

На правах рукописи



**Гарибян Борис Александрович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
РАСЩЕПЛЕНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре «Математическая кибернетика»  
ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)

**Научный руководитель:** доктор технических наук, профессор  
**Спирин Геннадий Георгиевич**

**Официальные оппоненты:** **Казарян Мишик Айразатович**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ведущий научный сотрудник,  
ФГБУН «Физический институт им. П.Н.  
Лебедева Российской академии наук»

**Благонравов Лев Александрович**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, доцент, ФГБОУ ВО «Московский  
государственный университет им. М.В.  
Ломоносова» (МГУ)

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВО «Российский государственный  
университет нефти и газа им. И.М. Губкина  
(национальный исследовательский  
университет)»

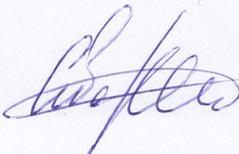
Защита состоится «19» мая 2017 г. в 12 ч. на заседании Диссертационного  
совета Д 212.125.04 ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт»  
(национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, Москва,  
А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского  
авиационного института или по ссылке: <http://www.mai.ru/events/defence>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Отзывы просим отправлять в 2-х экземплярах, заверенных печатью, по  
адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет  
МАИ.

**Ученый секретарь**  
диссертационного совета Д 212.125.04  
кандидат физико-математических наук, доцент

 Н.С. Северина

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Работа посвящена математическому моделированию, разработке приближенно-аналитических и численных методов планирования теплофизического эксперимента, проводимого методом мгновенного источника, методам идентификации по восстановлению эффективных характеристик теплопереноса, а также методам их теоретического прогнозирования – исходя из феноменологических представлений о структуре и свойствах исследуемых материалов.

### **Актуальность работы.**

В мире ежедневно синтезируются сотни новых веществ, в том числе дисперсных поли-, термоизоляционных *неоднородных материалов* (НМ), которые используются в разных областях техники. Изучение тепловых процессов в НМ требует знания их *теплофизических характеристик* (ТФХ), а значит и совершенствования методов прогнозирования и измерения. Актуальным сегодня является комплексное исследование, когда теоретическими методами дается прогноз интересующей характеристики, который уточняется численным моделированием, и затем корректируется экспериментально при минимальном количестве опытов.

Подготовка и проведение *теплофизического эксперимента* (ТФЭ) требует разработки (или уточнения) математических моделей теплопереноса, а также методов и алгоритмов, позволяющих получать распределения температурных полей, а также оценивать значения ТФХ на основе решения задач идентификации. В основе многих физических методов исследования ТФХ веществ и материалов лежат упрощенные задачи теплопроводности, имеющие аналитическое решение. Новые возможности для построения и исследования более сложных математических моделей ТФЭ дает использование приближенно-аналитических и особенно численных методов. В этом случае методология проведения ТФЭ представляет собой последовательность процедур: модель, алгоритм, программа, эксперимент, идентификация.

Планирование ТФЭ и в частности решение индуктивной задачи в существенной степени зависит от физического метода проведения эксперимента. В работе исследуется контактный метод *мгновенного нагрева линейного источника теплоты* (МНЛИТ) оценивания ТФХ веществ, который предлагается применять к твердым (мягким и жестким) материалам. До проведения ТФЭ необходимо изучить влияющие факторы, разработать математическую модель, описывающую тепловой процесс в системе, с учетом контактных зазоров, разностные схемы и подобрать метод ее реализации, сформировать методы и соответствующие алгоритмы, позволяющие по результатам численного моделирования: а) оценить влияние фактора наличия в тепловой системе *контактного термического сопротивления* (КТС); б) идентифицировать (восстановить) коэффициент теплопроводности образца. Помимо этого, целесообразно сделать теоретический прогноз *эффективного коэффициента теплопроводности* (ЭКТ), для чего необходимо разработать математическую модель теплопереноса в рамках *элементарной ячейки* (ЭЯ) НМ, сформировать методы и алгоритмы, позволяющие по результатам численного моделирования: а) получить распределение температурного поля в ЭЯ; б) рассчитать ЭКТ ЭЯ, необходимого для последующего уточнения ЭКТ образца НМ.

Работа посвящена математическому моделированию ТФЭ, проводимого методом МНЛИТ, относящимся к классу нестационарных и группе зондовых методов источника постоянной мощности. Среди методов данной группы распространение получили экспресс-методы мгновенного источника (плоского и линейного), реализующие граничные условия II рода, и позволяющие на начальной стадии нагрева по «температурному отклику» исследуемого образца с высокой точностью получить комплекс его ТФХ. В методе МНЛИТ зондирование объекта проводится серией одиночных ступенчатых импульсов, а малоинерционный источник в форме тонкой ( $\varnothing \sim 5 \div 10$  мкм) цилиндрической нити сам же является зондом. Применение метода к твердым и особенно жестким материалам связано со значительными трудностями, вызванными, прежде всего, перегревом нити источника за счет наличия в системе КТС, искажающего полезный сигнал и являющегося основным источником погрешностей. Поэтому разработка и использование в экспериментах методологии, основанной на приближенных методах, позволяющей как повысить точность оценивания ЭКТ в опытах, так и уменьшить количество самих опытов, является актуальной, теоретически и практически значимой. Сложности математического моделирования данного ТФЭ связаны с наличием: разрывов ТФХ по всем координатам, контактных зазоров, наполненных газом, а также с необходимостью постановки и решения коэффициентной обратной задачи.

Математическому моделированию процессов теплопереноса, а также численным методам решения тепловых задач посвящены труды А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича, В.С. Зарубина, И.К. Волкова, Г.Н. Кувыркина, Э.М. Карташова, Г.И. Марчука, Н.Н. Яненко, В.Ф. Формалева, Б.Н. Четверушкина, Д.Л. Ревизникова, Д. Писмена и Г. Рэчфорда и др.; решению обратных задач, в том числе задач идентификации – труды А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, О.М. Алифанова, С.И. Кабанихина, В.Б. Гласко, В.М. Юдина, В.Ф. Формалева, С.А. Колесника, Д.В. Бэка, М.Н. Оцизика, Ц.Э. Хуанга и др.

Современные методы теоретического прогнозирования ТФХ, основаны на *теории обобщенной проводимости* (ТОП) и разрабатывались более века, начиная с работ Дж. К. Максвелла (1904), В. Рэлея (1892) и О. Винера (1909), и получили развитие в трудах К. Лихтенэкера, В.И. Оделевского, О. Кришера, А. Миснара, А.В. Лыкова, А.Ф. Чудновского. Наибольший вклад в приведение ТОП к современному виду принадлежит проф. Г.Н. Дульневу (ИТМО) и руководимой им исследовательской группе: Н.Н. Тарновскому, Ю.П. Заричняку, В.В. Новикову, Б.Л. Муратовой и др. Новые методы изучения процессов переноса основаны на теории перколяции, теории эффективных модулей механики композитов, аксиоматической ТОП, численном моделировании и пр.

Первые измерения методами источника проведены Б. Стельханом и С. Пиком (1930), а методом МНЛИТ – Альбрехтом (1932). Развитие и совершенствование модели, методики измерений, аппаратуры и т.д. началось в конце 40-х годов и принадлежит Дж.Х. Блэквеллу, П. Кунце, К. Хагену и Г. Паалю, Е. Восу и др., отечественным авторам А.Ф. Чудновскому, ученикам А.В. Лыкова – М.В. Кулакову, М.А. Каганову, а также А.М. Бутову, Л.Ф. Янкелеву, Е.Е. Вишневному и получили развитие в работах В.В. Власова, Е.С. Платунова, Спирина и др. В дальнейшем и по сегодняшний день методы мгновенного источника изучались и развиваются: М.В. Кулаковым и В.В. Власовым (г. Тамбов), затем С.В.

Пономаревым с коллегами и учениками; Г.Г. Спириным (г. Москва) и учениками; Л.П. Филипповым (г. Москва), затем С.Н. Кравчуном и О.Н. Третьяковой; А.А. Тарзимановым (г. Казань) с сотрудниками и учениками.

Автор считает своим долгом отметить значительный вклад в развитие моделей и методов тепло- массопереноса, в том числе в анизотропных телах, принадлежащий проф. В.Ф. Формалеву, который сформулировал и решил новые начально-краевые задачи (также для метода МНЛИТ), предложил формулы и алгоритм прогнозирования ЭКТ в методе ЭЯ ТОП, разработал оригинальные высокоточные экономичные численные методы и многое другое. Предлагаемая работа, по сути, является развитием идей и подходов проф. В.Ф. Формалева и проф. Г.Г. Спирина. Им автор выражает признательность за помощь и обсуждение затронутых в работе вопросов.

**Цель и задачи работы.** Целью диссертации является создание физико-математических моделей, приближенно-аналитических и численных методов, алгоритмов и соответствующего комплекса программ варианта интегрированной (численное моделирование + лабораторный эксперимент) технологии автоматизации эксперимента физического метода МНЛИТ для оценивания ЭКТ твердых материалов, а также развитие метода элементарной ячейки теории обобщенной проводимости для предварительного прогноза значений ЭКТ, путем применения интеграла энергии для осреднения температурных полей в рамках ячейки.

В соответствии с целью работы поставлены основные задачи:

1) Разработать математические модели, численные методы и алгоритмы решения прямых и обратных задач теплопереноса в областях с разрывами ТФХ, и применить их к проведению ТФЭ методом МНЛИТ для оценивания коэффициента теплопроводности твердых материалов данным методом, а также влияния на процесс главного фактора – контактного термического сопротивления;

2) Разработать и обосновать приближенно-аналитические, численные методы и алгоритмы прогнозирования ЭКТ твердых неоднородных материалов на основе интеграла энергии;

3) Сформировать комплекс прикладных программ численного решения прямых и обратных задач теплопереноса в сложносоставных телах и неоднородных материалах для автоматизации эксперимента, проводимого методом МНЛИТ.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач используются современные методы математического моделирования, теорий теплопроводности и обобщенной проводимости, теории оптимизации, вариационного исчисления, системного анализа, обработки наблюдений, численные методы и алгоритмы.

**Достоверность результатов.** Основные положения и выводы подтверждаются корректным использованием методов исследования, строгими математическими постановками и доказательствами, адекватными математическими моделями, а также сопоставлением полученных результатов с зависимостями, полученными в лабораторных экспериментах и известными в литературе.

**Научная новизна.** В работе получены новые теоретические результаты, разработаны новые приближенные методы и соответствующие алгоритмы оценивания и прогнозирования эффективного коэффициента теплопроводности

(ЭКТ) твердых неоднородных материалов физическим методом МНЛИТ, и теоретическим методом элементарной ячейки (ЭЯ) теории обобщенной проводимости. Среди полученных результатов можно выделить следующие.

1. Разработана математическая модель теплопереноса в областях с многомерными разрывами тепло-физических и геометрических характеристик. Обоснован по аппроксимации и устойчивости соответствующий разностный метод численного решения задач для уравнений параболического типа, который использован для исследования теплового процесса физического метода МНЛИТ, и позволивший провести оценивание влияния главного фактора иррегулярной стадии процесса – контактного термического сопротивления.

