

На правах рукописи



Денискина Галина Юрьевна

**МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ  
ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА 3D-ПЕЧАТИ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ  
МАТЕРИАЛОВ**

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика  
(физико-математические науки)

Автореферат диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель                      Битюков Юрий Иванович,  
д.т.н., доцент

Официальные оппоненты:                      Кондратов Дмитрий Вячеславович,  
д.ф.-м.н., доцент,  
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный  
технический университет имени Гагарина Ю.А.»,  
заведующий кафедрой «Информационная  
безопасность автоматизированных систем»

Малышева Галина Владленовна,  
д.т.н., доцент,  
ФГБОУ ВО «Московский государственный  
технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский  
университет)», профессор

Ведущая организация                      ФГБОУ ВО «Тульский государственный  
университет», г. Тула

Защита диссертации состоится 6 октября 2023 года в 13.00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.02, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», адрес: Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, А-80, ГСП-3, 125993

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», [https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=175246](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=175246)

Автореферат разослан «\_\_\_»\_\_\_\_\_ 2023 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н.

Расказова Варвара Андреевна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы исследования.**

Реализация приоритетных направлений развития российской экономики, цифровая трансформация производства, совершенствование и разработка новых конструкций, применяемых на отечественных высокотехнологичных предприятиях авиационной и ракетно-космической отрасли, энергетики, машиностроения и других, в значительной мере связано с использованием полимерных композиционных материалов (КМ), которые, как известно, обеспечивают оптимальные физико-механические характеристики конструкций (функциональных объектов): лёгкость, прочность, антикоррозийность, кислотостойкость и др. При этом требуется разработка проблемно-ориентированных систем управления и оптимизации процессов изготовления таких объектов из КМ методами аддитивного производства (3D-печати).

Полимерные армированные композиты неоднородны и состоят из двух или более компонентов, которыми являются: армирующие элементы, обеспечивающие необходимые механические характеристики; матрица (связующее), обеспечивающая совместную работу армирующих элементов. В качестве армирующих элементов широкое применение находят углеродные волокна, т.к. они обладают большой удельной прочностью. Механические свойства изделий из КМ существенно зависят от направления волокон. Одним из перспективных направлений изготовления объектов из КМ, позволяющим создавать конструкции сложной формы последовательной укладкой, является технология 3D-печати. Применение 3D-печати в технологии композитов в принципе позволяет получать конструкции с пространственным армированием по заданным траекториям. Это связано с тем, что для печати используется полимерный композит, армированный непрерывным углеродным волокном (CFRT). При использовании 3D-печати возможен полный контроль над расположением волокон во время процесса печати, что позволяет располагать 100% волокон в соответствии с требуемыми условиями эксплуатации объекта.

Однако практически неисследованными являются вопросы, связанные с оптимизацией процесса 3D-печати функциональных объектов из КМ методом 3D-печати CFRT в части контроля расположения волокон при печати, позволяющих учитывать критерии разрушения композита.

### **Степень разработанности темы исследования.**

Известно, что схема укладки волокна заложена в самих уравнениях механики КМ в виде некоторой (неизвестной) локальной ортогональной системы координат. То есть найти оптимальную схему можно только из решения уравнений с разными локальными системами координат. Традиционно схемы укладки волокон рассчитываются численными методами, главным недостатком которых является большой объём и трудоёмкость вычислительного процесса. В диссертации предлагается схемы укладки волокон при печати моделировать с помощью аналитических функций, которые находятся из задачи Неймана для уравнения Лапласа. Работа базируется на научно-технологических решениях исследователей Yamanaka Y., Todoroki A., Ueda M., Hirano Y., Matsuzaki R., которые предложили укладывать волокна по линиям тока несжимаемой жидкости.

В диссертации поставлена задача оптимизации нахождения траекторий укладки волокон на основе критерия разрушения композиционного материала. Для выбора оптимальной схемы печати в качестве целевой функции можно взять любой из критериев разрушения. Общая схема решения задачи выбора оптимальной схемы 3D-печати функциональных объектов из полимерных КМ, армированных непрерывным углеродным волокном, в части контроля расположения волокон представлена на рис. 1.

Целевая функция = критерий разрушения композита → **min**

Углы, которые волокна образуют с границей области печати

Находятся из уравнений механики тонкостенных композитных систем (25 уравнений, 25 неизвестных), в которых заложена геометрия укладки композитных волокон в виде координатного преобразования  $u(x,y), v(x,y)$

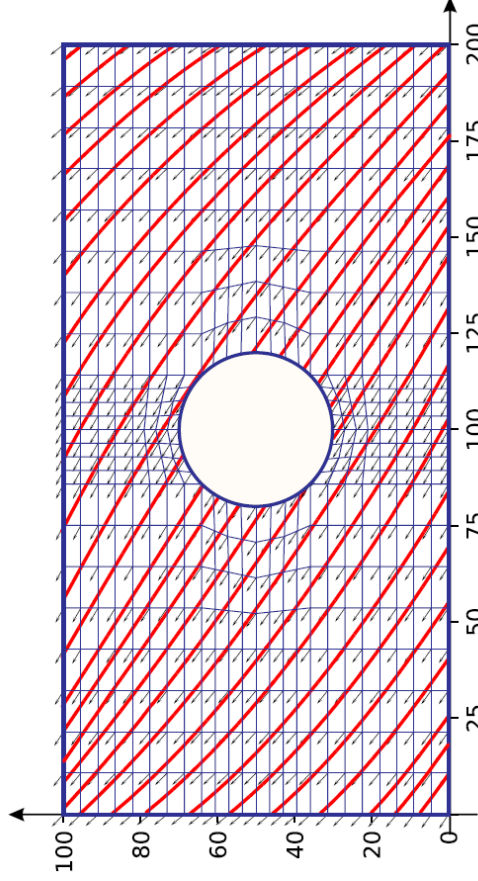
Функции  $u(x,y), v(x,y)$  будем рассматривать, как действительную и мнимую части аналитической функции в области

Функция от компонент тензора напряжений (нет возможности минимизировать в таком виде.

Требуется другое представление критерия)

Задавать такую функцию будем с помощью условий на границе области, которые представляют собой углы, образуемые волокнами с границей области. Тогда функцию  $u(x,y)$  найдем из задачи Неймана для уравнения Лапласа

Итог: целевая функция - это функция определенная на многомерном параллелепипеде (глава 1).  
(Есть возможность минимизировать)



Предполагаем, что векторное поле касательных векторов к кривым укладки волокна - гармоническое (потенциальное и соленоидальное). Поэтому аналитическая функция задает координатное преобразование

Используют метод конечных элементов

Будем использовать МНК или коллокаций, где базисные функции - это вейвлеты, построенные через схемы подразделений и схему подъема

Есть возможность управлять скоростью убывания вейвлет-коэффициентов

Возможность строить базис в  $L_2(X)$  с заданными свойствами

Гладкость  
Свойства функций на границе области

Есть возможность управлять количеством слагаемых в разложении

### Решение уравнений теории упругости (главы 2, 3)

Рис. 1 – Общая схема решения задачи выбора оптимальной схемы печати

Краевые условия для задачи Неймана строятся на основе задания углов между волокнами и границей области печати. Сама задача Неймана решается посредством конформного преобразования области печати на круг, которое задаётся с помощью формулы Чизотти. Таким образом, критерий разрушения композита становится функцией от углов, образуемых волокнами с границей области печати. Минимизация целевой функции осуществляется с помощью генетического алгоритма поиска глобального минимума функции нескольких переменных. Для приближённого решения уравнений механики композиционных материалов в диссертационной работе предлагается использовать вейвлеты, построенные на основе схем подразделений и подъёма. Применению вейвлетов в различных дисциплинах посвящены многочисленные исследования, в первую очередь таких авторов, как Amati G., Bujurke N., Daubechies I., Lepik U., Mallat S., Micchelli C.A., Stollnitz E.J., Sweldens W. и др.

Преимущество вейвлетов перед другими базисными функциями состоит в том, что вейвлет-коэффициенты убывают быстро, поэтому достаточно небольшого числа слагаемых в разложениях. Дополнительное преимущество вейвлетов, использующих схемы подразделений и подъёма состоит в возможности управлять формой и гладкостью базисных функций, например, можно обнулять их на выбранной области, что ещё уменьшает число слагаемых в разложении. Эти преимущества оказываются важны, т.к. при минимизации целевой функции требуется многократно решать систему уравнений в частных производных, описывающую напряжённо-деформируемое состояние конструкции.

#### **Цели и задачи исследования.**

**Цель** – разработка методов и алгоритмов оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Достижение поставленной цели предполагает постановку задачи оптимизации с целевой функцией в виде критерия разрушения композиционного материала.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Поставить задачу оптимизации нахождения траекторий укладки волокон на основе критерия разрушения композиционного материала.
2. Разработать математическую модель укладки волокон и метод нахождения оптимальной схемы печати.
3. Проанализировать и обобщить подходы к построению биортогональных вейвлет-систем.
4. Разработать численный метод решения уравнений механики композиционных материалов с использованием вейвлетов, построенных на основе схем подъёма и подразделений.
5. Выполнить программную реализацию разработанных методов и алгоритмов оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов.

#### **Объект и предмет исследования.**

Объектом исследования является задача оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов с целевой функцией в виде критерия разрушения композиционного материала. Предметом исследования являются методы и алгоритмы решения задачи с использованием вейвлет-систем и уравнений механики композиционных материалов.

