

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Ненарокомов Кирилл Алексеевич

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ДЕФЕКТОСКОПИИ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ
НАДУВНЫХ ТОРМОЗНЫХ УСТРОЙСТВ СПУСКАЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ
АППАРАТОВ

Специальность

05.07.03 – Прочность и тепловые режимы летальных аппаратов

ДИССЕРТАЦИЯ

**на соискание ученой степени
кандидата технических наук**

Научный руководитель: **член-корр.РАН, д.т.н.,
профессор Алифанов Олег Михайлович**

Москва – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1 Неразрушающая дефектоскопия методами нелинейной акустики	11
1.1 Анализ задачи	11
1.1.1 Гибкая тепловая защита надувных тормозных устройств КА	11
1.1.2 Дефекты гибкой теплозащиты	15
1.1.3. Исследования структурной нелинейности материалов методами нелинейной акустики	19
1.2 Экспериментальная установка для исследования эластичных материалов ...	24
1.2.1 Принцип работы экспериментальной установки	25
1.2.2 Тестовые измерения с модельной нелинейностью	29
1.2.3 Расчет и создание конденсаторных излучателей УЗ	33
1.2.4 Исследуемые образцы	40
1.2.5 Результаты экспериментальных исследований	42
1.3 Постановка задачи неразрушающего контроля элементов гибкой тепловой защиты методами обратных задач нелинейной акустики	50
Глава 2. Развитие методов моделирования и идентификации математических моделей процессов переноса, описываемых гиперболическими уравнениями в частных производных	55
2.1 Метод итерационной регуляризации	55
2.2 Сопряженная краевая задача и вычисление градиента функционала невязки	60
2.3 Определение параметра спуска	67
2.4 Сплайн-аппроксимация искомых функций	69
Глава 3. Разработка численных методов математического моделирования распространения волн в многослойных элементах конструкции космических аппаратов	74

3.1. Анализ вычислительных алгоритмов	75
3.2 Аппроксимация коэффициентов дифференциального оператора гиперболического типа	79
3.3 Конечно-разностная аппроксимация дифференциального оператора	80
3.4 Решение системы алгебраических уравнений	86
Глава 4. Анализ влияния различных факторов на эффективность вычислительных алгоритмов	89
Глава 5 Экспериментально-расчетный метод дефектоскопии материалов гибких теплозащитных покрытий космических аппаратов	107
5.1 Постановка задачи экспериментально-расчетного исследования, методика подготовки и проведения испытаний, модификация установки для предварительных испытаний	107
5.2 Экспериментальная установка для определения характеристик дефектов теплозащитного материала	116
5.3 Проведение экспериментальных исследований	123
5.4 Результаты обработки экспериментальных данных	132
Заключение	139
Список литературы	141

Введение

Актуальность работы

Дефектоскопия материалов и конструкций всегда была и остаётся одним из важнейших вопросов производства и испытаний ракетно-космической техники. Одним из определяющих факторов при разработке и внедрении новых методик является стоимость проекта и оборудования. В связи с этим большое внимание уделяется созданию бесконтактных дистанционных методов неразрушающего контроля, которые по стоимости и эффективности могли бы стать альтернативой используемым технологиям. В последнее время наблюдается заметный рост числа публикаций, посвящённых исследованию нелинейности неоднородных сред, а также сред с дефектами. Такие среды обладают большой структурной нелинейностью, которая связана с наличием дефектов.

С другой стороны для космических спускаемых аппаратов (СА) обеспечение тепловых режимов было и остается одной из самых важных задач, определяющих основные проектно-конструкторские решения. Общая тенденция развития космической техники связана с увеличением теплового нагружения различных систем, с необходимостью повышать их надежность и ресурс и одновременно снижать материалоемкость. В последние годы как в РФ, так и в ЕС проявляется значительный интерес к исследованиям в обеспечение разработки космических спускаемых аппаратов с надувными аэродинамическими экранами. Как известно, СА подвергаются воздействию значительных силовых и тепловых нагрузок. Компромиссом между потребностью снижения уровня силовых и тепловых нагрузок на СА за счёт увеличения его поперечного размера и ограниченностью поперечного сечения ракеты носителя могут служить тормозные экраны раскрываемой конструкции. В связи со спецификой эксплуатации подобных надувных конструкций, а именно, первоначально надувная оболочка находится в сложенном состоянии

во время подготовки СА к полету, в период старта и орбитального полета, впоследствии она наддувается и разворачивается в рабочее положение, возникает необходимость контроля состояния конструкции теплозащиты к моменту ее функционирования.

В большинстве практических случаев прямая дефектоскопия элементов конструкций (особенно сложного состава) является невозможной. Единственным путем, позволяющим преодолеть эти сложности, является не прямые измерения. Математически подобный подход обычно формулируется как решение обратной задачи: по измерениям состояния системы (например акустического давления, как в настоящей работе) определить механические характеристики анализируемой системы, связанные с дефектами материалов. Нарушение причинно-следственных связей в постановке таких задач приводит к их некорректности в математическом смысле (т.е. отсутствию существования, единственности и устойчивости решения). Поэтому для решения подобных задач разрабатываются специальные методы, обычно называемые регуляризирующими.

Методы обратных задач дают возможность исследовать сложные нестационарные нелинейные волновые процессы в элементах конструкции, обладают достаточно высокой информативностью и позволяют, в конечном итоге, более обоснованно принимать проектные и технологические решения. Поэтому в настоящее время в экспериментальной отработке СА методы исследований, основывающиеся на принципах обратных задач математической физики, находят всё более широкое применение. Основываясь на фундаментальных принципах теории некорректных задач математической физики, разработанных академиком А.Н.Тихоновым и его научной школой, большие успехи в разработке методов, алгоритмов и практическом использовании методов обратных задач теплообмена были достигнуты О.М. Алифановым, А.К. Алексеевым, Е.А. Артюхиным, В.Н. Елисеевым, И.С.Кабанихиным, Л.А. Коздобой, Ю.М. Мацевитым, Ю.В. Полежаевым, С.В.

Резником, В.М. Юдиным, А.Г.Яголой, J.V. Beck, G. Chavent, Y. Jarny. Обратные задачи механики относятся к одному из динамично развивающихся разделов современной науки, имеющему многочисленные и разнообразные приложения в технике.

Подходы к параметрической идентификации коэффициентов математических моделей, базирующиеся на методах решения некорректных задач широко анализировались в нашей стране, а также в других странах и показали свою эффективность при разработках и исследованиях в космической, авиационной, автомобильной отраслях техники, металлургии, энергетике и т.д. Разрабатываемая новая система дефектоскопии материалов для гибких теплозащитных покрытий является комбинацией достаточно точных измерений состояния объекта (акустического давления при нагружении) и корректной математической обработки экспериментальных данных на основе теории обратных задач.

Изложенное выше делает задачу разработки метода дефектоскопии элементов надувных конструкций на базе обратных задач нелинейной акустики, как одного из методов ускоренных испытаний для повышения ресурса и долговечности СА, актуальной.

Цель работы

Целью настоящей работы является создание методов и алгоритмов для дефектоскопии элементов конструкции надувных оболочек тормозных экранов СА, основанных на параметрической идентификации математической модели распространения продольных волн в упругой среде.

Задачи исследования

1. Анализ возможных скрытых дефектов эластичных элементов конструкций и существующих методов и средств их обнаружения.
2. Анализ существующих математических моделей распространения продольных волн в сплошной среде с целью выбора обобщенной математической модели, удовлетворяющей инженерным требованиям для

решения поставленной задачи.

3. Разработка алгоритма решения обратной задачи параметрической идентификации математической модели распространения продольных волн в сплошной среде с целью обнаружения структурных неоднородностей.
4. Разработка численного метода для реализации параметрической идентификации математической модели распространения продольных волн в сплошной среде.
5. Исследование эффективности разработанного алгоритма, в том числе устойчивости к погрешностям исходных данных, путем вычислительных экспериментов.
6. Разработка прототипа экспериментальной установки реализующей предложенный метод дефектоскопии.
7. Апробация разработанного метода с использованием образцов существующих материалов гибкой тепловой защиты СА.

Методы исследования

При решении поставленных задач использовались метод итерационной регуляризации, градиентный метод минимизации первого порядка, метод конечных разностей. Большинство элементов разработанного алгоритма реализовано на базе уже имеющегося программного обеспечения, написанного на языке FORTRAN, которое было переработано с учетом поставленной цели. Также для разработки прототипа экспериментальной установки, использовался существующий опыт проведения акустических исследований.

Достоверность результатов полученных в работе основывается на корректности математических моделей, строгости используемых математических решений, оценках их сходимости и подтверждаются результатами численного моделирования и экспериментальных исследований образцов.

Научная новизна

- Разработаны методы и алгоритмы для решения задачи параметрической

идентификации нелинейной обобщенной математической модели распространения продольных волн в среде с целью обнаружения скрытых дефектов.

- Разработан экспериментальный способ дефектоскопии оболочки надувного тормозного экрана СА на основании измерения акустического давления.
- Определены принципиальные возможности выявления геометрических параметров дефектов элементов конструкции по значению коэффициента нелинейности в математической модели распространения продольных волн.

Практическая ценность

Практической ценностью данной работы является

- создание прототипа экспериментальной установки, реализующей разработанный в работе метод дефектоскопии, который может использоваться для создания промышленных установок неразрушающего контроля различных систем и агрегатов:
- разработка прикладного программного обеспечения, используемого для определения широкого спектра различных коэффициентов (характеристик) нелинейных математических моделей распространения продольных волн в материалах и элементах конструкций.

Диссертация является результатом исследований, проводимых на Аэрокосмическом факультете МАИ в рамках научного проекта № 834, выполняемого при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности.

Апробация работы

Основные научные результаты работы докладывались на научно-технических конференциях. В частности, на 19 сессии Российского акустического общества (Н.Новгород, 24-28 сентября 2007), международной конференции молодых учёных “Ломоносов-2007”, The 9th conference on mathematical and numerical aspects of waves propagation (Pau, France, 2009), 2nd

African Conference on Computational Mechanics (Capetown, January 2011), на 8-ой международной конференции по обратным задачам (8th International Conference on Inverse Problems in Engineering ICIPE-2014, Польша, Краков, 12-15 мая 2014).

Публикации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в ряде научно-технических отчетов, 10 публикациях в научных изданиях, из них 3 научные работы опубликованы в изданиях, рекомендуемых Перечнем ВАК при Министерстве образования и науки РФ, а одна в издании индексируемом в базе данных SCOPUS.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы; содержит 147 страниц основного текста, 62 рисунка, 6 таблиц, список литературы из 57 наименований.

Во введении отражена актуальность выбранной темы, сформулированы цели и задачи работы. Показана новизна, а также достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы. Кратко охарактеризованы методы исследования. Представлены теоретическая и практическая значимость работы.

В первой главе диссертационной работы представлены основные этапы функционирования надувных оболочек аэродинамических тормозных экранов СА с целью анализа причин возникновения дефектов в материале оболочек, а также основные типы таких дефектов. Приведен краткий обзор существующих акустических методов дефектоскопии, используемых в настоящее время для сходных объектов. Представлен метод нахождения дефектов при покоординатном сканировании материала. На основании проделанного анализа предложена постановка обратной задачи по определению геометрических параметров дефектов методами нелинейной акустики.

Во второй главе представлен алгоритм параметрической идентификации коэффициентов математической модели распространения продольных волн в

сплошной среде в одномерной постановке. Разработан итерационный алгоритм для решения такой задачи, получены аналитические выражения для вычисления градиента функционала невязки и соответствующая краевая задача для сопряженной переменной. Также получена краевая задача для вариаций решения, позволяющая вычислить линейную оценку глубины спуска в процессе минимизации целевого функционала.

В третьей главе рассмотрены аспекты численного решения краевой задачи для нелинейного гиперболического, описывающего распространение продольных волн внутри материала. Получена однородная разностная схема для многослойного элемента конструкции. В результате разработанный алгоритм реализован в виде программы на языке FORTRAN.

В четвертой главе приведены результаты анализ эффективности алгоритма решения задачи параметрической идентификации математической модели распространения акустических волн в эластичном теплозащитном материале, в частности рассматривается влияние числа параметров аппроксимации неизвестных функций, неопределенностей в задании исходных данных и других факторов.

В пятой главе представлена реализация разработанного подхода в виде прототипа экспериментальной установки и его апробация путем определения геометрических параметров искусственно созданных дефектов в образцах материалов надувных экранов СА. Приведено описание разработанного в рамках настоящей работы прототипа экспериментальной системы. Результаты сравнения расчетных значений геометрических параметров с реальными свидетельствуют о достоверности предложенной модели. Показано, что предложенный метод позволяет определять искомые параметры с высокой точностью.

В заключении обобщены результаты диссертационного исследования и представлены выводы по работе.

Глава 1 Неразрушающая дефектоскопия методами нелинейной акустики

1.1 Анализ задачи

1.1.1 Гибкая тепловая защита надувных тормозных устройств КА

В последнее двадцатилетие в РФ и за рубежом проявляется значительный интерес к исследованиям в обеспечение разработки космических спускаемых аппаратов (СА) с раскрывающимися аэродинамическими экранами. Как известно, СА подвергаются воздействию значительных силовых и тепловых нагрузок, вызываемых набегающими высокоэнтальпийными газовыми потоками. Для защиты СА от внешних нагрузок и эффективного торможения обычно используются тормозные аэродинамические экраны, от поперечных размеров которых зависит уровень этих нагрузок.

Компромиссом между потребностью снижения уровня силовых и тепловых нагрузок на СА за счёт увеличения его поперечного размера и ограниченностью поперечного сечения ракеты носителя (РН) могут служить тормозные экраны раскрываемой конструкции.

Одним из вариантов такого подхода может служить экран надувной конструкции (рисунок 1.1). Такой экран, в общем случае, представляет собой замкнутую гибкую (эластичную) герметичную оболочку, образующую после наддува газом ее объема заданную аэродинамическую форму, которая сопрягается с конструкцией предназначенного для спуска в атмосфере планеты. Таким образом, реализуется надувное тормозное устройство (НТУ). При выведении на орбиту такое устройство находится под головным обтекателем РН в компактном (сложенном) положении (рисунок 1.1а), а непосредственно перед этапом аэродинамического торможения переводится в наддутое рабочее положение (рисунок 1.1б). При этом НТУ может быть выполнено двухкаскадным (рисунок 1.1в): 1-ый каскад – основное НТУ для снижения скорости СА менее скорости звука, 2-ой каскад – дополнительное НТУ для

обеспечения посадочной скорости заданной величины. Потенциальное конструктивное решение гибкой тепловой защиты представлено на рисунок 1.2

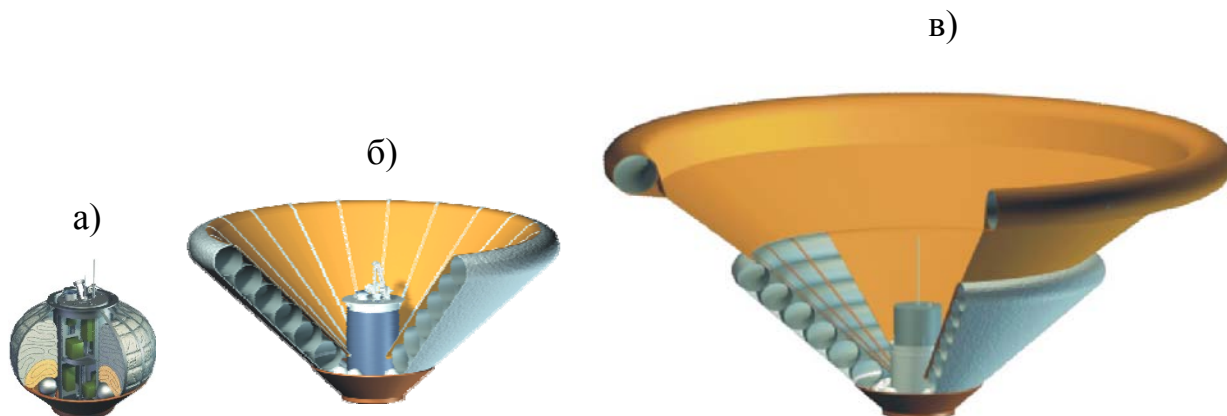


Рисунок 1.1- Общий вид СА с НТУ: а) – в сложенном положении, б) – с развёрнутым 1-м (основным каскадом), в) – с развёрнутым 2-м (дополнительным) каскадом

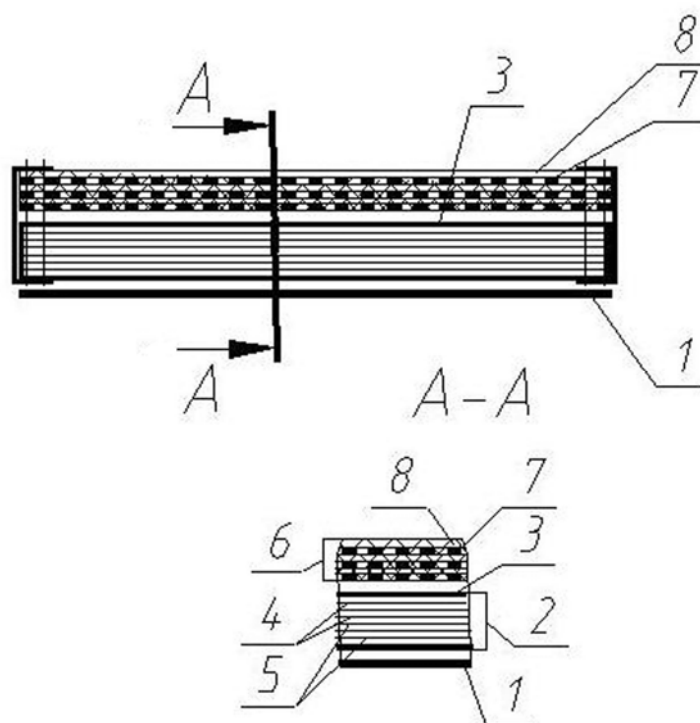


Рисунок 1.2 - Схема гибкого теплозащитного покрытия НТУ

1-оболочка НТУ; 2-пакет теплоизоляционных материалов; 3-чехол этого пакета; 4 и 5-слои теплоизоляции; 6- слой теплозащитного пакета; 7- термостойкая ткань; 8-слой абляционного материала

К одним из первых отечественных работ, освещающих идею применения технологии СА с НТУ в космической технике, относятся доклады специалистов НПО им. С.А. Лавочкина [1,2] на международных конференциях в 1996 и 1997гг. Примером первой в мире технической реализации этой концепции служит СА с НТУ «Пенетратор» – зонд в составе КА «Марс-96», который был предназначен для спуска на поверхность Марса и внедрению в его грунт [3]. В 2000 году в России впервые в мире был проведен эксперимента по спуску с орбиты СА с НТУ «Демонстратор-1» [4]. В 2003-2005 гг. в зарубежной печати появились статьи, посвященные проектируемым в Европе и США СА с НТУ, конструктивно подобные российскому СА с НТУ «Демонстратор-1» [5,6,7]. Это свидетельствует о повышенном в мире интересе к созданию СА с НТУ – технологии, способствующей дальнейшему развитию космической техники.

Применение надувного тормозного устройства позволяет решить целый ряд задач, стоящих перед разработчиками ракетно-космической техники:

1. Обеспечение спасения отработавших разгонных блоков при запусках РН. Для решения этой задачи к разгонному блоку пристыковывается раскрываемое перед входом в плотные слои атмосферы НТУ.

2. Осуществление спуска с орбит спутников с ценным оборудованием и с результатами научных исследований после выполнения программы орбитального полёта. В этом случае спутник запускается на орбиту с состыкованным с ним НТУ.

3. Организация регулярного обмена грузами между наземными пунктами и пилотируемой Международной космической станцией (МКС).

4. Обеспечение посадки исследовательских станций на поверхности планет с атмосферой.

5. Обеспечение спуска с орбиты Земли «космического мусора» (техногенных объектов) путем захвата их манипуляторами и размещения на приблизившемся к удаляемому объекту СА, снабженного НТУ.

Реализация НТУ требует разрешение новой, не свойственной проектированию традиционной космической техники, задачи разработки конструкции гибкой теплозащиты надувной оболочки, не препятствующей укладке НТУ в компактный объем в транспортном положении и последующему разворачиванию в рабочее положение (рисунок 1.3); и, в частности, проблему обнаружения скрытых (протертостей оболочки НТУ после виброиспытаний, разрывы оболочки, уменьшения ее толщины и др.) которые могут появиться после неоднократных укладываний и разворачиваний НТУ.

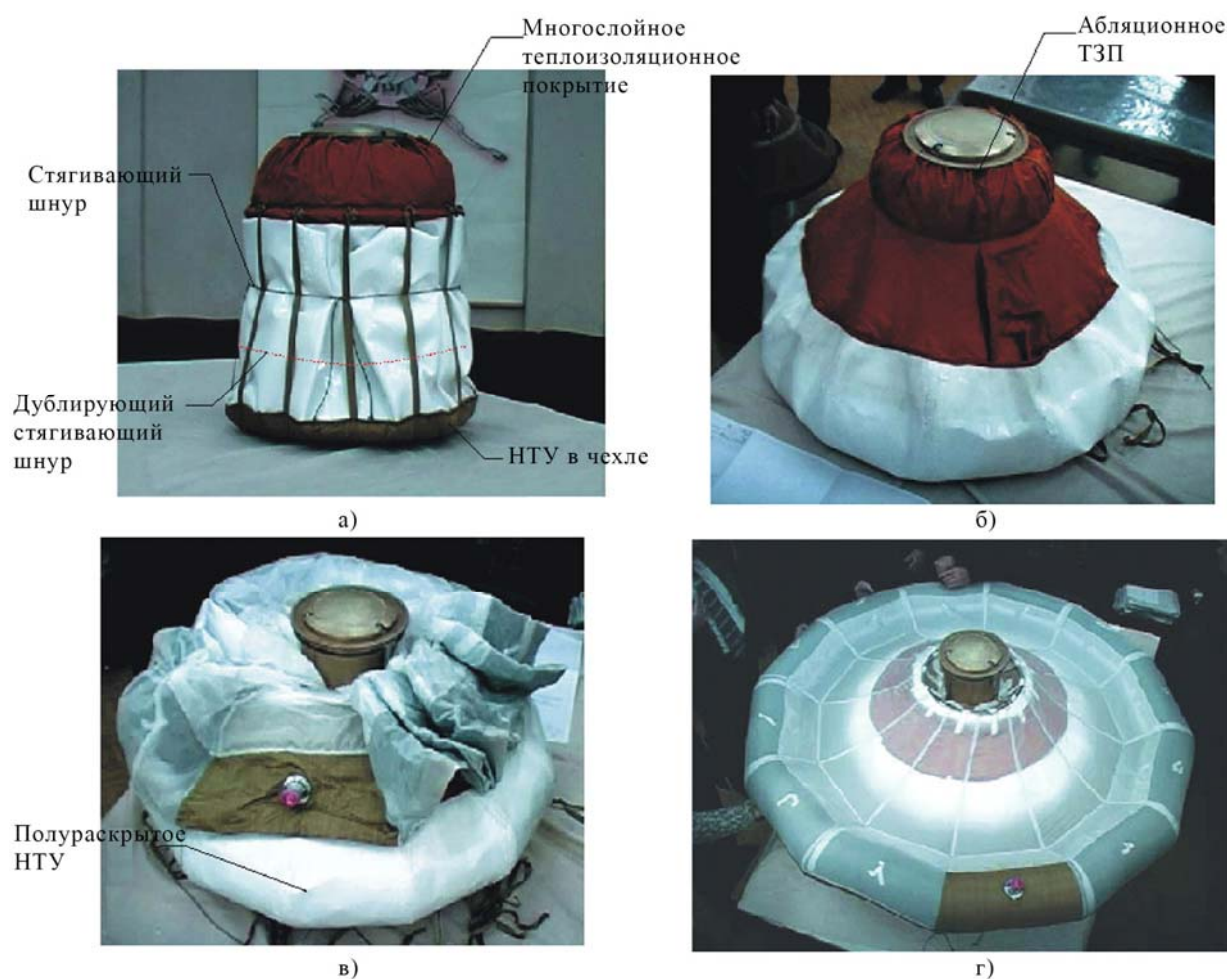


Рисунок 1.3 – Этапы функционирования малого СА с НТУ
а – НТУ в сложенном положении, б – начальная стадия раскрытия НТУ (происходящая в космосе), в – следующая стадия раскрытия НТУ, г - полностью раскрытое НТУ (перед входом в атмосферу)

1.1.2 Дефекты гибкой теплозащиты

В связи со спецификой эксплуатации гибкой теплозащиты НТУ, а именно, первоначально НТУ находится в сложенном состоянии во время подготовки СА к полету, в период старта и орбитального полета, впоследствии она наддувается и разворачивается в рабочее положение, возникает необходимость контроля состояния конструкции теплозащиты к моменту выполнения НТУ своего предназначения.

В свое время для выявления и классификации характерных изменений в состоянии гибкой теплозащиты, появляющихся после длительного пребывания ее в свернутом компактном положении, в НПО имени С.А. Лавочкина был проведен целый комплекс испытаний. Данные испытания проводились как с использованием полномасштабных макетов НТУ, так и на модельных образцах характерных участков тепловой защиты (швов, плоской поверхности, криволинейных участков и т.д.) [8,9]. При испытаниях полномасштабный макет НТУ укладывался в соответствии с выбранной схемой укладки в компактный объем, на длительный (до 6 месяцев) срок, после чего НТУ разворачивалось в рабочее положение. В этом положении проводилось визуальное исследование внешнего и внутренних слоев кремнеземной ткани теплозащиты, пропитанных сублимирующим веществом СТИРОСИЛ, и регистрировались выявленные дефекты. Кроме того, после снятия слоев теплозащитного пакета, анализировалось состояние ЭВТИ и арамидной ткани теплоизолирующего слоя тепловой защиты.

При использовании модельных образцов воспроизводились наиболее характерные складки, образуемые на отдельных участках теплозащиты при её размещении в компактном объеме. При этом образцы в сложенном состоянии подвергались силовому воздействию (использовали прессы с определенной нагрузкой). В результате подобных экспериментов было установлено, что на выпуклых складках наружного слоя кремнеземной ткани образовывались трещины в слое сублимирующего вещества. При этом следует отметить, что

сублимирующий материал СТИРОСИЛ обладает большей эластичностью, чем полимеры группы ВИКСИНТ и, следовательно, меньшим количеством дефектов [10]. После окончания хранения НТУ в сложенном положении макеты подвергались испытанию на вибростенде (рисунок 1.4).



Рисунок 1.4 - Надувное тормозное в сложенном в транспортное положение после проведения вибропрочностных испытаний

Визуальный контроль состояния наружного слоя тепловой защиты, на который был нанесен слой СТИРОСИЛа толщиной соответствующий расходу $1,5 \text{ кг/м}^2$ (т.е. около 1,3 мм) показал, что количество и длина трещин, обнаруженных ранее (после развертывания НТУ), после виброиспытаний несколько увеличивались.

После наддува и перевода НТУ в рабочее положение обнаруживаются и ряд других дефектов. Трещины, которые были обнаружены после хранения НТУ в сложенном состоянии длительное время, в некоторых местах увеличились на 10-20 мм. При этом длина самой большой трещины достигала величины 140 мм. Количество трещин на внешних (СТИРОСИЛ нанесен на внешнюю поверхность) складках возросло от 9 до 55 и составило 37 % от общего количества. Остальные трещины, в количестве 92 штук, образовались на внутренних (СТИРОСИЛ внутри) складках. Кроме того, в нескольких точках обнаружено отслоение небольших частиц СТИРОСИЛа от кремнеземной ткани и их прилипание к противоположной (контактирующей при укладке с

отслоившейся), поверхности теплозащиты. Количество таких дефектов составило 19 штук. На внутреннем слое кремнеземной ткани (пропитанной СТИРОСИЛОМ исходя из расхода $0,4 \text{ кг/м}^2$) дефектов обнаружено не было. Отсюда следует, что при уменьшении толщины слоя СТИРОСИЛА на кремнеземной ткани вероятность появления трещин, по-видимому, заметно уменьшается. Следует отметить что, разрывов кремнеземной ткани под трещинами в слое СТИРОСИЛА не обнаруживалось. На рисунке 1.5 представлена схема расположения дефектов на поверхности наружного слоя гибкой теплозащиты НТУ пенетратора КА «Марс-96», образовавшихся после испытаний (укладка и разворачиванию НТУ и виброиспытания).

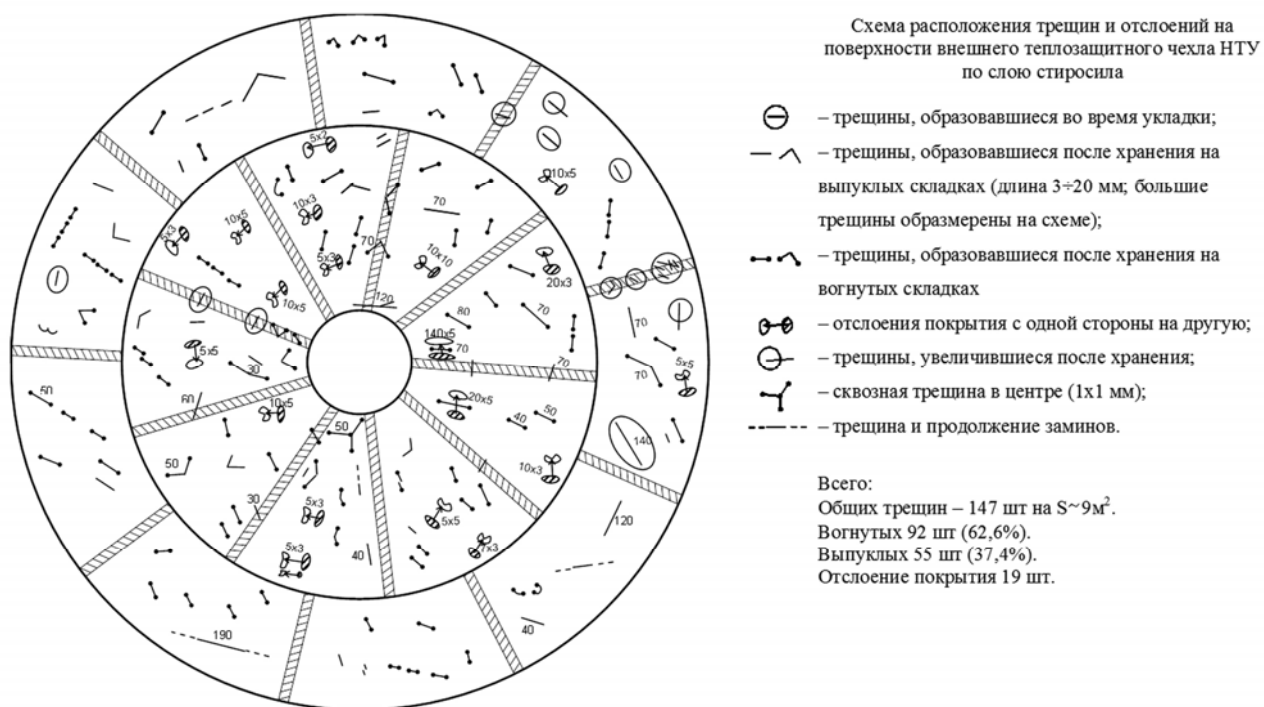


Рисунок 1.5 - Схема дефектов на наружной поверхности гибкой теплозащиты пенетратора изделия «Марс-96»

По результатам анализа дефектов может быть предложена следующая классификация:

- трещины в слое СТИРОСИЛа, образовавшиеся при изгибе кремнеземной ткани таким образом, что слой СТИРОСИЛа оказывается снаружи, (выпуклая складка). Такие трещины частично смыкаются при наддуве НТУ и переходе в рабочее положение;
- углубления в слое СТИРОСИЛа, образующиеся при складывании кремнеземной ткани таким образом, что слой СТИРОСИЛа оказывается внутри, (вогнутая складка). Такое углубление появляется (раскрывается) при наддуве НТУ с образованием канавки треугольного профиля, которая образуется из-за смятия вулканизированного СТИРОСИЛа под давлением, сопровождающим размещение НТУ в компактном объеме;
- кратеры в поверхностном слое СТИРОСИЛа глубиной вплоть до кремнеземной ткани с характерным размером 5...7 мм. Такой кратер образуется за счет отслоения части СТИРОСИЛа при разъединении двух слипшихся поверхностей кремнеземной ткани пропитанной СТИРОСИЛом;
- крестообразные трещины слоя СТИРОСИЛа в местах двойного (углового) перегиба кремнеземной ткани, образующегося при укладке НТУ.

В дальнейшем удалось устранить дефекты, проявляющиеся в виде кратеров (раковин) в поверхностном слое СТИРОСИЛа путем покрытия наружной поверхности гибкой теплозащиты слоем талька, исключая возможность слипания поверхностей кремнеземной ткани, пропитанной СТИРОСИЛом, перед укладкой НТУ.

Для определения наличия скрытых дефектов, образующихся после укладки НТУ в компактный объем и оценки их влияния на эффективность гибкой теплозащиты при воздействии тепловых нагрузок во время спуска СА с НТУ в атмосфере, необходимо проведение дополнительных неразрушающих НТУ экспериментальных исследований.

1.1.3 Исследования структурной нелинейности материалов методами нелинейной акустики

Дефектоскопия материалов всегда была и остаётся одним из важнейших вопросов техники. Одним из определяющих факторов при разработке и внедрении новых методик является бюджет проекта и стоимость оборудования. В связи с этим большое внимание уделяется созданию бесконтактных дистанционных методов неразрушающего контроля, которые по соотношению цена/качество могли бы стать альтернативой используемым технологиям. В последнее время наблюдается заметный рост числа публикаций, посвящённых исследованию нелинейности неоднородных сред, а также сред с дефектами. Такие среды обладают большой структурной нелинейностью, которая связана с наличием дефектов. Такая нелинейность существенно превосходит нелинейность, связанную с ангармонизмом кристаллической решётки [11-12].

Одна из первых ключевых работ по изучению влияния дефектной структуры на упругие нелинейные свойства поли- и монокристаллов была выполнена в 1963 году В.А. Красильниковым с соавторами [13]. В этой работе было экспериментально показано, что наличие неоднородностей внутренней структуры: дислокаций, микротрещин, локальных внутренних напряжений существенно изменяет нелинейные упругие свойства твёрдых тел. Структурная нелинейность имеет локальный и пороговый характер [14]. Это свойство структурной нелинейности позволяет создать новые методы диагностики различных материалов, в том числе и биологических тканей [15]. В [16-17] с использованием лазерной доплеровской виброметрии методами нелинейной акустики были визуализированы одиночные дефекты в тонкой металлической пластине и в фантомах биологических тканей.

Эффекты нелинейной акустики амплитудно зависимы, поэтому в руки исследователей попадает новый параметр для исследования свойств структур и вещества [18]. В области взаимодействия зондирующих

сигналов могут излучаться волны с новыми частотами и направлениями распространения, которых не было в ансамбле исходных возмущений. Эти волны, рожденные на нелинейности среды, также несут информацию, полезную для диагностики.

Физические механизмы, приводящие к появлению больших нелинейностей вследствие дефектов структуры твердого тела, рассмотрены в работах О.В. Руденко [11,15].

На рисунке 1.6 изображена микротрещина, толщина которой меньше или порядка амплитуды смещения в акустической волне. В фазе сжатия трещина «прикрывается» и действующий модуль приближается к значению, характерному для сплошного тела. В фазе разрежения размер трещины увеличивается; при этом модуль меньше, чем в первом случае. Этот пример относится к так называемой двухмодульной нелинейной среде. Метод нелинейной акустодиагностики такого рода дефектов использовали для обнаружения участков непрочности в слоистых пластиках.

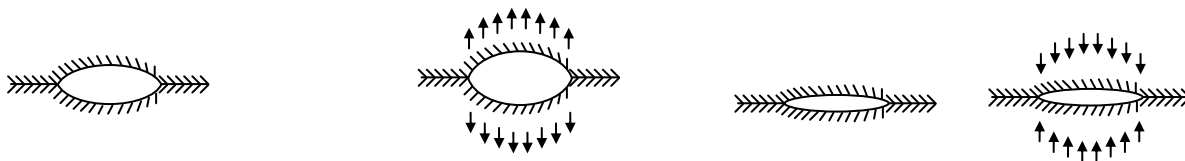


Рисунок 1.6. - Поведение трещины в акустическом поле, приводящее к появлению нелинейных эффектов.

На рисунке 1.7 проиллюстрирован второй механизм нелинейности, характерный для зернистых или поликристаллических сред. Этот механизм аналогичен известной в механике нелинейности контактов Герца и связан с тем, что при сжатии площадь контакта между зернами в среднем увеличивается, а при растяжении — уменьшается. Такое поведение («ужестчающаяся пружина») типично для слабо поджатых контактов.

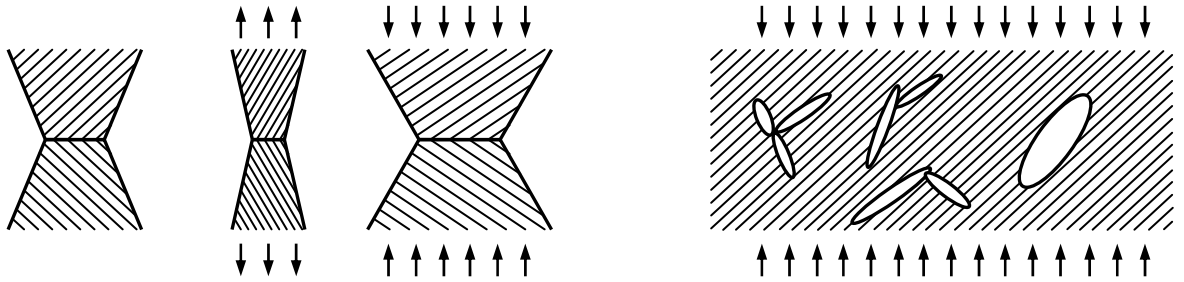


Рисунок 1.7. - Иллюстрация к механизму контактной нелинейности.

Модель твёрдого тела с трещинами.

Третий механизм связан с концентрацией напряжений вблизи трещин с малым радиусом кривизны. При деформации пористых тел в перемычках происходит усиление напряжений (зачерненные области на рисунке 1.7) и нелинейность материала каркаса проявляется более заметно. Если объемная концентрация таких локальных зон повышенной нелинейности высока, эффективный нелинейный модуль материала сильно возрастает.

Очевидно, что с ростом концентрации структурных неоднородностей должно наблюдаться не только возрастание нелинейности, но и снижение прочности материала. [15]

Чувствительную методику диагностирования, связанную с нелинейной акустикой, можно использовать для исследования структуры материалов. Среди прочих существуют два нелинейных эффекта, используемых для бесконтактной дефектоскопии. Во-первых эффект генерации высших гармоник на нелинейности, во-вторых эффект образования сигнала с комбинационными частотами в области нелинейного взаимодействия [18], [13]. Общий обзор данных эффектов приведён в работе К. Халлера [19]. Очень важным моментом является то, что нелинейные эффекты на структурной неоднородности в среде имеют место даже тогда, когда длина акустической волны намного больше пространственного размера неоднородности. Таким образом, для

диагностирования можно использовать волны более низких частот, нежели при ультразвуковом исследовании в линейном режиме. Это приводит к лучшему распространению звука, и даёт возможность исследовать объекты больших размеров [20-21].

Экспериментальные исследования по обнаружению структурных дефектов в веществах и, в частности, в эластичных материалах, проводились многими научными коллективами. Прежде всего следует отметить эксперименты с резиноподобными материалами, проведённых на кафедре акустики МГУ В.Г. Андреевым и А.В. Ведерниковым [12,22], по определению распределения сдвигового модуля упругости в неоднородных резиноподобных средах. Цель эксперимента заключалась в определении модуля сдвига по задержке сдвиговой волны. При этом возможно восстановить расположение и узнать размер структурных неоднородностей. Для эксперимента были изготовлены резиноподобные образцы кубической формы. Один образец был сделан двухслойным, в два других были сделаны мягкие вставки в форме слоя и в форме цилиндра. По измерению локальной скорости сдвиговых волн определялось распределение сдвигового модуля. Данная методика позволила определить наличие и положение неоднородностей с размерами порядка 4-5 мм.

Другая работа, посвящённая детектированию подповерхностных дефектов в фантомах биологических тканей, сделанных из резиноподобного материала, была выполнена на кафедре акустики МГУ М.Ю. Изосимовой и Е.В. Прохоровой [23]. При помощи лазерного сканирующего вибрметра они регистрировали сдвиговые колебания образца, возбуждённые динамиками в диапазоне частот от 2 до 100 Гц (рисунок 1.8).

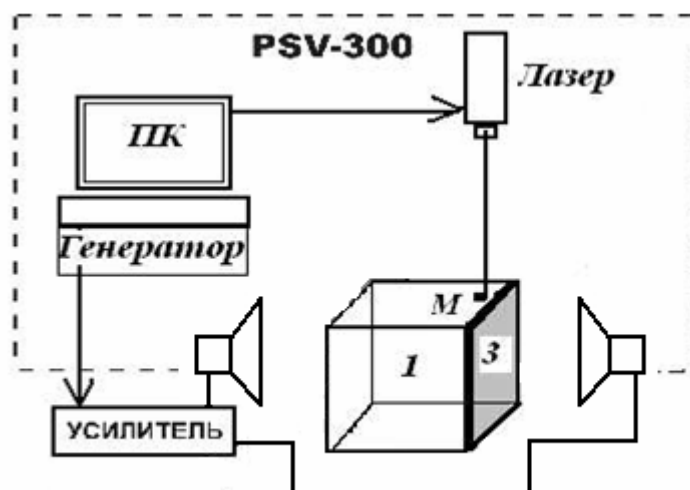


Рисунок 1.8 - Схема экспериментальной установки для определения модуля сдвига

Таким образом, была получена возможность определения наличия неоднородностей в подповерхностной (глубина до 1 см) структуре фантома.

В своей работе по определению сдвигового модуля в мягких тканях М. Финк с соавторами [24] измеряли смещения, вызванные распространением низкочастотной импульсной сдвиговой волны. Предложена методика быстрой ультразвуковой визуализации для отслеживания и исследования отклонений при распространении сдвиговой волны в желатиновом образце. Было показано, как наличие структурных неоднородностей, приводящее к изменению значений модуля сдвига в образце, влияет на распространение сдвиговой волны. И решена обратная задача по определению расположения структурных неоднородностей по распределению значений модуля сдвига.

Определение зависимости упругих свойств от наличия структурной нелинейности в различных типах биологических тканей проводилось М. Фатем и Дж. Гринлифом с соавторами. Например, в работе [20], посвящённой исследованию сдвигового модуля, посредством методов акустической виброметрии рассказывается об установке для дистанционной дефектоскопии мягких биологических тканей, в частности, о применении данной методики для детектирования окаменелых артерий в тканях молочной железы. Авторами

были проведены эксперименты, в ходе которых исследуемый образец облучался скрещивающимися УЗ пучками. Измерения производились в ванне с водой. Частоты зондирующих сигналов были близки к 3 МГц и отличались друг от друга на 1%. В результате взаимодействия на неоднородности, возникал сигнал на комбинационных, суммарной и разностной частотах. Этот сигнал регистрировался при помощи гидрофона. При пространственном сканировании образца, по величине образующегося сигнала нелинейного отклика, можно было сказать об изменении значения нелинейности в веществе, а следовательно, о наличии структурной неоднородности. Схема установки, используемой для измерений, показана на рисунке 1.9.

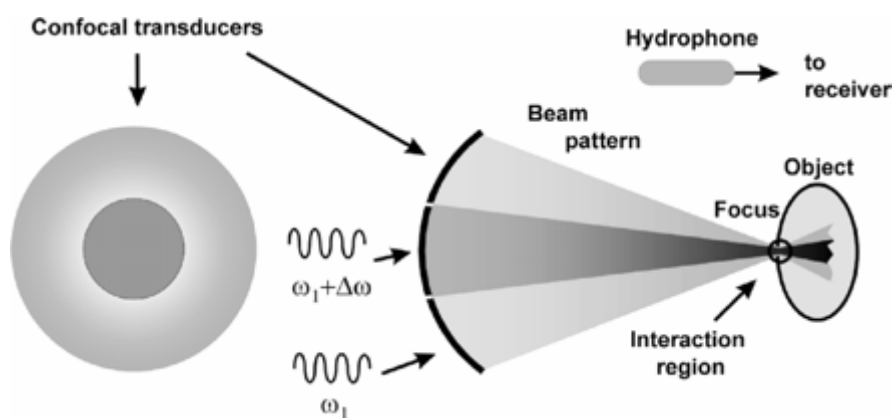


Рисунок 1.9 - Схема экспериментальной установки, используемой в опытах М. Фатеми и Дж. Гринлифа

1.2 Экспериментальная установка для исследования эластичных материалов

В данном разделе рассматривается разработка экспериментальной установки для дистанционной (бесконтактной) диагностики структурных дефектов эластичных (резиноподобных) материалов. В основу работы установки положено нелинейное взаимодействие двух акустических пучков конечной амплитуды в исследуемом материале. Эффективность этого процесса определяется величиной нелинейного параметра в области взаимодействия. Если на дефект, с характерными размерами d , в структуре вещества,

воздействуют две плоские волны с частотами ω_1 и ω_2 (их амплитуды давления $P(\omega_1)$ и $P(\omega_2)$), то на границе дефекта, в результате нелинейного взаимодействия, возникает сигнал комбинационной частоты $P(\omega_1 \pm \omega_2)$ [21].

$$P(\omega_1 \pm \omega_2) = \frac{Nd}{4c^3 \rho} (\omega_1 \pm \omega_2) P(\omega_1) P(\omega_2), \quad (1.1)$$

где c , ρ - известные скорость звука и плотность среды. Как видно из формулы (1.1) при постоянных значениях амплитуды падающих волн $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$ величина сигнала на комбинационных частотах $P(\omega_1 \pm \omega_2)$ определяется величиной нелинейного параметра N . Если величина нелинейного параметра зависит от наличия дефектов в исследуемом материале, то при точечном сканировании образца, по величине амплитуды сигнала на комбинационных частотах, имеется возможность восстановить пространственное распределение структурных дефектов в исследуемом объекте.

Таким образом, имеется возможность для диагностики структурной неоднородности в исследуемом образце, основанной на регистрации амплитуды сигнала на комбинационных частотах, образующегося в результате нелинейного взаимодействия.

