На правах рукописи

Пановский Валентин Николаевич

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ И ПАРАМЕТРАХ ОБЪЕКТА

Специальность 05.13.18
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре «Математическая кибернетика» в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Научный руководитель:	Пантелеев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Лемак Степан Степанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной механики и управления Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» Колбин Илья Сергеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и Управление» РАН
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

Защита состоится «   » _______ 2017 г. в ___ ч. ___ мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Автореферат разослан «   » _________ 2017 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 212.125.04,
кандидат физико-математических наук Н.С. Северина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена разработке интервальных алгоритмов глобальной условной оптимизации для решения задач оптимального управления нелинейными детерминированными динамическими системами при неполной информации о состоянии и параметрах объекта и их применению в задачах авиационной и ракетно-космической техники.

Актуальность работы. В современной математике достаточно большое внимание уделяется решению задач глобальной оптимизации и синтеза оптимального управления динамическими системами. Эти задачи возникают в ходе проектирования конструкций самолетов, вертолетов, космических аппаратов, когда появляется необходимость оптимизации характерных параметров (вес, дальность полета, аэродинамические характеристики) и разработки систем управления как отдельными элементами конструкции, так и объектом в целом. В большинстве случаев для нахождения приближенного решения требуется применять численные методы вследствие невозможности применения аналитических подходов, основанных на использовании необходимых и достаточных условий оптимальности. На сегодняшний день известны эффективные численные методы, разработанные Евтушенко Ю.Г., Моисеевым Н.Н., Крыловым И.А., Черноусько Ф.Л., Тихоновым А.Н., Васильевым Ф.П., Колмановским В.Б., Кротовым В.Ф., Гурманом В.И., Хрусталевым М.М., Федоренко Р.П., Bryson A.E., Ho Y-G, Пропоем А.И., Габасовым Р.Ф., Кирилловой Ф.М., Батуриным В.А., Срочко В.А., Дыхтой В.А., Васильевым С.Н., Levine W.S, Hellerstein J.L., Tilbury D.M. и др.

В последнее время стала более значимой роль метаэвристических алгоритмов оптимизации. Несмотря на отсутствие строгого обоснования, эти алгоритмы позволяют найти приемлемое решение задачи в большинстве практически значимых случаев (не обязательно наилучшее). Достоинством таких алгоритмов является их относительно низкая вычислительная сложность, что позволяет применять их для решения задач повышенной трудности, а так же их ориентированность на поиск именно глобального оптимума. Описание данных алгоритмов можно найти в работах Glover F., Laguna M., Marti R., Gendreau M., Moscato P., Cotta C., Dorigo M., Yang X-S., Holland J., Пантелеева А.В., Метлицкой Д.В., Алешиной Е.А., Карпенко А.П., Курейчика В.М. и др.

Вследствие того, что оптимизируемые математические модели постоянно усложняются, необходимо пробовать новые подходы при разработке численных методов с целью создания вычислительно более эффективных алгоритмов оптимизации. Требуется учитывать неопределенности задания начальных условий, параметров моделей объектов управления, неполноту и неточность информации, получаемой от измерительных устройств. Во многих практических задачах характерные параметры задаются векторами, компоненты которых определяются интервалами их возможного изменения. В связи с вышеприведенными утверждениями применение интервального анализа в качестве базового элемента описания, анализа и численных методов оптимизации является достаточно естественным. Свое развитие эта математическая дисциплина получила в XX веке совместно с распространением практический вычислений. Эволюция интервального анализа и его оформление в виде самостоятельной научной дисциплины напрямую связано с появлением компьютеров. В XX веке произошло несколько важных событий, предшествующих появлению интервального анализа. Среди них работы Young R., Dwyer P.S., Warmus M., Sunaga T. Существенный вклад в становление и развитие интервального анализа внесли Moore R.E., Hansen E., Alefeld G., Krawczyk R., Jaulin L., Nickel K., Брадис В.М., Канторович Л.В., Яненко Н.Н., Шокин Ю.И., Шарый С.П., Добронец Б.С. и др.

Идеи и методы интервального анализа нашли отражение в теории оптимизации и управления. Существующие интервальные методы поиска глобального минимума функции можно условно разделить на две группы: условной и безусловной оптимизации. К методам безусловной оптимизации относят следующие алгоритмы:

интервальный адаптивный алгоритм Мура-Скелбоу (Moore-Skelboe), алгоритмы Ичиды-Фуджи (Ichida-Fujii), Дюсселя (Dussel), интервальный алгоритм «имитации отжига», метод случайного интервального дробления и метод дробления графика Шарого С.П., интервальный эволюционный алгоритм, разработанный Пановым Н.В. и Шарым С.П. К методам условной оптимизации относятся метод Хансена (Hansen) и метод Мура (Moore). Следует отметить, что данный список алгоритмов не является исчерпывающим.

В теории управления интервальный анализ представлен работами Ефанова В.Н., Крымского В.Г., Тляшова Р.З., Gardenes T., Trepat A. (методы на основе применения аппарата функций чувствительности и частотном представлении объекта), Харитонова В.Л. (методы с бесконечными коэффициентами усиления), Смагиной Е.М., Дугаровой И.В. (адаптивные методы), Захарова А.В., Шокина Ю.И., Шарого С.П. (методы модального управления), Шашихина В.Н., Brewer I. (робастное управление) и др.

В настоящее время интервальные методы условной оптимизации еще недостаточно развиты, а в задачах синтеза оптимального управления нелинейными детерминированными системами при неполной информации о состоянии и параметрах объекта они не применялись.

Диссертационная работа посвящена разработке интервальных алгоритмов глобальной условной оптимизации и их применению для решения задач поиска оптимального управления нелинейными непрерывными детерминированными динамическими системами при неполной информации о состоянии и параметрах объекта.

Целью работы является разработка интервальных алгоритмов глобальной условной оптимизации и соответствующего программного обеспечения для решения задач поиска оптимального управления нелинейными непрерывными детерминированными динамическими системами, а также способа применения разработанных алгоритмов для поиска оптимального управления динамическими системами при условиях неполной информации. В диссертации были поставлены и решены следующие задачи:

1) разработка интервальных алгоритмов условной оптимизации на основе инвертера (процедуры поиска прообраза множества значений целевой функции),
2) разработка метаэвристических интервальных алгоритмов условной оптимизации,
3) разработка интервальных алгоритмов поиска оптимального программного управления,
4) разработка интервальных алгоритмов синтеза оптимального в среднем управления пучками траекторий с неполной обратной связью и управления по выходу,
5) разработка комплекса программ, включающего интервальные методы оптимизации и интервальные методы синтеза оптимального управления,
6) применение разработанного алгоритмического и программного обеспечения для решения задач оптимизации технических систем и систем управления авиационно-космическими системами.

Методы исследования. Для исследования теоретических вопросов использовались интервальный анализ, теория оптимизации, численные методы, теория управления, математическая статистика.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые результаты: разработаны интервальные методы глобальной условной оптимизации двух типов (основывающиеся на инвертере и метаэвристические), которые были применены для решения задач поиска оптимального программного управления, оптимального в среднем управления пучками траекторий с неполной обратной связью и оптимального управления по выходу нелинейными детерминированными динамическими системами.

Практическая значимость. В диссертации были разработаны новые интервальные методы решения задач оптимального управления нелинейными детерминированными динамическими системами с неопределенностью параметров и начальных условий, которые применимы в области авиационной и ракетно-космической техники. Создан комплекс программ для решения прикладных задач поиска оптимального управления при помощи интервальных алгоритмов глобальной условной оптимизации. Была произведена государственная регистрация разработанных программ (свидетельства №2015661635, №2016610641), с помощью которых были решены прикладные задачи оптимизации технических систем и управления авиационно-космическими системами.

Достоверность результатов. Работа интервальных алгоритмов глобальной условной оптимизации была проверена на наборе тестовых функций, для которых известно точное решение, а также на прикладных задачах теории управления, для которых известно решение, найденное другими приближенными методами. Приведенные в диссертационной работе результаты не противоречат уже известным решениям. Полученные приближенные решения прикладных задач полностью отвечают физической картине мира.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих научных конференциях: Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2010 – 2013), Всероссийская научно-техническая конференция «Прикладные научно-технические проблемы современной теории управления системами и процессами» (Москва, 2012), 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetics and Verified Numerics (Новосибирск, 2012), Международная конференция «Инжиниринг & Телекоммуникации – EN&T 2015» (Москва/Долгопрудный, 2015), НТК молодых ученых и специалистов ПАО «НПО «Алмаз» по тематике «Актуальные вопросы развития систем и средство ВКО» (Москва, 2013 – 2016). Результаты диссертационного исследования были высоко оценены на конференциях, посвященных информационным технологиям (на научно-технической конференции «Актуальные вопросы развития систем и средств ВКО» в секции «Информационные технологии. Автоматизированные системы управлений войсками и оружием» работы занимали I место в 2013 и 2016 году, II место в 2015 году). Исследования были поддержаны РФФИ (гранты № 16-07-00419-а, № 16-31-00115-мол_а).