2. Разработаны методы численного решения задачи идентификации ТФХ твердых образцов и восстановлению планов ТФЭ, на основе которых предложен вариант интегрированной технологии автоматизации эксперимента, проводимого физическим методом МНЛИТ.

3. Сформирован и применен алгоритм решения основной задачи теории обобщенной проводимости методом ЭЯ, где критерием выступает характеристика стационарного температурного поля – интеграл энергии. Получены новые приближенно-аналитические формулы ЭКТ бинарных неоднородных материалов с разными типами структур.

4. Разработана математическая модель нестационарного нагрева ЭЯ неоднородного материала. Предложены критерий установления квазиоднородности в ЭЯ, методика и алгоритм численного определения ЭКТ исследуемого материала с помощью интеграла энергии. Получены численные зависимости ЭКТ бинарных неоднородных материалов с разными типами структур.

5. Создан комплекс прикладных программ моделирования нестационарных тепловых процессов, позволяющий прогнозировать и оценивать ЭКТ твердых материалов предлагаемыми методами. С помощью данного комплекса получены оценки ЭКТ твердых (в том числе неоднородных) материалов численным моделированием нестационарного нагрева: а) линейного источника теплоты и б) элементарной ячейки.

**Практическая значимость** диссертационной работы состоит в том, что полученные в ней результаты представляют интегрированный подход (численное моделирование + лабораторный эксперимент + идентификация) в физическом методе МНЛИТ, и могут послужить основой для создания нового лабораторного стенда метода на существующей аппаратно-элементарной базе. Разработанные методы получения приближенно-аналитических формул ЭКТ элементарных ячеек на основе интеграла энергии, позволяют математически просто описать принятую схему сечений в ячейке и замкнуть тем самым основную систему уравнений ТОП, а методика численного расчета – получать зависимости ЭКТ и значения времен установления для элементарных ячеек разной, в том числе сложной, геометрии. Созданный комплекс прикладных программ может быть использован для теоретического прогнозирования и численной идентификации ЭКТ твердых образцов неоднородных материалов предлагаемыми методами.

**Апробация работы.** Описанные в диссертации исследования и результаты докладывались на международных конференциях «Авиация и космонавтика» 2009–2016, «Гагаринские чтения» 2016, а также на научных семинарах факультета

«Прикладная математика и физика» МАИ с 2010 года. Произведена государственная регистрация программ в составе разработанного комплекса (свидетельство № 2016662711).

**Личный вклад.** Постановки задач выполнены автором совместно с научным руководителем, основные результаты работы получены лично автором.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в журналах [1-6], входящих в Перечень ВАК, а также в сборниках тезисов докладов и трудах научных конференций [7-14] на русском и английском языках. Общее количество публикаций – 14. Зарегистрирована программа для ЭВМ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав основной части, заключения, списка использованных источников. Работа изложена на 169 страницах, содержит 72 рисунка, 11 таблиц, 184 наименования в списке источников.

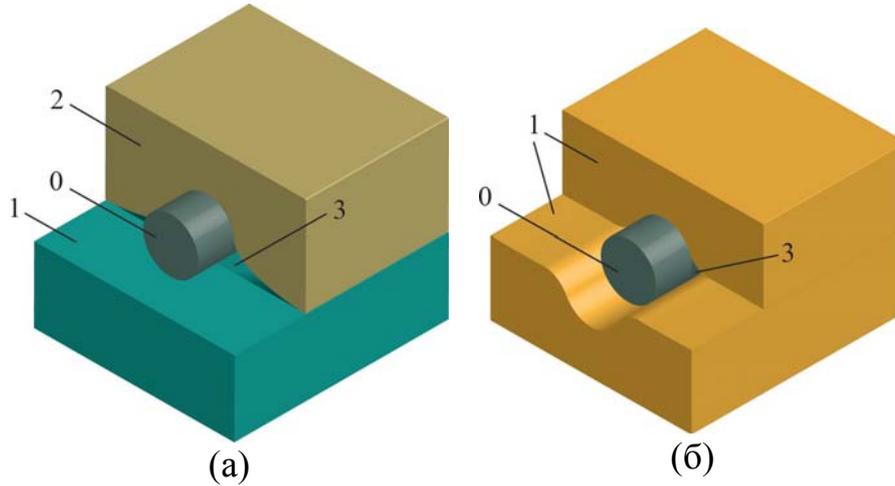
## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** проведен обзор работ, посвященных математическому моделированию нестационарных тепловых процессов в контактных зондовых методах измерения ТФХ веществ и материалов, а также теоретическим методам прогнозирования теплопроводности, основанным на теории обобщенной проводимости. Указана область проведенных исследований, обоснована их актуальность, научная новизна и практическая ценность, сформулированы цель и задачи диссертации, приведены сведения о структуре и объеме работы, дано краткое ее содержание, представлены положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** рассмотрены модели тепловых процессов на основе дифференциального уравнения теплопроводности. Классифицированы разновидности тепловых режимов, описаны их характеристики, представлена также классификация экспериментальных методов исследования ТФХ веществ и материалов.

Описана установка и процедура измерений (температуры зонда) нестационарным методом МНЛИТ. Соответствующая физическая задача оценивания эффективного коэффициента теплопроводности (ЭКТ) твердых (жестких и мягких) материалов формулируется следующим образом. Тонкая нить 0 (рис. 1а), являющаяся одновременно источником тепловыделения и зондом, располагается на поверхности раздела твердого образца 1 и подложки 2. Измерительная система «источник-образец-подложка» 0–1–2 помещена в инертный газ, заполняющий контактные зазоры 3. В случае мягкого материала (рис. 1б) нить 0 помещается между и зажимается двумя его образцами 1.

В данной конфигурации измерительной системы заданы ТФХ составляющих материалов (коэффициенты теплопроводности источника, подложки и газа соответственно  $\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3$  Вт/(м·К), их объемные теплоемкости  $c_{V0}, c_{V2}, c_{V3}$ , Дж/(м<sup>3</sup>·К)), параметры геометрии источника и теплового импульса от него (радиус нити  $r_0$ , м, удельное сопротивление  $\gamma_0$ , Ом/м, постоянная мощность  $q_l$ , Вт/м и длительность  $\Delta t$ , с теплового импульса), начальная температура эксперимента  $T_0$ , К. Требуется изучить влияние контактного термического сопротивления (КТС) и прочих факторов на развитие теплового процесса в системе, оценить коэффициент теплопроводности  $\lambda_1$  образца.



**Рис. 1.** Схематичное изображение системы «источник-образец-подложка»: *a* – образец из твердого материала; *б* – образец из мягкого материала.

Проанализированы две известные упрощенные математические модели эксперимента: двумерная задача о бесконечно тонком источнике на поверхности раздела двух полуограниченных сред и радиально-одномерная задача о цилиндрическом источнике в концентрических слоях ограниченной и неограниченной сред. Данные задачи имеют аналитическое решение. Искомая зависимость – приращения средней температуры зонда, информационная составляющая которой для обеих задач записывается в виде

$$T(r,t) - T_0 = \frac{q_l}{2\pi(\lambda_1 + \lambda_2)} \ln \frac{4at}{r^2 e^C} + O(\ln t), \quad (1)$$

где  $r$  – расстояние от центра источника,  $m$ ;  $a$  – температуропроводность,  $m^2/K$ ;  $C=0.577\dots$  – постоянная Эйлера, а приращения температуры между моментами времени  $t$  и  $t_1$  – в виде

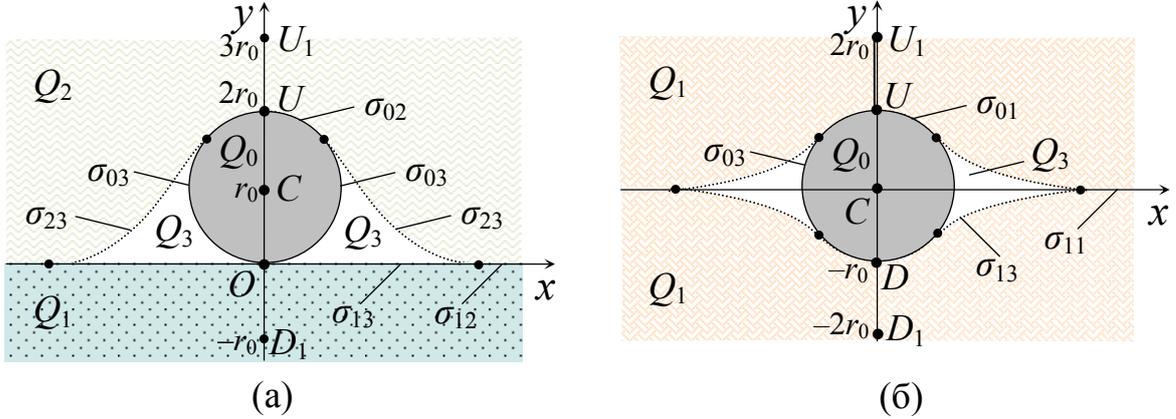
$$\Delta T = \frac{q_l}{2\pi(\lambda_1 + \lambda_2)} \ln \frac{t}{t_1}. \quad (2)$$

Зависимости (1), (2) лежат в основе экспериментального определения ЭКТ  $\lambda_1$  твердого образца физической модели измерений методом МНЛИТ. Упомянутые модели не учитывают наличие контактных зазоров вокруг источника и адекватно описывают его тепловой режим при  $t \gg 1$ . Возникает необходимость составления более сложной математической модели эксперимента, разработки на ее основе методов и алгоритмов оценивания ЭКТ твердых образцов.

**Во второй главе** приведены математические модели влияющих факторов реального теплообмена физического метода МНЛИТ, в том числе модель теплового процесса в системе «источник-образец-подложка», результаты численной реализации которой позволили оценить вклад главного фактора иррегулярной стадии – контактного термического сопротивления (КТС). Изложены численные методы и соответствующие алгоритмы оценивания теплопроводности твердого образца по результатам численного моделирования и по данным эксперимента.

**В разделе 2.1** проведен обзор факторов, влияющих на нагрев линейного источника теплоты, среди которых наиболее существенным на начальной стадии является наличие в тепловой системе КТС.

