

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
«МАИ»**

---

На правах рукописи



**Войсковский Андрей Павлович**

**АВТОНОМНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЦЕНТРА  
МАСС ГЕОСТАЦИОНАРНОГО КОСМИЧЕСКОГО  
АППАРАТА НА ЭТАПАХ ДОВЫВЕДЕНИЯ, ПЕРЕВОДА В  
РАБОЧУЮ ПОЗИЦИЮ И УДЕРЖАНИЯ**

**Специальность: 05.07.09**

**Динамика, баллистика, управление движением  
летательных аппаратов**

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:    **Доцент, к.т.н. А.В. Федоров**

Москва – 2016

## **ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ**

БЦВК – бортовой цифровой вычислительный комплекс

ГСО – геостационарная орбита

ДУ – двигательная установка

ДСГП – диспетчер событий и глобальных переменных

ИВС – информационно-вычислительная система

КА – космический аппарат

КДУ – корректирующая двигательная установка

КБО – комплекс бортового оборудования

КС – космическая система

ЛА – летательный аппарат

НИП – наземный измерительный пункт

НКО – низкая круговая орбита

НРТК – наземный радиотехнический комплекс

ОПО – общее программное обеспечение

ОС – операционная система

ПАО – программно-алгоритмическое обеспечение

ПМК – программно-моделирующий комплекс

ПМО – программно-математическое обеспечение

СО – система ориентации

СК – система координат

СКО – среднеквадратичное отклонение

СУ – система управления

СУД – система управления движением

ТНП – текущие навигационные параметры

ЭРДУ – электроракетная двигательная установка

Введение.....	4
Глава 1. Постановка технической задачи исследования.....	15
Глава 2. Математические модели движения центра масс КА на этапах довыведения, перевода на рабочую долготу и удержания на ГСО .....	23
2.1 Системы координат.....	24
2.2 Системы счисления времени .....	27
2.3 Математическая модель истинного движения КА .....	28
2.3.1 Модель гравитационного ускорения Земли .....	29
2.3.2 Силы гравитации Луны и Солнца .....	31
2.3.3 Модель давления солнечного света .....	33
2.3.4 Модель тяги ЭРДУ.....	36
2.4 Математическая модель движения центра масс КА на этапе довыведения на ГСО.....	38
2.5 Модель движения центра масс КА на этапах приведения и удержания .....	40
Глава 3. Синтез алгоритмов управления на этапах довыведения на ГСО, перевода на рабочую долготу и удержания в точке стояния .....	51
3.1 Алгоритм управления на этапе довыведения.....	52
3.2 Постановка задачи управления при приведении и удержании .....	55
3.3 Алгоритм управления на этапе приведения.....	57
3.3.1 Алгоритм поиска синтезируемой составляющей управления. ....	60
3.3.2 Алгоритм поиска программной составляющей управления. ....	70
3.4 Алгоритм управления на этапе удержания .....	89
3.4.1 Управление при удержании долготы.....	89
3.4.2 Алгоритм коррекции наклона.....	90
Глава 4. Имитационное моделирование управления движением центра масс КА на этапах довыведения на ГСО, приведения и удержания .....	93
4.1 Описание программного комплекса.....	94
4.2 Описание блока навигации .....	102
4.3 Исходные данные и варианты моделирования .....	106
4.3.1 Этап довыведения .....	106
4.3.2 Этап приведения в рабочую позицию .....	107
4.3.3 Этап удержания.....	108
4.4 Описание результатов моделирования .....	109
4.4.1 Этап довыведения .....	109
4.4.2 Этап приведения в рабочую позицию .....	115
4.4.3 Этап удержания.....	119
4.5 Анализ результатов моделирования .....	121
Заключение .....	123
Список литературы .....	126

# Введение

**Актуальность темы.** Определяющей тенденцией совершенствования спутниковых систем мониторинга, связи, навигации, телекоммуникаций и телевидения с использованием геостационарных спутников связи является стремление к автономности управления движением и навигации космического аппарата (КА) на всех этапах его жизненного цикла. Конечной целью перехода к автономному управлению является снижение расходов на содержание наземной инфраструктуры и повышение надежности функционирования КА путем максимального исключения влияния человеческого фактора.

Реализация этой тенденции в отношении геостационарных КА требует применения новых аппаратных средств навигации и управления, таких, как стационарные плазменные двигатели тяги, бортовые приемники сигналов ГНСС ГЛОНАСС, межспутниковые линии связи. Кроме того, необходимо обеспечить автономность алгоритмов управления движением и ориентацией с учетом современных требований к точности на перечисленных ниже этапах жизненного цикла КА на ГСО:

- довыведение КА на ГСО;
- перевод в рабочую позицию на ГСО;
- удержание в рабочей позиции.

Предварительный анализ источников [1-5] показывает, что современные требования по точности управления движением центра масс КА на ГСО на этапах его удержания в рабочей точке с учетом ошибок системы навигации состоят в следующем:

- удержание КА на ГСО в рабочей точке должно обеспечиваться с точностью не менее 0.05..0.1 градуса, что означает необходимость определения периода обращения КА с ошибкой не хуже 12 секунд (3 СКО);

- наклонение орбиты КА на ГСО должно поддерживаться с точностью не менее 0.3 градуса (3 СКО);
- компоненты вектора положения КА должны быть известны с точностью не хуже 9 м (3СКО), а компоненты вектора скорости КА с точностью не хуже 1 м/с (3СКО) при выведении КА на ГСО с использованием ЭРДУ;
- фактический уровень тяги ЭРДУ должен быть известен с точностью не хуже 1% от номинала (3 СКО), а ориентация тяги – с точностью не хуже 10 угловых минут (3 СКО) при приведении КА в точку стояния на ГСО с использованием ЭРДУ.

Анализ отечественных и зарубежных публикаций и работ В.А.Бартенева, Ю.Л. Булынина, В.А. Малышева, М.Н. Красильщикова, Л.Н. Лысенко, В.В. Малышева А.В. Федорова, Д.М. Кружкова, А.В. Старкова, М.С. Константинова, В.Г.Петухова [1-5] позволил определить основные направления, принципы и методы совершенствования алгоритмов управления движением центра масс геостационарного КА в плане повышения их автономности и точности, к которым относится более полный учет возмущений и повышение точности уравнений движения при синтезе алгоритмов управления.

**Объект исследования.** Объектом исследования является замкнутая система автономного управления движением центра масс КА при его довыведении на ГСО с помощью ЭРДУ малой тяги, приведении в рабочую орбитальную позицию и удержании в ней с использованием оценок вектора состояния, генерируемых автономной бортовой навигационной системы.

**Предмет исследования.** Квазиоптимальный алгоритм управления движением центра масс КА с обратной связью на этапе довыведения на ГСО. Алгоритмы автономного управления движением центра масс на этапах приведения в рабочую позицию и удержания в ней, разрабатываемые с использованием комбинированного метода оптимизации, подразумевающего

разбиение искомого управления стохастической системой на программируемую и синтезируемую компоненты.

**Цель диссертационной работы.** Настоящая работа посвящена формированию алгоритмов функционирования автономной системы управления движением центра масс КА на ГСО на этапах его довыведения с помощью ЭРДУ, перевода на рабочую долготу и удержания в рабочей точке, обеспечивающей перечисленные выше требования по точности с учетом ошибок решения навигационной задачи.

Для достижения поставленной цели решаются **актуальные задачи** синтеза стохастического управления по неполным данным с использованием критерия, отражающего, как статистические характеристики терминальной точности управления, так и статистические характеристики затрат рабочего тела ЭРДУ на реализацию управления.

При разработке алгоритмов управления используется понятие, так называемых, достаточных координат, позволяющее разделить исходную задачу стохастического управления по неполным данным на две независимые:

- задачу формирования оптимальных в среднеквадратическом смысле оценок компонент расширенного вектора состояния КА на ГСО (задача навигации);
- задачу оптимального стохастического управления по полным данным.

Удовлетворение поставленных требований по точности управления на рассматриваемых в данной работе этапах жизненного цикла КА на ГСО проверяется путем имитационного моделирования процессов функционирования замкнутой автономной системы управления движением центра масс КА. Моделируемая замкнутая система содержит подсистему навигации как «черный ящик», генерирующий оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки следующих компонент расширенного

вектора состояния КА: параметров ориентации, положения, скорости, модуля тяги и углов ориентации ЭРДУ, а также действующих возмущений.

Таким образом, несмотря на то, что основной задачей данной работы является разработка автономных алгоритмов управления движением центра масс КА на ГСО, оценка достигаемой точности управления осуществляется с учетом ошибок решения навигационной задачи..

**Методы исследования.** Основными методами исследования, используемыми в работе, являются методы системного анализа, динамики полета, теории управления, обработки навигационных данных, программирования и синтеза оптимального управления. При программной реализации математического обеспечения используются методы объектно-ориентированного программирования и мультизадачность операционных системах Windows.

**Основные положения, выносимые на защиту.**

- Математические модели движения и алгоритмы синтеза субоптимального автономного управления движением КА на этапах приведения и удержания, не требующие вмешательства оператора в процесс управления.
- Математические модели процессов функционирования бортовых аппаратных средств, а именно: модель тяги ЭРДУ при довыведении КА на ГСО с учетом неточного монтажа ДУ, систематического и случайного отклонения тяги от номинала, ошибок угловой ориентации связанных осей КА относительно орбитальных, а также углового отклонения вектора тяги относительно двигательной установки ЭРДУ.
- Программно-моделирующий комплекс для отработки алгоритмов автономного управления КА на этапах довыведения на ГСО, приведения и удержания.

- Результаты моделирования работы замкнутой системы автономного управления и навигации на рассматриваемых этапах жизненного цикла геостационарного КА.

**Научная новизна.** В работе получены следующие результаты, обладающие новизной и научной значимостью:

- Разработан алгоритм автономного управления при переводе в рабочую позицию в стохастической постановке по интегро – терминальному критерию с учетом систематических возмущений от гравитационного поля Земли, гравитации Луны и Солнца.
- Разработан алгоритм синтеза управления удержанием КА в рабочей позиции на ГСО в стохастической постановке в установившемся режиме.
- Получена оценка достигаемой точности автономного управления движением центра масс КА на этапах довыведения, приведения в рабочую позицию на ГСО и удержания в ней с учетом ошибок решения навигационной задачи, что существенно отличает настоящую работу от предыдущих аналогов [1-5].

**Практическая значимость результатов исследования.** Результаты, полученные в диссертационной работе, могут найти дальнейшее применение как для действующих, так и для перспективных КА и систем, а именно:

- Разработанные алгоритмы и программно-моделирующее обеспечение могут быть использованы в системах отработки автономных систем управления динамическими операциями КА на околокруговых орбитах, отличных от ГСО.
- Все предложенные в работе методы и алгоритмы реализованы в виде программно-моделирующего обеспечения, имеющего открытую архитектуру и позволяющего решать задачи отработки средств автономного проведения динамических операций КА с исключением нештатных ситуаций из-за ошибок операторов.



**Достоверность** полученных результатов подтверждается использованием апробированного математического аппарата, обоснованием полученных результатов математическими расчетами и сравнительным анализом полученных результатов моделирования проведенного в работе с опубликованными результатами работ по данной тематике.

**Апробация работы.** Результаты работы доложены и получили одобрение на конференциях различного уровня, включая международные:

- 25-й Симпозиум Европейского космического агентства по проблеме «Динамика космического полета» (Мюнхен, Германия, 2015);
- Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Космонавтика XXI века» (Королев, Московская обл. 2016);
- 15-я конференция Авиация и Космонавтика ( Москва, МАИ, 2016 г).

**Публикации.** Результаты диссертационного исследования опубликованы в рецензируемых научных журналах [9,11], индексируемых в международных системах цитирования Scopus и «Web of science» и научно-техническом отчете [19].

**Результаты диссертационной работы** использованы в рамках ПНИ ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (№RFMEFI57414X0100), а также в учебном процессе кафедр 704 и 604. Имеется акт о внедрении результатов диссертации на предприятии - индустриальном партнере ПНИ АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнёва.

#### **Содержание работы.**

Настоящая работа включает Введение, четыре главы, Заключение и Список цитируемой литературы.

**Первая глава** содержит постановку технической задачи, включая анализ состояния обсуждаемой в работе проблемы с учетом российского и международного опыта. Целью такого анализа является выявления наиболее

актуальных тенденций совершенствования методов и алгоритмов высокоточного автономного стохастического управления применительно к КА на ГСО, а также описание наиболее сложных научно технических задач, обеспечивающих необходимую точность управления движением центра масс КА на ГСО на рассматриваемых этапах его жизненного цикла.

**Вторая глава** посвящена формализации задач автономного управления на рассматриваемых этапах жизненного цикла КА на ГСО. Эта глава содержит математические модели управляемого движения центра масс КА на этапах довыведения на ГСО, перевода на рабочую долготу и удержания в точке стояния. При этом используются следующие системы координат:

- абсолютная система координат J2000, интерпретируемая как инерциальная;
- орбитальная система координат, связанная с КА, вращение которой осуществляется с угловой скоростью движения КА по орбите;
- связанная с КА система координат, ориентируемая при нулевых углах как орбитальная СК;
- мгновенная земная система координат, связанная с суточным вращением Земли;
- геодезическая сферическая система координат;

Модели управляемого движения центра масс КА учитывают следующие факторы:

- притяжение Земли по разложению гравитационного потенциала по сферическим функциям 70-го порядка из актуальных бюллетеней IERS;
- притяжение Луны и Солнца с использованием координат небесных тел, вычисленных путем аппроксимации эфемерид из каталогов DELE405 полиномами Чебышева;
- давление солнечного света на КА с учетом функции тени и учета площади видимого со стороны КА солнечного диска;

- приливные возмущения в теле Земли, построенные на основе набора коэффициентов для модификации гармоник гравитационного потенциала Земли вследствие Лунного и Солнечного притяжения, а также атмосферного давления и перемещения океанических масс;
- прецессию и нутацию Земной оси в соответствии с рекомендациями IERS.

Формализация модели управляемого движения центра масс КА использует следующие математические модели процессов функционирования бортовых аппаратных средств:

- модель работы ЭРДУ при выведении КА на ГСО с учетом статистических характеристик ошибок, вызванных:
  - неточным монтажом двигательной установки;
  - систематических отклонений модуля тяги от номинала;
  - случайных отклонений модуля тяги от номинала;
  - неточностью отработки заданной угловой ориентации связанных осей КА относительно орбитальных;
  - угловым отклонением вектора тяги относительно двигательной установки;
- модель газореактивных сопел с учетом нелинейного характера формирования тяги.

С учетом особенностей перечисленных выше математических моделей управляемого движения центра масс КА, внешней среды и аппаратных средств формализованы две исходные задачи автономного управления движением, решаемые в последующих главах работы.

Первая задача заключается в формировании алгоритма автономного управления движением центра масс КА от окончания довыведения до приведения в рабочую окрестность орбитальной позиции на ГСО с использованием данных навигационной системы с учетом случайных ошибок тяги ЭРДУ. Рабочая окрестность задана параллелепипедом

допустимых отклонений координат КА вдоль орбиты, по радиусу и по бинормали.

Вторая задача заключается в формировании алгоритма автономного управления коррекциями удержания КА в рабочей окрестности орбитальной позиции на длительном интервале времени по данным навигационной системы, с учетом случайных ошибок тяги двигателей коррекции.

Все задачи автономного управления формализуются и решаются в стохастической постановке как задачи управления по полным данным с последующим моделированием замкнутого контура, включающего алгоритмы решения навигационной задачи.

**Третья глава** содержит описание используемого в данной работе алгоритма автономного управления движением КА на этапе довыведения, а также решение задач автономного управления на этапах приведения и удержания, которые формализуются как стохастические задачи синтеза оптимального управления по полным данным с последующим моделированием замкнутого контура, включающего алгоритмы навигации.

Здесь необходимо указать, что в данной работе на этапе довыведения с помощью ЭРДУ используется, так называемый квазиоптимальный алгоритм управления с обратной связью, разработанный В.Г. Петуховым [5]. Алгоритм позволяет определить текущее направление вектора тяги ЭРДУ как функцию компонент вектора состояния КА. Этот алгоритм, строго говоря, детерминированный, однако в данной работе он использует для формирования текущего направления вектора тяги ЭРДУ не точные значения компонент вектора состояния КА, а результаты решения навигационной задачи, формируемые, как уже указывалось, блоком навигации, включенным в замкнутый контур управления движением.

На остальных рассматриваемых этапах жизненного цикла КА на ГСО алгоритм управления определяет последовательность моментов включения и выключения двигателей коррекции. Эта последовательность формируется как результат решения стохастической задачи синтеза управления по полным

данным и комбинированного метода оптимизации [1-4] Эффективность этих алгоритмов также определяется путем использования для формирования моментов включения и выключения двигателей не точных значений компонент вектора состояния КА, а результатов решения навигационной задачи.

В четвертой главе проводится статистический анализ точности работы замкнутой системы автономного управления движением геостационарного КА на рассматриваемых в работе этапах его функционирования. Анализ проводится путем имитационного моделирования процесса функционирования целевого КА с использованием специального программно-математического обеспечения (ПМО), разработанного на основе объектно-ориентированного программирования. Исследуются следующие режимы функционирования КА: довыведение на ГСО с использованием ЭРДУ, перевод в орбитальную позицию, удержание в рабочей позиции.

Разработанный комплекс ПМО позволяет проводить математическое моделирование движения центра масс КА на всех этапах его жизненного цикла с учетом всех указанных выше факторов. Приводится описание составных частей ПМО в виде соответствующих диаграмм классов, где для каждой из частей пояснено функциональное назначение.

Результаты моделирования включают:

- оценки терминальной точности и характеристической скорости довыведения в окрестность орбитальной позиции на ГСО с начальной орбиты с использованием квазиоптимального алгоритма с обратной связью по данным автономной навигационной системы;
- оценки терминальной точности, времени и характеристической скорости приведения КА в рабочую позицию с учетом ошибок навигации, разбросов тяги и ориентации вектора тяги;

- оценки терминальной точности, характеристической скорости и числа коррекций удержания вдоль орбиты (восток-запад) на фоне коррекций удержания наклона (север-юг).

# Глава 1. Постановка технической задачи исследования

На этапе целевого применения геостационарного космического аппарата возникают следующие технические задачи управления движением его центра масс:

- приведение в рабочую позицию (слот) орбитальной структуры после введения разгонным блоком в окрестность слота;
- перевод из одного слота структуры в другой, например – при замене вышедшего из строя спутника резервным;
- удержание в окрестности номинального положения слота в течение длительных промежутков времени;
- коллокация;
- увод на орбиту захоронения.

В последнее время к этому перечню добавляется задача довыведения КА на ГСО с помощью собственной ЭРДУ. Применение довыведения увеличивает общее время выведения КА, но при этом на орбиту можно доставить более тяжелый спутник чем по традиционной схеме выведения. Необходимость увеличения массы КА прямо связана с общесистемной потребностью увеличить срок активного существования спутника связи до 15 лет и более.

На всех этапах в управлении движением КА участвует наземный контур управления и измерительные средства контроля орбиты, следовательно, увеличение времени активного существования неизбежно скажется и на стоимости обслуживания системы связи. Снизить нагрузку на наземный контур управления можно путем повышения автономности бортовой системы управления КА. Таким образом, возникает актуальная техническая задача создания интегрированной автономной бортовой системы управления и навигации КА, использующей современные технологии ГЛОНАСС/GPS.

Анализ источников показывает, что при решении задачи автономного управления движением центра масс КА необходимо учитывать три группы неконтролируемых факторов, а именно:

- неконтролируемые факторы, вызываемые влиянием внешней среды;
- неконтролируемые факторы, вызываемые ошибками работы бортовых аппаратных средств;
- ошибки решения навигационной задачи.

В самом общем случае все перечисленные выше неконтролируемые факторы можно разделить на три группы:

- детерминированные;
- стохастические;
- неопределенные.

Решение обсуждаемых в данной работе задач управления в детерминированной и стохастической постановке неоднократно рассматривалось в источниках [1-4]. Результаты этих работ в той или иной форме используются автором настоящей диссертации. Вместе с тем их анализ убедительно показывает, что наиболее конструктивные с прикладной точки зрения решения задач управления могут быть получены в стохастической постановке, с использованием априорной статистики относительно неконтролируемых факторов, вызываемых влиянием внешней среды и ошибками работы аппаратных средств. Что касается ошибок решения навигационной задачи, в данной работе предлагается учитывать их влияние на точность решения задачи управления путем имитационного моделирования процессов работы замкнутой системы автономного управления на всех рассматриваемых этапах жизненного цикла КА, включающих необходимость решения навигационной задачи.