#### **Научная новизна исследования.**

Научная новизна исследования заключается в разработке специального математического и алгоритмического обеспечения решения задачи оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из полимерных композиционных материалов.

В процессе исследований получены следующие научные результаты:

1. Поставлена задача оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта из полимерного композиционного материала.

2. Разработана математическая модель управления укладкой волокон при 3D-печати объектов из композиционных материалов. В рамках этой модели траектории укладки волокон получаются с помощью аналитических функций, краевые условия для которых – это углы, образуемые волокнами с границей области печати. Предложен метод нахождения оптимальной схемы 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. В оптимизационной задаче критерий разрушения композиционного материала представлен, как функция нескольких переменных, которыми являются углы, образуемые волокнами с границей области печати.

3. Разработан численный метод решения уравнений механики композиционных материалов, описывающих напряжённо-деформированное состояние конструкции, основанный на вейвлетах, построенных с помощью схем подразделений и подъёма. Разработан новый алгоритм вычисления значений таких вейвлетов на основе операции свёртки последовательностей. Данный алгоритм позволяет организовать параллельные вычисления значений базисных функций.

4. Разработаны алгоритмы и программный комплекс управления и оптимизации процесса 3D-печати объекта, в которых реализована возможность нахождения оптимальной схемы печати, диктуемой условиями его эксплуатации.

#### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

**Теоретическая значимость.** Решена задача оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов с целевой функцией в виде критерия разрушения материала. Разработано математическое обеспечение проблемно-ориентированной системы управления моделированием и нахождением оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати. Отличительной особенностью предложенного подхода является моделирование траекторий укладки волокон с помощью аналитических функций и использование биортогональных вейвлетов, построенных на основе схем подъёма и подразделений, в качестве инструмента решения уравнений механики композиционных материалов. Доказаны необходимые теоремы, и формально исследованы свойства разработанных алгоритмов.

**Практическая значимость.** Разработаны алгоритмы и программное обеспечение, реализующие предложенные методы оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов, в т.ч. направленные также на сокращение объёмов и трудоёмкости вычислительных операций. Полученные результаты могут быть использованы в авиационной, ракетно-космической и других высокотехнологичных отраслях промышленности. Результаты диссертационной работы предложено использовать в АО «Национальный центр вертолётостроения им. М.Л. Миля и Н.И. Камова» при выполнении проектно-исследовательских работ по созданию вертолётной техники.

#### **Методология и методы исследования.**

В диссертационной работе использован математический аппарат теории функций комплексного переменного, теории оптимизации, вейвлет-анализа, механики композиционных материалов, численные методы. Для разработки программного комплекса применялся язык программирования Python© с использованием библиотек TensorFlow©, SciPy©, Matplotlib©.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Постановка задачи оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта из полимерного композиционного материала. Метод и вычислительный алгоритм нахождения значений критерия разрушения композиционного материала по заданным углам, основанный на конформных преобразованиях и вейвлет-преобразовании, как целевой функции задачи оптимизации.

2. Математическая модель управления процессом укладки волокон и метод нахождения оптимальных траекторий укладки при 3D-печати объектов.

3. Обобщение понятия локально-аппроксимационного сплайна, оценки погрешности аппроксимации таким сплайном гладкой функции. Формулы для нахождения значений локально-аппроксимационных сплайнов и их производных в узлах сетки, основанные на свёртке.

4. Алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и их частных производных, а также вейвлетов, построенных на основе схем подразделений и подъёма, основанный на преобразовании свёртки.

5. Метод построения биортогональных вейвлет-систем, полученных по схеме подъёма, на триангулируемых пространствах с конечным множеством симплексов. Алгоритм нахождения значений масштабирующих функций, а также их производных, и вейвлетов на триангулируемом пространстве, основанный на преобразовании свёртки.

6. Метод применения биортогональных вейвлет-систем к приближённому решению дифференциальных уравнений в частных производных, в частности применение таких алгоритмов к приближённому решению уравнений теории упругости.

7. Алгоритмы и программный комплекс управления и оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов.

### **Степень достоверности и апробация результатов.**

Разработанные алгоритмы имеют строгое математическое обоснование. Приближённые решения академических примеров, полученные приближёнными методами, совпадают с аналитическими решениями. Приближённое решение прикладной задачи полностью отвечает физическим представлениям.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на следующих научных конференциях: XLVI Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения – 2020» (г. Москва, 2020 г.), 19-й Международной конференции «Авиация и космонавтика» (г. Москва, 2020 г.), 6-й Международной научно-технической конференции (г. Курск, 2018 г.), 2-х Международных конференциях «Современные проблемы экономики и качества в аэрокосмической промышленности» (г. Москва, 2018 г., 2021 г.), научных семинарах кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (2022 г., 2023 г., под руководством д.ф.-м.н., профессора Кибзуна А.И.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, в том числе 10 публикаций в рецензируемых научных изданиях (5 – в изданиях, входящих в МСЦ Scopus, Web of Science; 3 – в изданиях из перечня ВАК; 2 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ).

**Личный вклад автора.** Все выносимые на защиту результаты получены автором лично.

### Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы из 95 наименований, 2 Приложений. Работа изложена на 138 страницах, содержит 42 иллюстрации и 1 таблицу.

### Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Основные результаты, полученные в диссертации, составляющие научную новизну и выносимые на защиту, соответствуют направлениям исследований (п.п. 3, 4, 5, 9) паспорта научной специальности 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулирована цель, и поставлены задачи диссертационной работы, изложены научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, приведены методология и методы исследования, степень достоверности и апробация результатов, представлены положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена постановке оптимизационной задачи выбора схемы 3D-печати функциональных объектов из термопластичных композиционных материалов. Предлагается метод нахождения значений критерия разрушения композиционного материала как целевой функции задачи оптимизации. Решается задача поиска оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати. Пусть  $X \subset \mathbf{R}^2$  – область печати. Касательные векторы к кривым, по которым укладываются волокна при 3D-печати образуют векторное поле в  $X$ , которое характеризуется комплексным числом  $\gamma = r_1 + ir_2$ , где  $r_1 = r_1(x_1, x_2)$ ,  $r_2 = r_2(x_1, x_2)$ . Это поле предполагается гармоническим, т.е. соленоидальным и потенциальным, такое поле не имеет источников и вихрей. Будем считать, что  $X$  подмножество односвязной области  $\tilde{X}$ :  $X \subset \tilde{X}$ . Значит, выражение  $-r_2 dx_1 + r_1 dx_2$  есть полный дифференциал некоторой функции  $v_2 = v_2(x_1, x_2)$ , определенной на  $\tilde{X}$ . Эта функция называется функцией тока. Кроме того, выражение  $r_1 dx_1 + r_2 dx_2$  также есть полный дифференциал некоторой функции  $v_1(x_1, x_2)$ , которая называется потенциалом поля. Функция тока  $v_2(x_1, x_2)$  и потенциал поля  $v_1(x_1, x_2)$  являются сопряжёнными гармоническими функциями.

Линии тока и линии равного потенциала образуют ортогональное семейство. Аналитическая функция  $v_1(x_1, x_2) + iv_2(x_1, x_2)$ ,  $x_1 + ix_2 \in \tilde{X}$  называется комплексным потенциалом поля. Таким образом, любая аналитическая функция в области  $\tilde{X}$  дает нам и схему укладки волокон и локальную криволинейную систему координат в  $X \subset \tilde{X}$ . Далее точки  $x = (x_1 \ x_2)^T$  будем задавать на одной комплексной плоскости, а точки  $v = (v_1 \ v_2)^T$  – на другой. Тогда преобразование  $v_1 = v_1(x_1, x_2)$ ,  $v_2 = v_2(x_1, x_2)$  и его обратное  $x_1 = x_1(v_1, v_2)$ ,  $x_2 = x_2(v_1, v_2)$  представляют собой преобразование области  $\tilde{X}$  плоскости  $x$  на множество  $\Omega$  плоскости  $v$ . Сеть линий уровня  $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$ ,  $v_2(x_1, x_2) = \text{const}$  называется изотермической сетью.

Кривые, по которым укладываются волокна, определяются параметрическими представлениями:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha,1}: r_{\alpha,1}(v_1) &= x_1(v_1, \alpha) + ix_2(v_1, \alpha), \quad v_1 \in T_{\alpha,1}, \\ \gamma_{\beta,2}: r_{\beta,2}(v_2) &= x_1(\beta, v_2) + ix_2(\beta, v_2), \quad v_2 \in T_{\beta,2}. \end{aligned}$$

где  $T_{\alpha,1}$ ,  $T_{\beta,2}$  – некоторые промежутки,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  и  $T_{\alpha,1} \times \{\alpha\}$ ,  $\{\beta\} \times T_{\beta,2} \subset \Omega$ .