**Раздел 2.2** посвящен разработке математической модели теплового процесса в системе «источник-образец-подложка», а также методов и алгоритмов учета влияния факторов КТС и собственной теплоемкости источника. Сформулирована следующая двумерная начально-краевая задача теплопроводности (рис. 2):



**Рис. 2.** Фронтальное изображение системы «источник-образец-подложка»: *a* – жесткий образец (рис. 1а); *б* – мягкий образец (рис. 1б).

$$c_0 \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_0 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_0 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{q_l}{\pi r_0^2}, \quad (x, y) \in Q_0, \quad (3)$$

$$c_k \rho_k \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (x, y) \in Q_k, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (4)$$

$$\lambda_k \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\sigma_{km}^-} = \lambda_m \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\sigma_{km}^+}, \quad k, m \in \{\overline{0, 3}\}, \quad k \neq m, \quad (5)$$

$$T \Big|_{\sigma_{ij}^+} = T \Big|_{\sigma_{ij}^-}, \quad k, m \in \{\overline{0, 3}\}, \quad k \neq m, \quad (6)$$

$$T \Big|_{x, y \rightarrow \infty} = T_n = Const, \quad (7)$$

$$T \Big|_{t=0} = T_n = Const, \quad (8)$$

$$\Delta \bar{T}(t) = \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_{Q_0} T(x, y, t) dx dy - T_n \quad (9)$$

Здесь уравнение теплопроводности: (3) – для источника  $Q_0$ , (4) – для образца  $Q_1$ , подложки  $Q_2$  и зазоров  $Q_3$ ; (5)-(6) – условия сопряжения поверхностей контакта, где  $\bar{n}$  – вектор нормали к границе контактирующих областей; (7) – краевое условие на бесконечности; (8) – начальное условие. Требуется найти приращение средней температуры (9) источника.

Методом теплового баланса разработана разностная схема, соответствующая задаче (3)-(9). Уравнения (3)-(4) аппроксимированы равенствами:

$$(c\rho)_{ij} \frac{T^{\tau+1} - T^\tau}{\Delta t} = \left( \lambda_{i+1/2, j} \frac{T_{i+1, j} - T_{ij}}{\Delta x_i^+} - \lambda_{i-1/2, j} \frac{T_{ij} - T_{i-1, j}}{\Delta x_i^-} \right) \frac{2}{\Delta x_i^+ + \Delta x_i^-} + \left( \lambda_{i, j+1/2} \frac{T_{i, j+1} - T_{ij}}{\Delta y_j^+} - \lambda_{i, j-1/2} \frac{T_{ij} - T_{i, j-1}}{\Delta y_j^-} \right) \frac{2}{\Delta y_j^+ + \Delta y_j^-} + \frac{q_{lij}}{\pi r_0^2} + O(\Delta t + h^2), \quad (10)$$

где  $T_{ij}^\tau = T(x_i, y_j, \tau \Delta t)$ , верхний индекс  $\tau$  отвечает временному слою, нижние  $i, j$  – координатные,  $\Delta t$  – величина шага по времени,  $\Delta x_i^+, \Delta x_i^-, \Delta y_j^+, \Delta y_j^-$  – по координате от текущего узла  $\langle i, j \rangle$ , обозначено  $h^2 = (\Delta x_i^-)^2 + (\Delta x_i^+)^2 + (\Delta y_j^-)^2 + (\Delta y_j^+)^2$ .

Анализ возможных реализаций схемы (10) приводит к экономичным

высокоточным методам расщепления по временным слоям – *методу переменных направлений* и его модификации – *методу В. Ф. Формалёва* (МПНЭ) с экстраполяцией значений функции  $T_{ij}^\tau$  по временной переменной ( $\tau = \overline{0, P}$ ,  $t = \tau\Delta t$ ):

$$(c\rho)_{ij} \frac{T_{ij}^{\tau+1/2} - T_{ij}^\tau}{\Delta t} = \left( \lambda_i^+ \frac{T_{i+1,j}^{\tau+1/2} - T_{ij}^{\tau+1/2}}{\Delta x_i^+} - \lambda_i^+ \frac{T_{ij}^{\tau+1/2} - T_{i-1,j}^{\tau+1/2}}{\Delta x_i^-} \right) \frac{2}{\Delta x_i^+ + \Delta x_i^-} +$$

$$+ \left( \lambda_j^+ \frac{\tilde{T}_{i,j+1}^{\tau+1/2} - T_{ij}^{\tau+1/2}}{\Delta y_j^+} - \lambda_j^- \frac{T_{ij}^{\tau+1/2} - T_{i,j-1}^{\tau+1/2}}{\Delta y_j^-} \right) \frac{2}{\Delta y_j^+ + \Delta y_j^-} + \frac{q_{lij}}{\pi r_0^2} + O(\Delta t + h^2 + \Delta t h),$$

где  $T_{i-1,j}^{\tau+1/2}$ ,  $T_{i,j}^{\tau+1/2}$ ,  $T_{i+1,j}^{\tau+1/2}$  – неизвестные системы,  $i = \overline{0, M}$  для каждого  $j \in \overline{\{0, N\}}$ , а  $\tilde{T}_{i,j+1}^{\tau+1/2} = 2T_{i,j+1}^\tau - T_{i,j+1}^{\tau-1/2} + O(\Delta t^2)$  – линейно экстраполированное значение температуры.

$$(c\rho)_{ij} \frac{T_{ij}^{\tau+1} - T_{ij}^{\tau+1/2}}{\Delta t} = \left( \lambda_i^+ \frac{\tilde{T}_{i+1,j}^{\tau+1} - T_{ij}^{\tau+1}}{\Delta x_i^+} - \lambda_i^+ \frac{T_{ij}^{\tau+1} - T_{i-1,j}^{\tau+1}}{\Delta x_i^-} \right) \frac{2}{\Delta x_i^+ + \Delta x_i^-} +$$

$$+ \left( \lambda_j^+ \frac{T_{i,j+1}^{\tau+1} - T_{ij}^{\tau+1}}{\Delta y_j^+} - \lambda_j^- \frac{T_{ij}^{\tau+1} - T_{i,j-1}^{\tau+1}}{\Delta y_j^-} \right) \frac{2}{\Delta y_j^+ + \Delta y_j^-} + \frac{q_{lij}}{\pi r_0^2} + O(\Delta t + h^2),$$

где  $T_{i,j-1}^{\tau+1}$ ,  $T_{i,j}^{\tau+1}$ ,  $T_{i,j+1}^{\tau+1}$  – неизвестные системы,  $j = \overline{0, N}$  для каждого  $i \in \overline{\{0, M\}}$ , а  $\tilde{T}_{i+1,j}^{\tau+1} = 2T_{i+1,j}^{\tau+1/2} - T_{i+1,j}^\tau + O(\Delta t^2)$  – линейно экстраполированное значение температуры.

Рассмотрены и учтены особенности реализации условий однозначности. Наибольшую трудность состоит в выполнении условий сопряжения (5)-(6), для реализации которых предложена модификация МПНЭ, позволяющая сохранить порядок аппроксимации в граничном узле, и учитывающая нерегулярность пространственной сетки.

**Теорема 2.1.** (об аппроксимации на границах разрыва ТФХ)

Пусть в задаче (3)-(9)  $T(x, y, t) \in C_4^2(Q \times [0, P\Delta t])$  и  $\langle i, j \rangle$  – узел координатной сетки, помещенный на границу разрыва. Тогда порядок аппроксимации в этом узле равен  $O(\Delta t + h^2 + \Delta t |h|)$ , где  $h^2 = (\Delta x_i^-)^2 + (\Delta x_i^+)^2 + (\Delta y_j^-)^2 + (\Delta y_j^+)^2$ ,  $|h| = \Delta x_i^- + \Delta x_i^+ + \Delta y_j^- + \Delta y_j^+$ , и совпадает с порядком аппроксимации для регулярного узла на точном решении  $T(x_i, y_j, \tau\Delta t)$ , если условия сопряжения (5)-(6) в продольном или/и поперечном направлении аппроксимировать соответственно уравнениями

$$a_{ij}^x T_{i-1,j}^{\tau+1/2} - b_{ij}^x T_{i,j}^{\tau+1/2} + c_{ij}^x T_{i+1,j}^{\tau+1/2} = -d_{ij}^x + O(\Delta t + h^2 + \Delta t |h|), \quad (11a)$$

$$a_{ij}^y T_{i,j-1}^{\tau+1} - b_{ij}^y T_{i,j}^{\tau+1} + c_{ij}^y T_{i,j+1}^{\tau+1} = -d_{ij}^y + O(\Delta t + h^2 + \Delta t |h|), \quad (11б)$$

где коэффициенты для продольного направления (11a):  $a_{ij}^x = \lambda_i^- / \Delta x_i^-$ ,  $c_{ij}^x = \lambda_i^+ / \Delta x_i^+$ ,

$$b_{ij}^x = a_{ij}^x + c_{ij}^x + l_{ij}^x + \sigma_{ij}^x (a_{ij}^y + c_{ij}^y), \quad d_{ij}^x = l_{ij}^x T_{i,j}^\tau + \sigma_{ij}^x (a_{ij}^y T_{i,j-1}^{\tau+1/2} + c_{ij}^y \tilde{T}_{i,j+1}^{\tau+1/2}),$$

$$\tilde{T}_{i,j+1}^{\tau+1/2} = 2T_{i,j+1}^\tau - T_{i,j+1}^{\tau-1/2} + O(\Delta t^2), \quad \lambda_i^- = \lambda_{i-1/2,j}, \quad \lambda_i^+ = \lambda_{i+1/2,j}, \quad l_{ij}^x = ((c\rho)_i^- \Delta x_i^- + (c\rho)_i^+ \Delta x_i^+) / \Delta t,$$

$$\sigma_{ij}^x = (\Delta x_i^- + \Delta x_i^+) / (\Delta y_j^- + \Delta y_j^+) = 1 / \sigma_{ij}^y, \quad (c\rho)_i^- = (c\rho)_{i-1/2,j}, \quad (c\rho)_i^+ = (c\rho)_{i+1/2,j}.$$

Предложенные конечно-разностные схемы (11) могут применяться не только в граничных, но и в любых внутренних узлах расчетной области, поэтому они представляют модификацию МПНЭ.

**Теорема 2.2.** (об устойчивости по входным данным)

Пусть выполнены условия теоремы 2.1, тогда конечно-разностные схемы (11) абсолютно устойчивы по входным данным и по правым частям.

Краевое условие (7), ввиду фактической ограниченности расчетной области

$Q = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ , реализовано с помощью свободной границы – контура  $\partial Q$ , где  $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$ , позволяющего замкнуть основную систему уравнений метода. При вычислениях использовалась функциональная координатная сетка, с более плотной регулярной составляющей вблизи области  $Q_0$  источника. Предложена методика растяжения сеток, основанная на применении нормированной функции растяжения в виде выпуклой комбинации ядра растяжения и равномерной (линейной) части.

Определен базовый вариант тепловой системы, для которой в соответствии с физической постановкой задачи (Гл. 1) проведено численное моделирование теплопереноса. Термограммы  $\Delta T$  (9) для жесткого образца показаны на рис. 3.

