На правах рукописи

Торишный Роман Олегович

АППРОКСИМАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ КРИТЕРИЕВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Специальность 2.3.1. —
Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2023 год

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: **Соболь Виталий Романович**,
кандидат физико-математических наук, без уч. зв.,
доцент кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»
ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Официальные оппоненты: **Назин Александр Викторович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник лаборатории № 7 «Адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина»
ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова» Российской академии наук

Куликов Александр Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»

Защита состоится 6 октября 2023 года в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.02 на базе МАИ по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, или на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=172781.

Автореферат разослан ________________

Отзывы на автореферат в 2-х экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Отдел Ученого и диссертационных советов МАИ.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.2.327.02,
кандидат физико-математических наук ________________ В.А. Рассказова

Общая характеристика работы

Объектом исследования диссертационной работы являются задачи стохастического программирования с вероятностными критериями.

Актуальность работы. В прикладных задачах управления и оптимизации нередко возникают проблемы, требующие принятия решений в условиях неопределенности. Одним из основных подходов к учету неопределенности является подход на основе аппарата теории вероятностей, что порождает задачи стохастического программирования. В работе рассматривается подкласс задач с вероятностными критериями в виде функции вероятности или функции квантили.

Стохастическое программирование возникло как раздел теории оптимизации в 50-х годах XX века и изначально было связано с исследованием задач с вероятностными ограничениями на множество допустимых стратегий. Эта область развивалась усилиями А. Чарнса, В. Купера, Г. Симмондса, А. Прекопы, С. Гартски, П. Калла, Дж. Сеигупты, С. Уолласа, Т. Шантая, Дж. Вайды. Дальнейшее расширение стохастического программирования было обусловлено исследованием задач с вероятностными ограничениями на выполнение системы неравенств, которым были посвящены работы В. ван Акоя, Р. Хенриона, К. Сагастисабал, Б. Миллера, Х. Вагнера, А. Прекопы, А. Ружински. На основе впервые рассмотренного С. Катаокой квантильного критерия возник целый класс задач с критерием оптимизации в форме квантили и новая область стохастического программирования, посвященная исследованию таких задач. Развитие этой области обеспечили работы Э. Райка, А.И. Кибзуна, В.В. Малышева, В.Ю. Курбаковского, Р. Леппа, Э. Тамм, К. Марти, Ю.М. Ермольева, В.И. Норкина и С.П. Урясьева.

Одним из важных вопросов в области решения задач стохастического программирования является нахождение градиента функции вероятности, поскольку это позволяет использовать классические численные методы оптимизации. Впервые выражение градиента функции вероятности в форме поверхностного интеграла в смысле Римана было получено Э. Райком. В дальнейшем, в трудах А.И. Кибзуна и Г.Л. Третьякова было получено выражение для градиента функции вероятности в форме интеграла Лебега по поверхности, являющейся границей области реализаций случайного вектора. Далее, в трудах С.П. Урясьева показано, что для некоторых частных случаев этот интеграл сводится как минимум к сумме объемного и поверхностного интегралов. Ввиду большой вычислительной сложности поверхностного интегрирования и ограничений на распределение случайных функций и величин, методика использования строго вычисленных значений градиента функции вероятности не была широко распространена.

В более поздних работах, сопряженных с данной темой, рассматриваются различные методики аппроксимации или оценки значения градиента функции вероятности. Данная тематика поднималась в работах Р. Хенриона, В. Акоя, Г. Пфлюга, Х. Вайсхаупта, Ч. Ю, Д. Зельтермана, Дж. Гарньера, А. Омране, Ю. Раучди. В данных работах для оценки значений градиента, субградиентов или квантили используются различные методы, например, сэмплирование, разложения в ряд Тейлора, использование аппарата слабых производных и иные методы, но в целом применение этих методов крайне ограничено типом распределения случайных параметров, данные методы могут быть неприменимы для разных типов задач и они могут опираться на другие стохастические механизмы для вычисления значений градиента.

Одним из более универсальных и общих подходов к получению приближенных значений производных вероятностных функций является исследование субградиентов функции вероятности и его возможные приближения. Одними из первых работ, косвенно освещающих данную проблему, были работы Э. Парзена и М. Розенблатта. В этих работах была предложена процедура приближения функции вероятности путем построения последовательности аппроксимирующих функций, полученных заменой функции Хевисайда в интегральном представлении функции вероятности на некоторую гладкую функцию. Данное направление было развито в трудах Р. Леппа, Э. Тамм, К. Марти, в которых были исследованы субградиенты получившихся аппроксимированных функций и рассмотрены механизмы решения задач стохастического программирования, а также в работах Ю.М. Ермольева, В.И. Норкина и Р. Уэтса.

Отдельное направление исследований связано с вопросом выпуклости функции вероятности и квантили. Как правило, функция вероятности исследуется на квазивыпуклость и используются свойства, следующие из её квазивыпуклости, что отражено в работах А. Прекопы, А. Шапиро, Д. Денчевой, А. Ружински, Ю.С. Кана, А.И. Кибзуна. Некоторые смежные с этой темы также были рассмотрены в трудах В.И. Норкина, Н.В Роенко, В. Акоя, Р. Хенриона. В приведенных выше работах прямо не рассматриваются вопрос, смежный с анализом выпуклости функций или их оценкой -– а именно вычисление или оценка значений вторых производных функции вероятности и квантили.

Цели и задачи работы. Целью диссертации является разработка новых методов и алгоритмов решения задач стохастического программирования с вероятностными критериями, основанных на аппроксимации функции вероятности путем замены функции Хевисайда на сигмоидальную функцию. Для достижения выбранной цели необходимо решить следующие задачи:

– Исследовать сходимость гладкой аппроксимации функции вероятности и ее производных для случая гладкой функции потерь и абсолютно непрерывных распределений случайных параметров;
– Разработать алгоритм построения аппроксимации границы ядра вероятностной меры с помощью гладкой аппроксимации функции вероятности специального вида;
– Разработать алгоритм решения задачи максимизации функции вероятности в случае полиэдральной функции потерь и полиэдральной функции ограничений;
– Разработать численные процедуры, реализующие вычисление и применение аппроксимаций функции вероятности и ее производных к решению известных прикладных задач стохастического программирования.

Методы исследования. В диссертации используются современные методы теории вероятностей, системного анализа, математического моделирования, стохастического программирования, теории оптимизации, математического программирования.