Личное участие автора заключается в разработке постановки задачи интервальной ε-минимизации и интервальных алгоритмов глобальной условной оптимизации, а так же их реализация в виде программного комплекса на языке C#. Кроме того, разработанные методы были апробированы автором при решении трех классов задач оптимального управления.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в статьях [1-11] в журналах, входящих в Перечень ВАК, в других изданиях [12-21] и в трудах научных конференций [22-35]. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ [36,37]. Всего по теме диссертации опубликовано 48 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав основной части, заключения, списка использованных источников (125 наименования) и одного приложения. Работа изложена на 141 странице, содержит 49 иллюстраций и 19 таблиц.

Диссертационная работа соответствует паспорту специальности 05.13.18 (в работе проведены разработка, обоснование и тестирование эффективных численных методов с применением современных компьютерных технологий; реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; разработка систем компьютерного и имитационного моделирования; предложена математическая модель интервальной задачи ε-минимизации) и паспорту специальности 05.13.01 (проведена разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем оптимизации и управления).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обзор известных приближенных методов решения задач оптимального управления непрерывными детерминированными динамическими системами и метаэвристических алгоритмов глобальной условной оптимизации, обоснована актуальность проведенных исследований, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, представлены положения, выносимые на защиту, описана структура диссертационной работы.

В первой главе разработаны интервальные алгоритмы глобальной условной оптимизации двух типов: на основе инвертера[1] и метаэвристические алгоритмы.

В разделе 1.1 приведена классическая постановка задачи условной минимизации и предложен ее аналог – задача интервальной ε-минимизации.

Классическая постановка задачи минимизации выглядит следующим образом: пусть имеется некоторый брус $\boldsymbol{s}$ и заданная функция $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; требуется найти решение (точку) $x^* \in \boldsymbol{s}$, такую что

$$f(x^*) = \min_{x\in\boldsymbol{s}} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \boldsymbol{s}: f(x^*) \le f(x), \tag{1}$$

где брус – вектор, компоненты которого состоят из интервалов; условимся в дальнейшем для обозначения интервального вектора (бруса) использовать буквы латинского и греческого алфавита с полужирным начертанием: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_n = [\underline{\boldsymbol{x}}; \overline{\boldsymbol{x}}] = [\underline{\boldsymbol{x}}_1; \overline{\boldsymbol{x}}_1] \times \ldots \times [\underline{\boldsymbol{x}}_n; \overline{\boldsymbol{x}}_n] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\boldsymbol{x}} \le x \le \overline{\boldsymbol{x}}\}$. Множество брусов размерности n обозначим как $\mathbb{IR}^n$.

Для произвольного бруса $\boldsymbol{x}$ определены следующие характеристики[2]: нижняя граница $\min \boldsymbol{x} = \underline{\boldsymbol{x}} = (\underline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{x}}_n)^{\mathrm{T}}$, верхняя граница $\max \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_n)^{\mathrm{T}}$, ширина $\operatorname{wid} \boldsymbol{x} = \operatorname{wid}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}} = (\overline{\boldsymbol{x}}_1 - \underline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{x}}_n) \ge 0$, средняя точка $\operatorname{mid} \boldsymbol{x} = \operatorname{mid}(\boldsymbol{x}) = 0{,}5 \cdot (\overline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{x}}) = 0{,}5 \cdot (\overline{\boldsymbol{x}}_1 + \underline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_n + \underline{\boldsymbol{x}}_n)$, мера бруса $\operatorname{mes} \boldsymbol{x} = \prod_{i=1,\ldots,n} \overline{\boldsymbol{x}}_i - \underline{\boldsymbol{x}}_i$. Кроме этого, добавлена следующая характеристика бруса (омега-характеристику): $\omega(\boldsymbol{x}) = \max_{i=1,\ldots,n} \operatorname{wid}(\boldsymbol{x}) = \max_{i=1,\ldots,n} (\overline{\boldsymbol{x}}_1 - \underline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{x}}_n)$. Обычному вещественному числу $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ соответствует брус $\boldsymbol{x} = [x; x] = [\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{x}_1] \times \ldots \times [\boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{x}_n] \in \mathbb{IR}^n$.

Предложенная постановка задачи *интервальной* ε-минимизации: пусть имеется некоторый брус $\boldsymbol{s}$ и заданная функция $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; требуется найти интервальный вектор $\boldsymbol{p}^*$, такой что

$$\boldsymbol{p}^* \subseteq \boldsymbol{s}, \omega(\boldsymbol{p}^*) \le \varepsilon, \nexists \boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{s}, \omega(\boldsymbol{x}) \ge \varepsilon: \overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} < \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}^*)}, \tag{2}$$

где функция $\boldsymbol{f}:\mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$ называется интервальным расширением функции $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; это означает, что $\{f(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{x}\} \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$. Интервальное расширение функции позволяет получить априорную оценку множества значений искомой функции. Если вместо переменных используются интервалы, а вместо арифметических операций и элементарных функций – их интервальные аналоги и расширения, то полученное расширение называется естественным.

---

[1] Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walster E. Applied Interval Analysis – London: Springer, 2001.

[2] Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные Технологии, 2010, т. 15, №1, с. 7 – 13.
Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: XYZ, 2014.

Задачу (2) можно сформулировать следующим образом: требуется найти брус $\boldsymbol{p}^*$, омега-характеристика которого не превышает заданной величины ε, но при этом не должно существовать другого бруса, на котором верхняя граница значения естественного интервального расширения минимизируемой функции меньше, чем нижняя граница этого расширения на брусе $\boldsymbol{p}^*$.

Если множество допустимых решений в задаче минимизации задается ограничениями $e_i(x)=0, g_j(x)\le 0, i=1,...,c_e, j=1,...,c_g$, то искомую функцию f в (2) предлагается заменить вспомогательной функцией F с использованием интервальных штрафных функций и ее соответствующим интервальным расширением:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{c_e} R_i^e \cdot h_\infty^0(\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x}),[0;0]) + \sum_{j=1}^{c_g} R_j^g \cdot h_\infty^0(\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}),]-\infty;0]), \qquad (3)$$

где $R_i^e, R_j^g, i=1,\ldots,c_e, j=1,\ldots,c_g$ – параметры штрафов, а $h_\infty^0(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \inf\{r\in\mathbb{R}^+ \mid \boldsymbol{a}\subset \boldsymbol{b}+r\cdot[-1;1]\}$ – мера близости двух интервалов. Второе слагаемое в правой части (3) характеризует степень выполнения ограничений-равенств, а третье – ограничений-неравенств.

Известно, что при использовании интервального анализа возникает эффект зависимости[2] (который является причиной огрубления интервальных оценок, полученных с помощью интервального расширения), влияние которого можно исключить или уменьшить различными способами. Поскольку разрабатываемые в настоящей работе алгоритмы интервальной оптимизации применяются далее для решения задач синтеза оптимального управления динамическими системами, то возникает требование, чтобы результирующие брусы имели достаточно малую ширину, и их можно было использовать на практике. Это важно, так как значения координат вектора управления выбираются произвольно в полученном интервале. Следовательно, предполагается, что размеры брусов, участвующих в расчетах, достаточно малы, и поэтому эффект зависимости сказывается на результатах незначительно.

К достоинствам известных интервальных методов оптимизации следует отнести наличие гарантий того, что решение принадлежит полученному в результате брусу. В данной работе применяются два подхода. Первый опирается на использование инвертера и приводит к тому, что гарантируется принадлежность наилучшего значения целевой функции итоговому интервалу, однако принадлежность решения итоговому брусу не гарантируется. Второй подход реализуется с помощью эвристических процедур, управляемых с помощью правил, реализуемых на более высоком уровне иерархии, т.е. метаэвристических методов. При этом решение ищется в виде последовательности брусов. Принадлежность решения полученному в результате наилучшему брусу не гарантируется. В то же время предложенные эвристические процедуры и механизм управления ими направлены на обеспечение выполнения условия (2), которое слабее требования принадлежности точки экстремума итоговому брусу. Введение условия (2) позволяет разрабатывать численные методы поиска экстремума, в которых очередное приближение координаты решения ищется в виде интервала неопределенности, что естественно с точки зрения вычислительной математики.