Таким образом, данная работа посвящена синтезу алгоритмов автономного управления движением центра масс КА на перечисленных выше этапах жизненного цикла в стохастической постановке. Как известно,



стохастический подход дает оптимальное в среднем решение и применяется в тех случаях, когда заданы априорные статистические характеристики неконтролируемых факторов, интерпретируемые как случайные.

Необходимо отметить, что в данной работе на этапе довыведения с помощью ЭРДУ будет использоваться квазиоптимальный алгоритм управления с обратной связью [5]. Алгоритм позволяет определить текущее направление вектора тяги ЭРДУ как функцию компонент вектора состояния КА. Строго говоря, квазиоптимальный алгоритм не учитывает в явном виде случайные факторы, но в данной работе для формирования текущего направления вектора тяги ЭРДУ используются не точные значения компонент вектора состояния КА, а результаты решения навигационной задачи, формируемые блоком навигации, включенным в замкнутый контур управления движением. При «сквозном» моделировании процесса автономного управления движением этот алгоритм используется для получения начальных условий этапа приведения КА в рабочую позицию ГСО.

Таким образом, синтез алгоритмов автономного управления в данной работе имеет отношение к техническим задачам, перечисленным в начале данной главы.

На остальных рассматриваемых этапах жизненного цикла КА на ГСО алгоритм управления должен определять последовательность моментов включения и выключения двигателей коррекции. Эта последовательность формируется как результат решения стохастической задачи синтеза управления по полным данным с использованием комбинированного метода оптимизации [6-8]. Эффективность этих алгоритмов также определяется с учетом факта использования для формирования моментов включения и выключения двигателей не точных значений компонент вектора состояния КА, а результатов решения навигационной задачи.

Приведенный выше перечень технических задач можно свести к двум базовым. Первая из них заключается в приведении вектора начального

состояния КА группировки в заданное множество. Вторая задача – удержание вектора состояния КА в заданном множестве в течение длительного срока активного существования. Различие между ними состоит в том что, во-первых, начальные условия первой задачи не принадлежат требуемому множеству, в то время как при удержании вектор состояния не должен выходить из него. Во-вторых, на этапе ввода КА в орбитальную группировку может потребоваться как минимизация затрат топлива, так и минимизация времени выполнения маневра. На этапе удержания в течение срока активного существования на первый план выходит минимизация затрат топлива. Ниже первую задачу будем также называть задачей перевода КА из одной точки пространства в другую.

Для оценки качества процесса будем использовать два показателя – характеристическую скорость  $\Delta V_{\Sigma}$ , и длительность процесса  $t_{\Sigma}$ .

В любом случае считается, что в некоторый момент времени  $t_1$  известен вектор состояния  $X(t_1)$ , элементами которого являются параметры орбиты  $a$ ,  $e$ ,  $u$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $i$ , где  $a$  – большая полуось;  $e$  – эксцентриситет;  $u$  – аргумент широты;  $\omega$  – аргумент перигея;  $\Omega$  – долгота восходящего узла;  $i$  – наклонение.

Возможны различные варианты формирования проекций управляющих ускорений на орбитальные оси:

- трехосная система стабилизации КА непрерывно обеспечивает его ориентацию так, что двигатели координатных перемещений постоянно ориентированны по орбитальным осям (трансверсаль, радиус-вектор и бинормаль);
- трехосная система стабилизации ориентирует КА в инерциальной системе координат. При этом проекции ускорений от тяги на орбитальные оси зависят от времени.
- трехосная система непрерывно поддерживает требуемую ориентацию связанных осей КА в орбитальной системе координат.

В рамках перечисленных вариантов двигатели работают в режиме «включен»-«выключен», создавая на активном участке постоянную тягу. Для достижения заданной терминальной точности может потребоваться несколько активных участков. Процесс ввода КА в группировку или удержания в ней состоит из «элементарных» событий – циклов коррекций. Каждый цикл содержит два участка – пассивный (двигатели выключены) и активный.

Считается, что КА введен в орбитальную структуру, если в результате последнего цикла коррекции параметры его орбиты удовлетворяют следующим требованиям

- период обращения  $T$  отличается от требуемого  $T^*$  не более чем на  $\pm\Delta T_m$ ;
- эксцентриситет орбиты находится в пределах допуска относительного требуемого  $e_m$ ;
- геоцентрическая долгота  $\alpha$  отличается от заданной  $\alpha^*$  не более чем на  $\pm\Delta\alpha_m$ ;
- отклонения наклона орбиты и долготы восходящего узла от требуемых значений  $i_0, \Omega_0$  находятся в пределах  $\pm\Delta i_m, \pm\Delta\Omega_m$  соответственно;

В качестве технических ограничений рассмотрим следующие:

- длительности пассивных участков ограничены снизу и сверху. Это связано с необходимостью проведения траекторных измерений для определения текущих параметров орбиты, а также обеспечения радиовидимости наземных пунктов;
- длительности активных участков ограничены сверху, тем самым, учитывается ограничение на время непрерывной работы двигателя;
- время выполнения маневра и расход рабочего тела при переводе КА из одной точки пространства в другую ограничено сверху;

Цель управления – перевести КА из одной заданной точки пространства в другую с заданной терминальной точностью с учетом

технических ограничений при минимальном значении выбранного конечным потребителем критерия оптимальности.

В качестве основного приема при построении моделей управляемого движения КА на ГСО для синтеза оптимального управления приемом линеаризацию уравнений его возмущенного движения в окрестности номинальной орбиты. В настоящее время это, пожалуй, единственный путь, позволяющий получить конструктивные решения, пригодные в автономном варианте применения. Номинальной может быть любая заранее выбранная или формируемая внутри алгоритма управления круговая или эллиптическая орбита. В нашем случае таковой является ГСО.

Как отмечено выше, решению рассматриваемой задачи посвящен ряд работ, в которых не выдвигались требования автономности применения алгоритмов управления. Кроме того, линеаризованная модель управляемого движения учитывала только случайную ошибку тяги двигателя. В условиях увеличения интервалов времени приведения и, особенно, удержания это требует постоянного уточнения циклограмм коррекции, что противоречит требованию автономности. Алгоритм управления должен автономно определять количество циклов коррекций, интервалы времени между коррекциями, ориентацию вектора тяги и время работы двигателя на каждой коррекции, используя доступную навигационную информацию. Вмешательство человека-оператора наземного контура допускается только при возникновении нештатной ситуации.

Информация о текущих параметрах орбиты КА формируется бортовыми аппаратными средствами в виде оценок, обладающих определенной точностью, т.е. содержащих ошибки оценивания. В процессе коррекций возможны ошибки реализации. Поэтому, как уже указывалось выше, рассматриваемая техническая задача представляет собой задачу управления динамической системой при неполной и неточной информации.

К алгоритмическому обеспечению задач автономного управления движением центра масс КА на ГСО, на наш взгляд, следует предъявить ряд требований, перечисленных ниже:

- возможность автоматической генерации циклограммы коррекции в стохастической постановке с вычислением используемых показателей характеристической скорости и времени;
- исключение необходимости назначения пользователем критерия оптимальности из числа выше названных и/или каких-либо коэффициентов предпочтения;
- использование математических моделей учитывающих основные гравитационные возмущения, характерные для ГСО;
- возможность поиска управления как при фиксированной, так и при свободной ориентации вектора тяги;
- «прозрачность» (понятность) генерируемых решений для анализа телеметрии в наземном контуре.

При довыведении КА на ГСО требуется определить ориентацию вектора тяги как функцию (возможно, неявную) измеренного вектора состояния по критерию минимума времени. При непрерывно работающем двигателе это равносильно минимизации затрат рабочего тела ЭРДУ.

При приведении КА в рабочую позицию на ГСО требуется определить количество коррекций, интервалы времени между коррекциями, ориентацию вектора тяги и приращения характеристической скорости на каждой коррекции с учетом терминальных требований.

При удержании КА в структуре необходимо определить стратегию коррекций. Под коррекцией удержания будем понимать (в общем случае) многоимпульсный маневр, выполняемый согласно той или иной стратегии. Стратегия коррекции удержания включает в себя количество включений двигателей, интервалы между ними, ориентацию вектора тяги и величины импульсов характеристической скорости каждой коррекции. Попутно необходимо оценить расход рабочего тела и момент его выработки.

Информация о текущих параметрах орбиты КА получается автономно по данным неточных траекторных измерений. В процессе коррекций возможны ошибки. Поэтому рассматриваемая техническая задача должна быть отнесена к управлению динамической системой по неполной информации. Известно, что при решении такой задачи вопросы управления, обработки информации и прогнозирования вектора состояния следует рассматривать совместно [2].

В некоторых случаях, согласно известной в теории стохастических систем теоремы разделения, допускается независимое решение задач управления и обработки информации. Допустимость разделения доказана для линейных систем при аддитивном возмущении типа белого шума при линейных измерениях с ошибками типа белого шума. В тех случаях, когда задача управления по неполным данным не может быть сведена к условиям теоремы разделения можно применить приближенный прием, который успешно апробирован при решении ряда технических задач. Суть подхода заключается в условном разделении, основанном на предположении что вектор состояния динамической системы в любой момент времени статистически полностью определен. Тогда задача управления по неполным данным заменяется задачей управления по полным данным. В состав системы управления вводится блок навигации, который снабжает блок управления достаточными координатами управляемой системы. В качестве достаточных координат выступают математическое ожидание вектора состояния и его апостериорная корреляционная матрица.

Навигационное обеспечение в данной работе будет представлено блоком типа «черного ящика», представленного в работах [10-12]. Поэтому при синтезе математического и алгоритмического обеспечения управления КА мы считаем, что в любой момент времени доступны статистические характеристики (математическое ожидание, корреляционная матрица) расширенного вектора состояния в абсолютной системе координат и оскулирующие элементы орбиты.

## **Глава 2. Математические модели движения центра масс КА на этапах довыведения, перевода на рабочую долготу и удержания на ГСО**

Для отработки управления движением центра масс КА моделированием замкнутой автономной системы необходимо обеспечить координатно-временное согласование блоков навигации и управления. Для этого следует определить перечень используемых систем координат, математических моделей управляемого движения КА и счета времени на рассматриваемых в работе этапах его жизненного цикла.

Для формирования алгоритмов моделирования замкнутой системы и самих алгоритмов автономного управления будем использовать модели различных видов. Во-первых, необходима модель генерации «истинной» траектории. Параметры истинной траектории являются входом в модель блока чувствительных элементов навигационной системы и после соответствующей обработки поступают на вход блока управления. Очевидно, что модель генерации истинной траектории должна быть максимально полной. Необходимо учитывать нецентральность гравитационного поля Земли, гравитацию Луны и Солнца, давление солнечного света, управляющие воздействия ЭРДУ, ориентацию объекта в пространстве и т.п. Во-вторых, синтез оптимального управления с использованием полной модели не представляется возможным из-за неявной зависимости правых частей уравнений движения от компонент вектора управления. Как показывает накопленный опыт, требуется линеаризация нелинейных уравнений в окрестности опорной орбиты. В отличие от линеаризованной модели, использованной ранее, здесь предлагается ее модификация, позволяющая явно учесть ряд неслучайных возмущений, а тем самым – повысить точность алгоритмов.

## 2.1 Системы координат

Для описания истинного движения КА будем использовать абсолютную геоцентрическую систему координат (АГЭСК) с началом в центре масс Земли. Ее главная ось  $OX$  лежит в плоскости среднего экватора эпохи 2000.0.5 и направлена из центра  $O$  в точку весеннего равноденствия. Ось  $OZ$  направлена по нормали к плоскости среднего экватора эпохи в сторону Северного Полюса Мира, ось  $OY$  дополняет систему до правой тройки (рис. 2.1).

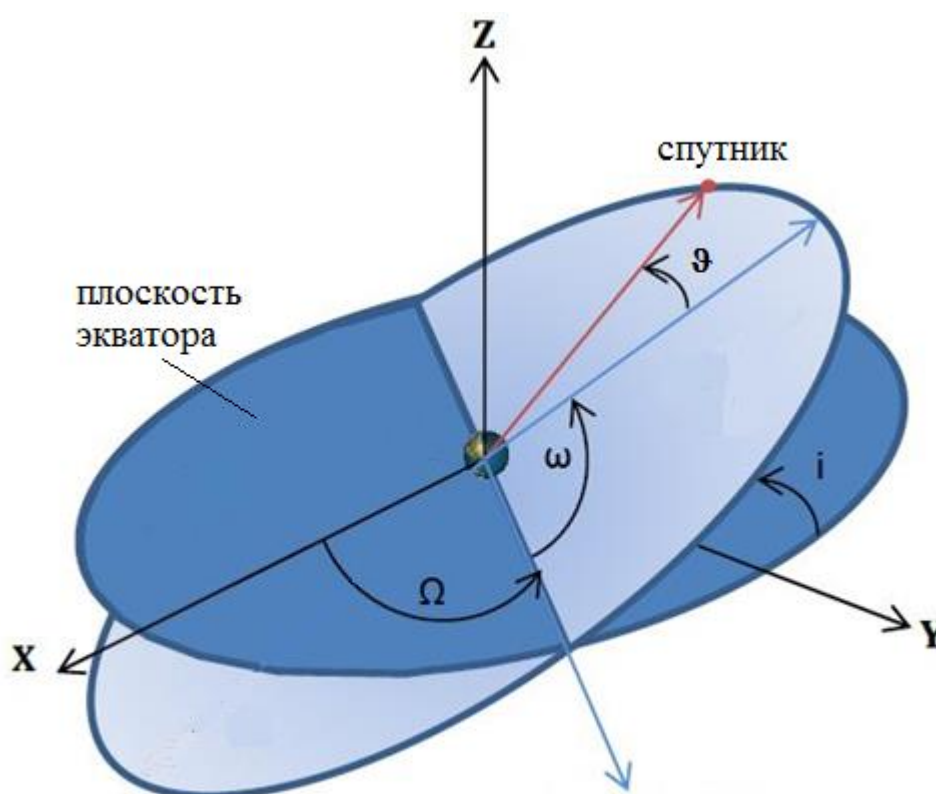


Рис.2.1. Абсолютная геоцентрическая система координат

Несмотря на движение АГЭСК вместе с Землей вокруг Солнца, пространственная ориентация ее осей постоянна. Поэтому с высокой степенью точности ее можно считать инерциальной [3,4,18]. Форма орбиты и положение КА на ней в АГЭСК определено параметрами  $a, e, \omega, \vartheta, \Omega, i$ , где

$a$  – большая полуось;



- $e$  – эксцентриситет;
- $\omega$  – аргумент перицентра;
- $\vartheta$  – истинная аномалия;
- $i$  – наклонение орбиты;
- $\Omega$  – долгота восходящего узла.

Для определения положения КА относительно вращающейся Земли используем гринвичскую систему координат (ГСК). Ее начало совпадает с началом АГЭСК. Ось  $OZ$  совпадает с мгновенной осью вращения Земли, проходящей через мгновенный полюс Земли, координаты которого, как правило, устанавливаются из астрономических наблюдений или по данным статистической обработки траекторных измерений. Ось  $OX$  проходит через точку пересечения плоскости мгновенного экватора и плоскость гринвичского меридиана. Ось  $OY$  дополняет систему координат до правой (рис.2.2).

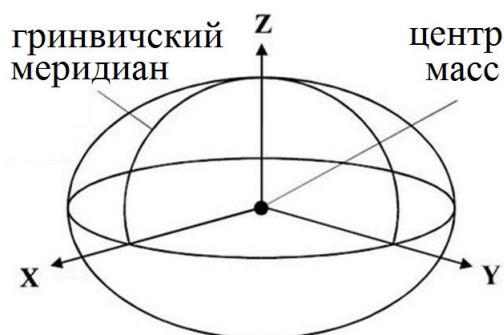


Рис.2.2. Гринвичская система координат

Для фиксации ориентации вектора тяги ЭРДУ используем орбитальную систему координат (ОСК). Начало ОСК находится в центре масс КА, ось  $O_n$  направлена по вектору момента количества движения (перпендикулярно плоскости орбиты), ось  $O_r$  направлена по радиус-вектору КА, а ось  $O_t$  дополняет СК до правой тройки (рис. 2.3). Ориентация вектора тяги двигателя задается именно в этой системе координат углом тангажа  $\gamma$  и углом рыскания  $\beta$ .

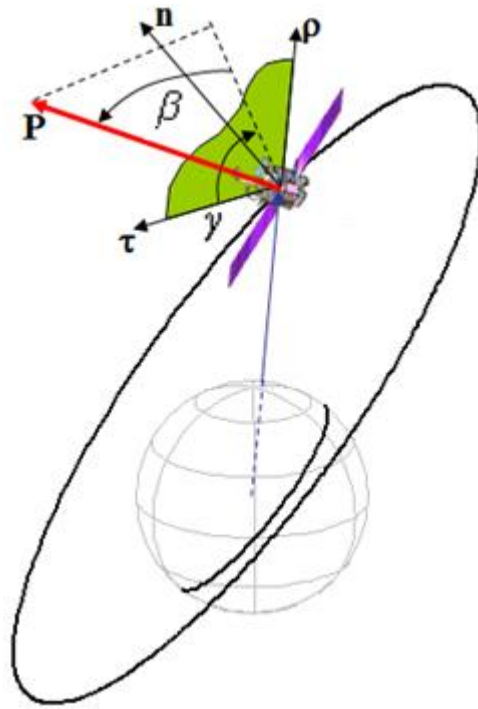


Рис.2.3. Орбитальная система координат

Одной из особенностей орбитальной динамики, существенно затрудняющей синтез алгоритмов управления движением центра масс КА, является связь параметров его движения в плоскости орбиты с ориентацией орбиты в инерциальном пространстве. Как следствие, это создает проблемы явного учета эффектов нецентральности гравитационного поля Земли и некоторых других. Для решения этой проблемы в [14,15] была применена вспомогательная вращающаяся система координат (ВСК), предложенная в работе [2]. Ее начало совпадает с началом АГЭСК. Главная ось  $OR$  направлена по радиус-вектору. Ось  $OT$  направлена в сторону движения спутника в мгновенной плоскости орбиты и перпендикулярна оси  $OR$ . Ось  $ON$  дополняет систему до правой тройки. Система  $ORTN$  вращается относительно начала системы  $OXYZ$  с угловой скоростью  $\dot{\alpha}$ .

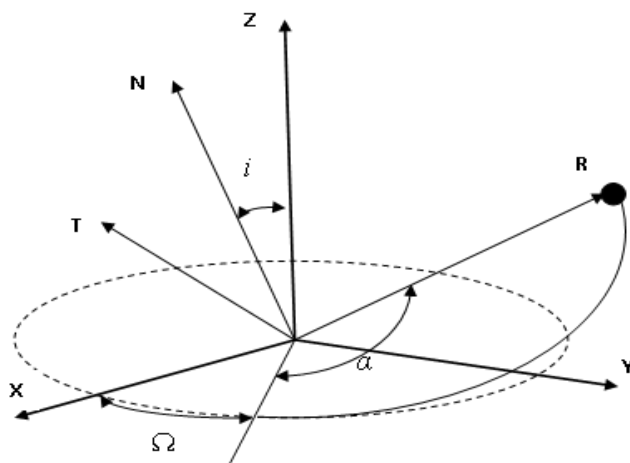


Рис.2.4. Геоцентрическая вращающаяся система координат

## 2.2 Системы счисления времени

Для достижения требуемой точности вычислительной модели движения КА необходимо учитывать тот факт, что события и алгоритмы расчета возмущающих факторов определены в конкретных временных шкалах. Следовательно, возникает необходимость их согласования. Так, шкала всемирного времени UT1 или JD(UT1) используется для вычисления звездного времени и эфемерид Солнца. Интегрирование уравнений движения центра масс КА проводят в системе земного динамического времени (TDT).