1.2.1 Принцип работы экспериментальной установки

Для реализации описанной методики была разработана компьютеризированная экспериментальная установка. Основной частью экспериментальной установки являются две фокусирующие ультразвуковых антенны (рисунок 1.10)

Эти антенны представляют собой фокусирующие излучатели УЗ в воздух, собранные из точечных УЗ излучателей, используемых в качестве системы «парктроник». 60 точечных излучателей с резонансной частотой 39 кГц расположены по концентрическим окружностям с радиусами,

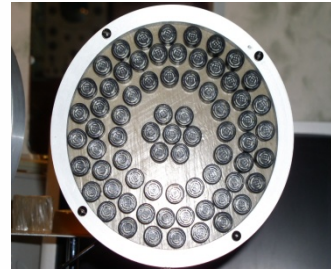
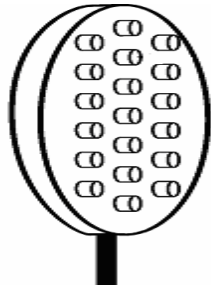


Рисунок 1.10 - УЗ антенны

соответствующими зонам Френеля. Таким образом достигается эффект фокусировки. Фокусное расстояние антенн 24,5 см, максимальный уровень звукового давления в фокусе до 140 дБ. Диаметр перетяжки около 2 см. Эффективность фокусировки излучателей была определена при помощи сканирующего лазерного виброметра компании Polytec PSV-300 [25-26]. Полученные распределения звукового давления на основной и второй гармонике представлены на рисунке 1.11.

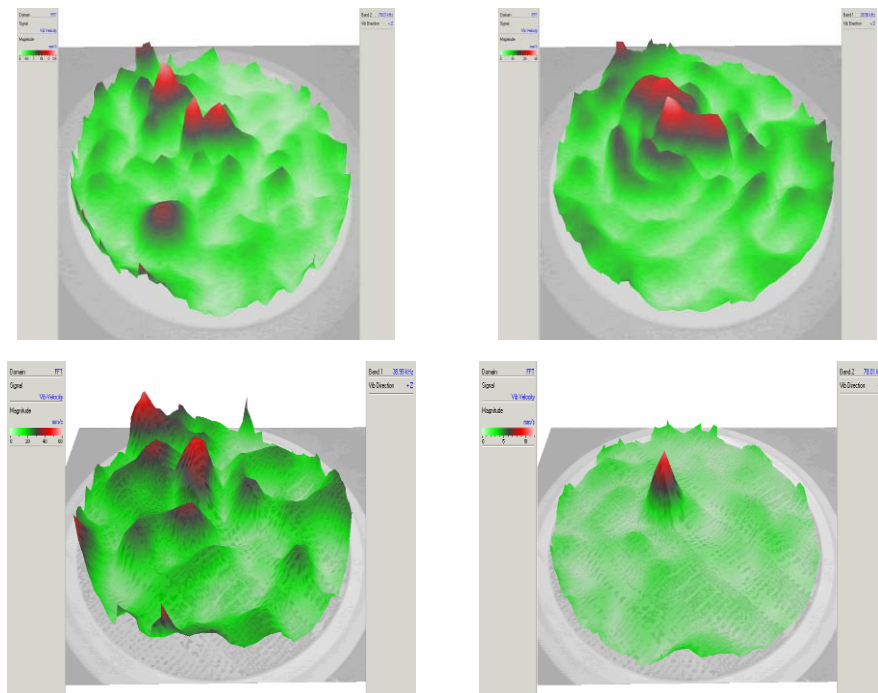


Рисунок 1.11 - Пространственное распределение звукового давления излучающих антенн на фокусном расстоянии (верхний ряд для первого излучателя, нижний для второго)

Можно посчитать звуковое давление в фокусе излучателя по формуле $p = \rho V c$. Плотность воздуха равна $1,29 \text{ кг/м}^3$, колебательная скорость, измеренная лазерным виброметром около 40 мм/с , а скорость звука в воздухе 340 м/с , следовательно давление $p = 17 \text{ Па}$.

Общая блок-схема установки представлена на рисунке 1.12. С генераторов (1) и (2) сигналы с частотами $38,5 \text{ кГц}$ и $39,5 \text{ кГц}$ подаются на перемножитель частот (3) и на усилители мощности (4)-(5). В перемножителе частот (3) вырабатываются сигналы с суммарной $\omega_2 + \omega_1 = 78 \text{ кГц}$ и с разностной $\omega_2 - \omega_1 = 1 \text{ кГц}$ частотами, которые подаются в качестве опорного сигнала на усилители-преобразователи измерительные УПИ-2 (12) и (13). После усилителей (4) и (5) сигналы подаются на излучающие антенны (6) и (7). Внешний вид установки представлен на рисунке 1.13.

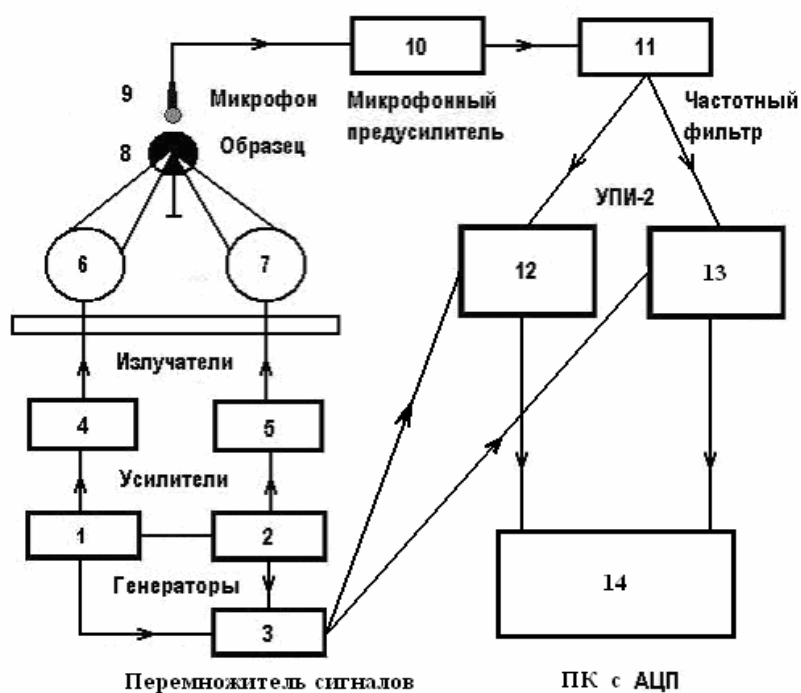


Рисунок 1.12 - Общая блок-схема установки



Рисунок 1.13 - Экспериментальная установка

Излучатели установлены на оптической скамье, что позволяет точно определить их расположение по максимуму сигнала и поместить в фокус исследуемый образец (8). В результате нелинейного взаимодействия, в исследуемом образце, в спектре отраженного сигнала, помимо основных частот, излучаемых антеннами, появляются сигналы с суммарной: $\omega_2 + \omega_1 = 78$ кГц, и с разностной: $\omega_2 - \omega_1 = 1$ кГц частотами (рисунок 1.14). Нелинейный отклик регистрируется конденсаторным микрофоном (9) и через микрофонный предусилитель (10), и частотные фильтры высоких и низких частот (11), подаётся на входы двух УПИ-2 (12) и (13). Это позволяет нам производить измерения, как на разностной, так и на суммарной частотах.

Далее усиленные квадратурные компоненты сигналов с каналов а и b обоих УПИ-2 подаются на 12 разрядную плату АЦП компании L-Card, L-305, установленную в персональный компьютер (ПК). После дискретизации сигналов они обрабатываются с помощью специальной программы Power Graph 2.8. Амплитуда результирующего сигнала считается по формуле $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Измерение величины нелинейного отклика в зависимости от координаты позволяет определить пространственное распределение нелинейного параметра в образце и определить координаты дефектов.

В качестве нулевой отметки во всех экспериментах с фантомами биологической ткани был взят фоновый шум, измеренный при облучении образца без структурных неоднородностей.

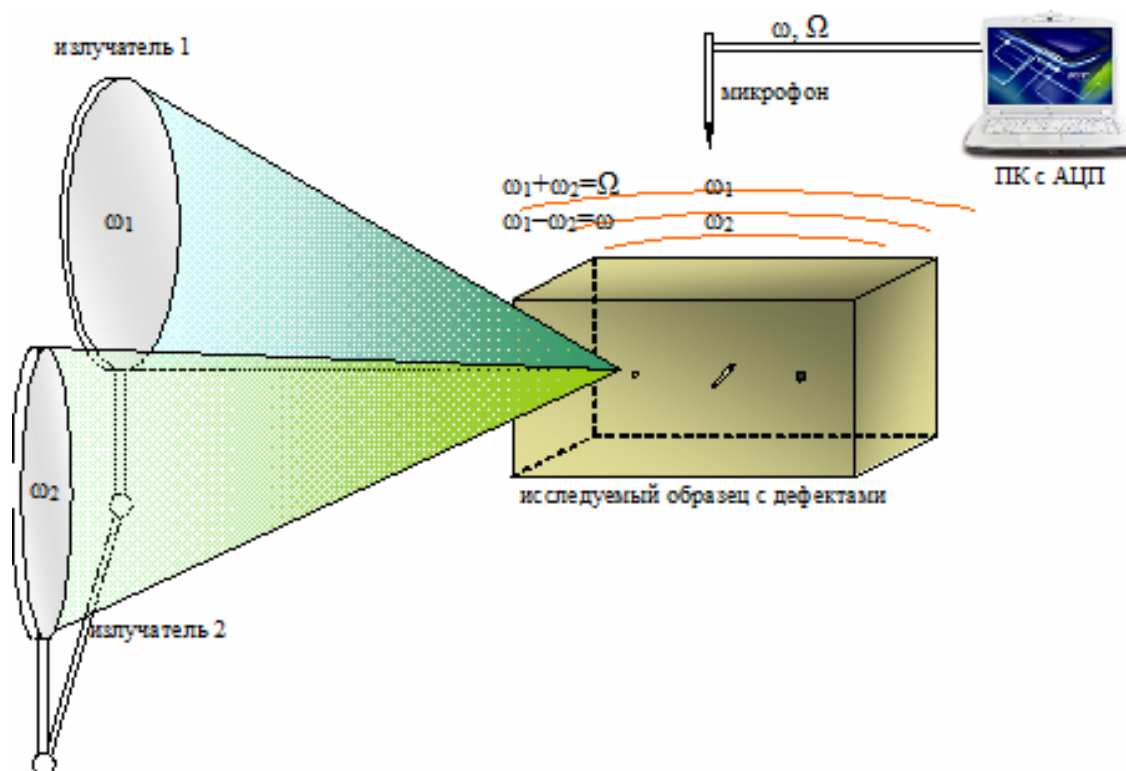


Рисунок 1.14 - Схема измерений сигнала нелинейного отклика в образце

1.2.2 Тестовые измерения с модельной нелинейностью

Для определения работоспособности собранной экспериментальной установки была проведена серия экспериментов с моделью трещины, обладающей свойствами хлопающей нелинейности (рисунок 1.15).

Металлизированная с одной стороны полимерная плёнка толщиной 20 микрон, растянутая на регулируемом расстоянии от шероховатого металлического основания диаметром 5 см. Между металлическим основанием и покрытием пленки подавалось постоянное электрическое напряжение, которое создавало электростатическую силу, прижимающую пленку к основанию. Изменяя постоянное напряжение, можно менять величину поджатия плёнки (упругость модельной трещины). Именно такой механизм позволяет симитировать хлопающую нелинейность. При нелинейном взаимодействии на модели, возникают колебания с разностной и суммарной частотами и амплитудой, зависящей от величины локальной нелинейности

(степени электростатического поджатия) и от амплитуды зондирующих сигналов.

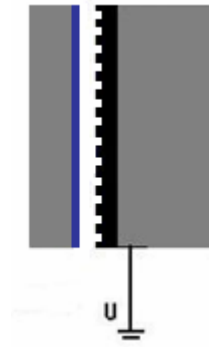


Рисунок 1.15 - Модель трещины

В результате серии экспериментов, произведённых с моделью, были получены зависимости сигнала нелинейного отклика от величины зондирующих сигналов, представленные на рисунке 1.16 [27].

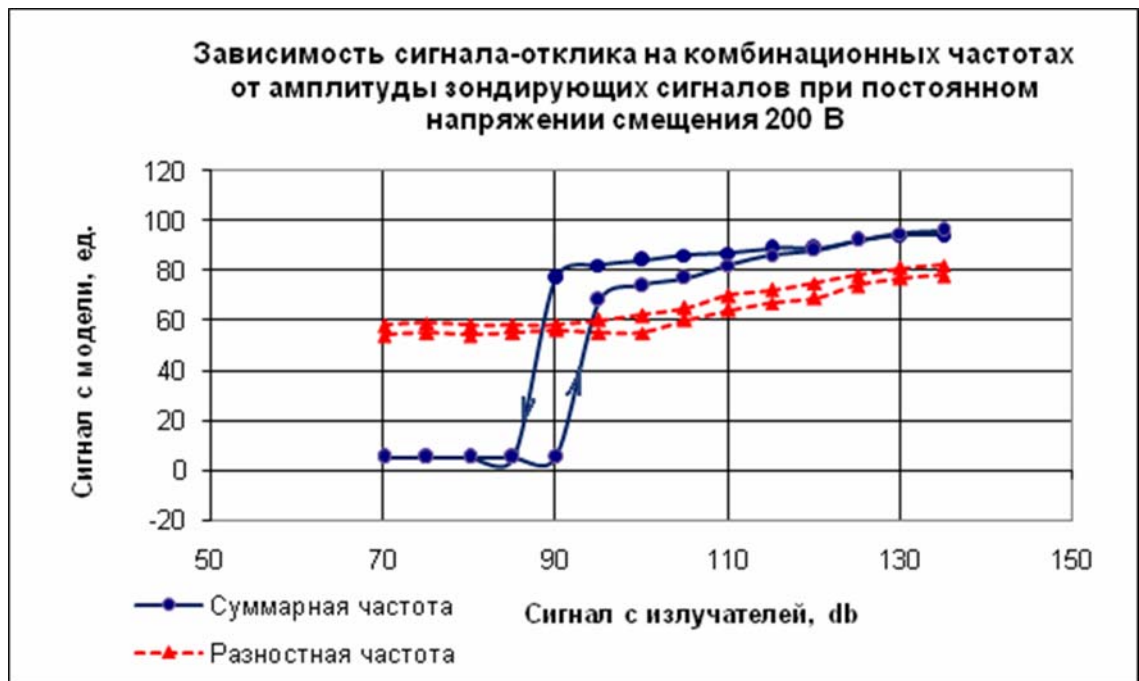


Рисунок 1.16 - Гистерезисная зависимость сигнала нелинейного отклика от амплитуды зондирующих сигналов при реверсивном изменении их амплитуды

Из графика хорошо видно, что нелинейность имеет пороговый характер. Причём эффективность на суммарной частоте на 15-20 дБ выше, чем на разностной частоте. Превышение сигнала на разностной частоте 1 кГц над фоновым лабораторным шумом мало. На суммарной частоте 78 кГц фонового шума нет. Так же наблюдается эффект «залипания», то есть, для возбуждения сигнала с трещины при увеличении зондирующего сигнала требуется приложить большее звуковое давление, чем при срыве в случае уменьшения величины зондирующего сигнала.

Также была получена зависимость сигнала нелинейного отклика с модели при разных упругих свойствах модельной трещины, которые изменялись величиной подаваемого постоянного напряжения смещения, при фиксированном сигнале с излучателей 120 дБ (рисунок 1.17).

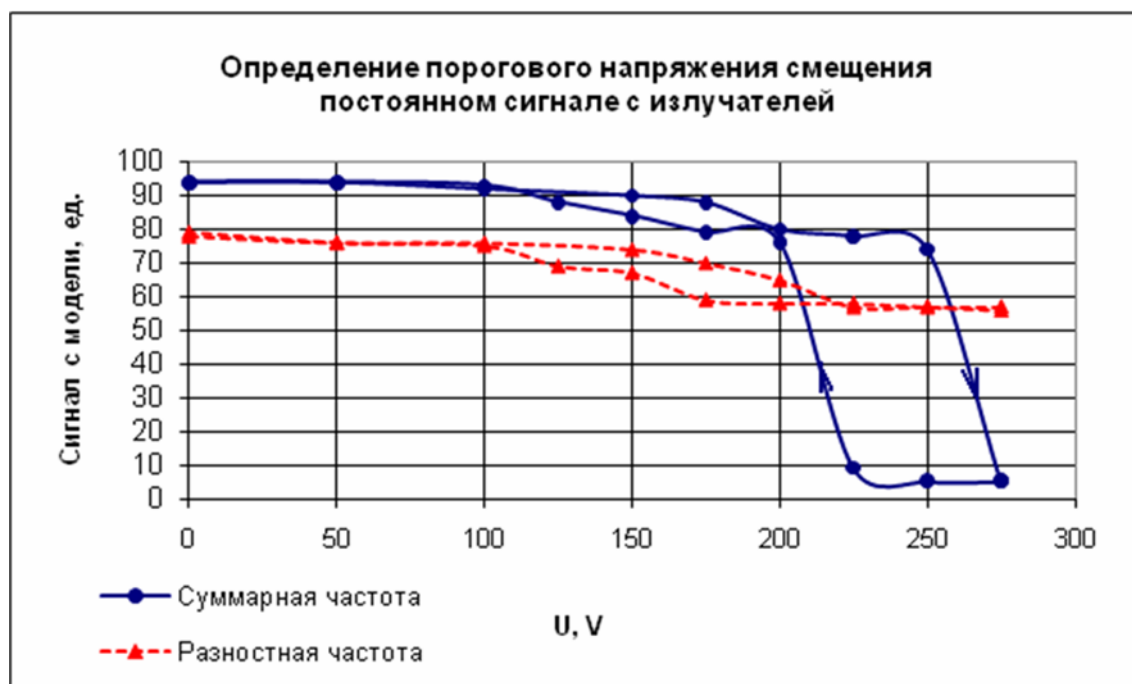


Рисунок 1.17 -Зависимость сигнала нелинейного отклика от напряжения смещения при реверсивном изменении напряжения

В этом случае также наблюдался пороговый характер возбуждения и гистерезис при реверсивном изменении напряжения смещения. Остановка колебаний плёнки происходит при напряжении смещения 250 В, а устанавливаются колебания при 200 В. Поскольку наша модель является конденсатором, то при колебаниях плёнки возникает дополнительная ёмкость, то есть возбуждение плёнки происходит при меньшем напряжении смещения, чем срыв колебаний. Таким образом, можно сказать, что для растяжения требуется меньшее напряжение, чем для сжатия, что согласуется с теорией [28]. Это доказывает, что наша модель была справедливо принята в качестве имитации структурной нелинейности в твёрдом теле.

Величина сигнала на разностной частоте меньше величины сигнала на суммарной частоте также на 15-20 дБ, что соответствует выражению (1).

Проведённые измерения показали возможность регистрации амплитуды сигнала нелинейного отклика от структурной нелинейности в веществе по разработанной нами методике. По ходу эксперимента было выявлено оптимальное расположение излучателей и настройки принимающего и излучающего трактов для достижения максимальной эффективности измерительной установки.

Завершающим этапом настройки системы стало определение разрешающей способности установки. В связи с плохой фокусировкой излучающих антенн было решено, в дальнейшем, использовать ограничивающий экран – диафрагму. Сигнал с излучателей был постоянным и равным 120 дБ. Производилось диафрагмирование зондирующих сигналов в области взаимодействия (рисунок 1.18).

Измерения показали, что существенное уменьшение сигнала происходит при радиусе диафрагмы меньше 0,5 см, поэтому во всех дальнейших измерениях использовалась ограничивающая диафрагма с диаметром 1 см.

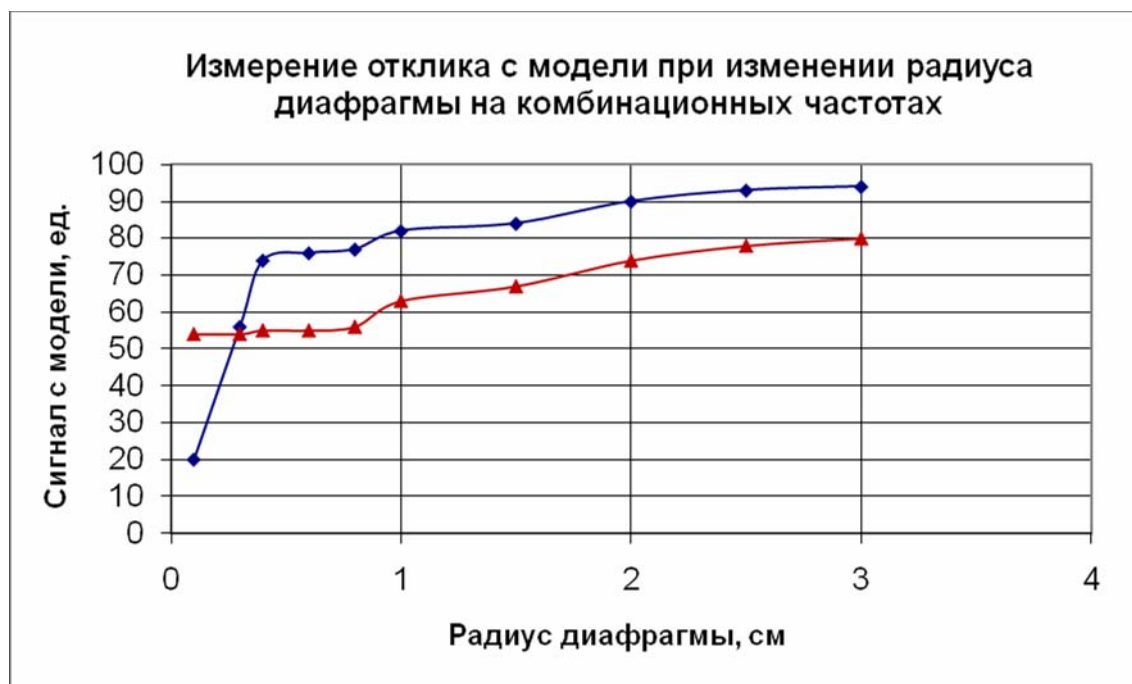


Рисунок 1.18 - Зависимость величины сигнала нелинейного отклика от диаметра ограничивающей диафрагмы

1.2.3 Расчет и создание конденсаторных излучателей УЗ

Для увеличения разрешающей способности и эффективности экспериментальной установки были рассчитаны и изготовлены два фокусирующих УЗ излучателя конденсаторного типа [29].

Самым первым и простым способом фокусировки звука является фокусировка сферическим зеркалом, описанная впервые в «Натуральной Магии» Д. Д. Порты в 1589г. [30].

В нашем случае, ввиду имеющихся технических возможностей, было решено сделать излучатели на основе принципа зональной пластинки. Принцип действия зональной пластинки легко объяснить, исходя из представления о зонах Френеля [31].

Если изобразить волновые фронты, распространяющиеся от точечного источника (рисунок 1.19), и пересечь их плоскостью (АА), то пересечения волновых поверхностей, отличающихся по фазе на $\frac{\pi}{2}$, с этой плоскостью будут

иметь вид ряда concentрических окружностей. Радиусы этих окружностей будут возрастать по закону

$$R_n = \sqrt{\left(f + n \frac{\lambda}{2}\right)^2 - f^2} \quad (1.2)$$

где f – расстояние от источника до плоскости, n - номер окружности, R_n - её радиус и λ - длина волны. Эти окружности разграничивают на плоскости (AA) зоны Френеля, отличающиеся тем свойством, что фазы колебаний распространяющейся от нашего источника волны будут менять свой знак при переходе через границу двух зон.

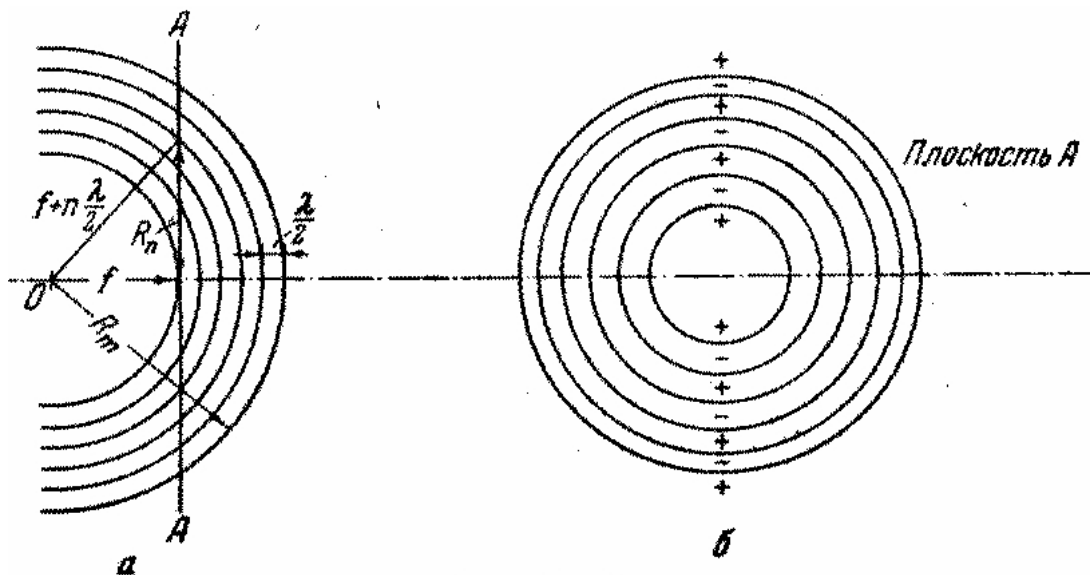


Рисунок 1.19 - Иллюстрация к зонам Френеля

Если теперь в плоскости (AA) закрыть непрозрачными экранами все зоны, имеющие одинаковый знак, например, все чётные, то оставшиеся зоны другого знака создадут за плоскостью плоскую волну (рисунок 1.20), распространяющуюся вправо. Наоборот, в силу взаимности [32], если на экран будет падать плоская волна, то за экраном мы получим сходящуюся сферическую волну с центром, находящимся на расстоянии f от плоскости экрана. Все элементы плоской волны, прошедшие через прозрачные зоны экрана, будут приходить в некоторую точку на оси с фазой одного знака.

Другими словами, такой экран с вырезами обладает свойством фокусирования; он называется зональной пластинкой. Как видно из рисунке 1.15 и по определённым параметрам для имеющихся излучающих УЗ антенн, точность фокусировки низкая, из-за чего пришлось ввести в установку ограничивающую диафрагму. Тем не менее, такой точности фокусировки недостаточно при измерениях, по детектированию малых по своим линейным размерам структурных дефектов в резиноподобных материалах, поскольку не получится точно определить их положение.

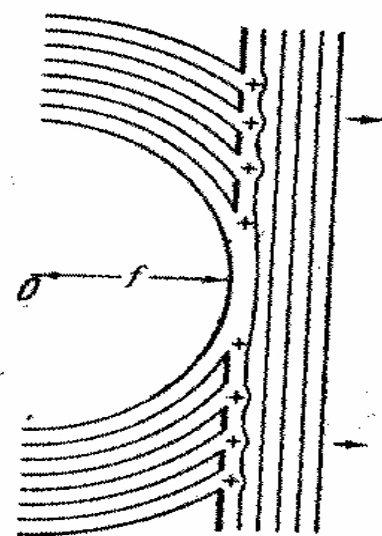


Рисунок 1.20 - Фокусировка зональной пластинкой

Для увеличения разрешающей способности было решено сделать новые УЗ излучатели, тем самым увеличить частоту зондирующих сигналов. Поэтому были собраны два УЗ излучателя на основе параметров, рассчитанных выше. В качестве основания были взяты 2 диска из фольгированного гетинакса с радиусом 12 см (рисунок 1.21). На них были прорезаны изолирующие канавки по окружностям с радиусами, соответствующими рассчитанным радиусам зон Френеля для фокусировки излучения на расстоянии 25 см от пластины на частотах 78 кГц для первого излучателя и 124 кГц для второго. Такие частоты были выбраны в результате измерения измеренной АЧХ обоих дисков до нарезания зон Френеля. На рисунке 1.22 видно, что у одного диска наблюдается

явный максимум интенсивности излучения на частоте 78 кГц, а у второго на частоте 124 кГц.

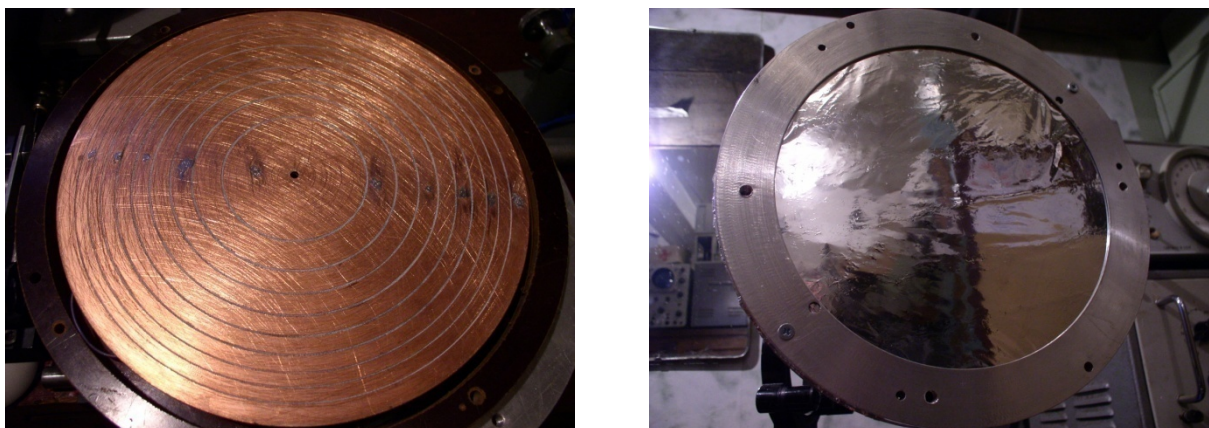


Рисунок 1.21 - Зоны Френеля, прорезанные на гетинаксовом диске и фотография излучателя в сборе

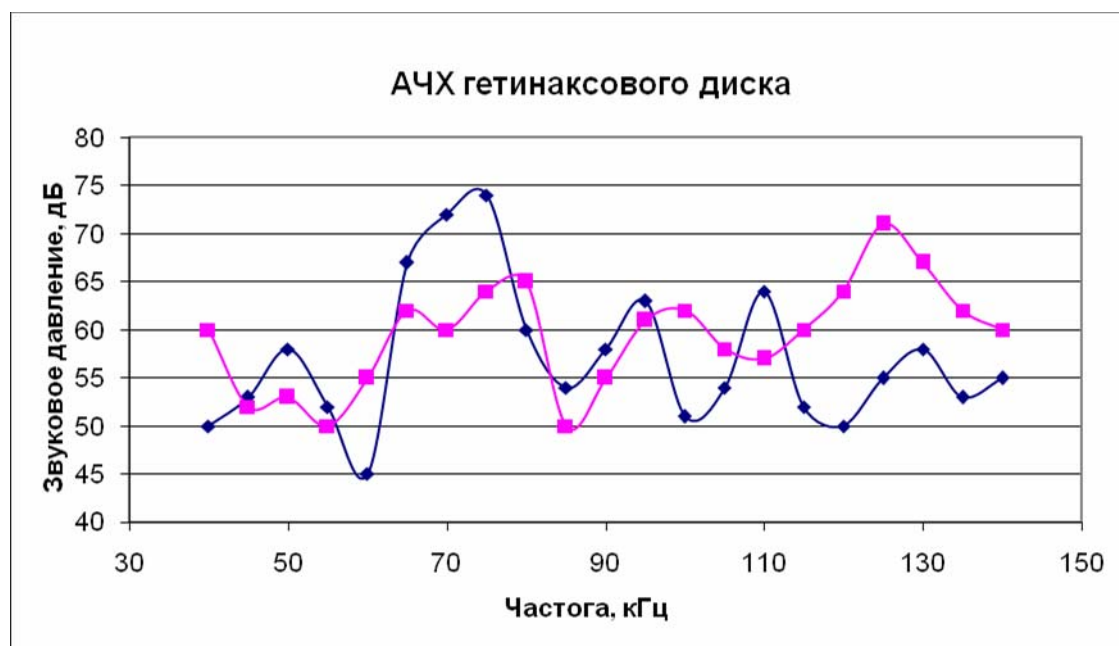


Рисунок 1.22 - АЧХ дисков из фольгированного гетинакса

В результате для расчета первого излучателя были выбраны следующие параметры:

Фокусное расстояние $f = 25$ см, частота $F = 78000$ Гц. Скорость звука в воздухе 340 м/с

Для второго излучателя:

Фокусное расстояние $f = 25$ см, частота $F = 124000$ Гц. Скорость звука в воздухе 340 м/с.

Таким образом, используя выражение (2) для расчёта радиусов зон Френеля мы получили следующие значения:

фокусное расстояние 25 см частота 78000 Гц радиус зоны Френеля в см	фокусное расстояние 25 см частота 124000 Гц радиус зоны Френеля в см
3,308313261	3,712796396
4,688803317	5,264986069
5,754982165	6,465729942
6,659562011	7,486094657
7,461549162	8,392134823
8,191133553	9,217624679
8,86620692	9,98256714
9,498399059	10,69995574
10,09576879	11,3787883
10,66416962	12,02559593
11,20800977	12,64529383
11,73070567	13,24168867
12,23496757	13,81779815
12,72298749	14,37606124
13,19656747	14,91848156
13,65720977	15,44672818
14,1061819	15,96220833
14,54456462	16,46612105
14,97328807	16,95949746
15,39315934	17,44323164

На чётные и нечётные зоны подаётся переменный сигнал в противофазе и постоянное напряжение смещения. Над поверхностью диска натянута металлизированная полиэтиленовая плёнка толщиной 10 микрон, которая колеблется с частотой подаваемого на диск переменного сигнала и является излучающим УЗ элементом. Характеристики были определены при помощи лазерного виброметра фирмы Polytec PSV-300 [26]. Получились два новых

фокусирующих УЗ излучателя с фокусным расстоянием 24,7 см и 24,9 см. Диаметр перетяжки, по уровню ослабления сигнала в 2 раза, равен 0,6 см, длина перетяжки около 2 см. Амплитуда звукового давления в фокусе составила 127 дБ у первого излучателя на частоте 77,5 кГц и 129 дБ у второго излучателя на частоте 118 кГц. Фокус располагается на оси, проходящей через геометрический центр излучателей (рисунок 1.23).

Распределение колебаний плёнки по поверхности излучателя показано на рисунок 1.24. Измерения по определению АЧХ и длины перетяжки были произведены при помощи лазерного сканирующего виброметра и с микрофоном. После сравнения и обработки результатов построены следующие зависимости:

Если взять за длину перетяжки расстояние, на котором уровень излучаемого сигнала превышает 120 дБ, то для обоих излучателей получим длину перетяжки примерно равную 2 см (рисунок 1.25).

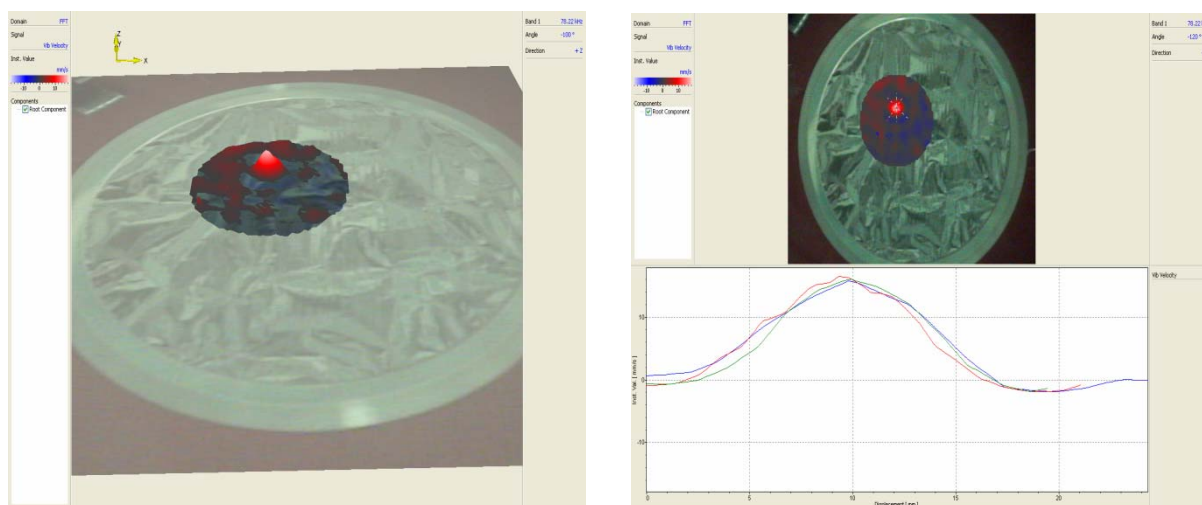


Рисунок 1.23 - Пространственное распределение звукового давления на фокусном расстоянии излучателя с частотой 78 кГц

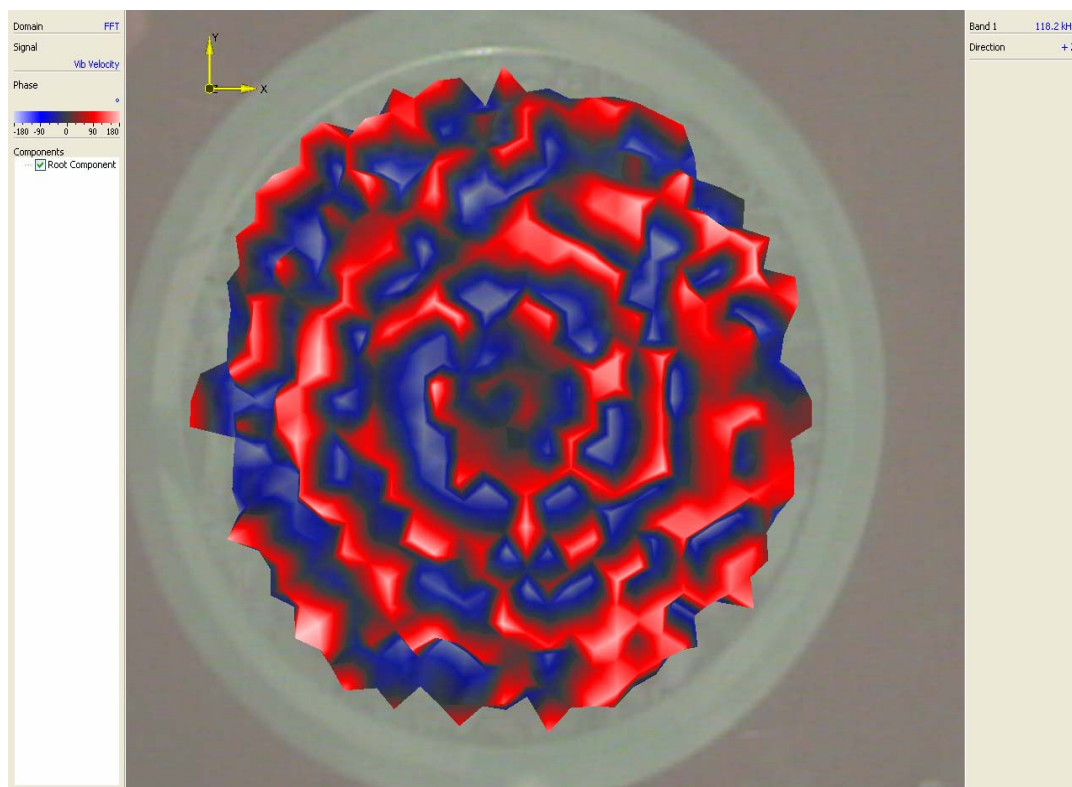


Рисунок 1.24 - Пространственное распределение звукового давления по поверхности излучателя с частотой 119 кГц

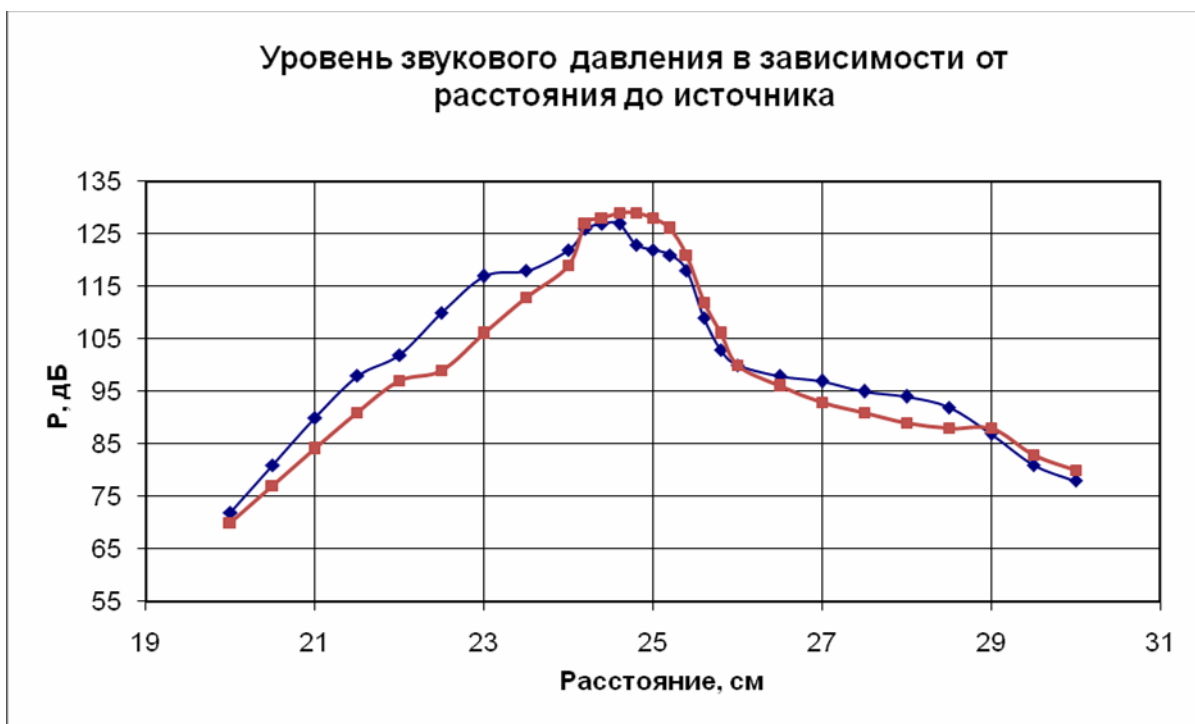


Рисунок 1.25 - Уровень звукового давления в зависимости от расстояния до источника на оси излучателя

АЧХ полученных излучателей представлена на рисунке 27:

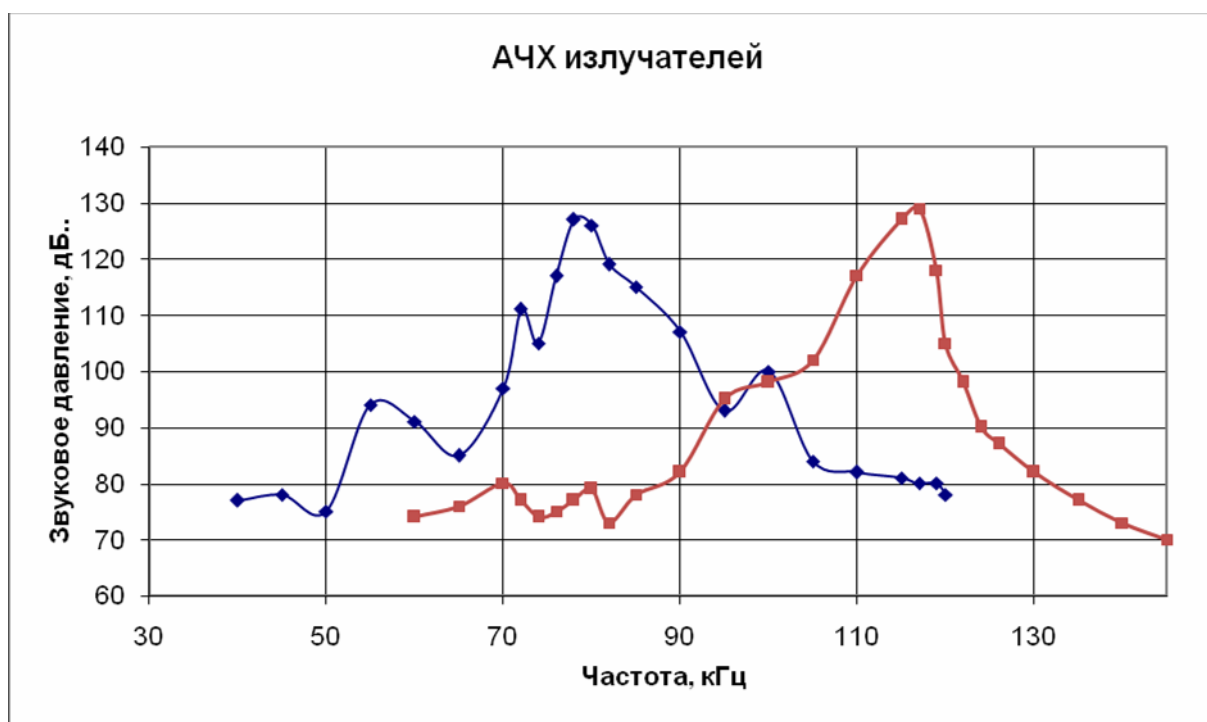


Рисунок 1.26 - АЧХ излучателей

1.2.4 Исследуемые образцы

В качестве объектов исследования были взяты образцы, имитирующие эластичные материалы. Они представляют собой резиноподобные материалы, схожие по своим акустическим свойствам с реальными материалами гибкой тепловой защиты.

В качестве первичной модели биологической ткани были изготовлены 3 желатиновых образца на основе воды и канцелярского клея [21]. Плотность такого материала близка к 1000 кг/м^3 , скорость звука порядка 1400 м/с . Образцы имели форму параллелепипеда с размерами $5*5*2,5 \text{ см}$. В первом образце на глубине $0,5 \text{ см}$ и $2,0 \text{ см}$ были расположены крупинки пшена. Во втором образце вместо крупы пшена на глубине $0,5 \text{ см}$ и $2,0 \text{ см}$ была расположена гречневая крупа. В третьем были сделаны разрезы различной глубины.