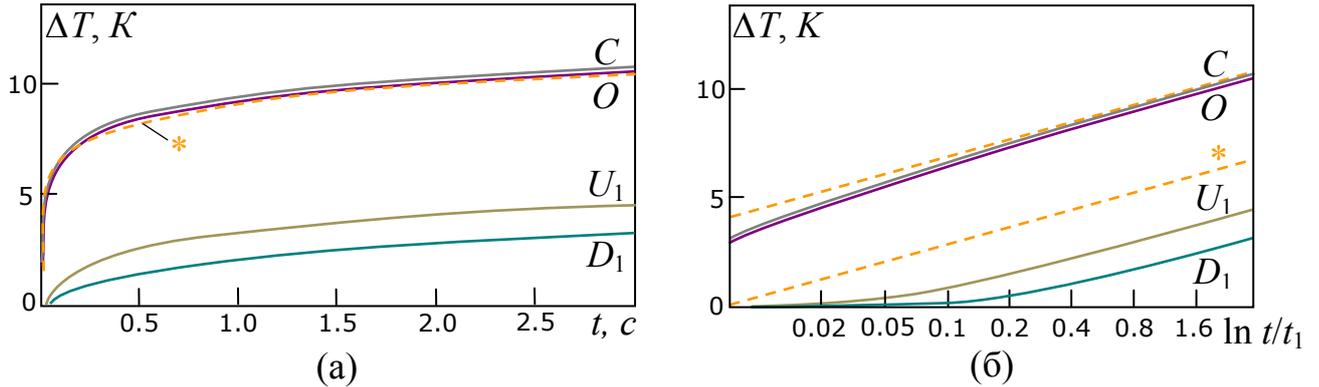


Рис. 3. Приращения температуры в точках оси симметрии (рис. 2а):

а – в центре  $C(0, r_0)$  нити, в точке  $O(0, 0)$  контакта нити с образцом, в точках  $U_1(0, 3r_0)$ ,  $D_1(0, -r_0)$ ; \* – зависимость (2) в точке  $O$ ;

б – те же зависимости в полулогарифмической шкале  $\tau = \ln t / t_1$ ,  $t_1 = 0.01$  с.

Учет влияния КТС на нагрев источника предлагается проводить по критерию  $\delta k(\tau)$  относительного отклонения мгновенной скорости приращения текущей избыточной температуры  $k(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} (\Delta T / \Delta\tau)$  от постоянной ее величины  $k^* = q_l / (2\pi(\lambda_1 + \lambda_2))$  (2) регулярного теплового режима:

$$\delta k(\tau) = (k^* - k) / k^*. \quad (12)$$

Безразмерное лого-время  $\tau_p^* = \ln t_p^* / t_1$  отвечает пороговому значению  $p$  по критерию  $\delta k(\tau)$ , то есть  $\tau_p^* = \min(\tau : \delta k(\tau) \leq p)$ , оно связано с началом формирования вокруг нити источника поля цилиндрической симметрии и выходу термограммы  $\Delta T(\tau)$  на регулярный режим.

Значения по критерию (12) для разных сочетаний параметров эксперимента и материалов системы получены методами численного дифференцирования и показаны на рис. 4, из которого, в сравнении с базовым вариантом системы, видна связь параметров с попыткой уменьшить влияние КТС.

Влияние собственной теплоемкости источника  $c_0\rho_0$  учитывалось численным решением задачи при  $Q_3=Q_2$ ,  $Q_0=Q_2$  (в смысле одинаковых ТФХ) и при  $c_0=c_2/10$ . Несколько меньшие величины критерия  $\delta k$  дает решение нелинейной задачи 1-го рода. Значимое влияние оказывает относительные объем контактных зазоров и площадь поверхности сопряжения нити и газа. В базовом варианте системы область  $Q_3$  представляет собой криволинейный треугольник, соразмерный с  $Q_0$ , где граница  $\sigma_{23}$  (рис. 2а) взята прямой линией. Численные эксперименты также показывают экспоненциальный характер связи величин  $\delta k$  (и времени  $\tau_p^*$ ) с

радиусом нити  $r_0$ . Из этой связи, однако, не следует, что в физическом эксперименте необходимо использовать датчики с возможно меньшим  $r_0$ , так как при этом сужаются временные рамки эксперимента. Для большей точности измерений необходимо увеличить относительный эффективный временной промежуток замера, который при данной силе тока ( $I \sim 0.1-0.2 \text{ A}$ ) зависит в основном от  $r_0$  и относительного ЭКТ  $\lambda_1/\lambda_2$ . Поэтому для предполагаемого диапазона значений  $\lambda_1/\lambda_2$  можно говорить о некотором условно-оптимальном выборе датчика (из имеющегося набора).

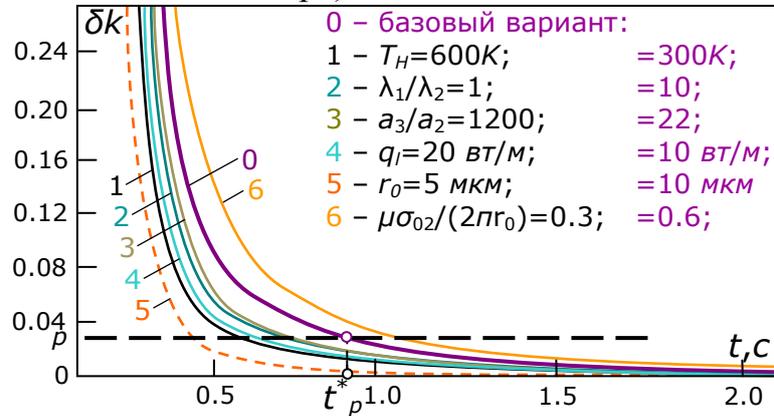


Рис. 4. Значения критерия (12) при изменении параметров системы в сравнении с ее базовым вариантом.

Приведенные результаты позволяют оценить границы применимости метода МНЛИТ к твердым материалам в диапазоне  $\lambda_1/\lambda_2 \sim 10^{-1} \div 10^2$ , причем значения близкие к крайним могут быть достигнуты при соответствующей подгонке прочих параметров (например,  $I$  и  $r_0$ ). Применимость метода по эффективному временному промежутку замера приращений температуры зонда ограничено снизу временем  $t_p^*$ , а сверху – временем  $t_{кр}$ , отвечающего критической температуре материала нити. Такая оценка  $t_{кр}$  может быть завышенной, поскольку на конечной стадии нагрева основным источником погрешностей является отклонение реального теплового процесса от предлагаемой модели.

В разделе 2.3 описаны прочие влияющие на нагрев источника факторы и известные модели учета их вклада в приращение  $\Delta T^*$  (2): собственная теплоемкость источника, ограниченность размеров источника, ограниченность размеров контактирующих материалов, зависимость ТФХ контактирующих материалов от температуры, лучистый теплообмен.

Фактор собственной теплоемкости источника относится к начальной стадии теплового импульса, его вклад был также оценен при численном моделировании (разд. 2.2). Факторы ограниченности размеров источника и контактирующих материалов, а также зависимости ТФХ материалов от температуры, оказывают влияние преимущественно на конечной стадии, причем в типичных условиях эксперимента ими можно пренебречь. Постоянно действующий фактор наличия в тепловом потоке лучистой составляющей дает вклад, пропорциональный 2-й степени радиуса нити  $r_0$  и 3-й степени температуры отнесения  $T_0$ . При комнатных значениях  $T_0$  пренебрежение лучистым теплообменом приводит к занижению истинной температуры источника не более чем на  $1 \div 1.5\%$ .

Раздел 2.4 посвящен описанию методов и алгоритмов оценивания ЭКТ твердого образца по результатам численного моделирования и эксперимента:

– восстановление углового коэффициента модельной асимптоты отвечающей

регулярному тепловому режиму системы;

– численное решение коэффициентной обратной тепловой задачи.

Восстановление углового коэффициента асимптоты проводится в двух вариантах: методическом (численным моделированием) и экспериментальном (по лабораторным замерам). Дана сеточная зависимость  $(t^i, \Delta T^i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , причем известно что сеточная функция  $(\tau^i, f^i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где  $\tau^i = \ln(t^i / t_1)$ ,  $f^i = \Delta T^i$ , имеет асимптотический характер (рис. 3б). Требуется восстановить угловой коэффициент  $k$  асимптоты функции  $f = f(\tau)$ , и на основе формулы (2) получить оценку теплопроводности  $\lambda_1$  исследуемого образца.

Рассмотрена возможность поиска функциональной связи  $\tau$  и  $f$  в виде  $f(\tau) = \sqrt{k^2 \tau^2 + 2kb_0 \tau + c^2}$ , с асимптотой  $f(\tau) = k\tau + b_0$ ,  $k > 0$ , где коэффициенты параболической регрессии ( $f^2$  на  $\tau$ ) находятся методом наименьших квадратов (МНК), описан соответствующий алгоритм.

Коэффициентная обратная задача также решается в методическом и экспериментальном вариантах. Сеточная зависимость  $(t_{\mathcal{G}}^i, \Delta T_{\mathcal{G}}^i)$  известна по результатам моделирования (методическая задача), либо по результатам эксперимента. Требуется найти оценки коэффициентов  $\lambda_1$ ,  $b$ , что сеточная функция  $(t_M^i, \Delta T_M^i)$ , полученная моделированием теплового процесса в системе «источник-образец-подложка» (разд. 2.2), при прочих равных будет близка данной сетке в смысле критерия минимума функционала-невязки в виде:

$$I^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta T_M^i - \Delta T_{\mathcal{G}}^i + b)^2 \rightarrow \min_{\lambda_1, b}, \quad (13)$$

$$b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta T_M^i - \Delta T_{\mathcal{G}}^i), \quad (14)$$

где  $b$  – поправочный параметр, отвечающий за дополнительный перегрев нити источника, даваемый КТС и неучтенный моделью. Для методической задачи  $b$  будет близок к нулю, либо полагается  $b=0$ .

Программу моделирования (решатель) предложено воспринимать в качестве «черного ящика», и решать задачу итерационно – методом подбора. При этом на вход решателя подаются коэффициент  $\lambda_1$  и прочие параметры  $\bar{v}$  конфигурации тепловой системы (Гл.1), а на выходе получаем модельную зависимость  $(t_M^i, \Delta T_M^i)$ . Генерация и итерационная коррекция значений  $\lambda_1$  проводится методом имитации отжига, относящимся к метаэвристическим методам случайного поиска глобального экстремума. Задача решается согласно следующему алгоритму.

### Алгоритм 2.3. (подбор ЭКТ имитацией отжига в методе МНЛИТ)

**Шаг 1.** Подготовка алгоритма к работе и создание начального текущего решения. Задать начальное значение параметра разброса углов асимптоты  $\Delta\beta^{(0)}$ , его минимальное возможное значение  $\Delta\beta_{\min}$ , шаг изменения  $h_\beta$ . Задать вид т.н. потенциала  $\Phi^{(k)}$ , его параметры, начальное и конечное значения:  $\Phi_0$  и  $\Phi_e$ , положить  $\Phi^{(0)} = \Phi_0$ . Задать входные параметры  $\bar{v}$  модели «черного ящика».

Найти начальное значение углового коэффициента  $\beta^{(0)}$  асимптоты для сетки  $(\tau_{\mathcal{G}}^j, \Delta T_{\mathcal{G}}^j)$ ,  $\tau_{\mathcal{G}}^j = \ln t_{\mathcal{G}}^j / t_1$ , например, решая предыдущую задачу. По формуле (2) вычислить  $\lambda_{1T}^{(0)} = q_1 / (2\pi\beta^{(0)}) - \lambda_2$  – начальное текущее решение. Принять  $k = 0$ ,  $k -$

номер итерации главного цикла метода отжига.

