

На правах рукописи



До Чунг Бо

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО
СПУТНИКА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СИЛ**

Специальность: 01.02.01 – “Теоретическая механика”

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2016

Работа выполнена на кафедре «Теоретическая механика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» ФГБОУ ВО Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

СКОРОБОГАТЫХ Игорь Владимирович

Официальные оппоненты: **ШАТИНА Альбина Викторовна**
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики

ЗЛЕНКО Александр Афанасьевич
кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика» Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Защита состоится «29» декабря 2016 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), расположенном по адресу: 125993, Москва А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО Московского авиационного института (национального исследовательского университета): https://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=74030

Автореферат разослан « » 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент



Гидаспов В.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования: Вопросы эволюции поступательного и вращательного движений космических объектов (естественных и искусственных) под действием гравитационно-приливных сил ранее исследовались в работах Дж.Г. Дарвина, У. Манка и В. Макдональда, П. Голдрайха и С. Пила, В.В. Белецкого, В.Г. Вильке, Ю.Г. Маркова, А.П. Маркеева и других авторов. Теоретическое исследование движения сложных механических систем – достаточно трудная математическая задача. Поэтому научный и практический интерес представляет решение модельных задач, позволяющих понять характерные закономерности движения сложных многокомпонентных тел и конструкций, т.е. систем, состоящих из твердых тел, материальных точек, а также звеньев с распределенными параметрами, для которых процессы деформирования обратимы и существует потенциальная энергия упругих деформаций. Кроме того, исследование поступательно-вращательного движения деформируемых спутников является основополагающим для достижения высоких точностей определения их эфемерид. Другой важной проблемой является построение модели лунно-солнечных приливов, которая тесно связана с динамикой вращения Земли, и, в конечном итоге, также, должна учитываться в построении высокоточных моделей движения спутников Земли. Поэтому исследования по данной тематике являются **актуальными**.

Цели и задачи диссертационной работы: состоит в изучении эволюции вращательного движения вязкоупругого спутника, движущегося по эллиптической орбите вокруг притягивающего центра, относительно его центра масс, а также эволюции его поступательно-вращательного движения; кроме того использующаяся в предыдущих задачах модель осесимметричного вязкоупругого спутника применена для исследования Лунных и Солнечных приливов на Земле.

Научная новизна:

1. Изучена эволюция вращений относительно центра масс осесимметричного спутника, состоящего из абсолютно твердой части и вязкоупругой полусферической антенны; показано, что эволюция может быть разбита на два этапа – быструю и медленную. Показано, что быстрая эволюция вращений относительно центра масс заключается в том, что вектор кинетического момента

расположится вдоль оси симметрии спутника, (в случае, если осевой момент инерции больше экваториального), и в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (в случае, если экваториальный момент инерции больше осевого).

2. Показано, что медленная эволюция заключается в замедлении осевого вращения, наклонении вектора кинетического момента к плоскости орбиты. Найдены стационарные значения углов отклонения вектора кинетического момента от нормали к плоскости орбиты и исследована их устойчивость.
3. В задаче о движении вязкоупругого шарообразного спутника в поле притягивающего центра на основе решения уравнений квазистатических деформаций, получен эффект быстрой эволюции – прецессия плоскости орбиты спутника и вращение перицентра орбиты в ее плоскости.
4. Найдено стационарное решение задачи – орбита является круговой, вектор кинетического момента ортогонален плоскости орбиты и угловая скорость орбитального движения совпадает с угловой скоростью спутника.
5. На основе модели деформируемой Земли, состоящей из абсолютно твердого ядра и вязкоупругой мантии, получены уравнения для упругих перемещений, вызванных гравитацией Луны и Солнца, и найдены приближенные значения частот приливов.

Теоретическая и практическая значимость:

В работе исследована задача об эволюции вращений спутника с вязкоупругой полусферической антенной на эллиптической орбите. Полученные результаты предсказывают характерные черты эволюции движения подобных спутников. Предложенная модель может различным образом усложняться, отражая черты реального устройства спутника, а также может быть использована для численного моделирования. Все это, в конечном итоге, позволяет улучшить точность ориентации спутников.

Вторая задача, рассмотренная в диссертации, является некоторым обобщением первой. В ней рассмотрено поступательно-вращательное движение спутника. Однако здесь спутник моделируется однородным и изотропным вязкоупругим шаром, что делает модель несколько отличной от первой задачи. Здесь результаты исследования

позволяют оценить эволюцию не только вращения вокруг центра масс спутника, но и эволюцию его траектории.

Последняя задача предлагает модель, позволяющую приближенно вычислять приливные деформации Земли, и, на их основе получить значения частот лунно-солнечных приливов. Данная теоретическая модель может явиться основой для более точных численных моделей приливов.

Методология и методы исследования:

Для получения уравнений движения использовался вариационный принцип Даламбера – Лагранжа, и уравнения Рауса, распространенные на механику сплошных сред, а также общие теоремы механики. Разложение упругих перемещений в ряд по собственным формам позволило свести уравнения для перемещений к счетной, а далее, в некоторых случаях, и к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных переменных. Наличие естественных малых параметров, таких как малая диссипация энергии, сильно различающиеся характерные размеры в механической системе, а также разные характерные времена движений, позволило применить асимптотические методы для исследования полученных уравнений.

Положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что в задаче об эволюции вращений спутника относительно центра масс в результате быстрой эволюции вектор кинетического момента расположится вдоль оси симметрии спутника (если осевой момент инерции больше экваториального) и в экваториальной плоскости, если наоборот.
2. Установлено, что в результате медленной диссипативной эволюции под действием гравитационно-приливных моментов от притягивающего центра будет происходить замедление быстрого осевого вращения, а вектор кинетического момента будет наклоняться к плоскости орбиты, а в случае обратного вращения переворачиваться в прямое вращение.
3. В задаче о поступательно-вращательном движении шарообразного вязко-упругого спутника, вследствие осесимметричных деформаций, возникающих из-за сил центробежных сил инерции, происходит быстрая эволюция орбиты спутника заключающаяся в прецессии плоскости орбиты (т.е. изменении долготы восходящего узла), а также вращении перицентра орбиты в ее плоскости.

4. Получено, что медленная эволюция спутника, обусловленная гравитационными приливами приводит орбиту к круговой, при этом вектор кинетического момента спутника становится ортогональным к плоскости орбиты, а угловая скорость вращения стремится к его орбитальной скорости.
5. Найдены приближенные значения частот лунно-солнечных приливов на основе модели деформируемой Земли, состоящей из твердого ядра и вязкоупругой мантии.

Степень достоверности и апробация результатов: Достоверность построенных математических моделей и сделанных выводов обеспечена корректной постановкой математических задач, а также согласованностью их с результатами других авторов. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах и научных конференциях.

Публикации: Научные результаты диссертации опубликованы в статьях журналов из списка ВАК [1-3].