Во втором случае был изготовлен образец из силикона. Плотность такого материала составляет примерно 1200 кг/м^3 . Длина образца 7 см, ширина 5 см, толщина 2,5 см. Посередине образца на глубине 0,5 см с шагом 1,5 см были расположены следующие неоднородности: крупинка пшена, внутренний разрез длиной 0,5 см и крупинка гречки. (рисунок 1.27) Соответственно при облучении с обратной стороны глубина залегания дефектов увеличивается до 2 см.

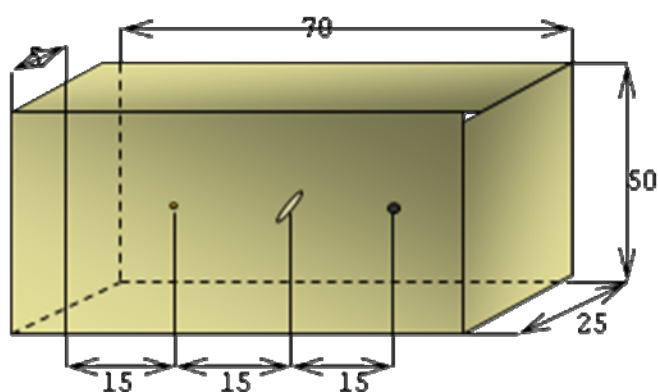


Рисунок 1.27 - Силиконовый образец с контрастными неоднородностями

В качестве конечной, максимально приближенной к реальности модели, был изготовлен фантом из резиноподобного полимерного материала на основе пластисола. Основные параметры исследуемого фантома: плотность 1000 кг/м^3 , скорость звука 1380 м/с , модуль сдвига 10 кПа [12,22]. В нём случайным образом были расположены структурные неоднородности – 5 силика-гелевых шариков. Шарика были утоплены на глубину, 3, 5, 10, 15 и 25 мм. Образец имеет линейные размеры: длина, толщина и высота соответственно $12*3,5*8 \text{ см}$ (рисунок 1.28).

Основной задачей измерений с этим образцом является проверка возможности использования новых конденсаторных УЗ излучателей для точного определения места положения подповерхностных дефектов [33]. И определение максимальной возможной глубины диагностики.

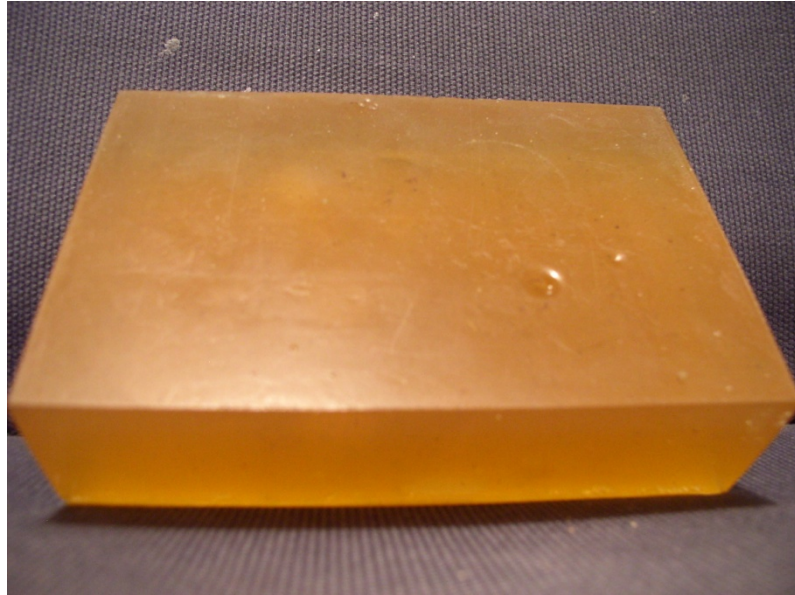


Рисунок 1.28 - Фантом из пластисола

1.2.5 Результаты экспериментальных исследований

В данном разделе представлены основные результаты экспериментальных исследований. Результаты измерений с дефектами в желатиновых образцах представлены на рисунках 1.29-1.33.

Результаты сканирования показывают эффективность используемой нами схемы измерений для детектирования в среде неоднородностей, контрастных по своим упругим свойствам по сравнению с самой средой. Такое исследование эффективно при глубине залегания дефектов до 2 см.

Изменение величины сигнала нелинейного отклика в отсутствии дефекта может быть вызвано неоднородность структуры самого вещества, например, не размешанные до однородного состояния хлопья желатина.

Результаты измерений со вторым желатиновым образцом, содержащим гречневую крупу представлен на рисунке 1.30.

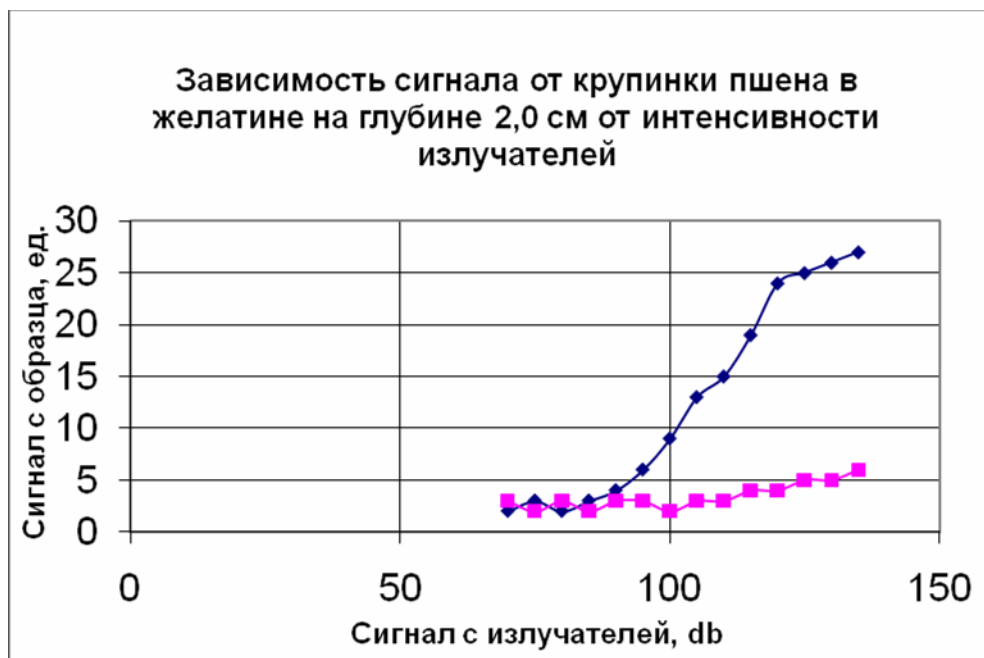
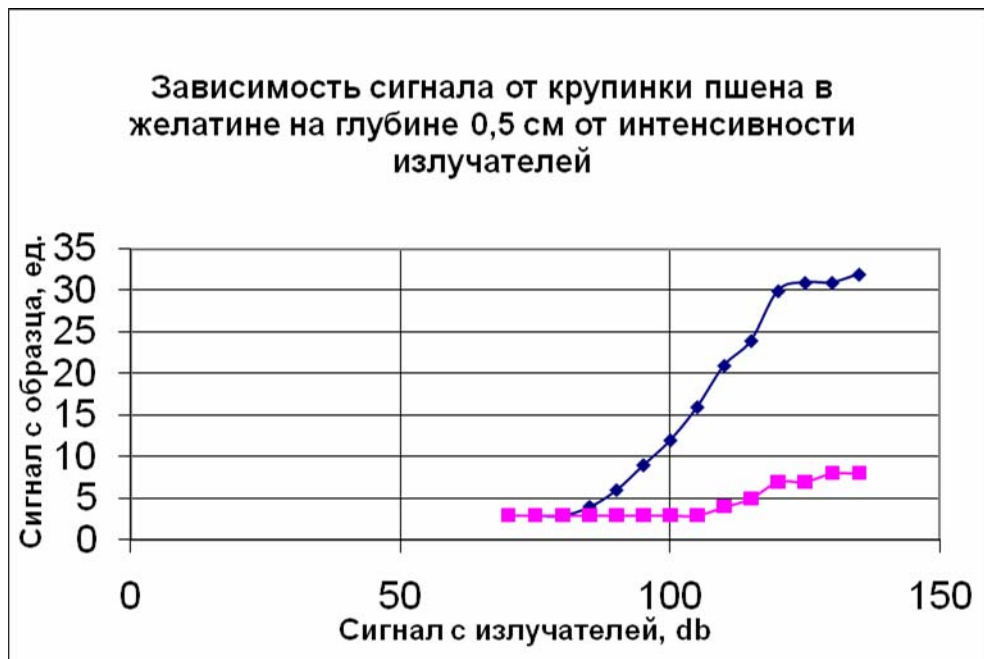


Рисунок 1.29 - Измерения с желатиновым образцом с заложенной крупинкой пшена

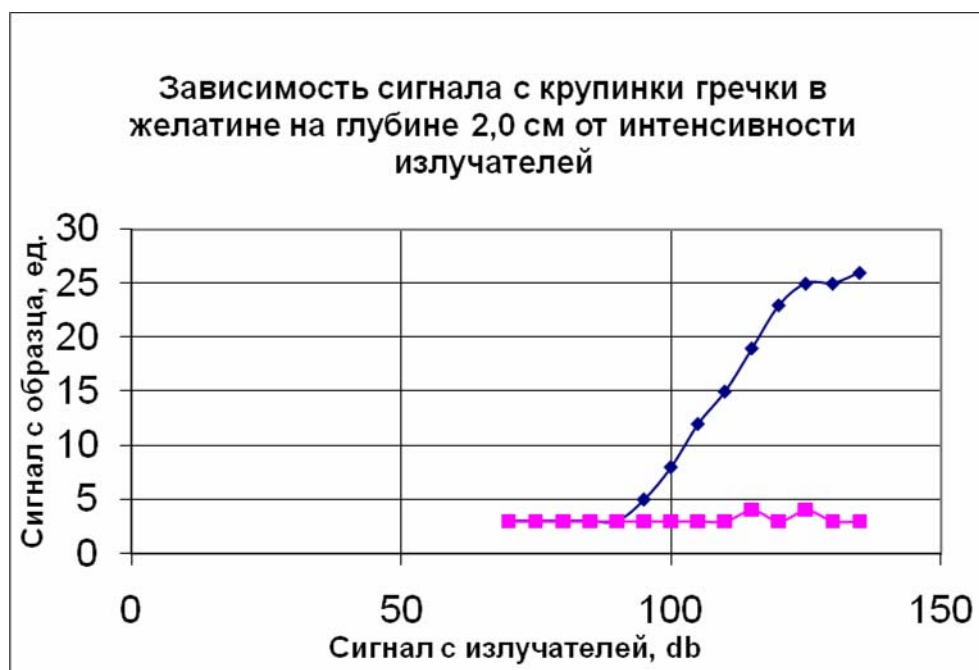
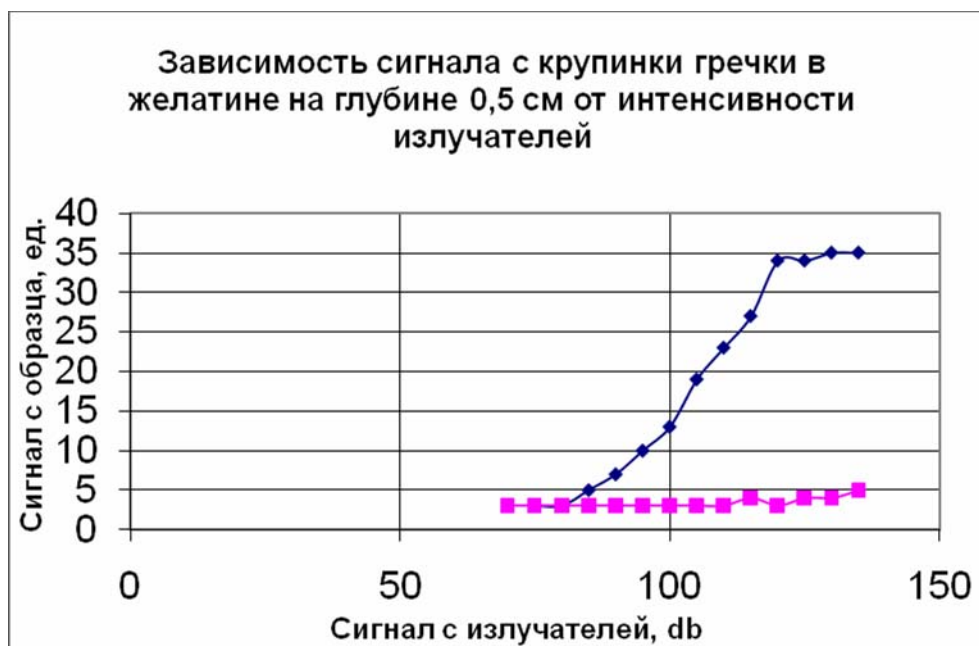


Рисунок 1.30 - Измерения с желатиновым фантомом с заложенной крупинкой гречки

В случае с крупинкой гречки величина нелинейного отклика больше, чем в случае пшена. Скорее всего, это вызвано контрастом упругих свойств на границе дефекта. А при массах пшена и гречки, близких по своим значениям, площадь поверхности крупинки гречки значительно больше площади

поверхности крупинки пшена. Таким образом, поверхность, на которой происходит генерация сигнала нелинейного отклика, у гречки больше.

Другой разновидностью структурной неоднородности можно считать образование воздушной полости в веществе. В образце была сделана серия надрезов различной глубины: 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 и 1 см соответственно. Ниже приведены результаты измерений на таких разрезах. Видно, что при увеличении глубины разреза растёт величина нелинейности, а следовательно и амплитуда регистрируемого сигнала

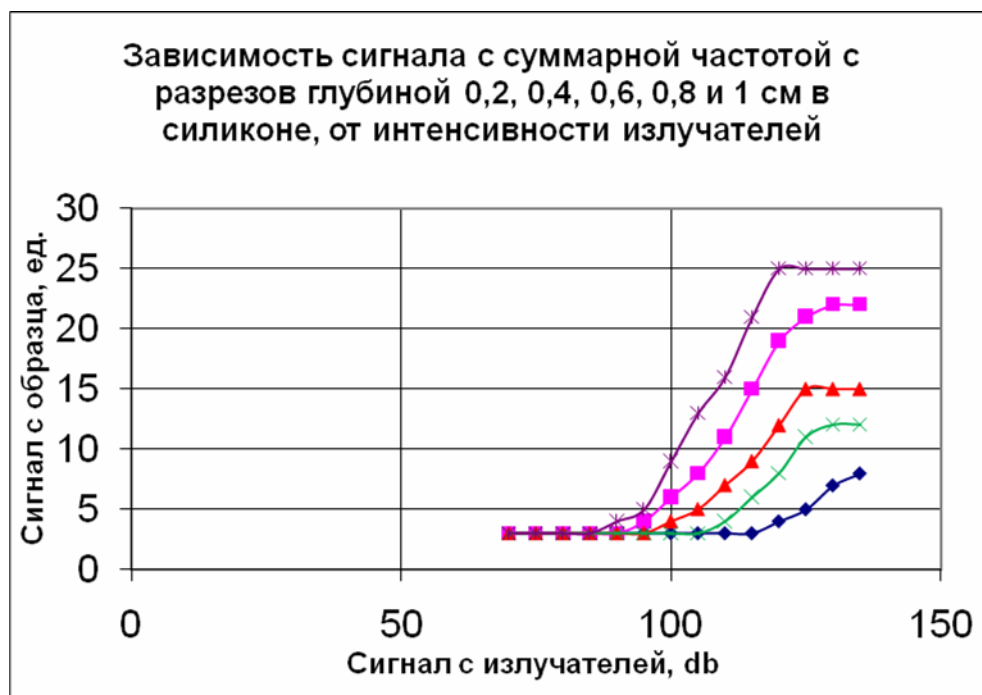


Рисунок 1.31 - Измерения на разрезах, сделанных на силиконовом фантоме

Далее приводятся результаты, полученные в ходе экспериментов с образцом из силикона (рисунки 1.33-1.35).

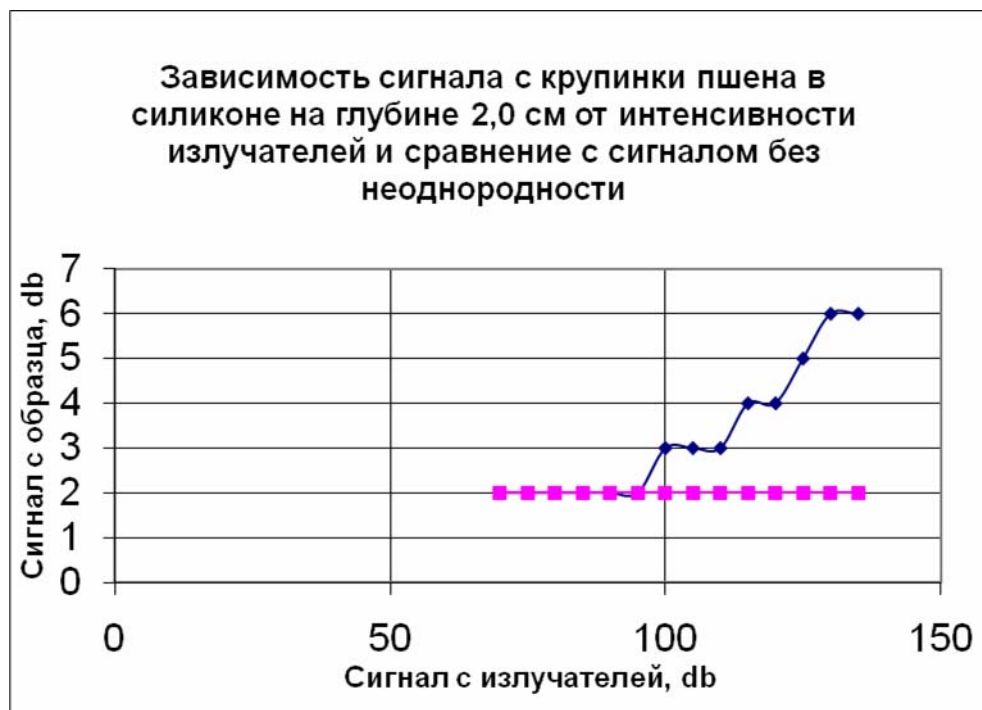
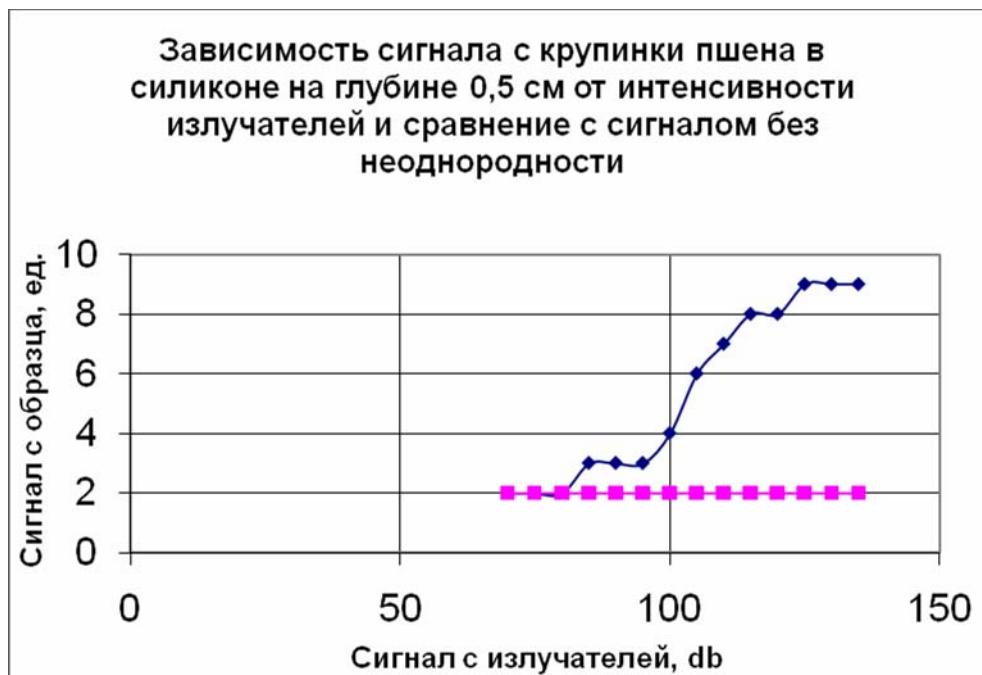


Рисунок 1.32 - Измерения с силиконовым образцом с заложенной крупинкой пшена

Из измерений виден пороговый характер поведения нелинейности. Нетрудно заметить, что величина сигнала нелинейного отклика в силиконовом образце меньше, чем в желатиновом образце. Это можно объяснить большой разницей в значениях плотности двух образцов.

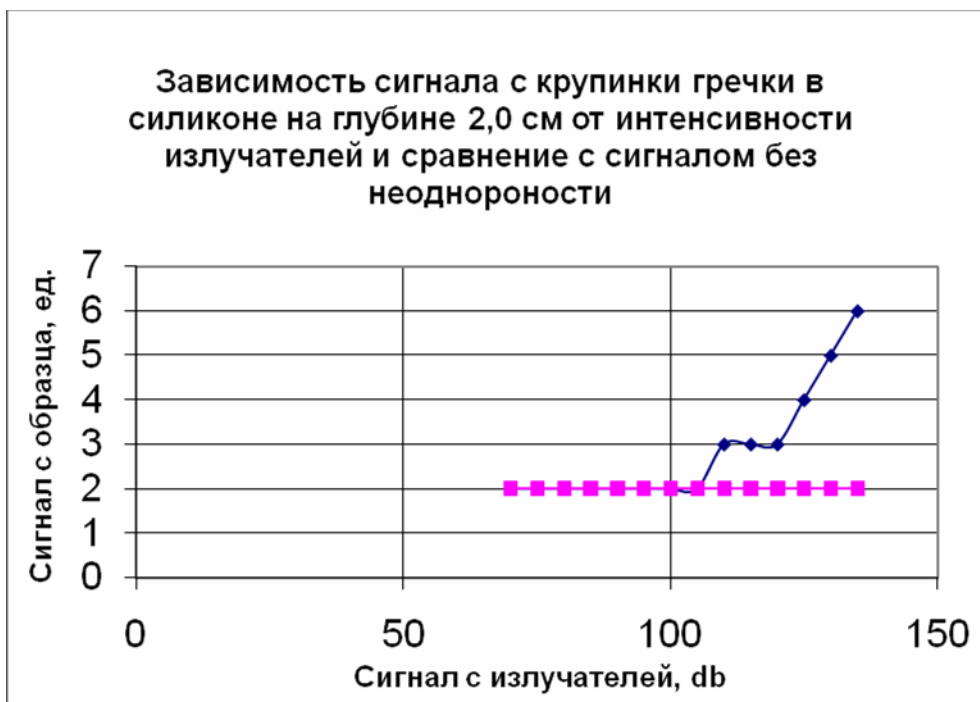
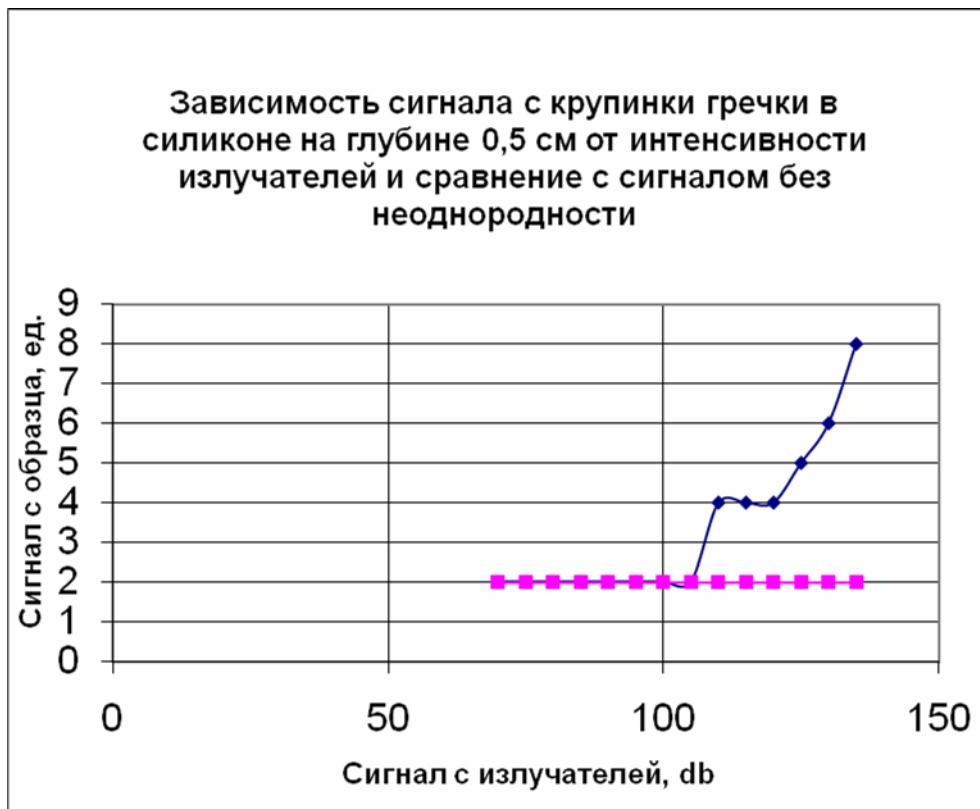


Рисунок 1.33 - Измерения с силиконовым фантомом с заложенной крупинкой гречки

Уровень сигнала на суммарной частоте в приведённой выше серии экспериментов имеет меньшие значения, но, тем не менее, даёт нам чёткое

представление о наличие структурной неоднородности в данном элементе объёма образца.

Наконец в завершении данной серии экспериментов было выполнено сканирование силиконового образца по горизонтальной оси с фиксированным шагом и построена зависимость (рисунок 1.34) сигнала нелинейного отклика от координаты на образце, позволяющая определить не только наличие структурной неоднородности в веществе, но и его пространственное расположение, с точностью 1 см.



Рисунок 1.34 - Сканирование образца по координате

В ходе последнего эксперимента было произведено сканирование третьего из вышеописанных образцов, сделанного из пластисола. Как было описано выше, в нём, под поверхностью, располагались 5 силика-гелевых шариков. Излучатели были настроены так, что амплитуда зондирующих сигналов была 125 дБ. Исследование производилось на разностной частоте равной 40,5 кГц.

Сканирование производилось по горизонтали, с шагом 3 мм. После прохождения длины образца делался шаг 3 мм по вертикали, и продолжалось сканирование по горизонтали. Результаты были обработаны и построены в виде распределения амплитуды сигнала нелинейного отклика по поверхности образца (рисунок 1.35). За нулевую отметку был взят фон, полученный регистрацией сигнала при облучении пустого образца.

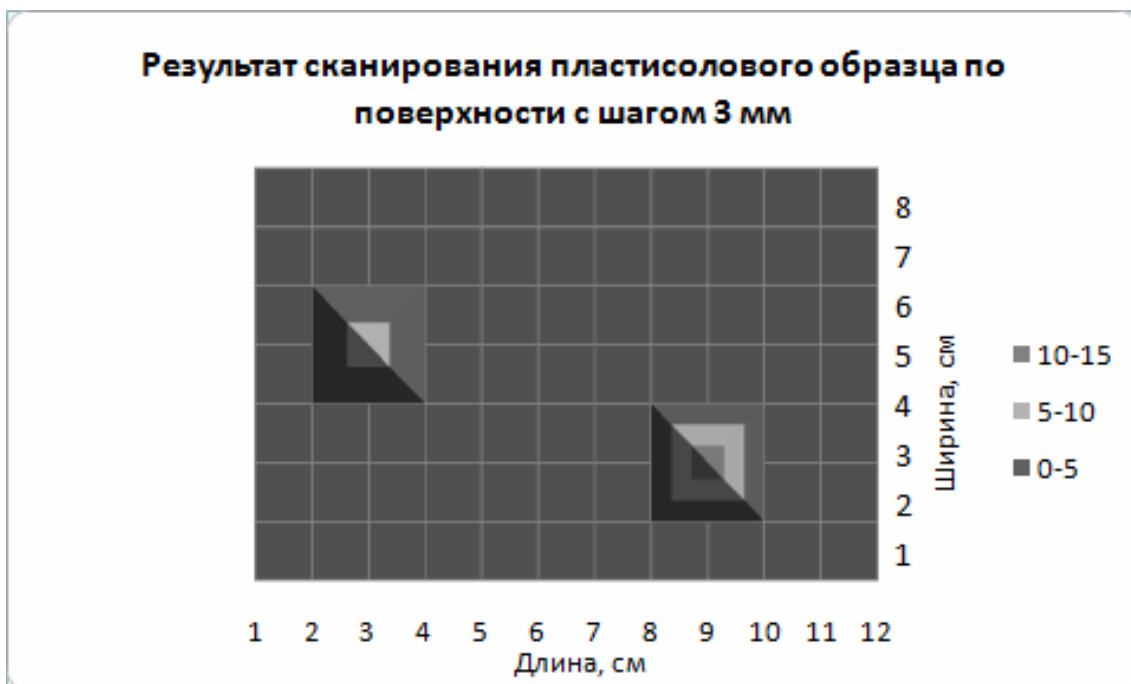
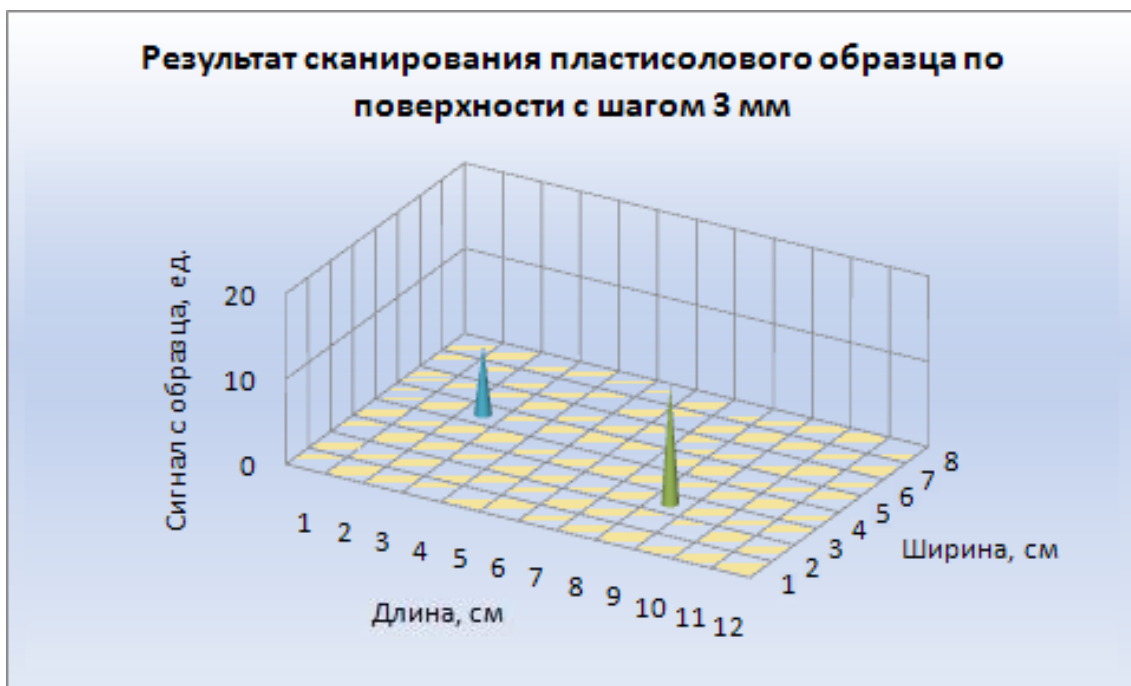


Рисунок 1.35 - Сканирование пластисолового образца по поверхности.

По полученным результатам можно определить положение двух из пяти заложенных в образец дефектов. В нижней части рисунка показана вся область регистрации сигнала нелинейного отклика по ходу сканирования. Учитывая диаметр перетяжки излучателей, получается, что возбуждение нелинейного сигнала отклика начинается на расстоянии порядка 1 см от него. Местоположение обнаруженных дефектов определено с точностью до 3 мм. То есть при использовании конденсаторных излучателей, разрешающая способность установки увеличилась приблизительно в 3 раза.

1.3 Постановка задачи неразрушающего контроля элементов гибкой тепловой защиты методами обратных задач нелинейной акустики

Недостатком изложенного в предыдущем разделе подхода является то, что не применяются математически обоснованные методы определения характеристик (размеров и/или величины) дефектов. В силу того, что существующее экспериментальное оборудование обычно не позволяет вести прямое измерение характеристик дефектов, данная задача может быть решена путем сопоставления экспериментальных данных и физически обоснованных математических моделей заданной структуры, а затем уточнения таких моделей и выбора критериев их сравнения [34]. Подобный подход широко используется при рассмотрении различных процессов в технических системах и предполагает решение обратных задач математической физики, которые в отличие от прямых не соответствуют физически реализуемым явлениям: в природе обычно нельзя обратить ход физического процесса.

Таким образом, можно говорить о физической некорректности постановки задачи. Естественно, что при математической формализации она часто проявляется уже как математическая некорректность, в частности, обратные задачи теплообмена представляют собой типичный пример некорректных математической физики [35]. Для решения подобных задач

приходится привлекать специальный математический аппарат, в частности, различные регуляризирующие алгоритмы [36]. Применение аппарата обратных задач позволяет осуществить целенаправленный поиск аппроксимирующей зависимости для неизвестной характеристики, прямое измерение которой затруднительно или даже невыполнимо, обеспечивая совпадение экспериментальных данных с расчетными. Если при этом используется несколько различных моделей, то применение аппарата обратных задач позволяет сравнить их адекватность рассматриваемому процессу. Следует отметить, что метод обратных задач позволяет определить (уточнить) только некоторые характеристики математической модели, т.е. процесс с априорно заданной структурой модели, разработка же структуры модели остается практически неформализуемой, как и при традиционных методах исследований.

Аппарат обратных задач еще не получил широкого распространения применительно к процессам неразрушающего контроля (в том числе элементов конструкций из эластичных материалов). Для исследования внутреннего состояния эластичных теплозащитных материалов необходимо разработать расчетно-экспериментальную методику определения характеристик структурной нелинейности (параметрической идентификации математической модели) с привлечением математического аппарата обратных задач и использованием опыта, накопленного при решении обратных задач теплообмена.

Постановка задачи идентификации в общем случае предполагает следующие этапы:

- 1) выбор структуры рассматриваемой математической модели;
- 2) выделений области применения такой модели при решении практических задач;
- 3) анализ существования и единственности решения;

4) выявление дополнительной информации, необходимой для решения на основании теорем существования и единственности;

5) математическая формулировка обратной задачи,

6) выбор оптимальных условий проведения соответствующих экспериментов.

Как уже отмечалось, при использовании аппарата обратных задач для определения (уточнения) некоторой совокупности характеристик переноса структурный вид математической модели должен быть задан априори (в силу того, что существующие методы решения обратных задач не позволяют создать систему формализованного синтеза математических моделей). Аппарат обратных задач может быть использован только для сравнительного анализа адекватности математических моделей различной структуры (структурная идентификация) [34]. Основываясь на данных приведенных в разделе 1.1 (с учетом всех сделанных там допущений), а также принимая во внимание то, что целью данной работы является исследование принципиальной возможности использования аппарата обратных задач для неразрушающего контроля гибкой тепловой защиты НТУ, целесообразно ограничиться одномерной моделью распространения волн в среде. Этот шаг, несомненно, сузит возможности применения разработанного метода, однако существенно упростит используемый математический аппарат и т.д.

Итак, основываясь на допущениях, приведенных в разделе 1.1, можно считать, что распространение акустических волн в рассматриваемой системе описывается следующей краевой задачей [37]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2 \rho} \varepsilon(x) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

$x \in (0, d), t \in (0, t_{\max}]$

$$p(x, 0) = p_0, x \in [0, d] \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in [0, d] \quad (1.5)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}, \quad t \in (0, t_{\max}) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(d,t) = 0, \quad t \in (0, t_{\max}) \quad (1.7)$$

Предполагается, что в большинстве случаев параметры математической модели ρ , c и т.д. измеряются экспериментально или определяются расчетным путем. Предметом исследования в данной работе является параметр нелинейности $\varepsilon(x)$, который не может быть измерен или вычислен. Следует отметить, что в дальнейшем предполагается зависимость коэффициентов уравнения (1.3) только от давления. Это допущение намного упрощает все последующие выкладки. Переход к модели, учитывающей зависимость коэффициентов уравнения (1.3) от других факторов, практически не вызовет затруднений [38].

Необходимо также выделить класс материалов, для которых справедлива математическая модель распространения продольных волн (1.3) —(1.7). Учитывая анализ, проведенный в разделе 1.1, можно утверждать, что рассматриваемая краевая задача описывает процессы взаимодействия с внешней средой практически любых эластичных материалов.

При использовании методов обратных задач для определения неизвестных характеристик предполагается наличие некоторой дополнительной информации о состоянии исследуемой системы [34]. В качестве такой информации обычно берутся избыточные для прямой задачи (1.3) —(1.7) данные о поле давлений. В случае одномерной модели переноса — это измерение давления на поверхности тела. Формально это можно представить в виде дополнительного условия [39]:

$$p^{\text{exp}}(0, t) = f(t), t \in (0, t_{\text{max}}) \quad (1.8)$$

При построении алгоритмов используются также априорные сведения о характере искомых характеристик (монотонность, гладкость, ограниченность и т.д.). Существование решения подобной задачи непосредственно вытекает из существования решения соответствующей прямой задачи распространения продольных волн (1.3) —(1.7). Сложнее обстоит дело с вопросами единственности решения. Вопрос о единственности решения поставленной задачи достаточно подробно рассмотрен в [36], поэтому в дальнейшем можно считать, что решение поставленной задачей единственно.

2 Параметрическая идентификация математических моделей процессов переноса, описываемых гиперболическими уравнениями в частных производных

В данном разделе рассматривается задача параметрической идентификации процессов переноса применительно к математическим моделям, описываемыми дифференциальными уравнениями гиперболического типа. Подобные модели находят применение при описании «сверхбыстрых» процессов теплообмена и аэрогидродинамических процессов. В настоящее время для решения различных обратных задач предложено и используется в практике подобных исследований целый ряд методов, способов и вычислительных алгоритмов. Их описанию и анализу вычислительной эффективности посвящено достаточно много работ, включая монографии и большое количество оригинальных статей [36,40-50].

В общем случае рассматриваемая в данной работе коэффициентная обратная задача является некорректной [36]. Одним из наиболее общих методов решения некорректных обратных задач является метод регуляризации А.Н.Тихонова [35]. В основе этого метода лежит фундаментальное понятие регуляризирующего оператора, использование которого позволяет получить регулярное (устойчивое) приближенное решение обратной задачи.

2.1 Метод итерационной регуляризации

В силу некорректности обратных задач для их решения используются специальные регуляризирующие методы, обеспечивающие устойчивые приближенные решения. Широкое многообразие практических постановок обратных задач требует применения достаточно универсальных методов, которые могут быть использованы для решения различных типов обратных задач [35]. Кроме того, возникает достаточно широкий спектр разнообразных требований к последующей реализации вычислительных алгоритмов в виде

комплекса программ. К ним можно отнести возможность создания достаточно универсальных программных модулей, применимых к различным типам обратных задач, относительно низкая трудоемкость модификации программ и ряд других.

Проведенный анализ показал, что одним из наиболее универсальных подходов, на основе которого целесообразно разработать вычислительный алгоритм, удовлетворяющий перечисленным выше требованиям, для решения как некорректных так и условно корректных обратных задач различных типов является итерационный метод регуляризации.

Реализуя метод итерационной регуляризации [34], рассмотрим некоторую математическую модель процесса распространения продольных волн при взаимодействии анализируемой системы (элемента конструкции) с окружающей средой в операторном виде

$$L(x, \tau, P, u)P(x, \tau) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \tau \in (0, \tau_m] \quad (2.1)$$

$$P(0, \tau) = P_0(x), \quad x \in \bar{\Omega} \quad \frac{\partial P(0, \tau)}{\partial \tau} = V_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2.2)$$

$$B(x, \tau, P, u)P(x, \tau) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \tau \in [0, \tau_m] \quad (2.3)$$

Пусть вектор некоторых коэффициентов u неизвестен, однако имеются данные измерений давления в некотором числе M точек области Ω .

$$P_{\text{эксн}}(X_m, \tau) = f_m(\tau), \quad m = \overline{1, M}, \quad (2.4)$$

где X_m - координата m -ой точки, в которой производится измерение давления. Обратная задача заключается в определении u из условий (2.1) - (2.4).

Краевая задача (2.1) - (2.3) при заданных значениях вектора коэффициентов u позволяет вычислить давления в точках установки датчиков. В результате формируется векторная функция измерений $f = \{f_m(\tau)\}_1^M$. Пусть элементы u и f принадлежат некоторым математическим пространствам U и F соответственно. Тогда анализируемую задачу можно представить в виде операторного уравнения первого рода [34]

$$Au = f, u \in U, f \in F, A: U \rightarrow F, \quad (2.5)$$

где оператор A строится на основании краевой задачи (2.1) - (2.3), а правая часть формируется на основе экспериментальных измерений. Чаще всего в качестве U и F берется пространство L_2 функций с интегрируемым квадратом [34].

Так как правая часть уравнения (2.5) формируется на основании результатов экспериментальных исследований, то элемент f всегда известен с некоторой погрешностью $\delta = \|f - \bar{f}\|_F$, где \bar{f} его точное значение. Кроме того, и оператор A известен с погрешностью. Погрешность при формировании оператора A можно характеризовать величиной $h = \|A - \bar{A}\|$, где \bar{A} – точный оператор. Таким образом, данные при практическом решении обратной задачи заданы с погрешностью, которая может быть записана в виде некоторого параметра $\varepsilon(h, \delta)$ [34].

Для построения итерационного алгоритма формируется функционал невязки

$$J(u) = \|Au - f\|_F \quad (2.6)$$

и минимизируется относительно u . Следуя [34] можно использовать методы безусловной минимизации функционала $J(u)$ с помощью какого-либо градиентного метода минимизации первого порядка, например, скорейшего спуска или сопряженных градиентов:

$$u^{s+1} = u^s - \gamma_s G(J'_u(s)), \quad s = 0, 1, \dots, s^*, \quad (2.7)$$

где s – номер итерации; γ_s – глубина спуска, выбираемая из условия

$$\gamma_s = \mathop{\text{Arg min}}_{\gamma > 0} J(u^s - \gamma G(J'_u(s))), \quad (2.8)$$

где $G(J'_u(s))$ - оператор, характеризующий используемый метод минимизации; u^0 - задаваемое начальное приближение.

В [34] показано, что представленный метод последовательных приближений порождает в соответствии с общим определением регуляризирующего оператора (семейства операторов) по А.Н. Тихонову, регуляризирующее семейство операторов, в котором параметром регуляризации является величина обратная номеру последней итерации $\frac{1}{s^*}$, определяемый в процессе решения обратной задачи из регуляризирующего условия останова, осуществляемого в соответствии с принципом обобщенной невязки [34]

$$s^* : J(u^{s^*}) \cong \varepsilon(h, \delta). \quad (2.9)$$

Следуя подходу предложенному в [36], можно показать, что частная задача (1.3)-(1.7), рассматриваемая при практической апробации разработанного алгоритма, является условно-устойчивой. Тем не менее, ниже будет показано, что использование критерия останова итерационного процесса (2.9) приводит к уменьшению влияния погрешностей $\varepsilon(h, \delta)$ на решение обратной задачи (1.3)-(1.7).

При практической реализации итерационных алгоритмов решения обратных задач часто бывает весьма затруднительно оценить погрешность задания оператора A в уравнении (2.5) [34]. На основании результатов

вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что погрешность задания оператора A значительно меньше погрешностей измерений. В результате ниже будем предполагать, что оператор A известен почти точно и вместо соотношения (2.9) можно использовать условие невязки

$$s^* : J(u^{s^*}) \cong \delta . \quad (2.10)$$

Применительно к численному решению обратных задач процедура оптимизации на основе градиентных методов включает в себя следующие основные операции [34]:

1. Задание начального приближения определяемых коэффициентов.
2. Численное решение прямой задачи при заданном приближении определяемых коэффициентов.
3. Вычисление значения функционала невязки.
4. Проверка условия выхода из итерационного процесса (2.10) - если условие выхода выполнено, то осуществляется переход к пункту 9, в противном случае - к пункту 5.
5. Определение градиента функционала невязки.
6. Вычисление глубины спуска из условия (2.8).
7. Формирование нового приближения определяемых коэффициентов, используя соотношение (2.7).
8. Проверка выхода из итерационного процесса по совпадению определяемых коэффициентов на двух соседних итерациях. Если условие выхода выполнено, то осуществляется переход к пункту 9, в противном случае - к пункту 2 и процесс минимизации функционала невязки продолжается.
9. Процесс последовательных приближений закончен.

В описываемом подходе важнейшими вычислительными операциями, которые решающим образом влияют на вычислительную эффективность итерационных алгоритмов решения обратных задач, являются пункты 5 и 6.

Следуя [34], целесообразно ввести в рассмотрение два дополнительных типа краевых задач: сопряженной краевой задачи и краевой задачи для вариаций давлений. Первая из них дает возможность получить аналитические выражения для градиента функционала невязки, а вторая - вычислить линейную оценку глубин спуска. В результате каждый из пунктов 5 и 6 состоит из двух составляющих:

5.1. Численное решение сопряженной краевой задачи.

5.2. Вычисление градиента функционала невязки.

6.1. Численное решение краевой задачи (или нескольких краевых задач) для вариаций давлений.

6.2. Вычисление линейной оценки глубины спуска.

Следует подчеркнуть, что изложенная последовательность операций остается неизменной при решении обратных задач различных типов. Это позволяет разработать программные комплексы, большая часть которых является универсальной или проблемно-независимой в рамках некоторого класса рассматриваемых задач.