В разделе 1.2 разработаны интервальные алгоритмы оптимизации, использующие *инвертер* и названные соответственно инверсными. Инвертер $INV(f,\boldsymbol{s},\boldsymbol{l},\varepsilon)$ - функция, которая по заданному интервалу $\boldsymbol{l}$, функции f и параметру точности ε находит в области поиска $\boldsymbol{s}$ множество брусов $\mathcal{P}$ такое, что $\forall \boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$ справедливо выражение $\boldsymbol{x}\subseteq\boldsymbol{s}, \omega(\boldsymbol{x})\ge\varepsilon, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\subseteq\boldsymbol{l}$ или выражение $\boldsymbol{x}\subseteq\boldsymbol{s}, \omega(\boldsymbol{x})<\varepsilon, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cap\boldsymbol{l}\ne\varnothing$.

Разработаны пять интервальных алгоритмов условной минимизации, использующих в ходе поиска инвертер.

Стратегия *метода дихотомии целевого интервала* заключается в следующем: считается значение естественного интервального расширения минимизируемой функции на области поиска (полученное значение рассматривается как целевой интервал). На каждой итерации алгоритма целевой интервал делится на две части. Далее применяется инвертер к первой части. Если выработанное им множество непустое, то проверяется условие точности (омега-характеристика целевого интервала должна быть меньше некоторого заданного значения). В случае его невыполнения первая часть принимается за новый целевой интервал, начинается новая итерация алгоритма. Если условие точности выполняется, то в выработанном инвертером множестве содержится брус, который содержит точку минимума. Если выработанное инвертером множество при применении к первой части пустое, то вторая часть принимается за новый целевой интервал, и алгоритм начинает новую итерацию.

Стратегии *методов отсечки виртуальных значений* и *стохастической отсечки виртуальных значений* аналогичны стратегии метода дихотомии целевого интервала. Основное отличие заключается в наличии стадии сжатия первичного целевого интервала. Смысл данной процедуры заключается в предобработке целевого интервала с целью уменьшения количества итераций алгоритма за счет удаления части виртуальных значений. Виртуальными значениями называются значения, которые не может принимать функция на целевом брусе, но которые попали в интервал оценки вследствие особенностей построения интервального расширения. Между собой алгоритмы отличаются способом реализации данной стадии: в первом случае используется разбиение области поиска (т.е. исходная область поиска представляется в виде объединения конечного числа взаимно непересекающихся брусов), во втором происходит генерация равномерно распределенной случайной величины для уменьшения ширины первого целевого интервала.

В ходе работы *метода стохастических вырываний* происходит оценка брусов за счет генерации из области поиска небольших интервальных векторов (омега-характеристика которых не превосходит некоторого, заранее объявленного значения). Для отбраковывания брусов используется инвертер. В процессе данных генераций будет постепенно уменьшаться ширина целевого интервала, в котором хранится значение минимума функции. При достижении необходимой ширины целевой интервал инвертируется и из полученного множества выбирается решение.

Обобщенный инверсный метод представляет собой объединение всех перечисленных ранее алгоритмов и отражает общую тенденцию к созданию гибридных методов. Процедуры сжатия начального целевого интервала и проверки текущего целевого интервала вынесены в отдельные заменяемые модули, состав и параметры которых определяются пользователем.

Исследование предложенных алгоритмов на общепринятом наборе тестовых задач показало, что инверсные алгоритмы характеризуются относительно низкой скоростью работы. Однако их применение приводит к гарантированным результатам.

Выделим свойства, характерные для всех предложенных в диссертации инверсных алгоритмов:

- в ходе работы алгоритмов вырабатывается множество брусов $\mathcal{P}_\varepsilon = \{\boldsymbol{p}^i \mid \omega(\boldsymbol{p}^i) \le \varepsilon, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}^i) \cap \boldsymbol{y} \ne \varnothing\}$, где $\boldsymbol{y}$ – последний целевой интервал, ε – параметр точности,
- генерируется последовательность из N вложенных целевых интервалов (конец процедуры генерации последовательности заканчивается при выполнении условия $\omega(\boldsymbol{y}) < \zeta$): интервал $\boldsymbol{y}$ дихотомически делится на два интервала $\boldsymbol{y}^1 = [\underline{y}; (\underline{y} + \overline{y})/2]$ и $\boldsymbol{y}^2 = [(\underline{y} + \overline{y})/2; \overline{y}]$, далее один из интервалов $\boldsymbol{y}^1$ или $\boldsymbol{y}^2$ рассматривается как целевой, и процедура повторяется над ним, и так далее (при этом новым целевым интервалом становится $\boldsymbol{y}^1$, если $INV(f, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}^1, \varepsilon) \ne \varnothing$, а в противном случае – $\boldsymbol{y}^2$).

Таким образом, используя выделенные выше свойства, можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть дана последовательность интервалов $\{\boldsymbol{y}^k\}_{k=1}^N$, таких что $\forall k=1,...,N-1: \boldsymbol{y}^{k+1} \subset \boldsymbol{y}^k$, $\forall k=1,...,N: INV(f,\boldsymbol{s},\boldsymbol{y}^k,\varepsilon) \neq \varnothing$ (множество, вырабатываемое инвертером непустое), а при этом $INV(f,\boldsymbol{s},[\underline{\boldsymbol{y}^k}-\omega(\boldsymbol{y}^k);\underline{\boldsymbol{y}^k}],\varepsilon)=\varnothing$ (множество, вырабатываемое инвертером пустое), и $\omega(\boldsymbol{y}^N)<\zeta$. Тогда $\boldsymbol{p}^* = \mathrm{Arg}\min\limits_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}_\varepsilon} \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})}$ – решение задачи интервальной ε-минимизации, где $\mathcal{P}_\varepsilon = \{\boldsymbol{p}_\varepsilon \mid \omega(\boldsymbol{p}_\varepsilon) \le \varepsilon, \exists! i: \boldsymbol{p}_\varepsilon \subseteq \boldsymbol{p}^i \in \mathcal{P}\}$, $\mathcal{P} = INV(f,\boldsymbol{s},\boldsymbol{y}^N,\varepsilon)\}$.

Теорема 2. Пусть $x^* = \mathrm{Arg}\min\limits_{x\in\boldsymbol{s}} f(x)$, а $\boldsymbol{p}^*$ - решение задачи интервальной ε-минимизации, удовлетворяющее условиям теоремы 1, тогда $f(x^*) \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}^*)$.

В разделе 1.3 разработаны семь метаэвристических интервальных алгоритмов оптимизации.

В основе *метода усредненных концов путей* лежат следующие процедуры: построение случайной сетки (представляет собой разбиение бруса $\boldsymbol{s}$ на множество $\{\boldsymbol{n}^i\}_{i=1}^N$ непересекающихся брусов, таких что $\boldsymbol{s} = \bigcup\limits_{i=1}^N \boldsymbol{n}^i$ на области поиска); выбор случайного бруса из сетки; поиск пути, начинающегося от выбранного бруса, до «оптимального» решения (который рассматривается как последний брус). Все последующие брусы должны иметь общую сторону с предыдущим интервальным вектором, а нижние границы значения естественного интервального расширения минимизируемой функции должны уменьшаться; полученный в ходе выполнения описанной процедуры «оптимальный» брус запоминается. Процедура повторяется несколько раз. Из полученных брусов берутся их средние точки, на основе которых строится новый целевой брус (он рассматривается как наиболее вероятное, среднее положение завершения пути, начатого из любой области), к которому снова применяется описанная ранее процедура. Так повторяется до тех пор, пока омега-характеристика целевого бруса не будет удовлетворять условию точности.

Стратегия *метода стохастической сетки* заключается в построении сетки на брусе поиска случайным образом. Она представляет собой разбиение бруса $\boldsymbol{s}$ на множество $\{\boldsymbol{n}^i\}_{i=1}^N$ непересекающихся брусов, таких что $\boldsymbol{s} = \bigcup\limits_{i=1}^N \boldsymbol{n}^i$. На каждом элементе сетки ищется значение естественного интервального расширения минимизируемой функции (в этом заключается основное отличие от метода среднего пути, где значение естественного интервального расширения рассматривается не на всех элементах сетки). Такая процедура повторяется несколько раз. В итоге исходная область поиска разбивается на подобласти, каждая из которых имеет свой вес, подсчитанный на основе полученных значений естественного интервального расширения минимизируемой функции. Из подобластей выбирается самая перспективная (с большим весом), и алгоритм повторяется уже над ней.