Будем использовать системы счисления времени, соответствующие основным временным шкалам, установленным резолюциями Международной астрономической федерации (IAF) [5, 9], а именно:

- звездное время (местное  $s$  и гринвичское  $S$ ), которое измеряется часовым углом точки весеннего равноденствия  $\gamma$  на местном или гринвичском меридиане соответственно;
- всемирное время  $M$ , которое есть местное среднее солнечное время на гринвичском меридиане в системе UT;
- квазиравномерное время, которое приближает всемирное время к равномерному времени путем учета поправок на положение мгновенного полюса Земли и вариаций угловой скорости вращения Земли;

- земное динамическое время (TDT) - шкала независимой переменной дифференциальных уравнений ньютоновской механики;
- шкала атомного времени (TAI) - основана на применении высокостабильных молекулярных и атомных эталонов частоты;
- шкала всемирного координированного времени (UTC) - предназначена для согласования шкалы квазиравномерного всемирного времени UT2 и равномерной шкалы TAI;
- юлианская дата (JD) – система непрерывного счета суток от среднего гринвичского полдня 1 января 4713г. до н.э.

Взаимосвязь системам счисления времени иллюстрирует рис. 2.5.

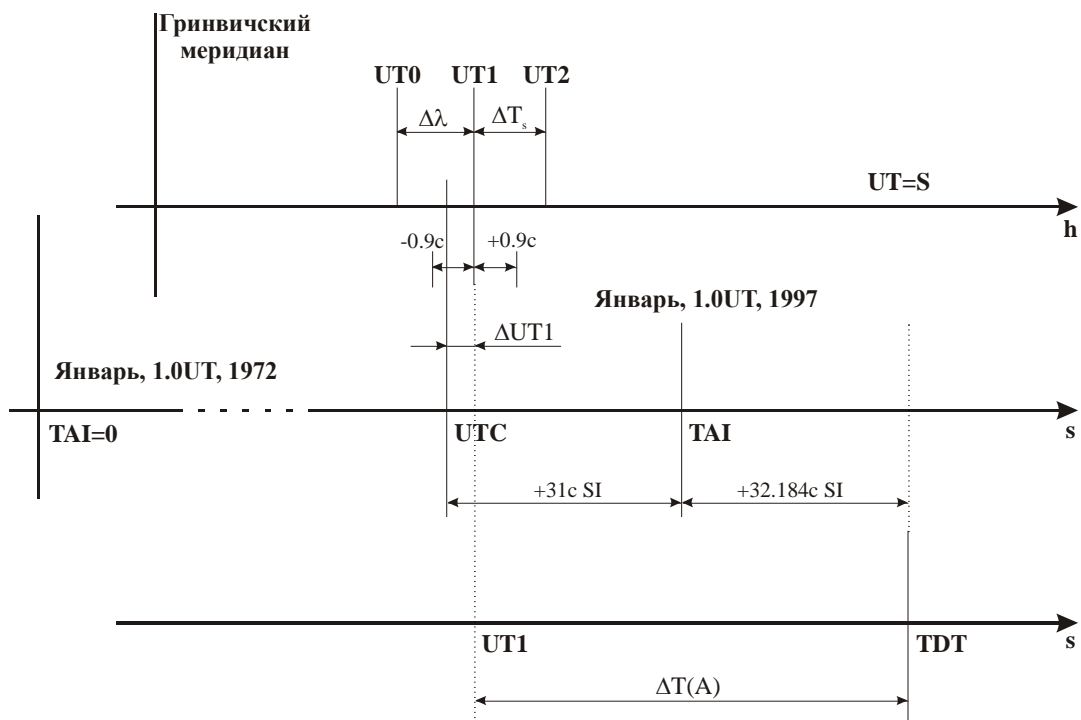


Рис.2.5. Временные шкалы

### 2.3 Математическая модель истинного движения КА

В качестве модели генерации истинной траектории целесообразно принять систему дифференциальных уравнений в АГЭСК. Это обусловлено тем, что она не имеет вырожденных случаев. В общем случае система дифференциальных уравнений движения КА содержит соотношения для расчета движения его центра масс, а также соотношения для расчета углового движения вокруг центра масс.

На рассматриваемых в данной работе этапах жизненного цикла КА силы, зависящие от ориентации аппарата, пренебрежимо малы. Кроме того, скорость переориентации аппарата существенно выше скорости изменения параметров орбиты от возмущающих сил. Сказанное позволяет считать работу системы управления угловым движением идеальной. Изменение ориентации будем считать мгновенной, а орт ориентации – параметром, алгоритма управления движением центра масс.

Система дифференциальных уравнений движения центра масс КА имеет вид:

$$\ddot{q} = -\frac{\mu q}{r^3} + \sum_{j=0}^k \Delta g_{jq}, \quad q = \{ x, y, z \}, \quad (2.1)$$

где  $\Delta g_{jq}$  – проекция  $j$ -го возмущающего ускорения на координатное направление  $q$ . Математическая модель движения центра масс КА на всех этапах жизненного цикла учитывает

- гравитационное ускорение с учетом несферичности Земли;
- ускорения от гравитации Луны и Солнца;
- ускорение от силы давления светового излучения;
- ускорение от тяги ЭРДУ.

### 2.3.1 Модель гравитационного ускорения Земли

Традиционно сложились два подхода к учету ускорения, вызванного притяжением Земли: разложение гравитационного потенциала в ряд по сферическим функциям и разложение потенциала по гравитирующим массам (т.н. системе точечных масс) [6]. Первый подход характеризуется универсальностью, ибо позволяет учитывать произвольное число членов разложения и может настраиваться на любой из существующих стандартов ГПЗ (GEM-T3, GM-IV и т.п.). Представление потенциала системой точечных масс основано на совершенно конкретном стандарте ГПЗ и требует при вычислении обязательного учета всего массива параметров масс. В случае сферических функций параметры входят аддитивно, что повышает точность

представления. В этой связи, автором была выбрана модель гравитационного потенциала на основе вычисления сферических функций. Она дает возможность

- настроить модель под любую точность;
- настроить модель под различную производительность;
- использовать стандартный интерфейс обработки гармоник различных моделей геопотенциала Земли;
- использовать стандарты в этой области [12], и применять в вычислениях достоверные данные из бюллетеней IERS, включающих, в том числе, набор тессеральных, секториальных и зональных гармоник.

Соотношения для вычисления ускорения, вызываемого притяжением Земли, реализованные в программно-математическом обеспечении, имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} g_r & g_\varphi & g_\lambda \end{pmatrix}^T = -\frac{\mu}{r^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \Delta g_r & \Delta g_\varphi & \Delta g_\lambda \end{pmatrix}^T \quad (2.2)$$

где  $\lambda$ ,  $\varphi$  и  $r$  – долгота, широта и расстояние КА от центра Земли соответственно,  $\mu$  – гравитационная постоянная Земли. Компоненты ускорения, вызванные возмущениями в гравитационном поле Земли, вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{cases} \Delta g_r = -\frac{\mu}{a_e r} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda), \\ \Delta g_\varphi = \frac{\mu}{a_e r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}'_{nm}(\sin \varphi) \cos \varphi (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda), \\ \Delta g_\lambda = \frac{\mu}{a_e r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m \frac{\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)}{\cos \varphi} (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda). \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $a_e$  – большая полуось земного эллипсоида;  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  – численные коэффициенты модели, характеризующие форму ГПЗ, как уже было сказано, берутся из бюллетеней IERS.

Полиномы Лежандра  $\bar{P}_{nm}$  и их производные  $\bar{P}'_{nm}$  вычисляются согласно следующим соотношениям:

$$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) = \begin{cases} 0, & n < m \\ 1, & n = m = 0 \\ \bar{P}_{n-1, m-1}(\sin \varphi) \cos \varphi \sqrt{\frac{2n+1}{2n} \frac{1}{\delta_{m-1}}}, & n = m = 0 \\ \bar{P}_{n-1, m}(\sin \varphi) \sin \varphi \sqrt{\frac{4n^2-1}{n^2-m^2}} - \bar{P}_{n-2, m}(\sin \varphi) \times \\ \times \sqrt{\frac{[(n-1)^2-m^2](2n+1)}{(n^2-m^2)(2n-3)}}, & n > m \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}'_{nm}(\sin \varphi) &= - \left[ m \operatorname{tg} \varphi \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) - \sqrt{\delta_m (n-m)(n+m+1)} \bar{P}_{n, m+1}(\sin \varphi) \right] \\ \delta_m &= \begin{cases} 1/2, & m = 0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Силы гравитации Луны и Солнца

Воздействия гравитационных полей Солнца и Луны при движении КА на высоких орбитах сравнимы по величине с эффектом светового давления и возмущением нецентрального гравитационного поля Земли. Ограничимся рассмотрением центральных гравитационных полей Луны и Солнца. В таком случае модель вычисления компонент возмущающего ускорения, вызванного гравитационным влиянием Луны и Солнца, приобретает тривиальный вид и не представляет трудностей при реализации, если известны геоцентрические координаты Луны и Солнца [13,14]

$$\begin{aligned} g_{S,M}^x &= G\mu_s \left( \frac{x_S - x}{\rho_{S,sc}^3} - \frac{x_S}{\rho_S^3} \right) + G\mu_R \left( \frac{x_M - x}{\rho_{M,sc}^3} - \frac{x_M}{\rho_M^3} \right) \\ g_{S,M}^y &= G\mu_s \left( \frac{y_S - y}{\rho_{S,sc}^3} - \frac{y_S}{\rho_S^3} \right) + G\mu_R \left( \frac{y_M - y}{\rho_{M,sc}^3} - \frac{y_M}{\rho_M^3} \right) \\ g_{S,M}^z &= G\mu_s \left( \frac{z_S - z}{\rho_{S,sc}^3} - \frac{z_S}{\rho_S^3} \right) + G\mu_R \left( \frac{z_M - z}{\rho_{M,sc}^3} - \frac{z_M}{\rho_M^3} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $(x_S, y_S, z_S)$  – геоцентрические координаты центра масс Солнца,

$(x_M, y_M, z_M)$  – геоцентрические координаты центра масс Луны,

$\rho_S, \rho_M$  – геоцентрические радиус-векторы Солнца и Луны соответственно,

$\rho_{S,sc}, \rho_{M,sc}$  – радиус-векторы Солнце-КА, Луна-КА соответственно.

$G\mu_R$  и  $G\mu_s$  – гравитационные постоянные Луны и Солнца соответственно.

Отметим, что среди известных способов вычисления координат небесных тел, обладающих приемлемой для корректного моделирования точностью, а также высокой производительностью, выделяются методы на основе представления координат небесных тел в виде аппроксимации полиномами Чебышева определенной степени на заданном интервале [12]. В этой связи ввиду практической простоты реализации, а также достаточной для моделирования «истинного» движения КА точности автором был выбран описанный выше способ расчета координат небесных тел на основе специализированных каталогов типа DELE405. Выбор в пользу этого каталога был обусловлен достаточной точностью, а также универсальным форматом.

Метод полиномиального разложения Чебышева для представления каждой из координат небесного тела использует формулу

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = \sum_{j=1}^n C_j T_j(\bar{t}) - C_0/2 \quad (2.7)$$

где  $x(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  – определяемая координата и ее приближение полиномами Чебышева;

$t$  – аргумент (в нашем случае это юлианская дата и время );

$\bar{t}$  – нормированное значение аргумента на интервале представления  $[a...b]$ :

$$\bar{t} = \frac{t - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \quad (2.8)$$



$C_j$  – известные коэффициенты полиномиального разложения, импортируемые из каталогов;  $n$  – степень разложения;  $T_j(\bar{t}) = \cos(j \times \arccos(\bar{t}))$  – полиномы Чебышева, вычисляемые по рекуррентным формулам

$$T_0(\bar{t})=1, \quad T_1(\bar{t})=\bar{t}, \quad T_{n+1}(\bar{t})=2\bar{t} \cdot T_n(\bar{t})-T_{n-1}(\bar{t}), \quad n \geq 1 \quad (2.9)$$

Таким образом, знание коэффициентов полиномов  $C_i$ ,  $i=0, \dots, n$  и степени  $n$  разложения на интересующем интервале времени дает возможность рассчитать эфемериды Солнца и Луны. Отметим, что использование Чебышевской аппроксимации обязательно предполагает отсутствие периодичности функции на интервале представления. Для Луны он составляет примерно 1 месяц и год для Солнца. Оптимальные в смысле совокупного критерия точности представления и потребных вычислительных ресурсов на реализацию интервалы представления существенно меньше – 4 дня для Луны и 16 дней для Солнца [12]. В таком виде они и записаны в используемых бюллетенях DELE405.

Описанный в данном разделе способ вычисления эфемерид Солнца используется также при расчете координат Солнца в АГЭСК в моделях возмущающих сил и моментов, вызванных давлением солнечного света.

### 2.3.3 Модель давления солнечного света

Давление солнечного света интерпретируется как сопротивление среды. В нашем случае сопротивление движению тела оказывает солнечный ветер [15]. Согласно общепринятой модели лобового сопротивления можно найти ускорение, сообщаемое КА силой солнечного давления по формуле:

$$R_{SR} = C_R \frac{S_R}{M} q_R \frac{A^2}{\Delta_1^2}, \quad (2.10)$$

где  $C_R$  – коэффициент отражения поверхности спутника;

$S_R$  – характерная площадь спутника;

$M$  – масса КА;

$q_R = 4.56 \cdot 10^{-6}$  Н/м<sup>2</sup> – световое давление в районе орбиты Земли;

$A = 1.4959787061 \cdot 10^{11}$  м – расстояние от Земли до Солнца;

$\Delta_1$  – расстояние от КА до Солнца.

Для применения соотношения (2.11) нужно учесть видимую со стороны КА часть солнечного диска для пересчета номинального значения  $q_R$ , а также угол падения солнечных лучей на отражающую поверхность КА для вычисления нормальной проекции силы солнечного давления на корпус КА. Угол падения  $\Theta$  по известным векторам положения КА  $\mathbf{X}_{КА}$  и Солнца  $\mathbf{X}_S$  вычисляется по формуле

$$\Theta = \arccos \left[ \left( \mathbf{X}_S - \mathbf{X}_{КА} \right)^T \left( -\mathbf{X}_{КА} \right) \right] \quad (2.11)$$

Учет видимой части диска Солнца требуется для масштабирования силы сопротивления при рассмотрении движения таких объектов, как КА на ВЭО и при выведении КА на ГСО. В настоящей работе принято допущение, что со всей площади солнечного диска исходит поток излучения одинаковой удельной мощности. Это означает, что коэффициент масштабирования для соотношения можно вычислить следующим образом:

$$k_S = \frac{S_{vis}}{S} \quad (2.12)$$

где  $S_{vis}$  – видимая со стороны КА площадь солнечного диска;

$S$  – общая площадь солнечного диска.

Схема расчета видимой со стороны КА площади Солнца показана на рис. 2.3. Нетрудно видеть, что существуют три ситуации:

1. Солнце полностью закрыто Землей. При этом углы  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  меньше угла раскрыва конуса тени  $\alpha_E$ , создаваемого Землей со стороны КА;
2. Солнце частично выступает из-за Земли. В этом случае  $\Theta_1$  или  $\Theta_2$  меньше угла раскрыва  $\alpha_E$ ;
3. Солнце полностью освещает КА. При этом  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  больше угла раскрыва  $\alpha_E$ .

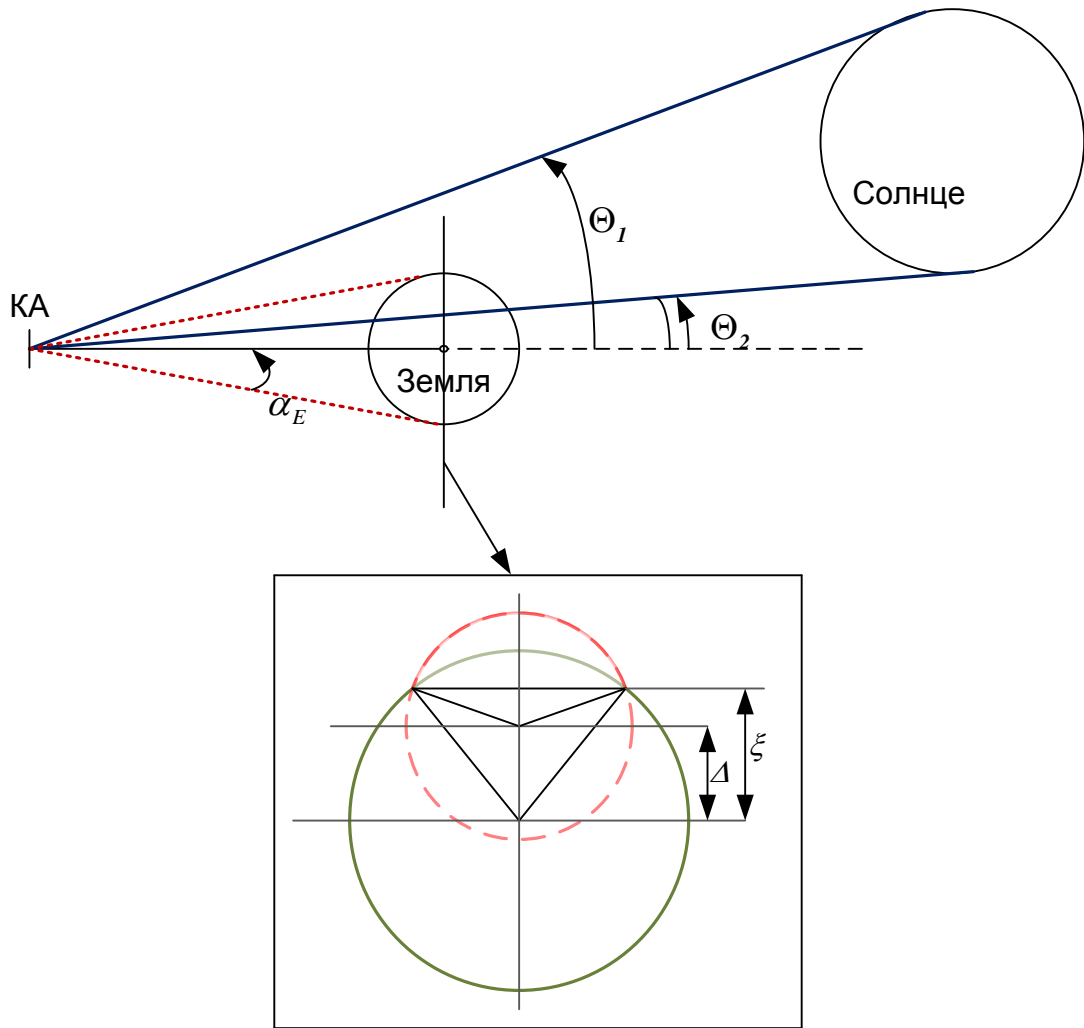


Рис. 2.6. Схема учета видимой части диска Солнца.

В первом и третьем случае коэффициент  $k_S$  принимает значения 0 и 1 соответственно.

Во втором случае соотношение, используемое для вычисления коэффициента  $k_S$ , записывается в виде [15]:

$$k_S = \frac{S_Q^{sect} - S_Q^{tr} - S_i^{sect} + S_i^{tr}}{\pi R_Q'^2} \quad (2.13)$$

где  $R'_S = \frac{-\mathbf{X}_{KA} \cos \eta}{(\mathbf{X}_S - \mathbf{X}_{KA})} R_S$  – радиус видимый радиус Солнца;

$S_Q^{sect} = R_S'^2 \cdot \arccos\left(\frac{\xi - \Delta}{R'_S}\right)$  – площадь сектора видимого Солнца;

$S_Q^{tr} = (\xi - \Delta) \sqrt{R_S'^2 - (\xi - \Delta)^2}$  – площадь треугольника, вписанного в сектор видимого Солнца;

$S_i^{sect} = R_E^2 \cdot \arccos\left(\frac{\xi}{R_E}\right)$  – площадь сектора Земли, затеняющего Солнце;

$S_i^{tr} = \xi \sqrt{R_E^2 - \xi^2}$  – площадь треугольника, вписанного в сектор Земли, затеняющего Солнце;

$\Delta = |\mathbf{X}_{KA}| \cdot \text{tg}(\eta)$  – расстояние между центром Земли и центром видимого диска Солнца;

$$\xi = \frac{R_E^2 - R_S'^2 + \Delta^2}{2\Delta};$$

$\eta$  – угол между направлением на Солнце и на Землю;

Итоговое соотношение для расчета вектора ускорения, сообщаемого КА силой светового давления выглядит следующим образом:

$$\mathbf{R}_{SR} = k_s C_R \frac{S_R}{M} q_R \frac{A^2}{\Delta_1^2} \arccos((\mathbf{X}_S - \mathbf{X}_{KA})(-\mathbf{X}_{KA})) [\mathbf{X}_{KA} - \mathbf{X}_S]^o \quad (2.14)$$

где  $[\mathbf{X}_{KA} - \mathbf{X}_S]^o$  – орт направления солнечных лучей со стороны КА.