2.2 Сопряженная краевая задача и вычисление градиента функционала невязки

Важнейшей частью итерационных алгоритмов решения обратных задач является вычисление градиента функционала невязки. В качестве модели состояния анализируемого объекта рассмотрим обобщенное гиперболическое уравнение в многослойном элементе конструкции [37,50]

$$\varepsilon_l(p) \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} = c_l(p) \frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} + a_l(p) \frac{\partial P_l}{\partial \tau} + b_l(p) \frac{\partial P_l}{\partial x} + S_l(p),$$

$$X_{l-1} < x < X_l, l = \overline{1, L}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.11)$$

$$P_l(x,0) = P_l^0(x), \quad X_{l-1} < x < X_l, \quad l = \overline{1, L}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial P_l}{\partial \tau}(x,0) = 0, \quad X_{l-1} < x < X_l, \quad l = \overline{1, L}, \quad (2.13)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial P_1(X_0, \tau)}{\partial x} + \beta_1 P_1(X_0, \tau) = v_1(P_1(X_0, \tau), \tau), \quad (2.14)$$

$$w_l \frac{\partial P_l(X_l, \tau)}{\partial x} = w_{l+1} \frac{\partial P_{l+1}(X_l, \tau)}{\partial x}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad (2.15)$$

$$P_l(X_l, \tau) = P_{l+1}(X_l, \tau), \quad l = \overline{1, L-1}, \quad (2.16)$$

$$\alpha_2 \frac{\partial P_L(X_L, \tau)}{\partial x} + \beta_2 P_L(X_L, \tau) = v_2(P_L(X_L, \tau), \tau), \quad (2.17)$$

где $l = \overline{1, L}$ - номер слоя.

Введем следующие обозначения: X_m - координата расположения m -го датчика давления в l -ом слое. В точках установки датчиков известны экспериментально полученные зависимости давления от времени

$$P_{exp}(X_m, \tau) = f_m(\tau), \quad m = 1, L, \quad (2.18)$$

Соотношения, определяющие сопряженную краевую задачу можно получить различными способами. Ниже используется подход, основанный на применении техники неопределенных множителей Лагранжа. Вид сопряженной задачи полностью определяется исходной моделью состояния и не зависит от набора определяемых коэффициентов. Поэтому можно рассмотреть в качестве неизвестных самый полный набор неизвестных коэффициентов $\varepsilon_l(P), a_l(P), b_l(P), c_l(P), S_l(P)$ без анализа единственности рассматриваемой задачи (в общем случае такая задача не будет иметь единственного решения [36]).

Запишем функционал невязки, характеризующий среднеквадратичное уклонение рассчитанных давлений в точках установки датчиков от экспериментально измеренных значений:

$$J = \sum_{m=1, L} \int_0^{\tau_m} [P(X_m, \tau) - f_m(\tau)]^2 d\tau, \quad (2.19)$$

Рассмотрим далее задачу его минимизации. Сформируем функционал Лагранжа для задачи условной минимизации (2.11) - (2.19).

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} = & J + \sum_{l=1}^L \int_0^{\tau} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \psi_l(x, \tau) \left[\varepsilon_l(P) \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} + c_l(P) \frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} + a_l(P) \frac{\partial P_l}{\partial \tau} + b_l(P) \frac{\partial P_l}{\partial x} + S_l(P) \right] dx d\tau + \\ & + \sum_{l=1}^L \int_{x_l}^{x_{l+1}} \eta_l(x, 0) [P_l(x, 0) - P_l^0(x)] dx + \sum_{l=1}^L \int_{x_l}^{x_{l+1}} \xi_l(x, 0) \left[\frac{\partial P_l}{\partial \tau}(x, 0) \right] dx + \\ & + \int_0^{\tau_{\max}} \eta(X_0, \tau) \left[\alpha_1(P_1(X_0, \tau)) \frac{\partial P_1(X_0, \tau)}{\partial x} + \beta_1 P_1(X_0, \tau) - q_1(P_1(X_0, \tau), \tau) \right] d\tau + \\ & + \sum_{l=1}^L \int_0^{\tau_{\max}} \mu(X_l, \tau) [P_l(X_l, \tau) - P_{l+1}(X_l, \tau)] d\tau + \\ & + \sum_{l=1}^{L-1} \int_0^{\tau_{\max}} \eta(X_l, \tau) \left[w_l \frac{\partial P_l(X_l, \tau)}{\partial x} - w_{l+1} \frac{\partial P_{l+1}(X_l, \tau)}{\partial x} \right] d\tau + \\ & + \int_0^{\tau_{\max}} \eta(X_L, \tau) \left[\alpha_1 \frac{\partial P_1(X_0, \tau)}{\partial x} + \beta_1 P_1(X_0, \tau) - v_1(P_1(X_0, \tau), \tau) \right] d\tau, \end{aligned}$$

где $\psi_l(x, \tau), \eta_l(x), l = \overline{1, L}, \eta(X_l, \tau), l = \overline{0, L}, \mu(X_l, \tau), l = \overline{1, L-1}$ – неопределенные множители Лагранжа, соответствующие условиям (2.11) - (2.18).

Предположим, что функции $\varepsilon_l(P), a_l(P), b_l(P), c_l(P), S_l(P)$ получили некоторые малые вариации $\Delta \varepsilon_l(P), \Delta a_l(P), \Delta b_l(P), \Delta c_l(P), \Delta S_l(P)$. Тогда состояние системы $P_l(x, \tau)$, изменится на некоторую величину $\mathcal{G}_l(x, \tau), l = \overline{1, L}$. Несложно показать, что вариация давления $\mathcal{G}_l(x, \tau)$, удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l \frac{\partial^2 \mathcal{G}_l}{\partial \tau^2} = & c_l \frac{\partial^2 \mathcal{G}_l}{\partial x^2} + a_l \frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial \tau} + b_l \frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial x} + S_l + \\ & + \left[\frac{dc_l}{dP} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_l}{\partial x^2} + \frac{da_l}{dP} \frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial \tau} + \frac{db_l}{dP} \frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial x} + \frac{dS_l}{dP} - \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} \frac{d\varepsilon_l}{dP} \right] \mathcal{G}_l + \\ & + \delta_n^l \left[-\Delta \varepsilon_l(P) \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} + \Delta c_l(P) \frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} + \Delta a_l(P) \frac{\partial P_l}{\partial \tau} + \Delta b_l(P) \frac{\partial P_l}{\partial x} + \Delta S_l(P) \right], \\ & X_{l-1} < x < X_l, 0 < \tau \leq \tau_{\max}, l = \overline{1, L}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\vartheta_l(x, \theta) = 0, \quad X_{l-1} \leq x \leq X_l, \quad l = \overline{1, L}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \vartheta_l}{\partial t}(x, \theta) = 0, \quad X_{l-1} \leq x \leq X_l, \quad l = \overline{1, L}, \quad (2.30)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \vartheta_1(X_0, \tau)}{\partial x} + \left(\beta_1 - \frac{\partial v_1(P_1(X_0, \tau), \tau)}{\partial P} \right) \vartheta_1(X_0, \tau) = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.31)$$

$$w_l \frac{\partial \vartheta_l(X_l, \tau)}{\partial x} = w_{l+1} \frac{\partial \vartheta_{l+1}(X_l, \tau)}{\partial x}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.32)$$

$$\vartheta_l(X_l, \tau) = \vartheta_{l+1}(X_l, \tau), \quad l = \overline{1, L-1}, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.33)$$

$$\alpha_2 \frac{\partial \vartheta_L(X_L, \tau)}{\partial x} + \left(\beta_2 - \frac{\partial v_2(P_L(X_L, \tau), \tau)}{\partial P} \right) \vartheta_L(X_L, \tau) = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.34)$$

где $\delta_n^l = \begin{cases} 0, & l \neq n \\ 1, & l = n \end{cases}$ - символ Кронекера.

Выражение для линейной части приращения минимизируемого функционала невязки имеет вид:

$$\delta J = \sum_{m=1, L}^{\tau_m} \int_0^{\tau_m} [P(X_m, \tau) - f_m(\tau)] \vartheta_m(X_m, \tau) d\tau. \quad (2.35)$$

Вариацию функционала Лагранжа, представляющую собой главную линейную часть приращения этого функционала, можно представить следующим образом:

$$\delta \mathfrak{J} = \delta J + I_1 + I_2 + I_3, \quad (2.36)$$

где

$$I_1 = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{l=1}^L \int_{X_{l-1}}^{X_l} \psi_{l,m}(x, \tau) \left\{ -\varepsilon_l \frac{\partial^2 \vartheta_l}{\partial \tau^2} + c_l \frac{\partial^2 \vartheta_l}{\partial x^2} + a_l \frac{\partial \vartheta_l}{\partial \tau} + b_l \frac{\partial \vartheta_l}{\partial x} + S_l + \left[\frac{dc_l}{dP} \frac{\partial^2 \vartheta_l}{\partial x^2} + \frac{da_l}{dP} \frac{\partial \vartheta_l}{\partial \tau} + \frac{db_l}{dP} \frac{\partial \vartheta_l}{\partial x} + \frac{dS_l}{dP} - \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} \frac{d\varepsilon_l}{dP} \right] \vartheta_l \right\} dx d\tau, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \sum_{l=1}^L \int_0^{\tau_{\max}} \eta(X_0, \tau) \left\{ \alpha_1 \frac{\partial \mathcal{G}_1(X_0, \tau)}{\partial x} + \left[\alpha_1 \frac{\partial P_1(X_0, \tau)}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \beta_1 - \left. \left. \frac{\partial v_1(P_1(X_0, \tau), \tau)}{\partial P} \right] \mathcal{G}_1(X_0, \tau) + \right. \\
& + \sum_{l=1}^L \int_{x_l}^{x_{l+1}} \xi_l(x, 0) \left[\frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial \tau}(x, 0) \right] dx + \\
& + \sum_{l=1}^{L-1} \int_0^{\tau_{\max}} \eta(X_l, \tau) \left[\frac{\partial \mathcal{G}_l(X_l, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial P_l(X_l, \tau)}{\partial x} \mathcal{G}_l(X_l, \tau) - \right. \\
& - \left. \frac{\partial \mathcal{G}_{l+1}(X_l, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial P_{l-1}(X_l, \tau)}{\partial x} \mathcal{G}_{l+1}(X_l, \tau) \right] d\tau + \\
& + \int_0^{\tau_{\max}} \eta(L, \tau) \left\{ \alpha_2 \frac{\partial \mathcal{G}_L(L, \tau)}{\partial x} + \right. \\
& + \left[\alpha_2 \frac{\partial P_L(L, \tau)}{\partial x} + \beta_2 - \frac{\partial v_2(P_L(X_L, \tau), \tau)}{\partial P} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{d\varepsilon_L}{dP}(P_L(X_L, \tau)) \right] \mathcal{G}_L(X_L, \tau) \right\} d\tau,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{l=1}^L \int_{X_{l-1}}^{X_l} \psi_{l,m}(x, \tau) \delta_n^l \left(-\Delta \varepsilon_l(P) \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} + \Delta c_l(P) \frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} + \Delta a_l(P) \frac{\partial P_l}{\partial \tau} + \right. \\
& \left. + \Delta b_l(P) \frac{\partial P_l}{\partial x} + \Delta S_l(P) \right) dx d\tau.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

После преобразований получим, что при выполнении следующих условия для множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_l \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial \tau^2} = & c_l \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi_l}{\partial x} \frac{dc_l}{dP} \frac{\partial P_l}{\partial x} + 2 \frac{dc_l}{dP} \frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} \psi_l + \psi_l \frac{d^2 c_l}{dP^2} \left(\frac{\partial P_l}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{d\varepsilon_l}{dP} \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} \psi_l \\
& - 2 \frac{\partial \psi_l}{\partial \tau} \frac{d\varepsilon_l}{dP} \frac{\partial P_l}{\partial \tau} - \psi_l \frac{d^2 \varepsilon_l}{dP^2} \left(\frac{\partial P_l}{\partial \tau} \right)^2 - a_l \frac{\partial \psi_l}{\partial \tau} - b_l \frac{\partial \psi_l}{\partial \tau} + \frac{\partial S_l}{\partial P} \psi_l, \\
& X_{l-1} < x < X_l, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad l = \overline{1, L},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
\psi_l(x, \tau_{\max}) = & 0, \\
& X_{l-1} \leq x \leq X_l, \quad l = \overline{1, L},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, \tau_{\max}) = 0, \quad X_{l-1} \leq x \leq X_l, \quad l = \overline{1, L}, \tag{2.42}$$

$$\alpha_1 c_1 \frac{\partial \psi_1(X_0, \tau)}{\partial x} + \left[\beta_1 c_1 - \frac{\partial v_1(P_1(X_0, \tau), \tau)}{\partial P} c_1 + \alpha_1 \frac{dc_1}{dP} \frac{\partial P_1}{\partial x} - \alpha_1 b_1 \right] \psi_1(X_0, \tau) - 2\alpha_1 [P_1(X_0, \tau) - f_1(\tau)] = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.43)$$

$$\frac{c_l}{w_l} \psi_l(X_l, \tau) = \frac{c_{l+1}}{w_{l+1}} \psi_{l+1}(X_l, \tau), \quad l = \overline{1, L-1}, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.44)$$

$$c_l \frac{\partial \psi_l(X_l, \tau)}{\partial x} - c_{l+1} \frac{\partial \psi_{l+1}(X_l, \tau)}{\partial x} + \left[\frac{dc_l}{dP} \frac{\partial P_l}{\partial x} - b_l \right] \psi_l(X_l, \tau) - \left[\frac{dc_{l+1}}{dP} \frac{\partial P_{l+1}}{\partial x} - b_{l+1} \right] \psi_{l+1}(X_l, \tau) = 0, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.45)$$

$$\alpha_2 c_L \frac{\partial \psi_L(X_L, \tau)}{\partial x} + \left[\beta_2 c_L - \frac{\partial v_2(p_L(X_L, \tau), \tau)}{\partial P} c_L + \alpha_2 \frac{dc_L}{dP} \frac{\partial P_L}{\partial x} - \alpha_2 b_L \right] \psi_L(X_L, \tau) - 2\alpha_2 [P_L(X_L, \tau) - f_L(\tau)] = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad (2.46)$$

вариация функционала Лагранжа преобразуется к виду:

$$\delta J = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{l=1}^L \int_{X_{l-1}}^{X_l} \psi_{l,m}(x, \tau) \delta_n^l \left(-\Delta \varepsilon_l(P) \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} + \Delta c_l(P) \frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} + \Delta a_l(P) \frac{\partial P_l}{\partial \tau} + \Delta b_l(P) \frac{\partial P_l}{\partial x} + \Delta S_l(P) \right) dx d\tau. \quad (2.47)$$

В том случае, когда искомые в обратной задаче характеристики являются функцией только пространственной координаты x и (или) времени τ , соотношение вида (2.47) может рассматриваться как дифференциал функционала невязки. Тогда с помощью этого соотношения можно сразу записать выражение для градиента функционала невязки. В рассматриваемой задаче неизвестные характеристики зависят от давления - переменной состояния анализируемого процесса, и равенство (2.47) не является дифференциалом. В такой ситуации выражение для градиента можно получить, представив искомую зависимость в параметрическом виде. Универсальной формой параметризации является представление:

$$\varepsilon_n(P) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon_k \varphi_k(P),$$

$$a_n(P) = \sum_{k=1}^{N_a} a_k \varphi_k(P),$$

$$b_n(P) = \sum_{k=1}^{N_b} b_k \varphi_k(P),$$

$$c_n(P) = \sum_{k=1}^{N_c} c_k \varphi_k(P),$$

$$S_n(P) = \sum_{k=1}^{N_s} S_k \varphi_k(P), \quad (2.48)$$

где $\varepsilon_k, k = \overline{1, N_\varepsilon}; a_k, k = \overline{1, N_a}; b_k, k = \overline{1, N_b}; c_k, k = \overline{1, N_c}; S_k, k = \overline{1, N_s}$ - неизвестные параметры, $\varphi_i(P), i = \overline{1, 5}$ - заданная система базисных функций.

Подставляя в (2.47) приращение $\Delta u_i(P) = \sum_{k=1}^{N_i} \Delta u_{ik} \varphi_k(P), i = \overline{1, 5}$ получим

следующие выражения для составляющих градиента функционала невязки:

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} \equiv J'_{c_k} = \int_0^{\tau_{\max}} \int_{X_{n-1}}^{X_n} \psi_l(x, \tau) \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} \varphi_k(P) dx d\tau, \\ k = \overline{1, N_c},$$

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_k} \equiv J'_{\varepsilon_k} = - \int_0^{\tau_{\max}} \int_{X_{n-1}}^{X_n} \psi_n(x, \tau) \frac{\partial^2 P_n}{\partial \tau^2} \varphi_k(P) dx d\tau, \\ k = \overline{1, N_\varepsilon},$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} \equiv J'_{a_k} = \int_0^{\tau_{\max}} \int_{X_{l-1}}^{X_l} \psi_l(x, \tau) \frac{\partial P_n}{\partial \tau} \varphi_k(P) dx d\tau, \\ k = \overline{1, N_a}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_k} \equiv J'_{b_k} = \int_0^{\tau_{\max}} \int_{X_{n-1}}^{X_n} \psi_n(x, \tau) \frac{\partial P_n}{\partial x} \varphi_k(P) dx d\tau, \\ k = \overline{1, N_b},$$

$$\frac{\partial J}{\partial S_k} \equiv J'_{S_k} = \int_0^{\tau_{\max}} \int_{X_{n-1}}^{X_n} \psi_n(x, \tau) \varphi_k(P) dx d\tau \\ k = \overline{1, N_s}.$$

Для того, чтобы вычислить градиент функционала невязки требуется вначале решить исходную прямую задачу распространения волн, далее сопряженную краевую задачу и затем воспользоваться соотношениями вида (2.47). При этом краевую задачу для сопряженной переменной необходимо решать в "обратном" времени по сравнению с прямой задачей. Легко видеть, что за счет введения новой переменной $t = \tau_{\max} - \tau$ сопряженная краевая задача приобретает структуру, аналогичную прямой задаче. Отличия заключаются лишь в коэффициентах системы уравнений. Решение обеих задач может осуществляться по одному и тому же алгоритму, однако коэффициенты сопряженной задачи вычисляются в "обратном" относительно переменной t направлении.

2.3 Определение параметра спуска

В градиентных методах минимизации параметра спуска на каждой s -ой итерации определяется из решения задачи минимизации функции одной переменной [34]

$$\gamma_s = \text{Arg min}_{\gamma} J(u^s - \gamma G(J^{(s)})). \quad (2.50)$$

Практика решения различных обратных задач итерационными методами показала, что весьма эффективным в вычислительном отношении приемом является использование линейной оценки параметра спуска. При таком подходе для вычисления параметра γ можно получить приближенную аналитическую форму. Представим выражение для функционала невязки на $s+1$ -й итерации в виде

$$J^{s+1} = \sum_{m=1, L}^{\tau_m} \int_0^{\tau_m} [P(X_m, \tau) - f_m(\tau) + \mathcal{G}_m(X_m, \tau) \gamma_s G(J^{(s)})]^2 d\tau, \quad (2.51)$$

где приращение $\mathcal{G}_{l,m}(x, \tau)$ определяется из решения краевой задачи

$$\begin{aligned}
\varepsilon_l \frac{\partial^2 \mathcal{G}_l}{\partial \tau^2} &= c_l \frac{\partial^2 \mathcal{G}_l}{\partial x^2} + a_l \frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial \tau} + b_l \frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial x} + S_l + \\
&+ \left[\frac{dc_l}{dP} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_l}{\partial x^2} + \frac{da_l}{dP} \frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial \tau} + \frac{db_l}{dP} \frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial x} + \frac{dS_l}{dP} - \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} \frac{d\varepsilon_l}{dP} \right] \mathcal{G}_l + \\
&+ \delta_n^l \left[-\frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} \gamma_s \sum_{k=1}^{N_k} G_k \varphi_k(P) + \frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} \gamma_s \sum_{k=1}^{N_k} G_k \varphi_k(P) + \frac{\partial P_l}{\partial \tau} \gamma_s \sum_{k=1}^{N_k} G_k \varphi_k(P) + \right. \\
&\left. + \frac{\partial P_l}{\partial x} \gamma_s \sum_{k=1}^{N_b} G_k \varphi_k(P) + \gamma_s \sum_{k=1}^{N_s} G_k \varphi_k(P) \right], \\
X_{l-1} &< x < X_l, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \quad l = \overline{1, L},
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\mathcal{G}_l(x, 0) = 0, \quad X_{l-1} \leq x \leq X_l, \quad l = \overline{1, L}, \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_l}{\partial \tau}(x, 0) = 0, \quad X_{l-1} \leq x \leq X_l, \quad l = \overline{1, L}, \tag{2.54}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \mathcal{G}_1(X_0, \tau)}{\partial x} + \left(\beta_1 - \frac{\partial v_1(P_1(X_0, \tau), \tau)}{\partial P} \right) \mathcal{G}_1(X_0, \tau) = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \tag{2.55}$$

$$w_l \frac{\partial \mathcal{G}_l(X_l, \tau)}{\partial x} = w_{l+1} \frac{\partial \mathcal{G}_{l+1}(X_l, \tau)}{\partial x}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \tag{2.56}$$

$$\mathcal{G}_l(X_l, \tau) = \mathcal{G}_{l+1}(X_l, \tau), \quad l = \overline{1, L-1}, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \tag{2.57}$$

$$\alpha_2 \frac{\partial \mathcal{G}_L(X_L, \tau)}{\partial x} + \left(\beta_2 - \frac{\partial v_2(P_L(X_L, \tau), \tau)}{\partial P} \right) \mathcal{G}_L(X_L, \tau) = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \tag{2.58}$$

Дифференцируя J^{s+1} по γ_s и приравнявая полученное выражение нулю, получим

$$\gamma_s = - \frac{\sum_{m=1, L}^{\tau_m} \int_0^{\tau_m} [P(X_m, \tau) - f_m(\tau)] \mathcal{G}_m(X_m, \tau) \gamma_s G(J^{(s)}) d\tau}{\sum_{m=1, L}^{\tau_m} \int_0^{\tau_m} [\mathcal{G}_m(X_m, \tau) \gamma_s G(J^{(s)})]^2 d\tau}. \tag{2.59}$$

Следует отметить, что практическое применение для решения обратных задач акустики градиентных методов минимизации в сочетании с вычислением оценки глубины спуска γ по формуле (2.59) оказывается эффективным только при восстановлении одного неизвестного коэффициента. При решении обратных задач по определению нескольких характеристик более эффективным является способ вычисления линейной оценки параметра спуска в виде вектора. В этом случае для каждой искомой характеристики вычисляется свое линейное

приближение параметра, а общая совокупность или вектор параметров спуска определяется на каждой итерации процесса последовательных приближений из условия минимума функционала невязки [34]. Итак, введем в рассмотрение вектор $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5]^T$ и функционал (2.2) на $(s+1)$ -й итерации представим в виде

$$J^{s+1} = \sum_{m=1, L} \int_0^{\tau_m} \left[P(X_m, \tau) - f_m(\tau) + \sum_{i=1}^5 (\gamma_i)_s \mathcal{G}_m^{(i)}(X_m, \tau, G(J^{(s)})) \right]^2 d\tau \quad (2.60)$$

ult $\mathcal{G}_m^{(i)}(x, \tau), i = \overline{1, 5}$ - вариации давления, получающиеся при сообщении приращения только одной искомой характеристики $\varepsilon_n(P), a_n(P), b_n(P), c_n(P)$ или $S_n(P)$ соответственно. Минимизируя J^{s+1} по $\gamma_i, i = \overline{1, 5}$, после несложных преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для вычисления составляющих вектора параметров спуска.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \gamma_i \sum_{m=1, L} \int_0^{\tau_m} \left[\mathcal{G}_m^{(r)}(X_m, \tau) \gamma_s G(J^{(s)}) \mathcal{G}_m^{(i)}(X_m, \tau) \gamma_s G(J^{(s)}) \right] d\tau = \\ & = - \sum_{m=1, L} \int_0^{\tau_m} \left[P(X_m, \tau) - f_m(\tau) \right] \mathcal{G}_m^{(r)}(X_m, \tau) \gamma_s G(J^{(s)}) d\tau, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$i = \overline{1, 5}$

Полученная система имеет симметричную матрицу и эффективно может быть решена методом квадратного корня.

2.4 Сплайн-аппроксимация искомых функций

При параметрическом представлении неизвестных в обратной задаче функциональных характеристик вида (2.48) могут быть выбраны различные системы базисных функций.

В обратной задаче (2.11) – (2.17) прежде всего необходимо указать область определения искомых функций в виде общего для всех экспериментов интервала состояний системы $[P_{min}, P_{max}]$, на котором анализируемая обратная задача имеет единственное решение. В качестве P_{min} используется

минимальное значение давления (обычно начальное). Существенно более важным является правильный выбор величины P_{\max} . Исходя из необходимости обеспечения единственности решения, представляется возможным в качестве P_{\max} выбрать максимальное значение давления, достигаемое на датчиках, размещаемом в анализируемом элементе.

В практике решения обратных задач весьма эффективным с вычислительной точки зрения способом параметризации является представление искомых функций в виде полиномиальных В-сплайнов [51]. В этом случае на интервале определения искомой функции $[P_{\min}, P_{\max}]$ вводится равномерная сетка

$$\omega = \{P_k = P_{\min} + k\Delta P, k = -2, -1, 0, \dots, N+3, \Delta P = (P_{\max} - P_{\min})/N\}, \quad (2.62)$$

на которой строится зависимость вида (2.31). При этом базисная функция имеет вид

$$B^{(j-1)} = B^{(j-1)}(P_k, P_{k+1}, \dots, P_{k+j}, \tau) = \sum_{s=k}^{k+j} \frac{(P_s - P)_+^{j-1}}{\omega'_k(P_s)}, \quad (2.63)$$

где $\omega'_k = (P - P_k)(P - P_{k+1}) \dots (P - P_{k+j})$ и $(P_s - P)_+^{j-1} = \max\{0, (P_s - P)^{j-1}\}$ называется В-сплайном степени $(j-1)$ соответственно, с узлами $P_k, P_{k+1}, \dots, P_{k+j}$.

При реализации алгоритмов решения обратных задач часто используются кубические В-сплайны. Аппроксимация функции $u(P)$ кубическим В-сплайном на сетке (2.62) приводит к следующим соотношениям

$$u(P) = \sum_{k=-1}^{N+1} p_k B_k(P), \quad (2.64)$$

где $B_k(P) = B_0(\bar{P} - k\Delta P)$, $\bar{P} = P - P_{\min}$,

$$B_0(P) = \left((P + 2\Delta P)_+^3 - 4(P + \Delta P)_+^3 + 6(P)_+^3 - 4(P - \Delta P)_+^3 + (P - 2\Delta P)_+^3 \right) / (6\Delta P^3).$$

Функции $B_0(P)$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$B_0(P) = \begin{cases} > 0, & \text{if } -2\Delta P < P < 2\Delta P; \\ = 0, & \text{if } |P| \geq 2\Delta P. \end{cases}$$

что существенно упрощает рассматриваемый алгоритм. Функции $B_0(P)$ имеет вид, показанный на рисунке 2.1.

Зависимость (2.64) обычно называют сплайном со свободными граничными условиями. При решении практических задач часто используются В-сплайны с так называемыми естественными граничными условиями

$$d^2u(P_{min})/dP^2 = d^2u(P_{max})/dP^2 = 0. \quad (2.65)$$

В этом случае на интервале определения искомой функции $[P_{min}, P_{max}]$ вводится новая равномерная сетка

$$\omega_i = \{P_k = P_{min} + (k-1)\Delta P, \quad k = \overline{1, N+1}\}. \quad (2.66)$$

Тогда зависимость (2.64) принимает вид

$$u_i(P) = \sum_{k=1}^{N_i} u_k \varphi_k^i(P), \quad N_i = N + 1, \quad (2.67)$$

где в случае использования кубических В-сплайнов, аппроксимирующие функции представляется в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1(P) &= 2B_0(\bar{P} + \Delta P) + B_0(\bar{P}), \\ \varphi_2(P) &= -B_0(\bar{P} + 2\Delta P) + B_0(\bar{P}), \\ \varphi_k(P) &= B_{k-1}(\bar{P}), \quad k = 3, \dots, N_i - 2, \\ \varphi_{N_p-1}(P) &= B_0(\bar{P} - (N_p - 2)\Delta P) - B_0(\bar{P} - N_i\Delta P), \\ \varphi_{N_p}(P) &= 2B_0(\bar{P} - (N_p - 1)\Delta P) + B_0(\bar{P} - N_i\Delta P). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Изменение базисных функций $\varphi_k(P), k = \overline{1, N_i}$ в (2.43) иллюстрируется на рисунке 2.3.

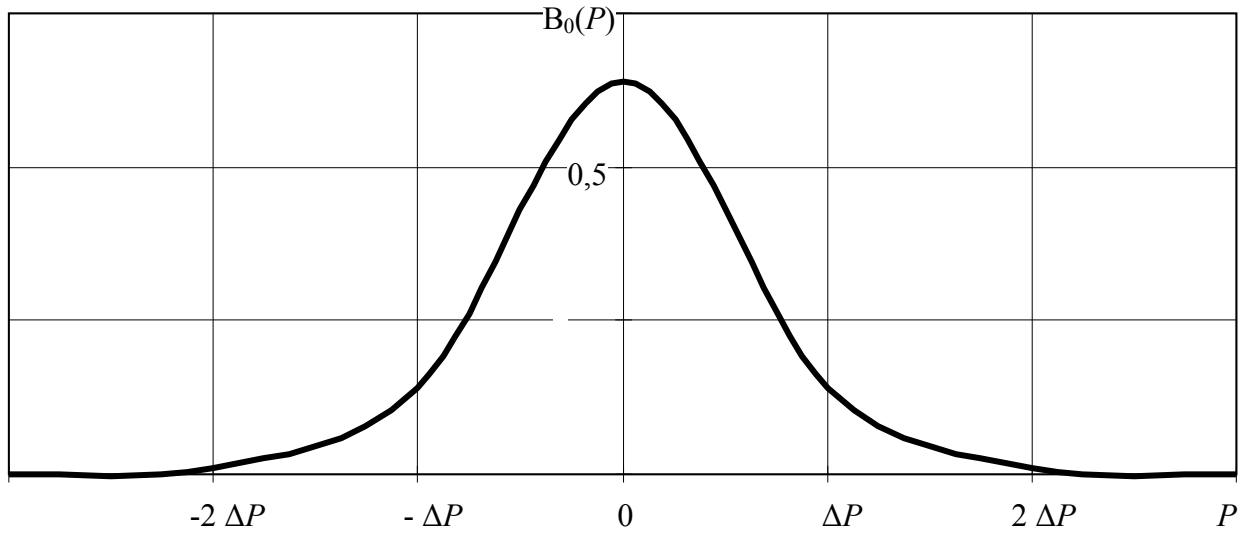


Рисунок 2.1 – Базисная функция кубического В-сплайна

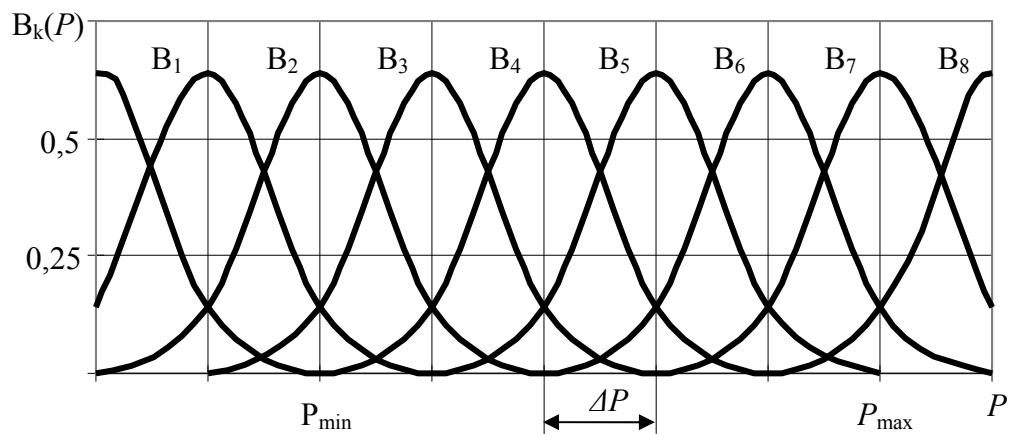


Рисунок 2.2 – Базисные функции аппроксимирующего кубического В-сплайна с "свободными" границами при $N=5$

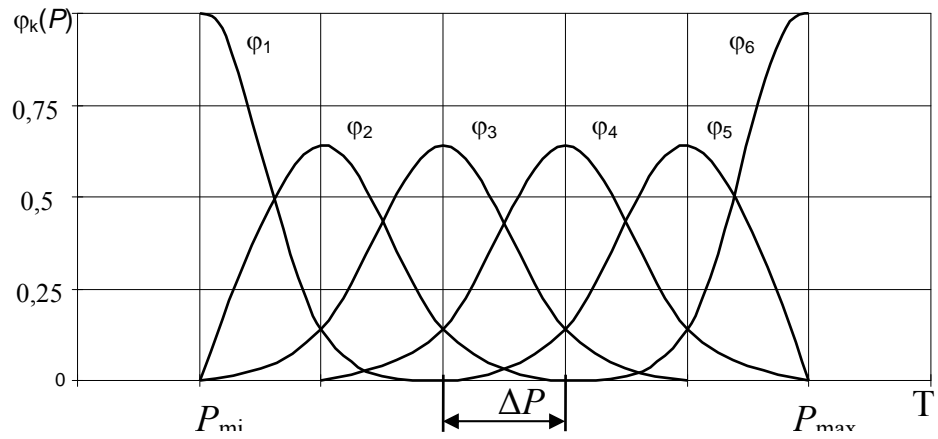


Рисунок 2.3 – Базисные функции аппроксимирующего кубического B -сплайна с "естественными" граничными условиями при $N=5$

3 Разработка численных методов математического моделирования распространения волн в многослойных элементах конструкции космических аппаратов

При проведении расчетно-экспериментальных исследований процессов нестационарного распространения акустической волны в конструкциях КА в ходе обработки и интерпретации экспериментальных данных в большинстве случаев возникает необходимость решения задач в нелинейной постановке, что требует привлечения численных методов решения. В данном разделе рассматриваются вопросы разработки соответствующих вычислительных алгоритмов. Предлагаемый подход основывается на введении в рассмотрение обобщенной математической модели в виде краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения в одномерной по пространственной переменной многослойной области с произвольными граничными условиями на внешних границах.

Одним из наиболее универсальных методов численного решения краевых задач в одномерной постановке является метод конечных разностей [52]. Этот метод и используется в данной работе при построении вычислительных алгоритмов (раздел 3.1).

Коэффициенты математической модели при решении краевых задач вычисляются путем линейной интерполяции таблично заданных функций (раздел 3.2), что существенно уменьшает время вычислений. Если исходные табличные данные задаются с большой дискретностью, предварительно осуществляется их интерполяция кубическими сплайнами с целью построения таблиц пригодных для последующей линейной интерполяции. Вопросам конечно-разностной аппроксимации обобщенной математической модели посвящены разделы 3.3, 3.4.

3.1 Анализ вычислительных алгоритмов

При численной реализации итерационных методов приближенного решения обратных задач на каждой итерации процесса последовательных приближений необходимо решать краевые задачи гиперболического типа в многослойной области, которые различаются лишь выражениями для вычисления коэффициентов гиперболических уравнений и граничных условий. Данное обстоятельство позволяет использовать в качестве основного составляющего элемента вычислительного алгоритма решения обратных задач численное решение краевой задачи для обобщенной математической модели, охватывающей все рассматриваемые краевые задачи. При таком подходе общую последовательность вычислительных операций, которые необходимо проводить на каждой итерации последовательных приближений, можно рассматривать формально, оперируя только с коэффициентами обобщенной модели (рисунок 3.1) [53]:

- 1) формирование некоторого дифференциального оператора гиперболического типа (вычисление коэффициентов);
- 2) решение краевой задачи для гиперболического уравнения;
- 3) вычисление функционала от решения краевой задачи (обычно путем интегрирования по некоторой подобласти определения дифференциального оператора).

Приведенная вычислительная процедура, состоящая из трех подзадач, выполняется несколько раз на каждой итерации в зависимости от типа решения решаемой задачи и метода решения.

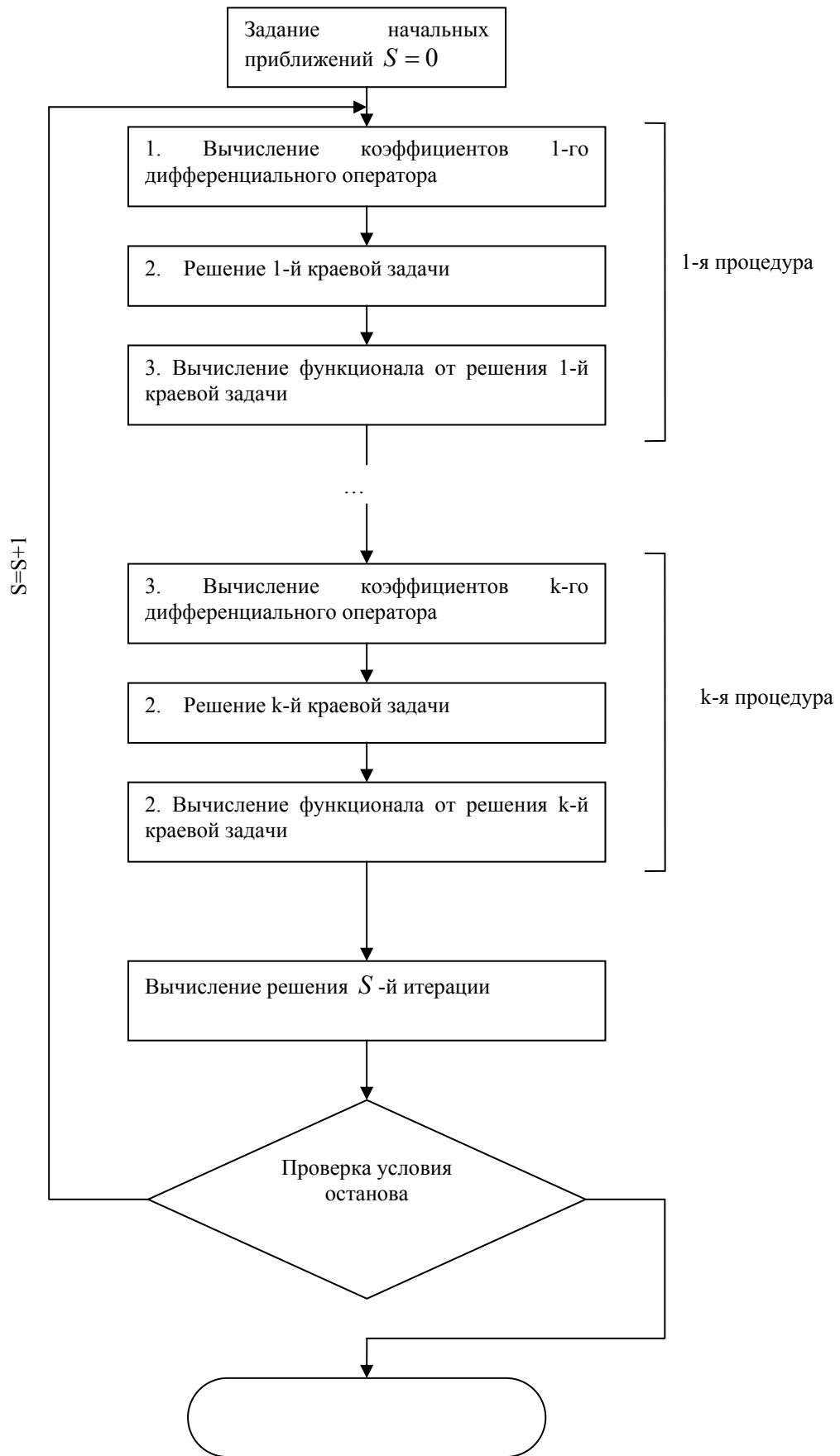


Рисунок 3.1 – Итерационный процесс.

При решении обратной задачи на каждой итерации последовательно решаются: прямая краевая задача и вычисляется значение функционала невязки; сопряженная краевая задача и вычисляется градиент функционала; задача для вариаций давления и вычисляется глубина спуска (т.е. выделенная вычислительная процедура выполняется трижды).

Следует также учесть, что численное решение всех типов краевых задач в общем случае может осуществляться на различных конечно-разностных сетках. Однако при этом возникает необходимость введения целого ряда дополнительных операций, связанных с интерполяцией достаточно большого числа сеточных функций. Исследуемую неограниченную пластину удобно представить в виде конечного числа пластин с разрывами в решении и производной решения (рисунок 3.2). Что позволяет рассматривать все три задачи в одной и той же многослойной области с достаточно общими условиями энергетического сопряжения между слоями в каждой задаче. Это делает весьма целесообразным использование одной и той же разностной сетки для всех краевых задач. Краевая задача для уравнения гиперболического типа, охватывающая все рассматриваемые случаи записывается следующим образом:

$$\varepsilon_l(P_l, x, \tau) \frac{\partial^2 P_l}{\partial \tau^2} = c_l(P_l, x, \tau) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + a_l(P_l, x, \tau) \frac{\partial P_l}{\partial \tau} + b_l(P_l, x, \tau) \frac{\partial P_l}{\partial x} + S_l(P_l, x, \tau), \quad (3.1)$$

$$P = P_l(x, \tau), x \in (X_{l-1}, X_l), \quad l = \overline{1, L}, \tau \in (0, \tau_{\max}];$$

$$P_l(x, 0) = P_{l0}(x), x \in [X_{l-1}, X_l], l = \overline{1, L}; \quad (3.2)$$

$$a_0(P_1(X_1, \tau), \tau) \frac{\partial P_1(X_1, \tau)}{\partial x} + b_0(P_1(X_1, \tau), \tau) P_1(X_1, \tau) = d_0(\tau), \tau \in (0, \tau_m]; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial P_l(x, 0)}{\partial \tau} = 0, x \in [X_{l-1}, X_l], l = \overline{1, L}; \quad (3.4)$$

$$a_L(P_L(X_L, \tau), \tau) \frac{\partial P_L(X_L, \tau)}{\partial x} + b_L(P_L(X_L, \tau), \tau) P_L(X_L, \tau) = H_L(P_L(X_L, \tau), \tau), \tau \in (0, \tau_m]; \quad (3.5)$$

$$a_l(P_l(X_l, \tau), \tau) \frac{\partial P_l(X_l, \tau)}{\partial x} + b_l(P_l(X_l, \tau), \tau) P_l(X_l, \tau) + d_l(P_{l+1}(X_{l+1}, \tau), \tau) \frac{\partial P_{l+1}(X_{l+1}, \tau)}{\partial x} + f_l(P_{l+1}(X_{l+1}, \tau), \tau) P_{l+1}(X_{l+1}, \tau) = \varpi_l(\tau),$$

$$l = \overline{1, L-1}, \tau \in (0, \tau_m]; \quad (3.6)$$

$$g_l(P_l(X_l, \tau), \tau) \frac{\partial P_l(X_l, \tau)}{\partial x} + h_l(P_l(X_l, \tau), \tau) P_l(X_l, \tau) + e_l(P_{l+1}(X_{l+1}, \tau), \tau) P_{l+1}(X_{l+1}, \tau) = \nu_l(\tau),$$

$$l = \overline{1, L-1}, \tau \in (0, \tau_m], \quad (3.7)$$

где L - полное число слоев в системе.

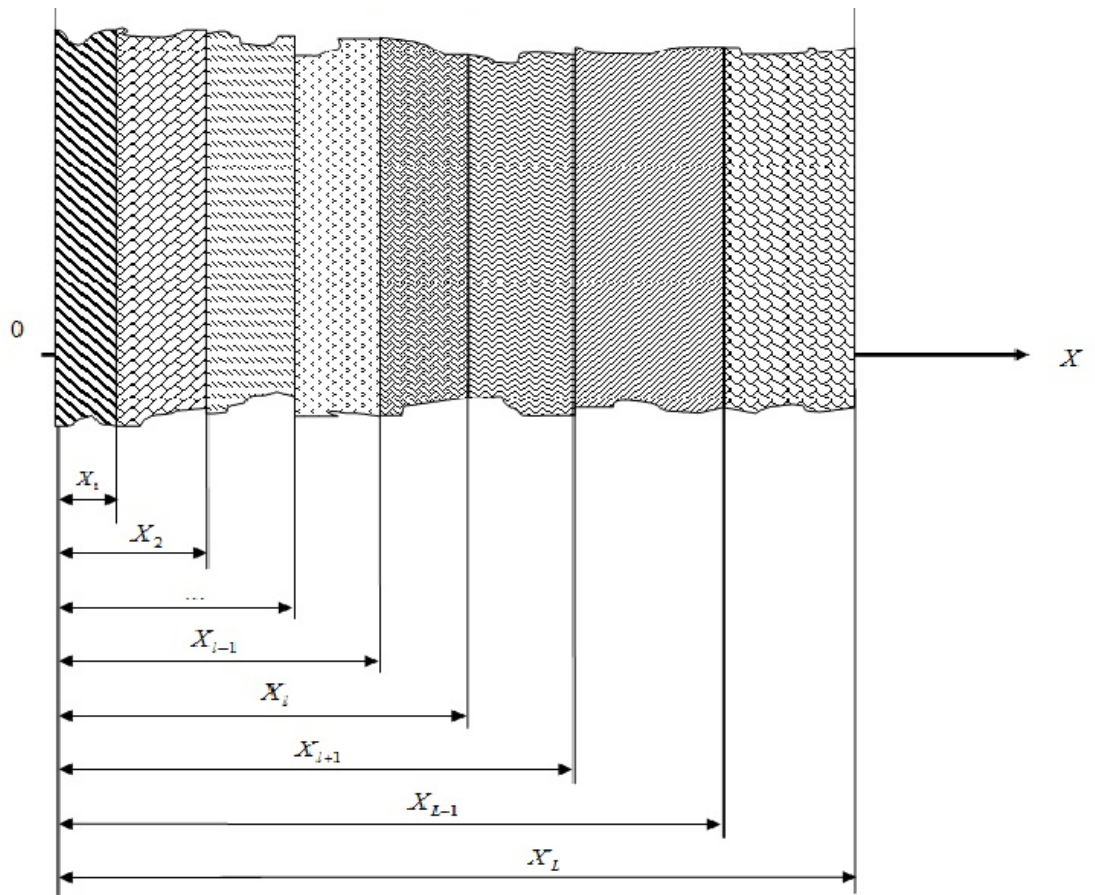


Рисунок 3.2 – Представление исследуемого материала

Постановка задачи (3.1) – (3.7) является весьма универсальной и охватывает большинство возникающих на практике расчетных случаев. В каждом отдельном случае конкретизация задачи достигается за счет задания

соответствующих коэффициентов $\varepsilon_l, c_l, a_l, b_l, S_l, l = \overline{1, L}$ в уравнении (3.1); $a_l, b_l, d_l, f_l, \omega_l, g_l, h_l, e_l, v_l, l = \overline{1, L-1}$ в (3.6), (3.7), $a_0, b_0, d_0, a_L, b_L, H$ в (3.3), (3.5).