Результаты работы докладывались и обсуждались на:

- Международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, 5-9 июля 2013 г.
- Международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, 3-7 июля 2015 г.
- Семинарах под руководством проф. Б.С. Бардина и проф. П.С. Красильникова на факультете "Прикладная математика и физика" Московского авиационного института.

Личный вклад автора: Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы, и получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Подготовка к публикации проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Структура и объем диссертации: Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Она содержит 120 страниц машинописного текста, включающего 7 рисунков и список литературы из 59 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, ее научная новизна и практическая значимость. Определены цели и задачи исследований. Представлены основные положения, выносимые на защиту. Показана структура и содержание диссертации. Приведена общая характеристика диссертационной работы.

Первая глава является вспомогательной. В ней содержатся сведения, использующиеся в последующих главах. Приводится обобщение вариационных принципов Гамильтона-Остроградского и Даламбера-Лагранжа на механику деформируемого тела. Принцип Даламбера-Лагранжа представляется в виде [1]:

$$\int_{\Omega} \left(\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{\gamma} \nabla E - \mathbf{f} \right) \delta \mathbf{r} \gamma dx - \int_{\partial \Omega} \mathbf{F} \delta \mathbf{r} d\sigma = 0 \quad (1)$$

Далее уравнение (1) систематически применяется для получения уравнений для упругих перемещений в большинстве задач данной диссертации.

В данной главе изложен подход к построению функционалов внутренних упругих и диссипативных сил в деформируемых телах. Здесь же рассматривается модель линейной теории малых деформаций, а также модель линейной теории вязкоупругости. Кратко рассмотрен вопрос выбора связанной системы координат. В главе рассмотрен модальный подход при получении уравнений динамики, когда вектор упругих перемещений представляется в виде ряда по собственным формам колебаний:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) \cdot \mathbf{U}_k(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Также в конце главы кратко приведены обобщения классических уравнений Лагранжа, Гамильтона и Рауса на механику деформируемых систем. Уравнения Рауса далее применяются в главах 2, 3 и 4 диссертации.

Вторая глава посвящена исследованию задачи об эволюции вращательных движений относительно центра масс спутника, движущегося по неизменяющейся эллиптической орбите вокруг притягивающего центра. Спутник предполагается осесимметричным, состоящим из абсолютно твердой и вязкоупругой частей. Вязкоупругая часть представляет собой полусферическую антенну, с осью симметрии

в недеформированном состоянии, совпадающей с осью симметрии твердой части (рис.1).

В инерциальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в притягивающем центре O орбита центра масс спутника лежит в плоскости $O\xi_1\xi_2$. Движение центра масс C спутника задаётся его радиус-вектором

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}^0 R \\ \mathbf{R}^0 &= \cos \mathcal{G} \xi_1^0 + \sin \mathcal{G} \xi_2^0 \\ \dot{\mathcal{G}} &= \frac{\omega_0 (1 + e \cos \mathcal{G})^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \\ R &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (3)$$

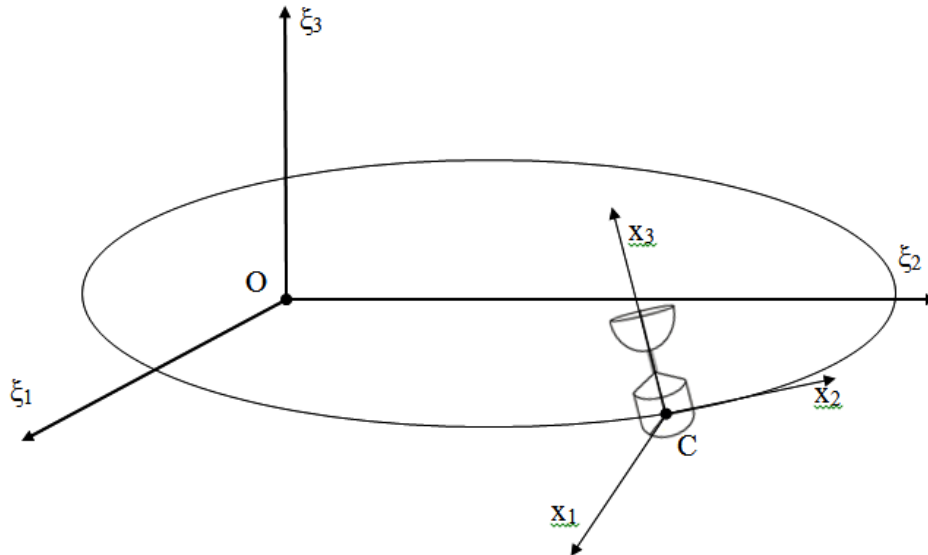


Рис 1. Спутник с полусферической антенной

Функционал потенциальной энергии гравитационного поля представляется в виде:

$$U \approx -\mu R^{-3} \int_{\Omega_2} [3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u}) - (\mathbf{r}, \mathbf{u})] \rho_2 dx - \frac{3}{2} \mu R^{-3} \int_{\Omega} (O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})^2 \rho dx.$$

При помощи принципа Даламбера-Лагранжа выводится система уравнений для модальных переменных $q_k(t), p_k(t)$:

$$\begin{aligned} v_k^2 \dot{q}_k + \chi b v_k^2 \dot{q}_k + (\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \mathbf{V}_k) + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \mathbf{V}_k) + \frac{\mu}{R^3} (\mathbf{r}, \mathbf{V}_k) - \frac{3\mu}{R^3} ((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{V}_k)(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})) &= 0 \\ v_k^2 \dot{p}_k + \chi b v_k^2 \dot{p}_k + (\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \mathbf{W}_k) + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \mathbf{W}_k) + \frac{\mu}{R^3} (\mathbf{r}, \mathbf{W}_k) - \frac{3\mu}{R^3} ((O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{W}_k)(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

$$k=0,1,2,\dots$$

Здесь V_k и W_k – ортонормированные собственные формы. В соответствии с методом разделения движений Вильке [1] в уравнениях (4) отброшены инерционные члены, т.к. используется квазистатическая постановка задачи определения деформаций. Формы, найденные Рэлеем [2] для тонкой полусферической оболочки можно представить в цилиндрических координатах в виде:

$$\begin{aligned} V_k &= (U_k \sin k\varphi, V_k \cos k\varphi, W_k \sin k\varphi), \\ W_k &= (U_k \cos k\varphi, -V_k \sin k\varphi, W_k \cos k\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (5) позволяют упростить уравнения (4) и привести их к виду:

$$\begin{aligned} v_0^2 q_0 + \chi b v_0^2 \dot{q}_0 &= -2\dot{\omega}_3 b_{021}, \\ v_1^2 q_1 + \chi b v_1^2 \dot{q}_1 &= -[b_{123} + b_{132}](\omega_2 \omega_3 - 3\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3) + \dot{\omega}_1 [b_{123} - b_{132}], \\ v_1^2 p_1 + \chi b v_1^2 \dot{p}_1 &= -[b_{123} + b_{132}](\omega_1 \omega_3 - \mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3) - \dot{\omega}_2 [b_{123} - b_{132}], \\ v_2^2 q_2 + \chi b v_2^2 \dot{q}_2 &= -2(\omega_1 \omega_2 - 3\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2) b_{212}, \\ v_2^2 p_2 + \chi b v_2^2 \dot{p}_2 &= -[\omega_1^2 - \omega_2^2 - 3\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] b_{212}, \\ v_k^2 q_k + \chi b v_k^2 \dot{q}_k &= 0, \quad k \geq 3, \\ v_k^2 p_k + \chi b v_k^2 \dot{p}_k &= 0, \quad k \geq 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) имеет приближенное решение:

$$\begin{aligned} q_0 &= q_{00} - \chi b \dot{q}_{00}, \quad q_{00} = -2v_0^{-2} \dot{\omega}_3 b_{021}, \quad p_0 = 0, \\ q_1 &= q_{10} - \chi b \dot{q}_{10}, \quad q_{10} = v_1^{-2} [-[b_{123} + b_{132}](\omega_2 \omega_3 - 3\mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3) + \dot{\omega}_1 [b_{123} - b_{132}]], \\ p_1 &= p_{10} - \chi b \dot{p}_{10}, \quad p_{10} = -v_1^{-2} [[b_{123} + b_{132}](\omega_1 \omega_3 - \mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3) + \dot{\omega}_2 [b_{123} - b_{132}]], \\ q_2 &= q_{20} - \chi b \dot{q}_{20}, \quad q_{20} = -2v_2^{-2} (\omega_1 \omega_2 - 3\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2) b_{212}, \\ p_2 &= p_{20} - \chi b \dot{p}_{20}, \quad p_{20} = -v_2^{-2} [\omega_1^2 - \omega_2^2 - 3\mu R^{-3} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] b_{212}, \\ q_i &= p_i = 0, \quad i \geq 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Для изучения движения системы как целого используются уравнения Рауса и канонические переменные Андуайе [1] $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (рис 2).

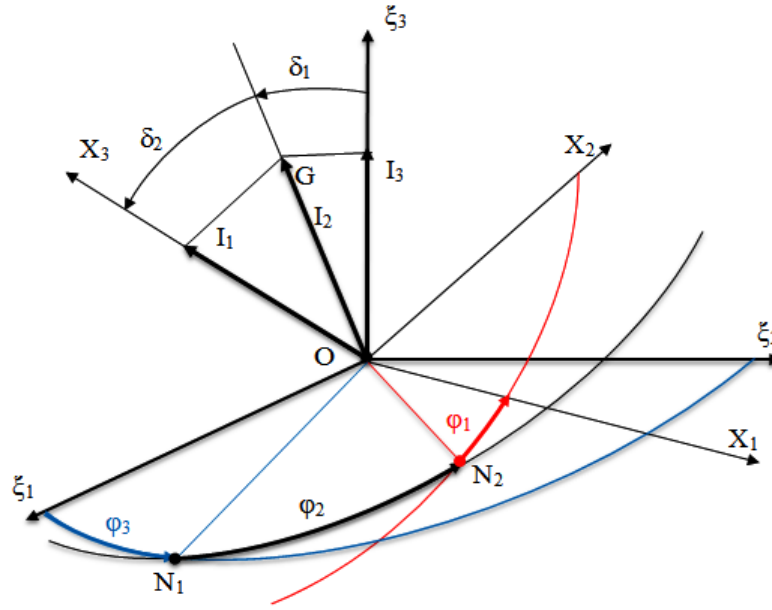


Рис 2. Переменные Андуайе

Уравнения невозмущенного движения получаются при $\mathbf{u}=0$ (спутник – твердый, деформаций нет):

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_i &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varphi_i} = 3\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varphi_i}, \quad i=1,2,3 \\
 \dot{\varphi}_1 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial I_1} = \dot{\varphi}_{10} - 3\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial I_1}, \quad \dot{\varphi}_{10} = I_1 A^{-1} C^{-1} (A-C) \\
 \dot{\varphi}_2 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial I_2} = \dot{\varphi}_{20} - 3\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial I_2}, \quad \dot{\varphi}_{20} = A^{-1} I_2 \\
 \dot{\varphi}_3 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial I_3} = -3\mu R^{-3}(A-C)\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial I_3}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Они описывают движение твердого спутника относительно центра масс как прецессию оси симметрии вокруг вектора кинетического момента \mathbf{G} , в свою очередь прецессирующего вокруг нормали к плоскости орбиты [3].

Уравнения Рауса, учитывающие возмущения от деформаций будут иметь вид:

$$\dot{I}_i = -\nabla_{\varphi_i} \tilde{R}^* + \mu R^{-3} \left\{ \int_{\Omega_2} 3(\nabla_{\varphi_i} (O^{-1} \mathbf{R}^0), \mathbf{r})(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u}) \rho_2 dx + \int_{\Omega_2} 3(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})(\nabla_{\varphi_i} (O^{-1} \mathbf{R}^0), \mathbf{u}) \rho_2 dx \right\} \tag{9}$$

$$\text{где} \quad \tilde{R}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{G}, J_0^{-1} \mathbf{G}) - \frac{1}{2}(\mathbf{G}, J_0^{-1} J_1 J_0^{-1} \mathbf{G}) - (\mathbf{G}, J_0^{-1} \mathbf{G}_u),$$

$$\mathbf{G}_u = \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \dot{\mathbf{u}} \rho dx,$$

J_0 - тензор инерции недеформированного спутника, $J_1[\mathbf{u}]$ - линейная по \mathbf{u} компонента тензора инерции.

Мы предполагаем спутник быстро закрученным. В этом случае члены выражений (7), возникающие вследствие действия сил инерции, существенно превосходят члены возникающие вследствие гравитации (приливные). Поэтому эволюцию вращений можно разбить на два этапа – быструю и медленную приливную.

Вначале, в § 5 рассматривается быстрая эволюция. Влиянием гравитационных приливов на этом этапе пренебрегаем. Тогда получаем, что

$$\dot{I}_2 = 0, \quad \dot{I}_3 = 0$$

то есть переменные I_2, I_3 не эволюционируют. После усреднения по быстрой переменной $\varphi_{10} = \dot{\varphi}_{10}t$ (угол прецессии оси симметрии спутника вокруг вектора кинетического момента), получим

$$\dot{I}_1 = \chi b A^{-5} C^{-1} \rho_2 (C - A) I_1 (I_2^2 - I_1^2) [4(I_2^2 - I_1^2) \lambda_2 + I_1^2 \lambda_1], \quad (10)$$

где

$$\lambda_1 = v_1^{-2} [b_{123} + (2AC^{-1} - 1)b_{132}]^2 > 0, \\ \lambda_2 = v_2^{-2} b_{212}^2 > 0.$$

Из уравнения (10) видно, что знак производной \dot{I}_1 определяется членом $(C-A)$. Если $C > A$, то производная $\dot{I}_1 > 0$ и переменная I_1 монотонно возрастает, в случае $C < A$ производная $\dot{I}_1 < 0$ и переменная I_1 монотонно убывает. Стационарными движениями уравнения (10) будут $I_1 = I_2$ и $I_1 = 0$. Из уравнений в вариациях следует, что первое стационарное движение $I_1 = I_2$ асимптотически устойчиво при $C > A$ и неустойчиво при $C < A$, а второе стационарное движение $I_1 = 0$ асимптотически устойчиво при $C < A$ и неустойчиво при $C > A$.