В основе *интервального разбросанного поиска* лежит обработка множества элементарных исходов, состоящих из найденных на предыдущем этапе «перспективных» брусов. Фактически обработка заключается в комбинации, улучшении и обновлении множества элементарных исходов. В основе предложенного метода лежат пять операций: генерация решений, конструирование и обновление множества элементарных исходов, генерация подмножеств, комбинация решений, улучшение решений. Процедура повторяется до тех пор, пока ширина целевого бруса не будет удовлетворять условию точности.

Интервальные генетические алгоритмы являются эвристическими алгоритмам поиска, которые имитируют свойства процессов естественной эволюции. В основе этих алгоритмов лежат наследование, мутация, отбор и скрещивание. При описании используются определения из генетики: популяция – конечное множество особей (представляются хромосомами с закодированными в них множествами параметров), хромосомы – упорядоченные последовательности генов, ген – атомарный элемент генотипа, в частности хромосомы; генотип – набор хромосом данной особи, фенотип – набор значений, соответствующих данному генотипу. В интервальном генетическом алгоритме с помощью вектора генов (генотипа) кодируется брус, который ассоциирован с отдельной особью. В разработанном алгоритме могут использоваться два вида кодирования: модифицированное бинарное, где каждая компонента бруса представляется в виде последовательностей нулей и единиц, и тернарное (LR), использующее систему из трех символов.

Стратегия *интервального метода взрывов*: случайным образом на области поиска устанавливаются бомбы, каждая из которых ассоциируется с некоторым брусом, описывающим ее местоположение. Кроме этого, бомбы сортируются по возрастанию нижней границы значения естественного интервального расширения минимизируемой функции. В алгоритме есть два итерационных этапа: глобального поиска и уточняющего, которые отличаются процедурой взрыва. В первом случае реализуется взрыв по всем координатам, а во втором – по одной из координат. На итерационных этапах алгоритма происходит расчет мощностей бомб; реализация взрыва, в ходе которого каждая из бомб образует осколки, которые разлетаются в разные стороны; обновление списка бомб. Алгоритм заканчивает работу, когда превышено максимальное количество итераций. Из списка бомб выбирается та, которой соответствует наименьшая нижняя граница значения естественного интервального расширения минимизируемой функции.

Адаптивный интервальный алгоритм в ходе своей работы оперирует тремя группами брусов, каждая из которых имеет свое коллективное знание и способ его обработки и использования. Под коллективным знанием подразумевается суммарная информация о целевой функции, накопленная в ходе работы алгоритма и представленная особым образом. В алгоритме имеются следующие группы: $Best$ – группа наиболее перспективных брусов (им соответствует наименьшее значение нижней границы естественного интервального расширения минимизируемой функции), $Worst$ – группа наименее перспективных брусов (им соответствует наибольшее значение нижней границы естественного интервального расширения минимизируемой функции), $Average$ – группа брусов, не вошедших в предыдущие группы.

Свойство адаптивности данного алгоритма реализуется за счет анализа коллективного знания каждой группы, т.е. использования особенностей целевой функции и применения различных механизмов генерации новых брусов.

Самоорганизующийся интервальный алгоритм имитации эволюции колонии бактерий является самоорганизующимся интервальным алгоритмом глобальной условной оптимизации. В ходе своей работы он имитирует процесс эволюции колонии бактерий (каждая бактерия представляется брусом, описывающим область ее обитания), цель которого заключается в обеспечении всем особям колонии наилучшего места обитания (чем место лучше, тем меньше нижняя граница естественного интервального расширения минимизируемой функции). Каждая бактерия отличается следующими параметрами: способом передвижения; стратегией передвижения; параметрами, описывающими возможную область перемещения; текущим направлением движения; областью обитания.

Каждая итерация работы алгоритма представляет собой реализацию одного эволюционного цикла, в процессе которого бактерии колонии находят наилучшее место обитания и дают потомство (следующее поколение колонии). В ходе процесса построения новой колонии используются следующие правила: 30% составляют абсолютно случайные, заново сгенерированные бактерии, 30% – бактерии, расположенные в областях обитания, найденных прошлым поколением, 30% – бактерии, расположенные в той же начальной точке, что и прошлое поколение, но направление поиска противоположное, а 10% новой популяции составляют бактерии, расположенные в наилучшем месте, найденном за все время работы алгоритма.

Реализация данных правил позволяет поддерживать необходимый уровень «случайности» и наследования информации, найденной предыдущим поколением.

Для всех интервальных алгоритмов оптимизации, разработанных в разделах 1.2 и 1.3, приведены детальные пошаговые алгоритмы, даны рекомендации по выбору их параметров с учетом результатов тестирования на общепринятом наборе задач (benchmark functions) со сложной поверхностью уровня целевых функций.

Во второй главе предложены методы приближенного решения трех классов задач оптимального управления, в которых применяются разработанные в главе 1 интервальные алгоритмы глобальной условной оптимизации. Наиболее общая постановка задачи соответствует задаче нахождения оптимального управления по выходу нелинейными детерминированными динамическими системами при неопределенности в параметрах модели объекта управления и модели измерений, которая в частом случае соответствует задачам поиска оптимального программного управления и задаче поиска оптимального управления пучками траекторий.

Поведение модели объекта управления описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), p^1), \quad (4)$$

где $p^1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ – вектор параметров объекта, $f(t,x,u,p^1) = (f_1(t,x,u,p^1),\ldots, f_n(t,x,u,p^1))^{\mathrm{T}}$ – непрерывно-дифференцируемая вектор-функция.

Возможные начальные состояния и значения параметров системы (4) заданы брусами $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{p}^1$ соответственно: $x(t_0) = x_0 \in \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \boldsymbol{p}^1 \subset \mathbb{R}^{s_1}$. В момент окончания функционирования системы t_1 должны выполняться конечные условия. Множество $\boldsymbol{p}^1 = \boldsymbol{p}_1^1 \times \ldots \times \boldsymbol{p}_{s_1}^1$ характеризует неопределенность параметров модели объекта управления.

Предполагается, что модель измерений описывается уравнением выхода

$$z = h(t, x, p^2), \quad (5)$$

где $z \in \mathbb{R}^m$ - вектор выхода, $p^2 \in \mathbb{R}^{s_2}$ - вектор параметров модели измерений, $h(t,x,p^2)$ - непрерывная вектор-функция. Возможные значения параметров модели измерения заданы брусом: $p^2 \in \boldsymbol{p}^2 \subset \mathbb{R}^{s_1}$. Множество $\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p}_1^2 \times \ldots \times \boldsymbol{p}_{s_2}^2$ характеризует неопределенность параметров модели измерений.

Управление, применяемое в каждый момент времени t, ищется в виде управления по выходу: $u(t) = \boldsymbol{u}(t, z(t))$.

Каждому допустимому управлению $\boldsymbol{u}(t,z) \in U$ и множествам $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{p}^1$ и $\boldsymbol{p}^2$ поставим в соответствие пучок (ансамбль) траекторий $x(t, \boldsymbol{u}(t, z(t)), x_0, p^1, p^2)$:

$$X(t, \boldsymbol{u}(t,z)) = \bigcup \{x(t, \boldsymbol{u}(t, z(t)), x_0, p^1, p^2) \mid x_0 \in \boldsymbol{\Omega}, p^1 \in \boldsymbol{p}^1, p^2 \in \boldsymbol{p}^2\}, \quad (6)$$

т.е. объединение решений уравнения (4) по всем возможным начальным состояниям и параметрам модели объекта управления и модели измерений. Пучок траекторий порождается множествами $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{p}^1$, $\boldsymbol{p}^2$ и управлением $\boldsymbol{u}(t,z) \in U$.

Качество управления пучком траекторий предлагается оценивать величиной функционала

$$J[\boldsymbol{u}(t,z)] = \frac{\int_{\boldsymbol{p}^2}\int_{\boldsymbol{p}^1}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \bar{I}(x_0, p^1, p^2, d)dx_0 dp^1 dp^2}{\text{mes}\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\text{mes}\,\boldsymbol{p}^1\cdot\text{mes}\,\mathbf{p}^2}, \tag{7}$$

где $\text{mes}\,[\cdot]$ – мера множества.