Вычисление некоторого функционала от полученного решения может быть записано в общем виде как

$$\Omega = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{\tilde{L}_n} \int_{B_l^n} \int_{t_n} k(P_l(x, \tau)) dx d\tau, \quad (3.8)$$

где B_l^n, t_n - некоторые замкнутые подмножества, $B_l^n \subset [X_0, X_L], t_n \in (0, \tau_m^n], l \in [1, \tilde{L}_n]$

Таким образом, при анализе вычислительных вопросов построения алгоритмов параметрической идентификации и оптимального планирования можно ограничиться рассмотрением только выделенной выше процедуры, состоящей из трех пунктов.

3.2 Аппроксимация коэффициентов дифференциального оператора гиперболического типа

Рассматриваемый дифференциальный оператор (3.1)-(3.6) является нелинейным, поэтому его коэффициенты вычисляются в узлах разностной сетки параллельно с решением краевой задачи. В общем случае коэффициент дифференциального оператора может быть представлен как

$$Z = Z(P(x, \tau), x, \tau), \quad (3.9)$$

Для рассматриваемых краевых задач коэффициент Z можно записать в виде комбинации функций зависящих от одного аргумента [53]

$$Z = \sum_{k=1}^{K_z} \left(\prod_{l=1}^{K_{1k}} Z_l(P(x, \tau)) \prod_{m=1}^{K_{2k}} Z_m(x) \prod_{n=1}^{K_{3k}} Z_n(\tau) \right); \quad (3.10)$$

Для вычисления функций $Z_l, l = \overline{1, K_{1k}}, k = \overline{1, K_z}$ зависящих от значений решения краевой задачи в данном узле разностной сетки в данной работе используется следующий подход:

- а) на априорно заданной области определения сомножителей $Z_l : [P_l^{\max}, P_l^{\min}]$ вводится разностная сетка

$$\omega_l = \left\{ P_s = P_l^{\min} + s \Delta P_l, s = 0, \dots, s_l, \Delta P_l = (P_l^{\max} - P_l^{\min}) / s_l \right\};$$

причем число узлов $(s_l + 1)$ выбирается с учетом характера поведения функции $Z_l(P)$ (ее монотонности, гладкости, темпов роста и т.д.);

б) до начала решения краевой задачи для рассматриваемого дифференциального оператора вычисляется значение функции в узлах $P_s, s = \overline{0, s_l}$ по явным формулам или с использованием каких либо интерполяционных (например, кубическими сплайнами) зависимостей;

в) при решении краевой задачи на каждой итерации в каждом узле разностной сетки имеем значение P_i^j . Для вычисления Z_l используется линейная интерполяция как наиболее экономичный (в вычислительном отношении) вид интерполяции, если $P_i^j \in [P_{\bar{s}}, P_{\bar{s}}], 0 \leq \bar{s} \leq \bar{s} \leq s_l$, то

$$Z_l(P_i^j) = Z_l(P_{\bar{s}}) + \frac{Z_l(P_{\bar{s}}) - Z_l(P_{\bar{s}})}{P_{\bar{s}} - P_{\bar{s}}}(P_i^j - P_{\bar{s}}); \quad (3.11)$$

Погрешность при вычислении коэффициента с использованием линейной интерполяции равна [52]

$$\delta = \delta_1 + \delta_2; \quad (3.12)$$

Здесь δ_1 - погрешность вычислительных функций Z_l - погрешность вычисления функций Z_l в узлах $P_s, s = \overline{0, s_l}; \delta_2 = \frac{Z_l'(\xi)}{2}(P_i^j - P_{\bar{s}})^2$, где $\xi \in [P_{\bar{s}}, P_{\bar{s}}]$ или $\delta_2 = 0(\Delta P_l)$.

3.3 Конечно-разностная аппроксимация дифференциального оператора

В общем случае наличие в операторе (3.1) члена $b_l(P_l, x, \tau) \frac{\partial P_l}{\partial x}$ требует при построении конечно-разностного решения применения дивергентных монотонных схем аппроксимации.

Используется разностная сетка с постоянным шагом по пространственной переменной внутри каждого слоя и постоянным шагом по времени. На каждом слое $\omega_l = [X_{l-1}, X_l], l = \overline{1, L}$ вводится разностная сетка

$$\omega_l = \left\{ x_i = X_{l-1} + (i-1)\Delta x, i = \overline{1, n_{x,l}+1}, \Delta x = (X_l - X_{l-1}) / n_{x,l}, \tau_j = j\Delta \tau, j = \overline{0, n_\tau}, \Delta \tau = \tau_m / n_\tau \right\},$$

где n_τ - число шагов интегрирования по времени; $n_{x,l}$ - число шагов интегрирования по пространству в l -м слое.

Далее вводится обозначение

$$N_l = \sum_{l'=1}^l (n_{x,l'} + 1), N_0 = 0,$$

что позволяет использовать «сквозную» нумерацию сетки по пространственной переменной.

Аппроксимация уравнения (3.1)

В работе используется пятиточечная неявная схема (рисунок 3.3). Опуская индекс l конечно-разностный аналог уравнения (3.1) можно представить в виде [54]

$$\begin{aligned} \frac{P_i^j - 2P_{i-1}^j + P_{i-2}^j}{\Delta \tau^2} = & \left(\frac{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_i^j + \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i+1}^j}{2} \frac{P_{i+1}^j}{\Delta x^2} - \frac{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i+1}^j + 2\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_i^j + \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i-1}^j}{2} \frac{P_i^j}{\Delta x^2} + \frac{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_i^j + \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i-1}^j}{2} \frac{P_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right) + \\ & + \left(\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)_{i+1/2}^j \frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta \tau} + \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)_{i-1/2}^j \frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta \tau} \right) + \left(\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)_{i+1/2}^j \frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta x} + \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)_{i-1/2}^j \frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta x} \right) + \left(\frac{S}{\varepsilon}\right)_i^j; \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i\pm 1/2}^j = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_i^j + \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i\pm 1}^j \right]; \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_i^j = \left(\frac{c(P_{i,j})}{\varepsilon(P_{i,j})}\right)$. После преобразований имеем:

$$\begin{aligned} -A_i^j P_{i-1}^j + D_i^j P_i^j - B_i^j P_{i+1}^j &= F_i^j, \\ i &= \overline{N_{l-1} + 2, N_l - 1}, l = \overline{1, L}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$A_i^j = \frac{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_i^j + \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i-1}^j}{2} \frac{1}{\Delta x^2} - \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)_{i-1/2}^j \frac{1}{\Delta \tau} - \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)_{i-1/2}^j \frac{1}{\Delta x};$$

$$D_i^j = \frac{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i+1}^j + 2\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_i^j + \left(\frac{c_i}{\varepsilon_i}\right)_{i-1}^j}{2} \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta \tau} \left[\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)_{i+1/2}^j - \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)_{i-1/2}^j \right] - \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)_{i+1/2}^j - \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)_{i-1/2}^j \right];$$

$$B_i^j = \frac{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_i^j + \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)_{i+1}^j}{2} \frac{1}{\Delta x^2} + \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)_{i+1/2}^j \frac{1}{\Delta \tau} + \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)_{i+1/2}^j \frac{1}{\Delta x};$$

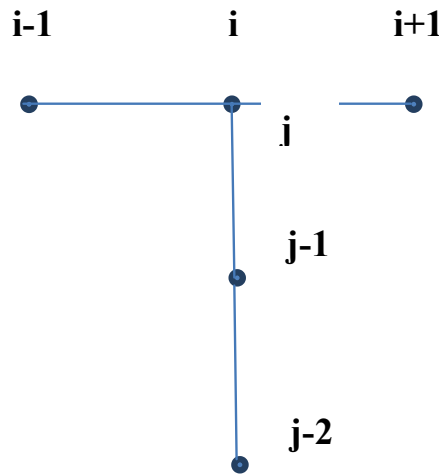


Рисунок 3.3 – Конечно-разностный шаблон

Аппроксимация левого граничного условия (3.3)

Для конечно-разностной аппроксимации граничных условий используется разностное представление первой производной функции $P(x, \tau)$ по пространственной переменной на трехточечном шаблоне [53]:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{0+0} = \frac{-P_3^j + 4P_2^j - 3P_1^j}{2\Delta x_1}; \quad (3.15)$$

Используя (3.15), разностный аналог граничного условия (3.3) записывают в виде

$$a_0^j \frac{-P_3^j + 4P_2^j - 3P_1^j}{2\Delta x_1} + b_0^j P_1^j - d_0^j = 0;$$

или с учетом (3.14) для $i = 2$,

$$a_0^j \left(\frac{F_2^j}{B_2^j} - \frac{D_2^j}{B_2^j} P_2^j + \frac{A_2^j}{B_2^j} P_1^j + 4P_2^j - 3P_1^j \right) + 2\Delta x_1 b_0^j P_1^j - 2\Delta x_1 d_0^j = 0; \quad (3.16)$$

В (3.14) $i=1$, после преобразования получим

$$D_1^j P_1^j - B_1^j P_2^j = F_1^j, \quad (3.17)$$

где

$$D_1^j = a_0^j \left(\frac{A_2^j}{B_2^j} - 3 \right) + 2\Delta x_1 b_0^j;$$

$$B_1^j = a_0^j \left(\frac{D_2^j}{B_2^j} - 4 \right);$$

$$F_1^j = -a_0^j \frac{F_2^j}{B_2^j} + 2\Delta x_1 d_0^j.$$

Аппроксимация правого граничного условия(3.4):

Для получения конечно-разностного аналога условия (3.4) на разностной сетке, показанной на рисунке 3.3, используется аппроксимация первой производной в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x}(X_L, \tau) = \frac{P_{N_L-2}^j - 4P_{N_L-1}^j + 3P_{N_L}^j}{2\Delta x_L}; \quad (3.18)$$

разностный аналог граничного условия (3.4)

$$a_L^j \left(\frac{P_{N_L-2}^j - 4P_{N_L-1}^j + 3P_{N_L}^j}{2\Delta x_L} \right) + b_L^j P_{N_L}^j - H_L^j = 0;$$

с учетом (3.13), для $i=N_L - 1$,

$$P_{N_L-2}^j = \left(\frac{-F_{N_L-1}^j + D_{N_L-1}^j P_{N_L-1}^j - B_{N_L-1}^j P_{N_L}^j}{A_{N_L-1}^j} \right);$$

$$a_L^j \left(\frac{-F_{N_L-1}^j + D_{N_L-1}^j P_{N_L-1}^j - B_{N_L-1}^j P_{N_L}^j}{A_{N_L-1}^j} - 4P_{N_L-1}^j + 3P_{N_L}^j \right) + 2\Delta x_L b_L^j P_{N_L}^j - 2\Delta x_L H_L^j = 0;$$

после преобразования получим

$$-A_{N_L}^j P_{N_L-1}^j + D_{N_L}^j P_{N_L}^j = F_{N_L}^j, \quad (3.19)$$

где

$$A_{N_L}^j = a_L^j \left(-\frac{D_{N_L-1}^j}{A_{N_L-1}^j} + 4 \right);$$

$$D_{N_L}^j = a_L^j \left(-\frac{B_{N_L-1}^j}{A_{N_L-1}^j} + 3 \right) + 2\Delta x_L b_L^j;$$

$$F_{N_L}^j = a_L^j \frac{F_{N_L-1}^j}{A_{N_L-1}^j} + 2\Delta x_{N_L-1} d_L^j.$$

Аппроксимация условий сопряжения на внутренних границах (3.6) – (3.7)

Для получения конечно-разностного аналога условий (3.6) – (3.7) на разностной сетке, показанной на рисунке 3, используется аппроксимация первых производных в виде

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}(X_i, \tau) \right)_{i=0} = \frac{P_{N_i-2}^j - 4P_{N_i-1}^j + 3P_{N_i}^j}{2\Delta x_i}; \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}(X_{i+1}, \tau) \right)_{0+i} = \frac{-P_{N_i+3}^j + 4P_{N_i+2}^j - 3P_{N_i+1}^j}{2\Delta x_{i+1}}; \quad (3.21)$$

с учетом (3.13) для $i = N_i - 1$ и для $i = N_i + 2$ соответственно

$$P_{N_i-2}^j = -\frac{F_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} + \frac{D_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} P_{N_i-1}^j - \frac{B_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} P_{N_i}^j; \quad (3.22)$$

$$P_{N_i+3}^j = -\frac{F_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} + \frac{D_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} P_{N_i+2}^j - \frac{A_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} P_{N_i+1}^j; \quad (3.23)$$

Подставляя равенства (3.20) – (3.23) в условия (3.6), получим

$$\frac{a_i^j}{2\Delta x_i} \left(-\frac{F_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} + \frac{D_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} P_{N_i-1}^j - \frac{B_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} P_{N_i}^j - 4P_{N_i-1}^j + 3P_{N_i}^j \right) + b_i^j P_{N_i}^j +$$

$$+ \frac{d_i^j}{2\Delta x_{i+1}} \left(\frac{F_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} + \frac{A_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} P_{N_i+1}^j - \frac{D_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} P_{N_i+2}^j + 4P_{N_i+2}^j - 3P_{N_i+1}^j \right) + f_i^j P_{N_i+1}^j - \omega_i^j = 0, \quad (3.24)$$

или

$$\frac{a_i^j}{2\Delta x} \left(\frac{D_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} - 4 \right) P_{N_i-1}^j - \left(\frac{a_i^j}{2\Delta x} \left(\frac{B_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} - 3 \right) - b_i^j \right) P_{N_i}^j - \frac{d_i^j}{2\Delta x_{i+1}} \left(\frac{D_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} - 4 \right) P_{N_i+2}^j +$$

$$+ \left(\frac{d_i^j}{2\Delta x_{i+1}} \left(\frac{A_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} - 3 \right) + f_i^j \right) P_{N_i+1}^j = \frac{a_i^j}{2\Delta x} \frac{F_{N_i-1}^j}{A_{N_i-1}^j} - \frac{d_i^j}{2\Delta x_{i+1}} \frac{F_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} + \omega_i^j; \quad (3.25)$$

Подставляя соотношения (3.20) и (3.22) в условие (3.7), имеем

$$\frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \left(-\frac{F_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} + \frac{D_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} P_{N_l-1}^j - \frac{B_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} P_{N_l}^j - 4P_{N_l-1}^j + 3P_{N_l}^j \right) + h_l^j P_{N_l}^j + e_l^j P_{N_l+1}^j - v_l^j = 0; \quad (3.26)$$

ИЛИ

$$P_{N_l+1}^j = -\frac{g_l^j}{2\Delta x_l e_l^j} \left(\frac{D_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - 4 \right) P_{N_l-1}^j + \left(\frac{g_l^j}{2\Delta x_l e_l^j} \left(\frac{B_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - 3 \right) - \frac{h_l^j}{e_l^j} \right) P_{N_l}^j + \frac{g_l^j}{2\Delta x_l e_l^j} \frac{F_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} + \frac{v_l^j}{e_l^j}; \quad (3.27)$$

ТОГДА

$$-A_{N_l}^j P_{N_l-1}^j + D_{N_l}^j P_{N_l}^j - B_{N_l}^j P_{N_l+1}^j = F_{N_l}^j, \quad (3.28)$$

ГДЕ

$$A_{N_l}^j = \frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \left(\frac{D_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - 4 \right);$$

$$D_{N_l}^j = \frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \left(\frac{B_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - 3 \right) - h_l^j;$$

$$B_{N_l}^j = e_l^j;$$

$$F_{N_l}^j = -\frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \frac{F_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - v_l^j.$$

Величина $P_{N_l-1}^j$ определяется из уравнения (3.22)

$$P_{N_l-1}^j = \left(\frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \frac{F_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} + v_l^j + \left(\frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \left(\frac{B_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - 3 \right) - h_l^j \right) P_{N_l}^j - e_l^j P_{N_l+1}^j \right) / \left(\frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \left(\frac{D_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - 4 \right) \right); \quad (3.29)$$

Подставляя соотношения (3.21) и (3.23) в условие (3.7), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{a_l^j}{g_l^j} \left(\frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \frac{F_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - v_l^j \right) + \frac{a_l^j}{g_l^j} \left(\frac{g_l^j}{2\Delta x_l} \left(\frac{B_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - 3 \right) - h_l^j \right) P_{N_l}^j - \left(\frac{a_l^j}{2\Delta x_l} \left(\frac{B_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} - 3 \right) - b_l^j \right) P_{N_l}^j - \\ & - \frac{a_l^j}{g_l^j} e_l^j P_{N_l+1}^j + \left(\frac{d_l^j}{2\Delta x_{l+1}} \left(\frac{A_{N_l+2}^j}{B_{N_l+2}^j} - 3 \right) - f_l^j \right) P_{N_l+1}^j - \frac{g_l^j}{2\Delta x_{l+1}} \left(\frac{D_{N_l+2}^j}{B_{N_l+2}^j} - 4 \right) P_{N_l+2}^j = -\frac{d_l^j}{2\Delta x_{l+1}} \frac{F_{N_l+2}^j}{B_{N_l+2}^j} + \\ & + \frac{d_l^j}{2\Delta x_l} \frac{F_{N_l-1}^j}{A_{N_l-1}^j} + w_l^j; \end{aligned} \quad (3.30)$$

откуда имеем

$$-A_{N_l+1}^j P_{N_l}^j + D_{N_l+1}^j P_{N_l+1}^j - B_{N_l+1}^j P_{N_l+2}^j = F_{N_l+1}^j, \quad (3.31)$$

ГДЕ

$$A_{N_i+1}^j = -a_i^j h_i^j + b_i^j g_i^j;$$

$$B_{N_i+1}^j = -\frac{g_i^j d_i^j}{2\Delta x_{i+1}} \left(\frac{D_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j} - 4 \right);$$

$$F_{N_i+1}^j = a_i^j v_i^j - w_i^j g_i^j - \frac{g_i^j d_i^j}{2\Delta x_{i+1}} \frac{F_{N_i+2}^j}{B_{N_i+2}^j}.$$

Алгебраические уравнения (3.14), (3.17), (3.19), (3.28) и (3.31) составляют замкнутую систему с почти трехдиагональной матрицей, что позволяет решать ее на каждом временном слое методом прогонки. При $j=1$ $P_i^0 = P_{i_0} = P_i^1, i = \overline{1, N_L}$.

3.4 Решение системы алгебраических уравнений

В результате конечно-разностной аппроксимации дифференциального оператора (3.1) – (3.7) решение исходной краевой задачи сводится к решению на каждом шаге интегрирования по времени системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\left. \begin{aligned} D_1^j P_1^j - B_1^j P_2^j &= F_1^j; \\ -A_i^j P_{i-1}^j + D_i^j P_i^j - B_i^j P_{i+1}^j &= F_i^j; \\ i &= \overline{2, N_L - 1}, \\ -A_{N_L}^j P_{N_L-1}^j + D_{N_L}^j P_{N_L}^j &= F_{N_L}^j \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Решение системы (3.32) ищется в виде [52]

$$P_i^j = \alpha_i^j P_{i+1}^j + \beta_i^j, \quad i = \overline{1, N_L-1}, \quad (3.33)$$

где $\alpha_i^j, \beta_i^j, i = \overline{1, N_L-1}$ - прогоночные коэффициенты.

После преобразований получаются следующие рекуррентные соотношения для вычисления прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_{i+1}^j = \frac{B_i^j}{D_i^j - \alpha_i^j A_i^j}, \quad i = \overline{2, N_L - 1} \quad (3.34)$$

$$\beta_{i+1}^j = \frac{F_i^j + \beta_i^j A_i^j}{D_i^j - \alpha_i^j A_i^j}, \quad i = \overline{2, N_L - 1}; \quad (3.35)$$

$$\alpha_2^j = \frac{B_1^j}{D_1^j}; \quad (3.36)$$

$$\beta_2^j = \frac{F_1^j}{D_1^j}; \quad (3.37)$$

Последнее уравнение системы (3.32) может быть представлено в виде:

$$P_{N_L}^j = \frac{-D_{N_L}^j \beta_{N_L}^j + F_{N_L}^j}{-B_{N_L}^j + \alpha_{N_L}^j D_{N_L}^j}; \quad (3.38)$$

Далее из (3.38) определяется $P_{N_L}^j$ и затем по формулам (3.27), (3.33) рассчитывается профиль $P_i^j, i = \overline{1, N_L}$. При этом для нелинейных задач требуется организовать соответствующий процесс итераций по коэффициентам дифференциального оператора (3.1) – (3.7).

Подставим систему уравнений (3.29) в матричной форме:

$$M^j(\bar{P}^j)\bar{P}^j = F^j(\bar{P}^j), \quad j = \overline{21, n_\tau + 1}, \quad (3.39)$$

где $\bar{P}^j = \{P_1^j, \dots, P_{N_L}^j\}$, $\bar{F}^j(\bar{P}^j) = \{F_1^j, \dots, F_{N_L}^j\}$, $M^j(\bar{P}^j)$ - трехдиагональная матрица.

При решении нелинейных задач элементы матрицы зависят от искомого решения $M^j(\bar{P}^j)$, поэтому для нахождения решения системы (3.36) и применяется метод итераций. В настоящей работе используется следующая форма построения итерационного процесса:

$$M^j(\bar{P}^{j(r-1)})\bar{P}^{j(r)} = F^j(\bar{P}^{j(r-1)}) \quad (3.40)$$

где r - номер итерации.

В качестве начального приближения профиля $P^{j(0)}$ для каждого расчетного момента времени τ^j задается профиль, полученный на предыдущем шаге по времени, то есть

$$P^{j(0)} = P^{j-1} \quad (3.41)$$

Относительно $P^{j(r)}$ система (3.37) является линейной и решается методом прогонки. Останов итерационного процесса осуществляется при достижении заданной точности сходимости итераций:

$$\left| P_i^{j(r)} - P_i^{j(r-1)} \right| \leq \varepsilon \left| P_i^{j(r-1)} \right|, \quad i = \overline{1, N_L}, \quad (3.42)$$

где $\varepsilon > 0$ - задаваемая относительная точность вычисления решения задачи (3.33) – (3.37).

Очевидно, что если коэффициенты дифференциального уравнения не зависят от решения, итерации по коэффициентам проводить не следует.

В [54] приводится следующая оценка погрешности полученного решения:

$$\delta = 0(\Delta\tau + \Delta x^2), \quad (3.43)$$

где $\Delta x = \max_l (\Delta x_l)$.

В заключении можно привести оценку суммарной погрешности вычислительного процесса на s -й итерации в продолжении аддитивности погрешностей [52]:

$$\delta = 0(\Delta P + \Delta\tau + \Delta x^2), \quad (3.44)$$

где $\Delta P = \max_z \Delta P_z$.

Завершая данную главу, следует отметить, что используя обобщенную краевую задачу (3.1)-(3.7), удастся построить единый вычислительный алгоритм для решения задач параметрической идентификации и оптимального планирования динамических экспериментов и, следовательно, единое программное обеспечение [53].

4 Анализ влияния различных факторов на эффективность вычислительных алгоритмов

Для неразрушающего контроля современных конструкционных, теплозащитных и теплоизоляционных материалов в настоящей работе предлагается метод, основанный на решении обратных задач нелинейной акустики и, в частности, определении их акустических характеристик. Исходные данные для таких задач формируются на основе результатов измерений и включают в себя граничные условия (первого или второго рода) и зависимости давления от времени в нескольких точках образцов. Тип граничных условий и число точек измерения давления должны удовлетворять условиям единственности решения анализируемой обратной задачи.

Условия единственности обычно определяют минимально необходимый объем измерений, которые требуется осуществлять в одном эксперименте. Так для определения зависимости от координаты параметра нелинейности хотя бы на одной границе необходимо измерить скорость поступающего в образец, отличного от нуля потока, и осуществить нестационарные измерения давления, на другой границе условия могут быть произвольными [36]. Можно задавать граничные условия первого рода на обеих границах, но в этом случае образец должен быть многослойным и содержать слой материала с известными акустическими характеристиками.

Эффективное применение методов неразрушающего контроля на основе решения обратных задач, требует тщательной отработки вычислительных алгоритмов, а также выбора числа одновременно обрабатываемых образцов, числа датчиков и т.д. На этом этапе исследований наиболее эффективным методом исследований является вычислительный эксперимент. Полагая, что все коэффициенты математической модели и расположение дефекта известны, решается прямая задача нелинейной акустики в образце. После чего с

использованием полученного поля давлений в предполагаемых местах установки датчиков формируется дополнительная информация, необходимая для решения обратной задачи, после чего решается обратная задача по определению характеристик материала. Такой подход дает возможность проанализировать влияние погрешностей задания исходных данных на результаты решения обратной задачи.

В данной главе в качестве модельного примера рассматривается распространение акустических волн, описываемое следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2 \rho} \varepsilon(x) \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}, \quad (4.1)$$

$$x \in (0, d), \tau \in (0, \tau_{\max}]$$

$$p(x, 0) = p_0, \quad x \in [0, d], \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, d], \quad (4.3)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}(0, \tau) = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \tau^2}, \quad \tau \in (0, \tau_{\max}], \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(d, \tau) = 0, \quad \tau \in (0, \tau_{\max}], \quad (4.5)$$

Предполагается, что параметры ρ , c известны. Идентифицируемой функцией в данной работе являются параметр нелинейности $\varepsilon(x)$, который не может быть измерен или вычислен.

В качестве дополнительного условия предполагается измерение давления на внешней (левой) границе образца

$$p^{\text{exp}}(0, \tau) = f(\tau), \tau \in (0, \tau_{\max}), \quad (4.6)$$

На множестве $x \in [0, d]$, соответствующем толщине образца, введем равномерную разностную сетку с числом узлов N_ε .

$$\omega_\varepsilon = \{x_k = (k-1)\Delta x, k = \overline{1, N_\varepsilon - 1}\}.$$

Тогда определяемая функция может быть представлена в виде:

$$\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon_k \varphi_k(x), \quad (4.7)$$

где параметры аппроксимации $\varepsilon_k, k=1, \dots, N_\varepsilon$ неизвестны. В этом случае среднеквадратичный функционал невязки редуцируется до функции N_ε переменных:

$$J(\bar{\varepsilon}) = \int_0^{\tau_{\max}} (p(0, \tau) - f(\tau))^2 d\tau, \quad (4.8)$$

А градиент функционала может быть представлен в виде

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_k} = - \int_0^{\tau_{\max}} \int_0^d \psi(x, \tau) \frac{1}{c^2 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dx d\tau \quad (4.9)$$

$k = 1, \dots, N_\varepsilon$

где $\psi(x, \tau)$ - решение краевой задачи, сопряженной с линеаризованной формой задачи (4.1)-(4.5):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2 \rho} \varepsilon(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2},$$

$$x \in (0, d), t \in [0, \tau_{\max}), \quad (4.10)$$

$$\psi(x, \tau_{\max}) = 0, x \in [0, d], \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, \tau_{\max}) = 0, x \in [0, d], \quad (4.12)$$

$$c^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, \tau) + 2(p(0, \tau) - f(\tau)) = 0, \tau \in [0, \tau_{\max}), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(d, \tau) = 0, \tau \in [0, \tau_{\max}). \quad (4.14)$$

Линейная оценка шага спуска в градиентном методе минимизации может быть вычислена как:

$$\gamma^s = \frac{\int_0^{\tau_{\max}} \Delta p(0, \tau)(p(0, \tau) - f(\tau)) d\tau}{\int_0^{\tau_{\max}} \Delta p^2(0, \tau) d\tau}, \quad (4.15)$$

где $\Delta p(x, \tau)$ является дифференциалом Фреше функции $p(x, \tau)$ для фиксированного значения $\varepsilon(x)$ и является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} = \frac{1}{c\rho^2} \varepsilon(x) \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial \tau^2} + \frac{1}{c\rho^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} g_k \varphi_k(x),$$

$$x \in (0, d), \tau \in (0, \tau_{\max}], \quad (4.16)$$

$$\Delta p(x,0) = 0, \quad x \in [0, d], \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \tau}(x,0) = 0, \quad x \in [0, d], \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial x}(0, \tau) = 0, \quad \tau \in (0, \tau_{\max}], \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2}(d, \tau) = 0, \quad \tau \in (0, \tau_{\max}]. \quad (4.20)$$

Случайные погрешности во входных данных при моделировании решения обратной задачи формируются по формуле

$$f_m(\tau) = \bar{f}_m(\tau)(1 + \varpi \delta_f(\tau)), \quad m = \overline{1, M}, \quad (4.21)$$

где $\bar{f}_m(\tau)$ - «точное» показание датчика давления, полученное из решения прямой задачи; ϖ - случайная величина, распределенная по нормальному закону с дисперсией, равной 1 и математическим ожиданием, равным 0; $\delta_f(\tau)$ - максимально возможная относительная погрешность.

На основе результатов математического моделирования можно провести анализ точности и достоверности получаемых результатов, а также выбрать условия проведения экспериментальной программы.

Точное значение восстанавливаемого параметра нелинейности приведены на рисунке 4.1. В качестве начальных приближений определяемой функции, если не обговорено другое, задается значение $\varepsilon_0 = 0,5$. При математическом моделировании рассматривались образцы толщиной 0.005 м.

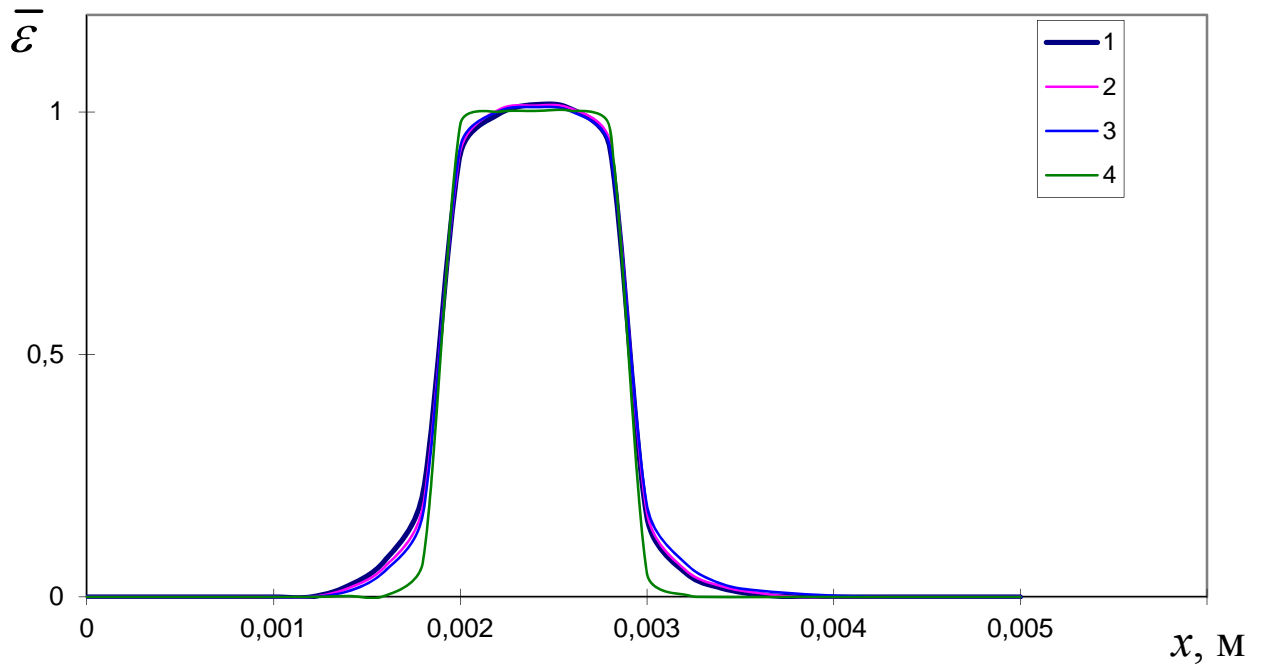
Погрешность решения обратной задачи в данной работе определяется как

$$\delta \varepsilon = \|\varepsilon(x) - \bar{\varepsilon}(x)\|_{L_2} / \|\bar{\varepsilon}(x)\|_{L_2}, \quad (4.22)$$

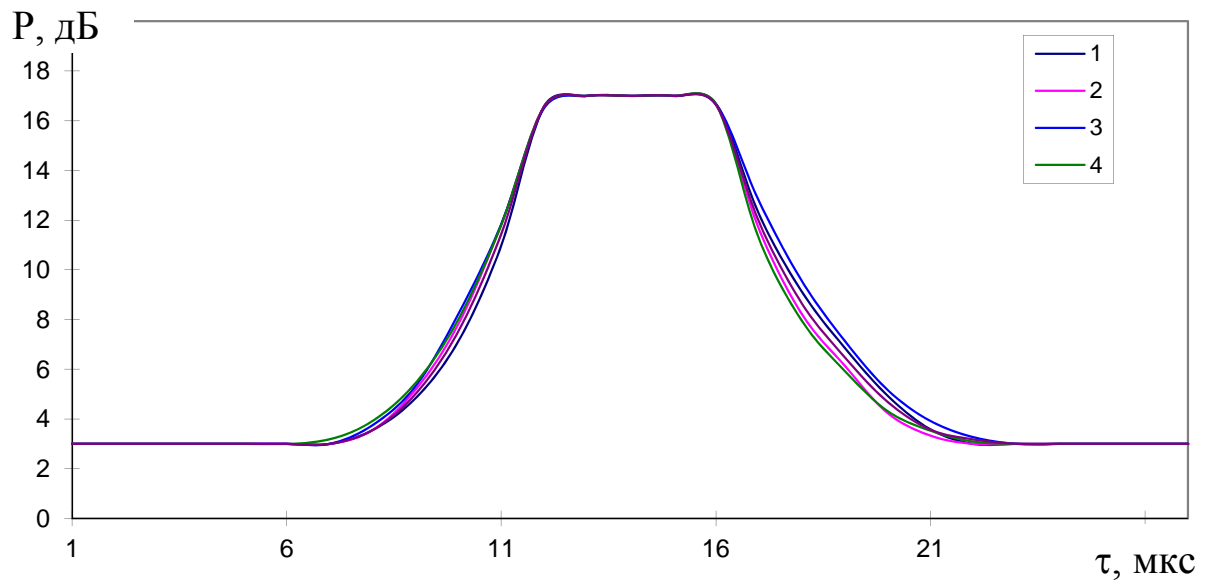
где ε и $\bar{\varepsilon}$ – восстановленные и точные значения функций в соответствующих областях определения.

На рисунке 4.1 представлены результаты восстановления неизвестной характеристики $\varepsilon(x)$ и сравнение расчетных значений давления $p(0, \tau)$ с "экспериментальным" $f(\tau)$ при отсутствии погрешностей "измерений" ($\delta_f = 0$). Видно, что для различных значений начального приближения результаты практически совпали между собой и с заданными значениями. Это подтверждает возможность получения единственного решения для подобных обратных задач.

Рассмотрим влияние числа параметров аппроксимации на точность получаемого решения для различных уровней ошибок во входных данных δ_f , а также сравниваются различные типы аппроксимации. На рисунках 4.2 – 4.5 приведены результаты аппроксимации искомых функций различными аппроксимирующими функциями: кубическими B-сплайнами и кусочно-постоянной аппроксимацией. Как видно, когда число параметров равно девяти, восстановленная характеристики более близки к заданной величине.

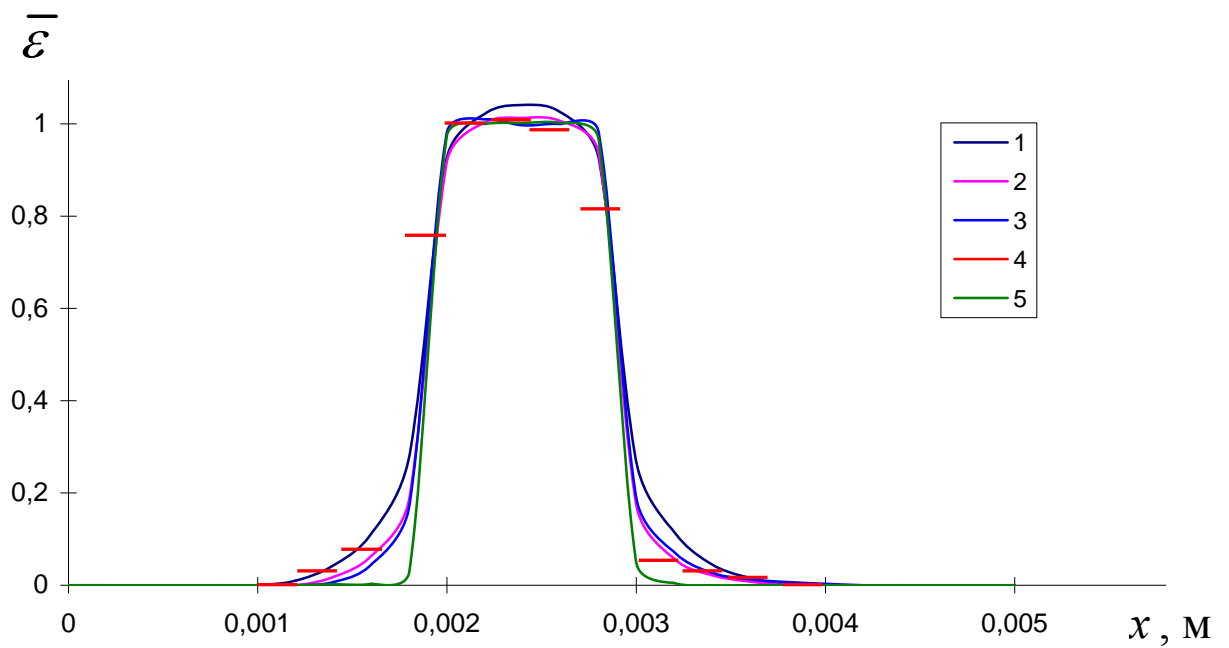


а

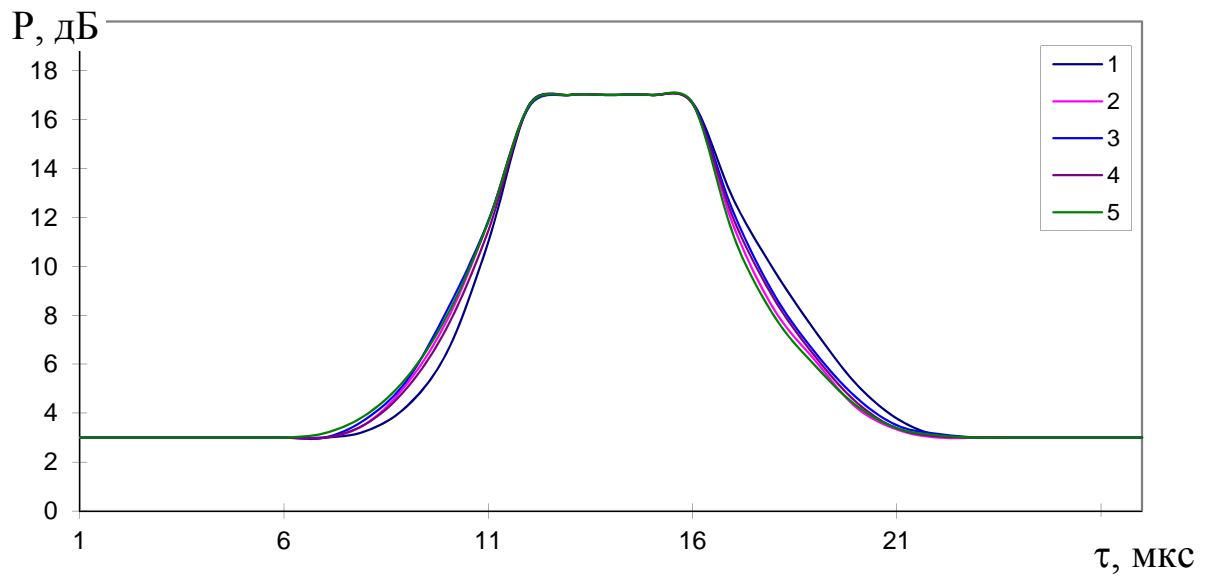


б

Рисунок 4.1 – Зависимости $\varepsilon(x)$ (а), $p(0, \tau)$ и $f(\tau)$ (б) без учета погрешностей: 1 – $\varepsilon(x)$ и $p(0, \tau)$ при $\varepsilon_0 = 0.1$, 2 – $\varepsilon(x)$ и $p(0, \tau)$ при $\varepsilon_0 = 0.7$, 3 – $\varepsilon(x)$ и $p(0, \tau)$ при $\varepsilon_0 = 1.2$, 4 – заданные зависимости $\bar{\varepsilon}(x)$ и $f(\tau)$ соответственно

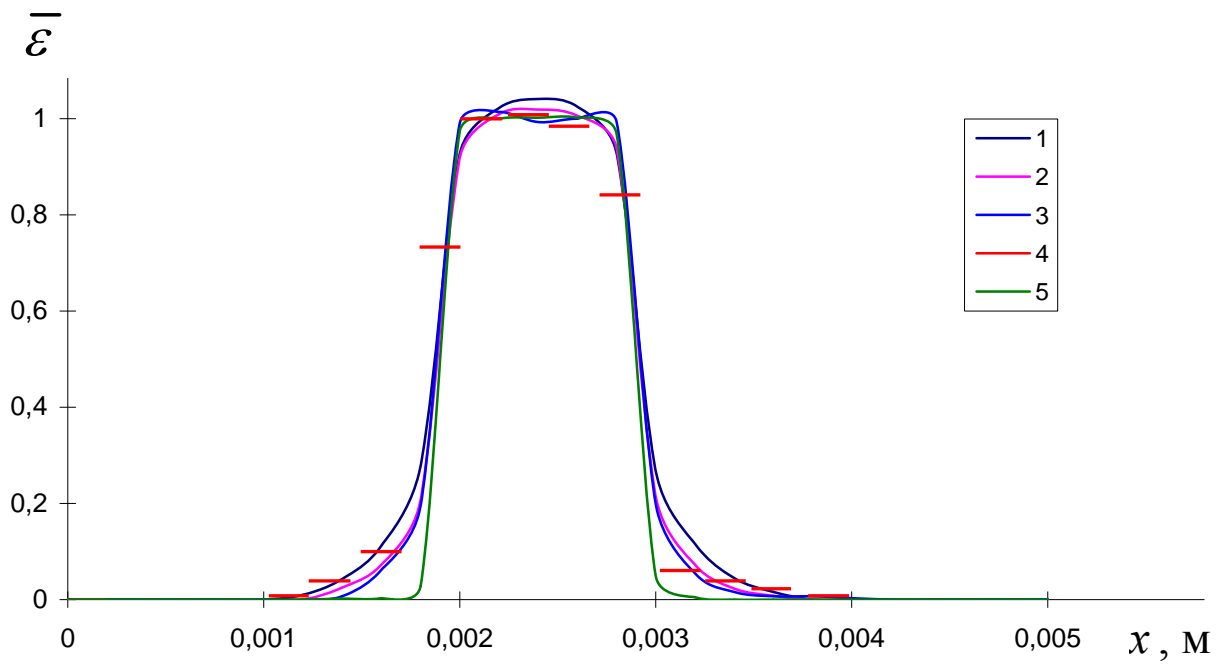


а

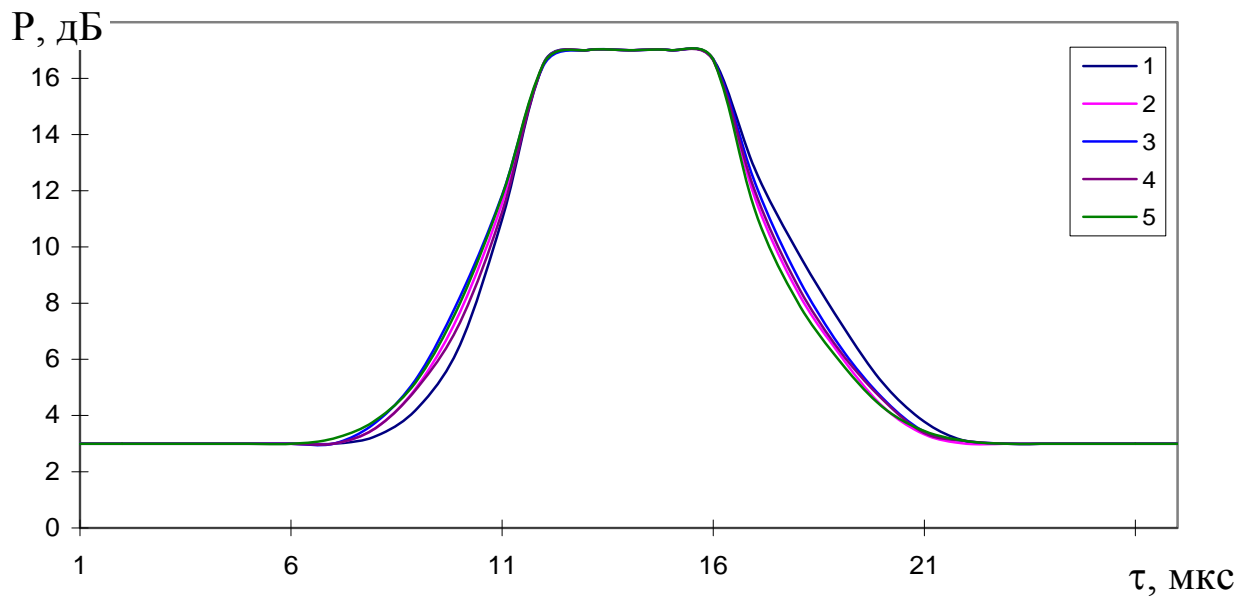


б

Рисунок 4.2 – Зависимости $\varepsilon(x)$ (а), $p(0, \tau)$ и $f(\tau)$ (б) без учета погрешностей: 1, 2, 3 – восстановленные значения при числе параметров аппроксимации равно 5, 9, 13; 4 – восстановленные значения при кусочно-постоянной аппроксимации (число параметров равно 20), 5 – заданные зависимости $\bar{\varepsilon}(x)$ и $f(\tau)$ соответственно