Научная новизна. В диссертационной работе исследованы свойства варианта гладкой аппроксимации функции вероятности и ее производных, разработаны новые алгоритмы решения задач стохастического программирования с вероятностным критерием и/или ограничениями. Разработан новый алгоритм построения аппроксимации ядра вероятностной меры.

Практическая ценность работы состоит в том, что её теоретические результаты могут служить основой для разработки программно-алгоритмического обеспечения решения прикладных задач в областях авиационной и ракетно-космической техники, оптимизации функционирования транспортных и логистических систем, систем распределения ресурсов, оптимального инвестирования. Эффективность предложенных алгоритмов и методов продемонстрирована на примере ряда прикладных задач.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации применены методы системного анализа для исследования сложных технических и экономических систем, проведено исследование задач оптимизации, разработаны методы и алгоритмы их решения (области исследования 1, 4, 5 специальности 2.3.1.).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах: 10-я Традиционная молодежная школа "Управление, информация и оптимизация" (Москва, 2018); 17-я Международная конференция "Авиация и космонавтика" (Москва, 2018); XLV Международная молодежная научная конференция "Гагаринские чтения" (Москва, 2019); XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 2019); Международная научная конференция "Системный анализ, управление и навигация" (Евпатория, 2019); 19-я Международная конференция "Авиация и космонавтика" (Москва, 2020); International conference "Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2021)" (Irkutsk, Baikal, 2021); International Conference "Mathematical Optimization Theory and Operations Research" (MOTOR 2022) (Petrozavodsk, Karelia, Russia, 2022); научный семинар кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования Московского авиационного института (под рук. проф. Кибзуна А.И.).

Работа поддержана грантом РФФИ № 20-31-90035.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 12 научных работах, из которых 3 опубликованы в периодических изданиях, входящих в перечень ВАК и цитируемых международными базами Web of Science и Scopus [2,3,5]; 2 опубликованы в периодических изданиях, входящих в перечень ВАК [1,4]; 2 опубликованы в периодических изданиях, цитируемых международными базами Web of Science и Scopus [6,7]; 5 опубликованы в качестве тезисов докладов в трудах российских и международных конференций [8–12]. На основе результатов диссертационной работы разработана и зарегистрирована программа для ЭВМ [13].

Содержание диссертации

Во введении дано обоснование актуальности выбранной автором темы диссертации, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе исследуется гладкая аппроксимация функции вероятности и ее производных. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ — полное вероятностное пространство, а X — случайный вектор, заданный на этом пространстве с плотностью распределения вероятностей $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Носитель распределения вектора X обозначим как $\mathrm{supp}(X)$. Пусть также задана функция потерь $\Phi(u, X) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ — непустое множество допустимых стратегий u, и задан произвольный максимально допустимый уровень потерь φ.

Функция вероятности определяется как

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbb{P}\left\{\Phi(u, X) \le \varphi\right\}.$$

Функция квантили для $\alpha \in (0;1)$ определяется как

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\left\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\right\}.$$

Постановки задач максимизации функции вероятности и минимизации функции квантили описывают одношаговую модель принятия решения в условиях неопределенности, моделируемой случайным вектором X. При этом само принятие решения (выбор стратегии u) производится априори до реализации случайного вектора, опираясь исключительно на знание закона распределения случайного вектора. Оптимальная стратегия выбирается исходя из условия минимума (или максимума в зависимости от постановки задачи) критерия оптимизации.

Функция вероятности может быть записана как:

$$P_\varphi(u) = \mathbb{M}\left[\Theta\left(\varphi - \Phi(u,X)\right)\right] = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} \Theta\left(\varphi - \Phi(u,x)\right) f(x)dx, \tag{1}$$

где $\Theta(\cdot)$ – функция Хевисайда:

$$\Theta(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

В основе исследуемой аппроксимации функции вероятности лежит замена функции Хевисайда на сигмоидальную функцию:

$$\Theta(\varphi - \Phi(u,x)) \approx S_\theta(\varphi - \Phi(u,x)) = \frac{1}{1 + e^{-\theta(\varphi - \Phi(u,x))}}, \tag{2}$$

где θ — большое положительное число. Таким образом, аппроксимация функции вероятности записывается как:

$$P_\varphi^\theta(u) = \mathbb{M}\left[S_\theta(\varphi - \Phi(u,X))\right] = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} S_\theta(\varphi - \Phi(u,x)) f(x)dx. \tag{3}$$

Аппроксимация производной функции вероятности строится на похожих принципах. Непосредственное дифференцирование формулы (1) приводит к дифференцированию функции Хевисайда. Производной функции Хевисайда в терминах обобщенных функций является дельта-функция Дирака. Дельта-функция — обобщенная функция, которая может быть задана как:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) g(y) dy = g(y_0), \tag{4}$$

где y_0 есть ноль аргумента дельта-функции, а ее эвристическое описание задается как:

$$\delta(x) = 0, \; x \neq 0, \tag{5}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{6}$$

Производная сигмоидальной функции может быть найдена непосредственно:

$$\frac{dS_\theta(y)}{dy} = \left(\frac{1}{1+e^{-\theta y}}\right)' = \theta \cdot S_\theta(y) \cdot (1 - S_\theta(y)) \,. \tag{7}$$

Доказана следующая опорная теорема.

Т е о р е м а 1. *Последовательность производных сигмоидальных функций $\{S'_\theta(t)\}_{\theta=1}^{\infty}$ сходится в пространстве обобщенных функций к дельта-функции Дирака при стремлении параметра сигмоидальной функции к бесконечности, т.е.*

$$\lim_{\theta\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S'_\theta(t) g(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) d\Theta(t) \tag{8}$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $g(t)$.

Таким образом, на последовательность производных сигмоидальной функции в пределе распространяются свойства дельта-функции. Доказаны следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть X — случайный вектор, заданный на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ и имеющий кусочно-непрерывную плотность распределения $f(x)$. Пусть заданы уровень потерь φ и непрерывная по совокупности аргументов функция потерь $\Phi(u, X) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ — непустое множество допустимых стратегий u, и выполняется условие $\mathbb{P}\{\Phi(u, X) = \varphi\} = 0\ \forall u \in U$. Тогда*

$$S_\theta(\varphi - \Phi(u, X)) \xrightarrow{п.н.} \Theta(\varphi - \Phi(u, X)) \quad \textit{при}\ \theta \to +\infty, \quad \forall u \in U. \tag{9}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть условия аналогичны условиям Теоремы 2. Тогда*

$$P_\varphi^\theta(u) \to P_\varphi(u) \quad \textit{при}\ \theta \to +\infty, \quad \forall u \in U.$$

Для случая одномерной случайной величины также была получена верхняя оценка погрешности аппроксимации функции вероятности и доказано, что она стремится к нулю при $\theta \to +\infty$.