Требуется найти такое управление $\boldsymbol{u}^*(t,z)\in U$, что $\boldsymbol{u}^*(t,z) = \text{Arg}\min\limits_{\boldsymbol{u}(t,z)\in U} J[\boldsymbol{u}(t,z)]$.

Стратегия синтеза оптимального управления с неполной обратной связью заключается в переходе к конечномерной задаче поиска минимума функционала с помощью подбора коэффициентов, образующих разложение функции управления по некоторому ортонормированному базису. Для этого компоненты управления $\boldsymbol{u}(t,z) = (\boldsymbol{u}_1(t,z),\ldots,\boldsymbol{u}_q(t,z))^T$ представляются в следующем виде $\boldsymbol{u}_i(t,z) = \text{sat}(g_i(t,z(t)),\boldsymbol{U}_i), i=\overline{1,q}$, где

$$\text{sat}(g_i(t,z(t)),\boldsymbol{U}_i) = \begin{cases} \underline{\boldsymbol{U}}_i, g_i(t,z(t)) < \underline{\boldsymbol{U}}_i, \\ \overline{\boldsymbol{U}}_i, g_i(t,z(t)) > \overline{\boldsymbol{U}}_i, \\ g_i(t,z(t)), g_i(t,z(t)) \in \boldsymbol{U}_i, \end{cases} \tag{9}$$

где $\text{sat}\{\cdot\}$ функция насыщения, а функции $g_i(t,z)$ предлагается искать в виде разложения по системе базисных функций:

$$g_i(t,z) = \sum_{k_0=0}^{A_0}\sum_{k_1=0}^{A_1}\ldots\sum_{k_m=0}^{A_m} a^i_{k_0,\ldots,k_m}\ \varphi^0_{k_0}(\tilde{t})\ \varphi^1_{k_1}(\tilde{z}^1_1)\ \ldots\ \varphi^m_{k_m}(\tilde{z}^1_m), \tag{10}$$

где $a^i_{k_0,k_1,\ldots,k_m}$ – неизвестные коэффициенты; A_j –масштабы усечения; $\{\varphi^j_{k_j}(\cdot)\}^{A_j}_{k_j=0}$ – системы базисных функций по переменным, которые используются в управлении; $\tilde{t} = \text{proj}^{\boldsymbol{e}_0}_{\boldsymbol{d}_0}(t), \tilde{z}_1 = \text{proj}^{\boldsymbol{e}_1}_{\boldsymbol{d}_1}(z_1),\ldots,\tilde{z}_m = \text{proj}^{\boldsymbol{e}_m}_{\boldsymbol{d}_m}(z_m)$ – проекции значений времени и выходных переменных, применяемых в управлении, на области определения соответствующих систем базисных функций. Здесь $\boldsymbol{e}_j, j=\overline{0,m}$ – интервалы оценки возможных значений переменной ($\omega(\boldsymbol{e}_j)\neq\infty, j=\overline{0,m}$); $\boldsymbol{d}_j, j=\overline{0,m}$ – области определения используемой системы базисных функций; $\text{proj}^{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{d}}(x) = (\omega(\boldsymbol{d})/\omega(\boldsymbol{e}))\cdot(x-\underline{\boldsymbol{e}})+\underline{\boldsymbol{d}}$, $\omega(\boldsymbol{d})\neq\infty$ – функция проекции величины x на область определения системы базисных функций. В качестве систем базисных функций предлагаются полные системы ортонормированных функций, например, полиномы Лежандра, Чебышева и Гегенбауэра.

Для поиска оптимального управления пучками траекторий с неполной обратной связью и оптимального управления по выходу необходимо найти оптимальный с точки зрения значения функционала вектор интервальных коэффициентов, входящих в разложение (10), являющийся гиперстолбцовой матрицей:

$$\boldsymbol{a} = \left(\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}^1_{0,0,\ldots,0}\\ \boldsymbol{a}^1_{1,0,\ldots,0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}^1_{A_0,0,\ldots,0}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}^1_{0,1,\ldots,0}\\ \boldsymbol{a}^1_{1,1,\ldots,0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}^1_{A_0,1,\ldots,0}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\ldots\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}^1_{0,A_1,\ldots,A_m}\\ \boldsymbol{a}^1_{1,A_1,\ldots,A_m}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}^1_{A_0,A_1,\ldots,A_m}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\ \ldots\ \left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}^q_{0,0,\ldots,0}\\ \boldsymbol{a}^q_{1,0,\ldots,0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}^q_{A_0,0,\ldots,0}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}^q_{0,1,\ldots,0}\\ \boldsymbol{a}^q_{1,1,\ldots,0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}^q_{A_0,1,\ldots,0}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\ldots\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}^q_{0,A_1,\ldots,A_m}\\ \boldsymbol{a}^q_{1,A_1,\ldots,A_m}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}^q_{A_0,A_1,\ldots,A_m}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

Для поиска интервального значения функционала качества управления используется интервальный анализ. Если система, описывающая поведение модели объекта управления, нежесткая, для ее численного интегрирования применяются явные методы (методы Эйлера, Эйлера-Коши, методы Рунге-Кутты различных порядков и др.). Если же система жесткая, применяются неявные методы численного интегрирования (неявный метод Эйлера, метод трапеций, Адамса-Моултона, Гира и др.). Вычисление правых частей системы производится по правилам интервальной арифметики. Таким образом, брусу $\boldsymbol{a}$ ставится в соответствие интервал $J(\boldsymbol{a})$. Для решения задачи интервальной ε-минимизации применяются методы, разработанные в главе 1.

В частном случае, когда множество возможных значений параметров модели и объекта наблюдений представляются точечным множеством, искомая задача становится задачей поиска оптимального управления пучками траекторий. Если при этом множество начальных состояний объекта задано точкой, то решается задача поиска оптимального программного управления (в этом случае управление может искаться также в классе кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций).

В третьей главе приведена структура и примеры работы, созданного на основе алгоритмов, разработанных в главах 1 и 2, комплекса программ «Интервальные методы оптимизации нелинейных детерминированных систем». Комплекс разработан в среде Microsoft Visual Studio 2015, на языке C#. Он содержит два основных модуля алгоритмов оптимизации и модуль поддержки, в котором реализованы следующие элементы: интервальные арифметики, алгоритм инвертера, интервальные расширения и процедуры интегрирования. В первом реализованы два класса интервальных алгоритмов глобальной условной оптимизации (на основе инвертера и метаэвристические). Во втором – четыре блока основных решаемых задач. Общая схема комплекса представлена на рис. 1.

Рис. 1. Схема программного комплекса

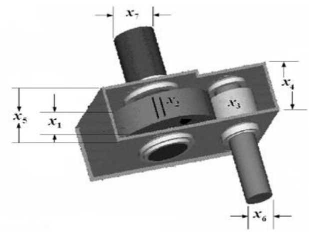
В комплексе поддержана возможность выбора задач как из готового списка, так и загрузка сторонней пользовательской задачи, реализованной с помощью предлагаемого программного шаблона.

В четвертой главе решены модельные и прикладные задачи:
оптимизации технических систем: *определение параметров сварной балки* (целью является определение минимальной по стоимости конструкции балки, удовлетворяющей ограничениям по напряжению сдвига, изгиба, продольной нагрузке и отклонению края), *определение параметров сосуда высокого давления* (целью является определение параметров баллона для хранения сжатого газа, минимизировав его стоимость), *определение параметров редуктора* (целью является определение минимальной по весу конструкции редуктора, при этом конструкция редуктора должна удовлетворять ограничениям по напряжению изгиба зубцов шестерни, поверхностному напряжению, поперечным отклонениям валов и напряжению на валах), *определение параметров натяжной/компрессионной пружины* (целью является определение минимальной по весу конструкции пружины, ограниченной по минимальному отклонению, напряжению сдвига, частоте колебаний и ограничениям

на внешний диаметр); ***оптимального управления объектами авиационно-космической техники***: *управление солнечным парусом* (поиск оптимального по быстродействию управления для межпланетной миссии Земля-Меркурий), *стабилизация спутника* (задача гашения вращательного движения спутника с помощью установленных на нем двигателей), *задача перехвата* (задача поиска терминального управления, в ходе которой реализуется маневр наведения), *задача преследования* (трехмерная задача реализации маневра наведения), *задача командной навигации* (вариант задачи перехвата с несколькими перехватчиками), *приземление гиперзвукового летательного аппарата* (управление ГЗЛА на скоростях более 5М).

Пример 1. В рассматриваемой задаче требуется определить параметры редуктора, учитывая физические ограничения.