Поскольку функция  $v_1(x_1, x_2)$  является гармонической в односвязной области  $\tilde{X}$ , то она удовлетворяет уравнению Лапласа. Пусть  $\theta(x)$  – угол между внешней единичной нормалью  $n(x) = n_1(x) + i \cdot n_2(x)$  к границе области  $\tilde{X}$  и волокном. В рамках рассматриваемой модели 3D-печати направление волокна в точке  $x \in \partial\tilde{X}$  задаётся вектором  $t(x) = \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \Big|_{v(x)} + i \cdot \frac{\partial x_2}{\partial v_1} \Big|_{v(x)}$ . Учитывая, что  $x_1 = x_1(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$  и  $x_2 = x_2(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ , а также соотношения Коши-Римана, получаем  $t(x) = \frac{1}{|\nabla v_1(x)|} \left( \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} + i \cdot \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} \right)$ . Таким образом, на границе области должно выполняться  $\frac{1}{|\nabla v_1(x)|} \left( \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} n_1(x) + \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} n_2(x) \right) = \cos\theta(x)$ , что можно переписать в виде

$$\frac{\partial v_1(x)}{\partial n} = q(x) \cos\theta(x), \quad q(x) = |\nabla v_1(x)|.$$

Известно, что должно выполняться условие  $\int_{\partial\tilde{X}} \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} ds = \int_{\partial\tilde{X}} \frac{\partial v_2(x)}{\partial s} ds = \int_{\partial\tilde{X}} d v_2 = 0$ , где  $\frac{\partial v_2(x)}{\partial s}$  – производная по направлению касательной к границе области. Итак, функцию  $v_1(x_1, x_2)$  на  $\tilde{X}$  будем искать из задачи Неймана

$$\begin{cases} \partial^{(2,0)} v_1 + \partial^{(0,2)} v_1 = 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial n}(x) = \eta(x), \quad x \in \partial\tilde{X}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\eta(x) = q(x) \cos\theta(x)$ . Функция  $q(x)$  в примерах, представленных в диссертации, выбиралась следующим образом

$$q(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{\cos\theta(x)>0} \cos\theta(x) ds}, & \text{если } \cos\theta(x) > 0; \\ -\frac{1}{\int_{\cos\theta(x)<0} \cos\theta(x) ds}, & \text{если } \cos\theta(x) < 0. \end{cases}$$

Пусть  $\Gamma_\rho = \{w = w_1 + iw_2: w_1^2 + w_2^2 < \rho\}$  и  $x = f(w) = f_1(w_1, w_2) + i \cdot f_2(w_1, w_2)$  – конформное преобразование круга  $\Gamma_1$  на некоторую односвязную область  $D$ , содержащую множество  $X$ . Для  $\rho \in (0; 1)$  обозначим  $\tilde{X}_\rho = f(\Gamma_\rho)$ . Причем  $\rho$  выбрано так, что  $X \subset \tilde{X}_\rho$ . Если обозначить  $\nu(t)$  – угол наклона касательной к границе области  $D$  в точке  $x$ , соответствующей точке  $w = w_1 + iw_2 \in \partial\Gamma_1$  при конформном преобразовании  $x = f(w)$ , то конформное преобразование единичного круга на область  $D$  может быть найдено по формуле Чизотти

$$x = f_1(w_1, w_2) + i \cdot f_2(w_1, w_2) = i \int_{w_{1,0} + iw_{2,0}}^{w_1 + iw_2} \frac{e^{i\xi(y)}}{(1-y)^2} dy + x_0,$$

$$\xi(y) = \frac{1}{2} \pi \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{e^{it} + y}{e^{it} - y} dt + i\xi_0,$$

где  $\xi_0$  – некоторая действительная постоянная,  $x_0 \in D$ ,  $w_{0,1} + i \cdot w_{0,2} \in \Gamma_1$  – заданные точки.

Пусть  $v_1(x)$  является решением задачи (1), где  $\tilde{X} = \tilde{X}_\rho$ . Из соотношений Коши-Римана и гармоничности функций  $f_1, f_2$  легко получить, что функция  $z(w) = v_1(f(w))$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\partial^{(2,0)} z + \partial^{(0,2)} z = 0$  и краевому условию  $\frac{\partial z(w)}{\partial m} = \eta(f(w)) |\nabla f_1(w)|$ ,  $w \in \Gamma_\rho$ ,

$m$  – единичная нормаль к границе круга  $\Gamma_\rho$ . Решение такой задачи может быть найдено по формуле Дини

$$z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \ln \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{\rho^2} d\tau + z_0, \quad (2)$$

где  $z_0 \in \mathbf{C}$  – произвольная константа.

Итак, из (2) можно найти  $z(w)$ ,  $w \in \Gamma_\rho$ . Зная конформное преобразование  $x = f(w)$ , из соотношения  $z(w) = v_1(f(w))$  можно найти функцию  $v_1(x) = z \circ f^{-1}(x)$ ,  $x \in \tilde{X}_\rho$ . Функция  $v_2(x)$  может быть найдена аналогичным образом, но для решения уравнений механики КМ в ней нет необходимости, поскольку достаточно функции  $v_1(x)$  и соотношений Коши-Римана.

Разработанная модель далее использована для поиска оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати. Пусть  $\sigma_1^\pm, \sigma_2^\pm$  – пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль и поперёк волокон, а  $\hat{\tau}_{12}$  – предел прочности при сдвиге в плоскости слоя. В качестве целевой функции используем критерии максимальных напряжений  $R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) = \max\left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}}\right)$ ,

$$\text{где } m_1(\sigma_1) = \begin{cases} \sigma_1^+, & \text{если } \sigma_1 > 0; \\ \sigma_1^-, & \text{если } \sigma_1 < 0, \end{cases} \quad m_2(\sigma_2) = \begin{cases} \sigma_2^+, & \text{если } \sigma_2 > 0; \\ \sigma_2^-, & \text{если } \sigma_2 < 0. \end{cases}$$

Значения  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  могут быть найдены приближенно из уравнений механики КМ, если задать преобразование  $v(x)$ . Краевые условия к этим уравнениям определяются углами  $\theta(x)$ . Следовательно, целевая функция на самом деле является функция этих углов  $\theta$

$$R: \theta|_{\partial X} \mapsto v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) \mapsto \max\left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}}\right).$$

Соответствие  $(v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$  устанавливается посредством приближённого решения уравнений механики КМ методом, описанным в третьей главе.

Функция  $\theta(x)$  задаётся в дискретном множестве точек границы  $\partial \tilde{X}_\rho$ . Выбор углов  $\theta(x_i)$ , где  $x_i \in \partial \tilde{X}_\rho$ , производится следующим образом. Так как должно выполняться условие  $\int_{\partial \tilde{X}_\rho} q(x) \cos \theta(x) ds = 0$ , то должны быть участки границы, на которых  $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ , и должны быть участки границы, на которых  $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Поэтому выберем произвольное разбиение кривой  $\partial \tilde{X}_\rho$  на дуги  $[x_{i_s}, x_{i_{s+1}})$ ,  $s = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1$ ,  $i_0 = 0 < i_1 < \dots < i_{\tilde{N}}$  и зафиксируем его. Пусть

$$I_{\tilde{N}} = \{e = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{\tilde{N}})^T : e_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, \dots, \tilde{N} \text{ и } \exists i_1, i_2, e_{i_1} \cdot e_{i_2} = -1\}.$$

На каждой из дуг  $[x_{i_s}, x_{i_{s+1}})$

$$\theta(x_i) = \frac{\pi}{2} - e_{s+1} \cdot \theta_i \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \theta_i \in (0; 1], \quad i = i_s, i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1.$$

Таким образом, оптимальные траектории укладки волокон можно найти из решения оптимизационной задачи

$$(e^*, \theta_{i_0}^*, \dots, \theta_{i_{\tilde{N}-1}}^*) = \operatorname{argmin}_{e \in I_{\tilde{N}}} \min_{\theta_{i_0}, \dots, \theta_{i_{\tilde{N}-1}} \in (0; 1]} R\left(\frac{\pi}{2} - e_1 \cdot \theta_{i_0} \cdot \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2} - e_{\tilde{N}} \cdot \theta_{i_{\tilde{N}-1}} \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Также будет найдено координатное преобразование  $v^*(x)$ , которое и задаёт траектории укладки волокон. Минимизировать такую функцию будем с помощью генетического алгоритма. Поскольку не требуется искать глобальный минимум, а достаточно обеспечить выполнение условия  $R < 1$ , можно закончить итерационный процесс при его выполнении.

Во **второй главе** рассмотрено дискретное вейвлет-преобразование функций, определённых на  $n$ -мерном промежутке, а также даны понятия неортогонального кратномасштабного анализа и схемы подъёма. Построены вычислительные алгоритмы для локально-аппроксимационных сплайнов, основанные на дискретном вейвлет-преобразовании и свёртке. На их основе разработаны алгоритмы для нахождения значений вейвлетов и их частных производных на основе схемы подъёма. Разработанные алгоритмы реализованы на языке программирования Python© с библиотеками SciPy© и TensorFlow©. Применение этих средств позволило осуществить параллельное построение функций из вейвлет-системы на области печати при использовании разных ядер свёртки. Результаты, полученные во второй главе, далее (в третьей главе) применяются к методу решения уравнений механики КМ с помощью вейвлетов.