Были определены дополнительные условия и доказана теорема о сходимости аппроксимированной производной функции вероятности к оригинальной.

Т е о р е м а 4. *Пусть условия аналогичны таковым в Теореме 2, и дополнительно функция потерь имеет непрерывные первые и вторые производные, и производные функции потерь ограничены:*

$$\forall i = \overline{1, m} \quad \exists K_i \in \mathbb{R},\ K_i < \infty : \left|\frac{\partial \Phi(u, x)}{\partial u_i}\right| < K_i.$$

Тогда последовательность частных производных аппроксимированной вероятностной функции по компоненте стратегии (и уровню потерь) стремится к соответствующей частной производной исходной функции вероятности везде, где последняя существует:

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial u_j} \to \frac{\partial P_\varphi(u)}{\partial u_j} \quad \textit{при}\ \theta \to +\infty, \quad j = \overline{1, m}, \quad \forall u \in U. \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial \varphi} \to \frac{\partial P_\varphi(u)}{\partial \varphi} \quad \textit{при}\ \theta \to +\infty, \quad \forall u \in U. \tag{11}$$

Производная аппроксимации функции вероятности по компоненте вектора стратегии имеет вид:

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial u_j} = \mathbb{M}[\theta S_\theta(\varphi - \Phi(u, X))\,(1 - S_\theta(\varphi - \Phi(u, X)))\,(-\Phi'_{u_j}(u, X))],$$

или в форме объемного интеграла:

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial u_j} = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} \theta S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))\,(S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) - 1)\,\Phi'_{u_j}(u, x) f(x) dx. \tag{12}$$

Производная аппроксимации функции вероятности по параметру φ имеет вид:

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial \varphi} = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} \theta S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))\,(1 - S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)))\,f(x) dx, \tag{13}$$

Производные функции квантили и функции вероятности по компонентам вектора стратегии связаны следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(u)}{\partial u_j} = -\frac{\left.\dfrac{\partial}{\partial u_j} P_\varphi(u)\right|_{\varphi=\varphi_\alpha(u)}}{\left.\dfrac{\partial}{\partial \varphi} P_\varphi(u)\right|_{\varphi=\varphi_\alpha(u)}}. \tag{14}$$

С учетом этой связи получаются выражения для аппроксимации производных квантили по компонентам вектора стратегии и по уровню вероятности:

$$\frac{\partial \varphi_\alpha^\theta(u)}{\partial u_j} \approx \frac{\int\limits_{\mathrm{supp}(X)} S_\theta(\varphi_\alpha(u) - \Phi(u, x))\,(1 - S_\theta(\varphi_\alpha(u) - \Phi(u, x)))\,\Phi'_{u_j}(u, x) f(x) dx}{\int\limits_{\mathrm{supp}(X)} S_\theta(\varphi_\alpha(u) - \Phi(u, x))\,(1 - S_\theta(\varphi_\alpha(u) - \Phi(u, x)))\,f(x) dx}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha^\theta(u)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\int\limits_{\mathrm{supp}(X)} \theta S_\theta(\varphi_\alpha(u) - \Phi(u, x))\,(1 - S_\theta(\varphi_\alpha(u) - \Phi(u, x)))\,f(x) dx}. \tag{16}$$

Во второй главе рассматривается применение гладкой аппроксимации функции вероятности и ее производных к двум теоретическим задачам: задаче максимизации функции вероятности с полиэдральной функцией потерь и полиэдральной функцией ограничений, и задаче построения ядра вероятностной меры. Также рассматривается аппроксимация производных второго порядка функции вероятности и функции квантили.

Задача стохастического программирования с полиэдральной (кусочно-линейной) функцией потерь является важным частным случаем задач оптимизации, при этом непосредственное применение гладкой аппроксимации ограничено по причине негладкости функции потерь. Пусть определено полное вероятностное пространство $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ и случайный вектор X на этом пространстве с реализациями $x \in \mathbb{R}^n$ и плотностью распределения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Определим полиэдральную функцию потерь и функцию ограничений:

$$\Phi(u,x) = \max_{i=\overline{1,k_1}} \left\{ A_{1i}^T u + B_{1i}^T x + b_{1i} \right\}, \tag{17}$$

$$Q(u,x) = \max_{i=\overline{1,k_2}} \left\{ A_{2i}^T u + B_{2i}^T x + b_{2i} \right\}, \tag{18}$$

где $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ – вектор стратегии, U – множество допустимых стратегий, $A_{1i}^T, A_{2i}^T, B_{1i}^T, B_{2i}^T$ строки детерминированных матриц $A_1 \in \mathbb{R}^{k_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{k_2 \times n}, B_1 \in \mathbb{R}^{k_1 \times m}, B_2 \in \mathbb{R}^{k_2 \times m}$ соответственно, b_{1i}, $i = \overline{1,k_1}$ и b_{2i}, $i = \overline{1,k_2}$ – координаты неслучайных векторов $b_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$ и $b_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$. Рассмотрим вероятность того, что потери не превысят заданный уровень, а ограничения будут выполнены:

$$P_\varphi(u) = \mathbb{P}\left\{\Phi(u,X) \le \varphi,\ Q(u,X) \le 0\right\}. \tag{19}$$

Требуется найти вектор u_φ, максимизирующий вероятность:

$$u_\varphi = \arg\max_{u \in U} P_\varphi(u). \tag{20}$$

Ранее в работах С.В. Иванова и А.В. Наумова была рассмотрена эквивалентная задача квантильной оптимизации и предложен алгоритм решения, основанный на доверительном методе.