**Шаг 2.** Оценка начального решения. Для текущего решения  $\lambda_{1T}^{(k)}$  при заданных фиксированных входных параметрах  $\bar{v}$  провести моделирование процесса, получить модельную сетку  $(t_M^i, \Delta T_M^i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Интерполированием привести по узлам модельную сетку  $(\tau_M^i, \Delta T_M^i)$ ,  $\tau_M^j = \ln t_M^j / t_1$  к экспериментальной  $(\tau_{\mathcal{E}}^j, \Delta T_{\mathcal{E}}^j)$ , в результате чего получить сетку  $(t_M^j, \Delta T_M^j)$ ,  $j = \overline{1, P}$ . Вычислить значение «энергии»  $E(\lambda_{1T}^{(k)})$  текущего решения по формуле (13), где  $E = I^2$ .

**Шаг 3.** Проверка критерия окончания счета. Если  $\Phi^{(k)} > \Phi_e$ , то перейти к шагу 4 алгоритма, иначе окончить вычисления, приняв  $\lambda_{1T}^{(k)}$  за лучшее решение.

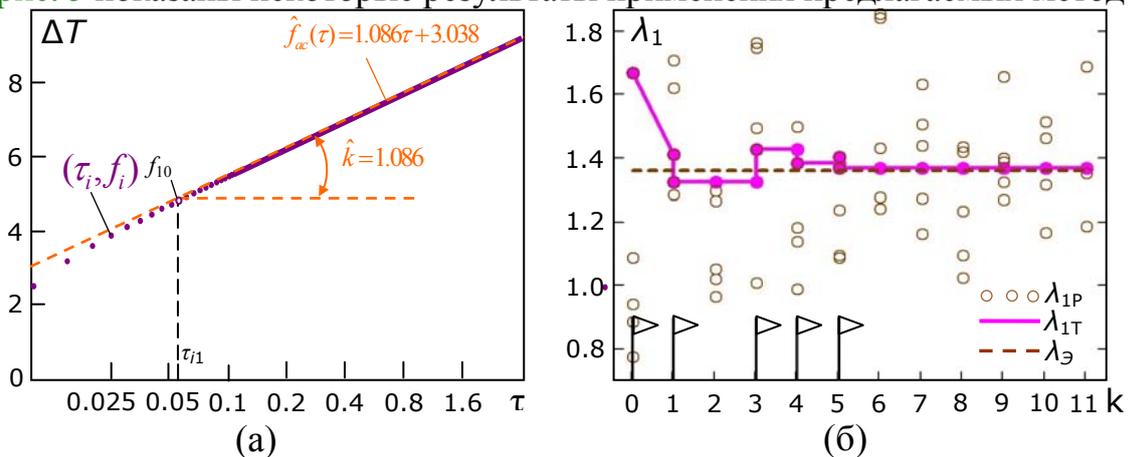
**Шаг 4.** Изменение текущего решения. Получить новое рабочее решение по формуле  $\lambda_{1P} = \lambda_{1\min} + \xi \cdot (\lambda_{1\max} - \lambda_{1\min})$ , где  $\lambda_{1\min} = q_l / (2\pi(\beta^{(k)} + \Delta\beta^{(k)})) - \lambda_2$ ,  $\lambda_{1\max} = q_l / (2\pi(\beta^{(k)} - \Delta\beta^{(k)})) - \lambda_2$ ,  $\xi \sim R(0,1)$ .

**Шаг 5.** Оценка рабочего решения. Вычислить значение «энергии»  $E(\lambda_{1P})$ .

**Шаг 6.** Проверка критерия допуска. Если  $E(\lambda_{1P}) \leq E(\lambda_{1T}^{(k)})$ , то положить  $\lambda_{1T}^{(k+1)} = \lambda_{1P}$ . Если  $E(\lambda_{1P}) > E(\lambda_{1T}^{(k)})$ , то значение  $p = \exp((E(\lambda_{1T}^{(k)}) - E(\lambda_{1P})) / \Phi^{(k)})$  сравнить с реализацией случайного числа  $\chi$ ,  $\chi \sim R(0,1)$ . При этом, если  $p > \chi$ , то принять  $\lambda_{1T}^{(k+1)} = \lambda_{1P}$ , иначе  $\lambda_{1T}^{(k+1)} = \lambda_{1T}^{(k)}$ .

**Шаг 7.** Уменьшение потенциала. В соответствии с выбранным видом потенциала вычислить его новое значение  $\Phi^{(k+1)}$ :  $\Phi^{(k+1)} < \Phi^{(k)}$ . Вычислить новое значение параметра разброса углов по формуле  $\Delta\beta^{(k+1)} = \Delta\beta^{(k)} - \eta \cdot h_{\beta}$ ,  $\eta \sim R(0,1)$ . Если  $\Delta\beta^{(k+1)} < \Delta\beta_{\min}$ , то принять  $\Delta\beta^{(k+1)} = \Delta\beta_{\min}$ . Увеличить значение итератора главного цикла:  $k := k + 1$ . Перейти к шагу 3 алгоритма.

На рис. 5 показаны некоторые результаты применения предлагаемых методов.



**Рис. 5.** Оценивание ЭКТ кварцевого стекла при  $T_0=300K$ .

*a* – метод восстановления углового коэффициента асимптоты (методическая задача):  $\Delta T = f$ ,  $\lambda_{1T}^* = 1.360 \text{ Bm}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ,  $\hat{\lambda}_{1T} = 1.366 \text{ Bm}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

*b* – метод имитации отжига (данные лабораторного эксперимента),  $\lambda_{\mathcal{E}} = 1.360 \text{ Bm}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ,  $\hat{\lambda}_{1T} = 1.364 \text{ Bm}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ,  $K=11$  итераций (флажками отмечены итерации, где рабочие решения приняты в качестве текущих).

Практически использованы потенциал в виде прогрессии  $\Phi^{(k+1)} = g \cdot \Phi^{(k)}$ ,

$g \in (0,1)$  и сформированный в виде  $\Phi^{(k)} = \Phi_e + (\Phi_0 - \Phi_e)(\theta\Phi_n^*(z) + (1-\theta)\Phi_r^*(z))$ , где  $\Phi_r^*(z) = \cos^\alpha(\pi z/2)$  – ядро ( $\alpha = 2$ ),  $\Phi_n^*(z) = 1 - z$  – линейная часть,  $z = k/K$ ,  $z \in [0,1]$ ,  $k = \overline{0, K}$ .

Данные методы были применены для оценивания ЭКТ твердых образцов-эталонов (эбонит, резина 450-А, мусковит и др.), проведен анализ результатов. Погрешность оценивания ЭКТ  $\lambda_1$  образца вычислялась в базовом варианте системы (при типичных условиях эксперимента) для методической и экспериментальной задач. В методе восстановления асимптоты она составила соответственно  $0.5 \div 1.5\%$  и  $4 \div 6\%$ , а в методе имитации отжига – не более  $0.6\%$  и порядка  $1\%$ . Таким образом, в условиях физического эксперимента первый метод по точности сопоставим с традиционным оцениванием, а второй ощутимо выигрывает. Отмечены преимущества и недостатки предлагаемых методов.

**В третьей главе** описаны приближенно-аналитический метод расчета эффективных коэффициентов теплопроводности (ЭКТ) неоднородных материалов (НМ) методом элементарной ячейки (ЭЯ) теории обобщенной проводимости (ТОП), на основе применения рассмотренной характеристики стационарного температурного поля – интеграла энергии, а также модель теплового процесса в ЭЯ, численный метод и соответствующий алгоритм расчета ЭКТ ЭЯ с помощью интеграла энергии. Предложены приближенно-аналитические формулы и проведены численные расчеты ЭКТ бинарных неоднородных материалов (БНМ), определено численно время установления квазиоднородности образца.

**В разделе 3.1** дана постановка основной задачи ТОП по О.Винеру. Пусть в стационарном температурном поле располагается  $n$ -компонентная смесь ( $i = \overline{1, n}$ ) с известными и неизменными структурой, проводимостями  $\lambda_i$  и объемными концентрациями  $m_i = V_i / \sum_1^n V_i$  составляющих. Требуется определить проводимость (ЭКТ)  $\lambda_3$  условной однородной смеси, которой можно заменить исходную смесь, что внешнее поле сохранится неизменным. Принимается постулат Лихтенэккера-Ротера об отсутствии последействия – независимости ЭКТ  $\lambda_3$  смеси от способа ее получения. Решение основной задачи ТОП базируется на решении той же задачи для БНМ ( $n = 2$ ), то есть установлении вида относительного ЭКТ (ОЭКТ)  $\lambda_3 / \lambda_1 = N(\nu, m_2)$ , где  $m_1 + m_2 = 1$ ,  $\nu = \lambda_2 / \lambda_1$  и полагается  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Сформулированы требования к формулам ОЭКТ: адекватность, соответствие данным эксперимента, непротиворечивость и достоверность в предельных случаях.

Проведена классификация БНМ по геометрическим основаниям типов их структур – сочетанию кластеров по степеням свободы и по отношению к направлению теплового потока. В результате выделено четыре основных класса: слоистые, пронизывающие, изолированные и взаимопроникающие. Отмечено также шесть промежуточных типов: плоско-трещиноватые, цепочечные мостиковые, статистические механические смеси, плоско-волокнистые, слоистые с наполненными изомерами слоями, пористые с сообщающимися порами. Описаны методы решения основной задачи ТОП, среди которых наиболее продуктивны основанные на моделировании геометрической структуры НМ.

**Раздел 3.2** посвящен описанию метода приближенно аналитического расчета ЭКТ НМ с помощью интеграла энергии (квадратичного функционала типа

«действие»). Для стационарного температурного поля  $T=T(M)$ ,  $M \in V$  интеграл энергии определяется базовым соотношением

$$S[T] = \frac{1}{2} \int_V \lambda (\nabla T)^2 dV. \quad (15)$$

Методика применения интеграла энергии для отыскания ЭКТ  $\lambda_{\mathcal{E}}$  НМ состоит в «размывании» свойств НМ через равенство  $S_{\mathcal{E}} = S$ , где  $S_{\mathcal{E}}$  имеет вид (14) при  $\lambda = \lambda_{\mathcal{E}}$ , а  $S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \langle (\nabla T)^2 \rangle_i$  (скобки  $\langle \dots \rangle$  здесь и далее означают усреднение по объему), что приводит к основной системе уравнений проводимости:

**Теорема 3.1.** (об основной системе уравнений проводимости)

Пусть  $n$ -компонентная смесь удовлетворяет постановке основной задачи ТОП, тогда ее ЭКТ  $\lambda_{\mathcal{E}}$  удовлетворяет незамкнутой системе уравнений:

$$\lambda_{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i \Psi_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i \Psi_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n m_i = 1, \quad (16)$$

где  $\Psi_i = \langle (\nabla T)^2 \rangle_i / \langle (\nabla T)^2 \rangle$  – неизвестные величины,  $m_i = V_i / V$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Необходимые для замыкания системы (16)  $(n-1)$  уравнение берутся из дополнительных предположений о структуре НМ и процессах переноса в нем. Моделирование структуры НМ проводится выделением из общего массива (сечениями Рэлея: адиабатическими поверхностями "а" (плоскостями "а"), параллельными вектору постоянного теплового потока  $\bar{q}_0$ ,  $Bm/m^2$ , и изотермическими "и" плоскостями перпендикулярными ему) элементарной ячейки (ЭЯ) – представительного элемента НМ. В рамках ЭЯ температурное поле линеаризуется, и, в зависимости от последовательности сечений и геометрии образованных ими областей – схемы сечений, осреднением тепловых потоков с помощью интеграла (14) получаются разные приближенно-аналитические формулы ЭКТ.