Целью является определение минимальной по весу конструкции редуктора, описываемой вектором параметров $x=\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\right)^T$, соответствующих ширине лицевой стороны, длине зубцов, числу зубцов на шестерне (целочисленная величина), длине первого вала, длине второго вала, диаметру первого вала и диаметру второго вала. Конструкция редуктора должна удовлетворять ограничениям по напряжению изгиба зубцов шестерни, поверхностному напряжению, поперечным отклонениям валов и напряжению на валах. Задача может быть формализована следующим образом:



$$f\left(x\right)=0,7854\cdot x_1\cdot x_2^2\cdot(3,3333\cdot\left\langle x_3\right\rangle^2+14,9334\cdot\left\langle x_3\right\rangle-43,0934)-$$

$$-1,508\cdot x_1\cdot(x_6^2+x_7^2)+7,4777\cdot(x_6^3+x_7^3)+0,7854\cdot(x_4\cdot x_6^2+x_5\cdot x_7^2),$$

$$g^1(x)=27/(x_1\cdot x_2^2\cdot\left\langle x_3\right\rangle)-1\le 0,\quad g^2(x)=397,5/(x_1\cdot x_2^2\cdot\left\langle x_3\right\rangle^2)-1\le 0,$$

$$g^3(x)=1,93\cdot x_4^3/(x_2\cdot\left\langle x_3\right\rangle\cdot x_6^4)-1\le 0,\quad g^4(x)=1,93\cdot x_5^3/(x_2\cdot\left\langle x_3\right\rangle\cdot x_7^4)-1\le 0,$$

$$g^5(x)=\sqrt{\left((745\cdot x_4)/(x_2\cdot\left\langle x_3\right\rangle)\right)^2+16,9\cdot 10^6}\Big/(110\cdot x_6^3)-1\le 0,$$

$$g^6(x)=\sqrt{\left((745\cdot x_5)/(x_2\cdot\left\langle x_3\right\rangle)\right)^2+157,5\cdot 10^6}\Big/(85\cdot x_7^3)-1\le 0,$$

$$g^7(x)=x_2\cdot\left\langle x_3\right\rangle/40-1\le 0, g^8(x)=5\cdot x_2/x_1-1\le 0, g^9(x)=x_1/(12\cdot x_2)-1\le 0,$$

$$g^{10}(x)=(1,5\cdot x_6+1,9)/x_5-1\le 0, g^{11}(x)=(1,1\cdot x_7+1,9)/x_5-1\le 0,$$

$$\boldsymbol{s}=[2,6;3,6]\times[0,7;0,8]\times[17;28,99]\times[7,3;8,3]\times[7,8;8,3]\times[2,9;3,9]\times[5,0;5,5],$$

где $\left\langle\cdot\right\rangle$ – целая часть числа.

Задача была решена метаэвристическими интервальными алгоритмами условной оптимизации (интервальным методов взрывов, интервальным генетическим алгоритмом, адаптивным интервальным алгоритмом). Все алгоритмы дали приблизительно одинаковые результаты. В качестве примера приведем решение, найденное с помощью адаптивного интервального алгоритма, и соответствующие интервальные значения целевой функции и ограничений: $\tilde{\boldsymbol{x}}=[3,4999;3,5002]\times[0,7000;0,7001]\times[17,0000;17,0003]\times[7,3021;7,3023]\times[7,8001;7,8002]\times[3,3501;3,3503]\times[5,2864;5,2865]$, $\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})=[2996,0899;2996,8389]$, $\boldsymbol{g}^1(\tilde{\boldsymbol{x}})=[-0,0742;-0,0738]$, $\boldsymbol{g}^2(\tilde{\boldsymbol{x}})=[-0,1982;-0,1979]$, $\boldsymbol{g}^3(\tilde{\boldsymbol{x}})=[-0,4988;-0,4986]$, $\boldsymbol{g}^4(\tilde{\boldsymbol{x}})=[-0,9015;-0,9014]$, $\boldsymbol{g}^5(\tilde{\boldsymbol{x}})=[-0,0001;0,0001]$, $\boldsymbol{g}^6(\tilde{\boldsymbol{x}})=[0,0001;0,0002]$,

$\boldsymbol{g}^{7}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = [-0{,}7025;-0{,}7024]$, $\boldsymbol{g}^{8}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = [-0{,}0001;0{,}0002]$, $\boldsymbol{g}^{9}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = [-0{,}5834;-0{,}5833]$, $\boldsymbol{g}^{10}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = [-0{,}1122;-0{,}1121]$, $\boldsymbol{g}^{11}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = [-0{,}0109;-0{,}0108]$.

Полученные результаты близки к решению, найденному с помощью метода частиц в стае (Cagnina L.C., Esquivel S.C. Solving Engineering Optimization Problems with the Simple Constrained Particle Swarm Optimizer // Informatica, No. 32, 2008, pp. 319 – 326), что свидетельствует об эффективности применения интервальных алгоритмов оптимизации.

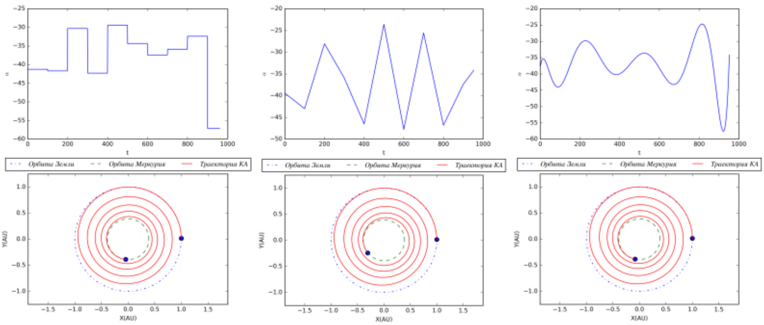
Пример 2. Рассматривается задача поиска оптимального по быстродействию терминального программного управления перспективным космическим летательным аппаратом (КЛА) – солнечным парусом, реализующим межпланетную миссию. Данная задача заключается в переходе с орбиты Земли на орбиту Меркурия за минимальное время.

Система, описывающая данный объект, выглядит следующим образом:

$$\dot{r}(t) = u,\ \dot{\theta}(t) = v/r,\quad \dot{u}(t) = v^2/r - (\mu/r^2)\cdot(1-\beta\cdot\cos^3\alpha),\quad \dot{v}(t) = -u\cdot v/r + \mu\cdot\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha/r^2,$$

где r, θ – радиальная и угловая позиции соответственно, u, v – радиальная и тангенциальная скорости, α – угол тангажа (переменная управления), $\beta = 0{,}042$ – параметр яркости солнечного паруса, $\mu = G\cdot M_S \approx 1{,}327474512\cdot 10^{20}$ м$^3\cdot$с$^{-2}$ – солнечное гравитационное ускорение, $G = 6{,}67408\cdot 10^{-11}$ м$^3\cdot$кг$^{-1}\cdot$с$^{-2}$ – универсальная гравитационная постоянная, $M_S = 1{,}989\cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца. Ограничение на управление: $\boldsymbol{U} = [-\pi/2;\pi/2]$. Начальное состояние задано следующим образом: $t_0 = 0$, $r(t_0) = 1\ \text{AU} = 1{,}496\cdot 10^{11}$ м, $\theta(t_0) = 0$, $u(t_0) = 0$ м/с, $v(t_0) = 29{,}8$ км/с $= 2{,}98\cdot 10^4$ м/с. В момент окончания функционирования системы должны выполняться конечные условия: $r(t_1) - 5{,}8344\cdot 10^{10} = 0$, $u(t_1) = 0$ м/с, $v(t_1) - 4{,}79\cdot 10^4 = 0$. Функционал качества управления имеет вид: $\bar{I}(x_0,d) = \underbrace{t_1/86400}_{I(d)} + \sum_{i=1}^{3} R_i^{(1)}\cdot H_i^{(1)}$, где $R_1^{(1)} = R_2^{(1)} = R_3^{(1)} = 10^5$. Таким образом, необходимо решить задачу поиска оптимального программного терминального управления, оптимального по быстродействию.

На рис. 3 изображены управления различных типов (найденные с помощью интервального метода взрывов) и соответствующие им траектории движения КЛА.