Для решения задачи (20) применяется гладкая аппроксимация функции вероятности и ее производных и метод проекции градиента. Для применения гладкой аппроксимации функции вероятности и ее производных используется аппроксимация функции потерь и функции ограничений $\Phi(u,x)$ и $Q(u,x)$ с помощью преобразования гладкого максимума:

$$\Phi_\gamma^*(u,x) = \frac{\sum_{i=1}^{k_1} \left[A_{1i}^T u + B_{1i}^T x + b_{1i}\right] \exp\left\{\gamma\left(A_{1i}^T u + B_{1i}^T x + b_{1i}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^{k_1} \exp\left\{\gamma\left(A_{1i}^T u + B_{1i}^T x + b_{1i}\right)\right\}}, \tag{21}$$

$$Q_\gamma^*(u,x) = \frac{\sum_{i=1}^{k_2} \left[A_{2i}^T u + B_{2i}^T x + b_{2i}\right] \exp\left\{\gamma\left(A_{2i}^T u + B_{2i}^T x + b_{2i}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^{k_2} \exp\left\{\gamma\left(A_{2i}^T u + B_{2i}^T x + b_{2i}\right)\right\}}, \tag{22}$$

где $\gamma > 0$ – большое положительное число. Частные производные функций по элементам вектора стратегии u_j, $j = \overline{1,m}$, определяются как

$$\frac{\partial \Phi_\gamma^*(u,x)}{\partial u_j} = \frac{\sum_{i=1}^{k_1} A_{1ij} \exp\left\{\gamma\left(A_{1i}^T u + B_{1i}^T x + b_{1i}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^{k_1} \exp\left\{\gamma\left(A_{1i}^T u + B_{1i}^T x + b_{1i}\right)\right\}}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial Q_\gamma^*(u,x)}{\partial u_j} = \frac{\sum_{i=1}^{k_2} A_{2ij} \exp\left\{\gamma\left(A_{2i}^T u + B_{2i}^T x + b_{2i}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^{k_2} \exp\left\{\gamma\left(A_{2i}^T u + B_{2i}^T x + b_{2i}\right)\right\}}. \tag{24}$$

Доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Для любого $u \in U$*

$$\lim_{\gamma \to \infty} \Phi_\gamma^*(u,x) = \Phi(u,x), \tag{25}$$

$$\lim_{\gamma \to \infty} Q_\gamma^*(u,x) = Q(u,x), \tag{26}$$

$$\lim_{\gamma \to \infty} \mathbb{P}\left\{\Phi_\gamma^*(u,X) \le \varphi, Q_\gamma^*(u,X) \le 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\Phi(u,X) \le \varphi, Q(u,X) \le 0\right\} = P_\varphi(u). \tag{27}$$

Утверждение 2. Для всех $u \in U$, для которых определены производные функции потерь и функции ограничений, выполняется соотношение:

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{\partial \Phi^*_\gamma(u,x)}{\partial u_j} = \frac{\partial \Phi(u,x)}{\partial u_j}, \tag{28}$$

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{\partial Q^*_\gamma(u,x)}{\partial u_j} = \frac{\partial Q(u,x)}{\partial u_j}. \tag{29}$$

Вероятность в (27) содержит два неравенства:

$$P_\varphi(u) = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} \Theta\left(\varphi - \Phi(u,x)\right)\Theta\left(-Q(u,x)\right) f(x)dx. \tag{30}$$

Функция Хевисайда аналогичным образом заменяется на сигмоиду. Отсюда получается дифференцируемая аппроксимация $P^{\theta,\gamma}_\varphi(u)$ исходной функции вероятности $P_\varphi(u)$:

$$P^{\theta,\gamma}_\varphi(u) = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} S_\theta\left(\varphi - \Phi^*_\gamma(u,x)\right) S_\theta\left(-Q^*_\gamma(u,x)\right) f(x)dx. \tag{31}$$

Частные производные $P^{\theta,\gamma}_\varphi(u)$ по координатам вектора стратегии u_j, $j=\overline{1,m}$, вычисляются непосредственно и представляются аналогично (12):

$$\frac{\partial}{\partial u_j} P^{\theta,\gamma}_\varphi(u) = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} \theta S_\theta(\varphi - \Phi^*_\gamma(u,x)) S_\theta(-Q^*_\gamma(u,x))\cdot$$
$$\Big(\left[S_\theta(\varphi - \Phi^*_\gamma(u,x)) - 1\right]\Phi^{*\prime}_{\gamma_{u_j}}(u,x) + \left[S_\theta(-Q^*_\gamma(u,x)) - 1\right] Q^{*\prime}_{\gamma_{u_j}}(u,x)\Big) f(x)dx. \tag{32}$$

Доказывается, что

$$\lim_{\theta\to+\infty,\gamma\to+\infty} P^{\theta,\gamma}_\varphi(u) = P_\varphi(u), \tag{33}$$

$$\lim_{\theta\to+\infty,\gamma\to+\infty} \frac{\partial}{\partial u_j} P^{\theta,\gamma}_\varphi(u) = \frac{\partial}{\partial u_j} P_\varphi(u). \tag{34}$$

Таким образом, получена аппроксимация задачи (20):

$$u^{\theta,\gamma}_\varphi = \arg\max_{u\in U} P^{\theta,\gamma}_\varphi(u). \tag{35}$$

Для решения задачи (35) с ограничениями на компоненты вектора стратегии используется метод проекции градиента. На тестовых примерах полученные таким образом решения оказывались лучше по значению критерия в сравнении с решениями, полученными с помощью доверительного метода.

Далее в главе 2 рассматривается алгоритм аппроксимации границы α-ядра с помощью гладкой аппроксимации функции вероятности специального вида.

α-Ядром вероятностной меры (распределения n-мерного случайного вектора X) называется пересечение всех замкнутых α-доверительных полупространств в $\mathbb{R}^n$. По определению, ядро K_α - выпуклый компакт. Принципиальным свойством α-ядра непрерывного распределения является регулярность. K_α называется регулярным, если всякое замкнутое полупространство, содержащее это ядро, является α-доверительным.

В основу нижеследующих алгоритмов аппроксимации границы α-ядра легло его представление:

$$K_\alpha = \bigcap_{||c||=1} \left\{x : c^T x \leq \left[c^T X\right]_\alpha\right\}, \tag{36}$$

где функция $[\cdot]_\alpha$ - квантиль уровня α аргумента, c - n-мерный вектор коэффициентов.