### 2.3.4 Модель тяги ЭРДУ

Пусть номинальная ориентация вектора тяги ЭРДУ  $\mathbf{P}$  в пространстве задана в связанной орбитальной системе координат  $ORTN$  углами  $\beta$  и  $\gamma$  как показано на рис. 2.3. Проекция вектора тяги на оси системы  $ORTN$  имеют вид

$$\begin{aligned} P_R &= P \cos \beta \cos \gamma \\ P_T &= P \cos \beta \sin \gamma \\ P_N &= P \sin \beta \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $P$  – величина тяги ЭРДУ. С целью формирования наиболее полной модели вектора тяги двигателя положим, что на  $k$ -м активном участке применяется собственная номинальная ориентация вектора тяги, т.е.  $\beta = \beta_k$ ,

$\gamma = \gamma_k$ . Представим каждый из углов суммой номинального угла и малой его вариации. Тогда

$$\begin{aligned} P_R &= P(\cos \beta_k \cos \gamma_k - \delta \beta_k \sin \beta_k \cos \gamma_k - \delta \gamma_k \cos \beta_k \sin \gamma_k), \\ P_T &= P(\cos \beta_k \sin \gamma_k - \delta \beta_k \sin \beta_k \sin \gamma_k - \delta \gamma_k \cos \beta_k \cos \gamma_k), \\ P_N &= P(\sin \beta_k + \delta \beta_k \cos \beta_k), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\delta \beta_k, \delta \gamma_k$  – вариации (ошибки) ориентации вектора тяги. Заметим, что  $\mathbf{E}_k$  – номинальный орт вектора тяги, а  $\mathbf{v}_k$  – его вариация. Запишем (2.16) в векторно-матричной форме

$$\mathbf{P}_k = P(\mathbf{E}_k + \mathbf{M}_k \mathbf{v}_k), \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{P}_k = (P_R \ P_T \ P_N)_k^T$  – вектор тяги на  $k$ -м активном участке в орбитальной системе координат;

$$\mathbf{E}_k = \begin{pmatrix} \cos \beta_k \cos \gamma_k \\ \cos \beta_k \sin \gamma_k \\ \sin \beta_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} -\sin \beta_k \cos \gamma_k & -\cos \beta_k \sin \gamma_k \\ -\sin \beta_k \sin \gamma_k & -\cos \beta_k \cos \gamma_k \\ \cos \beta_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} \delta \beta_k \\ \delta \gamma_k \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Тяга ЭРДУ  $P_k$ , в свою очередь, равна произведению расхода массы рабочего тела на удельный импульс. Учитывая разбросы расхода топлива и удельного импульса, модель тяги представим в виде

$$P = (c_k + \delta c_k)(J_k + \delta J_k) \cong P_k + \delta P_k \quad (2.19)$$

где  $\delta P_k = J_k \delta c_k + c_k \delta J_k$  – ошибка тяги;  $c_k$  – номинальный расход массы рабочего тела;  $J_k$  – номинальный удельный импульс;  $P_k = c_k J_k$  – номинальная тяга.

Предположим, что на активном участке коррекции масса КА изменяется незначительно, но отличается от расчетной на величину  $\delta m_k$ . При этом тяга постоянна с точностью до ошибки  $\delta P_k$ . Тогда ускорение от тяги можно представить как

$$f_{pk} = \frac{P_k}{m_k} = \frac{P_k + \delta P_k}{m_k + \delta m_k}. \quad (2.20)$$

Раскладывая это выражение в ряд Тейлора с точностью до линейных членов, получим

$$f_{pk} = f_k \left( 1 + \frac{\delta m_k}{m_k} + \frac{\delta P_k}{P_k} \right) = f_k (1 + \mu_k) \quad (2.21)$$

где  $f_k = P_k / m_k$  – номинальное ускорение;  $\mu_k = \delta m_k / m_k + \delta P_k / P_k$  – мультипликативная случайная ошибка тяги.

Модель вектора  $\Delta \mathbf{G}_{1k}$  ускорения от тяги на  $k$ -м активном участке следует из (2.17), (2.21).

$$\Delta \mathbf{G}_{1k} = \begin{pmatrix} \Delta g_{1R} \\ \Delta g_{1T} \\ \Delta g_{1N} \end{pmatrix}_k = f_k (1 + \mu_k) (\mathbf{P}_k + \mathbf{M}_k \mathbf{v}_k) \quad (2.22)$$

Пренебрегая в (2.22) членом, содержащим произведение ошибок, получим

$$\Delta \mathbf{G}_{1k} = \mathbf{F}_k (1 + \mu_k) + \boldsymbol{\eta}_k \quad (2.23)$$

где  $\mathbf{F}_k = f_k \mathbf{P}_k$  – номинальный вектор ускорения при ориентации  $\mathbf{P}_k$ ,  $\boldsymbol{\eta}_k = f_k \mathbf{M}_k \mathbf{v}_k$  – случайный вектор аддитивных ошибок вектора  $\mathbf{F}_k$ . Если все случайные величины в (2.23) центрированные гауссовские, то статистические характеристики мультипликативного и аддитивного возмущений можно вычислить по формулам

$$\mathbf{M}[\mu_k] = 0, \quad \sigma_{\mu k} = \sqrt{\frac{\sigma_{mk}^2}{m_k^2} + \frac{\sigma_{Pk}^2}{P_k^2}}, \quad \mathbf{M}[\boldsymbol{\eta}_k] = 0, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M}[\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T] = f_k^2 \mathbf{M}_k \mathbf{D}_{v_k} \mathbf{M}_k^T,$$

где  $\mathbf{D}_{v_k}$  – корреляционная матрица вектора ошибок ориентации  $v_k$ ;  $\mathbf{M}$  – символ математического ожидания.

## 2.4 Математическая модель движения центра масс КА на этапе довыведения на ГСО

На этапе довыведения КА на ГСО осуществляется перелет между некомпланарными орбитами с использованием непрерывно работающей ЭРДУ (за исключением теневых участков). Управлением в задаче довыведения являются углы тангажа  $\gamma$  и рыскания  $\beta$ , определяющие орт

ориентации вектора тяги маршевого двигателя. Так как, скорее всего, двигатель будет жестко закреплен на КА вдоль строительной оси ОХ, то требуемые углы ориентации тяги фактически соответствуют углам ориентации КА.

Для удобства будем использовать равноденственные элементы  $\{h, e_x, e_y, i_x, i_y, F\}$  [5], связанные с оскулирующими элементами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 h &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \\
 e_x &= e \cos(\Omega + \omega), \\
 e_y &= e \sin(\Omega + \omega), \\
 i_x &= \tan \frac{i}{2} e \cos \vartheta, \\
 i_y &= \tan \frac{i}{2} e \sin \vartheta, \\
 F &= \nu + \omega + \Omega,
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

где  $p$  – фокальный параметр,  $\mu$  – гравитационный параметр,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $\omega$  – аргумент перицентра,  $i$  – наклонение орбиты,  $\vartheta$  – истинная аномалия. Уравнения управляемого движения КА в ньютоновском гравитационном поле в равноденственных элементах имеют вид [5]

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot h \cos \gamma \cos \beta, \\
\frac{de_x}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot \{\xi \sin F \sin \gamma \cos \beta + [(\xi + 1) \cos F + e_x] \cos \gamma \cos \beta - e_y \eta \sin \beta\}, \\
\frac{de_y}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot \{-\xi \cos F \sin \gamma \cos \beta + [(\xi + 1) \sin F + e_y] \cos \gamma \cos \beta + e_x \eta \sin \beta\}, \\
\frac{di_x}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot \frac{1}{2} \tilde{\varphi} \cos F \sin \beta, \\
\frac{di_y}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot \frac{1}{2} \tilde{\varphi} \sin F \sin \beta, \\
\frac{dF}{dt} &= \frac{\xi^2}{h^3} + \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot \xi \eta \sin \beta, \\
\frac{dm}{dt} &= -\delta \frac{P}{w},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

где  $\delta$  – функция включения двигателя ( $\delta = 1$  при включенной ЭРДУ и  $\delta = 0$  при выключенной ЭРДУ);  $P$  – тяга ЭРДУ;  $m$  – масса; а также:

$$\begin{aligned}
\xi &= 1 + e_x \cos F + e_y \sin F, \\
\eta &= i_x \sin F - i_y \cos F, \\
\tilde{\varphi} &= 1 + i_x^2 + i_y^2.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Система уравнений (2.26) не содержит возмущающих факторов, однако, как уже отмечалось ранее, система управления движением центра масс КА является замкнутой по навигации. Автору работы [5] удалось получить управление движением КА с обратной связью, близкое к оптимальному, обеспечивающему выведение на заданную круговую орбиту за минимальное время. Алгоритм управления такой системой рассмотрен в третьей главе.

## 2.5 Модель движения центра масс КА на этапах приведения и удержания

Как было сказано выше, сложные нелинейные модели движения КА весьма трудно использовать при синтезе законов управления с использованием достаточных условий оптимальности. Для получения конструктивных решений, претендующих на статус алгоритмов автономного



управления, необходима линеаризация нелинейных уравнений в окрестности опорной геостационарной орбиты.

Линеаризованные модели применялись при разработке алгоритмов управления центром масс КА рядом авторов. В основном рассматривалось управление в плоскости опорной круговой орбиты. В данной работе будем расширять решения на случай пространственного движения. Для получения линеаризованной модели в этом случае удобно использовать исходную модель во вращающейся геоцентрической системе координат, показанной на рис. 2.4. В работах [1,2] показано, что если ускорения зависят только от аргумента широты и радиуса орбиты (это предположение часто выполняется), то уравнения движения КА можно разделить на две подсистемы. Первая подсистема описывает движение КА в мгновенной плоскости орбиты в системе координат, которая вращается вокруг общего начала с угловой скоростью  $\dot{\alpha}$  (рис. 2.4)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_R, \quad \dot{\alpha} = \frac{V_T}{r}, \\ \dot{V}_R &= \frac{V_T^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \sum_{j=0}^k \Delta g_{jR}, \\ \dot{V}_T &= -\frac{V_R V_T}{r} + \sum_{j=0}^k \Delta g_{jT}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $\alpha$  – полярный угол (аргумент широты),  $r$  – расстояние от начала координат до спутника (радиус–вектор);  $V_R$  и  $V_T$  – радиальная и трансверсальная составляющие скорости орбитального движения;  $\mu$  – гравитационная постоянная;  $\Delta g_{jR}$ ,  $\Delta g_{jT}$  – проекции возмущающего ускорения  $j$ -го вида на оси вращающейся системы координат  $OR$  и  $OT$  соответственно. Эксцентриситет  $e$  и истинную аномалию  $\vartheta$  вычисляют по формулам:

$$e = \frac{\sqrt{(rV_T^2 - \mu)^2 + (rV_R V_T)^2}}{\mu}, \quad \sin \vartheta = \frac{rV_R V_T}{\mu e}, \quad \cos \vartheta = \frac{rV_T^2 - \mu}{\mu e} \quad (2.29)$$

Вторая система описывает эволюцию плоскости орбиты в пространстве:

$$\begin{aligned}
\dot{i} &= \frac{1}{V} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jN} \cos(\vartheta + \omega), \\
\dot{\Omega} &= \frac{1}{V} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jN} \frac{\sin(\vartheta + \omega)}{\sin i}, \\
\dot{\omega} &= -\frac{1}{V} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jN} \frac{\sin(\vartheta + \omega)}{\sin i} \cos i,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

где  $V$  – орбитальная скорость;  $\Delta g_{jN}$  – проекция ускорения  $j$ -го вида на ось  $ON$  орбитальной системы координат  $ORTN$ .

Пусть опорная орбита КА круговая, ее положение в пространстве задано опорными наклоном и долготой восходящего узла. Так как на круговой орбите истинная аномалия не определена, положим формально  $\dot{\vartheta} = \omega_0$ , где  $\omega_0$  – среднее движение. Если в (2.30) заменить аргумент широты (т.е. сумму углов  $\omega + \vartheta$ ) линейной функцией времени:

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \omega_0(t - t_0) = \theta + \alpha_0, \tag{2.31}$$

где  $\alpha_0$  – начальный аргумент широты,  $\theta = \omega_0(t - t_0)$ , то системы уравнений (2.28) и (2.30) можно линеаризовать независимо. В нормальной векторной форме линейные уравнения плоского движения с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{AZ} + \mathbf{BG} \tag{2.32}$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \dot{r} \\ \Delta \alpha \\ \Delta \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2V_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2r_0}{\omega_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jR} \\ \sum_{j=0}^k \Delta g_{jT} \end{bmatrix},$$

$$\Delta r = r - r_0, \quad \Delta \dot{r} = \dot{r} - \dot{r}_0, \quad \Delta \alpha = \alpha - \omega_0 t, \quad \Delta \dot{\alpha} = \dot{\alpha} - \omega_0.$$

Решение линейной системы дифференциальных уравнений (2.32) при заданных начальных условиях находим по формуле Коши:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0) \mathbf{Z}(t_0) + \delta \mathbf{Z}(t, t_0), \tag{2.33}$$

где

$$\delta \mathbf{Z}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{C}(t, \tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{C}(t, \tau) = \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau), \quad (2.34)$$

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \begin{bmatrix} 4 - 3 \cos \theta & \frac{\sin \theta}{\omega_0} & 0 & \frac{2r_0(1 - \cos \theta)}{\omega_0} \\ 3\omega_0 \sin \theta & \cos \theta & 0 & 2r_0 \sin \theta \\ -\frac{6(\theta - \sin \theta)}{r_0} & -\frac{2(1 - \cos \theta)}{V_0} & 1 & \frac{-3\theta + 4 \sin \theta}{\omega_0} \\ -\frac{6\omega_0(1 - \cos \theta)}{r_0} & -\frac{2 \sin \theta}{r_0} & 0 & -3 + 4 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{C}(t, t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta}{\omega_0} & \frac{2(1 - \cos \theta)}{\omega_0} \\ \cos \theta & 2 \sin \theta \\ -\frac{2(1 - \cos \theta)}{V_0} & \frac{-3\theta + 4 \sin \theta}{V_0} \\ -\frac{2 \sin \theta}{r_0} & \frac{-3 + 4 \cos \theta}{r_0} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

где  $\theta = \omega_0(t - t_0)$ ;  $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$  – фундаментальная матрица.

Так как управление движением центра масс КА заключается в проведении коррекций с использованием ЭРДУ, т.е. формально является дискретным, придадим уравнению (2.33) форму дискретной модели. В качестве интервала дискретности примем отрезок  $[t_{k+1}, t_k]$  времени движения КА, состоящий из пассивного участка (двигатель выключен) и активного участка (двигатель работает). Вводя формальные обозначения  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}(t_k)$ ,  $\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k)$ ,  $\delta \mathbf{Z}_k = \delta \mathbf{Z}(t_{k+1}, t_k)$ ,  $\theta_k = \omega_0(t_{k+1} - t_k)$ , получим

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{Z}_k + \delta \mathbf{Z}_k; \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.37)$$

где  $N$  – количество циклов коррекции орбиты.

В [3] предложена система переменных состояния и соответствующая ей модель плоского движения, которая оказалась весьма удобной для формирования алгоритмов синтеза управления конечным состоянием КА на околокруговой орбите

$$x_1 = \Delta\alpha, \quad x_2 = d, \quad x_3 = a, \quad x_4 = b, \quad (2.38)$$

где

$$a = \frac{\Delta\dot{r}}{\omega_0}, \quad b = 3\Delta r + \frac{2r_0}{\omega_0} \Delta\dot{\alpha}, \quad d = 2\Delta r + \frac{r_0}{\omega_0} \Delta\dot{\alpha} \quad (2.39)$$

Так, компонента  $x_1$  есть разность аргументов широты возмущенного и опорного движений. Компонента  $x_2$  характеризует изменение невозмущенного аргумента широты за один оборот КА по опорной орбите. Компоненты  $x_3$  и  $x_4$  связаны с эксцентриситетом текущей орбиты соотношением:

$$r_0 e = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \quad (2.40)$$

причем

$$a = r_0 e \sin \vartheta, \quad b = r_0 e \cos \vartheta \quad (2.41)$$

Таким образом, зная  $a$  и  $b$ , истинную аномалию можно вычислить по формуле

$$\vartheta = \begin{cases} \bar{\vartheta}, & \text{если } a > 0 \\ 2\pi - \bar{\vartheta} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \bar{\vartheta} = \arccos \frac{b}{r_0 e}. \quad (2.42)$$

После перехода к новому вектору состояния скалярные составляющие уравнений движения (2.33) примут вид

$$\begin{aligned} x_{1k+1} &= x_{1k} + \frac{\theta_k}{2\pi} x_{2k} - \frac{2(1 - \cos \theta_k)}{r_0} x_{3k} + \frac{2 \sin \theta_k}{r_0} x_{4k} + \delta x_{1k}, \\ x_{2k+1} &= x_{2k} + \delta x_{2k}, \\ x_{3k+1} &= x_{3k} \cos \theta_k + x_{4k} \sin \theta_k + \delta x_{3k}, \\ x_{4k+1} &= -x_{3k} \sin \theta_k + x_{4k} \cos \theta_k + \delta x_{4k}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где

$$\begin{aligned} \delta x_{1k} &= \delta \alpha_k, \\ \delta x_{2k} &= -\frac{6\pi}{r_0} \left( 2\delta r_k + \frac{r_0}{\omega_0} \delta \dot{\alpha}_k \right), \\ \delta x_{3k} &= \frac{\delta \dot{r}_k}{\omega_0}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\delta x_{4k} = 3\delta r_k + \frac{2r_0}{\omega_0} \delta \dot{\alpha}_k$$

Если на рассматриваемом интервале времени возмущающие ускорения постоянны, то выражения (2.44) принимают вид:

$$\begin{aligned} \delta x_{1k} &= \frac{1}{V_0} \left[ \frac{4(1 - \cos \theta_k)}{\omega_0} - \frac{3\theta_k}{2} \right] \Delta g_T - \frac{2(\theta_k - \sin \theta_k)}{V_0 \omega_0} \Delta g_R, \\ \delta x_{2k} &= -\frac{6\pi(t - t_0)}{V_0} \Delta g_T, \\ \delta x_{3k} &= \frac{2\Delta g_T (1 - \cos \theta_k) + \Delta g_R \sin \theta_k}{\omega_0^2}, \\ \delta x_{4k} &= \frac{2\Delta g_T \sin \theta_k - \Delta g_R (1 - \cos \theta_k)}{\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Наклонение, долгота восходящего узла и аргумент перигея согласно возмущаются ускорением  $\Delta g_N$ . В результате дискретизации уравнений (2.30) при постоянном  $\Delta g_N$  получим:

$$i_{k+1} = i_k + \frac{2\Delta g_N}{V_0 \omega_0} \cos\left(\frac{\theta_k}{2} + \alpha_k\right) \sin \frac{\theta_k}{2}, \quad (2.46)$$

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k - \frac{2\Delta g_N}{V_0 \omega_0 \sin i_0} \sin\left(\frac{\theta_k}{2} + \alpha_k\right) \sin \frac{\theta_k}{2}, \quad (2.47)$$

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \frac{2\Delta g_N \operatorname{ctg} i_0}{V_0 \omega_0} \sin\left(\frac{\theta_k}{2} + \alpha_k\right) \sin \frac{\theta_k}{2}. \quad (2.48)$$

Уравнения (2.43)-(2.48) образуют полную линеаризованную модель пространственного возмущенного движения КА в окрестности круговой орбиты заданного радиуса. Известно, что наибольшее влияние на движение КА в окрестности ГСО оказывают вторая зональная и вторая секториальная гармоники, характеризующие полярное сжатие и эллиптичность экваториального сечения Земли. Зависимости проекций возмущающего ускорения от второй зональной гармоники на оси орбитальной геоцентрической системы координат в функции аргумента широты имеют вид [4].

$$\Delta g_{0R} = \varepsilon_{20} (3 \sin^2 \alpha \sin^2 i - 1) \quad (2.49)$$

$$\Delta g_{0T} = -\varepsilon_{20} \sin 2\alpha \sin^2 i \quad (2.50)$$

$$\Delta g_{0N} = -\varepsilon_{20} \sin \alpha \sin 2i \quad (2.51)$$

$$\varepsilon_{20} = \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu R_{\text{Э}}^2}{r^4} \quad (2.52)$$

где  $C_{20}$  – коэффициент второй зональной гармоники;  $R_{\text{Э}}$  – экваториальный радиус Земли.