**Алгоритм 3.1.** (Применение интеграла энергии для решения основной задачи ТОП методом ЭЯ).

**Шаг 1.** Образовать ЭЯ НМ: выбрать и структурировать представительный элемент НМ. По геометрии исходной структуры ЭЯ принять схему сечений, задаться порядком следования сечений.

**Шаг 2.** Задать геометрический параметр(-ы) структуры ЭЯ, установить его связь с объемными концентрациями  $m_1, m_2, \dots, m_n$  компонентов ЭЯ.

**Шаг 3.** Первое сечение в ЭЯ записывается с помощью интеграла энергии суперпозицией  $S = S_{o1} + S_{o2} + \dots + S_{oM}$ , где  $S_{oj}$  – значение интеграла в области  $j$ ,  $j \in \overline{1, M}$ . Положить  $S = S_{\mathcal{E}}$ , где  $S_{\mathcal{E}} = \lambda_{\mathcal{E}} V \langle (\nabla T)^2 \rangle / 2$  – значение интеграла для эффективной среды. Пакет образованных сечением областей  $o1, o2, \dots, oM$  является слоистой структурой, поэтому при адиабатических сечениях (осреднениях) будет  $\Psi_i = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$  и для них верна формула:  $\lambda_{\parallel} = \sum_{j=1}^M m_{oj} \lambda_{oj}$ , а при изотермических –  $q_0 = q_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и формула:  $1/\lambda_{\perp} = \sum_{j=1}^M m_{oj} / \lambda_{oj}$ . Каждая из областей  $oj$  является однородной либо неоднородной. Теплопроводность однородной области равна теплопроводности соответствующего компонента  $\lambda_{oj} = \lambda_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , а неоднородной области – заменяется на эффективную  $\lambda_{oj} = \lambda_{oj\mathcal{E}}$ . При последующих сечениях каждой неоднородной области  $oj$  провести все действия шага 3, получить

выражения их ЭКТ  $\lambda_{oj\varepsilon}$ .

**Шаг 4.** Формулы ЭКТ  $\lambda_{oj}$  всех областей и подобластей  $j \in \overline{\{1, M\}}$  подставить в формулу ЭКТ ЭЯ  $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(\lambda_{oj}, m_{oj})$  (шаг 3) и получить тем самым искомую приближенно-аналитическую формулу  $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(\lambda_i, m_i)$ .

В работе применяется дихотомический вариант алгоритма 3.1, когда в результате очередного сечения образуются только две подобласти. Это позволяет записывать схемы сечений коротко – в виде буквенных последовательностей. Схемы типа <а-и>, <а-а-и>, <(а)-и> названы адиабатическими, <и-а>, <и-и-а> – изотермическими, а разные <а-и-...>, <и-а-...> – комбинированными.

**Утверждение 3.3.** Пусть в МКНМ, удовлетворяющему постановке основной задачи ТОП, образована ЭЯ и принята некоторая схема сечений. Тогда

а) другой схеме сечений, у которой последнее отличное от исходной схемы сечение адиабатическое, соответствует большее значение ЭКТ.

Например,  $\lambda_{\langle \dots \text{и} \rangle} \leq \lambda_{\langle \dots \text{а} \rangle}$ ,  $\lambda_{\langle \dots \text{и-и} \rangle} \leq \lambda_{\langle \dots \text{а-и} \rangle}$ .

б) схеме сечений, образованной из исходной добавлением (в конец) нового сечения, соответствует большее значение ЭКТ ЭЯ.

Например,  $\lambda_{\langle \dots \text{и} \rangle} \leq \lambda_{\langle \dots \text{а} \rangle}$ ,  $\lambda_{\langle \dots \text{и-и} \rangle} \leq \lambda_{\langle \dots \text{а-и} \rangle}$ .

**Теорема 3.2.** (о «вилке» для комбинированной схемы сечений ЭЯ)

Пусть в МКНМ, удовлетворяющему постановке основной задачи ТОП, образована ЭЯ, получены ее ЭКТ –  $\lambda_A$ ,  $\lambda_{II}$ ,  $\lambda_K$ , соответственно при адиабатической, изотермической и некоторой комбинированной схемах сечений, тогда справедливы неравенства  $\lambda_A \leq \lambda_K \leq \lambda_{II}$ .

Разработаны принципы получения формул ОЭКТ БНМ: интегральный и последовательного приведения МКНМ к БНМ.

Сохраняя идею моделирования структуры НМ сечениями Рэлея, интегральный принцип позволяет свободнее подобрать геометрическую модель ЭЯ (алгоритм 3.1, шаг 1), задавая аналитически поверхность раздела компонентов.

**Теорема 3.3.** Пусть в БНМ, удовлетворяющему постановке основной задачи ТОП, образована 2-слойная ЭЯ, в которой компоненты-слои отделены поверхностью  $z = f(M)$ ,  $M \in D \subset \mathbf{R}^2$ ,  $f \in C[D] = \{f : M \rightarrow [0, h]\}$ . Тогда справедливы формулы ОЭКТ ЭЯ соответственно с одним изотермическим сечением и адиабатическая по схеме <(а)-и>:

$$N_\perp = \frac{\nu}{1 - (1 - \nu) \langle z \rangle / h}, \quad (17)$$

$$N_A = \frac{1}{|D|} \int_D \frac{\nu}{1 - (1 - \nu) z / h} dD, \quad (18)$$

где  $\nu = \lambda_2 / \lambda_1$ , полагается  $\lambda_1 > \lambda_2$ ,  $\langle z \rangle = \frac{1}{|D|} \int_D f(M) dD$ ,  $|D| = \int_D dD$ ,  $z = f(M)$ ,

$M \in D$  – уравнение поверхности раздела компонентов в ЭЯ.

**Теорема 3.4.** Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда формулы ЭКТ (16), (17) связаны следующими соотношениями.

а) неравенством  $N_\perp(\nu) < N_A(\nu)$ , при любых  $\nu \in (0, 1)$  и заданной поверхности раздела компонентов  $z = f(M)$ ,  $M \in D \subset \mathbf{R}^2$ ,  $f \in C[D] = \{f : M \rightarrow [0, h]\}$ .

б) равенством  $N_\perp[z] = N_A[\langle z \rangle]$ , при фиксированном  $\nu \in (0, 1)$  и  $z = f(M)$ ,

$M \in D \subset \mathbf{R}^2$ , для разных  $f \in C[D] = \{f : M \rightarrow [0, h]\}$ .

Известные приближенно-аналитические формулы ОЭКТ можно использовать при выводе формул ОЭКТ смесей более высокого уровня – смеси смесей. Идея принципа последовательного приведения состоит в рассмотрении  $n$ -компонентного НМ как последовательности 2-х смесей, и структурно представляемой в виде бинарного дерева, где  $n$  – число его терминальных вершин. Уровень смеси –  $d$  определяется глубиной соответствующего бинарного дерева и ограничен  $[\log_2 n] + \text{sgn}(n - 2^{[\log_2 n]}) \leq d \leq n - 1$ . Простое смешивание предполагает на каждом уровне дихотомии получение смеси, состоящей из однородного компонента и компонента-смеси, что  $d = n - 1$ . Последний, в свою очередь, заменяется эффективной средой со своей ЭЯ и приводится по тому же принципу.

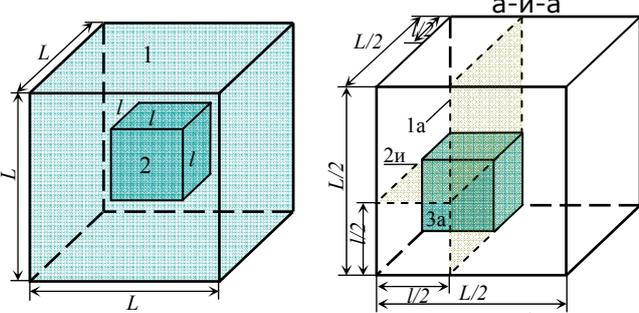
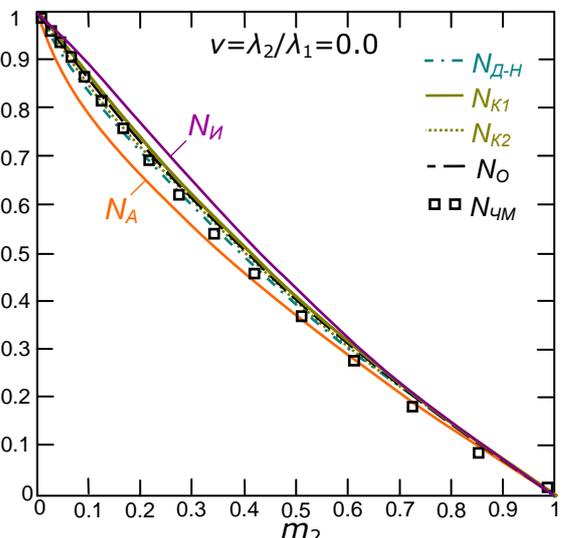
**Теорема 3.5.** Пусть в 3-компонентном НМ, удовлетворяющем постановке основной задачи ТОП и представляющем простую смесь 2-го уровня, образована ЭЯ, приняты схемы ее сечений на уровнях. Тогда справедлива формула ОЭКТ ЭЯ

$$N_{\mathcal{E}} = \lambda_{\mathcal{E}} / \lambda_I = N \left( \frac{\lambda_I}{\lambda_I} N_{II} \left( v, \frac{m_2}{m_{II}} \right), m_{II} \right), \quad (19)$$

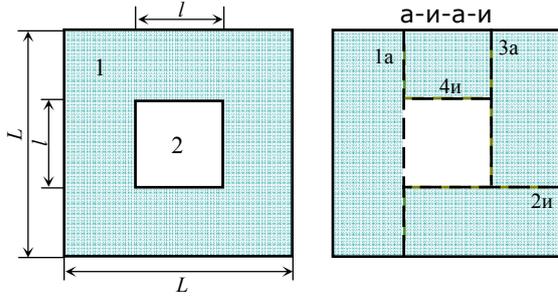
где компоненты:  $I$  – однородный,  $II$  – смесь (1)+(2),  $N = \lambda_{\mathcal{E}} / \lambda_I$ ,  $N_{II} = \lambda_{II} / \lambda_I$  – ОЭКТ верхнего и нижнего уровней, полагается  $\lambda_I \geq \lambda_1 \geq \lambda_2$ ,  $v = \lambda_2 / \lambda_1$ ,  $N_{II} = \lambda_{II} / \lambda_I$ ,  $m_{II} = V_{II} / V$ ,  $m_I + m_{II} = 1$ ,  $m_2 / m_{II} = V_2 / V_{II}$ .