Рассмотрим специальную функцию, определяющую вероятность попадания случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$, $X = [X_1, \ldots, X_n]$ в полупространство, заданное вектором коэффициентов $c = [c_1, \ldots, c_n]$:

$$P(c) = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \leq 1\right\}. \tag{37}$$

Если задана плотность $f(x)$ распределения случайного вектора X, значение функции $P(c)$ может быть вычислено как интеграл

$$P(c) = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} I(c,x) f(x) dx_n \ldots dx_1, \tag{38}$$

где функция $I(c,x)$ определена следующим образом:

$$I(c,x) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \leq 1, \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i > 1. \end{cases} \tag{39}$$

В работе рассмотрены случаи двумерного и трехмерного случайного вектора, однако подход может быть обобщен на случай более высокой размерности случайного вектора. Для того, чтобы определить границу ядра необходимо найти изокванту функции $P(c)$. Семейство векторов, принадлежащих изокванте, будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial P(c)}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial P(c)}{\partial c_2} dc_2 + \cdots + \frac{\partial P(c)}{\partial c_n} dc_n = 0. \tag{40}$$

Чтобы упростить вычисление частных производных в правой части уравнения, предлагается перейти к гладкой аппроксимации функции вероятности, описанной ранее:

$$P_\theta(c) = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} S_\theta\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) f(x) dx_n \ldots dx_1. \tag{41}$$

Предположим, что ядро вероятностной меры регулярно и содержит точку 0. Для построения границы множества перейдем, в зависимости от размерности вектора X, к полярным или сферическим координатам, т.е. произведем одну из двух замен:

$$c_1(r,t) = r\cos t, \quad c_2(r,t) = r\sin t, \tag{42}$$

$$c_1(r,t_1,t_2) = r\sin t_1 \cos t_2, \quad c_2(r,t_1,t_2) = r\sin t_1 \sin t_2, \quad c_3(r,t_1,t_2) = r\cos t_1. \tag{43}$$

После замены координат дифференциальное уравнение принимает вид:

$$dr = -\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial P_\theta(r,t)}{\partial t_i}\right)\left(\frac{\partial P_\theta(r,t)}{\partial r}\right)^{-1}. \qquad (44)$$

Численно решая уравнение (44) при заданных Δt_i можно направленно строить набор векторов c, определяющих аппроксимацию α-ядра.

Алгоритм аппроксимации в трехмерном случае представлен далее. Частные производные функции $P_\theta(r,t_1,t_2)$ по r, t_1 и t_2 равны соответственно:

$$\frac{\partial P_\theta(r,t_1,t_2)}{\partial r} = -\mathbb{M}\left[(X_1 \sin t_1 \cos t_2 + X_2 \sin t_1 \sin t_2 + X_3 \cos t_1)\cdot K\right], \qquad (45)$$

$$\frac{\partial P_\theta(r,t_1,t_2)}{\partial t_2} = \mathbb{M}\left[r(X_1 \sin t_1 \sin t_2 - X_2 \sin t_1 \cos t_2)\cdot K\right], \qquad (46)$$

$$\frac{\partial P_\theta(r,t_1,t_2)}{\partial t_1} = -\mathbb{M}\left[r(X_1 \cos t_1 \cos t_2 + X_2 \cos t_1 \sin t_2 - X_3 \sin t_1)\cdot K\right], \qquad (47)$$

где

$$K = S'_\theta(1 - X_1 r \sin t_1 \cos t - X_2 r \sin t_1 \sin t_2 - X_3 r \cos t_1). \qquad (48)$$

Алгоритм аппроксимации границы ядра:

1) Задать шаг $\Delta t_1 > 0$ и $\Delta t_2 > 0$. Для удобства можно положить $\Delta t_2 = k\Delta t_1$, где k – натуральное число;
2) Задать начальные значения $t_1^0 = 0, t_2^0 = 0, r^0 = ([X_3]_\alpha)^{-1}$;
3) Вычислить частные производные (45-47) при текущих t_1^k, t_2^k и r^k;
4) Вычислить Δr в соответствии с уравнением (44) по следующей формуле:

$$\Delta r = -\frac{1}{\frac{\partial P_\theta(r,t_1,t_2)}{\partial r}}\left(\frac{\partial P_\theta(r,t_1,t_2)}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial P_\theta(r,t_1,t_2)}{\partial t_2}\Delta t_2\right)\Bigg|_{r=r^k, t=t_1^k, t_2=t_2^k}; \qquad (49)$$

5) Задать $r^{k+1} = r^k + \Delta r$, $t_1^{k+1} = t_1^k + \Delta t_1$, $t_2^{k+1} = t_2^k + \Delta t_2$;
6) Повторять шаги 2-5 пока $t_1^{k+1} \le \pi$.

Выбор числа k в первом пункте алгоритма определяет количество витков спирали. Результатом работы алгоритма является заданная по точкам линия, огибающая витками поверхность векторов c, определяющих ядро.

С помощью указанных алгоритмов были построены ядра двумерного равномерного распределения, и двух- и трехмерного нормального распределения, причем полученные изображения границ ядер соответствуют известным результатам.

Далее в главе 2 получены выражения для вторых производных гладкой аппроксимации функции вероятности. Для компактной записи вторых производных функции вероятности вводится обозначение для второй производной сигмоиды:

$$S''_\theta(x) = \theta^2 S(x)(1 - S(x))(1 - 2S(x)). \qquad (50)$$

Тогда вторая смешанная частная производная функции вероятности по компонентам стратегии u_i и u_j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$ примет вид:

$$\frac{\partial^2 P_\varphi^\theta(u)}{\partial u_i \partial u_j} = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} S_\theta^{''}(\varphi - \Phi(u,x))\Phi_{u_i}^{'}(u,x)\Phi_{u_j}^{'}(u,x)f(x)dx - \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} S_\theta^{'}(\varphi - \Phi(u,x))\Phi_{u_i u_j}^{''}(u,x)f(x)dx. \quad (51)$$

Важным частным случаем является случай линейной или билинейной функции потерь. При этом вторые частные производные функции потерь будут равны нулю, и вторая смешанная частная производная примет более простой вид:

$$\frac{\partial^2 P_\varphi^\theta(u)}{\partial u_i \partial u_j} = \int\limits_{\mathrm{supp}(X)} S_\theta^{''}(\varphi - \Phi(u,x))\Phi_{u_i}^{'}(u,x)\Phi_{u_j}^{'}(u,x)f(x)dx. \quad (52)$$

Аппроксимация второй частной производной функции квантили определяется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^\theta(u)}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{V_{u_j}'(u)W(u) - V(u)W_{u_j}'(u)}{W^2(u)}, \quad (53)$$

где

$$V(u) \triangleq \mathbb{M}\left[S_\theta'(\varphi_\alpha(u) - g(u,X))g_{u_i}'(u,X)\right], \quad (54)$$

$$W(u) \triangleq \mathbb{M}\left[S_\theta'(\varphi_\alpha(u) - g(u,X))\right], \quad (55)$$

а производные функций $V(u)$ и $W(u)$ определяются непосредственно по правилам дифференцирования сложной функции.