Итак, в результате быстрой эволюции вектор кинетического момента спутника \mathbf{G} будет либо при $C > A$ стремиться занять положение вдоль оси симметрии Sx_3 , либо при $C < A$ стремиться занять положение в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

В § 6 рассматривается медленная эволюция под действием гравитационных приливов. Быстрая эволюция считается закончившейся. Изучается случай $C > A$, поэтому принято $I_1 = I_2$, $\varphi_1 = 0$. Уравнения Рауса приводятся к виду:

$$\dot{I}_i = \mu R^{-3} \left\{ \int_{\Omega_2} 3(\nabla_{\varphi_i}(O^{-1}\mathbf{R}^0), \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{u})\rho_2 dx + \int_{\Omega_2} 3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(\nabla_{\varphi_i}(O^{-1}\mathbf{R}^0), \mathbf{u})\rho_2 dx \right\}, \quad i = 2, 3,$$

и после подстановки решений уравнений для модальных переменных и отбрасывания всех недиссипативных членов, принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_i = 3\chi b \mu R^{-3} \rho_2 \left\{ 3\mu_1 \left[[\mu R^{-3}(\gamma_1\gamma_3)] \cdot \frac{\partial(\gamma_1\gamma_3)}{\partial\varphi_i} + [\mu R^{-3}\gamma_2\gamma_3] \cdot \frac{\partial(\gamma_2\gamma_3)}{\partial\varphi_i} \right] + \right. \\ \left. + 3\mu_2 \left[[\mu R^{-3}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)] \cdot \frac{\partial(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{\partial\varphi_i} + 4[\mu R^{-3}\gamma_1\gamma_2] \cdot \frac{\partial(\gamma_1\gamma_2)}{\partial\varphi_i} \right] \right\}, \quad i = 2, 3 \end{aligned} \quad (11)$$

Усредняя уравнения (11) по быстрым переменным $\varphi_{20} = \dot{\varphi}_{20}t$ (угол φ_2 описывает прецессию оси симметрии спутника вокруг вектора кинетического момента \mathbf{G}), $\tau = \omega_0 t$, приведем уравнения (11) к виду

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 = -k \left\{ I_2 \left[\sin^4 \delta_1 (\mu_1 - 4\mu_2) \Phi_1(e) + [\mu_1 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 + 4\mu_2 (\cos^4 \delta_1 - 1)] \Phi_2(e) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4\mu_2 \Phi_3(e) \right] + C\omega_0 \cos \delta_1 \left[\sin^2 \delta_1 (4\mu_2 - \mu_1) \Phi_4(e) - 4\mu_2 \Phi_5(e) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 = -k \left\{ C\omega_0 \sin^2 \delta_1 \left[3\sin^2 \delta_1 (\mu_2 - \mu_1) \Phi_6(e) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(3 \left[\frac{1}{2} \mu_1 + \cos^2 \delta_1 (\mu_2 - \mu_1) \right] + \mu_0 (1 - 3\sin^2 \delta_1) \right) \Phi_7(e) \right] + \right. \\ \left. + I_2 \cos \delta_1 \left[\sin^2 \delta_1 (4\mu_2 - \mu_1) \Phi_2(e) - 4\mu_2 \Phi_3(e) \right] + \right. \\ \left. + C\omega_0 \left[4\sin^4 \delta_1 (\mu_2 - \mu_1) \Phi_8(e) + [\cos^2 \delta_1 (4\mu_2 - \mu_1) + \mu_1] \Phi_7(e) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где обозначено $k = 9\chi b \mu^2 p^{-6} \rho_2 C^{-1}$.

Уравнения (12) позволяют изучать эволюцию вращений на временах порядка периода прецессии вектора \mathbf{G} вокруг нормали к плоскости орбиты центра масс. Однако, они все еще сложны для исследования. Поэтому усредним их по переменной φ_3 (углу прецессии кинетического момента относительно нормали к орбите).

Предварительно выведем усредненное по $\tau = \omega_0 t$ уравнение для угла φ_3 :

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{3}{2} \mu p^{-3} (1-e^2)^{3/2} (A-C) I_2^{-1} \cos \delta_1.$$

Из данного уравнения видно, что переменная φ_3 изменяется гораздо быстрее угла δ_1 , кроме того, угол δ_1 в течение одного оборота вектора \mathbf{G} вокруг нормали к плоскости орбиты совершает колебания с частотами $2\dot{\varphi}_3$ и $4\dot{\varphi}_3$ относительно некоторого среднего значения $\tilde{\delta}_1$. Поэтому усредним уравнение (12) по φ_3 на периоде π .

Усредненные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= -k \left\{ I_2 \Phi_1(e) \left[\mu_1 (1+2x^2 - 3x^4) + 4\mu_2 (3+2x^2 + 3x^4) \right] - C\omega_0 \Phi_4(e) x \left[4\mu_2 (1+x^2) + \mu_1 (1-x^2) \right] \right\}, \\ \dot{I}_3 &= -k \left\{ 4I_2 \Phi_1(e) x \left[(4\mu_2 - \mu_1)(1-x^2) - 8\mu_2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + C\omega_0 \Phi_4(e) \left[(\mu_2 - \mu_1)(1-x^2)^2 + 2 \left[(4\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$x = \cos \tilde{\delta}_1.$$

В предположении малости орбитальной угловой скорости по сравнению с угловой скоростью вращения спутника, то есть

$$\varepsilon_1 = \frac{C\omega_0}{I_2} \approx 1,$$

а следовательно

$$C\omega_0 = \varepsilon_1 I_2,$$

получим уравнение для x :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k \left\{ 4\Phi_1 x \left[4\mu_2 (1-x^2 - 2) - \mu_1 (1-x^2) \right] + \Phi_1 x \left[4\mu_2 (3-2x^2 + 3x^4) + \mu_1 (1+2x^2 - 3x^4) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_1 \Phi_4 \left[(1-x^2)^2 (\mu_2 - \mu_1) + 2 \left[x^2 (4\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \right] \right] - \varepsilon_1 \Phi_4 x^2 \left[4\mu_2 (x^2 + 1) + \mu_1 (1-x^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Из вида уравнения (13) можно вывести, что $\dot{I}_2 < 0$ и I_2 убывает – осевое вращение спутника замедляется. Из уравнения (14) следует, что знак \dot{x} определяется двумя первыми слагаемыми (14). Выражение в квадратных скобках положительно при $-1 < x < 1$, поэтому знак выражения определяется знаком x . Если $x > 0$, следовательно, $\dot{x} < 0$, и $\cos \tilde{\delta}_1$ убывает, то есть растет угол между \mathbf{G} и нормалью к плоскости орбиты, вектор \mathbf{G} наклоняется к плоскости орбиты. Если же $x < 0$, то $\dot{x} > 0$, следовательно $\cos \tilde{\delta}_1$ возрастает и угол $\tilde{\delta}_1$ уменьшается. Поскольку угол $\tilde{\delta}_1$ – тупой, то при убывании угла происходит поворот из обратного вращения в прямое.