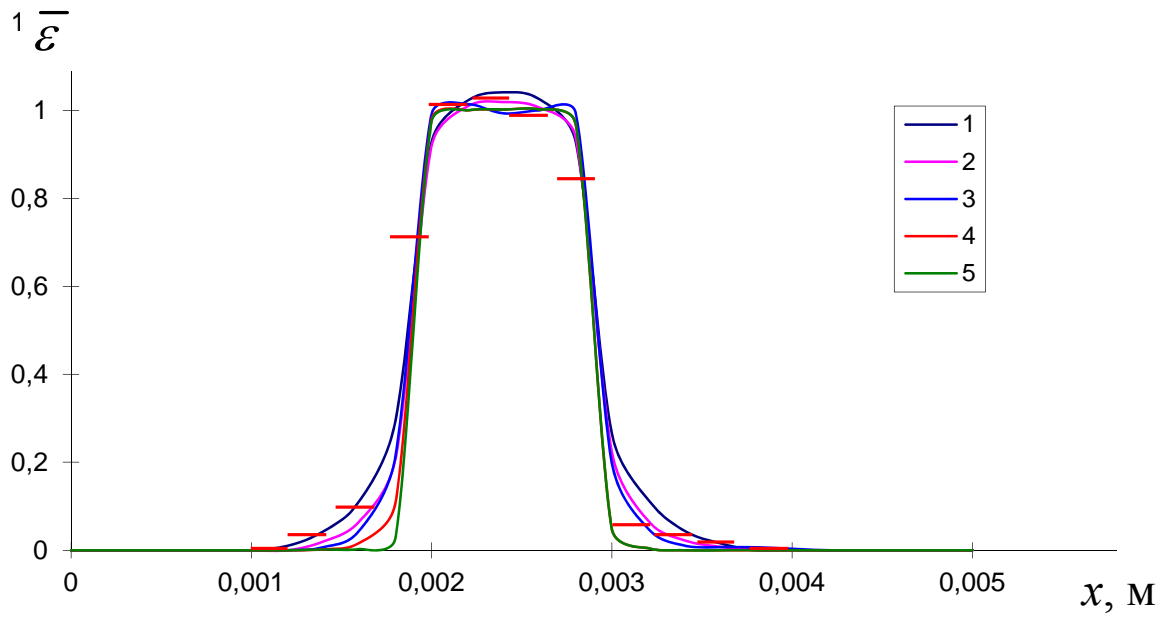


а

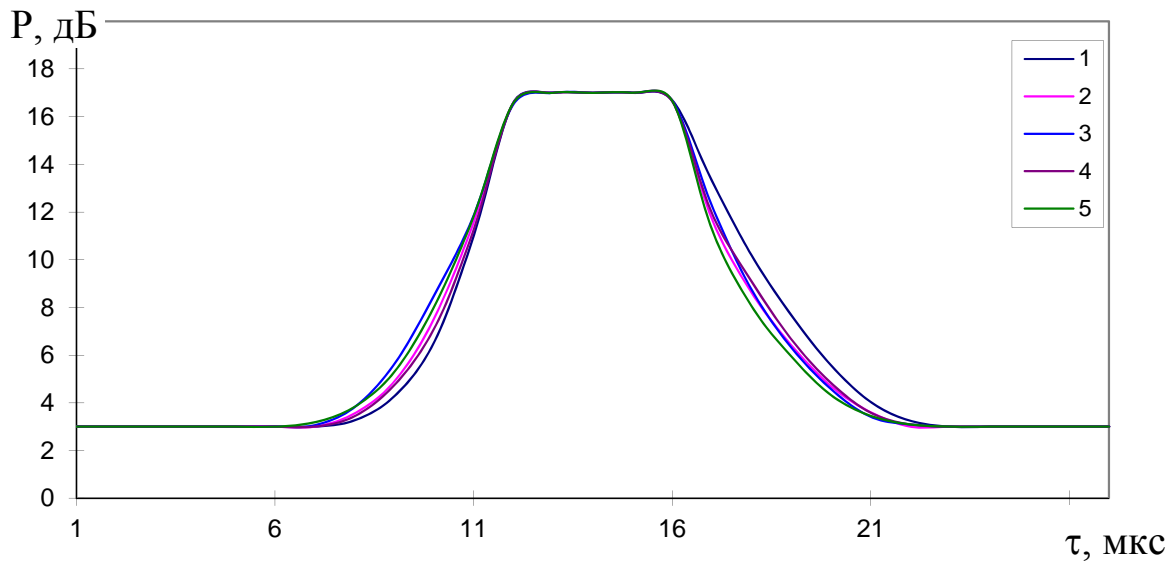


б

Рисунок 4.3 –Результаты восстановления $\varepsilon(x)$ (а) и зависимости $p(0, \tau)$ и $f(\tau)$ (б): 1,2,3 – исходные данные с погрешностью $\delta_f = 3\%$ относительно текущего значения возмущаемой функции и числе параметров равном 5,9,13; 4 – восстановленные значения при кусочно-постоянной аппроксимации (число параметров равно 20), 5 – заданные зависимости $\bar{\varepsilon}(x)$ и $f(\tau)$ соответственно

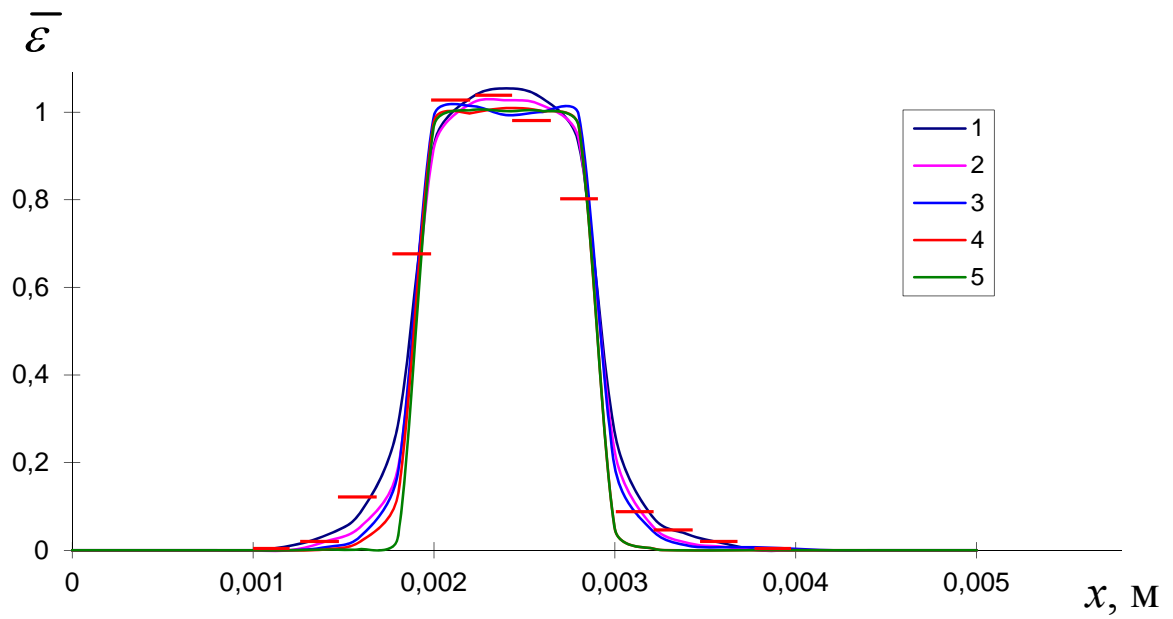


а

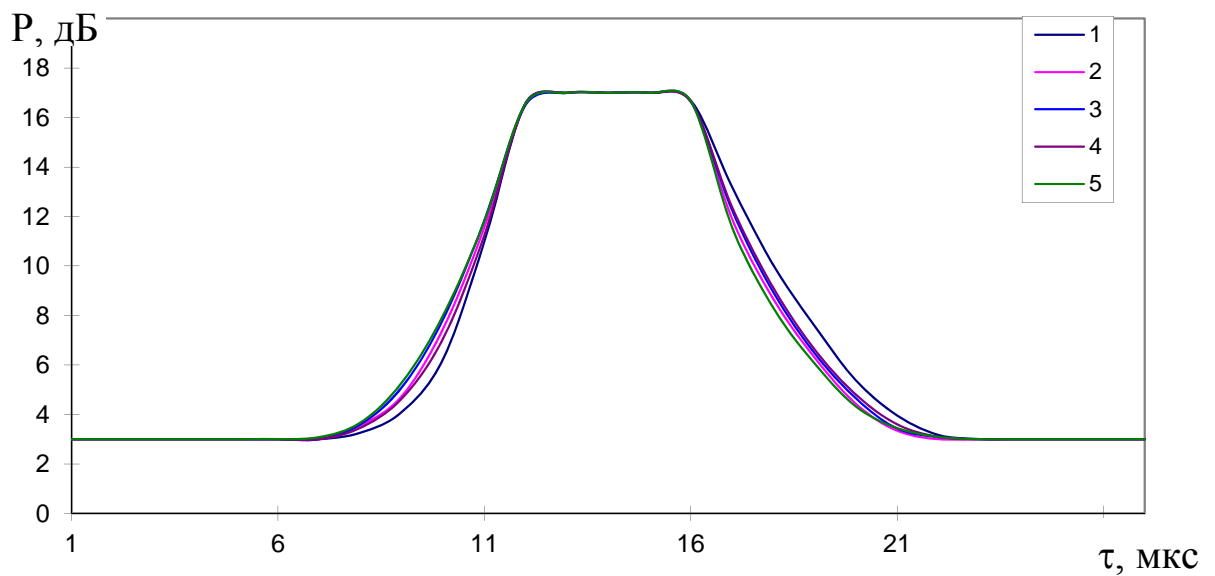


б

Рисунок 4.4 –Результаты восстановления $\varepsilon(x)$ (а) и зависимости $p(0, \tau)$ и $f(\tau)$ (б): 1,2,3 – исходные данные с погрешностью $\delta_f = 5\%$ относительно текущего значения возмущаемой функции и числе параметров равном 5,9,13; 4 – восстановленные значения при кусочно-постоянной аппроксимации (число параметров равно 20), 5 – заданные зависимости $\bar{\varepsilon}(x)$ и $f(\tau)$ соответственно



а



б

Рисунок 4.5 –Результаты восстановления $\varepsilon(x)$ (а) и зависимости $p(0, \tau)$ и $f(\tau)$ (б): 1,2,3 – исходные данные с погрешностью $\delta_f = 10\%$ относительно текущего значения возмущаемой функции и числе параметров равном 5,9,13; 4 – восстановленные значения при кусочно-постоянной аппроксимации (число параметров равно 20), 5 – заданные зависимости $\bar{\varepsilon}(x)$ и $f(\tau)$ соответственно

Приведенные на рисунке 4.5 результаты свидетельствуют о достаточно высокой вычислительной устойчивости предложенного алгоритма к случайным погрешностям, возникающим при решении коэффициентных обратных задач.

Далее анализируется влияние погрешностей задания функции $\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \tau^2}$, определяющей градиент акустического давления на поверхности образца, на решение обратной задачи. Моделировались погрешности при положительном систематическом смещении, где уровень относительной величины максимальной погрешности $\delta = 5\%$. Для моделирования погрешности использовалось выражение:

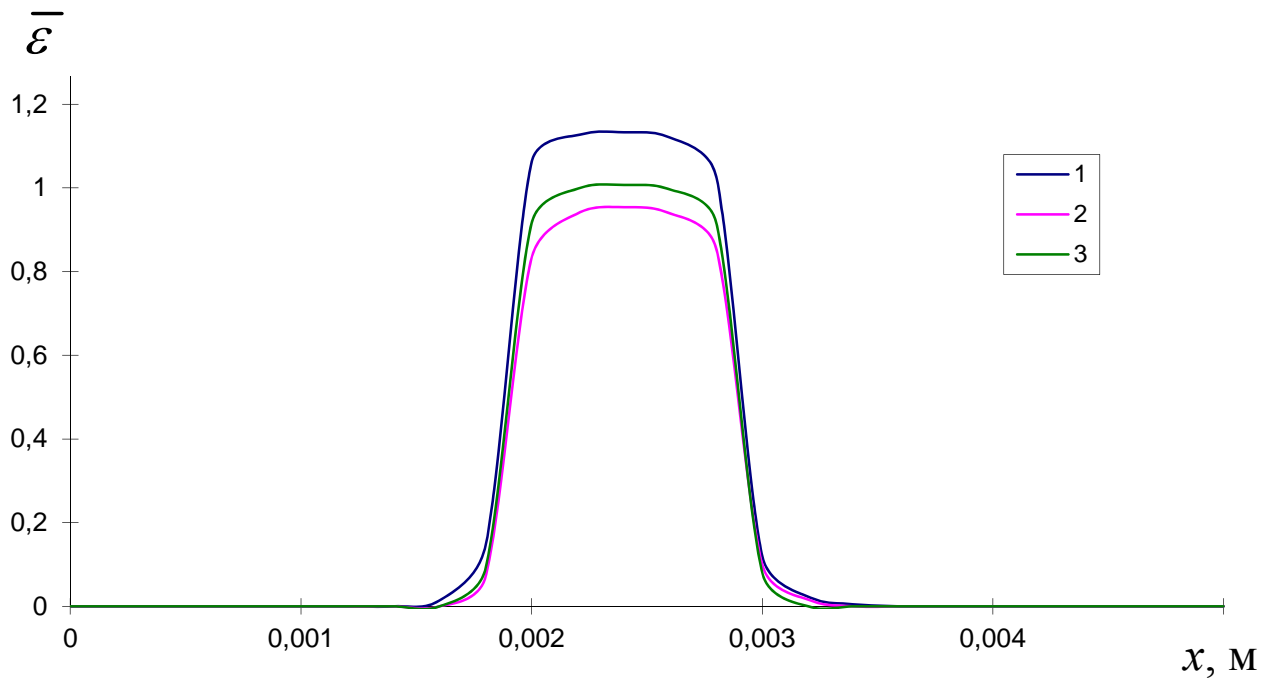
$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \tau^2}(\tau) = \frac{\partial^2 \bar{\xi}_1}{\partial \tau^2}(\tau)(1 + \delta_\xi). \quad (4.23)$$

На рисунке 4.6 показаны результаты определения искомой характеристики при погрешности в задании граничного условия на левой границе. Представленные результаты показывают достаточно слабое влияние погрешностей задания граничного условия на форму искомой функции и более существенное влияние на ее значения. Следует отметить, что рассматриваемая ОЗТ является математическим обеспечением неразрушающей дефектоскопии материала, и, следовательно, для практики существенно более важна форма искомой функции, позволяющая судить о размерах и координатах дефекта.

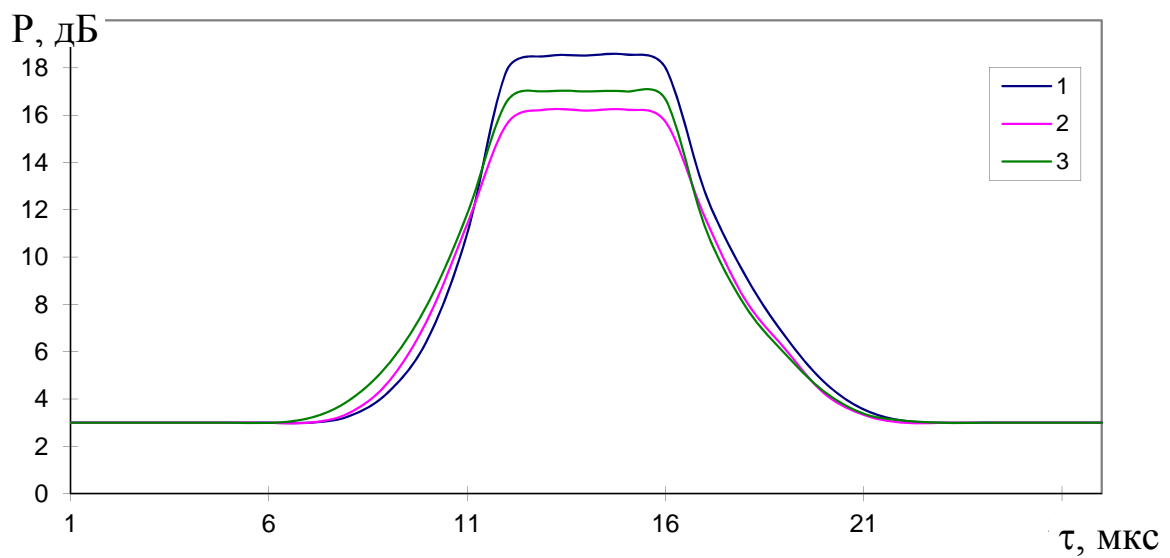
Для анализа влияния погрешностей задания плотности материала и скорости звука в материале на точность текущего решения обратной задачи их значения варьировались следующим образом:

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta_\rho) \quad (4.24)$$

$$c = \bar{c}(1 + \delta_c) \quad (4.25)$$



а

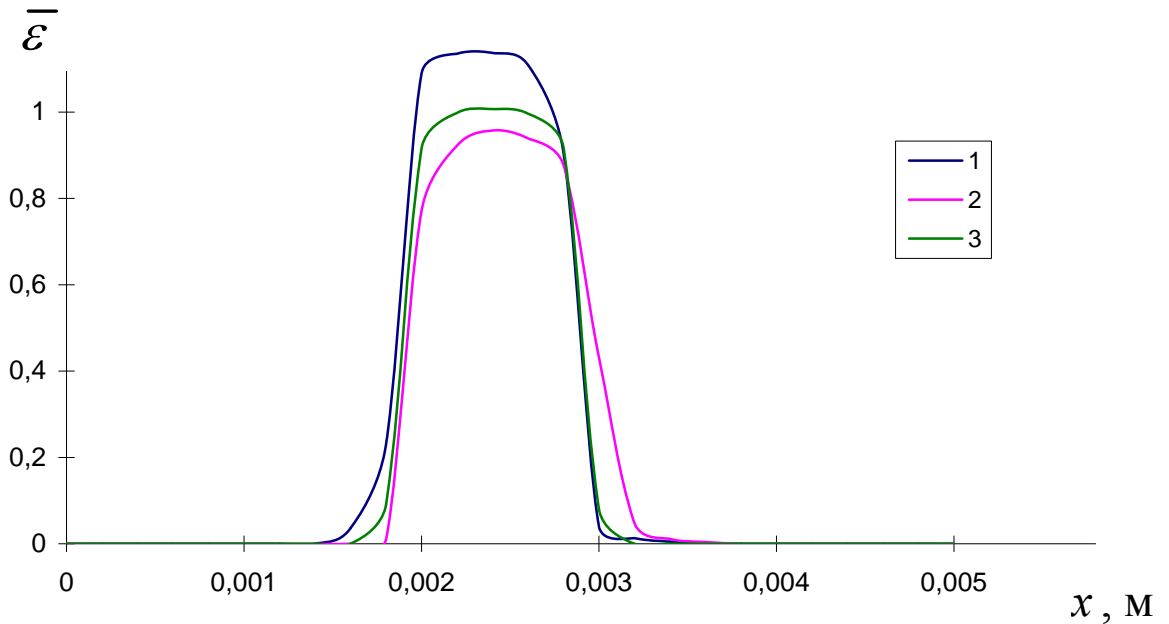


б

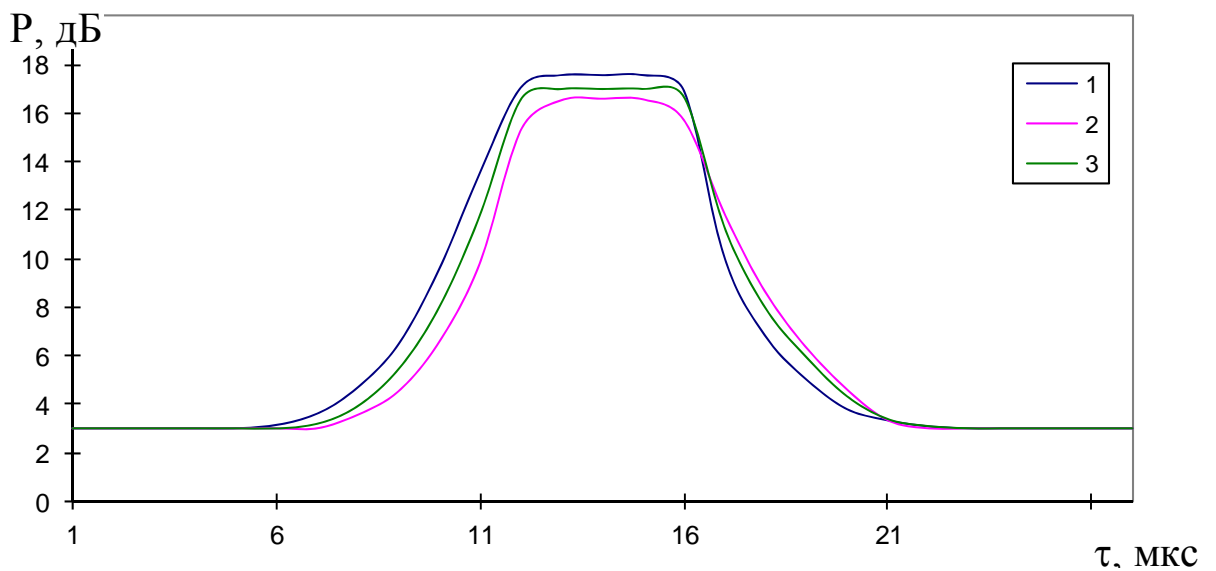
Рисунок 4.6 – Результаты восстановления $\varepsilon(x)$ и зависимости

$p(0, \tau)$ и $f(\tau)$ при погрешности задания граничного условия $(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \tau^2})$: 1, 2 – с погрешностью $\delta_{\xi} = +10\%$ и $\delta_{\xi} = 0 - 10\%$; 3 – заданные зависимости $\bar{\varepsilon}(x)$ и $f(\tau)$ соответственно

На рисунке 4.7-4.8 показаны восстановленные зависимости в результате математического моделирования для нескольких значений погрешности известных коэффициентов математической модели. Все расчеты проводились для исходных данных, заданных без погрешности ($\delta_f = 0.0$).

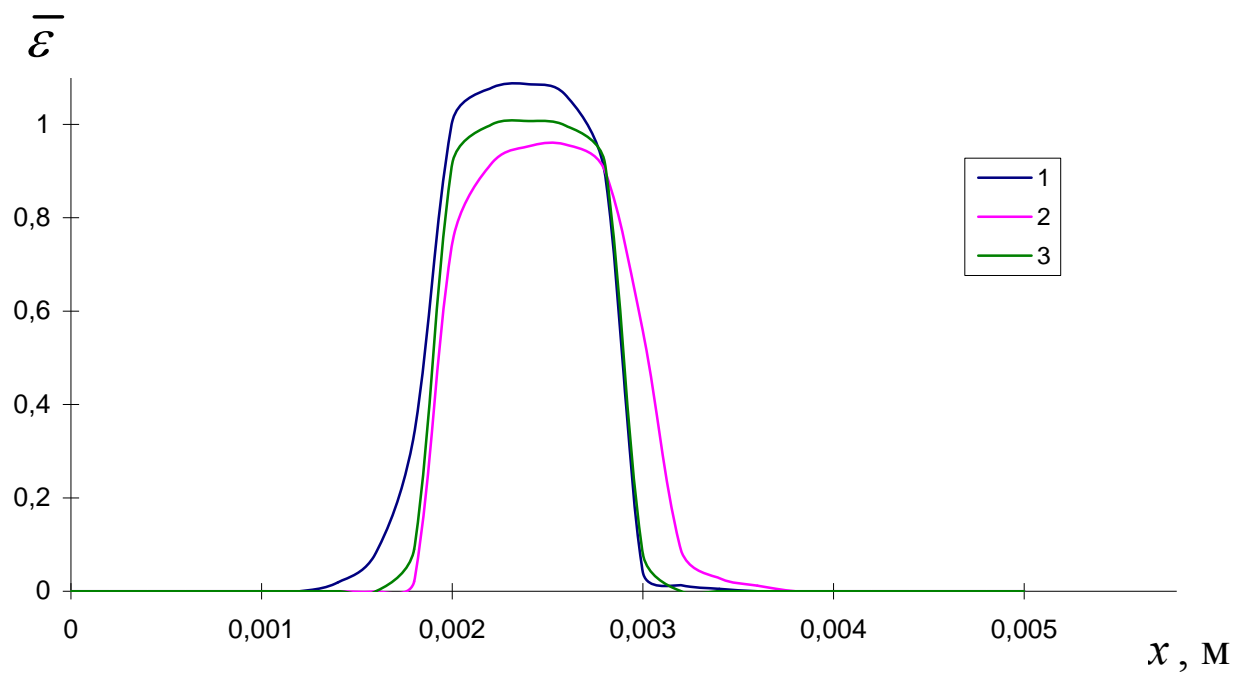


а

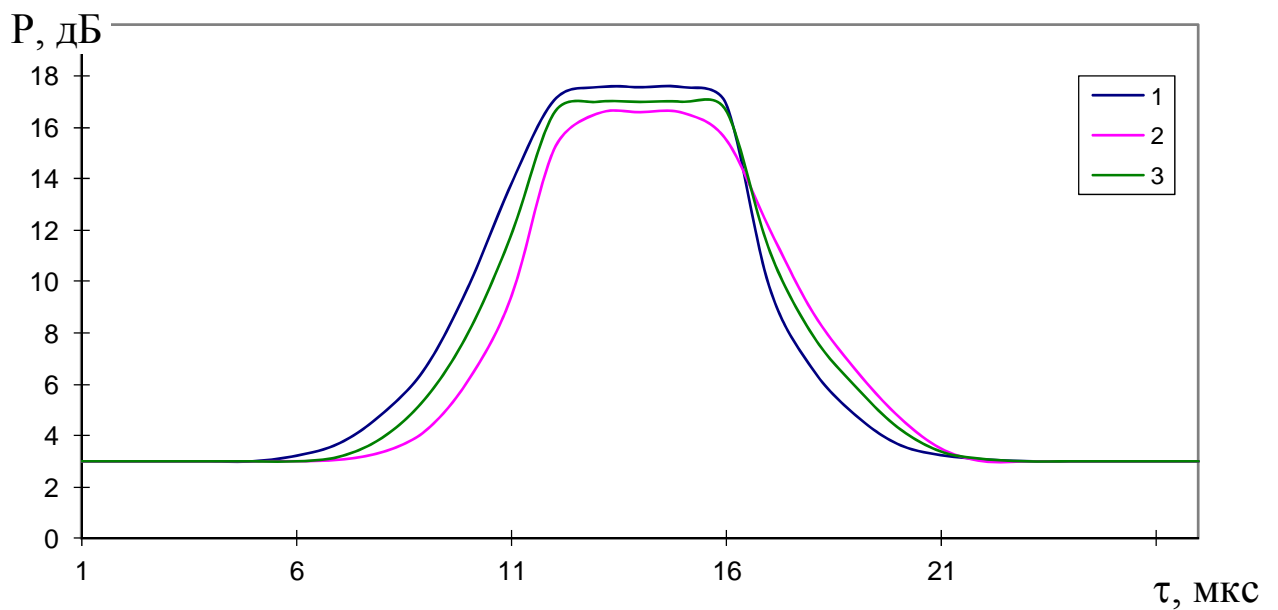


б

Рисунок 4.7 – Результаты восстановления $\varepsilon(x)$ (а) и $p(0,\tau)$ и $f(\tau)$ (б) при погрешности задания плотности материала (ρ): 1, 2 – с погрешностью $\delta_\rho = +10\%$ и $\delta_\rho = -10\%$; 3 – заданные зависимости $\bar{\varepsilon}(x)$ и $f(\tau)$ соответственно



а



б

Рисунок 4.8 – Результаты восстановления $\bar{\varepsilon}(x)$ (а) и зависимости $p(0, \tau)$ и $f(\tau)$ (б) при погрешности задания скорости (c): 1, 2 – с погрешностью $\delta_c = +10\%$ и $\delta_c = -10\%$; 3 – заданные зависимости $\bar{\varepsilon}(x)$ и $f(\tau)$ соответственно

Следуя подходу, предложенному в [36], можно показать, что рассматриваемая в данной главе обратная задача является условно корректной.

Важнейшим при реализации экстремальных методов параметрической идентификации является вопрос об останове итерационного процесса. В случае решения некорректных задач следует осуществлять останов по невязке, реализовав таким образом принцип итерационной регуляризации [34]. Строго с математической точки минимизацию функционала для условно-корректных обратных задач (а рассматриваемая задача (4.1)-(4.6) является именно такой) можно вести до минимального значения функционала. Не смотря на то что задача (4.1)-(4.6) условно-корректна, при ее решении используются экспериментальные данные, измеряемые с погрешностями. Возникает вопрос о целесообразности применимости останова по невязке итерационного процесса для условно-корректной обратной задачи. В этом случае функционал (4.6) минимизируется до выполнения условия

$$J(\bar{\varepsilon}) \leq \delta^2 \quad (4.26)$$

где $\delta^2 = \int_0^{\tau_{\max}} \sigma_m^2(\tau) d\tau$ - интегральная ошибка измерения $f(\tau)$, σ_m - дисперсия измерений.

Значения минимизируемого функционала и соответствующих значений определяемой функции при использовании различного числа параметров аппроксимации представлены на рисунках 4.9-4.11. Результаты также подтверждают возможность выбора числа параметров аппроксимации, исходя из принципа невязки: следует выбирать минимальное число параметров аппроксимации, обеспечивающее достижение уровня невязки δ^2 .

Проведенные исследования показывают, что для рассматриваемого случая, точность получаемого решения не значительно понижается при смещении различных коэффициентов математической модели и некоторых условий проведения эксперимента. Однако представленные выше результаты не могут претендовать на полноту и завершенность и лишь подтверждают необходимость проведения дополнительных вычислительных экспериментов для различных расчетных случаев.

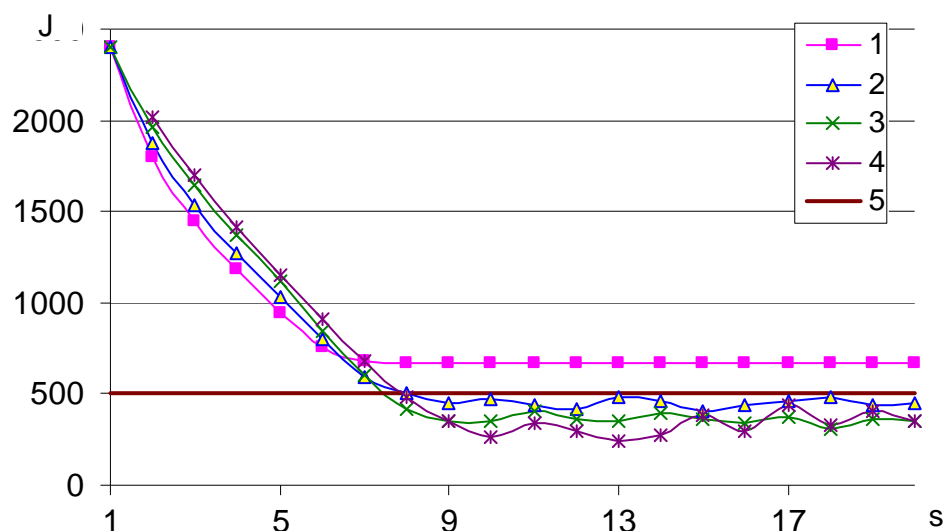


Рисунок 4.9 – Влияние числа параметров аппроксимации на значения минимизируемого функционала по итерациям: 1 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 5, 2 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 9, 3 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 13, 4 – кусочно-постоянная аппроксимация, 5 - значение интегральной погрешности измерений δ^2

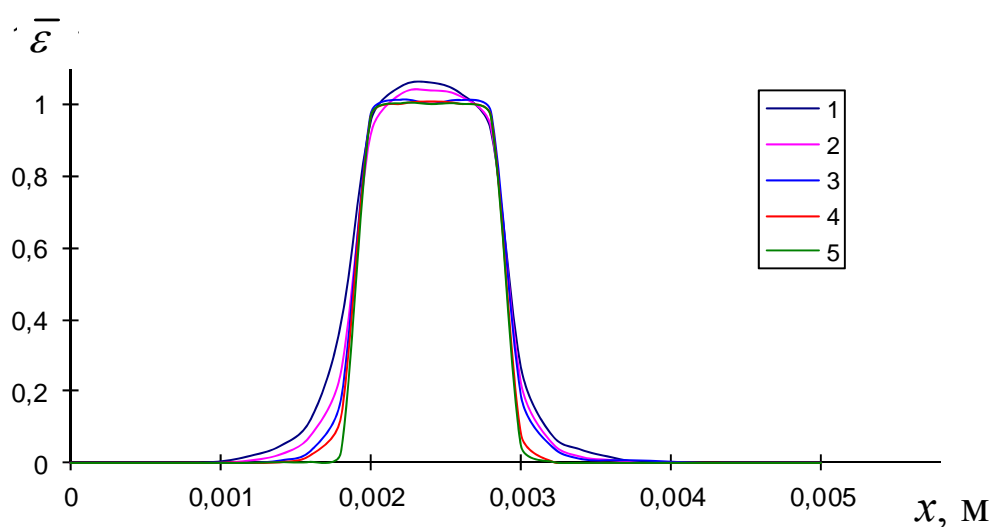


Рисунок 4.10 – Результаты восстановления $\varepsilon(x)$: 1 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 5 - неограниченная минимизация, 2 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 5 - останов по невязке, 3 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 9 - неограниченная минимизация, 4 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 9 - останов по невязке, 5 – заданная зависимость $\bar{\varepsilon}(x)$

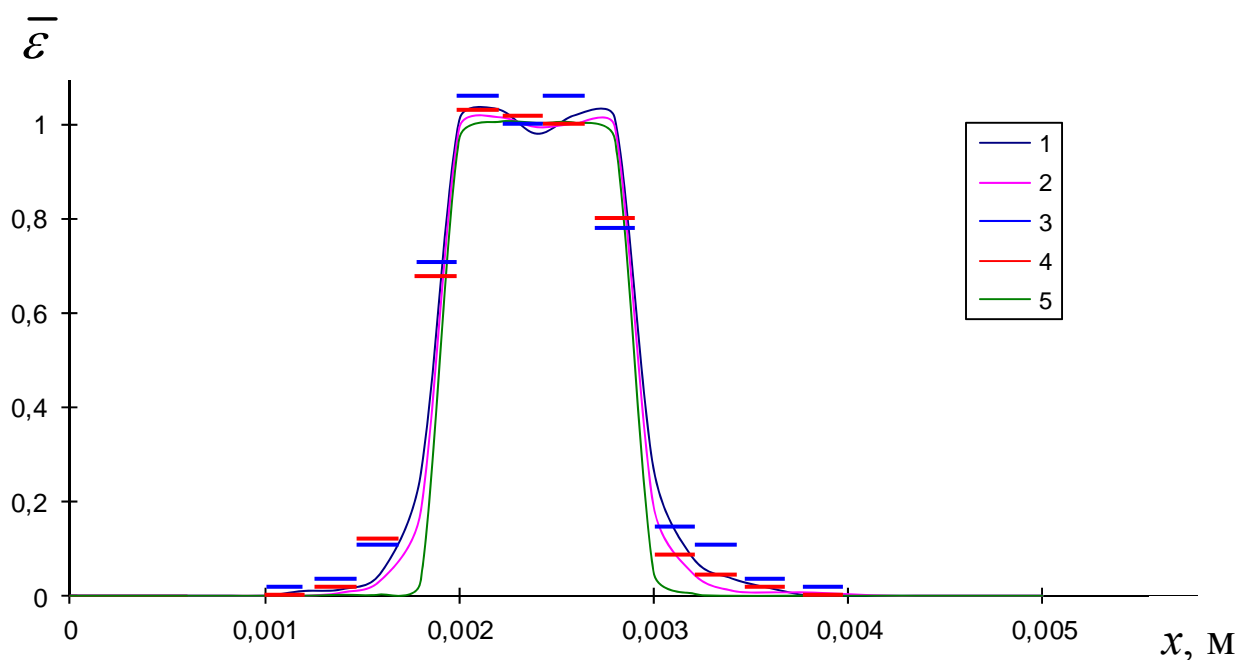


Рисунок 4.11 – Результаты восстановления $\varepsilon(x)$: 1 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 13 - неограниченная минимизация, 2 – число параметров аппроксимации для $\varepsilon(x)$ равно 13 - останов по невязке, 3 – кусочно-постоянная аппроксимация - неограниченная минимизация, 4 – кусочно-постоянная аппроксимация - останов по невязке, 5 – заданная зависимость $\bar{\varepsilon}(x)$

5 Экспериментально-расчетный метод дефектоскопии материалов гибких теплозащитных покрытий космических аппаратов

В данной главе представлены результаты разработки и апробации экспериментально-расчетного метода определения наличия и размеров дефектов материалов гибкой тепловой защиты СА.

В первом разделе сформулированы цели и задачи испытаний, а так же технические требования к экспериментальным образцам, условиям проведения и параметрам испытаний. Дано краткое описание проведенной модификации установки для локализации дефектов по поверхности покрытия. Во втором разделе представлены описание экспериментальной установки для определения характеристик дефектов, экспериментального модуля стенда, экспериментальных образцов и технологии их изготовления, схемы акустических испытаний, а так же методика подготовки и проведения испытаний. В третьем разделе представлены основные результаты подготовки и проведения экспериментального исследования материалов с известными (искусственно созданными) дефектами. В четвертом разделе представлены результаты обработки экспериментальных данных, проведен анализ достоверности полученных результатов и эффективности разрабатываемой методики.

5.1 Постановка задачи экспериментально-расчетного исследования, методика подготовки и проведения испытаний, модификация установки для предварительных испытаний

Бесконтактная акустическая диагностика образцов композиционного теплозащитного материала проводилась для нахождения значения коэффициента нелинейности в области возможных нарушений целостности структуры материала методами обратных задач нелинейной акустики.

Экспериментальный образец представляет собой пластину из исследуемого материала в форме прямоугольного параллелепипеда с отношением толщины к длине ребра не менее 1:20 (рисунок 5.1). Такое соотношение размеров образца, а также использование предложенной схемы акустического нагружения образцов обеспечивают в процессе испытания распространение акустических волн в рабочей зоне образца близкое к одномерному. Предполагается, что в начальный момент времени в образце реализуется равномерное распределение давления.

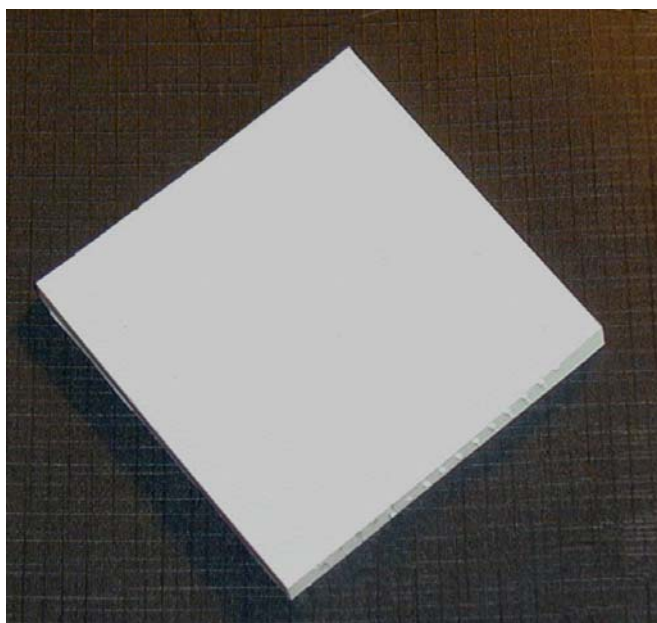


Рисунок 5.1 – Исследуемый образец материала

Исходные данные для определения характеристик дефектов материала из решения обратной задачи акустики формируются на основе результатов измерений и включают в себя граничные условия (первого или второго рода). Тип граничных условий и их количество должны удовлетворять условиям единственности решения анализируемой обратной задачи. Условия единственности обычно определяют минимально необходимый объем измерений, которые требуется осуществлять в одном эксперименте. Так для определения зависимостей от координаты коэффициента нелинейности

необходимо измерить градиент скорости поступающего в образец воздействия, задать условие на обратной поверхности и осуществить нестационарные измерения давления на одной из поверхностей. Выбранная, из этих соображений, схема акустических испытаний представлена на рисунке 5.2. Для такой схемы измерений давления, данных, получаемых в одном испытании, достаточно для однозначного определения пространственного распределения коэффициента нелинейности $\varepsilon(x)$, что позволяет оценить месторасположение и величину дефекта.

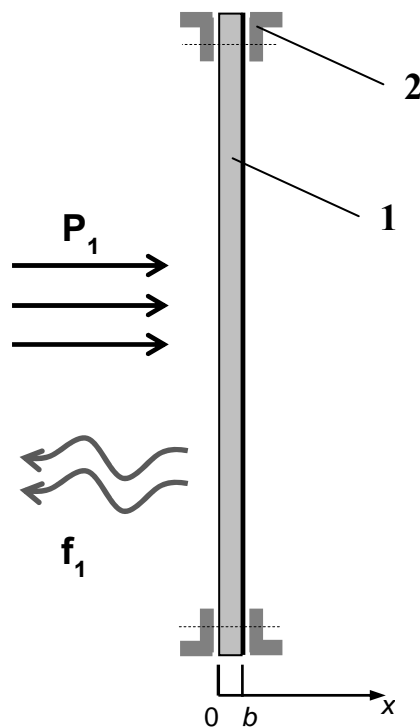


Рисунок 5.2 – Схема испытаний образцов материала

1 – образец материала, 2 – силовая рамка экспериментального модуля,
 p_1 - акустическое нагружение образца материала, f_1 - нестационарное измерение
 давления на внешней поверхности

Исходные данные для подготовки и проведения акустических испытаний формировались на основе данных, предоставленных НПО им.С.А.Лавочкина, данных опубликованных изготовителем материала - ВНИИСК, а также с учетом анализа постановки соответствующей обратной задачи и возможностей разработанной экспериментальной установки. Исследуемый материал - низкомолекулярный полимер был предоставлен для испытаний НПО им. С.А.Лавочкина в виде вязко-текучей жидкость белого цвета (ТУ 38.103453-99) и жидкого катализатора холодного отверждения для силоксановых полимеров.

Данные об известных свойствах материала представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Известные свойства и характеристики материала

Плотность - ρ , [кг/м ³]	950,0 ÷ 1100,0 *
Излучательная способность - ε	0,8 *
Температура эксплуатации [°C]	-60 ... +180 **
Температура разрушения - T_d [K] / [°C]	953 / 680 *
Коэффициент теплопроводности - $\lambda(T)$ [Вт/(м·К)]	≈ 0,143 (от 0,1 до 0,3 при температуре от 20°C до 300°C соответственно) *
Теплоемкость – $C_p(T)$ [Дж/кг/К]	≈ 1590,0 (от 1450,0 до 1750,0 при температуре от 20°C до 300°C соответственно) *.
Условная прочность при растяжении, [МПа] (кгс/см ²), в пределах;	1,5 ... 3,0 (15 ... 30) **
Относительное удлинение при разрыве, %, в пределах;	100 ... 120 **
Остаточное удлинение при разрыве, %, в пределах.	0 ... 2 **

Таблица 5.1 – Окончание

Потеря массы при сушке, %, не более	3,0 **
Жизнеспособность смеси полимера с катализатором, мин, не менее;	15 **
Время полного отверждения смеси полимера с катализатором, час, не более	24 **
Скорость распространения звука в материале	1530 м/с

* Данные НПОим.С.А.Лавочкина.

** Данные ВНИИСК

Основываясь на данной физической модели, математическая модель процесса распространения продольных волн в образце материала (неограниченной пластине известной толщины) может быть представлена следующим образом [56]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2 \rho} \varepsilon(x) \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2},$$

$$x \in (0, d), \tau \in (0, \tau_{\max}]$$
(5.1)

$$p(x, 0) = p_0, x \in [0, d],$$
(5.2)

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(x, 0) = 0, x \in [0, d],$$
(5.3)

$$-\frac{\partial p}{\partial x}(0, \tau) = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \tau^2}, \tau \in (0, \tau_{\max}],$$
(5.4)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(d, \tau) = 0, \tau \in (0, \tau_{\max}],$$
(5.5)

В математической модели (5.1) - (5.5) зависимость $\varepsilon(x)$ является неизвестным параметром. В качестве дополнительной информации, необходимой для решения обратной задачи нелинейной акустики, задаются результаты нестационарного измерения акустического давления на внешней границе:

$$p^{\text{exp}}(0, \tau) = f(\tau), \tau \in (0, \tau_{\text{max}}), \quad (5.6)$$

В качестве целевого функционала при решении обратной задачи используется среднеквадратичная невязка расчетных и экспериментальных значений акустического давления в точке измерения:

$$J(\varepsilon(x)) = \int_0^{\tau_{\text{max}}} (p(0, \tau) - f(\tau))^2 d\tau, \quad (5.7)$$

Вычислительная эффективность предложенного алгоритма решения обратной задачи нелинейной акустики была проанализирована в главе 4. Данный алгоритм может быть использован для определения характеристик дефектов теплозащитного материала непосредственно для каждой точки поверхности. Однако, при этом возникает непростой вопрос о дискретности перемещения измерительного элемента по поверхности, так как необходимо для каждой исследуемой точки проводить измерения и решать обратную задачу (5.1) – (5.7), а также времени проведения испытаний. Для повышения практической эффективности разрабатываемого метода предлагается использование двухступенчатого и при этом ускоренного исследования материала:

- сканирование поверхности образца материала надувного экрана СА и обнаружение дефектов методом, описанным в главе 1;

- исследование характеристик дефекта путем нестационарного измерения акустического давления и решения обратной задачи нелинейной акустики (5.1) – (5.7).

Ниже рассматривается модифицированный вариант первого этапа исследования материала применительно к разрабатываемому подходу.

Алгоритм измерений построен на анализе комбинационного сигнала с двойной частотой, формирующегося в области нелинейности. При распространении в веществе, акустическая волна с частотой f_1 в точке неоднородности структуры материала порождает излучение на комбинационных частотах, половинной и удвоенной. Эксперименты показали [21], что эффективность излучения на удвоенной частоте почти в 4 раза превышает эффективность излучения на половинной частоте, поэтому в предлагаемом подходе исследуется сигнал с частотой $2f_1$.

В результате эксперимента требуется получить зависимость акустического давления с частотой $2f_1$ от координаты поверхности образца с целью обнаружения местоположения структурной нелинейности.

Для решения задачи необходимо произвести следующие измерения:

1. Измерение давления на частоте f_1 в образце без дефектов.
2. Измерение давления на частоте $2f_1$ в образце без дефектов для определения условного нулевого уровня давления и нормировки оборудования с учетом возможного фона, эффектов в воздухе, на границе образца и на затворе фокусирующей диафрагмы.
3. Просканировать образец по координатным осям X и Y для построения зависимости давления $P(2f_1)$ от координаты поверхности, измерения могут производиться как на отраженном, так и на прошедшем сигнале, в рассматриваемом случае для обеспечения более высокой эффективности, измерения проводились за образцом во избежание ослабления сигнала с частотой $2f_1$ диафрагмой.