Линеаризация возмущений (2.49)-(2.51) в окрестности опорной круговой орбиты заключается в замене переменного радиуса  $r$  радиусом опорной орбиты  $r_0$ , оскулирующего наклонения  $i$  наклонением опорной орбиты  $i_0$ , а аргумента широты спутника – линейной функцией времени

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \omega_0(t - t_0) = \alpha_0 + \theta \quad (2.53)$$

Интегрирование в (2.34) с учетом принятых допущений приводит к следующим выражениям для возмущений от  $C_{20}$  в плоскости орбиты

$$\delta x_{1k} = \frac{\varepsilon_{20}}{V_0} (3 \cos^2 i_0 - 1)(t - t_0) \quad \delta x_{2k} = \delta x_{3k} = \delta x_{4k} = 0 \quad (2.54)$$

Уравнения (2.46)–(2.48) принимают вид

$$i_{k+1} = i_k - \frac{2\varepsilon_{20}}{V_0 \omega_0} \cos\left(\frac{\theta_k}{2} + \alpha_k\right) \sin \frac{\theta_k}{2} \quad (2.55)$$

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k - \frac{\varepsilon_{20} \cos i_0}{V_0 \omega_0} [\theta_k + \cos(\theta_k + 2\alpha_k) \sin \theta_k], \quad (2.56)$$

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \frac{\varepsilon_{20} \cos^2 i_0}{V_0 \omega_0} [\theta_k + \cos(\theta_k + 2\alpha_k) \sin \theta_k]. \quad (2.57)$$

Возмущающая потенциальная функция второй секториальной гармоники имеет вид [3]

$$\Delta U(\lambda) = 3 \frac{\mu}{r} \left(\frac{R_{\text{Э}}}{r}\right)^2 J_{22} \cos 2(\lambda - \lambda_{22}), \quad (2.58)$$

где  $\lambda = \lambda(t)$  – геоцентрическая долгота;  $\lambda_{22} = 0.5 \arctg(d_{22} / c_{22})$ ,  $J_{22} = \sqrt{c_{22}^2 + d_{22}^2}$ .

Здесь константа  $\lambda_{22}$  фиксирует положение большой полуоси экваториального сечения Земли относительно гринвичского меридиана. Проекция

возмущающего ускорения на оси орбитальной системы координат получим по формулам:

$$\begin{aligned}\Delta g_{0R}^c &= \frac{\partial \Delta U}{\partial r} = -\frac{9\mu R_{\ominus}^2}{r^4} J_{22} \cos 2(\lambda - \lambda_{22}), \\ \Delta g_{0T}^c &= -\frac{\cos u \sin i}{r \cos \phi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \phi} + \frac{\cos i}{r \cos^2 \phi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \lambda} \approx -\frac{6\mu R_{\ominus}^2}{r^4} J_{22} \sin 2(\lambda - \lambda_{22}), \\ \Delta g_{0N}^c &= -\frac{\cos i}{2 \cos \phi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \phi} - \frac{\cos u \sin i}{r \cos^2 \phi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \lambda} \approx 0.\end{aligned}\quad (2.59)$$

С учетом (2.57) и (2.59) выражения для проекций возмущающего ускорения геостационарной орбиты от основных гармоник геопотенциала примут вид

$$\begin{aligned}\Delta g_{0R} &= -[\varepsilon_{20} + a_R \cos 2(\lambda - \lambda_{22})], \\ \Delta g_{0T} &= -a_T \sin 2(\lambda - \lambda_{22}), \\ \Delta g_{0N} &= 0,\end{aligned}\quad (2.60)$$

где  $\varepsilon_{22} = J_{22} \frac{\mu R_{\ominus}^2}{r^4}$ ,  $a_R = 9\varepsilon_{22}$ ,  $a_T = 6\varepsilon_{22}$ .

Пусть интервал времени  $\Delta t = t - t_0$  складывается из пассивного  $t_k$  и активного  $\tau_k$  участков. Тогда с учетом линеаризации уравнений движения и возмущений, модель управляемого движения примет следующий вид:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \hat{\mathbf{A}}_k \mathbf{X}_k + \hat{\mathbf{B}}_k [\mathbf{F}_k (1 + \mu_k) + \boldsymbol{\eta}_k] + \hat{\mathbf{S}}_k, \quad (2.61)$$

где  $\mathbf{X}_k$  – семимерный вектор состояния  $\mathbf{X}_k = (x_{1k} \ x_{2k} \ x_{3k} \ x_{4k} \ \Delta i_k \ \Delta \Omega_k \ \Delta \omega_k)^T$ ;

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{B}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_k \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

где  $\mathbf{I}_3$  – единичная матрица размером  $3 \times 3$ ;

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\theta_k}{2\pi} & -\frac{2(1 - \cos \theta_k)}{r_0} & \frac{2 \sin \theta_k}{r_0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ 0 & 0 & -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_0} \left[ \frac{4(1 - \cos \omega_0 \tau_k)}{\omega_0} - \frac{3\omega_0 \tau_k^2}{2} \right] & -\frac{2(\omega_0 \tau_k - \sin \omega_0 \tau_k)}{V_0 \omega_0} \\ -\frac{6\pi \tau_k}{V_0} & 0 \\ \frac{2(1 - \cos \omega_0 \tau_k)}{\omega_0^2} & \frac{\sin \omega_0 \tau_k}{\omega_0^2} \\ \frac{2 \sin \omega_0 \tau_k}{\omega_0^2} & -\frac{1 - \cos \omega_0 \tau_k}{\omega_0^2} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{pmatrix} \frac{2}{V_0 \omega_0} \cos \left( \frac{\omega_0 \tau_k}{2} + \alpha_k \right) \sin \frac{\omega_0 \tau_k}{2} \\ -\frac{2}{V_0 \omega_0 \sin i_0} \sin \left( \frac{\omega_0 \tau_k}{2} + \alpha_k \right) \sin \frac{\omega_0 \tau_k}{2} \\ \frac{2 \operatorname{ctg} i_0}{V_0 \omega_0 \sin i_0} \sin \left( \frac{\omega_0 \tau_k}{2} + \alpha_k \right) \sin \frac{\omega_0 \tau_k}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

$$\theta_k = \omega_0 (t_k + \tau_k), \quad (2.66)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_0} \left[ \frac{4(1 - \cos \theta_k)}{\omega_0} - \frac{3\theta_k (t_k + \tau_k)}{2} \right] \Delta g_{0T} - \frac{2(\theta_k - \sin \theta_k)}{V_0 \omega_0} \Delta g_{0R} \\ -\frac{6\pi (t_k + \tau_k)}{V_0} \Delta g_{0T} \\ \frac{2\Delta g_{0T} (1 - \cos \theta_k) + \Delta g_{0R} \sin \theta_k}{\omega_0^2} \\ \frac{2\Delta g_{0T} \sin \theta_k - \Delta g_{0R} (1 - \cos \theta_k)}{\omega_0^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

Поскольку блочные матрицы  $\hat{\mathbf{A}}_k$  и  $\hat{\mathbf{B}}_k$  в (2.62) диагональные, линеаризованная модель расщепляется на две подсистемы. Первая из них описывает эволюцию отклонений параметров движения от номинальных в плоскости орбиты, а вторая – эволюцию параметров, характеризующих положение плоскости орбиты в пространстве. Это обстоятельство позволяет говорить о возможности раздельного синтеза алгоритмов управления движением в плоскости орбиты и управления плоскостью орбиты.



Прежде чем перейти к обсуждению алгоритмов управления и удержания, приведем ряд соотношений, которые следуют из определения параметров движения в плоскости орбиты. Введем в рассмотрение среднее угловое отклонение от центра орбитальной позиции по долготе

$$y_{k+1} = \Delta\alpha_{k+1} - 2e_{k+1} \sin \vartheta_{k+1}, \quad (2.68)$$

При малых эксцентриситетах среднее угловое отклонение практически совпадает с отклонением долготы  $\Delta\alpha_k$  с точностью до колебаний, обусловленных эллиптичностью орбиты. Период колебаний совпадает с периодом обращения по опорной орбите. Таким образом, среднее угловое отклонение  $y_k$  можно использовать вместо  $\Delta\alpha_k$ .

С учетом (2.39), (2.43) выражение (2.68) принимает вид

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\theta_k}{2\pi} x_{2k} + \delta y_k, \quad (2.69)$$

где 
$$\delta y_k = \delta\alpha_k - \frac{2\delta x_{3k}}{r_0}, \quad (2.70)$$

Используя определения компонент  $x_{3k}$  и  $x_{4k}$ , третье и четвертое уравнения системы (2.61) можно представить компактно

$$x_{3k+1} = r_0 e_k \sin(\theta_k + \vartheta_k) + \delta x_{3k}, \quad (2.71)$$

$$x_{4k+1} = r_0 e_k \cos(\theta_k + \vartheta_k) + \delta x_{4k}, \quad (2.72)$$

откуда согласно (2.40) получаем уравнение для эксцентриситета орбиты

$$e_{k+1} = e_k + 2A_{ek} \sin(\theta_k + \psi_k), \quad (2.73)$$

где 
$$A_{ek} = \sqrt{\delta x_{3k}^2 + \delta x_{4k}^2}, \quad \text{tg } \psi = \frac{\delta x_{3k}}{\delta x_{4k}}, \quad (2.74)$$

В полученной линеаризованной модели управляемого возмущенного движения к компонентам обобщенного вектора управления относятся:

- номинальная ориентация вектора тяги  $\beta_0, \gamma_0$ ;
- последовательность длительностей активных участков  $\tau = \{\tau_k, k = \overline{1, N}\}$ ;

- последовательность знаков ускорения от тяги (или ускорение от тяги)

$$f = \{f_k, k = \overline{1, N}\};$$

- последовательность длительностей пассивных участков  $t = \{t_k, k = \overline{1, N}\}$  ;

- количество циклов коррекций  $N$ .

### Глава 3. Синтез алгоритмов управления на этапах довыведения на ГСО, перевода на рабочую долготу и удержания в точке стояния

В настоящей главе решается задача синтеза алгоритмов автономного управления движением центра масс КА на ГСО при довыведении, приведении в рабочую позицию и удержании в ней в стохастической постановке с использованием результатов решения навигационной задачи. Допустимость разделения задач управления и навигации обсуждена в предыдущих главах.

Функциональная схема взаимодействия блоков навигации и управления показана на рис.3.1.

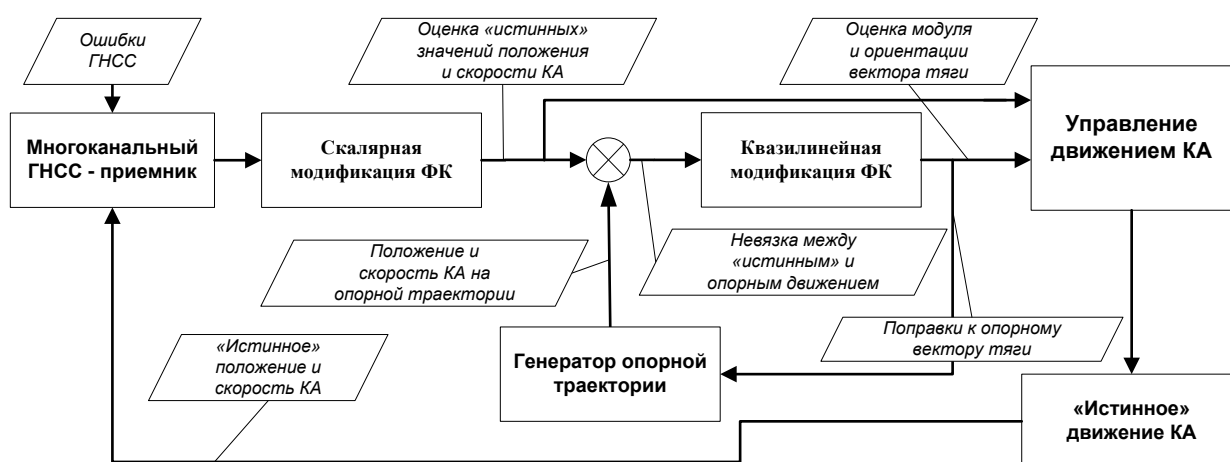


Рис. 3.1. Функциональная схема работы алгоритма навигации и управления движением при довыведении

Как показано на рис. 3.1, входом в блока управления движением КА являются выходные данные навигационной задачи. Алгоритм управления использует не только оценки векторов положения и скорости КА, но и оценки углов его ориентации, фактического значения тяги двигателя, а также углов отклонения вектора тяги от номинала.

Как было показано в Главе 1, задача управления на каждом из этапов жизненного цикла КА имеет свою специфику и должна решаться соответствующим алгоритмом управления, таким образом, общий алгоритм

управления заключается в последовательном выполнении алгоритмов управления этапов довыведения, приведения и удержания (рис. 3.2).

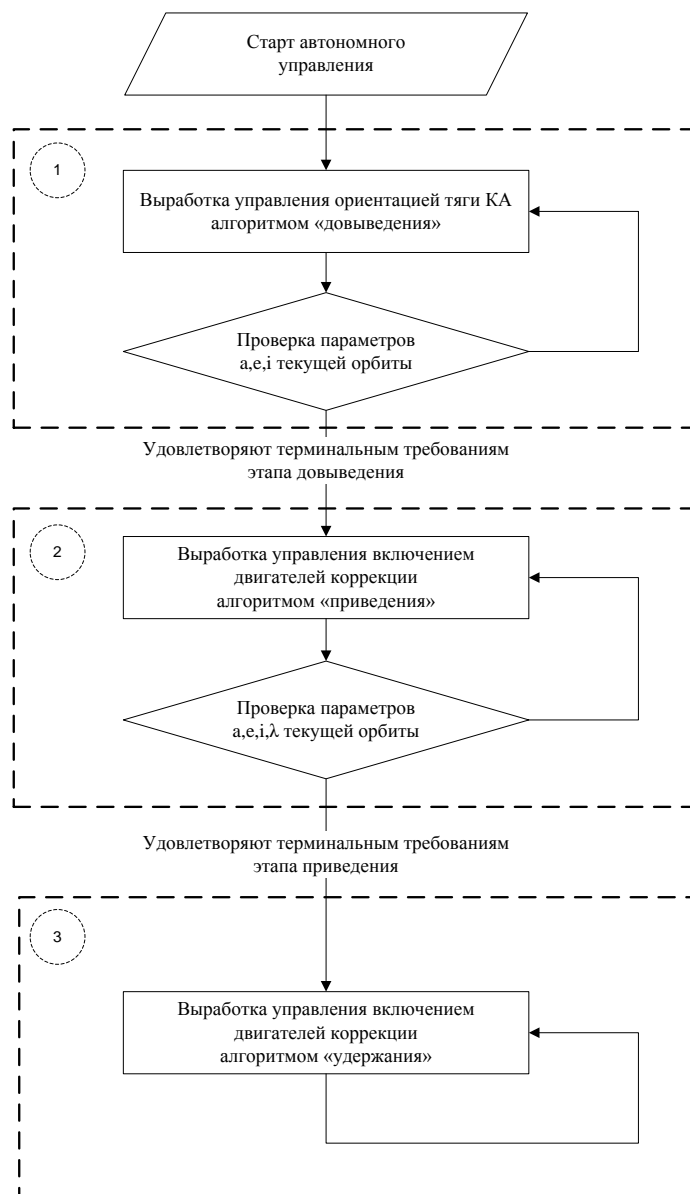


Рис. 3.2. Последовательность выполнения алгоритмов довыведения, приведения и удержания

### 3.1 Алгоритм управления на этапе довыведения

Для этапа довыведения был выбран алгоритм, разработанный В.Г. Петуховым [5]. Данный алгоритм построен на базе необходимых условий оптимальности программы управления при перелете между некомпланарными орбитами с использованием непрерывно работающей ЭРДУ.

Управлением в задаче довыведения являются углы тангажа  $\gamma$  и рыскания  $\beta$  определяющие орт ориентации вектора тяги маршевого двигателя. Так как, скорее всего, двигатель будет жестко закреплен на КА вдоль строительной оси – ОХ, то углы ориентации вектора тяги фактически являются требуемыми углами ориентации КА в орбитальной СК.

Известно, что использование необходимых условий оптимальности управления в форме принципа максимума Понтрягина [17] приводит к необходимости решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что существенно затрудняет реализацию алгоритма в автономной системе управления. Автору работы [5] удалось доказать возможность масштабирования решения краевой задачи, что позволило заранее построить таблицы значений сопряженных переменных для различных начальных условий движения. В итоге получено управление движением КА с обратной связью, близкое к оптимальному по быстродействию, обеспечивающее выведение на заданную круговую орбиту.

На этом этапе двигатель КА должен работать непрерывно, за исключением теневых участков. Существенное отличие переходной орбиты от ГСО не позволяет говорить о возможном применении линеаризованных моделей. Для подробного ознакомления с данным алгоритмом можно воспользоваться работой [5], здесь же приведем его краткое описание.

В любой момент времени углы тангажа и рысканья вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{A_t}{\sqrt{A_r^2 + A_t^2}}, \sin \beta = \frac{A_r}{\sqrt{A_r^2 + A_t^2}} \\ \sin \gamma &= \frac{\sqrt{A_r^2 + A_t^2}}{\sqrt{A_r^2 + A_t^2 + A_n^2}}, \sin \beta = \frac{A_n}{\sqrt{A_r^2 + A_t^2 + A_n^2}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned}
A_x &= hp_h + [(\xi+1)\cos F + e_x] p_{ex} + [(\xi+1)\sin F + e_y] p_{ey} \\
A_y &= \xi(p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F) \\
A_n &= \eta(-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(p_{ix} \cos F - p_{iy} \sin F) \\
e_x &= e \cdot \cos(\Omega + w) \\
e_y &= e \cdot \sin(\Omega + w) \\
i_x &= \operatorname{tg}(i/2) \cos \Omega \\
i_y &= \operatorname{tg}(i/2) \sin \Omega \\
F &= \vartheta + w + \Omega \\
\xi &= 1 + e_x \cos F + e_y \sin F \\
\eta &= i_x \sin F - i_y \cos F \\
\varphi &= 1 + i_x^2 + i_y^2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В соотношениях выше  $h = \sqrt{p/\mu E}$ ,  $e_x = e \cdot \cos(\Omega + w)$ ,  $e_y = e \cdot \sin(\Omega + w)$ ,  $i_x = \operatorname{tg}(i/2) \cos \Omega$ ,  $i_y = \operatorname{tg}(i/2) \sin \Omega$ ,  $F = \vartheta + w + \Omega$ ,  $e$  – эксцентриситет,  $p$  – фокальный параметр,  $w$  – аргумент перицентра,  $i$  – наклонение,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $\vartheta$  – истинная аномалия,  $\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F$ ,  $\eta = i_x \sin F - i_y \cos F$ ,  $\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2$ .

Сопряженные переменные  $p_h$ ,  $p_{ex}$ ,  $p_{ey}$ ,  $p_{ix}$ ,  $p_{iy}$ ,  $p_F$  вычисляются методом линейной интерполяции на многомерной сетке начальных условий полученных заранее путем решения множества краевых задач для различных начальных значений радиусов перигея, апогея и наклонения. Сетка охватывает диапазон радиусов перигея и апогея от 6571 км до 246539 км (40x40 точек) и наклонений от 0° до 90° с шагом 5° (19 точек) и является исходными данными алгоритма управления.

Отметим здесь, что элементы орбиты КА, используемые в приведенных выше соотношениях, рассчитываются на борту по оценкам компонент вектора состояния КА, включающего его координаты и компоненты вектора скорости, получаемым от системы навигации. Таким образом, соотношения (3.1) образуют закон управления с обратной связью. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 3.3.