Определим стационарные значения угла $\tilde{\delta}_1$, обозначив его через $\tilde{\delta}_{10}$. В этом случае в первом приближении получим:

$$x_0 \approx \varepsilon_1 \frac{\Phi_4(e)[\mu_1 + \mu_2]}{\Phi_1(e)[4\mu_2 + 3\mu_1]}, \quad \tilde{\delta}_{10} \approx \arccos(x_0).$$

Заметим, что уравнение (13) имеет еще два стационарных значения $x_1 = -1, x_2 = 1$. Из уравнений в вариациях следует, что оба они неустойчивы.

Третья глава рассматривает задачу об эволюции поступательно-вращательного движения вязкоупругого спутника, имеющего форму шара и движущегося вокруг притягивающего центра (рис 3).

Движение точек шара задаётся векторным полем $\xi = \xi(\mathbf{r}, t)$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(t) + O(t)(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \quad (15)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \xi \rho dx, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u} \rho dx = \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{u} dx = 0,$$

$$M = \int_{\Omega} \rho dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

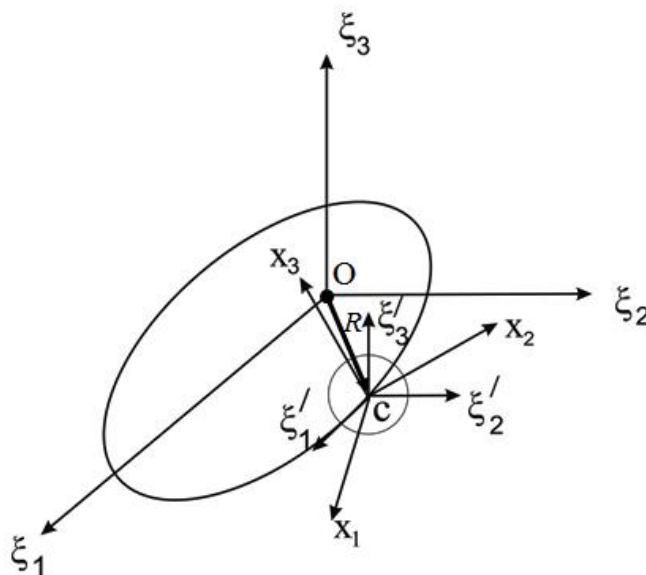


Рис 3. Инерциальная, Кёнигова и замороженная системы координат

Соотношения (15) однозначно определяют радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ центра масс C деформированного шара и систему координат $Cx_1x_2x_3$, относительно которой шар в

интегральном смысле не вращается. Матрица $O(t)$ определяет переход от системы координат $Cx_1x_2x_3$, связанной с шаром, к осям Кёнига $C\xi_1\xi_2\xi_3$.

Для описания поступательно-вращательного движения шара используются переменные Делоне [4]:

$$L = M\sqrt{\mu a}; \quad \Lambda = M\sqrt{\mu a(1-e^2)}; \quad \Lambda \cos i = H;$$

$$l = w - e \sin w; \quad g = \omega, \quad h = \Omega,$$

и Андуайе – $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Уравнения движения представляются в форме уравнений Рауса

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -\nabla_l \tilde{R}; & \dot{\Lambda} &= -\nabla_\Lambda \tilde{R}; & \dot{H} &= -\nabla_H \tilde{R}; \\ \dot{l} &= -\nabla_l \tilde{R}; & \dot{g} &= -\nabla_g \tilde{R}; & \dot{h} &= -\nabla_h \tilde{R}; \\ \dot{\varphi}_i &= -\nabla_{\varphi_i} \tilde{R}; & \dot{\varphi}_i &= -\nabla_{I_i} \tilde{R}; & i &= 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \tilde{R}) - \nabla_{\mathbf{u}} \tilde{R} - \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D + \lambda_1 \right) \delta \mathbf{u} + \lambda_2 \text{rot} \delta \mathbf{u} \right] dx = 0, \quad (17)$$

причем уравнение (17) совпадает с вариационным принципом Даламбера-Лагранжа и содержит два неопределённых множителя Лагранжа λ_1 и λ_2 , а функционал Рауса имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= -\frac{\mu^2 M^3}{2L^2} + \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mu}{R^3} [(\mathbf{r} + \mathbf{u})^2 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{O}(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2] \rho dx + E[\mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее в работе показано, что оба неопределённых множителя Лагранжа равны нулю, а уравнение, определяющее упругие перемещения можно преобразовать к виду:

$$-\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_1] - \varepsilon \chi \nabla E[\dot{\mathbf{u}}_1] = A^{-2} I_2^2 (\mathbf{e}_{\varphi_2} \times [\mathbf{e}_{\varphi_2} \times \mathbf{r}]) \rho - \frac{2\mu \rho}{R^3} + \frac{3\mu \rho}{R^3} [O^{-1} \mathbf{R}^0 \times [O^{-1} \mathbf{R}^0 \times \mathbf{r}]]. \quad (19)$$

Уравнение (19) – линейно, поэтому его решение можно представить как сумму частных решений

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{11}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t),$$

удовлетворяющих уравнениям

$$-\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_{11}] = A^{-2} \rho I_2^2 [\mathbf{e}_{\varphi_2} \times [\mathbf{e}_{\varphi_2} \times \mathbf{r}]];$$

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_{12}] - \chi \varepsilon \nabla E[\dot{\mathbf{u}}_{12}] &= -\frac{2\mu\rho\mathbf{r}}{R^3}; \\
-\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_{13}] - \chi \varepsilon \nabla E[\dot{\mathbf{u}}_{13}] &= -\frac{3\mu\rho}{R^3}[O^{-1}\mathbf{R}^0 \times [O^{-1}\mathbf{R}^0 \times \mathbf{r}]].
\end{aligned} \tag{20}$$