Образцами являются фрагменты теплозащитного материала композитного материала, внутри которых возможны следующие дефекты:

1. заранее заложенный дефект (металлический шарик, силикагелевый шарик);
2. воздушная полость, пузырь;
3. трещина в зоне перегиба при хранении материала (разновидность воздушной полости);
4. разрез (разновидность воздушной полости);
5. производственный мусор, например металлическая стружка.

Исследуемый образец устанавливается в рамку, растягивается и может перемещаться вдоль координатных осей X и Y с заранее выбранным шагом (рисунок 5.3). В каждой точке регистрируется давление возбуждающего сигнала $P(f_1)$ и давление комбинационного сигнала с удвоенной частотой $P(2f_1)$.

Принципиальная блок-схема экспериментальной установки представлена на рисунке 5.4. Она состоит из исследуемого образца, закрепленного в рамке на подвижном штативе. Перед образцом, на расстоянии 10 см расположен ультра звуковой излучатель (УЗИ) акустического сигнала с частотой $f_1 = 39\text{кГц}$. В непосредственной близости к образцу, на расстоянии 0,5 см установлена металлическая пластина толщиной 0,3 см с фокусирующим отверстием (диафрагмой) диаметром 1,5 см. За образцом расположен ультра звуковой приемник (УЗП), настроенный на частоту $2f_1 = 78\text{кГц}$. Сигнал с генератора частоты (ГЧ) подается на УЗИ и излучается с частотой f_1 и амплитудой давления 96 дБ. УЗП регистрирует сигнал и отправляет на осциллограф для непосредственного контроля и на внешний модуль АЦП управляющего компьютера для регистрации данных.

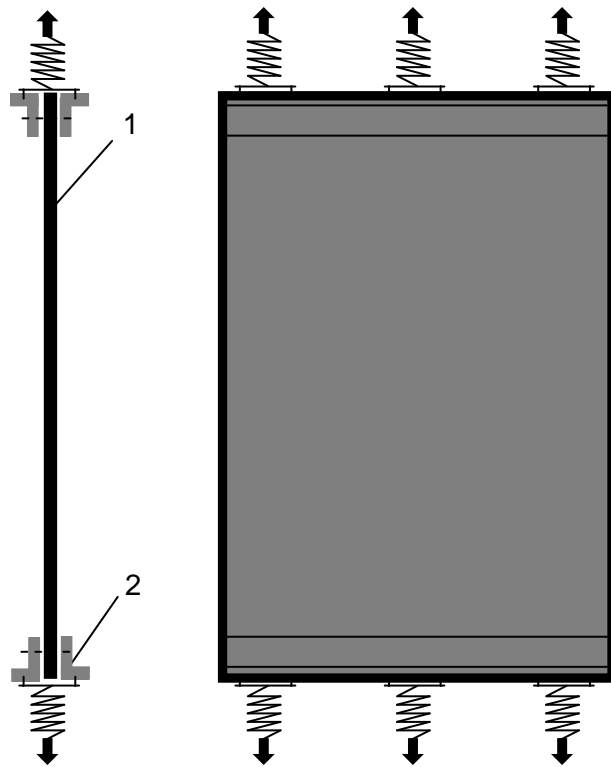


Рисунок 5.3 – Экспериментальный модуль

1 – образец материала, 2 – растягивающее устройство

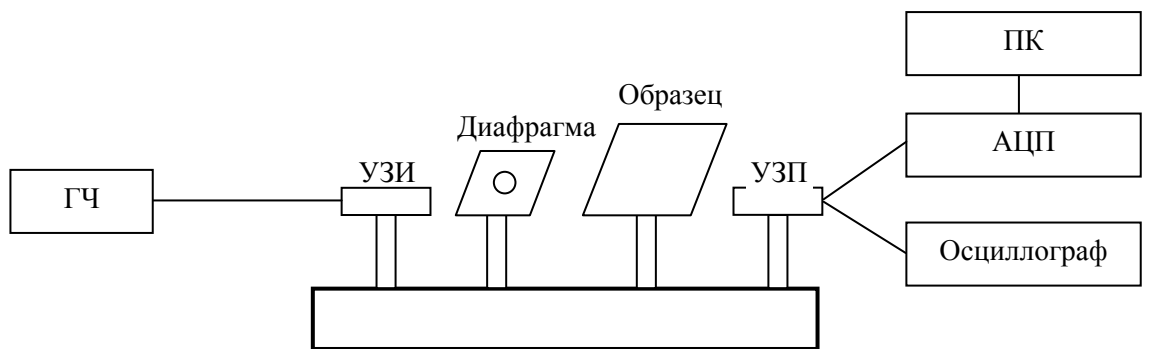


Рисунок 5.4 – Принципиальная схема установки

Подсистема измерения и сбора данных и подсистема управления включает следующие приборы производства компании National Instruments:

○ Внешний контроллер, в качестве которого использован высокопроизводительный ПК (Intel Core i7-3970 3,5 GHz/6Mb, 1333MHz LGA775/4096Mb (2x 8ГБ) DDR3 1333MHz / 2×HDD 1000Gb) с соответствующими периферийными устройствами. Контроллер используется для управления приборами модульной системы NI PXI;

○ Модульная система NI PXI в составе:

▪ Крейт NI PXI-1000B (0 слот для контроллера и 8 слотов для модулей стандарта 3U) для размещения функциональных модулей;

▪ Модуль интерфейса NI PXI-PCI8331 MXI-4, позволяющий использовать для управления системой внешний ПК;

▪ Высокоточный многофункциональный модуль ввода-вывода NI PXI-6031E (64/32 Analog Inputs; частота оцифровки 100 kHz; входное разрешение 16 bit; макс. входной диапазон $\pm 10V$; мин. входной диапазон 0 - 100 mV; аналоговых выходов – 2; выходное разрешение 16 bit) с двумя коннекторными блоками;

▪ Два высокоточных модуль для измерения давления (аналоговые входы: 4 для измерения акустического давления; точность измерения давления от ± 0.03 Дб до ± 0.04 ДбС, разрешение АЦП – 24 bit, скорость считывания 20 - 60 S/сек).

5.2 Экспериментальная установка для определения характеристик дефектов теплозащитного материала

Целью второго этапа акустических испытаний являлось определение следующих характеристик образцов исследуемого материала в процессе их нестационарного нагружения:

- нестационарного акустического давления $p^{\text{exp}}(0, \tau)$, $\tau \in (0, \tau_{\text{max}})$ на поверхности образца;

- градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x}(0, \tau)$, $\tau \in (0, \tau_{\max}]$ подводимого к нагружаемой поверхности образца.

При испытаниях использовались следующие режимы и условия испытаний:

- начальные условия (фактически акустический фон): $p_0 = 8\text{дБ}$, $x \in [0, d]$;
- нагружение образцов проводилось при постоянном давлении 96дБ ;
- на обратной поверхности предполагается «естественное» граничное условие: $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(d, \tau) = 0$, $\tau \in (0, \tau_{\max}]$, что позволит в дальнейшем проводить дефектоскопию не только плоских образцов материала, но и целых конструкций (в том числе и в надутном состоянии).

Схема установки приведена на рисунке 5.5. Фотография общего вида установки представлена на рисунке 5.6.

В состав установки входят:

- генераторы высокочастотного сигнала специальной формы 4Mhz Synthesized Function Generator SFG-2004;
- приемники УЗ;
- излучатели УЗ;
- осциллограф цифровой LECROY WaveAce 204;
- экспериментальный модуль ЭМА-1.

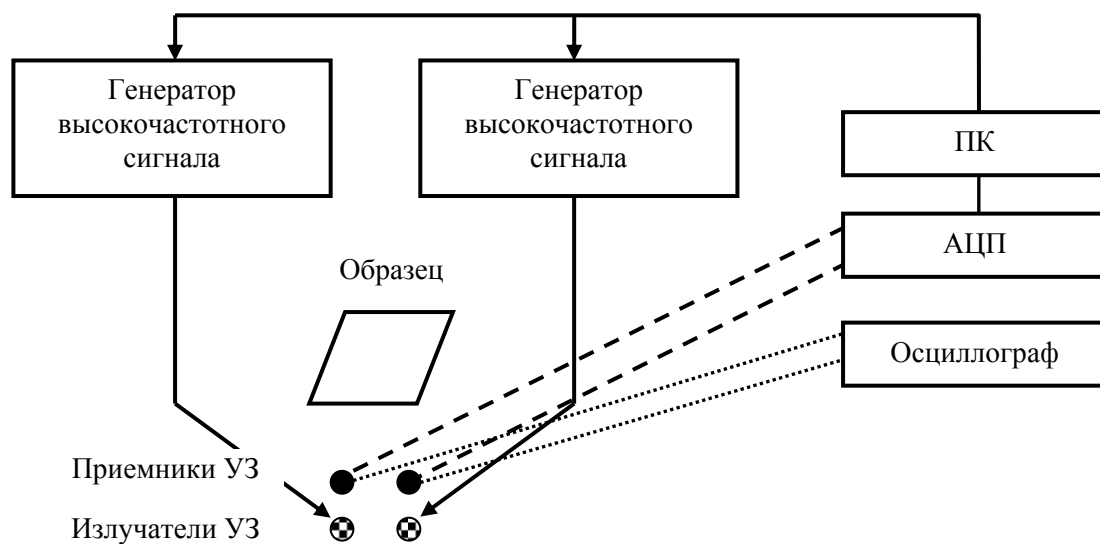


Рисунок 5.5 – Схема установки

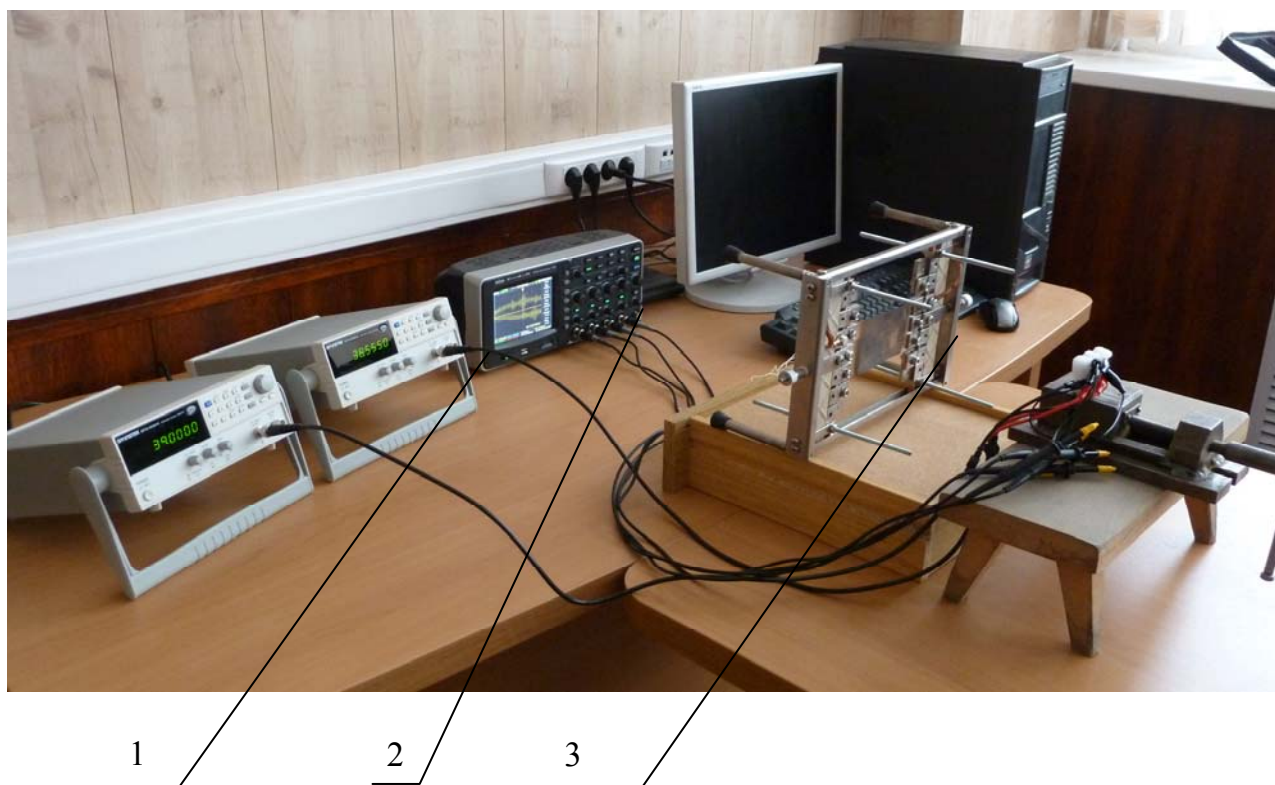


Рисунок 5.6 - Общий вид установки

Система управления установки построена на основе высокопроизводительной вычислительной техники и современных инструментальных и программных средств управления и измерения компании VXI Technology (рисунок 5.7). В состав технических средств системы управления входят:

- прибор EX1000A выполненный в стандарте LXI (Channels: 48 Differential I Voltage Inputs; Sampling Rate: 1000 Sa/sec/ch maximum.; Programmable Filters 4 Hz, 15 Hz, 40 Hz, 100 Hz, 500 Hz, bypass (Selectable per Channel) для проведения целевых измерений в датчиках;
- Крейт E8408A с шиной VXI, 4-х слотовый для размещения интерфейсного и функциональных модулей; (E8408A VXIbus Mainframe, 4-Slot, C size for Portable Use);
- Интерфейсный модуль EX2500A слота 0, для управления модульной системой от внешнего ПК по гигабитной локальной сети; (EX2500A Gigabit Ethernet VXI Interface Module Slot 0);
- Базовый блок VM9000 VMIP для размещения трех функциональных модулей устанавливаемый в крейт; (VM9000 VMIP Base Unit);
- 48-канальный модуль цифрового ввода/вывода VM1548 для реализации в АС функций контроля и управления; (VM1548 48 channel Digital I/O, TTL).

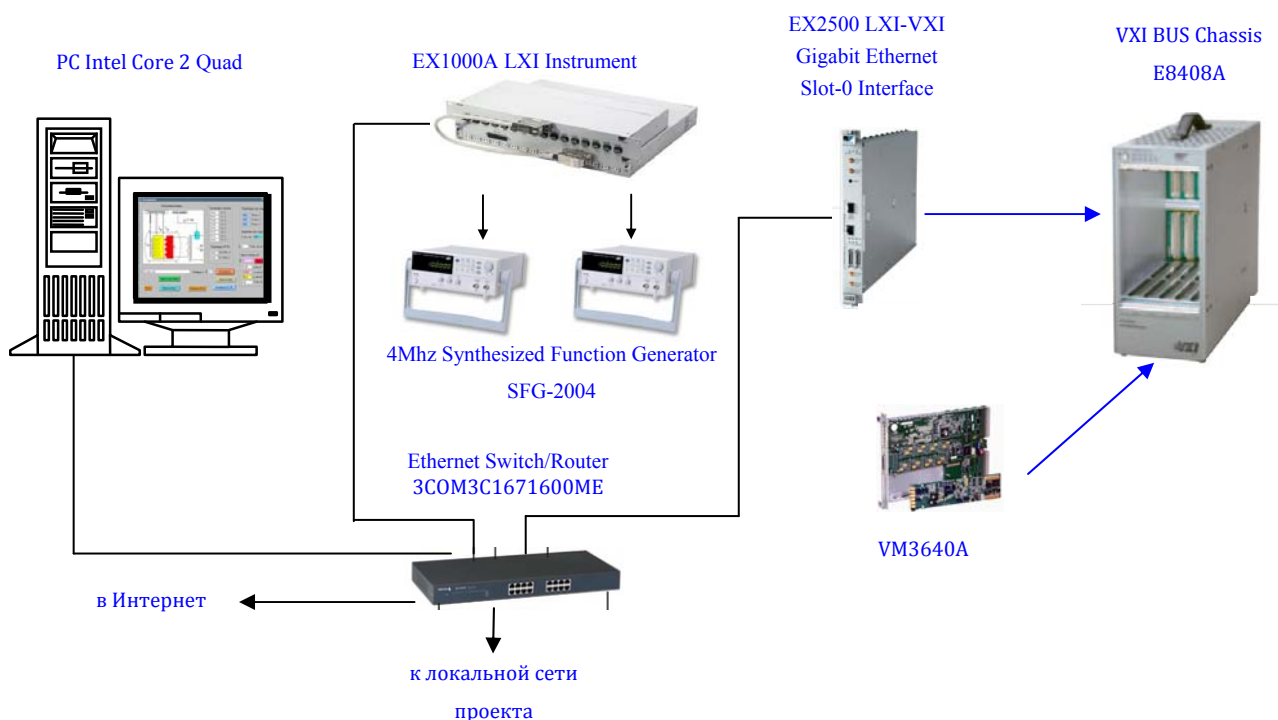


Рисунок 5.7 - Конфигурация технических средств АСУ

Размеры и материалы основных элементов экспериментального модуля представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Размеры и материал основных элементов схемы испытаний

Элемент, материал	Длина × ширина × толщина в мм
Образцы исследуемого материала	60 × 60 × 5
Растягивающая рамка образцов из стали 30ХГСА.	112 × 109 × 8(габариты) 60 × 60 (отверстие)

Используемая технология холодного отверждения (вулканизации) материала позволяет устанавливать искусственные дефекты в процессе изготовления образца. Для методической отработки разрабатываемого подхода необходимо обеспечить максимально точное определение координат установки дефектов. Определение фактических координат дефектов в образце осуществляется с помощью методов рентгеноскопии.

Было изготовлено 5 образцов, номера которых и схемы заложенных дефектов приведены в таблице 5.3.

Изготовленные образцы обмерялись и взвешивались. Рассчитывалась плотность материала. Проводился визуальный контроль и описание внешнего вида образцов.

Была проведена рентгеноскопия исследуемых образцов. В качестве эталонной меры длины на внешней поверхности каждого образца перед рентгеноскопией устанавливалась металлическая пластина толщиной 0,8 мм. На рисунке 5.8 в качестве примера представлена рентгенограмма образца 4. В результате анализа рентгенограмм были уточнены координаты дефектов в изготовленных образцах.

Таблица 5.3 – Параметры и характеристики дефектов образцов исследуемого материала

№ образца	Размеры (длина × ширина × толщина в центре (средняя толщина)) [мм]	Масса [г]	Плотность материала [кг/м ³]	Описание дефекта
1	60,0 × 60,0 × 6,20 (6,15)	21,94	990,97	Образец без дефектов

Таблица 5.3 – Окончание

2	60,0 × 60,0 × 5,65	19,72	972,87	Нагружаемая поверхность без дефектов. Заложен дефект на высоте 3 см от нижнего края образца и на расстоянии 3 см от левого края и на расстоянии 0,7 мм от внутренней поверхности - силикагелиевый шарик диаметром 1.8 мм.
3	60,0 × -60,0 × 5,90 (5,85)	20,59	977,68	Нагружаемая поверхность без дефектов. На внутренней поверхности на высоте 3 см от нижнего края образца и на расстоянии 3 см от левого края вертикальный разрез с размерами: длина 5,0мм глубина 2,0мм.
4	60,0 × 60,0 × 6,20 (6,15)	22,06	996,39	Нагружаемая поверхность без дефектов. Заложен дефект на высоте 3 см от нижнего края образца и на расстоянии 3 см от левого края и на расстоянии 1,0 мм от внутренней поверхности - свинцовый шарик диаметром 0.2 мм.
5	59,4 × 58,8 × 6,20	21,95	1005,50	Нагружаемая поверхность без дефектов. На обратной поверхности раковина с размерами 2,0 × 3,0 × 0,5 мм на высоте 4,1 см от нижнего края образца и на расстоянии 3,3 см от левого края и перегиб от длительного хранения образца в сложенном состоянии (10 дней под нагрузкой).

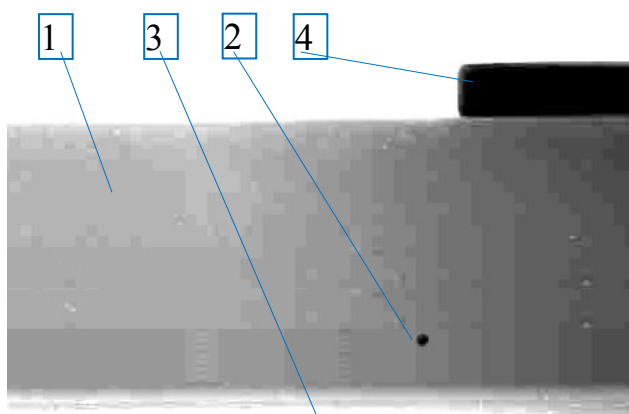


Рисунок 5.8 – Рентгенограмма образца № 4 (вид сбоку): 1 – образец, 2 – свинцовая дробица, 3 – обратная поверхность образца, 4 – металлическая пластина

5.3 Проведение экспериментальных исследований

Методика подготовки и проведения испытаний предполагает, что эти испытания проводятся в несколько последовательных этапов. Вначале проводятся пробные (отладочные) испытания, в процессе которых проверяется и настраивается экспериментальное оборудование стенда, включая системы управления, измерения и сбора информации, а также подбираются, и отлаживаются режимы нагружения образцов. Далее проводятся штатные (зачетные) испытания по определению наличия дефектов, результаты которых обрабатываются и анализируются. По данным этих испытаний проводится предварительное определение местоположения дефектов, их анализ, уточняются схемы измерений. Затем, если это необходимо, проводятся окончательные испытания, по результатам которых определяются характеристики дефектов.

Вначале было проведено пробное испытание с использованием образцов исследуемого материала №1. Это испытание проводилось с целью проверки

работы электромеханических систем установки и ее управляющей системы, а также для подбора режима нагружения в условиях реального испытания [57].

На первом этапе штатных испытаний были произведены следующие измерения (шаг сканирования во всех экспериментах был равен 0,5 см)

1. Пошаговое сканирование образца №5 (без дефектов) и запись сигнала с частотой $2f_1$ в каждой точке. Такие измерения позволили определить нулевое значение давления $P(2f_1)$ с учетом фонового сигнала в воздухе и на диафрагме.
2. Пошаговое сканирование образца №2 по координате X на уровне заложенного дефекта – силикагелевого шарика диаметром 0,7 мм. Центр диафрагмы располагался на высоте дефекта.
3. Пошаговое сканирование образца №3 по координате X на уровне продольной трещины длиной 5 мм. Центр диафрагмы располагался на середине трещины.
4. Пошаговое сканирование образца №4 с заложенной свинцовая дробиной диаметров 0.2 мм. Центр диафрагмы располагался на высоте дефекта.
5. Пошаговое сканирование образца №1 по координатам X и Y .

Результаты экспериментов представлены на рисунок 5.9-5.13.

На рисунке 5.9 представлена зависимость давления $P(2f_1)$ от координаты X в точках с шагом 0,5 см. $P(2f_1) = \text{const}$ (8 дБ) для испытания №1. Возникновение фонового шума с небольшим уровнем давления можно объяснить нелинейными эффектами в воздухе, на диафрагме и на границе поверхности образца.

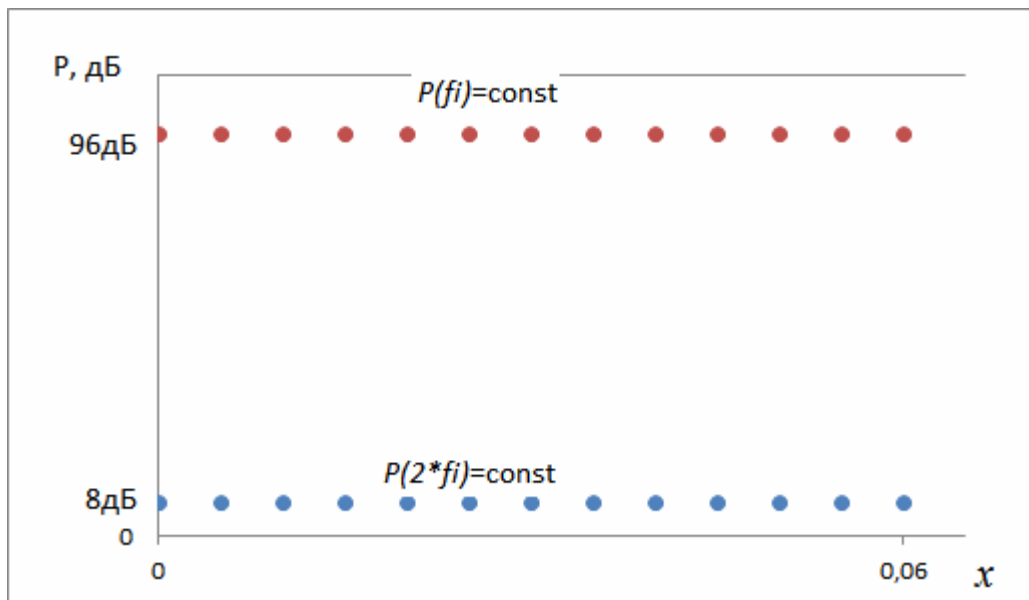


Рисунок 5.9 - Зависимость давления P от координаты X (испытание №1)

На рисунке 5.10 представлена зависимость $P(2f_1)$ от координаты X для испытания №2. Дефект в виде силикагелевого шарика был расположен на высоте 3 см от нижнего края образца и на расстоянии 3 см от левого края. Видно, что при установке центра диафрагмы на 2 см от левого края образца появляется дополнительное давление $P(2f_1)=11$ дБ, на 2,5 см $P(2f_1)=14$ дБ, на 3 см $P(2f_1)=17$ дБ, на 3,5 см $P(2f_1)=14$ дБ, на 4 см $P(2f_1)=11$ дБ, на 4,5 см $P(2 \cdot f_1)=8$ дБ, что соответствует нормальному уровню фонового давления. Таким образом можно сделать вывод об успешном однозначном определении области структурной нелинейности в образце.

На рисунке 5.11 представлена зависимость $P(2f_1)$ от координаты X для испытания №3. Дефект в виде продольной вертикально ориентированной трещины (разреза) глубиной около 2 мм и высотой 5 мм был расположен на высоте 3 см от нижнего края образца и на расстоянии 3 см от левого края. Видно, что при установке центра диафрагмы на 2 см от левого края образца появляется дополнительное давление $P(2f_1)=10$ дБ, на 2,5 см $P(2f_1)=13$ дБ, на 3 см $P(2f_1)=15$ дБ, на 3,5 см $P(2f_1)=13$ дБ, на 4 см $P(2f_1)=10$ дБ, на 4,5 см $P(2f_1)=8$

∂B , что соответствует нормальному уровню фонового давления. Таким образом можно сделать вывод об успешном однозначном определении области нахождения трещины в образце.

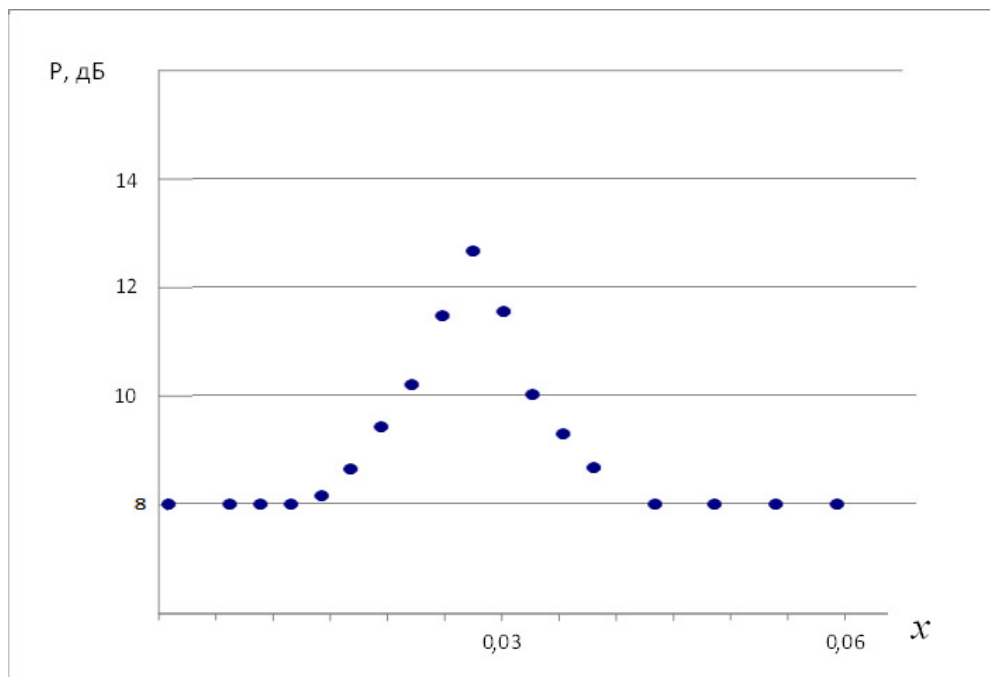


Рисунок 5.10 - Зависимость давления $P(2f_1)$ от координаты X (испытание №2)

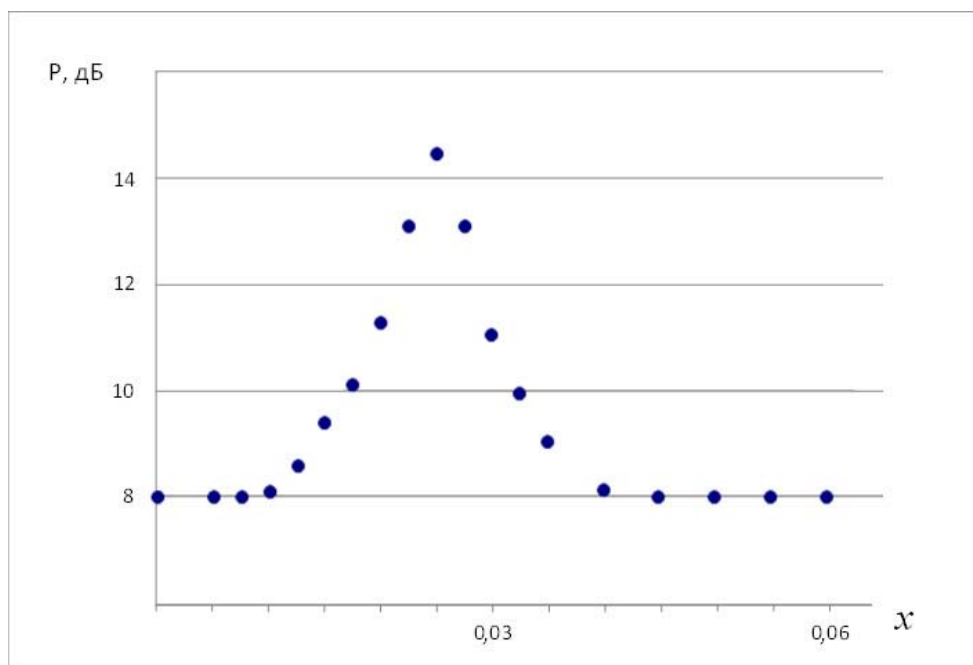


Рисунок 5.11 - Зависимость давления $P(2f_1)$ от координаты X (испытание №3)

На рисунке 5.12 представлена зависимость $P(2f_1)$ от координаты X . Дефект в виде свинцовой дробины диаметром 0.2 мм был расположен на высоте 3 см от нижнего края образца и на расстоянии 3 см от левого края и на расстоянии 1,0 мм от внутренней поверхности. Видно, что при установке центра диафрагмы на 2 см от левого края образца дополнительного давления не наблюдается $P(2f_1)=8$ дБ, на 2,5 см $P(2f_1)=8$ дБ, на 10 см $P(2f_1)=8$ дБ, на 10,5 см $P(2f_1)=8$ дБ, на 11 см $P(2f_1)=8$ дБ, на 11,5 см $P(2f_1)=8$ дБ, что соответствует нормальному уровню фонового давления. Таким образом, можно сделать вывод о том, что используемая установка обладает недостаточной излучающей способностью для возбуждения дефекта с плотностью намного превышающей плотность материала образца.

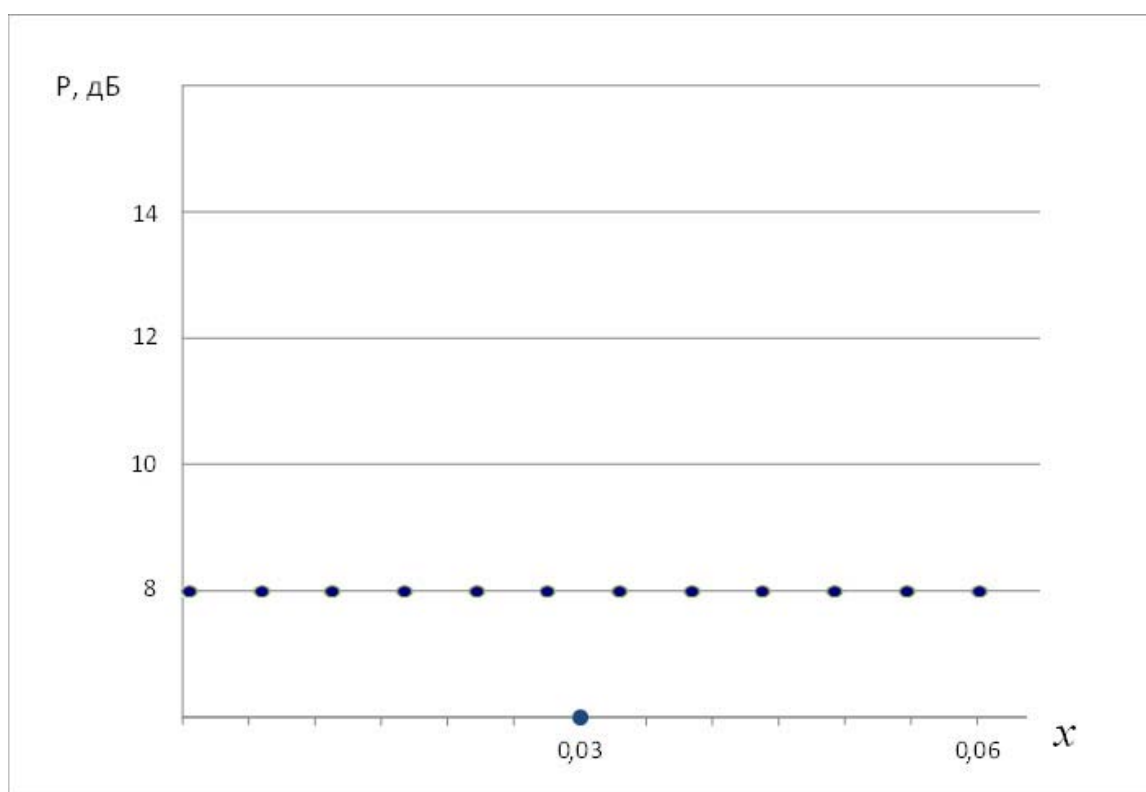


Рисунок 5.12 - Зависимость давления $P(2f_1)$ от координаты X (испытание №4)

На рисунке 5.13 представлена зависимость $P(2f_1)$ от координат X и Y для образца №1 (испытание №5). Сканирование производилось следующим

образом: шаг 0,5 см по высоте, потом сканирование всей длины образца, затем следующий шаг по высоте и т.д.. Специальные дефекты в образец не закладывались и деформаций не производилось, однако на внутренней поверхности образца имеется раковина. Видно, что в 2 см окрестности координаты XU (3см; 4см) наблюдается рост давления $P(2f_1)$ до 15дБ. А также наблюдается рост сигнала $P(2f_1)$ по всей высоте образца с горизонтальным смещением на 3 см от 1,5 см на нижнем крае до 4,5 см на верхнем крае образца. $P(2f_1) = 11$ дБ. Можно сделать вывод, что в точке XU (3см; 16,5см) наблюдается некоторая нелинейность структуры. Во втором случае был обнаружен след перегиба, образовавшегося при длительном хранении материала в сложенном состоянии.

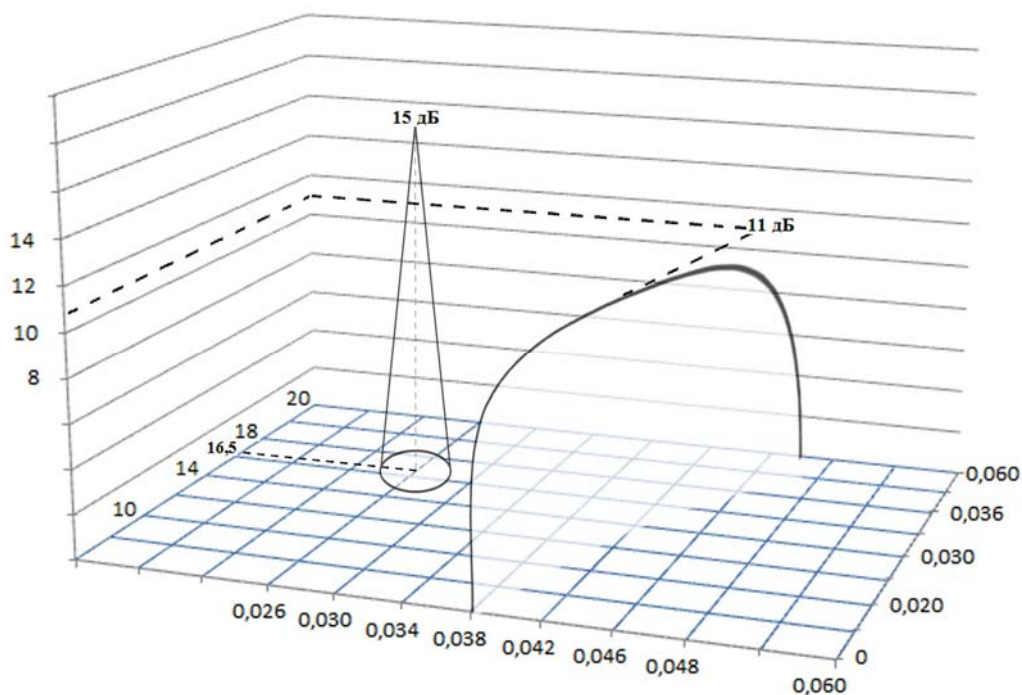


Рисунок 5.13 - Зависимость давления $P(2f_1)$ от координат X и Y (испытание №5)

Таким образом можно сделать предварительные выводы о том, что:

1. Собранная установка и проведенные эксперименты показали возможность бесконтактной акустической диагностики дефектов в теплозащитных материалах.

2. Выявлена качественная зависимость амплитуды давления сканирующего сигнала от плотности дефекта.

3. Показана возможность определения границ возможностей установки, показывающая, что более тяжелые структурные неоднородности могут быть не диагностируемы.

4. Просканирован образец с «неизвестными» структурными дефектами, анализ которого выявил две области с повышенным коэффициентом нелинейности.

Окончательные испытания образцов №2 - №5 исследуемого материала проводились с учетом результатов первого этапа испытаний образцов №1 - №5.

Результаты нестационарных измерений зависимостей $p^{\text{exp}}(0, \tau)$, $\tau \in (0, \tau_{\text{max}})$ после первичной обработки представлены на рисунках 5.14 – 5.17.

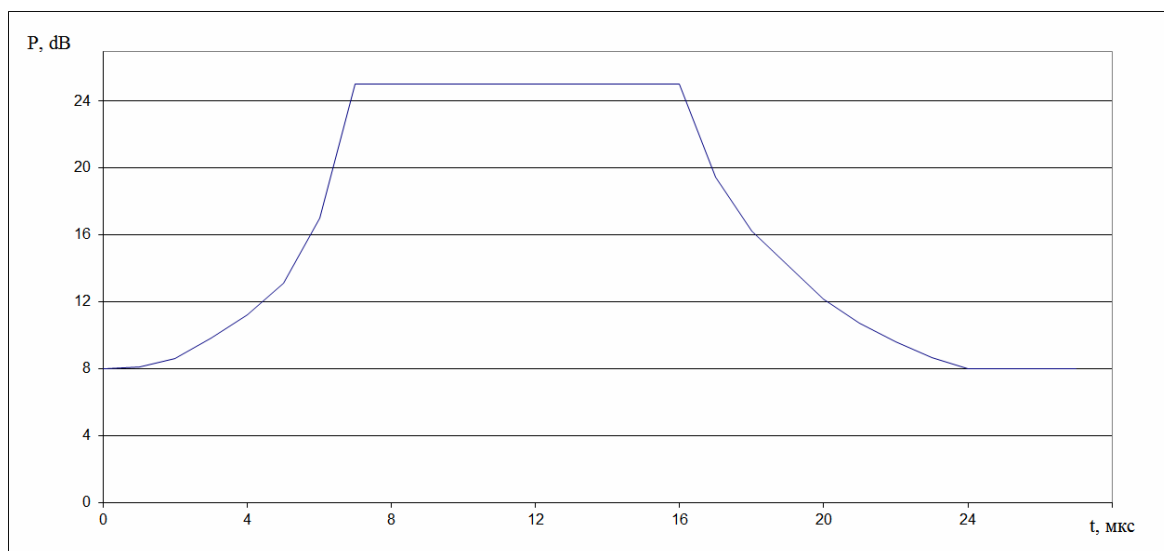


Рисунок 5.14 – Результаты измерения давления в точке обнаруженного дефекта на поверхности образца №2 исследуемого материала

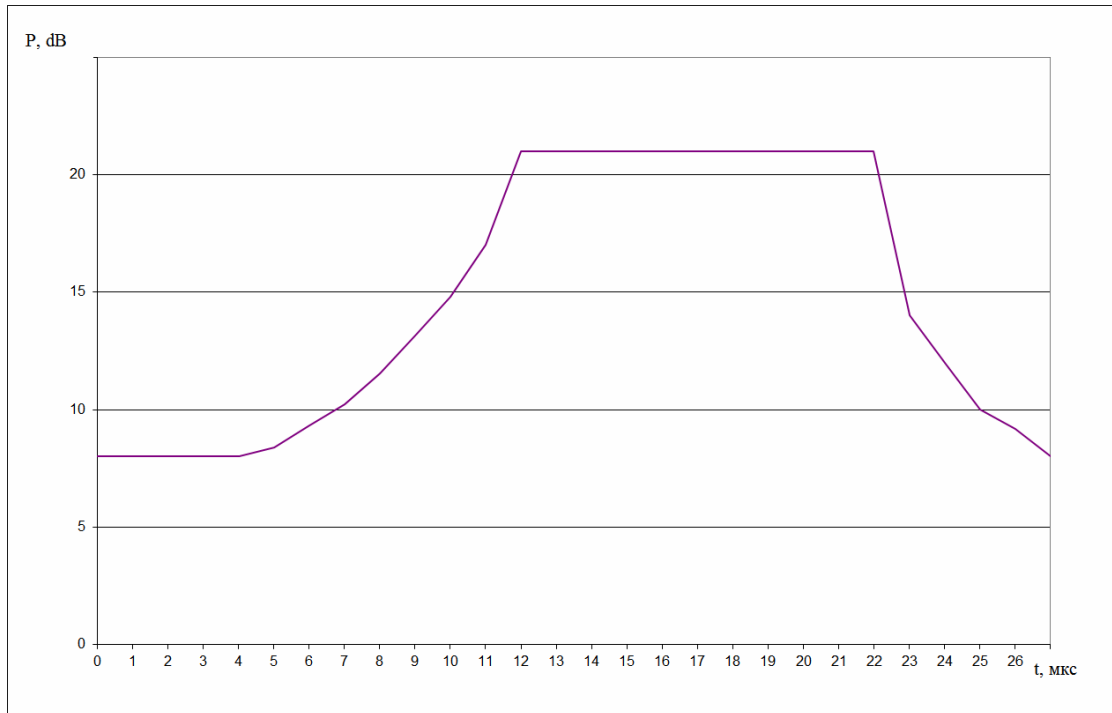


Рисунок 5.15 – Результаты измерения давления в точке обнаруженного дефекта на поверхности образца №3 исследуемого материала

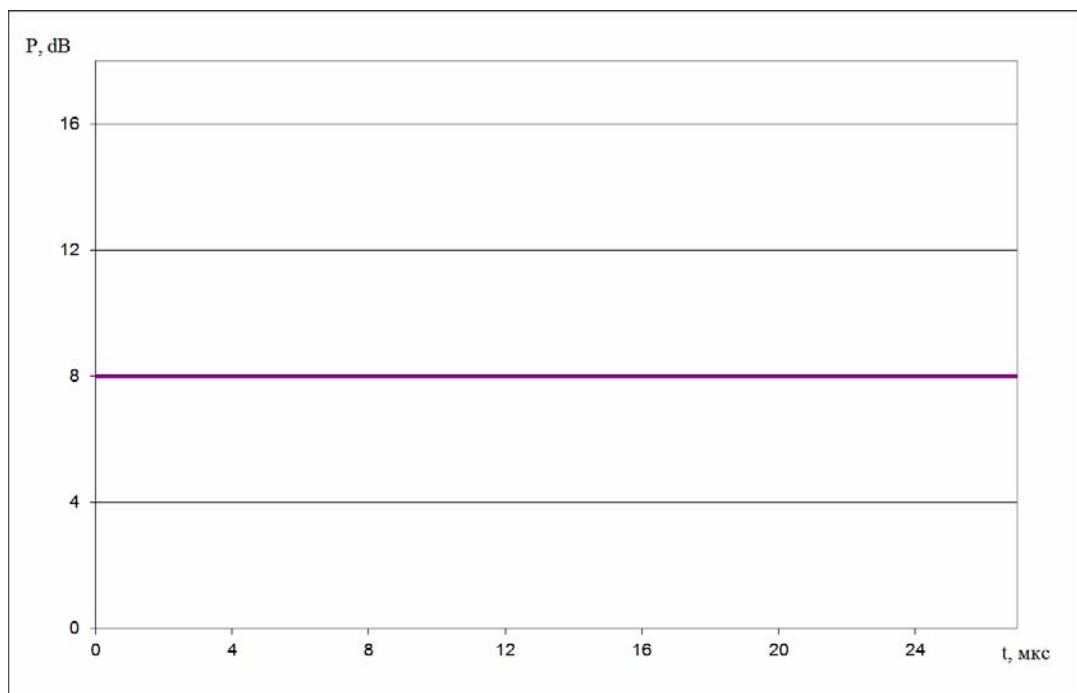
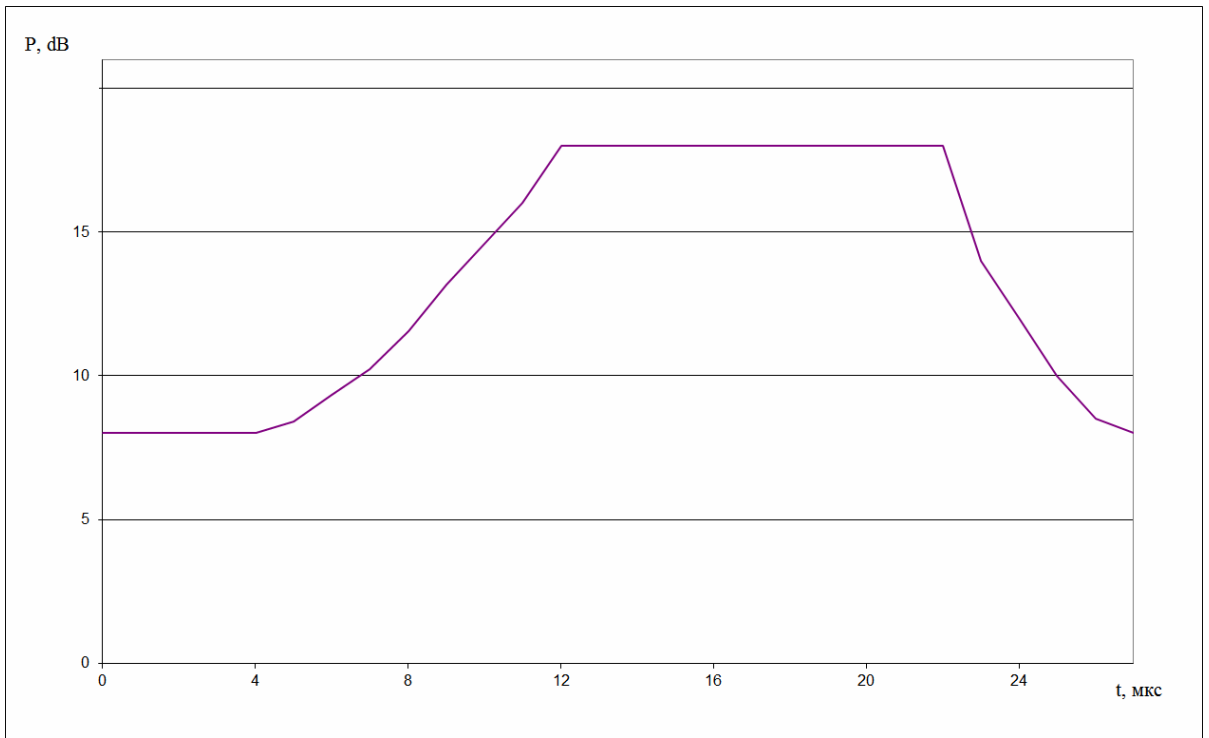
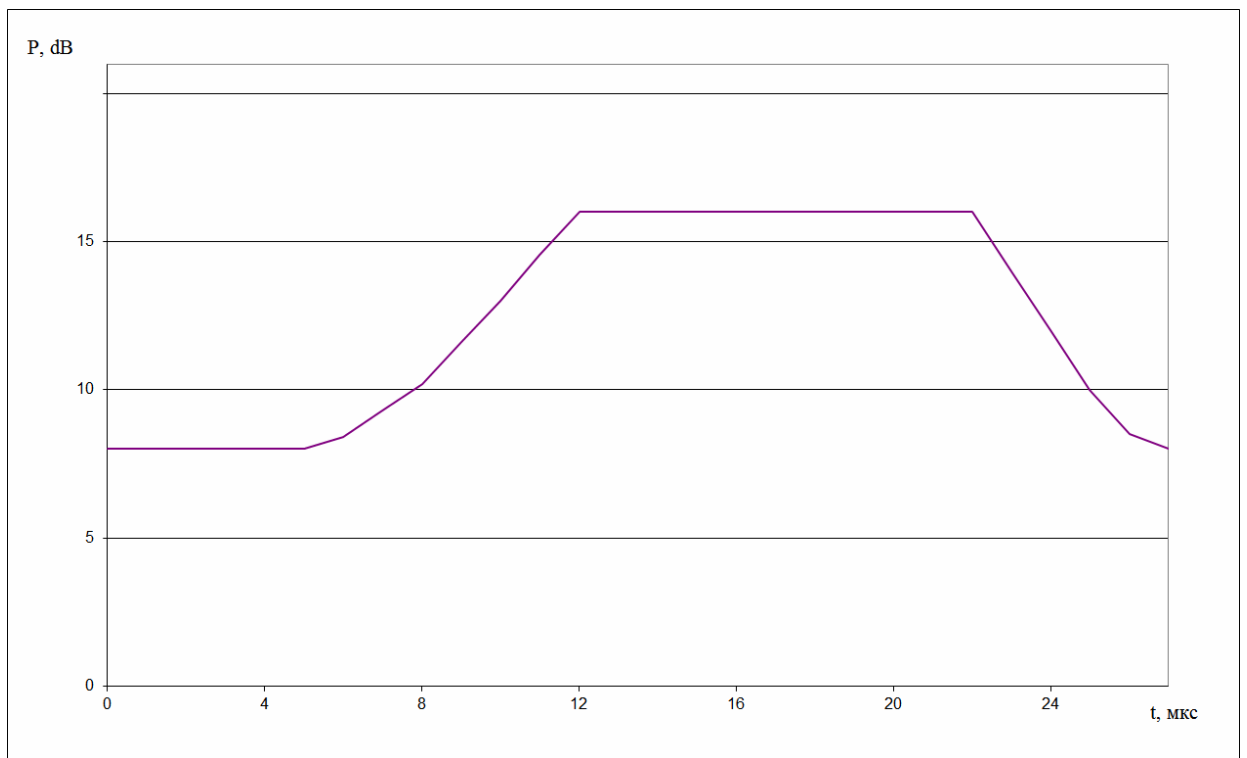


Рисунок 5.16 – Результаты измерения давления в точке обнаруженного дефекта на поверхности образца №4 исследуемого материала



а



б

Рисунок 5.17 – Результаты измерения давления в точке обнаруженного дефекта на поверхности образца №5 исследуемого материала: а – измерение в центре трещины, б – измерение в центре раковины

Проведенные испытания показали, что во всех испытаниях наблюдалось достаточно заметное повышение давления соответствующее выявленным дефектам. Исключение составляет образец №4, где отклонение не выявлено. Это связано с недостаточной мощностью подачи сигнала в установке;

5.4 Результаты обработки экспериментальных данных

В качестве исходных данных для решения задачи параметрической идентификации использовались результаты экспериментальных измерений полученные на образцах №3, №3, №5.