Рис. 3.3. Алгоритм довыведения.

### 3.2 Постановка задачи управления при приведении и удержании

Задача приведения заключается в переводе вектора состояния КА из точки окончания довыведения в заданную терминальную подвижную область пространства, форму и размеры которой устанавливают международные требования к размещению КА на ГСО. На этапе удержания необходимо обеспечить постоянную принадлежность вектора состояния КА в заданной подвижной области пространства в течение срока активного существования. ЭРДУ КА имеет блоки двигателей коррекции, ориентированные вдоль трансверсали и бинормали к орбите, управлять включением/выключением которых можно независимо.

Считается, что в некоторый момент времени окончания довыведения  $t_1$  известны элементы орбиты КА  $a, e, \vartheta, \omega, \Omega, i$ . Получение элементов орбиты – внешняя задача, решаемая автономно с использованием глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) [12,13]. Считается, что КА приведен в орбитальную позицию, если параметры его орбиты удовлетворяют следующим требованиям:

- период обращения  $T$  отличается от требуемого  $T^*$  не более чем на  $\pm\Delta T_m$ ;
- эксцентриситет орбиты не превышает  $e_m$ ;
- географическая долгота  $\lambda$  отличается от заданного значения  $\lambda^*$  не более чем на  $\pm\Delta\lambda_m$ ;
- отклонение наклона орбиты от требуемого  $i^*$  находится в пределах  $\pm\Delta i_m$ .

Цель управления заключается в переводе КА в конечное состояние с учетом ограничений на векторы состояния и управления. Эти ограничения специфичны для каждой из перечисленных задач и будут обсуждаться отдельно.

К алгоритмическому обеспечению задач автономного управления предъявлено требование автоматической генерации циклограммы коррекции на борту КА с использованием математических моделей, учитывающих основные неслучайные возмущения. Генерируемая циклограмма приведения должна обеспечить время и характеристическую скорость не хуже заданных значений  $t_\Sigma \leq t_\Sigma^*$  при  $\Delta V_\Sigma \leq \Delta V_\Sigma^*$  с заданной терминальной точностью.

Математически решить задачу можно переформулировав ее как изопериметрическую. Для этого в рассмотрение вводят обобщенный критерий оптимальности, содержащий взвешенную сумму составляющих, оценивающих терминальную точность, время и энергозатраты [1]. Весовые коэффициенты (множители Лагранжа) – неотрицательные числа, одно из которых принимают равно единице. Единичный множитель соответствует минимизируемой составляющей критерия. Остальные множители подлежат определению из условия равенства соответствующей составляющей критерия ее заданному значению. Введение обобщенного критерия усложняет решение задачи оптимизации управления, так как требует использования численных методов. Для построения автономных алгоритмов управление это неприемлемо. Поэтому одной из задач, решаемых в рамках синтеза



алгоритмов управления приведением и удержанием, ставится и решается вопрос о минимизации применения численных методов путем построений начального приближения искомого управления как не противоречащего условиям оптимальности. Это обстоятельство принципиально отличает данную работу от предшествующих.

### 3.3 Алгоритм управления на этапе приведения

Как было показано в разделе 2.5, линеаризованная модель (2.62) расщепляется на две подсистемы. Первая из них описывает эволюцию отклонений параметров движения от номинальных в плоскости орбиты, а вторая – эволюцию параметров, характеризующих положение плоскости орбиты в пространстве. Это обстоятельство позволяет говорить о реальной возможности раздельного синтеза алгоритмов управления в плоскости орбиты и управления плоскостью орбиты. Технически такая возможность поддерживается благодаря конфигурации ЭРДУ, отмеченной выше. Отметим, что модели коррекции наклонения, долготы восходящего узла и аргумента перигея независимы, а по форме совпадают с моделью задачи однопараметрической коррекции, подробно рассмотренной в [15].

Модель управляемого движения в плоскости орбиты принимает вид

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k (1 + \mu_k) + \mathbf{S}_k + \mathbf{v}_k, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{x}_k = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)_k^T$ ;  $\mathbf{v}_k = \mathbf{B}_k \boldsymbol{\eta}_k$ ; вектор  $\mathbf{S}_k$  содержит первые четыре элемента вектора  $\hat{\mathbf{S}}_k$ . В рамках стохастического подхода все случайные возмущения являются гауссовыми с заданными статистическими характеристиками. При этом  $\mu_k$  – центрированная случайная величина со среднеквадратическим отклонением  $\sigma_{\mu k}$ .

$$M[\mu_k^2] = \sigma_{\mu k}^2; \quad \mathbf{H} = M[\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T], \quad M[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{\Pi}_k, \quad \mathbf{\Pi}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{H}_k \mathbf{B}_k^T, \quad (3.4)$$

Длительность активного участка  $\tau_k$  коррекции связана с модулем  $\mathbf{u}_k$  линейной зависимостью

$$\tau_k = k_\tau |\mathbf{u}_k|, \quad (3.5)$$

где  $k_\tau$  – коэффициент пропорциональности. В начальный момент времени ( $k=1$ ) заданы начальные условия:  $\Delta\lambda_1$  – разность текущей и требуемой долготы орбитальной позиции;  $\Delta\dot{\lambda}_1$  – скорость дрейфа долготы;  $e_1$  – эксцентриситет орбиты;  $\vartheta_1$  – истинная аномалия. Процесс приведения КА в орбитальную позицию считается законченным, если выполняются следующие терминальные требования:

$$|x_{1,N+1}| \leq \Delta\lambda_m, \quad |x_{2,N+1}| \leq \Delta\dot{\lambda}_m, \quad \sqrt{\frac{x_{3,N+1}^2 + x_{4,N+1}^2}{r_0^2}} \leq e_m. \quad (3.6)$$

Введем в рассмотрение обобщенный вектор  $U = (u \mid t \mid N)$  управления системой со следующими компонентами  $u = \{u_k, k = \overline{1, N}\}$  – последовательность активных воздействий;  $t = \{t_k, k = \overline{1, N}\}$  – последовательность интервалов между коррекциями (длительности пассивных участков).

Требуется найти обобщенный вектор управления  $U = (u \mid t \mid N)$  системой, который обеспечил бы ее перевод из начального состояния в конечное с требуемой точностью при минимальных энергетических затратах. Вектор управления должен быть найден в допустимой области

$$\hat{U} = \{U \mid t_k^l \leq t_k \leq t_k^h, \quad k = \overline{1, N}\}. \quad (3.7)$$

где  $t_k^l$  и  $t_k^h$  – нижнее и верхнее ограничения длительности  $k$ -го пассивного участка. Энергетические затраты будем оценивать математическим ожиданием величины

$$J^0 = \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k. \quad (3.8)$$

В качестве характеристики конечной точности примем математическое ожидание квадратичной формы

$$J^1 = \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K}^1 \mathbf{x}_{N+1}. \quad (3.9)$$

Матрицу  $K^1$  зададим диагональной с элементами  $k_{ii} = 1/\beta_{ii}^2$ , где  $\beta_{ii}$  – максимально допустимое отклонение соответствующего элемента терминального вектора состояния  $X_{N+1}$  от требуемого значения. Это соответствует аппроксимации области ограничений эллипсоидом  $\mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K}^1 \mathbf{x}_{N+1} = 1$ . Чтобы вероятность попадания терминального вектора в этот эллипсоид была бы не хуже заданной, формально следует ввести дополнительное ограничение  $M[\mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K}^1 \mathbf{x}_{N+1}] \leq 1/\chi$ , где параметр  $\chi$  определяет желаемый уровень вероятности терминальных требований.

Составим обобщенный критерий оптимальности

$$\bar{J} = M[J] = M[\alpha J^0 + J^1]. \quad (3.10)$$

где  $\alpha$  – множитель Лагранжа, подлежащий определению. Его следует искать как неотрицательный корень уравнения  $\bar{J}^1(\alpha) = \bar{J}_*^1$  при  $\bar{J}_*^1 = 1/\chi$ .

Для решения задачи обратимся к комбинированному методу оптимизации [14, 15]. В искомом управлении выделим две составляющие – программную и синтезируемую. Синтезируемой составляющей будет последовательность  $u$ . Программной составляющей является последовательность  $t$  и число коррекций  $N$ . В отношении этих составляющих применим поэтапную численную оптимизацию.

В рамках комбинированного метода оптимизации блок синтеза является внутренним по отношению к алгоритму поиска программной составляющей. При текущей программной составляющей блок синтеза вычисляет коэффициенты обратной связи и компенсационные составляющие управления. Попутно определяется значение критерия оптимальности и его составляющие. Найденные показатели возвращаются в процедуру поиска программной составляющей для генерации нового приближения. Процесс заканчивается, когда очередная итерация не улучшает предыдущее решение.

Сначала найдем синтезируемую составляющую, а затем рассмотрим алгоритм поиска программной составляющей.

### 3.3.1 Алгоритм поиска синтезируемой составляющей управления.

Рассмотрим общий случай, когда критерий оптимальности  $J^0$  задан квадратичной формой

$$J^0 = M \left[ \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k^0 \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{W}_k^0 \mathbf{u}_k) + \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K}^0 \mathbf{x}_{N+1} \right], \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{Q}_k^0$ ,  $\mathbf{W}_k^0$  и  $\mathbf{K}^0$  – заданные положительно-определенные симметричные матрицы.

Искомая синтезируемая составляющая управления должна доставлять минимум критерию (3.11) с учетом  $l$  изопериметрических ограничений

$$J^j = M \left[ \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k^j \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{W}_k^j \mathbf{u}_k) + \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K}^j \mathbf{x}_{N+1} \right] \leq J_*^j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (3.12)$$

где  $\mathbf{Q}_k^j$ ,  $\mathbf{W}_k^j$ ,  $\mathbf{K}^j$ ,  $j = \overline{1, l}$ , – положительно определенные симметричные матрицы соответствующих размерностей,  $J_*^j$  – заданные константы.

Согласно методу множителей Лагранжа, минимизация критерия (3.11) с учетом изопериметрических ограничений (3.12) эквивалентна безусловной минимизации обобщенного критерия оптимальности

$$J = \sum_{j=0}^l \alpha_j J^j, \quad (3.13)$$

где  $\alpha_j$  – множители Лагранжа, подлежащие определению с использованием условий (3.12). В общем случае для отыскания множителей Лагранжа приходится использовать численные итерационные процедуры, для чего необходимо многократно вычислять как оптимальное управление, доставляющее минимум обобщенному критерию, так и значения  $J^j$  в (3.12) при текущем приближении множителей Лагранжа.

Для синтеза оптимального управления воспользуемся достаточным условием оптимальности, которое в рассматриваемом случае принимает вид:

$$R_k(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{u}_k + M \left[ R_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) \mid \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k \right] \right\}, \quad (3.14)$$

Причем имеет место граничное условие:

$$R_{N+1}(\mathbf{x}_{N+1}) = \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{N+1}, \quad (3.15)$$

Подставляя в (3.14)  $k = N$  с учетом (3.15) имеем:

$$\begin{aligned} R_N(\mathbf{x}_N) &= \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{u}_N + M \left[ R_{N+1}(\mathbf{x}_{N+1}) \mid \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N \right] \right\} = \\ &= \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{u}_N + M \left[ \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{N+1} \mid \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N \right] \right\} \end{aligned}$$

Раскроем математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M \left[ \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{N+1} \mid \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N \right] &= M \left[ \begin{array}{l} (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N (1 + \mu_N) + \mathbf{S}_N + \mathbf{v}_N)^T \mathbf{K} \\ (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N (1 + \mu_N) + \mathbf{S}_N + \mathbf{v}_N) \end{array} \right] = \\ &= M \left[ \begin{array}{l} (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N) + \\ (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{B}_N \mathbf{u}_N \mu_N) + \\ (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{S}_N) + (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{v}_N) + \\ (\mathbf{B}_N \mathbf{u}_N \mu_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N) + (\mathbf{B}_N \mathbf{u}_N \mu_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{B}_N \mathbf{u}_N \mu_N) + \\ (\mathbf{B}_N \mathbf{u}_N \mu_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{S}_N) + (\mathbf{B}_N \mathbf{u}_N \mu_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{v}_N) + \\ (\mathbf{S}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N) + (\mathbf{S}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{B}_N \mathbf{u}_N \mu_N) + \\ (\mathbf{S}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{S}_N) + (\mathbf{S}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{v}_N) + (\mathbf{v}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N) + \\ (\mathbf{v}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{B}_N \mathbf{u}_N \mu_N) + (\mathbf{v}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{S}_N) + (\mathbf{v}_N)^T \mathbf{K} (\mathbf{v}_N) \end{array} \right] = \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\mu_k$  – центрированная случайная величина, а  $M[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{\Pi}_k$

в окончательном виде получаем:

$$\begin{aligned} M \left[ \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{N+1} \mid \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N \right] &= \left[ \begin{array}{l} (\mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T) \mathbf{K} (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N) + \\ (\mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T) \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \\ \sigma_{\mu N}^2 \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_N \mathbf{K}) \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{l} \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ + \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \sigma_{\mu N}^2 \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_N \mathbf{K}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Тогда выражение для функции будущих потерь  $R_N(\mathbf{x}_N)$  примет вид:

$$R_N(\mathbf{x}_N) = \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{u}_N + \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \sigma_{\mu N}^2 \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_N \mathbf{K}) \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Введем следующее обозначение:

$$F(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{u}_N + \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \sigma_{\mu\nu}^2 \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \\ \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_N \mathbf{K}) \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

$$\text{Тогда } R_N(\mathbf{x}_N) = \min_{\mathbf{u}_N} \{F(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)\} \quad (3.18)$$

Найдем минимум в (3.17) по  $\mathbf{u}_N$ . Для этого воспользуемся необходимыми условиями экстремума:

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)}{\partial \mathbf{u}_N} = 0$$

Вычислим производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)}{\partial \mathbf{u}_N} &= \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial (\mathbf{u}_N^T (\mathbf{W}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (1 + \sigma_{\mu\nu}^2)) \mathbf{u}_N)}{\partial \mathbf{u}_N} + \\ \frac{\partial ((\mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N) \mathbf{u}_N)}{\partial \mathbf{u}_N} + \\ \frac{\partial (\mathbf{u}_N^T (\mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N))}{\partial \mathbf{u}_N} \end{array} \right] = \\ &= 2(\mathbf{W}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (1 + \sigma_{\mu\nu}^2)) \mathbf{u}_N + 2(\mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N) = 0 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{\Gamma}_N = \mathbf{W}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (1 + \sigma_{\mu\nu}^2)$$

$$\mathbf{L}_N = \mathbf{\Gamma}_N^{-1} \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N$$

$$\mathbf{d}_N = \mathbf{\Gamma}_N^{-1} \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N$$

Тогда:

$$\mathbf{u}_N = -\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N \quad (3.19)$$

Убедимся, что найденное управление доставляет минимум правой части (3.16). Для этого вычислим вторую производную:

$$\frac{\partial^2 F(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)}{\partial \mathbf{u}_N^2} = 2\mathbf{\Gamma}_N$$

Поскольку  $\mathbf{\Gamma}_N = \mathbf{W}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (1 + \sigma_{\mu\nu}^2)$ , а матрицы  $\mathbf{W}_N, \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N$  являются положительно-определенными ( $\mathbf{W}_N$  - по условию задачи, а  $\mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N$  - в силу

способа вычисления), то матрица  $\Gamma_N$  также положительно-определенная, а значит, управление  $\mathbf{u}_N$  является оптимальным в смысле минимума функции будущих потерь.

Подставляя найденное оптимальное управление (3.19) в (3.16) получим выражение для функции будущих потерь  $R_N(\mathbf{x}_N)$ :

$$\begin{aligned}
R_N(\mathbf{x}_N) &= \left[ \begin{aligned} &\mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N + (-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N)^T \mathbf{W}_N (-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N) + \\ &\mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N) + \\ &(-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N)^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \\ &(-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N)^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N) + \\ &\mathbf{x}_N^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + (-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N)^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \\ &\sigma_{\mu\nu}^2 (-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N)^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N) + \\ &\mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (-\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N - \mathbf{d}_N) + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \text{Sp}(\Pi_N \mathbf{K}) \end{aligned} \right] = \\
&= \left[ \begin{aligned} &\mathbf{x}_N^T \left( \mathbf{Q}_N + \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \mathbf{L}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{L}_N - \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N - \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \right. \\ &\left. \sigma_{\mu\nu}^2 \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N \right) \mathbf{x}_N + \\ &+ \left( \mathbf{d}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{L}_N - \mathbf{d}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \mathbf{d}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N + \right. \\ &\left. \sigma_{\mu\nu}^2 \mathbf{d}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N - \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \right) \mathbf{x}_N + \\ &+ \mathbf{x}_N^T \left( \mathbf{L}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{d}_N - \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N + \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N + \right. \\ &\left. \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N - \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \sigma_{\mu\nu}^2 \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N \right) \\ &+ \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \text{Sp}(\Pi_N \mathbf{K}) + \mathbf{d}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{d}_N + \mathbf{d}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N - \mathbf{d}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \\ &\left. \sigma_{\mu\nu}^2 \mathbf{d}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N - \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N \right] = \\
&= \left[ \begin{aligned} &\mathbf{x}_N^T \left( \mathbf{Q}_N + \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \mathbf{L}_N^T \left( \mathbf{W}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (\sigma_{\mu\nu}^2 + 1) \right) \mathbf{L}_N - \right. \\ &\left. \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N - \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \right) \mathbf{x}_N + \\ &+ 2 \left( \mathbf{d}_N^T \left( \left( \mathbf{W}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (1 + \sigma_{\mu\nu}^2) \right) \mathbf{L}_N - \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \right) - \right. \\ &\left. \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \right) \mathbf{x}_N + \\ &+ \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \text{Sp}(\Pi_N \mathbf{K}) + \mathbf{d}_N^T \left( \mathbf{W}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N (1 + \sigma_{\mu\nu}^2) \right) \mathbf{d}_N - \\ &\left. \mathbf{d}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N - \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N \right] =
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$= \left[ \begin{aligned} & \mathbf{x}_N^T \left( \mathbf{Q}_N + \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \mathbf{L}_N^T \Gamma_N \mathbf{L}_N - \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N - \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \right) \mathbf{x}_N + \\ & + 2 \left( \mathbf{d}_N^T \left( \Gamma_N \mathbf{L}_N - \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \right) - \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \right) \mathbf{x}_N + \\ & + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \text{Sp}(\Pi_N \mathbf{K}) + \mathbf{d}_N^T \Gamma_N \mathbf{d}_N - \left( \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N \right)^T - \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N \end{aligned} \right]$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{G}_N = \left( \mathbf{A}_N - \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N \right)^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \left( \Gamma_N \mathbf{L}_N - \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \right)^T \mathbf{d}_N$$

$$\mathbf{K}_N = \mathbf{Q}_N + \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \mathbf{L}_N^T \Gamma_N \mathbf{L}_N - \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N - \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N$$

$$c_N = \text{Sp}(\Pi_N \mathbf{K}) + \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{S}_N + \mathbf{d}_N^T \Gamma_N \mathbf{d}_N - 2 \mathbf{S}_N^T \mathbf{K} \mathbf{B}_N \mathbf{d}_N$$

Тогда функция будущих потерь для шага  $N$  примет следующий вид:

$$R_N(\mathbf{x}_N) = \left[ \mathbf{x}_N^T \mathbf{K}_N \mathbf{x}_N + 2 \mathbf{G}_N^T \mathbf{x}_N + c_N \right]$$

Найдем теперь функцию будущих потерь для шага  $N-1$ :

$$\begin{aligned} R_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}) &= \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + M \left[ R_N(\mathbf{x}_N) \mid \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1} \right] \right\} = \\ &= \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + M \left[ \mathbf{x}_N^T \mathbf{K}_N \mathbf{x}_N + 2 \mathbf{G}_N^T \mathbf{x}_N + c_N \mid \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1} \right] \right\} \end{aligned}$$