Решения (20) приведены в работе [5]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{11}(\mathbf{r}) &= \rho I_2^2 A^{-2} \Gamma_3(-\varphi_1) \Gamma_1(-\delta_2) \mathbf{u}^*(\Gamma_1(\delta_2) \Gamma_3(\varphi_1) \mathbf{r}), \\
\mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t) &= -2\mu\rho R^{-3} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)} \left[\mathbf{r}^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu} r_0^2 \right] \left(1 + \chi \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} i \right) \mathbf{r}, \\
\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi)^n \frac{\partial^n \mathbf{u}_{130}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^n},
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\mathbf{u}_{130}(\mathbf{r}, t) = -3\mu\rho R^{-3} O_1^{-1}(t) \mathbf{u}^*(O_1(t) \mathbf{r}) \left(1 + \chi \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} i \right),$$

$$O_1(t) = \Gamma_0^{-1} \Gamma_3(-\tilde{\mathcal{G}}) \Gamma_1(-i) \Gamma_3(-h) O(t), \quad \Gamma_0^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{r}) = [(B_1 \mathbf{r}, \mathbf{r}) B_2 + (B_3 \mathbf{r}, \mathbf{r}) B_4 + B_5] \mathbf{r}, \quad B_1 = \text{diag}\{b_1, b_2, b_3\},$$

$$B_2 = \text{diag}\{1, 1, 0\}, \quad B_3 = \text{diag}\{a_1, a_2, a_3\}, \quad B_4 = \text{diag}\{0, 0, 1\},$$

$$B_5 = \text{diag}\{c_1, c_2, c_3\}, \quad b_1 = -(4-3\nu-5\nu^2)\Psi(\nu),$$

$$b_2 = -(9-8\nu-5\nu^2)\Psi(\nu), \quad a_1 = 2(3-\nu)\Psi(\nu), \quad a_2 = (1+3\nu)\Psi(\nu),$$

$$\Psi(\nu) = \frac{1+\nu}{5(1-\nu)(5\nu+7)}, \quad c_1 = r_0^2 \frac{12-8\nu-12\nu^2}{35-10\nu-25\nu^2}, \quad c_2 = -r_0^2 \frac{3+18\nu-3\nu^2-10\nu^3}{35-10\nu-25\nu^2}.$$

Функция $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{r})$ описывает осесимметричную деформацию вследствие действия центробежных сил инерции; функция $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t)$ описывает сферически-симметричную деформацию, а $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t)$ - нестационарную деформацию (вследствие гравитации).

Вначале проведено исследование влияния только осесимметричной деформации на эволюцию движения шара. Уравнение для угла g после усреднения по быстрым углам l и φ_3 приводится к виду

$$\dot{g} = 3\mu\rho^2 I_2^2 A^{-2} \varepsilon \Lambda^{-1} (1-e^2)^{3/2} p^{-3} [6D_1 + D_2 (\frac{3}{2}(3-4\sin^2 i) + 4\sin^2 i - 1)].$$

Смысл этого уравнения в том, что оно описывает вращение перицентра орбиты шара, вследствие осесимметричных деформаций. Поскольку члены, определяющие

скорость изменения перицентра, не зависят от диссипативных сил, то эту эволюцию можно трактовать как быструю.

Уравнение для угла h после усреднения по углам l и φ_3 также упрощается

$$\dot{h} = \frac{3}{2} \mu \rho^2 I_2^2 A^{-2} \varepsilon \Lambda^{-1} (1-e^2)^{3/2} p^{-3} D_2 \cos i [2 - 3 \sin^2 \delta_1].$$

Данное уравнение показывает, что влияние деформаций обуславливают также быструю прецессию плоскости орбиты шара.

Исследование влияния сферически-симметричной деформации $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{r})$ показывает, что она окажет влияние на угловую скорость вращения перицентра орбиты в ее плоскости.

Четвертая глава продолжает исследования главы 3, в ней рассмотрено влияние на эволюцию третьего члена в выражении вектора упругих перемещений $\mathbf{u}_{13}(\mathbf{r})$, приведенного в главе 3 в (21), а именно, отвечающего за гравитационные приливы. В главе получены уравнения, учитывающие все виды деформаций, для упрощения они усреднены по переменным l и φ_3 и имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{I_1}{I_2} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_2 &= -nk \chi \left\{ n^{-1} A^{-1} (1-e^2)^{3/2} \left[\frac{I_2^2 + I_3^2}{2I_2} \Phi_1(e) + \frac{I_2^2 - 3I_3^2}{2I_2} \Phi_4(e, g) \sin^2 i \right] - \frac{I_3}{I_2} \Phi_2(e) \cos i \right\}; \\ \dot{I}_3 &= -nk \chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 (1-e^2)^{3/2} \left[\Phi_1(e) - \Phi_4(e, g) \sin^2 i \right] - \Phi_2(e) \cos i \right\}; \\ \dot{\varphi}_1 &= 0; \\ \dot{L} &= nk \chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 \Phi_2(e) \cos i - (1-e^2)^{-3/2} \Phi_3(e) \right\}; \\ \dot{\Lambda} &= nk \chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 (1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \cos i - \Phi_2(e) \right\}; \\ \dot{H} &= -\dot{I}_3; \\ \dot{g} &= K \Lambda^{-1} [6D_1 + D_2 (\frac{3}{2} (3 - 4 \sin^2 i) + 4 \sin^2 i - 1)] \\ \dot{h} &= \frac{K}{2} D_2 \Lambda^{-1} \cos i [2 - 3 \sin^2 \delta_1] - \frac{K}{2} A^{-1} I_3 \Lambda^{-1} (1-e^2)^{3/2} \left(\frac{3}{2} e^2 + \frac{1}{4} e^4 \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Из седьмого уравнения (22) следует, что проекция кинетического момента системы на ось ξ_3 Кёниговой системы координат $C \xi_1 \xi_2 \xi_3$ сохраняется:

$$H + I_3 = H_0 \equiv \text{const.}$$

Сохраняется также вектор кинетического момента системы

$$\mathbf{A} + \mathbf{G} = \text{const.}$$

Здесь через \mathbf{A} обозначен вектор орбитального кинетического момента, а через \mathbf{G} - вращательного. Из системы (22) видно, что угол φ_1 не эволюционирует, углы g и h быстро меняются, а эволюция остальных переменных происходит медленно, так как их производные пропорциональны малому параметру χ). Это позволяет усреднить систему (22) еще раз по углу g , вследствие чего она приобретет вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{I_1}{I_2} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_2 &= -nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} (1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \left[\frac{I_2^2 + I_3^2}{2I_2} + \frac{I_2^2 - 3I_3^2}{4I_2} \sin^2 i \right] - \frac{I_3}{I_2} \Phi_2(e) \cos i \right\}; \\ \dot{I}_3 &= -nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 (1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 i \right] - \Phi_2(e) \cos i \right\}; \\ \dot{\varphi}_1 &= 0; \\ \dot{L} &= nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 \Phi_2(e) \cos i - (1-e^2)^{-3/2} \Phi_3(e) \right\}; \\ \dot{\Lambda} &= nk\chi \left\{ n^{-1} A^{-1} I_3 (1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \cos i - \Phi_2(e) \right\}; \\ H + I_3 &= H_0 \equiv \text{const.} \end{aligned} \tag{23}$$

Будем искать стационарное решение (23). Из условия $\dot{\Lambda} = 0$ выведем, что

$$n^{-1} A^{-1} I_3 = \frac{\Phi_2(e)}{(1-e^2)^{3/2} \Phi_1(e) \cos i}, \tag{24}$$

а из $\dot{L} = 0$ с учетом (24) получим $\Phi_2^2(e) - \Phi_1(e)\Phi_3(e) = 0$, а потому $e = 0$ что в свою очередь влечет $L = \Lambda$. Это означает, что орбита центра масс шара в стационарном движении становится круговой. Из (24) также следует $I_3 A^{-1} \cos i = n$, а это означает, что угловая скорость вращения шара совпадает с его орбитальной угловой скоростью, а вектор собственного кинетического момента шара ортогонален плоскости орбиты. Заметим, что эффекты долгопериодической эволюции непосредственно связаны

именно с диссипацией энергии в вязкоупругом материале шара, что отражается в наличии коэффициента χ , характеризующего вязкость в правых частях уравнений (22).