а) б) в)

Рис. 3. Управления, найденные в разных классах функций (а – кусочно-постоянное, б – кусочно-линейное, в – в виде разложения по системе полиномов Лежандра) и соответствующие им траектории

С помощью предложенной в разделе 2 методики найдены программные управления, принадлежащие к разным классам функций (переход с орбиты Земли на орбиту Меркурия для кусочно-постоянного управления был произведен за 961 день, для кусочно-линейного – за 953 дня, для управления, найденного в виде разложения по базису, – за 952 дня; использовались интервальный метод взрывов, интервальный генетический алгоритм и адаптивный интервальный алгоритм соответственно). В работах Wang Y., Zhu M., Wei Y., McInnes C.R., Hughes G.W. были найдены управления, с помощью которых этап перехода на орбиту Меркурия завершался за 933,9[3] и 1043,3[4] дней соответственно. Таким образом, с помощью интервальных методов оптимизации были синтезированы управления, превосходящие и сравнимые по качеству с современными методами, используемыми в аэрокосмической области.

Пример 3. Пусть движения цели (T) и перехватчика (I) описываются следующими системами дифференциальных уравнений:

$$\dot r_T = V_T \cos(\gamma_T - \lambda_T), \quad \dot\lambda_T = (V_T / r_T) \sin(\gamma_T - \lambda_T), \quad \dot\gamma_T = u_T / V_T,$$

$$\dot r_I = V_I \cos(\gamma_I - \lambda_I), \quad \dot\lambda_I = (V_I / r_I) \sin(\gamma_I - \lambda_I), \quad \dot\gamma_I = u_I / V_I,$$

где V_T, V_I – скорости, м/с, r_T, r_I – расстояния от начала координат до цели и до перехватчика, м, λ_T, λ_I – угол линии визирования, рад, γ_T, γ_I – путевые углы, рад, θ, δ – углы отклонения скорости, рад, $u_T = -10, u_I$ – поперечные ускорения, м/с^2.

Уравнение модели измерений имеет следующий вид:

$$z_1 = r_T - r_I, \; z_2 = \lambda_T - \lambda_I, \; z_3 = \gamma_I .$$

Все параметры модели считаются известными точно; вектор состояния данной динамической системы $x = \left(r_T, \lambda_T, \gamma_T, r_I, \lambda_I, \gamma_I\right)^{\mathrm{T}}$, вектор управления $u = u_I$. В качестве вектора характерных параметров объекта примем $p^1 = (V_T, V_I)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{p}^1 = [100;150] \times [175;225]$, вектор параметров p^2 в модели измерения отсутствует.

Цель решения поставленной задачи перехвата – найти такое управление по выходу, чтобы в конечный момент времени совпадали координаты цели и перехватчика по осям Ox и Oy: $r_T(t_1) \cos\lambda_I(t_1) - r_I(t_1) \cos\lambda_I(t_1) = 0$, $r_T(t_1) \sin\lambda_I(t_1) - r_I(t_1) \sin\lambda_I(t_1) = 0$. На управление накладывается следующее ограничение: $u_I(t) \in \boldsymbol{U} = [-70; 70]$.

Величины в левой и правой частях являются координатами цели и перехватчика в прямоугольной системе координат, момент окончания процесса t_1 определяется первым моментом времени, в который выполняются оба условия. Таким образом. функционал качества управления выглядит следующим образом:

$$\overline{I}(x_0, p^1, p^2, d) = \underbrace{t_1}_{I_i(x_0, p^1, p^2, d)} + \sum_{i=1}^{2} R_i^{(1)} \cdot H_i^{(1)}, \text{ где } R_1^{(1)} = R_2^{(1)} = 10^3 .$$

Рассмотрены два случая задания множества возможных начальных состояний (два сценария):

а) разное начальное положение: $\boldsymbol{\Omega}^{а} = [1750; 2250] \times \pi/4 \times \pi/2 \times [750;1250] \times \pi/4 \times \pi/4$,

б) разный путевой угол: $\boldsymbol{\Omega}^{б} = 2000 \times \pi/4 \times [7\pi/18; 11\pi/18] \times 1000 \times \pi/4 \times [7\cdot\pi/36; 11\cdot\pi/36]$.

---

[3] Wang Y., Zhu M., Wei Y. Solar Sail Spacecraft Trajectory Optimization Based on Improved Imperialist Competitive Algorithm // Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation. 2012. P. 191-195.

[4] Hughes G.W., MacDonald M., McInnes C.R. Terrestrial Planet Sample Return Using Solar Sail Propulsion // Acta Astronautica. 2006. № 59 (8-11). P. 797- 806.

На рис. 4 изображены графики траектории (сплошной линией обозначается движение цели, пунктирной – перехватчика) для двух описанных сценариев, единица измерения – метры.

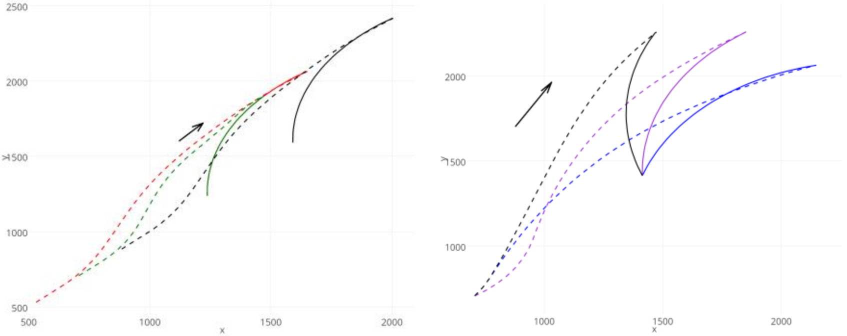


Рис. 4. Траектории цели и перехватчика

Для синтеза управления в сценарии (а) использовалась базисная система полиномов Лежандра и интервальный генетический алгоритм, в сценарии (б) использовалась базисная система полиномов Гегенбауэра и интервальный метод взрывов. Средняя величина промаха находится в интервале $[5,323;6,73]$ м, что является приемлемым в условиях поставленной задачи (величины функционала качества управления для сценария (а) и (б) равны $[3782,73;3783,88]$ и $[3815,53;3816,91]$ соответственно).

В приложении приведена основная информация по аппарату интервального анализа, включающая в себя описание базовых элементов, их определений и свойств, описание правил интервальной арифметики, понятий интервального расширения функций, инвертера (с подробным пошаговым описанием алгоритма).

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

Основным итогом диссертационной работы является разработка интервальных методов глобальной условной оптимизации и их применение для решения задач оптимизации технических систем и поиска оптимального управления (программного, с неполной обратной связью и управления по выходу) нелинейными детерминированными динамическими системами при неполной информации о состоянии и параметрах объекта, выразившаяся в следующих основных результатах:

1) разработаны интервальные алгоритмы оптимизации на основе инвертера (дихотомии целевого образа, отсечки виртуальных значений, стохастической отсечки виртуальных значений, стохастических вырываний, обобщенный инверсный метод), предложена математическая модель интервальной ε-минимизации [4, 5, 9],

2) разработаны интервальные метаэвристические алгоритмы оптимизации (среднего пути, стохастической сетки, интервального разбросанного поиска, интервальный генетический алгоритм, интервальный метод взрывов, адаптивный интервальный алгоритм, самоорганизующийся интервальный алгоритм имитации эволюции колонии бактерий), доказаны теоремы о свойствах разработанных инверсных методов [1 – 3, 6 – 8, 10, 13],

3) разработаны интервальные алгоритмы поиска оптимального программного управления нелинейными непрерывными детерминированными системами [2 – 11, 13],

4) разработаны интервальные алгоритмы синтеза оптимального управления с неполной обратной связью и управления по выходу нелинейными непрерывными детерминированными системами [1],

5) разработан программный комплекс, реализующий интервальные методы глобальной условной оптимизации и алгоритмы их применения для поиска оптимального программного управления, оптимального в среднем управления пучками траекторий с неполной обратной связью и оптимального управления по выходу при неполной информации о состоянии и параметрах объекта с использованием математического моделирования поведения управляемых систем [48, 49],
6) разработанное алгоритмическое и программное обеспечение применено для решения задач оптимизации технических систем (определение оптимальных параметров сварной балки, сосуда высокого давления, редуктора, натяжной/компрессионной пружины) и систем управления авиационно-космической техникой (задачи о преследовании, солнечном парусе, командной навигации, стабилизации спутника, перехвате, управлении ГЗЛА) [1 – 13].