Определим В-сплайны порядка  $n$ , как свёртку

$$N_n = N_{n-1} * N_0, \quad N_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0; 1); \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1). \end{cases}$$

и рассмотрим следующие В-сплайны

$$N_{l,m,i}(x) = N_{m-1}(2^l x + m - i), \quad l, i \in \mathbf{Z}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Предположим, что значения  $f_{k_1, \dots, k_n} = f(u_{j, k_1, \dots, k_n})$ ,  $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$  функции  $f(u_1, \dots, u_n)$  известны в узлах сетки

$$u_{j, k_1, \dots, k_n} = (2^{-j} k_1 \quad \dots \quad 2^{-j} k_n),$$

$$k_1 = k_{j,1,0} - 2, k_{j,1,0} - 1, \dots, k_{j,1,1} + 2; \quad \dots, \quad k_n = k_{j,n,0} - 2, k_{j,n,0} - 1, \dots, k_{j,n,1} + 2.$$

В дальнейшем удобно считать, что  $f_{k_1, \dots, k_n} = 0$ , если узел  $u_{j, k_1, \dots, k_n}$  не принадлежит данной сетке.

Введём обозначения для частных производных  $\partial^{(l_1, \dots, l_n)} f = \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_n} f}{\partial u_1^{l_1} \dots \partial u_n^{l_n}}$  и для производной первого

порядка  $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ .

**Определение 1.** Локально-аппроксимационный сплайн от  $n$  переменных определяется следующим равенством

$$\tilde{f}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}} \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} f_{\lambda_1 - i_1 - 2, \dots, \lambda_n - i_n - 2} N_{j,4,\lambda_1}(u_1) \dots N_{j,4,\lambda_n}(u_n),$$

где  $a_{-1} = a_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $a_0 = \frac{4}{3}$ .

В работе доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $X = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{k_{j,i,0}}{2^j}; \frac{k_{j,i,1}}{2^j} \right]$  и  $\text{supp } f \subset K = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{k_{j,i,0}-2}{2^j}; \frac{k_{j,i,1}+2}{2^j} \right]$ . Если  $f \in C^s(K)$ ,  $s = 0, 1, 2$ , то

$$|\partial^{(l_1, \dots, l_n)} \tilde{f}(u) - \partial^{(l_1, \dots, l_n)} f(u)| \leq C_{l_1, \dots, l_n} \omega \left( \partial^{(l_1, \dots, l_n)} f, \frac{5\sqrt{n}}{2^j} \right), \quad \forall u = (u_1 \quad \dots \quad u_n)^T \in X,$$

$$l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbf{Z} \cap [0; s], \quad l_1 + l_2 + \dots + l_n \leq s,$$

где  $C_{l_1, \dots, l_n} = \text{const}$ ,  $\omega(f, \delta)$  – модуль непрерывности функции,  $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$ .

Пусть  $M, F: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . Через  $M(k_1, \dots, k_n)$  обозначим значение  $M_{k_1, \dots, k_n}$ , а  $M * F$  – свёртку функций  $M$  и  $F$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\tilde{f}$  – локально-аппроксимационный сплайн от  $n$  переменных. Тогда значения частных производных функции  $\tilde{f}$  в узлах  $u_{j, k_1, \dots, k_n}$  определяются равенствами

$$\partial^{(l_1, \dots, l_n)} \tilde{f}(u_{j, k_1, \dots, k_n}) = ((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * ((a \otimes \dots \otimes a) * f))_{k_1, \dots, k_n},$$

$$l_1, \dots, l_n = 0, 1, 2, l_1 + \dots + l_n \leq 2;$$

где последовательности  $d^i: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 0, 1, 2$  и  $a: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  имеют носитель  $\{-1, 0, 1\}$  и на нём могут быть записаны в виде  $d^0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $d^1 = 2^{j-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $d^2 = 2^{2j} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\tilde{f}$  – локально-аппроксимационный сплайн от  $n$  переменных. Тогда значения частных производных функции  $\tilde{f}$  в узлах  $u_{j'+j, k_1, \dots, k_n}$ ,  $j' \geq 0$  определяются равенствами:

$$\partial^{(l_1, \dots, l_n)} \tilde{f}(u_{j'+j, k_1, \dots, k_n}) = \left( (d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * r^{j'+j} \right)_{k_1+2, \dots, k_n+2},$$

$$l_1, \dots, l_n = 0, 1, 2, l_1 + \dots + l_n \leq 2,$$

где  $r_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j = ((a \otimes \dots \otimes a) * f)_{\lambda_1-2, \dots, \lambda_n-2}$ ,

$$r_{m_1, \dots, m_n}^{j+s+1} = r_{k_1, \dots, k_n}^{j+s} p_{m_1, k_1}^{j+s+1, 1} \dots p_{m_n, k_n}^{j+s+1, n}, \quad s = 0, 1, \dots, j' - 1, \quad (3)$$

и матрица  $P_{j+s+1, i} = \begin{pmatrix} p_{\lambda, \mu}^{j+s+1, i} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{pmatrix}$

имеет размер  $(n_{s+1, i} + 3) \times (n_{s, i} + 3)$ ,  $n_{s+1, i} = 2 \cdot n_{s, i}$ , при этом  $n_{0, i} = k_{j, i, 1} - k_{j, i, 0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . В правой части выражения (3) суммирование происходит по одинаковым индексам.

Показано, что преобразование (3) является вейвлет-преобразованием. Теорема 1 даёт оценку погрешности при замене функции локально-аппроксимационным сплайном, а теорема 2 и её следствие 1 представляют собой метод вычисления значений локально-аппроксимационного сплайна и его частных производных в узлах данной сетки и более мелкой посредством свёртки.

Проанализирован общий подход к построению биортогональных вейвлет-систем на основе схем подъёма. Отмечено, что эти схемы тесно связаны со схемами подразделений и позволяют строить вейвлеты с заданными свойствами.

Пусть  $n \in \mathbf{N}$  и  $\mathbf{Z}^n$  – целочисленная сетка. Схема подразделения определяется заданной последовательностью  $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^n}$ , которая называется маской схемы подразделения. Будем предполагать, что  $\text{supp}(A) = \{\alpha: A_\alpha \neq 0\}$  – конечное множество. Обозначим  $l_\infty(\mathbf{Z}^n)$  линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей  $v = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^n}$ , в котором норма

определяется равенством  $\|v\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} |v_\alpha|$ . Введём в рассмотрение оператор  $S: l_\infty(\mathbf{Z}^n) \rightarrow l_\infty(\mathbf{Z}^n)$ , который определим формулой  $(Sv)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^n} A_{\alpha-2\beta} v_\beta$ ,  $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^n)$ .

**Определение 2.** Схема подразделения  $v^m = Sv^{m-1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $v^0 = v$  сходится в  $l_\infty(\mathbf{Z}^n)$ , если существует непрерывная функция  $f_v$ , определённая на  $\mathbf{R}^n$  такая, что  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_v\left(\frac{\cdot}{2^m}\right) - v^m\|_\infty = 0$ .

Пусть  $X \subset \mathbf{R}^n$ . Будем рассматривать действительное пространство  $L_2(X)$ .

**Определение 3.** Кратномасштабный анализ на  $X$  определяется как последовательность подпространств  $V_j \subset L_2(X)$ ,  $j \in \mathcal{J} \subset \mathbf{Z}$ , такая что:

1.  $V_j \subset V_{j+1}$ ;
2.  $\bigcup_{j \in \mathcal{J}} V_j$  плотно в  $L_2(X)$ .
3. Для каждого  $j$  существуют так называемые масштабирующие функции  $\varphi_{j,k}$ ,  $k \in \mathcal{K}_j$  такие, что множество  $\{\varphi_{j,k}: k \in \mathcal{K}_j\}$  представляет собой базис Рисса в  $V_j$ . При этом  $\mathcal{K}_j \subset \mathcal{K}_{j+1}$ .

**Определение 4.** Пусть  $\{V_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  и  $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  – два кратномасштабных анализа на  $X$  с масштабирующими функциями  $\varphi_{j,k}$ ,  $k \in \mathcal{K}_j$ ,  $j \in \mathcal{J}$  и  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ ,  $k \in \mathcal{K}_j$ ,  $j \in \mathcal{J}$  соответственно. Кроме того, пусть  $V_{j+1} = V_j + W_j$ ,  $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j + \tilde{W}_j$  и  $\{\psi_{j,k}, k \in \mathcal{M}_j\}$ ,  $\{\tilde{\psi}_{j,k}, k \in \mathcal{M}_j\}$  – базисы Рисса в  $W_j$  и  $\tilde{W}_j$ , соответственно.

Если

$$\begin{aligned} (\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'}) &= \delta_{k,k'}, \quad \forall k, k' \in \mathcal{K}_j, \\ (\psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j,m'}) &= \delta_{m,m'}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad \forall m \in \mathcal{M}_j, \quad \forall m' \in \mathcal{M}_j; \\ (\tilde{\psi}_{j,m}, \varphi_{j,k}) &= 0; \quad (\tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j,m}) = 0, \quad \forall m \in \mathcal{M}_j, \quad \forall k \in \mathcal{K}_j, \end{aligned}$$

то семейства функций  $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{M}_j}$  и  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{M}_j}$  называются биортогональными вейвлет-системами.