Пятая глава. Здесь ставится задача о вычислении частот приливов на Земле вследствие влияния Луны и Солнца (рис 4). Земля представляется как осесимметричное тело, состоящее из твердого ядра и вязкоупругой мантии. На внутренней границе мантии перемещения отсутствуют, а внешняя граница свободна. Начало инерциальной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ помещается в притягивающий центр (Солнце), с барицентром C системы Земля - Луна связываются оси Кёнига $O\xi'_1\xi'_2\xi'_3$.

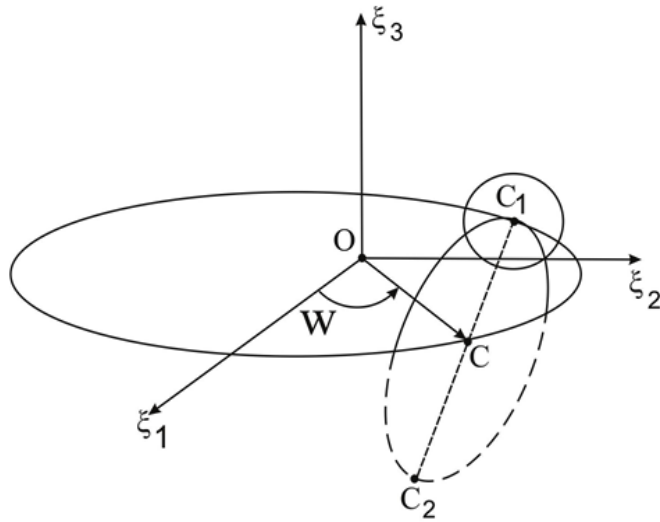


Рис 4. Барицентр системы Земли – Луна, движущийся по эллиптической орбите вокруг Солнца

Задается движение барицентра:

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_C^0 R_C, \quad R_C = p(1 + e \cos \vartheta)^{-1}.$$

Аналогично представим вектор $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_{21}^0 R_{21}$ - от Луны к Земле, причем

$$\mathbf{R}_{21}^0 = \begin{pmatrix} \cos w_1 \cos \Omega_1 - \sin w_1 \sin \Omega_1 \cos i \\ \cos w_1 \sin \Omega_1 + \sin w_1 \cos \Omega_1 \cos i \\ \sin w_1 \sin i \end{pmatrix}, \quad w_1 = \vartheta_1 + \omega_1.$$

Потенциальную энергию Земли представим в виде

$$\Pi = \Pi_S + \Pi_M$$

$$\Pi_S = - \int_{\Omega} \frac{fM\rho}{[(O^{-1}\mathbf{R}_C + O^{-1}\mathbf{R}_1 + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} dx \quad (25)$$

$$\Pi_M = - \int_{\Omega} \frac{fm_2\rho}{[(O^{-1}\mathbf{R}_{21} + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} dx.$$

Здесь Π_S - потенциальная энергия Земли в гравитационном поле Солнца, а Π_M - в гравитационном поле Луны, Ω - область, занимаемая недеформированной Землей в осях $C_1x_1x_2x_3$, M – масса Солнца, m_1 - масса Земли, m_2 - масса Луны, $O^{-1}(t)$ - матрица перехода от инерциальной системы координат с началом в центре масс Земли, к системе координат $C_1x_1x_2x_3$, жестко связанной с твердым ядром Земли.

Из принципа Даламбера – Лагранжа, применяя модальный подход, выводим квазистатические уравнения для модальных переменных:

$$v_{20}^2 q_{20} + \chi b v_{20}^2 \dot{q}_{20} + 2\kappa_{20} \omega_3 \dot{p}_{20} = \frac{3fm_2}{R_{21}^3} (\gamma_1 \gamma_2) (b_{2021} + b_{2012}) + \frac{3fM}{R^3} (\kappa_1 \kappa_2) (b_{2021} + b_{2012}) \quad (26)$$

$$v_{20}^2 p_{20} + \chi b v_{20}^2 \dot{p}_{20} - 2\kappa_{20} \omega_3 \dot{q}_{20} = \frac{3fm_2}{R_{21}^3} (c_{2011} \gamma_1^2 + c_{2022} \gamma_2^2) + \frac{3fM}{R^3} (c_{2011} \kappa_1^2 + c_{2022} \kappa_2^2)$$

В нашем случае, для получения качественного эффекта, мы ограничиваемся только двумя модальными переменными q_{20} и p_{20} , которые описывают колебания на формах V_{20} и W_{20} , которые достаточно хорошо моделируют приливные горбы Земли. Опуская малые слагаемые, возникающие вследствие кориолисового ускорения, перепишем уравнения (26) в векторном виде

$$v_{20}^2 \mathbf{p} + \chi b v_{20}^2 \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{p} = (q_{20}, p_{20})^T,$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{3fm_2}{R_{21}^3} (\gamma_1 \gamma_2) (b_{2021} + b_{2012}) + \frac{3fM}{R^3} (\kappa_1 \kappa_2) (b_{2021} + b_{2012}) \\ \frac{3fm_2}{R_{21}^3} (c_{2011} \gamma_1^2 + c_{2022} \gamma_2^2) + \frac{3fM}{R^3} (c_{2011} \kappa_1^2 + c_{2022} \kappa_2^2) \end{pmatrix}.$$

Приближенное решение уравнения (27) может быть записано в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \chi b \dot{\mathbf{p}}_0 \quad (28)$$

где \mathbf{p}_0 - решение уравнения $v_{20}^2 \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}$, то есть $\mathbf{p}_0 = v_{20}^{-2} \mathbf{F}$.

