составном нелинейно-упругом стержне // X Всероссийское совещание-семинар «Инженерно-физические проблемы новой техники». Сборник материалов – Москва, МГТУ им. Баумана, 2012. С. 156-157.
7. Архипова Н.И. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с линейно-упругими и вязко-упругими силами контактного взаимодействия с помощью уточненных стержневых моделей // XXIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС – 2011): избранные труды конференции (Москва, 14-17 декабря 2011 г.). /М: Изд-во ИМАШ РАН, 2012. С. 14-21.
8. Архипова Н.И. Составной нелинейно-упругий стержень: математическая модель и анализ волновых процессов // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Н.Новгород, 24–29 сентября 2012 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Н.Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2012. С. 103-105.

9. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Составной нелинейно-упругий стержень: математическая модель и анализ волновых процессов // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Седьмой Всероссийской конференции 29-31 января 2013г. (В трех частях) Ч.П.-М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. С.94-97.
10. Архипова Н.И. Составной нелинейно-упругий стержень: математическая модель и анализ волновых процессов // XVIII Нижегородская сессия молодых ученых. Технические науки: материалы докладов. 19-22 марта 2013г./Отв. за вып. И.А. Зверева – Н.Новгород: НИУ РАНХиГС, 2013. С. 4-7.
11. Arkhipova N.I. Describing the diffusion of elastic and solitary waves in layered structural elements with linear-elastic and visco-elastic contact interaction forces using precise rod models // Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро до наноразмерных структур = Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: from Macro- to Nanoscale Structures: Беларусь/ под общ. ред. Г. И. Михасева, Х. Альтенбаха. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. С. 221-223.
12. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Применение уточненных стержневых моделей для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // «Механика наноструктурированных материалов и систем». Тезисы докладов 2-й Всероссийской научной конференции. Москва, 17 – 19 декабря 2013г. – Москва, ИПРИМ РАН, 2013. С. 14.
13. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Применение уточненных стержневых моделей для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // «Механика наноструктурированных материалов и систем». Сборник трудов 2-й Всероссийской научной конференции в 3-х томах. Том 1. Москва, 17-19 декабря 2013г. – М.: ИПРИМ РАН, 2013. С. 6-19.
14. Arkhipova N.I., Erofeev V.I. Rod model specified in problems on the propagation of elastic waves in the laminated element designs // XLII Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics” St. Petersburg. – СПб.: СОЛО, 2014. С. 31-32.
15. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Сандалов В.М. Уточненные модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах конструкций // Вестник научно-технического развития. 2014. № 12(88). С. 3-16.
16. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Сандалов В.М. Поперечные волны в двумерной слоистой конструкции // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / под ред. В.И. Ерофеева, В.Н. Перевезенцева и С.И.Смирнова. - Нижний Новгород: Издательство общества „Интелсервис“, 2014, № 1 (23). С.95-100

17. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Сандалов В.М. Применение уточненных моделей для описания распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций // Необратимые процессы в природе и технике: труды Восьмой Всероссийской конференции 27-29 января 2015г. Ч.П.-М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. С.220-223
18. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Применение неклассических теорий стержней и пластин для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // Тезисы докладов III Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М. ООО «ТВ-принт», 2015. С.16-18.
19. Ерофеев В. И., Архипова Н.И. Упругие волны в двумерных слоистых конструкциях // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2016. – № 1. С.33-38; URL: mathmod.esrae.ru/1-5.
20. Архипова Н.И. Поперечные волны в двухслойной мембране // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2016 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. С. 58-61
21. Архипова Н.И. Поперечные волны в двухслойной мембране с учетом геометрической нелинейности // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2016 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. С.62-71
22. Архипова Н.И. Применение неклассических теорий стержней и пластин для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М., 2016. С.16-18.
23. Архипова Н.И., Семерикова Н.П. Поперечные волны в двухслойной геометрически нелинейной мембране // Научный журнал «Процессы в геосредах». 2016. №3(7). С.176-183.