Из определения 3 следует, что существуют последовательности коэффициентов  $\{h_{j,k,l}\}$ ,  $\{\tilde{h}_{j,k,l}\}$ , такие что

$$\varphi_{j,k} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} h_{j,k,l} \varphi_{j+1,l}, \quad \tilde{\varphi}_{j,k} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} \tilde{h}_{j,k,l} \tilde{\varphi}_{j+1,l}.$$

Значения  $h_{j,k,l}$ ,  $\tilde{h}_{j,k,l}$  определены для  $j \in \mathcal{J}$ ,  $k \in \mathcal{K}_j$  и  $l \in \mathcal{K}_{j+1}$ . Так как  $W_j \subset V_{j+1}$  и  $\tilde{W}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$ , то

$$\psi_{j,m} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} g_{j,m,l} \varphi_{j+1,l}, \quad \tilde{\psi}_{j,m} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} \tilde{g}_{j,m,l} \tilde{\varphi}_{j+1,l}, \quad m \in \mathcal{M}_j.$$

Последовательности  $h_{j,k,l}$ ,  $\tilde{h}_{j,k,l}$ ,  $g_{j,k,l}$  и  $\tilde{g}_{j,k,l}$  называются фильтрами. В случае биортогональных вейвлет-систем для  $f \in L_2(X)$  имеет место равенство

$$f = \sum_{n \in \mathcal{K}_{j_0}} v_{j_0,n} \varphi_{j_0,n} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{n \in \mathcal{M}_j} \gamma_{j,n} \psi_{j,n},$$

где  $v_{j,k} = (f, \tilde{\varphi}_{j,k})$ ,  $\gamma_{j,m} = (\tilde{\psi}_{j,m}, f)$ .

Схема подъёма (Lifting Scheme) позволяет строить биортогональные вейвлет-системы с заданными свойствами, используя некоторые начальные биортогональные вейвлет-системы с

фильтрами  $h_{j,k,l}^0, \tilde{h}_{j,k,l}^0, g_{j,k,l}^0$  и  $\tilde{g}_{j,k,l}^0$ . По схеме подъёма новое семейство фильтров  $h_{j,k,l}, \tilde{h}_{j,k,l}, g_{j,k,l}, \tilde{g}_{j,k,l}$ , определяющих биортогональные вейвлет-системы, находится по формулам:

$$h_{j,k,l} = h_{j,k,l}^0, \quad g_{j,m,l} = g_{j,m,l}^0 - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} s_{j,k,m} h_{j,k,l}^0,$$

$$\tilde{g}_{j,m,l} = \tilde{g}_{j,m,l}^0, \quad \tilde{h}_{j,k,l} = \tilde{h}_{j,k,l}^0 + \sum_{m \in \mathcal{M}_j} s_{j,k,m} \tilde{g}_{j,m,l}^0$$

при любом выборе последовательности  $\{s_{j,k,m}\}_{k \in \mathcal{K}_j, m \in \mathcal{M}_j}$ .

Следует заметить, что масштабирующие функции  $\varphi_{j,l}$  одинаковы в исходном и поднятом кратномасштабном анализе  $\varphi_{j,k} = \varphi_{j,k}^0$ . Заметим, что можно не менять функцию  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ , а поднимать  $\varphi_{j,k}$ . Механизм этот точно такой же, и называется двойственной схемой подъёма. Он позволяет улучшить свойства вейвлета  $\tilde{\psi}_{j,m}$ .

Разработан алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов на  $\mathbf{R}^n$ , полученных с помощью схемы подъёма. Основанный на преобразовании свёртки, алгоритм позволяет распараллелить построение вейвлет-системы на заданном множестве. Пусть  $\Lambda^n$  – совокупность всех ненулевых векторов  $e \in \mathbf{Z}^n$ , координаты которых равны 0 или 1. Обозначим  $\mathcal{K}_j = 2^{-j}\mathbf{Z}^n$  и  $\mathcal{M}_j = \mathcal{K}_j + 2^{-j-1}\Lambda^n$ . Пусть последовательность  $A = \{A_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  определяет функцию  $C^r(\mathbf{R})$  с компактным носителем и удовлетворяет дополнительному условию  $A_{2i} = \delta_{0,i}$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ . Введём в рассмотрение оператор  $U$ , который функции  $v: \mathcal{K}_j \rightarrow \mathbf{R}$  ставит в соответствие функцию  $Uv: \mathcal{K}_{j+1} \rightarrow \mathbf{R}$ , определенную равенством:  $(Uv)_k = v_k$ , для любого  $k \in \mathcal{K}_j$  и  $(Uv)_m = 0$ , для любого  $m \in \mathcal{M}_j$ .

**Алгоритм вычисления значений масштабирующих функций, вейвлетов и их частных производных.**

**Шаг 1.** Определение последовательности  $b = \{b_t\}_{t \in \mathbf{Z}^n}$  с помощью равенства  $b_t = \prod_{i=1}^n A_{t_i}$ ,  $t = (t_1 \dots t_n)^T \in \mathbf{Z}^n$ .

**Шаг 2.** Нахождение последовательности  $v_{j+m}$ ,  $m \in \mathbf{N}$  для данного  $\alpha \in \mathcal{K}_j$  по схеме подразделений  $v_{j+m} = b * (Uv_{j+m-1})$ ,  $m = 1, 2, \dots, J$ ,  $v_{j,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}$ ,  $\forall \beta \in \mathcal{K}_j$ .

**Шаг 3.** Нахождение значений масштабирующей функции  $\varphi_{j,\alpha}$  и её частных производных в точках  $\beta \in \mathcal{K}_{j+J}$  из приближенных равенств:

$$\varphi_{j,\alpha}(\beta) \approx v_{j+J,\beta}, \quad \left( \lim_{J \rightarrow \infty} \|\varphi_{j,\alpha}(\bullet) - v_{j+J,\bullet}\|_\infty = 0 \right);$$

$$\partial^{l_1, \dots, l_n} \varphi_{j,\alpha}(\beta) \approx \left( (d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * \left( (a \otimes \dots \otimes a) * v_{j+J} \right) \right)_\beta$$

$$l_1, \dots, l_n = 0, 1, 2; \quad l_1 + \dots + l_n \leq 2,$$

где  $d^0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $d^1 = 2^{j+J-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$d^2 = 2^{2(j+J)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Шаг 4.** Нахождение вейвлетов по формуле

$$\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} s_{j,k,m} \varphi_{j,k}$$

где последовательность  $s_{j,k,m}$  можно выбрать произвольным образом.

Выбором последовательностей  $A$  и  $s$  можно задавать свойства масштабирующих функций и вейвлетов. Еще больше возможностей появляется, если рассматривать нестационарные схемы подразделений.

**Третья глава** посвящена исследованию применения вейвлетов в задачах теории упругости. На основании полученных во второй главе результатов предложен метод приближённого решения задач теории упругости с помощью вейвлетов.

Пусть  $(T, g, X)$  – триангулируемое пространство с конечным множеством симплексов.  $T = \bigcup_{l=1}^N I_l^n \subset I_0^n \subset \mathbf{R}^n$  – объединение замкнутых  $n$ -мерных кубов вида  $I_l^n = \prod_{i=1}^n [b_{i,l}; b_{i,l} + 1]$ , где  $b_{i,l} \in \mathbf{Z}$ ,  $I_0^n$  –  $n$ -мерный куб,  $g: T \rightarrow X \subset \mathbf{R}^n$  – гомеоморфизм,  $g: \text{Int}(T) \rightarrow \text{Int}(X)$  – диффеоморфизм класса  $C^2$ , где  $\text{Int}(X)$  – внутренность множества  $X$ . Пусть  $\{\varphi_{j,\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{K}_j}$ ,  $\{\psi_{j,\beta}\}_{\beta \in \mathcal{M}_j}$  – масштабирующие функции и вейвлеты на  $T$ . Определим масштабирующие функции и вейвлеты на  $X$  следующими равенствами:

$$\varphi_{j,\alpha}^X(x) = \varphi_{j,\alpha} \circ g^{-1}(x), \quad \psi_{j,\alpha}^X(x) = \psi_{j,\alpha} \circ g^{-1}(x).$$

Тогда, если  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  и  $f \circ g \in L_2(T)$ , то  $f = \sum_{k \in \mathcal{K}_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}^X + \sum_{j \geq j_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X$ , в том смысле, что

$$\lim_{j_1 \rightarrow +\infty} \int_T \left[ \left( f - \sum_{k \in \mathcal{K}_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}^X - \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X \right) \circ g(u) \right]^2 du = 0.$$

Отображение  $g(u_1, \dots, u_n) = (x_1(u_1, \dots, u_n) \dots x_n(u_1, \dots, u_n))^T$  и его обратное  $g^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_1, \dots, x_n) \dots u_n(x_1, \dots, x_n))^T$  на практике выписать сложно, поэтому воспользуемся его аппроксимацией, представленной в теореме 1 и её следствии 1, и найденной по точечным соответствиям  $g(u_{\Lambda,k}) = x_{\Lambda,k}$ ,  $k \in \mathcal{K}_\Lambda = 2^{-\Lambda} \mathbf{Z}^n$ , где  $u_{\Lambda,k} = k = (2^{-\Lambda} k_1, \dots, 2^{-\Lambda} k_n)^T$  и  $x_{\Lambda,k} = (x_{\Lambda,k_1, \dots, k_n}^{(1)}, \dots, x_{\Lambda,k_1, \dots, k_n}^{(n)})^T$ .

Разработан следующий алгоритм нахождения значений функций  $\partial^{(l_1, \dots, l_n)} \varphi_{j,\alpha}^X$  для  $l_i = 0, 1, 2$ ,  $l_1 + \dots + l_n \leq 2$ . Обозначим  $Dg$  – матрицу Якоби отображения  $g$ .

**Алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов на  $X$ .**

**Шаг 1.** Вычисление свёрток  $((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * (a \otimes \dots \otimes a)) * x_{\Lambda, \bullet}^{(i)}$ ,

где  $x_{\Lambda, \bullet}^{(i)} = \{x_{\Lambda,k}^{(i)}\}_k$ ,

Результат:  $\partial^{(l_1, \dots, l_n)} x_i(u_{\Lambda,k}) \approx \left( ((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * (a \otimes \dots \otimes a)) * x_{\Lambda, \bullet}^{(i)} \right)_k$ .

**Шаг 2.** Нахождение  $Dg^{-1}(x_{\Lambda,k}) = (Dg(u_{\Lambda,k}))^{-1}$  по теореме о производной обратной функции.

Значения вторых частных производных  $\partial_\lambda \partial_\mu u_l(x_{\Lambda,k})$  находятся из системы

$$\sum_{l=1}^n \partial_l x_i(u_{\Lambda,k}) \partial_\lambda \partial_\mu u_l(x_{\Lambda,k}) = - \sum_{l=1}^n \sum_{t=1}^n \partial_l \partial_t x_i(u_{\Lambda,k}) \partial_\lambda u_l(x_{\Lambda,k}) \partial_\mu u_t(x_{\Lambda,k})$$

**Шаг 3.** Последовательное вычисление свёрток для заданного  $\alpha \in \mathcal{K}_j$

$$v_{k+1} = b * (Uv_k), \quad j \leq k \leq j+J-1, \quad v_{j,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \forall \beta \in \mathcal{K}_j$$

**Шаг 4.** Вычисление свёрток  $((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * (a \otimes \dots \otimes a)) * v_{j+J}$ .

**Шаг 5.** Нахождение приближённых значений масштабирующих функций в узлах  $T \cap \mathcal{K}_{j+J}$

$$\varphi_{j,\alpha}(\beta) \approx v_{j+J,\beta}, \quad \forall \beta \in T \cap \mathcal{K}_{j+J}$$

$$\partial^{(l_1, \dots, l_n)} \varphi_{j,\alpha}(\beta) \approx \left( (d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * (a \otimes \dots \otimes a) \right) * v_{j+J} \Big|_{\beta}, \quad \forall \beta \in T \cap \mathcal{K}_{j+J}.$$

**Шаг 6.** Нахождение по теореме о производной сложной функции в любой точке  $x_{j+J,k} \in X$  (здесь  $j + J \leq \Lambda$ )

$$\partial_i \varphi_{j,\alpha}^X(x_{j+J,k}) = \sum_{l=1}^n \partial_l \varphi_{j,\alpha}(u_{j+J,k}) \partial_i u_l(x_{j+J,k}),$$

$$\partial_i \partial_p \varphi_{j,\alpha}^{\hat{X}}(x_{j+J,k}) = \sum_{l=1}^n \partial_l \varphi_{j,\alpha}(u_{j+J,k}) \partial_i \partial_p u_l(x_{j+J,k}) +$$

$$+ \sum_{l,t=1}^n \partial_l \partial_t \varphi_{j,\alpha}(u_{j+J,k}) \partial_p u_t(x_{j+J,k}) \partial_i u_l(x_{j+J,k}).$$

Исследовано применение вейвлетов в приближённом решении уравнений в частных производных двумя способами – методом наименьших квадратов (МНК) и методом коллокаций.

Рассмотрим дифференциальное уравнение и краевые условия

$$Lw = f \text{ на } X, \quad L_i w = f_i, \text{ на } \partial X, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

где  $L$  – линейный дифференциальный оператор.

Пусть  $\{V_j\}_{j \in J}$  – кратномасштабный анализ на  $X$ . Приближённые решения  $w_j$  уравнения (4) будем искать в виде

$$w_{j_1} = \sum_{n \in \mathcal{K}_{j_0}} v_{j_0,n} \varphi_{j_0,n}^X + \sum_{j=j_0}^{j_1-1} \sum_{n \in \mathcal{M}_j} \gamma_{j,n} \psi_{j,n}^X = \sum_{k=1}^{M(j_1)} c_k \omega_k \in V_{j_1}, \quad (5)$$

где для удобства базисные функции пронумерованы одним индексом и обозначены  $\omega_k$ , а коэффициенты  $v_{j_0,n}$  и  $\gamma_{j,n}$  обозначены  $c_k$ . Приближённые решения сначала найдены методом наименьших квадратов из решения вариационной задачи  $w_{j_1} = \arg \min_{w \in V_{j_1}} I_{j_1}(w)$ .

Функционал  $I_{j_1}(w)$  определяется равенством  $I_{j_1}(w) = \|Lw - f\|^2 + \sum_{i=1}^m a_i \|L_i w - f_i\|^2$ ,

где  $a_i$  – положительные весовые коэффициенты.

Задача (4) также была решена вторым приближённым способом – методом коллокаций, в котором требуется, чтобы уравнение и граничные условия удовлетворялись в узлах сетки, так называемых узлах коллокаций.

В третьей главе приведены примеры приближённых решений уравнений в частных производных, найденных методом коллокаций и МНК с использованием в качестве масштабирующих функций вейвлетов Deslauriers-Dubuc и сплайн-вейвлетов, и выполнено сравнение с их точными решениями и с решением, полученным методом конечных элементов. В третьей главе также исследовано применение вейвлетов в задачах теории упругости. В качестве наглядного примера выполнен расчёт пластины круглой формы с отверстием.



**Пример.** Рассмотрим пластину  $X = \{(x_1, x_2): a^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq b^2\}$  в условиях растяжения/сжатия. Пусть  $E = 2,1$  МПа;  $\mu = 0,3$ ;  $a = 20$  м,  $b = 60$  м. Интенсивность нормальной к границе пластины нагрузки имеет вид:

$$\mathbf{F}_n = 2 \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \mathbf{n}, \quad \mathbf{F}_n = 2 \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) \mathbf{n}.$$

С использованием вейвлетов найдены приближённое решение данной задачи и выполнено его сравнение с точным:

$$\sigma_1 = 2 + \frac{2}{r^2} \cos(2\theta), \quad \sigma_2 = 2 - \frac{2}{r^2} \cos(2\theta); \quad \tau_{12} = \frac{2}{r^2} \sin(2\theta).$$

В данной задаче  $T$  и  $X$  показаны на рис. 2 *а*, *б*. На рис. 3 представлены графики точного решения  $\sigma_1$  (рис. 3 *а*) и его приближения  $\sigma_{1,j}$  (рис. 3 *б*). Погрешности для метода коллокаций  $\max_{x_i} |\sigma_1(x_i) - \sigma_{1,j}(x_i)|$ ,  $\max_{x_i} |\sigma_2(x_i) - \sigma_{2,j}(x_i)|$  и  $\max_{x_i} |\tau_{12}(x_i) - \tau_{12,j}(x_i)|$  не превышают, соответственно 0,0009; 0,000955 и 0,00025 МПа.

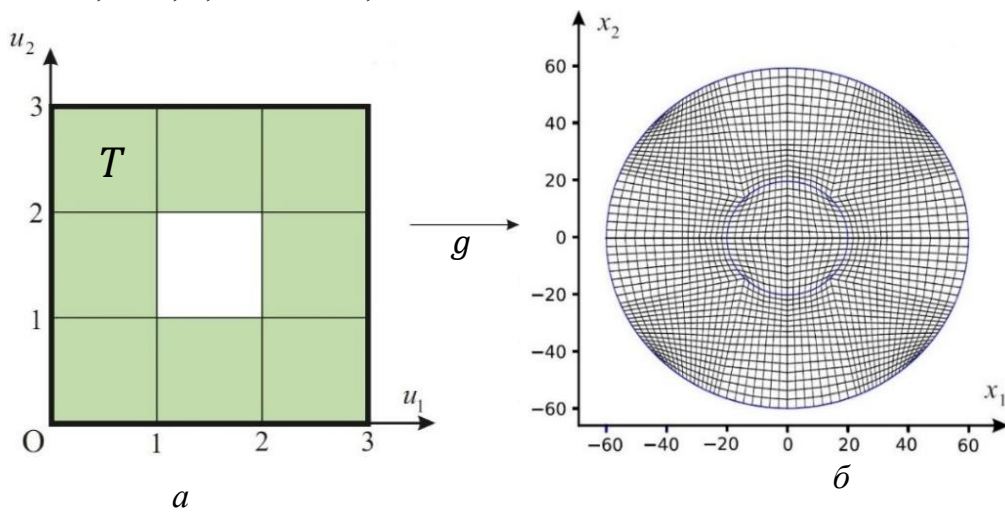


Рис. 2 – Триангулируемое пространство ( $T, g, X$ ):  
*а* –  $T$ , *б* – подразделение  $X$