Численные эксперименты показывают, что получаемые вторые производные гладкой аппроксимации сходятся ко вторым производным исходной функции вероятности при стремлении параметра сигмоиды к бесконечности. Вторые производные точной функции вероятности оценивались с помощью конечных разностей. Для сравнения близости аппроксимированного и точного значений производной было рассмотрено три примера: с билинейной функцией потерь, квадратичной функцией потерь, а также с логарифмической функцией потерь.

Для трех частных случаев (сепарабельной функции потерь, произведения двух функций и монотонной функции потерь при одномерном распределении), при которых функция квантили и ее производные могут быть найдены явно, было показано, что получаемые аппроксимированные производные функции квантили сходятся к оригинальным функциям при стремлении параметра сигмоиды к бесконечности. Также были проведены численные эксперименты, показывающие близость между аппроксимированными и точными значениями производной функции квантили.

В третьей главе для иллюстрации возможностей применения гладкой аппроксимации функции вероятности получены новые решения ряда известных прикладных задач стохастического программирования, описанных в книге Кана Ю.С. и Кибзуна А.И. «Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями» (М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009).

Задача 1. Задача оптимизации площади взлетно-посадочной полосы (ВПП) сводится к поиску оптимальных (минимально возможных) длины и ширины полотна взлетно-посадочной полосы, при которых выполняются ограничения на вероятность безопасной посадки.

Пусть O — теоретическая точка касания самолетом ВПП и t_0 — пробег самолета до полной остановки без учета внешнего воздействия. На случай недолета или перелета относительно теоретической точки касания вводятся величины запасов длины ВПП $t_s > 0$ и $t_l > 0$ соответственно. Обозначим также ширину полотна ВПП как $2r_1 > 0$. Площадь ВПП (целевая функция, подлежащая оптимизации) определяется как

$$A(t_s, t_l, r_1) = (t_0 + t_s + t_l) \cdot 2r_1. \tag{56}$$

Предположим, что известны распределения независимых компонент скорости ветра на ВПП - продольной V_t и поперечной V_r:

$$V_t \sim \mathbb{N}(m_t, \sigma_t^2), \quad V_r \sim \mathbb{N}(m_r, \sigma_r^2). \tag{57}$$

Если посадка управляется только путем изменения угла крена, то данные компоненты связаны со случайными продольным E_t и поперечным E_r отклонениями от теоретической точки касания следующим образом:

$$E_t = c_{11}V_t + c_{12}|V_r|, \quad E_r = c_{22}V_r, \tag{58}$$

где c_{11}, c_{12}, c_{22} — эмпирически определяемые коэффициенты. Посадка самолета успешна, если фактические точки касания самолетом полотна и полной остановки самолета не выходят за рамки ВПП, т.е. требование по безопасности посадки с вероятностью не менее α задается как:

$$\mathbb{P}\ \{-t_s \le E_t \le t_l,\ |E_r| \le r_1\} \ge \alpha. \tag{59}$$

В целях уменьшения масштаба параметров можно перейти к оптимизации логарифма площади ВПП. Таким образом, задача определяется как:

$$\ln r_1 + \ln (t_0 + t_s + t_l) \to \min \tag{60}$$

при ограничении (59).

Для решения задачи оптимизации с вероятностным ограничением использовался метод проекции градиента с уменьшающимся шагом. Для этого исходное вероятностное ограничение (59) заменяется на его дифференцируемую аппроксимацию:

$$\mathbb{M}\left[S_\theta\left((t_s + E_t)(t_l - E_t)\right) \cdot S_\theta(r_1^2 - E_r^2)\right] \ge \alpha. \tag{61}$$

На каждом шаге метода оптимизации для вычисления вероятности в ограничении (61), а также ее производных, используется метод Монте-Карло на выборке из 10000 реализаций. Решение, полученное предлагаемым методом, дает меньшую оптимальную площадь в сравнении с результатами, полученными доверительным методом.

Задача 2. Рассмотрим ситуацию, когда самолет уже готов к вылету из аэропорта А в аэропорт Б. Решение о вылете принимается исходя из измеренных скорости и направления ветра в аэропорту Б непосредственно перед вылетом. Если условия посадки станут небезопасными в момент посадки, самолет будет перенаправлен на запасной аэродром, что приведет к финансовым потерям. Суть задачи заключается в определении множества допустимых векторов скорости ветра, гарантирующих посадку с заданной вероятностью.

Пусть s_0 и α_0 — начальные скорость и направление ветра в аэропорту прилета. Продольная V_l^0 и поперечная V_r^0 составляющие вектора скорости ветра в момент вылета равны:

$$V_l^0 = s_0 \cos\alpha_0, \quad V_r^0 = s_0 \sin\alpha_0. \tag{62}$$

Пусть величины $\chi \sim \mathbb{N}(0,\sigma_\chi^2)$ и $\psi \sim \mathbb{N}(0,\sigma_\psi^2)$ описывают случайные изменения скорости и направления ветра за время полета. Тогда продольная и поперечная компоненты скорости ветра в момент прилета (в момент t) определяются как:

$$V_l^t = (s_0+\chi)\cos(\alpha_0+\psi), \quad V_r^t = (s_0+\chi)\sin(\alpha_0+\psi). \tag{63}$$

Пусть заданы максимальная $v_l^{\max}$ и минимальная $v_l^{\min}$ допустимые скорости для попутного (встречного) ветра и максимально допустимая скорость поперечного ветра $v_r^{\max}$. Самолет получит разрешение на посадку, если компоненты скорости ветра V_l^t и V_r^t перед посадкой находятся в пределах, устанавливаемых значениями $v_l^{\max}$, $v_l^{\min}$ и $v_r^{\max}$. Таким образом, необходимо, чтобы это выполнялось с вероятностью не меньше заданного уровня надежности β, т.е.:

$$P(s_0,\alpha_0) = \mathbb{P}\left(|V_r^t| \le v_r^{\max}, v_l^{\min} \le V_l^t \le v_l^{\max}\right) \ge \beta. \tag{64}$$