Раскроем математическое ожидание:

$$\begin{aligned} & M \left[ \mathbf{x}_N^T \mathbf{K}_N \mathbf{x}_N + 2 \mathbf{G}_N^T \mathbf{x}_N + c_N \mid \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1} \right] = \\ &= M \left[ \begin{aligned} & \left( \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} \boldsymbol{\mu}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{v}_{N-1} \right)^T \mathbf{K}_N \\ & \left( \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} \boldsymbol{\mu}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{v}_{N-1} \right) + \\ & 2 \mathbf{G}_N^T \left( \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} (1 + \boldsymbol{\mu}_{N-1}) + \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{v}_{N-1} \right) + c_N \end{aligned} \right] = \\ &= M \left[ \begin{aligned} & \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ & \boldsymbol{\mu}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ & \mathbf{v}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ & \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \boldsymbol{\mu}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ & \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{v}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ & \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} \boldsymbol{\mu}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} \boldsymbol{\mu}_{N-1} + \\ & \boldsymbol{\mu}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} \boldsymbol{\mu}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} \boldsymbol{\mu}_{N-1} + \\ & \mathbf{v}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} \boldsymbol{\mu}_{N-1} + \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \\ & \boldsymbol{\mu}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{v}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \\ & \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{v}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{v}_{N-1} + \boldsymbol{\mu}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{v}_{N-1} + \\ & \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{v}_{N-1} + \mathbf{v}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{v}_{N-1} + 2 \mathbf{G}_N^T \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + 2 \mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ & 2 \mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} \boldsymbol{\mu}_{N-1} + 2 \mathbf{G}_N^T \mathbf{S}_{N-1} + 2 \mathbf{G}_N^T \mathbf{v}_{N-1} + c_N \end{aligned} \right] = \end{aligned}$$



$$= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ \sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \\ + \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_{N-1} \mathbf{K}_N) \\ 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{S}_{N-1} + c_N \end{bmatrix}$$

Тогда  $R_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1})$  примет вид:

$$R_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \\ \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_{N-1} \mathbf{K}_N) + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{S}_{N-1} + c_N \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Введем следующее обозначение:

$$F(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) = \left[ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \\ + \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_{N-1} \mathbf{K}_N) + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{S}_{N-1} + c_N \end{array} \right] \quad (3.21)$$

$$\text{тогда } R_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}_k} \{F(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})\} \quad (3.22)$$

Вычислим производную и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}{\partial \mathbf{u}_N} &= \left[ \begin{array}{l} 2\mathbf{W}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + (\mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1}) + (\mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1})^T + \\ 2\mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + (\mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1})^T + \\ 2(\sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1}) \mathbf{u}_{N-1} + (\mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1}) + 2(\mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1})^T \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{l} 2\mathbf{W}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + 2(\mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1}) + 2\mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \\ 2(\mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1})^T + 2(\sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1}) \mathbf{u}_{N-1} + 2(\mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1})^T \end{array} \right] = 0 \\ \mathbf{u}_{N-1} &= \frac{(\mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1}) \mathbf{x}_{N-1} + (\mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{G}_N)}{\mathbf{W}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (1 + \sigma_{\mu N-1}^2)} \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\Gamma_{N-1} = \mathbf{W}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (1 + \sigma_{\mu N-1}^2)$$

$$\mathbf{L}_{N-1} = \Gamma_{N-1}^{-1} \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1}$$

$$\mathbf{d}_{N-1} = \Gamma_{N-1}^{-1} \mathbf{B}_{N-1}^T (\mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{G}_N)$$

Тогда оптимальное управление примет вид:

$$\mathbf{u}_{N-1} = -\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1} \quad (3.23)$$

Найдем  $R_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1})$ :

$$R_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}) = \left[ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1})^T \mathbf{W}_{N-1} (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1}) + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1})^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1}) + \\ (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1})^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1}) + \\ \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1}) + \\ \sigma_{\mu N-1}^2 (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1})^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1}) + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1})^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \\ \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \text{Sp}(\Pi_{N-1} \mathbf{K}_N) + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1} (-\mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1}) + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{S}_{N-1} + c_N \end{array} \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} - \\ \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + \\ \sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + \\ \sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + \sigma_{\mu N-1}^2 \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + \\ \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} - \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} - \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \\ \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \text{Sp}(\Pi_{N-1} \mathbf{K}_N) + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{A}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - \\ 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} - 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + 2\mathbf{G}_N^T \mathbf{S}_{N-1} + c_N \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{N-1}^T \left( \mathbf{Q}_{N-1} + \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} - \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} - \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} + \right) \mathbf{x}_{N-1} + \\ \mathbf{L}_{N-1}^T \left( \mathbf{W}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (1 + \sigma_{\mu N-1}^2) \right) \mathbf{L}_{N-1} \end{array} \right] \mathbf{x}_{N-1} + \\
= & 2 \left[ \begin{array}{l} \left( (\mathbf{A}_{N-1} - \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1})^T (\mathbf{G}_{N-1} + \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1}) + \right. \\ \left. \mathbf{d}_{N-1}^T \left( (\mathbf{W}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (1 + \sigma_{\mu N-1}^2)) \mathbf{L}_{N-1} - \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} \right) \right)^T \mathbf{x}_{N-1} + \\ \left( c_N + \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_{N-1} \mathbf{K}_N) + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \right. \\ \left. \mathbf{d}_{N-1}^T \left( \mathbf{W}_{N-1} + \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} (1 + \sigma_{\mu N-1}^2) \right) \mathbf{d}_{N-1} - \right. \\ \left. 2\mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + 2\mathbf{G}_N^T (\mathbf{S}_{N-1} - \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1}) \right) \end{array} \right] =
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{N-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{N-1} + \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} + \mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{\Gamma}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} - \\ -\mathbf{L}_{N-1}^T \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1} - \mathbf{A}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} \end{pmatrix} \\
\mathbf{G}_{N-1} &= (\mathbf{A}_{N-1} - \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1})^T (\mathbf{G}_{N-1} + \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1}) + (\mathbf{\Gamma}_{N-1} \mathbf{L}_{N-1} - \mathbf{B}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{A}_{N-1})^T \mathbf{d}_{N-1} \\
\mathbf{d}_{N-1} &= \mathbf{\Gamma}_{N-1}^{-1} \mathbf{B}_{N-1}^T (\mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{G}_N) \\
c_{N-1} &= \begin{pmatrix} c_N + \text{Sp}(\mathbf{\Pi}_{N-1} \mathbf{K}_N) + \mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{S}_{N-1} + \mathbf{d}_{N-1}^T \mathbf{\Gamma}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} - \\ -2\mathbf{S}_{N-1}^T \mathbf{K}_N \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} + 2\mathbf{G}_N^T (\mathbf{S}_{N-1} - \mathbf{B}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Тогда  $R_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1})$  примет вид:

$$R_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}) = \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{K}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} + (\mathbf{G}_{N-1})^T \mathbf{x}_{N-1} + c_{N-1}$$

По индукции можно доказать справедливость такой формы решения для любого шага  $k$ . Окончательно получим следующие рекуррентные соотношения для управления:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{d}_k \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_k &= \Gamma_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_k \\
\mathbf{d}_k &= \Gamma_k^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{S}_k + \mathbf{G}_{k+1}) \\
\Gamma_k &= \mathbf{W}_k + \mathbf{B}_k^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{B}_k (1 + \sigma_{\mu k}^2) \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{Q}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_k - \mathbf{L}_k^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{B}_k \mathbf{L}_k + \mathbf{L}_k^T \Gamma_k \mathbf{L}_k \\
\mathbf{d}_k &= \Gamma_k^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{S}_k + \mathbf{G}_{k+1}) \\
\mathbf{G}_k &= (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{L}_k)^T (\mathbf{G}_k + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{S}_k) + (\Gamma_k \mathbf{L}_k - \mathbf{B}_k^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_k)^T \mathbf{d}_k \\
c_k &= c_{k+1} + \text{Sp}(\Pi_k \mathbf{K}_{k+1}) + \mathbf{S}_k^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{S}_k + \mathbf{d}_k^T \Gamma_k \mathbf{d}_k - 2 \mathbf{S}_k^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k + 2 \mathbf{G}_{k+1}^T (\mathbf{S}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k) \\
R_k(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{x}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{x}_k + (\mathbf{G}_k)^T \mathbf{x}_k + c_k \\
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{K} \\
\mathbf{G}_{k+1} &= 0 \\
c_{k+1} &= 0
\end{aligned}$$

Заметим, что оптимальное управление не зависит от случайных аддитивных возмущений, статистические характеристики которых входят только в выражения функции будущих потерь и составляющих изопериметрических ограничений.

Структура оптимального управления справедлива и тогда, когда система является детерминированной: достаточно обнулить статистические характеристики всех случайных возмущений в рекуррентных соотношениях выше. Это обстоятельство позволяет рассматривать полученное решение как основу универсального блока расчета синтезируемой составляющей.

Приведенные рекуррентные соотношения справедливы только в том случае, когда коэффициенты уравнений (матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ) не зависят от управления  $\mathbf{u}_k$ . В нашем случае длительности активных участков  $\tau_k$ , входящие в выражения коэффициентов уравнений, зависят от  $\mathbf{u}_k$ . Это обстоятельство приводит к необходимости применения методов последовательных приближений, в рамках которых синтезируемое управление следует считать субоптимальным [9]. Суть метода состоит в том, что если матрицы коэффициентов уравнений движения «заморозить», то коэффициенты обратной связи и компенсационные векторы можно вычислить по приведенным выше рекуррентным соотношениям. Для получения нового приближения длительностей активных участков в

монографии [18] было предложено моделировать осредненные по возмущениям уравнения движения. На каждом шаге моделирования вычисляется управление  $u_k$  и соответствующая ему длительность активного участка  $\tau_k$ . Попутно находят суммарное время коррекции, характеристическую скорость и составляющие обобщенного критерия оптимальности.

Использование подобной упрощенной модели было обусловлено относительно невысоким быстродействием компьютеров того времени. Как следствие, нельзя было утверждать, что на выходе итерационного процесса получается конечная совокупность коэффициентов обратной связи. Методикой решения предполагалось их уточнение по данным обработки траекторных измерений после проведения реальной коррекции, что не удовлетворяет требованию автономного управления. Для преодоления отмеченного недостатка вместо линеаризованной модели будем использовать полную систему нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1) с учетом нецентральности гравитационного поля Земли, притяжения Луны и Солнца, а также давления солнечного света. При использовании полной модели можно говорить об исключении уточнения коэффициентов обратной связи после каждой реальной коррекции. Кроме того, на выходе блока синтеза мы получим уже готовую циклограмму процесса приведения КА в требуемую орбитальную позицию на ГСО.

Блок- схема комбинированного метода синтеза показана на рис. 3.1.

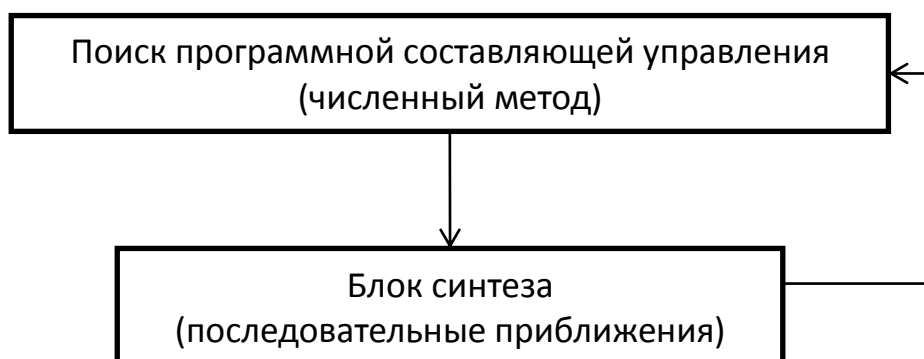


Рис. 3.1. Комбинированный метод синтеза

Укрупненная блок-схема решения задачи поиска синтезируемой составляющей управления приведена на рис. 3.2.

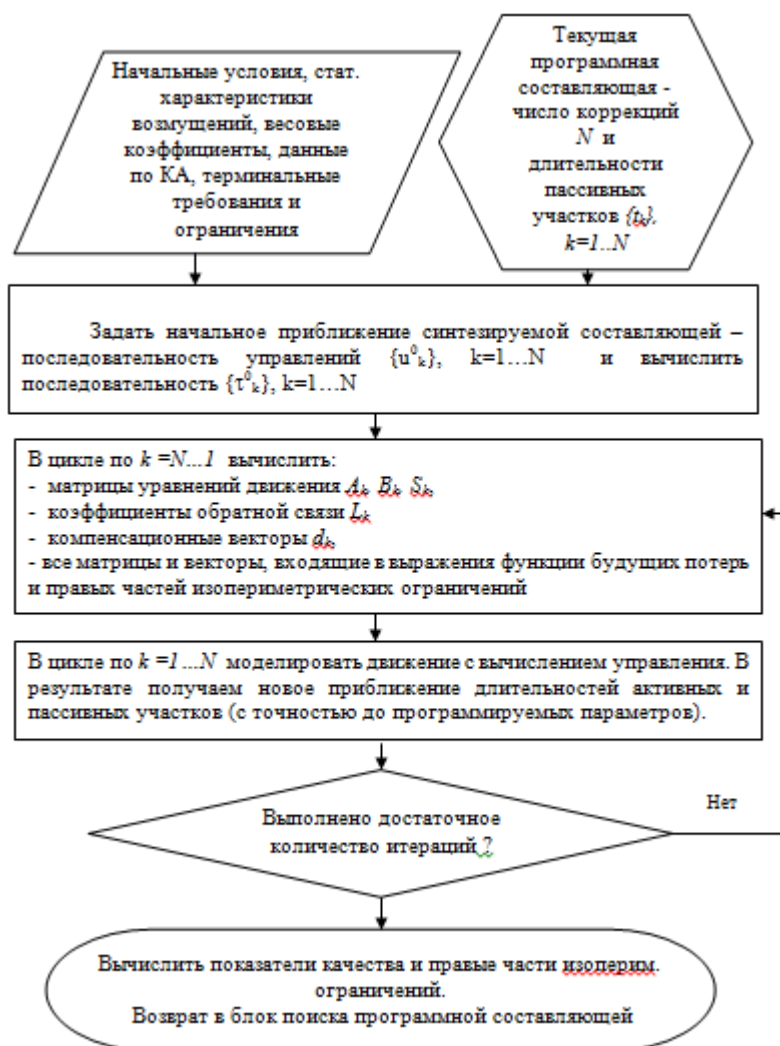


Рис. 3.2. Блок синтеза

### 3.3.2 Алгоритм поиска программной составляющей управления.

Программная составляющая управления определяет количество коррекций и моменты их проведения. Момент начала каждой коррекции определен длительностью предшествующего пассивного участка. Принципиальным является ограничение его длительности снизу, ибо коррекцию нельзя провести до момента поступления обновленного прогноза вектора состояния. Ограничение сверху скорее методическое, чем техническое, ибо позволяет исключить появление решений о дрейфе в нужном направлении с малой скоростью. Формально задачу определения

моментов проведения коррекций можно интерпретировать как задачу нелинейного программирования, решаемую численно. Теоретически это приемлемо, но вряд ли применимо в автономной системе управления. Дело в том, что ни один из известных методов численного решения задачи нелинейного программирования в принципе не может учесть факт влияния момента включения двигателя на эволюцию параметров вектора состояния КА, в результате чего будут выполняться бесполезные итерации. В этой связи в алгоритме автономного управления для формирования программной составляющей следует использовать знания, а не численные методы. Иными словами, выбор момента проведения коррекции не должен противоречить основной цели управления, т.е. обеспечению требуемой точности приведения в орбитальную позицию при минимально возможных затратах характеристической скорости. Кроме того, для запуска итерационного процесса поиска коэффициентов обратной связи необходимо хорошее начальное приближение длительностей активных участков. В этой связи формально отнесем их к программной составляющей. Так как процесс приведения КА вдоль орбиты (по долготе) отделяется от коррекций наклонения, будем рассматривать их отдельно.

Для получения начального приближения управления в плоскости орбиты используем упрощенную модель движения. В ее состав включим уравнения эволюции среднего углового отклонения  $y_k$ , скорости дрейфа  $v_k$  и эксцентриситета орбиты  $e_k$ , которые следуют из соотношений (3.9)-(3.14) работы [8]:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\theta_k}{2\pi} v_k + \frac{\omega_0 \tau_k}{4\pi} u_k (1 + \mu_k) \quad (3.25)$$

$$v_{k+1} = v_k + u_k (1 + \mu_k), \quad (3.26)$$

$$e_{k+1} = \sqrt{e_k^2 + h_k^2 + 2e_k h_k \cos\left(\theta_k + \vartheta_k - \frac{\omega_0 \tau_k}{2}\right)}, \quad (3.27)$$

где

$$u_k = -\frac{6\pi\tau_k f_k}{V_0}, \quad (3.28)$$

$$h_k = \Delta e_k \sin \frac{\omega_0 \tau_k}{2}, \quad (3.29)$$

$$\Delta e_k = \frac{4f_k}{V_0 \omega_0}, \quad (3.30)$$

где  $f_k$  – трансверсальное ускорение от тяги двигателя. Переходя к безразмерным длительностям пассивного и активного участков, уравнение эволюции среднего углового отклонения (3.25) примет следующий вид:

$$y_{k+1} = y_k + v_k t_k + \rho_k |u_k| \left( v_k + \frac{u_k (1 + \mu_k)}{2} \right), \quad (3.31)$$

где  $\rho_k = V_0 / 6\pi f_k T_0$ ;  $T_0$  – период опорной орбиты.

Уравнения (3.25), (3.26) удобно анализировать на фазовой плоскости. Они суть известные в механике соотношения между расстоянием, скоростью и ускорением. Уравнение управляемой эволюции эксцентриситета (3.27) с ними связано неявно через управление скоростью дрейфа. Поэтому при использовании фазовой плоскости следует учитывать характер эволюции эксцентриситета в зависимости от момента включения двигателя, и от длительности работы ЭРДУ. Рассмотрим возможные способы управления эксцентриситетом и соответствующие аналитические решения, которые можно извлечь из уравнения (3.27). Отнесем к ним следующие варианты поведения.

- Изменение (увеличение или уменьшение) на максимально возможную величину в течение одного активного участка.
- Изменение эксцентриситета на заданную величину.
- Обеспечение постоянства эксцентриситета.

Максимальная вариация эксцентриситета, как это следует из (3.27) получается при

$$\cos(\tilde{\theta}_k) = \pm \text{sign} h_k, \quad (3.32)$$

где  $\tilde{\theta}_k = \theta_k - \vartheta_k + 0.5\omega_0 \tau_k$ ,  $\theta_k = \omega_0(t_k + \tau_k)$ .



Знак «плюс» в (3.32) соответствует увеличению эксцентриситета, а знак «минус» уменьшению. Уравнение (3.27) принимает вид  $e_{k+1} = |e_k \pm h_k|$ . Попутно имеем условие гарантированного убывания эксцентриситета  $e_k \geq |h_k|$ . Из (3.27), (3.32) следует, что эксцентриситет возрастает если

$$\tilde{\theta}_k = \pi \left( \frac{1 - \text{sign} h_k}{2} \right) + 2\pi n_k, \quad (3.33)$$

а убывает, когда

$$\tilde{\theta}_k = \pi \left( \frac{1 + \text{sign} h_k}{2} \right) + 2\pi n_k, \quad (3.34)$$

где  $n_k = 0, 1, \dots$  – любое положительное целое число. С учетом (3.33), (3.34) алгоритм вычисления длительности пассивного участка  $t_k$  при произвольной длительности активного участка  $\tau_k$  и ускорении  $f_k$  принимает вид

$$t_k = \begin{cases} 0.25T_0 \left[ 1 - \text{sign} \left( u_k \sin \frac{\omega_0 \tau_k}{2} \right) \right] + \Delta t_k & \text{для уменьшения эксц.,} \\ 0.25T_0 \left[ 1 + \text{sign} \left( u_k \sin \frac{\omega_0 \tau_k}{2} \right) \right] + \Delta t_k & \text{для увеличения эксц.,} \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\text{где } \Delta t_k = n_k T_0 - \frac{\vartheta_k}{\omega_0} - \frac{\tau_k}{2}. \quad (3.36)$$

Целое число  $n_k$  в (3.36) – количество пассивных витков перед коррекцией. Этот целочисленный параметр и будет программной составляющей управления моментами включения вместо длительности пассивного участка. Максимально возможное абсолютное приращение эксцентриситета достигается при длительности активного участка

$$\tau_k = 0.5m_k T_0, \quad (3.37)$$

где  $m_k$  – любое нечетное число. При этом эксцентриситет гарантированно убывает, если  $e_k \geq \Delta e_k$ . Иллюстрация поведения эксцентриситета на активном участке показана на рис.3.3.