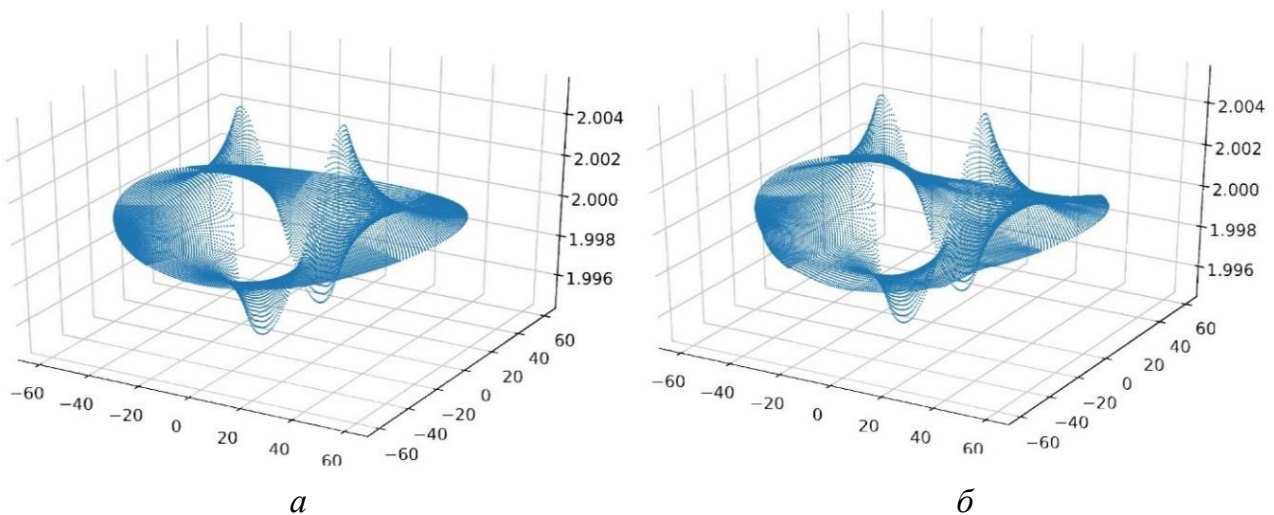


Рис. 3 – Графики решений:  
*а* – точное решение  $\sigma_1$ , *б* – приближённое решение  $\sigma_{1,j}$

В третьей главе также представлен пример поиска оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати пластины с отверстием посредством решения оптимизационной задачи, поставленной в главе 1. При решении уравнений механики КМ использовался подход, описанный в главах 2 и 3. На рис. 4 показан пример выбора области  $\tilde{X}_\rho$ , на рис. 5 представлены траектории укладки волокон для 3D-печати прямоугольной пластины с отверстием

$$X = [0; a] \times [0; b] \setminus \{(x_1, x_2): (x_1 - x_{1,0})^2 + (x_2 - x_{2,0})^2 \leq r^2\}$$

после 2-х итераций генетического алгоритма. Достигнуто условие  $R < 1$ .

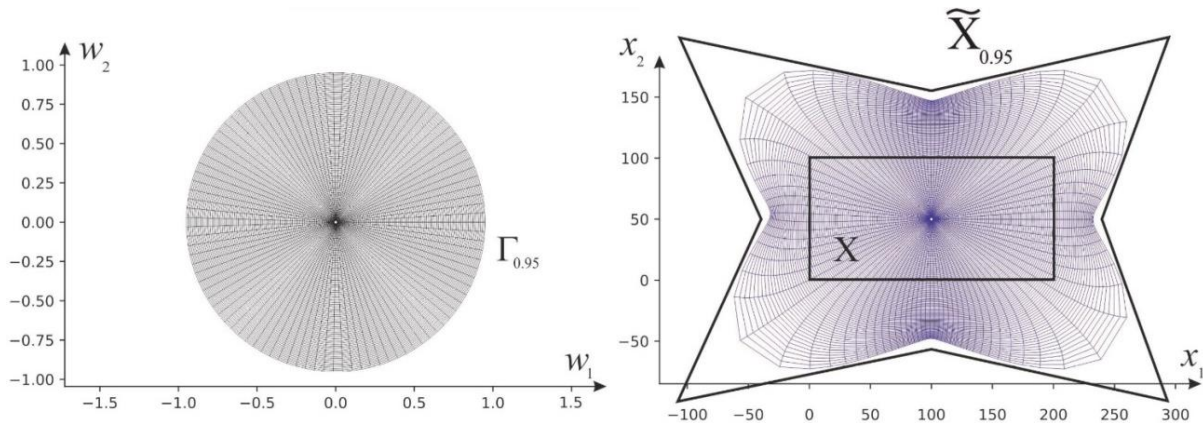


Рис. 4 – Конформное преобразование области печати и выбор множества  $\tilde{X}_\rho$

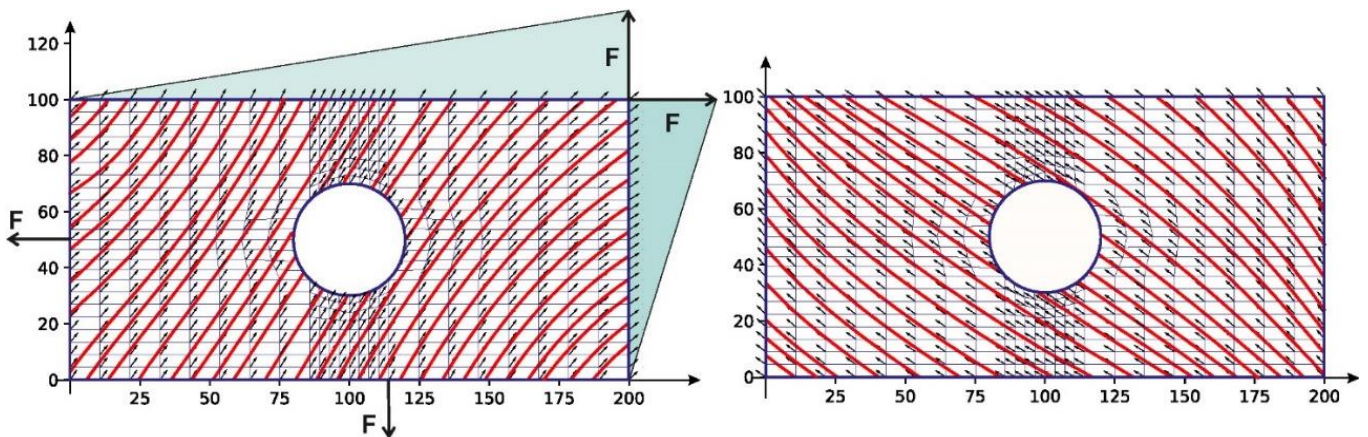


Рис. 5 –Траектории укладки волокон при 3D-печати

В четвёртой главе описан программный комплекс для реализации разработанных методов и алгоритмов моделирования, управления и оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из волокнистых композиционных материалов. Приведены общая организация программного комплекса и назначение его функциональных блоков. Программный комплекс предназначен для моделирования и визуализации процесса укладки волокон в области печати, нахождения оптимальной схемы печати в соответствии с требованиями условий эксплуатации функционального объекта. Программное обеспечение разработано на языке программирования Python© с применением объектно-ориентированного подхода, использованы библиотеки TensorFlow© и SciPy©. Графический интерфейс разработан с применением библиотеки Matplotlib©. Архитектура программного комплекса «CompositeCAD», состоящего из подсистем CAD, CAE,

представлена на рис. 6. В дальнейших исследованиях предполагается разработка подсистемы САМ, в которой будет реализована генерация управляющих кодов для 3D-принтера по найденным траекториям укладки волокон.

В основу САД-подсистемы положена методика единообразного задания плоских областей печати. В САЕ-подсистеме реализован расчёт конструкции на прочность. Для решения уравнений в частных производных, описывающих напряжённо-деформируемое состояние конструкции, на области печати осуществляется построение вейвлет-системы.

В главе 4 приводятся описания классов, составляющих основу программного комплекса, и блок-схемы некоторых основных функций классов.