Разложим R_{21} и R в ряды по степеням эксцентриситета и ограничимся слагаемыми не выше первого порядка. Тогда справа в равенствах (28) получим ряды гармонических функций вида

$$\sum_i (A_i \cos \alpha_i + B_i \sin \alpha_i), \quad (29)$$

имеющих аргументами α_i комбинации углов φ, w, w_1, θ , $w = \mathcal{G} + \omega$. Эти комбинации и будут определять частоты приливных деформаций. В частности, имеются комбинации следующего вида

$$\begin{aligned} 2\varphi, \quad 2w_1, \quad \theta, \\ w_1 \pm w \pm \theta, \quad 2w \pm \theta, \quad 2w_1 \pm \theta, \end{aligned}$$

определяющие периоды в половину суток, половину месяца, период нутации оси Земли (чандлеровский период), два близких к месяцу, два близких к полугодию. Эти периоды согласуются с известными периодами океанических и твердотельных приливов Земли. Кроме того, имеется также большое количество более сложных комбинаций, соответствующих периодам, близким к полусуточным, например

$$\begin{aligned} 2\varphi \pm 2w_1, \quad 2\varphi \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2\theta, \quad 2\varphi \pm 2w_1 \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2w_1 \pm 2\theta, \\ 2\varphi \pm w \pm w_1, \quad 2\varphi \pm w \pm w_1 \pm \theta, \quad 2\varphi \pm w \pm w_1 \pm 2\theta, \\ 2\varphi \pm 2w, \quad 2\varphi \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2\theta, \quad 2\varphi \pm 2w \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2w \pm 2\theta, \\ 2\varphi + w_1 - \omega_1, \quad 2\varphi - w_1 + \omega_1, \quad 2\varphi + 3w_1 - \omega_1, \quad 2\varphi - 3w_1 + \omega_1, \\ 2\varphi \pm w_1 \pm \omega_1 \pm \theta, \quad 2\varphi + 3w_1 - \omega_1 \pm \theta, \quad 2\varphi - 3w_1 + \omega_1 \pm \theta, \\ 2\varphi \pm w_1 \pm \omega_1 \pm 2\theta, \quad 2\varphi + 3w_1 - \omega_1 \pm 2\theta, \quad 2\varphi - 3w_1 + \omega_1 \pm 2\theta, \\ 2\varphi \pm \omega \pm w_1, \quad 2\varphi + 2w - \omega \pm w_1, \quad 2\varphi - 2w + \omega \pm w_1, \\ 2\varphi \pm 2w + w_1 - \omega_1 \pm \theta, \quad 2\varphi \pm 2w - w_1 + \omega_1 + \theta, \quad 2\varphi \pm 2w + w_1 - \omega_1 - \theta, \dots \end{aligned}$$

полумесечным

$$\begin{aligned} 2w_1 \pm \theta, \quad 2w_1 + w - \omega, \quad 2w_1 - w + \omega, \quad 2w_1 + w - \omega + \theta, \quad 2w_1 - w + \omega + \theta, \\ 2w_1 + w - \omega - \theta, \quad 2w_1 - w + \omega - \theta, \end{aligned}$$

месячным

$$w_1 + 2w - \omega_1 \pm \theta, \quad w_1 + 2w + \omega_1 \pm \theta,$$

и чандлеровским

$$\theta + w_1 - \omega_1, \quad \theta - w_1 + \omega_1, \quad \theta + w_1 - \omega_1, \quad \theta - w_1 + \omega_1.$$

Имеются также и комбинации с другими периодами, например:

$$3w_1 \pm \omega_1, \quad 3w_1 \pm \omega_1 \pm \theta,$$

$$\theta + w - \omega, \quad \theta - w + \omega.$$

Хотя уравнения (28) позволяют также выписать формулы для амплитуд приливов, соответствующих различным периодам, но эти коэффициенты требуют знания собственных форм колебаний Земли, точной фигуры Земли, коэффициентов Ламе, диссипативного коэффициента, и поэтому, более просто, могут определяться из результатов наблюдений. Как известно, фигура Земли в результате приливных деформаций (океанических и твердотельных приливов) является меняющейся во времени и стремится обрести форму реальной поверхности, именуемой геоидом. Гравитационный потенциал такой Земли можно приближенно получить из (25) заменив вектор перемещений u выражением вида (29), где углы можно с большой степенью точности считать известными функциями времени. Заметим также, что повышение порядка разложений R_{21} и R в ряды по степеням эксцентриситета в (28) добавит новые слагаемые в (29) и, соответственно, новые частоты.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Показано, что в задаче об эволюции вращений спутника относительно центра масс в результате быстрой эволюции вектор кинетического момента расположится вдоль оси симметрии спутника (если осевой момент инерции больше экваториального) и в экваториальной плоскости, если наоборот.
2. Получено, что в результате медленной диссипативной эволюции под действием приливных моментов будет происходить замедление быстрого осевого вращения, а вектор кинетического момента будет наклоняться к плоскости орбиты, а в случае обратного вращения переворачиваться в прямое вращение.
3. В задаче о поступательно-вращательном движении шарообразного спутника выяснено, что вследствие осесимметричных деформаций, возникающих из-за сил

центробежных сил инерции, происходит быстрая эволюция орбиты спутника заключающаяся в прецессии плоскости орбиты (т.е. изменении долготы восходящего узла), а также вращении перицентра орбиты в ее плоскости.

4. Установлено, что медленная эволюция вследствие гравитационно-приливных моментов приводит орбиту шара к круговой, при этом вектор кинетического момента спутника становится ортогональным к плоскости орбиты, а угловая скорость вращения шара становится равной его орбитальной угловой скорости.
5. Получены приближенные значения частот лунно-солнечных приливов на основе модели деформируемой Земли, состоящей из твердой и вязкоупругой частей.

Основные публикации по теме диссертации:

В изданиях, рекомендованных перечнем ВАК:

- 1) Марков Ю.Г., До Чунг Бо, Скоробогатых И.В. О влиянии упругих деформаций на поступательно-вращательное движение тела в центральном гравитационном поле сил. – Космонавтика и ракетостроение, 2015, вып. 1 (80), с. 106 – 113.
- 2) До Чунг Бо, Марков Ю.Г., Скоробогатых И.В. Долгопериодическая эволюция поступательно-вращательного движения деформируемого спутника. – Космонавтика и ракетостроение, 2016, вып. 1 (86), с. 5 – 11.
- 3) Скоробогатых И.В., До Чунг Бо. О частотах лунно-солнечных приливов деформируемой Земли. – Космонавтика и ракетостроение, 2014, вып. 1 (74), с. 113 – 117.

В других изданиях:

- 4) До Чунг Бо. Динамика космического аппарата с деформируемыми элементами в режиме ориентации. – Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль. 5–9 июля 2013 года, с. 93.
- 5) Марков Ю.Г., До Чунг Бо, Скоробогатых И.В. О влиянии упругих деформаций на движение тела в центральном гравитационном поле сил. – Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль. 3–7 июля 2015 года, с. 94.

Список использованных источников:

1. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. - М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1986. 192 с.
2. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. - М.: ГИТТЛ, 1955, т. 1, 2, 504 с., 475 с.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд. МГУ, 1975. 308 с.
4. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные методы и задачи. - М.: Наука, 1968. 800 с.
5. *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Часть I. - М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. 215 с.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Множительный центр МАИ (НИУ)

Заказ от «__» _____ 2016 г. Тираж __ экз.