Задача сводится к построению области точек (s_0,α_0), для которых выполняется (64). Множество допустимых векторов скорости ветра должно быть замкнутым, выпуклым и содержать нулевую точку. Для нахождения границы этого множества строится линия уровня функции вероятности $P(s_0,\alpha_0)$. Начальная точка находится как решение уравнения $P(s_0,\alpha_0)=\beta$. Далее вектор скорости ветра поворачивается на заданный шаг $\Delta\alpha$ и находится изменение скорости ветра Δs, для которого вероятность остается неизменной, т.е.:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}P(s_0,\alpha_0)\Delta\alpha + \frac{\partial}{\partial s_0}P(s_0,\alpha_0)\Delta s = 0. \tag{65}$$

Граница искомого множества является решением уравнения:

$$\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha}P(s,\alpha)}{\frac{\partial}{\partial s}P(s,\alpha)}, \tag{66}$$

с начальным условием $s(0)=s_0$.

Для решения уравнения (66) с соответствующим начальным условием функция вероятности $P(s,\alpha)$ заменяется своей аппроксимацией и используются численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Общая методика построения данного множества совпадает с алгоритмом построения границы α-ядра вероятностной меры. Полученное данным методом множество является выпуклым, в отличие от ранее полученных результатов, а метод его нахождения является достаточно простым как алгоритмически, так и вычислительно.

Задача 3. Задача сводится к построению системы водоснабжения на основе опреснительной установки с минимальной стоимостью, покрывающей спрос в пресной воде с некоторой вероятностью. Первый блок системы - солнечная батарея площадью a м^2 со стоимостью установки m_1 долларов за 1 м^2, вырабатывающая электроэнергию для питания опреснительной установки. Пресная вода хранится в резервуаре объема b м^3 со стоимостью постройки m_2 долларов за 1 м^3. Функционирование системы рассматривается на горизонте t месяцев. Предполагается, что солнечная активность Y_i случайна для каждого i-ого месяца наблюдения, поэтому объем aY_i опресненной в i-ом месяце воды также случаен. Также полагается, что величины $Y_i,\ i \in \overline{1,t}$ независимы, и каждая из них имеет нормальное распределение с известными параметрами $\mathbb{N}(e_i, \sigma_i^2),\ i \in \overline{1,t}$. Потребление воды w_i м^3 в i-й месяц полагается известным. Также в случае дефицита пресной воды возможна ее доставка из внешнего источника за достаточно высокую цену m_0 долларов за 1 м^3 (доставленный в i-й месяц объем воды обозначим как d_i м^3).

Основное ограничение системы — удовлетворение спроса на пресную воду в каждом месяце. Этот спрос покрывается как за счет опресненной воды в текущем месяце, так и за счет излишков пресной воды, оставшихся с предыдущего месяца и хранящихся в резервуаре. Обозначим количество оставшейся в конце i-го месяца пресной воды как X_i, тогда излишек с предыдущего месяца выражается как $\min\{X_{i-1}, b\}$, а сама величина X_i выражается как:

$$X_i = \min\{X_{i-1}, b\} + aY_i + d_i - w_i, \quad X_0 = 0, \quad i = \overline{1,t}. \tag{67}$$

Условие на удовлетворение спроса с заданной вероятностью может быть записано как:

$$\mathbb{P}\left(X_i \geq 0,\ i = \overline{1,t}\right) \geq \alpha. \tag{68}$$

Целью задачи является минимизация полной стоимости системы $C(h)$ при данном ограничении:

$$C(h) = am_1 + bm_2 + m_0 \sum_{i=1}^{t} d_i \to \min_h, \tag{69}$$

где $h \triangleq (a, b, d_1, ..., d_t)$ - обозначение для вектора управляемых параметров системы. Для решения задачи функция вероятности ограничений (68) записывается в виде:

$$\mathbb{P}\left(X_i \geq 0,\ i = \overline{1,t}\right) = \mathbb{P}\left(\min_{i=\overline{1,t}} X_i \geq 0\right). \tag{70}$$

Для получения дифференцируемой аппроксимации ограничения внешний и внутренний минимумы заменяются дифференцируемой аппроксимацией с помощью преобразования гладкого минимума (аналогично подходу, описанному в главе 2). Затем функция вероятности в ограничении задачи заменяется гладкой аппроксимацией (10).

Итоговая задача минимизации стоимости системы выглядит следующим образом:

$$am_1 + bm_2 + m_0 \sum_{i=1}^{t} d_i \to \min_h \tag{71}$$

при вероятностном ограничении

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta\left(SM_\gamma\left[X_1, \ldots, X_t\right]\right) f_Y(y) dy_t \ldots dy_1 \geq \alpha, \tag{72}$$

где $SM_\gamma(\cdot)$ – гладкий минимум t функций с параметром сглаживания γ.

Для решения задачи используется метод проекции градиента, при этом значения ограничения в точках и производные функции ограничения вычисляются с использованием метода Монте-Карло на выборке из 10000 наблюдений. Полученное решение подразумевает большую площадь устанавливаемой солнечной батареи, но меньший совокупный объем доставляемой извне пресной воды по сравнению с ранее полученным решением.