Согласно алгоритму 3.1 получены комбинированные формулы ОЭКТ БНМ: с изолированными включениями (I), с пронизывающими компонентами (II), структур плоско-волоконистого типа (III), зернистых и связанных структур (IV), в том числе на основе ЭЯ осевого вращения. Проведены сравнение и анализ полученных и известных из литературы зависимостей. Часть результатов сведено в Табл. 1 (принятые обозначения формул: А – адиабатическая, И – изотермическая, Д-Н – Дульнева-Новикова, О – Оделевского, М – Муратовой; полученные в работе формулы имеют индекс «К», а дискретные зависимости численного моделирования (разд. 3.3) обозначены маркерами «□»).

Таблица 1. Геометрические модели и схемы сечений ЭЯ, формулы ОЭКТ

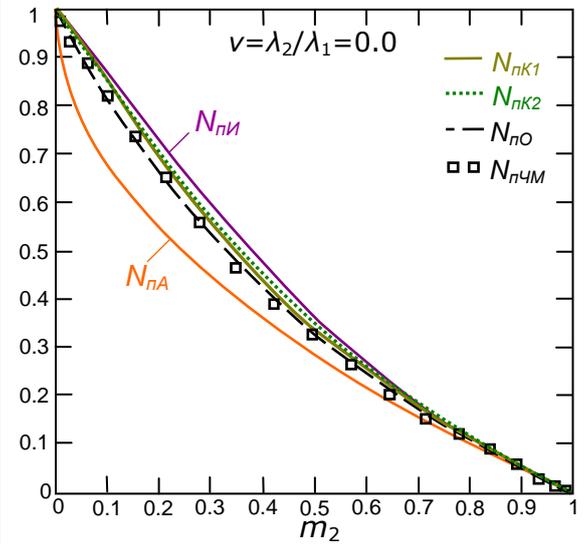
Геометрия и комбинированная схема сечений ЭЯ, формула ОЭКТ $N(v, c)$ , $v = \lambda_2 / \lambda_1$ , $c = c(m_2)$	Графики зависимости ОЭКТ $N = \lambda_{\mathcal{E}} / \lambda_1$ для крайне неоднородного материала ( $v \rightarrow 0$ )
<p>I. Изолированные включения</p>  $N_{K1}(v, c) = 1 - c^3 \left( \frac{1}{1-v} - c + c^2 \right)^{-1}, \quad c = \sqrt[3]{m_2}$ $N_{K2}(v, c) = 1 - c^3 \left( \frac{1}{1-v} - 1 + \frac{1}{2-c} \right)^{-1}$	

II. Пронизывающие компоненты

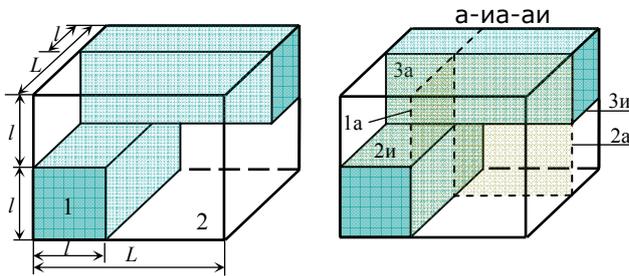


$$N_{nk1}(v, c) = 1 - c^2 \left( \frac{1}{1-v} - 2c \frac{1-c}{1+c} \right)^{-1}, \quad c = \sqrt{m_2}$$

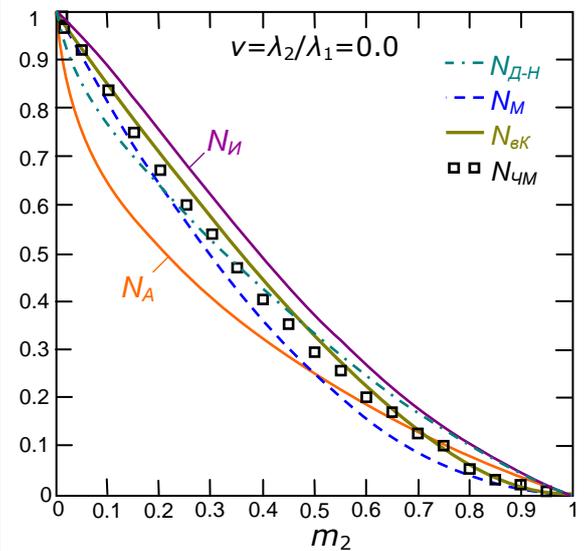
$$N_{nk2}(v, c) = 1 - c^2 \left( \frac{1}{1-v} - c(1-c) \left( 1 + \frac{1-c}{(1+c)^2} \right) \right)^{-1}$$



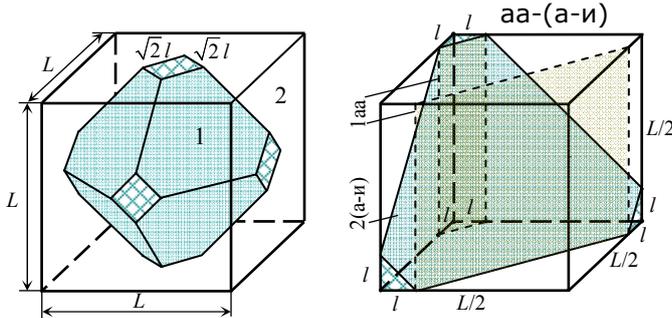
III. Плоско-волоконный тип



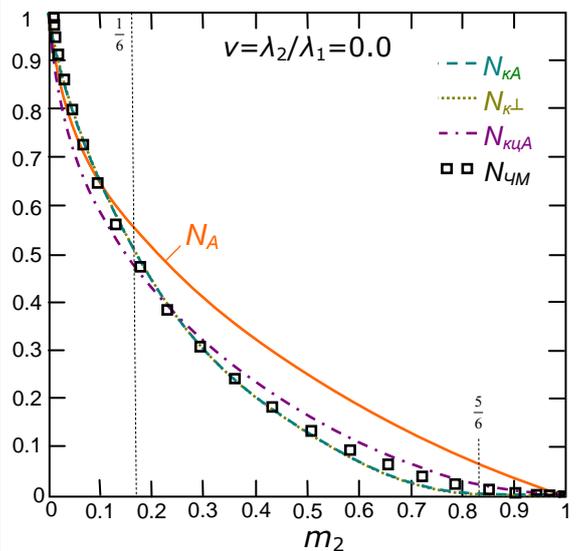
$$N_{ek}(v, m_2) = 2(1 - m_2) \left( 1 - \frac{1}{2 - m_2 + vm_2} \right) + m_2 \frac{v}{1-v} (2 - m_2 + vm_2)$$



IV. Связанные структуры



$$N_{K\perp}(v, c) = \begin{cases} 1 - \frac{c^3/2}{c + 3v/(1-v)}, & m_2 = 1 - c^3/6 < \frac{1}{6}; \\ \frac{c^2}{2 + v} \frac{1-c^2}{2} + v \frac{1/2 + c - c^2}{1 - (1-v)(c+1)/3}, & m_2 = (2c^3 - 3c^2 - 3c + 5)/6 \in [1/6, 5/6]; \\ v \left( 1 - \frac{c^3/2}{c - 3/(1-v)} \right), & m_2 = c^3/6 > \frac{5}{6}; \end{cases}$$



$$N_{кАА}(v, c, d) = c^2 + \frac{(1-c^2)v}{d + (1-d)v},$$

$$m_2 = V_2/V = d \cdot (1-c^2), \quad d = 1-c.$$

В разделе 3.3 сформулирована следующая трехмерная начально-краевая задача (20-29) расчета температурного поля в рамках ЭЯ кубической формы, где условно компоненты: 1 – связующий, 2 – наполнитель (рис. 6).

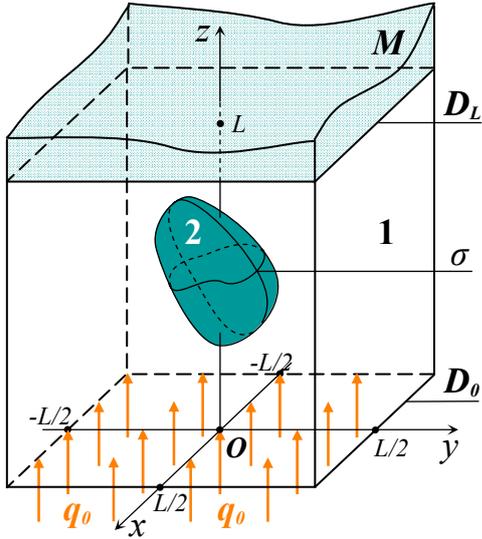


Рис. 6. ЭЯ в форме куба, с включением и полуограниченным массивом сверху

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T), \quad (20)$$

$$T|_{t=0} = T^0 = 0, \quad (21)$$

$$T|_{z=+\infty} = T_\infty = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\pm L/2} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\pm L/2} = 0, \quad (23)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_0 = \text{Const}, \quad (24)$$

$$T|_{z=L-0} = T|_{z=L+0}, \quad (25)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L-0} = \lambda_M \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L+0}, \quad (26)$$

$$T|_{\sigma^-} = T|_{\sigma^+}, \quad (27)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\sigma^-} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\sigma^+}, \quad (28)$$

$$T|_{t=\infty} = T^* = ? \quad (29)$$

Имеем уравнение теплопроводности (20), условия: (21) – начальное, (22) – краевое на бесконечности, (23) – краевое на боковой поверхности ЭЯ, (24) – краевое на нижней границе (тепловой поток интенсивностью  $q_0$ ,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ), (25)–(26) – сопряжение с полуограниченным однородным массивом  $M$ , (27)–(28) – сопряжение компонентов внутри ЭЯ,  $\bar{n}$  – вектор нормали к поверхности контакта компонентов. Требуется найти распределение температурного поля (29) в ЭЯ при установившемся тепловом режиме

Задача в постановке (20)–(29) является нестационарной, поэтому численное ее решение может быть получено с учетом на установление, по *уровневому критерию* в виде  $\langle \hat{q}_L \rangle \geq p q_0$ , где  $\langle q_L \rangle = -\frac{\lambda_1}{L^2} \int_{D_L} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} dx dy$ ,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ , а  $p$  – уровень доверия

наступления квазистационарного теплового режима.

**Утверждение 3.23.** Пусть сеточная функция  $\hat{T}^p$  – численное решение задачи в постановке (20)–(29), соответствующее уровню доверия  $p$ . Тогда справедлива формула расчета ЭКТ ЭЯ

$$\hat{\lambda}_\varepsilon = \frac{2S_B[\hat{T}^p]}{L(\langle \hat{T}_{z=L}^p \rangle - \langle \hat{T}_{z=0}^p \rangle)^2}, \quad (30)$$

где  $\langle \hat{T}_{z=L}^p \rangle$ ,  $\langle \hat{T}_{z=0}^p \rangle$  – средние значения температур соответственно на верхней и нижней гранях ЭЯ,  $S_B$  – базовое значение интеграла энергии (15).