Публикации в журналах перечня ВАК

1. Пановский В.Н., Пантелеев А.В. Метаэвристические интервальные методы поиска оптимального в среднем управления нелинейными детерминированными системами при неполной информации о ее параметрах // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2017. – № 1. С. 44-55.
2. Пантелеев А. В., Пановский В. Н. Разработка интервальных метаэвристических методов минимизации для поиска оптимального программного управления // Управление большими системами. – 2016. – № 60. С. 41-62.
3. Пантелеев А.В., Пановский В.Н., Короткова Т.И. Интервальный метод взрывов и его применение к задаче моделирования и оптимизации движения гиперзвукового летательного аппарата // Вестник Южно-Уральского государственного университета, серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Т. 9, № 3. С. 55 - 67.
4. Пантелеев А.В., Пановский В.Н. Применение обобщенного инверсного интервального метода глобальной условной оптимизации в задаче поиска оптимального программного управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение» – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, № 1(106). – 2016. С. 33 – 50
5. Пантелеев А.В. Пановский В.Н. Обобщенный инверсный интервальный метод глобальной условной оптимизации // Научный вестник МГТУ ГА, № 207, 2014. С. 17 – 24.
6. Пановский В.Н. Интервальный генетический алгоритм глобальной условной оптимизации // Успехи современной радиоэлектроники. – 2014. - № 4. С. 71 – 75
7. Пановский В.Н. Прикладное применение интервального метода взрывов для решения задачи командной навигации // Успехи современной радиоэлектроники. – 2015. - № 3. С. 207 – 212.
8. Пановский В.Н., Пантелеев А.В. Прикладное применение интервальных методов оптимизации для решения задачи групповой навигации // Успехи современной радиоэлектроники. – 2016. - № 2. С. 177 – 182
9. Пановский В.Н. Применение аппарата интервального анализа для поиска глобального экстремума функций // Труды МАИ. – 2012. - №51. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=28953
10. Пановский В.Н. Прикладное применение интервального метода взрывов // Труды МАИ. – 2014. – №73. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=48451
11. Пантелеев А.В., Пановский В.Н. Прикладное применение интервального метода взрывов для поиска оптимального программного управления солнечным парусом // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2016. № 4. С. 110 – 117.

Публикации в других изданиях

12. Panteleev A.V., Panovskiy V.N. Application of Meta-Heuristic Interval Optimization Algorithms to Technical System Design Problems // J. Applied Mathematical Sciences. – 2017 – № 4. P. 153 – 161
13. Panteleev A., Panovskiy V. Multiagent Self-Organizing Interval Bacterial Colony Evolution Optimization Algorithm // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2016, - V. 450. P. 451 - 463.
14. Пановский В.Н. Формирование модифицированной интервальной арифметики и ее реализация в виде комплекса программ интервального анализа (Panovskiy V.N. Formation of modified interval arithmetic and its implementation as a complex of programs of interval analysis) // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем - Казань, Россия.: ЦОП АБАК, 2010. С. 154 - 155, 165 - 166.
15. Пановский В.Н. Применение интервальной арифметики для решения систем линейных алгебраических уравнений // Межвуз. сб. научн. тр. "Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения". - М.: МИРЭА, 2010. С. 137 - 142.
16. Пантелеев А.В., Пановский В.Н. Реализация сжимающих операторов в виде программы на языке C# (Panovskiy V.N., Panteleyev A.V. Implementation of contractors in a form of a program in C#) // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем - Казань, Россия.: ЦОП АБАК, 2011. С. 154, 170 - 171.
17. Пановский В.Н. Применение интервальных алгоритмов инвертирования множества значений (sivia) и оценивания образа множества (image_sp) // Межвуз. сб. научн. тр. "Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения", том 1. - М.: МИРЭА, 2011. С. 27 - 32.
18. Пановский В.Н. Реализация методов глобальной оптимизации, использующих аппарат интервального анализа (Panovskiy V.N. Realization of methods of global optimization using interval analysis) // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем - Казань, Россия.: ЦОП АБАК, 2012. С.155 – 156, 166 – 167.
19. Пановский В.Н. Сравнительный анализ интервальных методов глобальной условной оптимизации // VI межвуз. сб. научн. тр. «Прикладная информатика и математическое моделирование». - М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2012. С. 73 - 83.
20. Пантелеев А.В., Пановский В.Н. Комплекс программных средств интервального анализа: реализация алгоритмов нахождения образа и прообраза множеств // Сб. научн. тр. "Проблемы авиастроения, космонавтики и ракетостроения", 2012. С. 303-309.
21. Пантелеев А.В., Пановский В.Н. Интервальные методы поиска глобального условного экстремума // Вопросы создания аэрокосмических и ракетных летательных аппаратов – М.: Изд-во Ваш полиграфический партнер, 2013. С. 188 – 193.

Доклады на научных конференциях

22. Пановский В.Н. Метод стохастической отсечки мнимых значений для поиска глобального экстремума // Материалы 50-й междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика - Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. С. 235.
23. Пановский В.Н. Интервальные алгоритмы поиска глобального экстремума функций // Тр. междунар. научн.-метод. конф. «Информатизация инженерного образования» - ИНФОРИНО-2012. – М.: Издательский дом МЭИ, 2012. С. 224 – 227.
24. Panovskiy V.N. Interval methods for global unconstrained optimization: a software package // Book of Abstracts of 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetics and Verified Numerics – Новосиб.: Институт вычислительных технологий, 2012. С. 131-132.
25. Пановский В.Н. Интервальные алгоритмы нахождения оптимального управления с полной обратной связью детерминированными дискретными системами // Сб.

тез. докл. научн.-техн. конф. «Прикладные научно-технические проблемы современной теории управления системами и процессами», – М.: ФНПЦ ОАО «Концерн «Вега», 2012. С. 48.
26. Пановский В.Н. Синтез оптимального программного управления нелинейным динамическим объектом // Сб. тез. докл. научн.-практ. конф. «Инновации в авиации и космонавтике – 2013» – М.: ООО «Принт-салон», 2013. С. 293.
27. Пановский В.Н. Эвристические интервальные методы глобальной условной оптимизации // Материалы 51-й междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика - Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. С. 177.
28. Пановский В.Н. «Интервальный метод глобальной условной оптимизации. Метод стохастических вырываний» // Материалы XVIII междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным и программным системам – М.: Изд-во МАИ, 2013. С. 850-851.
29. Пановский В.Н. Прикладное применение интервального метода взрывов // Тез. докл. 12-й междунар. конф. «Авиация и космонавтика – 2013» – Спб.: Мастерская печати, 2013. С. 613-615.
30. Пановский В.Н. Интервальный генетический алгоритм глобальной условной оптимизации // Сб. докл. IV научн.-техн. конф. «Научные чтения к 105-летию со дня рождения академика А.А. Расплетина». – М.: ОАО «ГСКБ «Алмаз-Антей», 2013. С. 601 – 607.
31. Пановский В.Н. Разработка интервальных методов оптимизации нелинейных детерминированных динамических систем // Сб. тез. докл. научн.-практ. конф. «Инновации в авиации и космонавтике – 2014». – М.: ООО «Принт-салон», 2014. С. 213 - 214.
32. Пановский В.Н. Прикладное применение интервального метода взрывов для решения задачи командной навигации // Сб. докл. V научн.-техн. конф. «Актуальные вопросы развития систем и средство ВКО», Москва, 25-27 сентября 2014 год. – М.: ОАО «ГСКБ «Алмаз-Антей», 2014. С. 650 - 656.
33. Пановский В.Н. Сравнительная характеристика интервальных методов оптимизации нелинейных детерминированных динамических моделей // Сб. материалов научн.-техн. конф. «Расплетинские чтения – 2015». – М.: ПАО «НПО «Алмаз», 2015. С. 119.
34. Пановский В.Н. Прикладное применение адаптивного интервального алгоритма для управления нелинейным динамическим объектом // Сб. материалов научн.-техн. конф. «Расплетинские чтения – 2016». – М.: ПАО «НПО «Алмаз», 2015. С. 120.
35. Пановский В.Н. Прикладное применение эвристических интервальных алгоритмов оптимизации для решения задач перехвата и групповой навигации // Тез. докл. II междунар. конф. «Инжиниринг & Телекоммуникации – EN&T 2015». – Москва/Долгопрудный: МФТИ, 2015. С. 191 – 121.

Свидетельства о государственной регистрации программ

36. Пановский В.Н. Программа поиска оптимального управления летательными аппаратами с использованием интервальных методов глобальной оптимизации / Пановский В.Н. // Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015661635. Федеральная служба по интеллект. собственности – 02.11.2015.
37. Пановский В.Н. Программа синтеза оптимального в среднем управления летательными аппаратами с неполной обратной связью с использованием интервальных методов глобальной оптимизации / Пановский В.Н. // Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016610641. Федеральная служба по интеллект. собственности – 15.01.2016.