Задача 4. Далее рассматривается задача формирования портфеля ценных бумаг с логарифмической функцией потерь, вероятностным критерием и равномерным распределением доходностей активов. Предполагается, что инвестор может вложить средства в безрисковый актив с доходностью b_0 и два рисковых актива с доходностями X_1 и X_2; доли капитала, вложенные в рисковые активы, обозначаются u_1 и u_2 соответственно. В качестве функции потерь используется логарифм будущей стоимости портфеля, отражающий прирост капитала инвестора:

$$\Phi(u, X_1, X_2) = \ln\left(1 + (1 - u_1 - u_2)b_0 + u_1 X_1 + u_2 X_2\right). \tag{73}$$

Вероятностный критерий принимает вид:

$$P_\varphi(u) = \mathbb{P}\{\Phi(u, X_1, X_2) \leq \varphi\}. \tag{74}$$

Доходности рисковых активов распределены равномерно:

$$X_1 \sim \mathbf{R}(-1, 1 + 2m_1), \qquad X_2 \sim \mathbf{R}(-1, 1 + 2m_2). \tag{75}$$

Задача решается при помощи модифицированного метода Ньютона, при этом используются гладкая аппроксимация вероятностного критерия, а также аппроксимация его и первых и вторых производных. В используемой модификации метода Ньютона новое приближение оптимальной стратегии на каждом шаге выбирается как наилучшее по значению критерия из двух приближений: полученного по методу Ньютона или полученного по методу градиентного спуска. Новое приближение оптимума по методу Ньютона вычисляется как:

$$u^{[i+1]} = u^{[i]} - H^{-1}\left(u^{[i]}\right)\nabla P_\varphi^\theta(u^{[i]}), \tag{76}$$

где $H^{-1}\left(u^{[i]}\right)$ - матрица, обратная матрице Гессе функции $P_\varphi^\theta(\cdot)$, вычисленная в текущей точке $u^{[i]}$. При решении учитываются ограничения на неотрицательность переменных и ограничение на сумму компонент вектора стратегии $u_1 + u_2 \leq 1$. При приближении текущего решения к границе области допустимых решений ограничивается шаг алгоритма до достижения соответствующей границы. При достижении границы области допустимых решений шаг алгоритма заменяется на проекцию полученного шага алгоритма на границу достигнутого ограничения. Решение, полученное при помощи описанного алгоритма, подразумевает вложение всех средств в актив с более высокой ожидаемой доходностью.

В четвертой главе описан разработанный автором программный комплекс, реализующий построение аппроксимации функции вероятности и ее производных для функции потерь, заданной в формате LaTeX. Описана структура программы и описаны ее функциональные блоки, приведен алгоритм работы с программой вкупе с указанием возможного функционала программы. Рассмотрены два случая использования программы: построение аппроксимированных функций распределения и плотности и решение задачи формирования портфеля ценных бумаг с минимальным риском.

Основные результаты, выносимые на защиту

1) Доказана теорема о сходимости аппроксимированной функции вероятности к исходной и теоремы о сходимости производной аппроксимированной функции вероятности к производной функции вероятности по компонентам вектора стратегии и уровню потерь при возрастании параметра сигмоиды в случае одномерной случайной величины [2, 7].
2) Доказаны аналоги теорем о сходимости аппроксимированной функции вероятности и ее производных к исходным функциям в случае многомерной случайной величины и получены аппроксимационные выражения в форме объемных интегралов. На основе аппроксимационных выражений разработаны модифицированные численные методы решения 4 известных задач стохастического программирования [1, 3, 5, 7].
3) Разработан новый алгоритм решения задачи стохастического программирования с вероятностным критерием, полиэдральной функцией потерь и полиэдральной функцией ограничений на основе рассматриваемой аппроксимации и аппроксимации гладкого минимума [6].
4) Разработан новый алгоритм аппроксимации внешней границы α-ядра вероятностной меры на основе аппроксимации функции вероятности [7].
5) Разработан и зарегистрирован программный комплекс для построения графиков и поверхностей аппроксимированной функции вероятности, ее первых и вторых производных по компонентам вектора стратегии [4, 13].

Публикации в изданиях, входящих в Перечень ВАК

1) *Торишный Р.О.* О применении численных методов второго порядка к задачам стохастического программирования с функцией вероятности // Тр. МАИ. 2021. № 121. С. 1–27.
2) *Соболь В.Р., Торишный Р.О.* О гладкой аппроксимации вероятностных критериев в задачах стохастического программирования // Тр. СПИИРАН. Т. 19. № 1. 2020. С. 180—217. (Scopus)
3) *Sobol V.R., Torishnyy R.O., Pokhvalenskaya A.M.* Application of the smooth approximation of the probability function in some applied stochastic programming problems // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2021. Vol. 14, No. 3. P. 33–45. (Web of Science, Scopus)
4) *Торишный Р.О.* Программный комплекс для анализа задач стохастического программирования с вероятностным критерием // ВКиТ. 2022. Т. 19. № 5(215). С. 3–12.
5) *Sobol V.R., Torishnyy R.O.* Smooth Approximation of the Quantile Function Derivatives // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2022. Vol. 15, No. 4. P. 115–122. (Web of Science, Scopus)

Публикации в изданиях, входящих в МСЦ Web of Science и (или) Scopus

6) *Sobol V., Torishnyi R.* Application of Smooth Approximation in Stochastic Optimization Problems with a Polyhedral Loss Function and Probability Criterion // Communications in Computer and Information Science. vol 1476. Springer, Cham. P. 102—116.
7) *Sobol V., Torishnyi R.* Smooth approximation of probability and quantile functions: vector generalization and its applications // J. Phys.: Conf. Ser. 1925 012034. 2021. P. 1–10.

Публикации в других изданиях

8) *Торишный Р. О.* Приближенное вычисление градиента функции вероятности и функции квантили // 17-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва, 19-23 ноября 2018. — Тезисы докладов. — М.: Типография «Люксор», 2018. С. 473–474.
9) *Торишный Р.О.* О сходимости и погрешности аппроксимации индикаторной функции в вероятностном критерии // XLV Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 28 марта-19 апреля 2019. — Тезисы докладов. — М.: Изд-во МАИ, 2019. С. 1264–1265.
10) *Торишный Р.О.* Об аппроксимации функции вероятности как критерия в задачах оптимизации // XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019», Москва, 8-12 апреля 2019. — Тезисы докладов. — М.: ООО «МАКС Пресс», 2019. С. 140–142.
11) *Соболь В.Р., Торишный Р.О.* Об аппроксимации функции вероятности как критерия в задачах оптимизации // XXIV Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», Евпатория, 30 июня-07 июля 2019. — Тезисы докладов. —- М.: МАИ-Принт, 2019. С. 168–170.
12) *Соболь В.Р., Торишный Р.О.* Новый алгоритм аппроксимации границ альфа-ядер // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва, 23-27 ноября 2019. — Тезисы докладов. —- М.: Издательство «Перо», 2020. С. 497–498.

Программы для ЭВМ

13) *Соболь В.Р., Торишный Р.О.* Программно-алгоритмический комплекс для построения гладких аппроксимаций функции вероятности и её производных. // Федеральная служба по интеллект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2022613132, 2022.