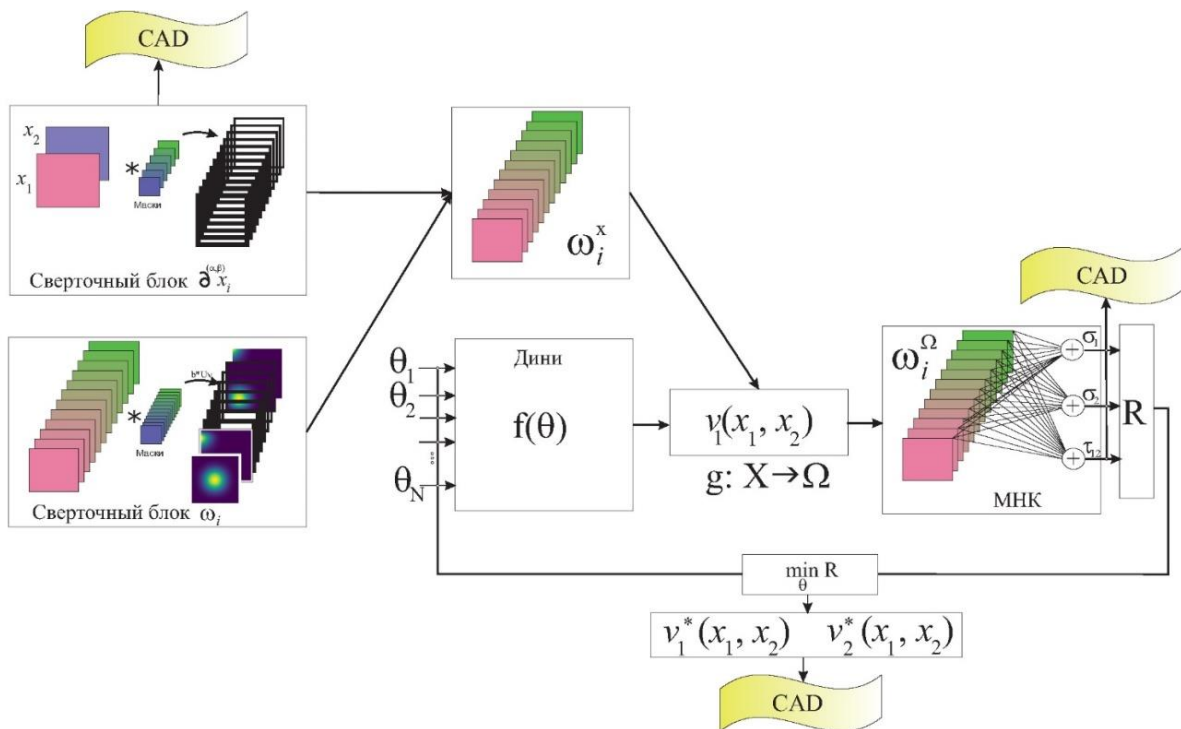


Рис. 6 – Архитектура программного комплекса

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации разработано специальное математическое и алгоритмическое обеспечение решения задач оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из волокнистых композиционных материалов, с целевой функцией в виде критерия разрушения материала. Разработана проблемно-ориентированная система управления моделированием и нахождением оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати объектов. Отличительной особенностью и новизной предложенного подхода является моделирование траекторий укладки волокон с помощью аналитических функций и использование биортогональных вейвлетов, построенных на основе схем подъёма и подразделений, в качестве инструмента решения уравнений механики композиционных материалов.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Поставлена задача оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта из полимерного композиционного материала [3, 5, 6].
2. Разработаны метод и вычислительный алгоритм нахождения значений критерия разрушения композиционного материала по заданным углам, основанный на конформных

преобразованиях и вейвлет-преобразовании, как целевой функции задачи оптимизации. В оптимизационной задаче критерий разрушения композиционного материала представлен как функция углов, которые волокна образуют с границей области печати [5, 6].

3. Разработана математическая модель управления процессом укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Отличительной особенностью этой модели является то, что траектории укладки волокон получаются с помощью аналитических функций, краевые условия для которых – это углы, образуемые волокнами с границей области печати. В рамках модели предложен метод нахождения оптимальной схемы укладки волокон при печати, диктуемой условиями эксплуатации функционального объекта [5, 6, 8].

4. Обобщено понятие локально-аппроксимационного сплайна, получены оценки погрешности аппроксимации таким сплайном гладкой функции. Получены формулы для нахождения значений локально-аппроксимационных сплайнов и их производных в узлах сетки, основанные на свёртке. Показано, что эти формулы являются частным случаем вейвлет-восстановления. Преимущество полученных формул в том, что их использование позволяет распараллелить процедуру построения вейвлет-системы на заданном множестве [4].

5. Разработан алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и их частных производных, а также вейвлетов, построенных на основе схем подразделений и подъёма, основанный на преобразовании свёртки [1, 2].

6. Разработан метод построения биортогональных вейвлет-систем на триангулируемых пространствах с конечным множеством симплексов. Отличительной особенностью метода является применение разработанного алгоритма нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов на триангулируемом пространстве, а также их производных. Вейвлет-системы получены по схеме подъёма, а алгоритм основан на преобразовании свёртки [2, 8].

7. Разработан метод применения биортогональных вейвлет-систем к приближённому решению дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, показано его применение к приближённому решению уравнений теории упругости. Приведены результаты сравнения точных методов решения с приближёнными [3, 8].

8. Разработаны алгоритмы и программный комплекс управления и оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта, в которых реализована возможность нахождения оптимальной схемы печати, диктуемой условиями его эксплуатации [7, 9, 10].

**Перспективы и направления дальнейших исследований** связаны с совершенствованием предложенных методов и алгоритмов в части разработки специального математического, алгоритмического и программного обеспечения систем анализа и оптимизации с использованием искусственного интеллекта для создания цифровых двойников, виртуального моделирования процессов аддитивного производства технических объектов сложной геометрической формы, нахождения рациональных схем армирования печатных композитных конструкций и оптимальных режимов печати. Это позволит учитывать и быстро корректировать возможные ошибки при проектировании, экономить дорогостоящие материалы, сокращать время работы технологического оборудования, а, следовательно, значительно уменьшить затраты на начальных стадиях жизненного цикла изделий в соответствии с концепцией проектирования изделий под заданную стоимость.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

## Публикации в рецензируемых научных изданиях

*Международные системы цитирования (Scopus, Web of Science)*

1. Bityukov, Y.I. Spline Wavelets Use for Output Processes Analysis of Multi-Dimensional Non-Stationary Linear Control Systems / Y.I. Bityukov, Y.I. Deniskin, G.Y. Deniskina // Journal of Physics: Conference Series. – Omsk: Institute of Physics Publishing, 2018. – P. 012018. – DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012018.
2. Deniskina, G.Y. About Biorthogonal Wavelets, Created on the Basis of Scheme of Increasing of Lazy Wavelets / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 173–181. – DOI:10.1007/978-3-030-71119-1\_18.
3. Application of Wavelets and Conformal Reflections to Finding Optimal Scheme of Fiber Placement at 3D-Printing Constructions from Composition Materials / Yu. Bityukov, Yu. Deniskin, G. Deniskina, I.V. Potsebneva // E3S Web of Conferences: 2021. – P. 05004. – DOI: 10.1051/e3sconf/202124405004.
4. Deniskina, G.Y. About Some Computational Algorithms for Locally Approximation Splines, Based on the Wavelet Transformation and Convolution / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 182–191. – DOI: 10.1007/978-3-030-71119-1\_19.
5. Босов, А.В. О поиске оптимальной схемы 3D-печати конструкций из композиционных материалов / А.В. Босов, Ю.И. Битюков, Г.Ю. Денискина // Информатика и её применения. – 2022. – Т.16. – Вып. 1. – С. 10–19. – DOI: 10.14357/19922264220102.

*Перечень ВАК*

6. Денискина, Г.Ю. Оптимизация выбора схемы 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов // Г.Ю. Денискина // Моделирование и анализ данных. – 2023. – Том 13. – № 2. – С. 7–35. – DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130201>.
7. Денискина, Г.Ю. CAD/CAM/CAE-система для изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов методом 3D-печати / Г.Ю. Денискина // Труды МАИ. – 2022. – №126. – DOI: 10.34759/trd-2022-126-21.
8. Денискина, Г.Ю. Приближённое решение уравнений теории упругости с помощью сплайн-вейвлетов / Г.Ю. Денискина // Труды МАИ. – 2021. – №121. – DOI: 10.34759/trd-2021-121-24.

*Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ*

9. Денискина, Г.Ю. Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема CAD) / Г.Ю. Денискина // Свидетельство № 2022682105 о государственной регистрации программы для ЭВМ. – 2022.
10. Денискина, Г.Ю. Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема CAE) / Г.Ю. Денискина // Свидетельство № 2022682106 о государственной регистрации программы для ЭВМ. – 2022.



## Другие публикации

11. Денискина, Г.Ю. О вейвлет-нейронных сетях с функциями активации, полученными по схеме подъёма ленивых вейвлетов / Г.Ю. Денискина, Ю.И. Битюков, Д.А. Чащин // XLVI Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения – 2020»: Сборник тезисов докладов. – Москва: Изд-во МАИ. – 2020. – 1731 с. – С. 902–903.

12. Денискина, Г.Ю., Битюков, Ю.И. Некоторые вопросы моделирования 3D-печати авиационных конструкций из композиционных материалов / Г.Ю. Денискина, Ю.И. Битюков // Математические методы в аэрокосмической науке и технике: 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 23–27 ноября 2020 года: Сборник тезисов докладов. – Москва: Издательство «Перо». – 2020. – 980 с. – С. 455–457.

13. Битюков, Ю.И. Применение дискретного вейвлет-преобразования и свёртки для нахождения значений локально-аппроксимационных сплайнов / Ю.И. Битюков, Ю.И. Денискин, Г.Ю. Денискина // Качество и жизнь. – 2020. – № 3(27). – С. 39–45. – DOI: 10.34214/2312-5209-2020-27-3-39-45.

14. Денискина, Г.Ю., Битюков, Ю.И. Алгоритм численного решения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / Г.Ю. Денискина, Ю.И. Битюков // Качество в производственных и социально-экономических системах: Сборник научных трудов 6-й Международной научно-технической конференции (20 апреля 2018 года); редкол.: Павлов Е.В. (отв. ред.); Юго-Зап. гос. ун-т; в 2-х томах. – Курск: ЗАО «Университетская книга». – 2018. – Том 1. – 314 с. – С. 108–113.

15. Денискина, Г.Ю., Битюков, Ю.И. Численное решение системы дифференциальных уравнений для задач менеджмента качества в высокотехнологичных отраслях / Г.Ю. Денискина, Ю.И. Битюков // Современные проблемы экономики и качества в аэрокосмической промышленности: Сборник трудов Международной конференции. – Москва: Изд-во «Доброе слово». – 2018. – 192 с. – С. 64–68.

16. Денискина, Г.Ю. Особенности разработки программного комплекса для реализации аддитивных технологий в условиях цифровой трансформации промышленности / Г.Ю. Денискина // Современные проблемы экономики и качества в аэрокосмической промышленности: Сборник трудов Международной конференции. – Москва: Изд-во «Доброе слово». – 2022. – 146 с. – С. 42–49. – ISBN 978-5-6048908-0-6.