**Алгоритм 3.2.** (Методика расчета ЭКТ ЭЯ с помощью «действия»)

**Шаг 1.** Задать уровень доверия  $p$  (например,  $p=0.95$ ).

**Шаг 2.** Для очередного шага по времени принятым ЧМ рассчитать сетку температур  $\hat{T}^\tau$ , по которой для двумерной сетки  $\hat{T}_{z=L}^\tau$  методами численного дифференцирования вычислить производную по направлению орта  $\bar{k}$ . Методом численного интегрирования получить величину  $\langle \hat{q}_L \rangle$ .

**Шаг 3.** Проверить выполнение условия  $\langle \hat{q}_L \rangle \geq p q_0$ . Если условие выполнено,

то принять  $t_p = t$ ,  $\hat{T}^p = \hat{T}$  и перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 2.

**Шаг 4.** Методами численного интегрирования вычислить средние температуры на торцевых гранях ЭЯ:  $\langle \hat{T}_{z=L}^p \rangle$ ,  $\langle \hat{T}_{z=0}^p \rangle$ .

**Шаг 5.** Методами численного дифференцирования и интегрирования вычислить базовое значение интеграла энергии  $S_B[\hat{T}^p]$  (15).

**Шаг 6.** Используя результаты шагов 4, 5, вычислить ЭКТ  $\hat{\lambda}_3$  по формуле (28) или ОЭКТ БНМ  $\hat{N}_3 = \hat{\lambda}_3 / \lambda_1$  для концентрации  $m_2 = V_2 / L^3$  компонента 2.

Приведенный алгоритм является достаточно объемным по вычислениям, однако обладает тем достоинством, что предоставляет информацию о времени установления  $t_p = f(p)$  квазиоднородности ЭЯ НМ, позволяет уточнять ЭКТ  $\hat{\lambda}_3$ , полагая  $\lambda_M = \hat{\lambda}_3$  при последующих прогонах вычислительной процедуры.

Расчет в рамках ЭЯ температурного поля квазиустановившегося теплового режима (шаг 2 алгоритма 3.2) выполняется с помощью «решателя», который реализует соответствующую задаче (20)–(29) разностную схему

$$c_{Vijk} \frac{T^{\tau+1} - T^\tau}{\Delta t} = (\Lambda^x + \Lambda^y + \Lambda^z) T_{ijk} + O(\Delta t + h^2), \quad (31)$$

где  $T_{ijk}^\tau = T(x_i, y_j, z_k, \Delta t \cdot \tau)$ , верхний индекс  $\tau$  отвечает временному слою, нижние индексы  $i, j, k$  – координатные,  $\Lambda^x, \Lambda^y, \Lambda^z$  – разностные аналоги операторов соответственно  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , где например,

$$\Lambda^x T_{ijk} = \left( \lambda_{i+1/2,j,k} \frac{T_{i+1,j,k} - T_{ijk}}{\Delta x_i^+} - \lambda_{i-1/2,j,k} \frac{T_{ijk} - T_{i-1,j,k}}{\Delta x_i^-} \right), \quad \Delta t - \text{величина шага по времени,}$$

$$\Delta x_i^+, \Delta x_i^-, \Delta y_j^+, \Delta y_j^-, \Delta z_k^+, \Delta z_k^- - \text{по координате от текущего узла } \langle i, j, k \rangle, \text{ обозначено } h^2 = (\Delta x_i^-)^2 + (\Delta x_i^+)^2 + (\Delta y_i^-)^2 + (\Delta y_i^+)^2 + (\Delta z_i^-)^2 + (\Delta z_i^+)^2.$$

Схема (31) получена методом баланса и реализована экономичным методом *дробных шагов* (Н.Н. Яненко) – продольно-одномерная схема. Проведены численные расчеты ОЭКТ ЭЯ разной геометрии, которые согласуются с полученными ранее приближенно-аналитическими формулами (графики в табл. 1, маркеры «□»). Исследована устойчивость разностной схемы (31) и алгоритма 3.2 по входным данным, а также сходимости приближенного решения  $\hat{N}(m_2)$  к точному  $N^*(m_2)$  для ЭЯ разной геометрии при фиксированном значении  $\nu$  ( $\nu = 0.001, \nu = 0.2$ ) в вариантах: 1) сгущение координатной сетки; 2) сгущение временной сетки; 3) изменение уровня доверия  $p$ . Отмечена качественная и порядковая схожесть результатов для ЭЯ рассматриваемых типов (I-IV).

В разделе 3.4 по приближенно-аналитическим формулам (разд. 3.2) и по результатам численного моделирования (разд. 3.3) были рассчитаны ЭКТ ряда НМ. Так интегральным методом получены формулы ОЭКТ для изолированных включений чешуйчатой формы, на основе которой проведена оценка ЭКТ наполненных клеев (пудра А199, чешуйки  $\alpha$ -BN). Рассчитаны ЭКТ ППУ с ячейками закрытого и открытого типов (тип I), углепластиков (карбона) (тип III), а также парафиновой засыпки (тип IV) в зависимости от их пористости. Результаты согласовывались с имеющимися справочными данными. Для бинарных сплавов с

ограниченной растворимостью компонентов предложен алгоритм восстановления ЭКТ по таблице экспериментальных значений, с помощью которого на примере двойной системы  $Al-Mg$  получены значения ЭКТ для температур 20...100...200°C на всем диапазоне массовых концентраций  $Mg$ , рассчитаны ЭКТ сплава  $AlMg5P$  как тройной системы  $Al+5%Mg+0.5%Mn$ .

**В четвертой главе** описаны модули и их взаимодействие в составе созданного комплекса прикладных программ оценивания и прогнозирования коэффициента теплопроводности твердых материалов: упор сделан на методический и алгоритмический состав программных модулей и их функций. Приложение расчетно-графической системы разработано в кросс-платформенной среде Qt Creator 5.3.2 на языке программирования C++ и может быть использовано под операционными системами семейства Windows.

**В заключении** подведены итоги работы, сформулированы основные результаты, представляемые к защите.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработана математическая модель теплопереноса в областях с многомерными разрывами тепло-физических и геометрических характеристик. Обоснован по аппроксимации и устойчивости соответствующий метод численного решения задачи, который использован для исследования теплового процесса в системе «источник-образец-подложка» физического метода МНЛИТ. Предложен критерий и проведено численное оценивание влияния на эволюцию процесса главного фактора иррегулярной стадии – контактного термического сопротивления [1, 2, 8, 12].

2. Разработаны методы численного решения задачи идентификации ТФХ твердых образцов и восстановлению планов ТФЭ, на основе которых предложен вариант интегрированной технологии автоматизации эксперимента, проводимого методом МНЛИТ [3, 8, 9, 14].

3. Исследован и рассмотрен в качестве характеристики стационарного температурного поля функционал типа «действие» (интеграл энергии), являющийся аналогом энергии электростатического поля [4, 5]. Сформирован алгоритм его применения для решения основной задачи теории обобщенной проводимости методом ЭЯ. Получены новые приближенно-аналитические формулы ЭКТ бинарных неоднородных материалов с разными типами структур [6, 10, 11].

4. Разработана математическая модель нестационарного нагрева ЭЯ бинарного неоднородного материала. Предложены критерий установления квазиоднородности в ЭЯ, методика и алгоритм численного определения ЭКТ ЭЯ с помощью интеграла энергии. Получены численные зависимости ЭКТ ЭЯ бинарных неоднородных материалов с разными типами структур [6, 13].

5. Создан комплекс прикладных программ моделирования нестационарных тепловых процессов в твердых материалах, позволяющий прогнозировать и оценивать их ЭКТ предлагаемыми методами [7, 13, 14]. С помощью данного комплекса получены оценки ЭКТ твердых (в том числе неоднородных) материалов численным моделированием нагрева линейного источника (задача прогноза модельной асимптоты регулярного режима, коэффициентная обратная тепловая задача) и элементарной ячейки (задача оценивания ЭКТ на основе вычисления значений интеграла энергии) [6, 11, 12, 13].

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в журналах перечня ВАК

1. *Василевский Д.В., Гарибян Б.А., Спириин Г.Г.* Исследование неравновесности при быстром плавлении вещества // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47, № 4. – С. 637–640.

2. *Василевский Д.В., Гарибян Б.А., Спириин Г.Г.* Тепловая активность дисперсного материала с плавящимся компонентом // Вестник МАИ. – 2009. – Т. 16, № 2. – С. 109–113.

3. *Василевский Д.В., Гарибян Б.А., Спириин Г.Г.* Теплофизические аспекты взаимодействия пилота с внешней средой // Вестник МАИ. – 2010. – Т. 17, № 4. – С. 26–29.

4. *Гарибян Б.А., Спириин Г.Г.* Принцип минимума действия в задачах стационарного теплообмена // Научное обозрение. – 2013. – № 7. – С. 92–98.

5. *Гарибян Б.А., Спириин Г.Г.* Вариационный метод поиска приближенно-аналитических решений стационарных задач теплопроводности с нелинейностью 1-го рода // Информ. и телеком. технологии. – 2014. – № 21. – С. 36–42.

6. *Гарибян Б.А., Спириин Г.Г.* Расчет эффективной теплопроводности авиационных материалов с помощью функционала «действие» // Вестник МАИ. – 2014. – Т. 21, № 4. – С. 168–180.

### Программа для ЭВМ

7. *Гарибян Б.А.* Программа моделирования теплопереноса и оценивания коэффициента теплопроводности твердых материалов методом мгновенного нагрева линейного источника теплоты // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016662711 от 21.11.2016.

### Доклады на научных конференциях

8. *Василевский Д.В., Спириин Г.Г., Гарибян Б.А.* Нестационарная теплопроводность дисперсных материалов // Тез. докл. 8-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2009». – 2009. – С. 70.

9. *Василевский Д.В., Гарибян Б.А., Спириин Г.Г.* Оптимизация параметров при теплофизических измерениях // Тез. докл. 9-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2010». – 2010. – С. 152.

10. *Гарибян Б.А., Спириин Г.Г.* Применение принципа минимума «действия» для расчета стационарных температурных полей // Тез. докл. 12-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2013». – 2013. – С. 291–293.

11. *Гарибян Б.А., Спириин Г.Г., Фрумкин Д.А.* Вычисление коэффициента эффективной теплопроводности авиационных материалов с помощью «действия» // Тез. докл. 12-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2013». – 2013. – С. 413–415.

12. *Гарибян Б.А., Меркулов Г.А.* Математическое моделирование мгновенного нагрева линейного источника теплоты для оценки теплопроводности неоднородных материалов // Тез. докл. 14-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2015». – 2015. – С. 394–396.

13. *Гарибян Б.А., Меркулов Г.А.* Численный метод расчета эффективной теплопроводности гетерогенной среды с помощью «действия» // Тез. докл. 42-ой Международной конференции «Гагаринские чтения – 2016». – 2016, Т. 1. – С. 465–466.

14. *Гарибян Б.А., Меркулов Г.А.* Математическое моделирование и обработка данных эксперимента метода импульсного нагрева цилиндрического источника // Тез. докл. 15-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2016». – 2016. – С. 495–497.