В качестве значений известных характеристик математической модели при решении обратной задачи нелинейной акустики задавались данные о исследуемом материале полученные от НПО им. С. А. Лавочкина и ВНИИСК таблица 5.1 и таблица 5.4.

Пространственно-временная сетка для конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений выбиралась путем предварительного моделирования и состояла из: 100 временных слоев и 100 пространственных узлов.

Результаты определения зависимостей $\bar{\varepsilon}(x)$ для исследуемых образцов материала представлены на рисунках 5.18 -5.20, где

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{\varepsilon(x) - \varepsilon_0}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_0} \quad (5.8)$$

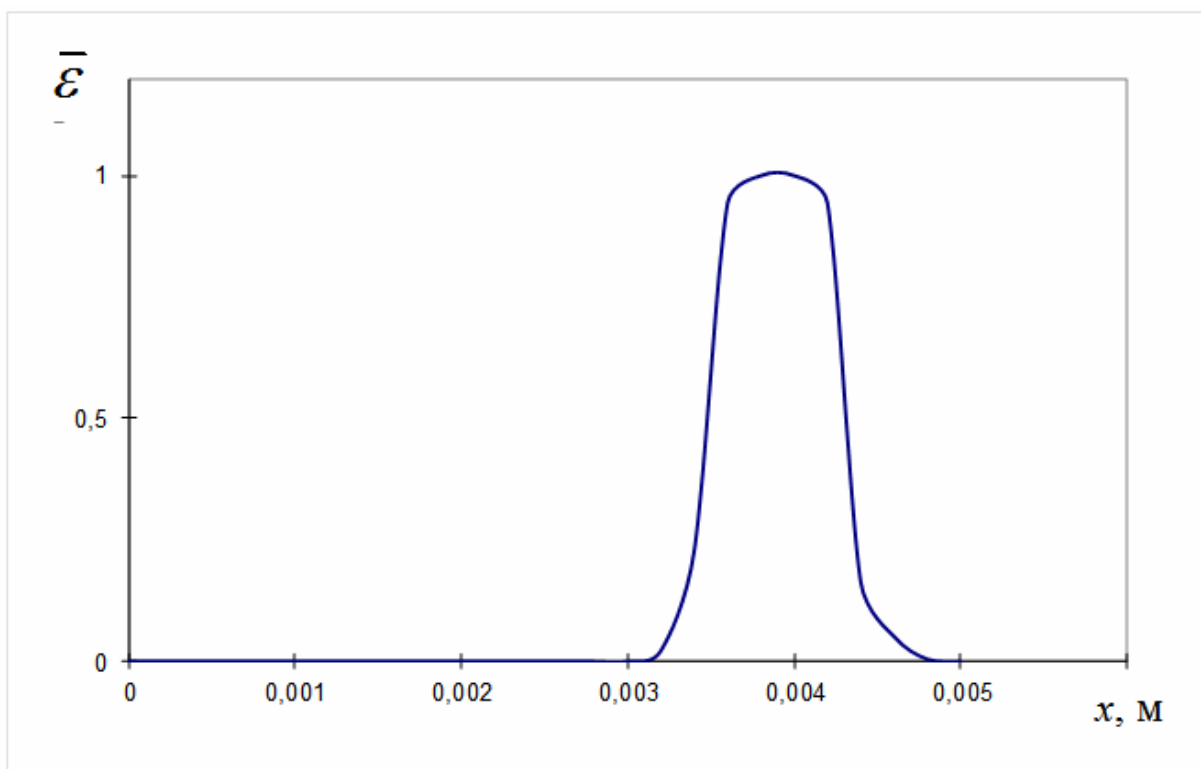


Рисунок 5.18- Значения коэффициента нелинейности $\bar{\varepsilon}(x)$, определенного для образца № 2

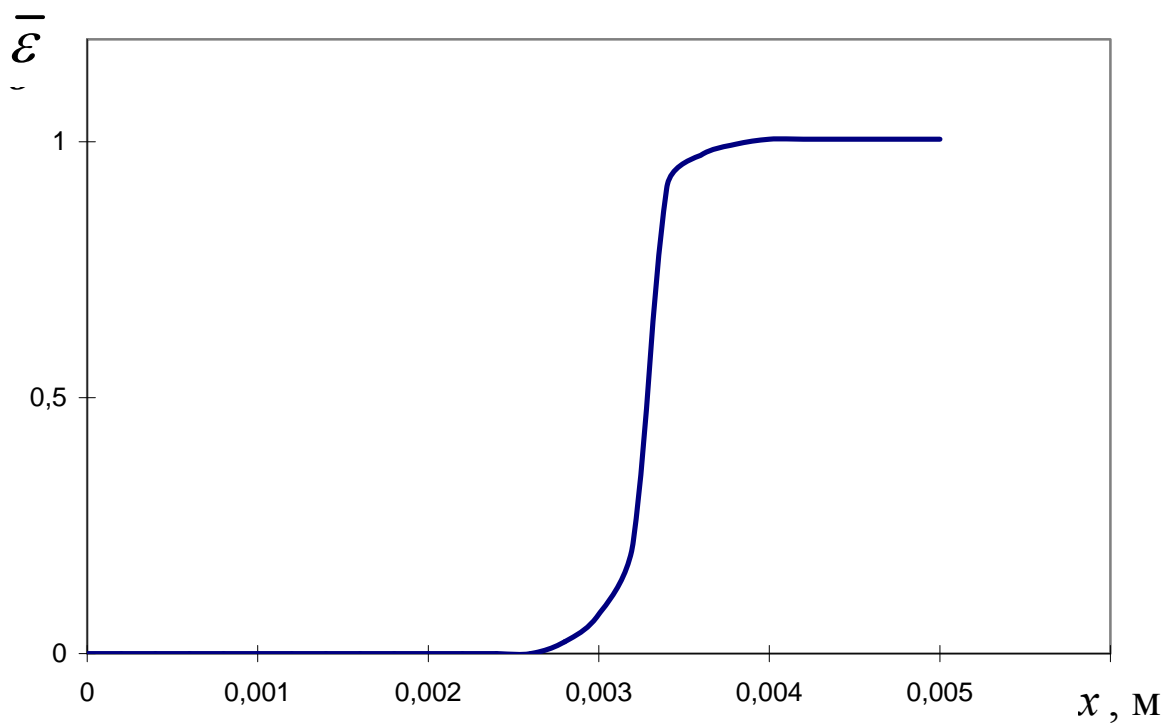


Рисунок 5.19- Значения коэффициента нелинейности $\bar{\varepsilon}(x)$, определенного для образца № 3

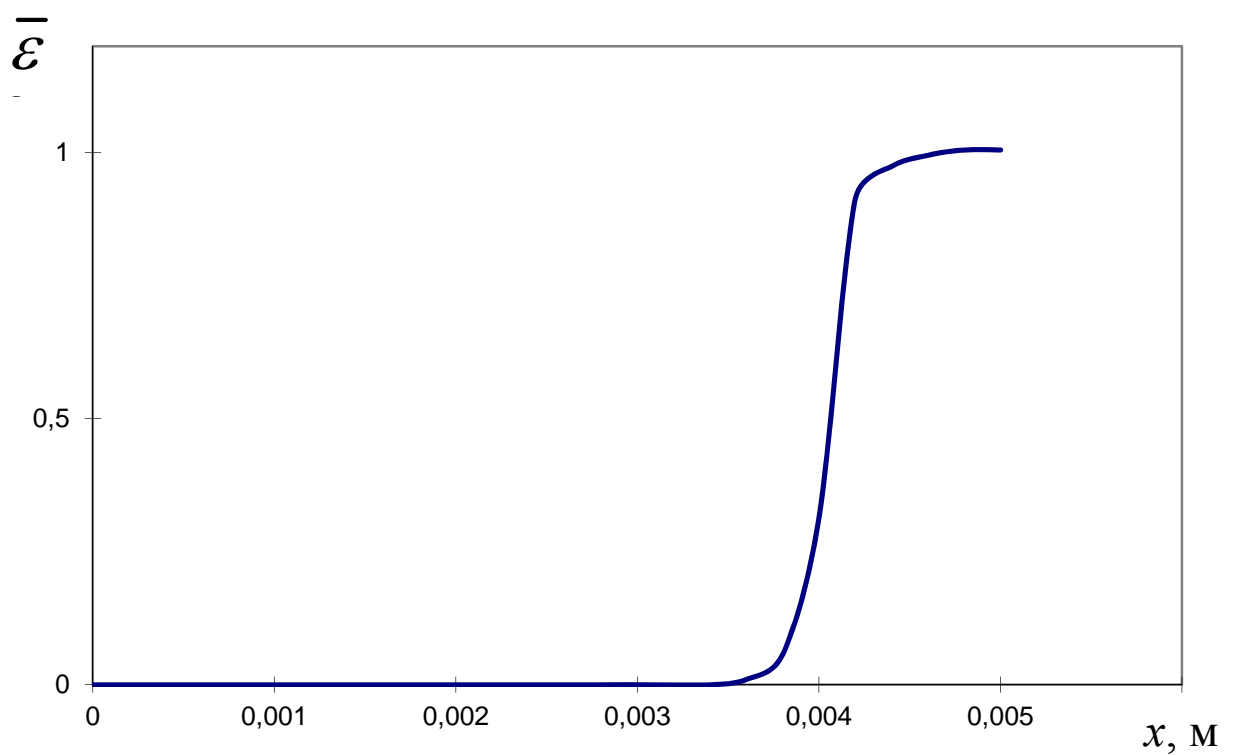
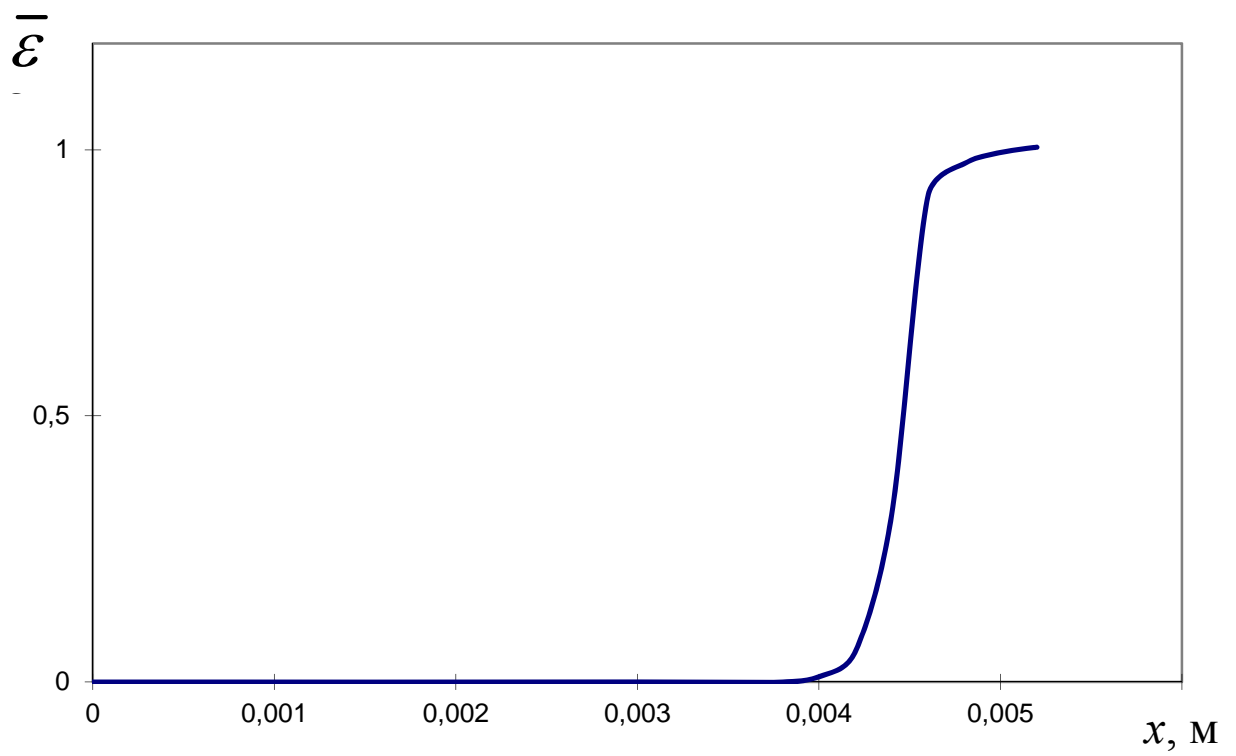


Рисунок 5.20- Значения коэффициента нелинейности $\bar{\varepsilon}(x)$, определенного для образца № 5: а – в центре трещины, б – в центре раковины

Сравнение полученных из решения обратной задачи значений давлений на нагружаемой поверхности с экспериментально измеренными представлены на рисунках 5.21 - 5.23.

Максимальное отклонение расчетных давлений от экспериментальных для каждого образца рассчитывалось по формуле:

$$\delta_{\max} = \max_j |p(0, \tau_j) - f(\tau_j)|, \quad (5.9)$$

где $f(\tau_j)$ - значение давления, измеренное в j -ый момент времени, $p(0, j)$ - значение давления, полученное в результате решения прямой задачи акустики (на внешней поверхности образца), j - номер измерения по времени. Данные расчета погрешности приведены в таблице 5.4:

Таблица 5.4 Погрешности измеренных и расчетных давлений в образцах №2, №3 и №5

№ эксперимента	δ_{\max}
2	1,7
3	0,5
5	0,6

Для расчета интегральной погрешности давлений использовалась формула:

$$\delta^2 = \sum_{j=1}^{N_{\tau}} (p(0, \tau_j) - f(\tau_j))^2 / N_j, \quad (5.10)$$

где j - номер измерения по времени, $f(\tau_j)$ давление измеренная в j -й момент времени, $p(o, \tau_j)$ - давление на внешней поверхности, рассчитанная в j -й момент времени. Результаты приведены в таблице:

Таблица 5.5 Среднеквадратичная погрешность измерений в образцах №2, №3 и №5

№ образца	δ^2
2	0,12
3	0,04
5	0,05

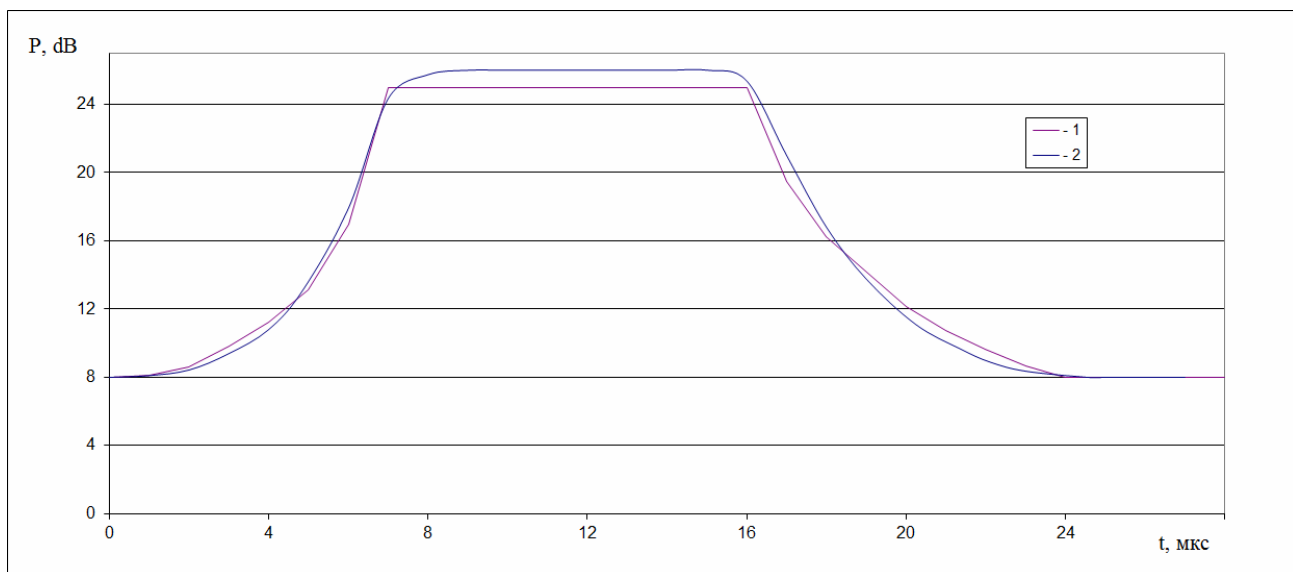


Рисунок 5.21- Графики измеренных и расчетных давлений на внешней поверхности для образца №2: 1- расчетное значение, 2 – экспериментально измеренное

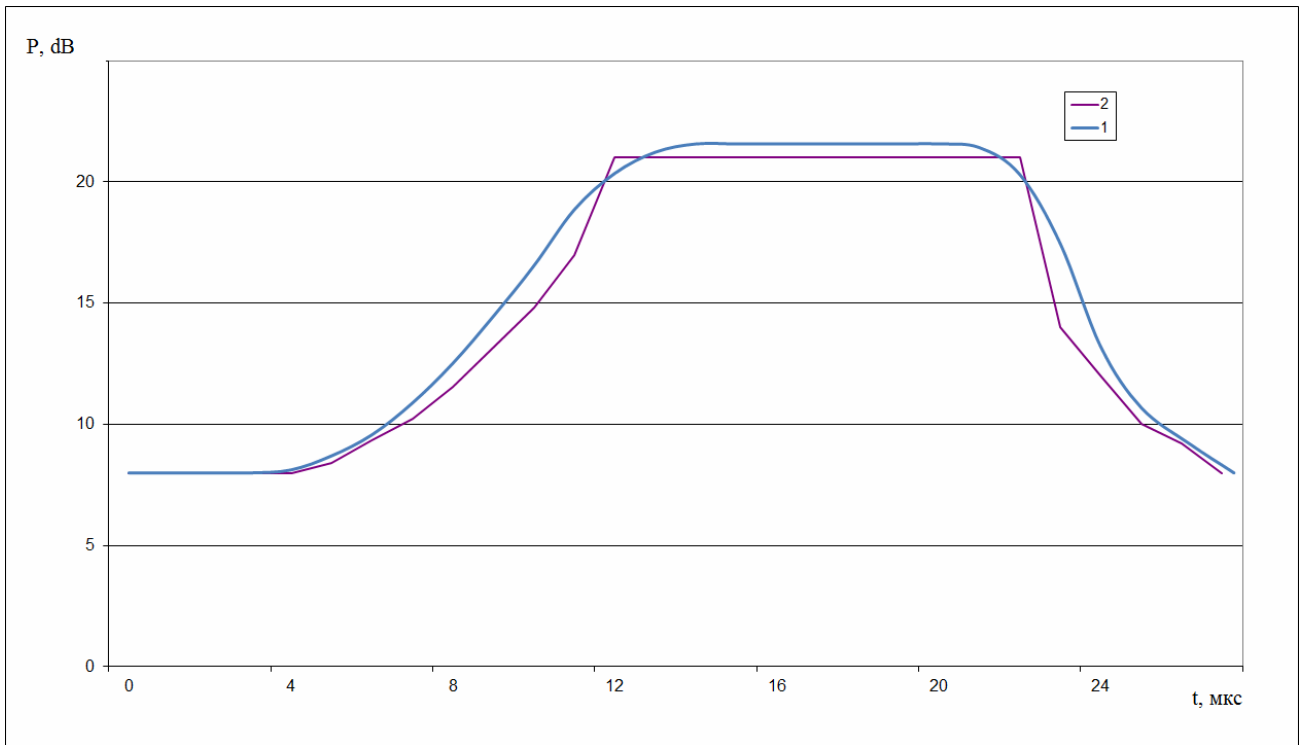
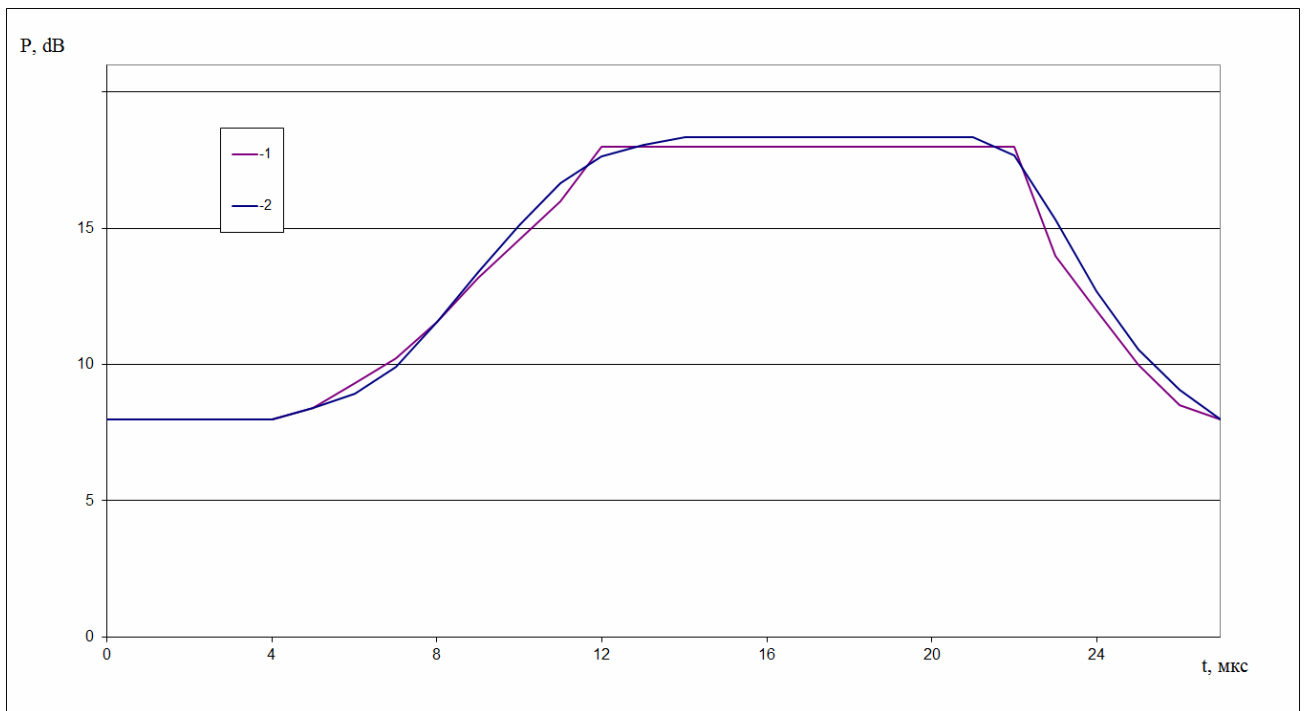
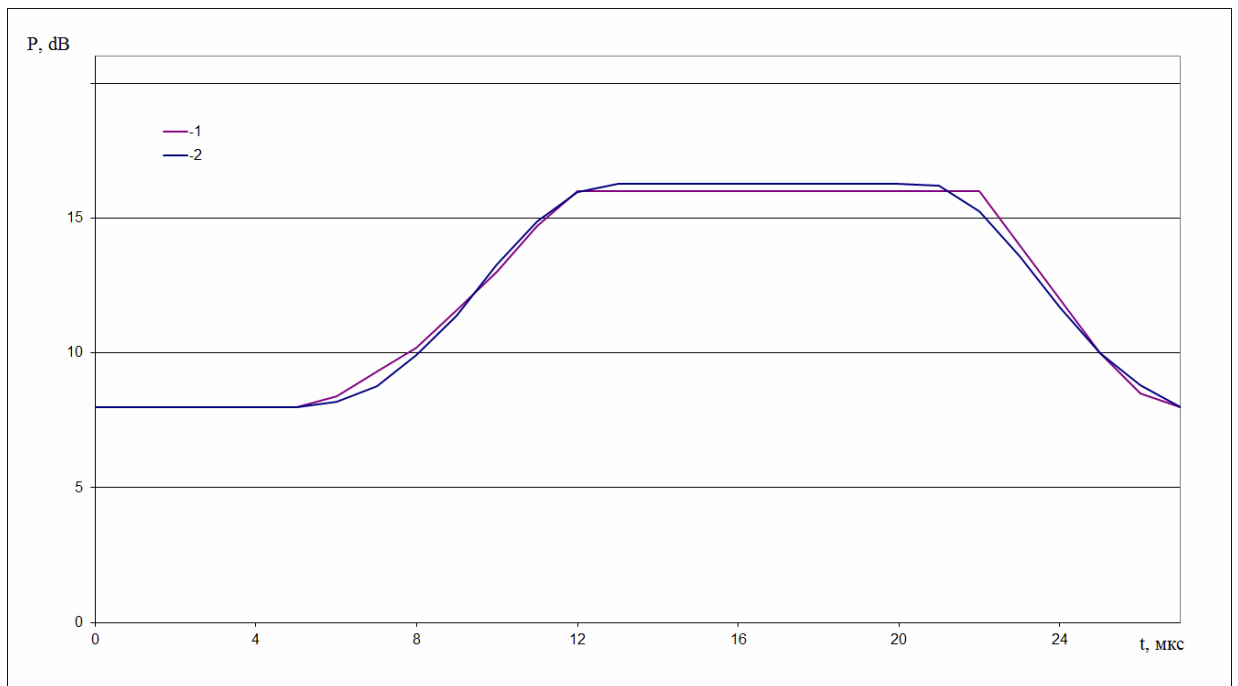


Рисунок 5.22- Графики измеренных и расчетных давлений на внешней поверхности для образца №3: 1- расчетное значение, 2 – экспериментально измеренное



а



б

Рисунок 5.23- Графики измеренных и расчетных давлений на внешней поверхности для образца №5. а – измерение в центре трещины, б – измерение в центре раковины: 1- расчетное значение, 2 – экспериментально измеренное

Проведенные акустические испытания позволили решить поставленную задачу по определению характеристик дефектов образцов перспективного гибкого теплозащитного материала. Низкие значения относительной и интегральной погрешности свидетельствуют о достаточно высокой степени адекватности определенных с помощью разработанного алгоритма характеристик по отношению к реальным.

Основной вопрос для обсуждения – это правомерность применения одномерной по пространственной координате математической модели. По-видимому, следующим этапом исследований должно быть использование двух- и трехмерных постановок обратных задач.

Заключение

К основным научным положениям и выводам, которые сформулированы и доказаны в диссертации и позволили решить поставленные в работе задачи, следует отнести следующие:

1. Разработаны методы и алгоритмы для дефектоскопии элементов конструкции надувных оболочек тормозных экранов СА, основанный на параметрической идентификации математической модели распространения продольных волн в упругой среде методом итерационной регуляризации.

2. Проведен анализ возможных скрытых дефектов эластичных элементов конструкций и существующих методов и средств их обнаружения, а также существующих математических моделей распространения продольных волн в сплошной среде с целью выбора обобщенной математической модели, удовлетворяющей инженерным требованиям для решения поставленной задачи.

3. Разработан вычислительный алгоритм для реализации параметрической идентификации математической модели распространения продольных волн в сплошной среде, при этом получена однородная разностная схема для многослойной области.

4. Проведен анализ эффективности разработанного алгоритма методом вычислительного эксперимента и сделаны выводы о влиянии различных факторов на точность решения обратной задачи нелинейной акустики.

5. Разработан и реализован прототип экспериментальной установки для определения геометрических параметров дефектов эластичных материалов надувных оболочек тормозных аэродинамических экранов СА на основе методов обратных задач нелинейной акустики.

6. Проведены экспериментально-расчетные исследования механических свойств (определение коэффициента нелинейности распространения акустических волн) теплозащитного материала СТИРОСИЛ с искусственно созданными дефектами. На основе полученных экспериментальных данных были определены геометрические параметры искусственно созданных

дефектов. Были сопоставлены акустические давления, полученные в результате расчета с использованием определенного коэффициента нелинейности, и давления, измеренные в результате эксперимента. Расхождение между расчетными и измеренными давлениями составляет: среднеквадратичное отклонение до 0.12Дб, максимальное отклонение до 1.7Дб. Определяемые геометрические параметры практически совпадают с реальными.

Разработанные методы могут быть также использованы для повышения эффективности и качества дефектоскопии в других отраслях науки и техники, в которых возникает необходимость исследования при разработке конструкций и систем из эластичных материалов, а именно: в энергетике, химическом машиностроении, двигателестроении, медицине и т.д.

В качестве следующего этапа развития научных исследований по данной тематике могут быть рассмотрены обратные задачи дефектоскопии в двух- и трехмерной постановке.

Список литературы

1. Bogdanov V.V., Kremnev R.S., Rodimov R.Yu., Pitchkhadze K.M., Terterashvili A.V., Finchenko V.S. On the Use of Ballute-equipped Vehicles for Landing on the Surface of Planets Having Atmosphere. Proceeding of 4-th Ukraine-Russia-China Symposium of Space Science and Technology, vol.1, 1996, p. 253-254.
2. Bogdanov V., Rodimov R., Pichkhadze K., Terterashvili A., Finchenko V., Kouznetsov V. Inflatable Ballutes to Provide Aerodynamic Shape to the Payload Bus Enabling its Atmosphere Entry. 48-th International Aeronautical Congress, 6-10 Oct., 1997, Turin, Italy, IAF-97-I.6.03.
3. Алексеев А.К., Павлов Г.А., Финченко В.С. Аэротермодинамика пенетратора в атмосфере Марса. Журнал «Космические исследования», том 34, № 1, 1996, с. 98-101.
4. Marraffa L., Kassing D., Baglioni P., Wilde D., Pichkhadze K., Finchenko V. Inflatable Re-Entry Technologies: Flight Demonstration and Future Prospects. ESA Bulletin 103, August, 2000, p. 78-85.
5. Wilde D., Taushe M., Orth M. Inflatable Re-Entry Technologies – IRT. 54-th IAC. Bremen. 29.9 – 3.10.2003. IAC-03-U.2.a.03.
6. Hughes S.J., Dillman R.A., Starr B. R., Stephan R.A., Lindell M.C., Charles J. Player, and Dr. F. McNeil Cheatwood. Inflatable Re-Entry Vehicle Experiment (IRVE) Design Overview. AIAA Paper 2005-1636, May 2005.
7. Moss J. N., Glass C.E., Hollis B.R., Van Norman J.W.. Low-Density Aerodynamics of the Inflatable Re-entry Vehicle Experiment (IRVE). Journal AIAA, paper 2006-1189.
8. Финченко В.С., Богданов В.В., Бондаренко В.А., Иванков А.А., Пичхадзе К.М., Калашник В.Н., Красников Ю.Д. Теоретико-экспериментальная проверка эффективности и работоспособности гибкой теплозащиты надувного тормозного устройства на полномасштабном макете спускаемого

- аппарата «Демонстратор - Солнечный парус». НПО им. С.А. Лавочкина. Сборник научных трудов. Выпуск 3, 2001, М., с. 364-371.
9. Богданов В.В., Залогин Г.Н., Землянский Б.А., Кнотько В.Б. Маринин В.П., Румынский А.Н., Финченко В.С. Экспериментальные исследования эффективности гибкой теплозащиты надувных тормозных устройств. Журнал «Космонавтика и ракетостроение», № 22, 2001, ЦНИИМаш, с. 22–32.
 10. Землянский Б.А., Иванков А.А., Устинов С.Н., Финченко В.С. Современное состояние вопроса о применении технологии надувных элементов конструкции в изделиях ракетно-космической техники, об использовании надувных тормозных устройств в конструкции спускаемых аппаратов и теплозащитные покрытия этих устройств//Вестник РФФИ № 1(57), январь-март 2008, с. 37-63.
 11. Руденко О.В., Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН, № 1 2006, т. 176, стр.77-95.
 12. Андреев В.Г., Ведерников А.В. Измерения распределения сдвигового модуля упругости в неоднородных резиноподобных средах // Акустический журнал, том 53 – 2007 – №1 – С.50-54.
 13. Гедройц А.А., Зарембо Л.К., Красильников В.А. Сдвиговые волны конечной амплитуды в поли- и монокристаллах металлов // Докл. АН СССР, 1963. т.150, с. 515-518.
 14. Зарембо А. К., Красильников В. А. Нелинейная акустика в проблеме диагностики прочности твердых тел – Проблемы прочности // 1989 г.
 15. Руденко О.В. Нелинейные методы в акустической диагностике // Дефектоскопия. 1993. №8. С.24-32.
 16. Коробов А.И., Изосимова М.Ю. Нелинейные волны Лэмба в металлической пластинке с дефектами // Акуст. Журн., 2006. № 5., с. 683-692.

17. Коробов А.И., Изосимова М.Ю., Прохорова Е.В. Исследование колебаний биологических тканей и их фантомов с модельными дефектами // Известия РАН. Серия физическая, – 2007. – Т. 71. – № 1. – С. 183-185.
18. Руденко О. В., Солюян С. Н. Теоретические основы нелинейной акустики // Наука 1975.
19. Haller K. Nonlinear acoustics applied to nondestructive testing // Blekinge Institute of Technology 2007, С.270-281.
20. Fatemi M., Wold L.E., Alizad A., Greenleaf J.F. .Vibro-acoustic Tissue Mammography // IEEE Trans. Med. Imaging 21(1): 1-8 (2002).
21. Коробов А.И., Ненарокомов К.А Экспериментальная установка и методика для нелинейной акустической вибродиагностики. В сборнике трудов 19 сессии Российского акустического общества. Том 2. (Н.Новгород, 24-28 сентября 2007).- М.: изд-во ООО «Геос», с. 53-56
22. Ведерников А.В. Генерация и распространение сдвиговых волн в резиноподобных средах с неоднородностями сдвигового модуля // диссертация на соискание учёной степени к.ф.-м.н., физический факультет, 2007г., с. 38-42.
23. Изосимова М.Ю., Прохорова Е.В. Определение модуля сдвига резиноподобных материалов динамическим методом// Сборник тезисов международной конференции молодых учёных “Ломоносов-2006”, секция “Физика”.
24. Sandrin L., Tanter M., Catheline S., Fink M. Shear modulus imaging with 2-D transient elastography // IEEE transactions on ultrasonic, ferroelectrics and frequency control, vol. 49, No 4, April 2002, p. 430.
25. Wang Y., Tyrer J. .Measurement of focused ultrasonic fields using a scanning laser vibrometer. // J. Acoust.Soc. Am., Vol. 121, No 5 May 2007, pp. 2621-2627.
26. Polytec Scanning Vibrometer PSV-300 Руководство по эксплуатации.

27. Ненарокомов К.А. Экспериментальная установка и методика для нелинейной акустической вибродиагностики // Сборник тезисов международной конференции молодых учёных “Ломоносов-2007”, секция “Физика”, с.171.
28. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика // том 7, Теория упругости, М.: Наука, 1987.
29. Vinogradov N.S., Dorofeev M.S., Korobov A.I. Nonlinear generation of airborne sound by waves of ultrasonic frequencies // Acoustical Physics vol. 51, No 2, 2005, pp. 145-151.
30. Делла Порта Дж. Натуральная магия // 1589.
31. Розенберг Л.Д. Звуковые фокусирующие системы // Издательство Академии Наук 1949, 45с.
32. Крылов В.В. Основы теории излучения и рассеяния звука // Издательство МГУ 1989, 38 с.
33. Alifanov O.M., Korobov A.I., Nenarokomov K.A. Noncontact Diagnostics of Elastic Materials by Inverse Methods of Nonlinear Acoustics // Proceedings of Waves 2009, the 9th conference on mathematical and numerical aspects of waves propagation, INRIA, Pau, France, 2009, pp. 316-318.
34. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач // М.: Наука, 1988. - 288с.
35. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач // М.: Наука. 1979. - 195 с.
36. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи // Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2900, 456 с.
37. Руденко О.В. Солуян С.Н. Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука, 1975. – 322 с.
38. Alifanov O.M., Nenarokomov A.V., Nenarokomov K.A. Non-Contact Parameter Estimation of Elastic Materials by Inverse Methods of Nonlinear Acoustics // In

- Proceedings of 2nd African Conference on Computational Mechanics (January 2011), Uok Publ., 2011, 4p.
39. Alifanov O.M., Nenarokomov A.V., Nenarokomov K.A. Non-Contact Testing of Elastic Materials by Inverse Methods of Nonlinear Acoustics // In Proceedings of 7th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice (May 4 – 6, 2011, Orlando, Florida, USA).- University of Central Florida Publ., 2011, 6p.
 40. Norton S.J. Iterative Inverse Scattering Algorithms: Methods of Computing Frechet Derivatives // Journal of Acoustical Society of America, 1999, Vol.106, No. 5, pp. 2653-2660.
 41. Sabra K.G. Using Cross Correlations of Turbulent Flow-induced Ambient Vibration to Estimate the Structural Impulse Response. Application to Structural Health Monitoring // Journal of Acoustical Society of America, 2007, Vol. 121, No. 4, pp.1987-1995.
 42. Gibbs B.M., Cookson R., Qi. N. Vibration Activity and Mobility of Structuralborne Sound Sources by a Reception Plate Method // Journal of Acoustical Society of America, 2008, Vol. 123, No. 6, pp. 4199-4209.
 43. Lavrentyev A.I., Rokhlin S.I. Determination of Elastic Module Density, Attenuation, and Thickness of a Layer Using Ultrasonic Spectroscopy at Two Angles // Journal of Acoustical Society of America, 1997, Vol. 102, No. 6, pp.3467-3477.
 44. Valdivia N.P., Williams E.G., Herdic P.C.Approximations of Inverse Boundary Element Methods with Partial Measurements of the Pressure Field // Journal of Acoustical Society of America, 2008, Vol. 123, No. 1, pp. 109-120.
 45. Astral D.E., Gustafsson M.G. Optimal Detection of Crack Echo Families in Elastic Solides // Journal of Acoustical Society of America, 2003, Vol. 113, No. 5, pp. 2732-2741.

46. Simonetti F., Cawley P. A Guided Wave Technique for the Characterization of Highly Attenuative Viscoelastic Materials // Journal of Acoustical Society of America, 2003, Vol. 114, No. 1, pp.158-165.
47. Bucaro J., Romano A.J. Detection and Localization of inclusions in Plates Using Inversion of Point Actuated Surface Displacement // Journal of Acoustical Society of America, 2004, Vol. 115, No. 1, pp. 201-206.
48. Romano A.J., Bucaro J.A., Vignola J.F., Abraham P.B. Detection and Localization of Rib Detachment in Thin Metal and Composite Plates by Inversion of Laser Doppler Vibrometry Scans // Journal of Acoustical Society of America, 2007, Vol. 121, No. 5, pp. 2667-2672.
49. Alifanov O.M., Nenarokomov A.V., Nenarokomov K.A., Terentieva A.V., Titov D.V., Finchenko V.S. Experimental-computational system for noncontact diagnostics of elastic materials // In Proceedings of 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering (May 12–15, 2014, Poland).- Silesian TU Publ., Gliwice-Wrocław, Poland, 2014, pp. 13-22.
50. Алифанов О.М., Ненарокомов А. В., Ненарокомов К.А., Титов Д. М. Параметрическая идентификация нелинейных математических моделей распространения продольных волн в материалах // Вестник МАИ, 2013, том 20, №5, С. 185-195.
51. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике // М.: Наука, 1976, 248 с
52. , Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы // М.: Наука. Гл. ред. Физмат. Лит., 1989.-432 с.
53. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А. В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена // М.: Янус-К, 2009.-300 с.
54. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы // Изд.2-е, испр., доп.- М.:ФИЗМАТЛИТ,2006.-400 с.
55. Алифанов О.М., Ненарокомов А. В., Ненарокомов К.А., Терентьева А.В., Титов Д.М. Конечно-разностный метод решения обобщенной краевой

задачи для уравнения гиперболического типа в многослойной области // Вестник МАИ, 2013, том 20, №5, С. 196-206.

56. Алифанов О.М., Ненарокомов А. В., Ненарокомов К.А., Титов Д.М., Финченко В.С. Неразрушающая дефектоскопия материалов гибкой тепловой защиты методами нелинейной акустики // Тепловые процессы в технике, 2016, том 8, № 8, С.369-377.
57. Korobov A.I., Izosimova M.Y., Nenarokomov K.A. Noncontact diagnostics of rubber-like materials by methods of nonlinear acoustics // AIP Conference Proceedings, 2008, N 1022, pp. 533-536.