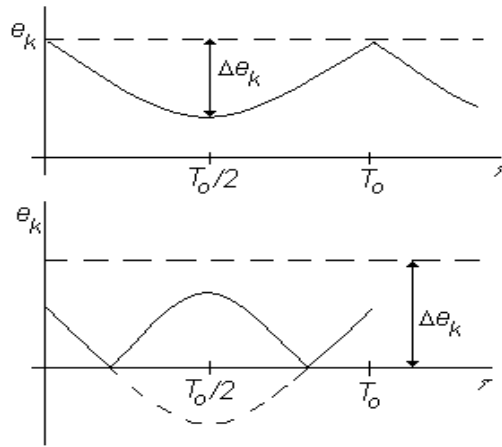


Рис. 3.3. Поведение эксцентриситета на активном участке

Видно, что при значительной длительности активного участка эксцентриситет может возрастать. Это обстоятельство позволяет говорить о целесообразности искусственного ограничения длительностей активных участков с целью недопущения возрастания эксцентриситета на заключительном этапе коррекции.

Если длительности всех активных участков (кроме последнего) выбираются согласно (3.37), можно оценить количество коррекций для устранения начального эксцентриситета  $e_1$  до предельно допустимого значения  $e_m$ :

$$N^n = N_e + 1,$$

где  $N_e = [(e_1 - e_m) / \Delta e_k]$ . Исключением является случай, когда  $e_1 < \Delta e_k - e_m$ . При этом (3.37) теряет смысл. Этот случай следует рассматривать отдельно. Таким образом, для уменьшения эксцентриситета на максимально возможную величину длительность пассивного участка следует определять по (3.35), а длительность активного участка – согласно (3.37). Данный результат далее будем использовать для формирования начального приближения длительностей активных участков.

Для общности рассмотрим возможность изменения эксцентриситета на заданную величину. В данном случае требуется определить  $t_k$  и  $\tau_k$  из условия  $e_{k+1} = e_k^*$ . Из уравнения (3.27) следует

$$\cos \tilde{\theta}_k = \frac{(e_k^*)^2 - e_k^2 - h_k^2}{2e_k h_k}.$$

Это уравнение имеет решение, если

$$\left| \frac{(e_k^*)^2 - e_k^2 - h_k^2}{2e_k h_k} \right| \leq 1. \quad (3.38)$$

Необходимое условие существования решения неравенства (3.38) есть

$$e_k - e_k^* < \Delta e_k \quad (3.39)$$

Заметим, что неравенство (3.39) строгое, ибо в случае равенства его правой части левой данный случай переходит в первый. Решение неравенства (3.38) распадается на две группы соотношений.

Если  $(e_k + e_k^*) / \Delta e_k > 1$ , то на одном витке существуют две точки включения двигателя, определяемые условиями

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{1k} = \beta_k + 2\pi n_k, \\ \tilde{\theta}_{2k} = -\beta_k + 2\pi(n_k + 1), \end{cases} \quad n_k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.40)$$

$$\text{где } \beta_k = \arccos \chi_k, \quad \chi_k = \frac{\delta e_k (\delta e_k - 2e_k) - h_k^2}{2e_k h_k}, \quad \delta e_k = e_k - e_k^*.$$

Длительность активного участка должна удовлетворять неравенству

$$\frac{T_0 \Phi_k}{\pi} + T_0 m_k < \tau_k < T_0 (m_k + 1) - \frac{T_0 \Phi_k}{\pi}, \quad m_k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\Phi_k = \arcsin(\delta e_k / \Delta e_k)$ . Длительность пассивного участка

находим из (3.40). Целые числа  $n_k$  и  $m_k$  подлежат определению с учетом ограничений на длительности пассивных и активных участков.

Если  $(e_k + e_k^*) / \Delta e_k < 1$  (т.е. при  $e_k < \Delta e_k$ ) приходим к соотношениям (3.40), однако для длительности активного участка существуют два интервала, соответствующие неравенству (3.38):

$$\begin{cases} \frac{T_0 \Phi_k''}{\pi} + T_0 m_k < \tau_k < \frac{T_0 \Phi_k^s}{\pi} + T_0 m_k, \\ \frac{T_0 \Phi_k''}{\pi} + T_0 (m_k + 1) < \tau_k < \frac{T_0 \Phi_k^s}{\pi} + T_0 (m_k + 1), \end{cases}$$

$$\text{где } \varphi_k^u = \arcsin \left| \frac{e_k - e_k^*}{\Delta e_k} \right|; \quad \varphi_k^e = \arcsin \left| \frac{e_k + e_k^*}{\Delta e_k} \right|.$$

Алгоритм изменения эксцентриситета на заданную величину можно упростить, если момент включения двигателя выбирается согласно (3.35). В этом случае уравнение эволюции эксцентриситета принимает вид  $|e_k \pm h_k| = e_k^*$ . Отсюда при уменьшении эксцентриситета длительность активного участка вычисляем по формуле

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{2}{\omega_0} \arcsin \left| \frac{e_k - e_k^*}{\Delta e_k} \right| + 2T_0 m_k, \\ -\frac{2}{\omega_0} \arcsin \left| \frac{e_k - e_k^*}{\Delta e_k} \right| + T_0 (2m_k - 1). \end{cases} \quad (3.41)$$

Если эксцентриситет необходимо увеличить, то

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{2}{\omega_0} \arcsin \left| \frac{e_k + e_k^*}{\Delta e_k} \right| + 2T_0 m_k, \\ -\frac{2}{\omega_0} \arcsin \left| \frac{e_k + e_k^*}{\Delta e_k} \right| + T_0 (2m_k - 1). \end{cases} \quad (3.42)$$

Формулы (3.41), (3.42) вырождаются, если аргумент функции  $\arcsin$  превосходит единицу.

Наконец, рассмотрим алгоритм постоянства эксцентриситета. Он вытекает из предыдущего случая. Полагая  $e_{k+1} = e_k^* = e_k$ , получаем условие

$$\cos \left( \theta_k - \vartheta_k + \frac{\omega_0 \tau_k}{2} \right) = -\frac{h_k}{2e_k}.$$

Решение этого уравнения гарантированно существует при  $e_k < \Delta e_k / 2$ . Моменты включения ДУ определяются согласно (3.40), а длительность активного участка должна удовлетворять неравенству

$$T_0 \left( m_k - \frac{\varphi_k}{\pi} \right) < \tau_k < T_0 \left( m_k + \frac{\varphi_k}{\pi} \right),$$

$$\text{где } \varphi_k = \arcsin (2e_k / \Delta e_k).$$

Из полученных результатов вытекают два частных решения, которые могут быть полезными при синтезе алгоритмов управления. Эти решения представляют собой условие невозрастания эксцентриситета при

произвольных длительностях пассивного и активного участков, а также условие того, что при старте с круговой орбиты эксцентриситет не превзойдет допустимого значения  $e_m$ . В первом случае угол  $\tilde{\theta}_k$  должен удовлетворять неравенству

$$2\pi n_k + \beta_k \operatorname{sign} h_k \leq \tilde{\theta}_k \leq 2\pi \left( n_k + \frac{1 + \operatorname{sign} h_k}{2} \right) - \beta_k \operatorname{sign} h_k, \quad (3.43)$$

где  $\beta_k = \arccos |h_k / 2e_k|$ ,  $e_k \geq 0.5\Delta e_m$ . Неравенство (3.43) позволяет вычислить рациональные пределы варьирования длительности пассивного участка при произвольной длительности  $\tau_k$ .

Если в начале коррекции эксцентриситет примерно равен нулю, то момент включения двигателя (пассивный участок) может быть любым. Чтобы эксцентриситет в результате коррекции не превысил заданного значения, например,  $e_{k+1} \leq e_m$ , необходимо ограничить длительность активного участка и тем самым – приращение скорости дрейфа:

$$T_0 \left( n_k - \frac{\hat{\beta}_k}{\pi} \right) \leq \tau_k \leq T_0 \left( n_k + \frac{\hat{\beta}_k}{\pi} \right), \quad (3.44)$$

$$\text{где } \hat{\beta}_k = \arcsin \frac{e_m}{\Delta e_m}, \quad e_m \leq \Delta e_m.$$

Найденные зависимости определяют возможные способы изменения эксцентриситета, которые позволяют сузить область поиска начального приближения программной составляющей управления. Полученные результаты далее будем использовать как исходные данные для алгоритма формирования начального приближения программной составляющей.

Рассмотрим возможные формы траекторий приведения КА в орбитальную позицию на плоскости  $(y, \nu)$ , которые показаны на рис 3.4. Для достижения минимума длительности процесса коррекции рациональной следует признать траекторию с одним участком разгона, за которым следует ступенчатое торможение. Пример такой траектории показан на рис. 3.4,а.

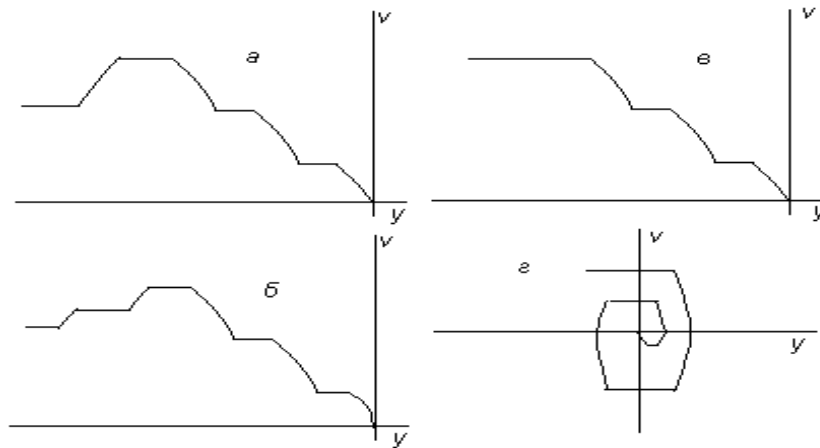


Рис. 3.4. Фазовая траектория приведения КА в рабочую позицию

Траектории с несколькими участками разгона (рис.3.4,б) хуже, так как средняя скорость движения будет меньше, чем в первом случае, и, следовательно, длительность процесса приведения увеличивается. При минимизации характеристической скорости фазовая траектория не должна содержать участки разгона. Пример такой траектории показан на рис.3.4,в. Возможны также траектории с чередованием разгонов и торможений, а также с периодическим изменением знака скорости дрейфа вблизи начала координат, как на рис. 3.4,г. Вообще говоря, многоступенчатость траектории является следствием разной эффективности управления периодом обращения и эксцентриситетом. Кроме того, при мультипликативной ошибке управления долгой получаемое отклонение дрейфа пропорционально величине управляющего воздействия. Поэтому при гашении скорости дрейфа последовательность приращений характеристической скорости должна быть убывающей. Представляет интерес получение необходимых условий существования траектории того или иного вида.

Предположим, что число коррекций фиксировано и последовательности  $\{u_j, t_j, j = \overline{k, N}\}$ , где  $k$  – момент начала участка торможения, заданы с точностью до целочисленных параметров. Попытаемся получить условия, которым должны удовлетворять координаты  $(y_j, v_j)$  и

управление, чтобы при ступенчатом торможении достигался минимум времени приведения.

Обратимся к методу динамического программирования [1,17]. Введем в рассмотрение функцию будущих потерь, значение которой по определению есть минимальное время приведения из текущего состояния в конечное. При этом движение описывается уравнениями (3.25), (3.26), осредненными по мультипликативной ошибке управления, т.е.

$$T_j(y_j, v_j) = \min_{t_j, \dots, t_N, u_j, \dots, u_N} \sum_{k=j}^N (t_k + \rho_k |u_k|). \quad (3.45)$$

Рассмотрим последний шаг  $j = N$ . Исходя из требования  $y_{N+1} = v_{N+1} = 0$ , имеем

$$\begin{cases} t_N = -\frac{y_N}{v_N} - \rho_N \frac{|v_N|}{2}, \\ u_N = -v_N, \end{cases} \quad (3.46)$$

тогда из (3.45) следует

$$T_N(y_N, v_N) = -\frac{y_N}{v_N} + \rho_N \frac{|v_N|}{2}$$

при

$$t_N^u \leq -\frac{y_N}{v_N} - \rho_N \frac{|v_N|}{2} \leq t_N^e, \quad \rho_N |v_N| \leq \tau_N^e, \quad y_N v_N < 0. \quad (3.47)$$

Неравенства (3.47) определяют область «начальных» условий последней коррекции. В силу единственности решения (3.46), обеспечивающего выполнение терминальных требований, функция будущих потерь однозначно определена в области (3.47) и зависит только от  $y_N$  и  $v_N$ .

Найдем условия минимума функции будущих потерь по скорости дрейфа, считая угловое отклонение фиксированным  $y = y_N$ .

Рассмотрим случай  $v = v_N > 0$ . Так как нас интересует условие минимума длительности коррекции, ограничение сверху на пассивный

участок в (3.47) не актуально и его можно отбросить. Составим функцию Лагранжа

$$F^+(y, v, \lambda) = T^+(y, v) + \lambda g^+(y, v),$$

где

$$T^+(y, v) = -\frac{y_N}{v_N} + \rho_N \frac{v_N}{2}, \quad g^+(y, v) = y_N + v_N t_N'' + \rho_N \frac{v_N^2}{2} \leq 0.$$

Обозначим

$$F_v^{+'}(y, v, \lambda) = \frac{\partial F^+(y, v, \lambda)}{\partial v}, \quad F_\lambda^{+'}(y, v, \lambda) = \frac{\partial F^+(y, v, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

Согласно теореме Куна–Таккера, необходимые условия оптимальности принимают вид

$$F_v^{+'}(y, v, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad v_N^* > 0,$$

$$F_\lambda^{+'}(y, v, \lambda) < 0 \quad \text{при} \quad \lambda^* = 0,$$

$$F_\lambda^{+'}(y, v, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda^* > 0.$$

Пусть  $\lambda^* = 0$  (т.е.  $g^+(y, v) \leq 0$ ). Тогда  $F_v^{+'}(y, v, \lambda) = y_N / v_N^2 + \rho_N / 2 = 0$ , откуда

$$v_N^* = \sqrt{-\frac{2y_N}{\rho_N}}.$$

Подкоренное выражение здесь положительно, ибо знаки скорости дрейфа и углового отклонения противоположны. Подставляя  $v_N^*$  в выражение производной функции Лагранжа  $\partial F^+(y, v, \lambda) / \partial \lambda$ , находим

$$F_\lambda^{+'}(y, v, \lambda) = t_N'' \sqrt{-\frac{2y_N}{\rho_N}} > 0,$$

что противоречит необходимому условию  $F_\lambda^{+'}(y, v, \lambda) < 0$ . Пусть теперь  $\lambda^* > 0$ . Тогда  $F_\lambda^{+'}(y, v, \lambda) = 0$ , откуда

$$y_N + v_N t_N'' + \rho_N \frac{v_N^2}{2} = 0. \tag{3.48}$$

Уравнение (3.48) имеет единственный положительный корень



$$v_N^* = \frac{-t_N^h + \sqrt{(t_N^h)^2 - 2\rho_N y_N}}{\rho_N}.$$

Последнее выражение определяет кривую на фазовой плоскости  $(y, v)$ , на которой достигается минимум времени движения в начало координат при проведении последней (или только одной) коррекции. Функция будущих потерь при этом равна

$$T_N^+(y_N, v_N) = t_N^h + \rho_N v_N.$$

Аналогичные рассуждения для случая  $v_N < 0$  приводят к следующему выражению функции будущих потерь:

$$T_N^-(y_N, v_N) = t_N^h - \rho_N v_N.$$

Объединяя полученные результаты, находим

$$T_N(y_N, v_N) = t_N^h + \rho_N |v_N|$$

при условии

$$y_N + v_N t_N^h + \rho_N \frac{v_N |v_N|}{2} = 0. \quad (3.49)$$

Иными словами, минимум времени достигается при минимально возможной длительности пассивного участка. Поэтому ограничение сверху действительно можно не учитывать. Если на последнем шаге используется один из алгоритмов управления эксцентриситетом, то целочисленный параметр, определяющий момент включения ДУ, должен выбираться так, чтобы длительность пассивного участка была минимальной с учетом технического ограничения снизу. Далее мы распространим этот результат на многошаговую коррекцию.

Рассмотрим предпоследний шаг  $j=N-1$ . Согласно методу динамического программирования

$$T_{N-1}(y_{N-1}, v_{N-1}) = \min_{u_{N-1}, t_{N-1} \geq t_{N-1}^h} \left\{ t_{N-1} + \rho_{N-1} |u_{N-1}| + [T_N(y_N, v_N) / y_{N-1}, v_{N-1}] \right\}. \quad (3.50)$$

Здесь при минимизации в (3.50) необходимо учесть условие (3.49), которое с учетом (3.46) принимает вид

$$y_{N-1} + t_{N-1}v_{N-1} + \rho_{N-1}|u_{N-1}|(v_{N-1} + 0.5u_{N-1}) + (v_{N-1} + u_{N-1})t_{N-1}'' + 0.5\rho_N(v_{N-1} + u_{N-1})|v_{N-1} + u_{N-1}| = 0.$$

Пусть  $v_{N-1} > 0$ ,  $v_{N-1} + u_{N-1} > 0$ ,  $u_{N-1} < 0$ , что соответствует двукратному торможению. Тогда

$$y_{N-1} + t_{N-1}v_{N-1} + t_N''(v_{N-1} + u_{N-1}) + 0.5u_{N-1}^2\Delta\rho + u_{N-1}v_{N-1}\Delta\rho + \frac{v_{N-1}^2}{2}\Delta\rho = 0, \quad (3.51)$$

где  $\Delta\rho = \rho_N - \rho_{N-1}$ . Если на всех коррекциях ускорение от тяги двигателя одно и то же, то  $\Delta\rho = 0$ . Выражение (3.51) и условие оптимальности (3.50) упрощаются:

$$y_{N-1} + t_{N-1}v_{N-1} + t_N''(v_{N-1} + u_{N-1}) + 0.5\rho v_{N-1}^2 = 0, \quad (3.52)$$

$$T_{N-1}^+ = \min_{t_{N-1} \geq t_{N-1}'', u_{N-1}} (t_{N-1} + t_N'' + \rho v_{N-1}). \quad (3.53)$$

Так как правая часть (3.53) не зависит от управления  $u_{N-1}$ , то минимум времени достигается, если  $t_{N-1} = t_{N-1}''$ , но при условии, что точка  $(y_{N-1}, v_{N-1})$  принадлежит многообразию

$$y_{N-1} + t_{N-1}''v_{N-1} + \rho|u_{N-1}|\left(v_{N-1} + \frac{|u_{N-1}|}{2}\right) = 0.$$

Подстановка найденного решения в (3.52) с учетом связи  $v_N = v_{N-1} + u_{N-1}$ , дает

$$y_{N-1} + s_{N-1}v_{N-1} + \rho\frac{v_{N-1}^2}{2} = 0, \quad (3.54)$$

$$\text{где } s_{N-1} = t_{N-1}'' + t_N''v_N / v_{N-1}.$$

Функция будущих потерь принимает вид

$$T_{N-1}^+ = t_{N-1}'' + t_N'' + \rho v_{N-1}.$$

Нетрудно видеть, что при двукратном торможении длительность коррекции определяется только исходной скоростью дрейфа при условии, что она удовлетворяет (3.54). По индукции находим функцию будущих потерь при произвольном количестве коррекций торможения

$$T_j^+(y_j, v_j) = \rho v_j + \sum_{j=k}^N t_j^H \quad (3.55)$$

при условии, что точка  $(y_j, v_j)$  удовлетворяют уравнению

$$y_j + s_j v_j + 0.5 \rho v_j^2 = 0, \quad (3.56)$$

где

$$s_j = t_j^H + s_{j+1} v_{j+1} / v_j, \quad s_{N+1} = 0. \quad (3.57)$$

Предположим, что в момент  $j=k$  начальные условия  $(y_k, v_k)$  не удовлетворяют уравнению (3.56). В этом случае следует провести дополнительную коррекцию с целью попадания на это множество либо скорректировать длительность пассивного участка так, чтобы правая часть (3.56) обращалась в нуль. В этом случае

$$t_k = -(y_k + s_{k+1} v_{k+1}) / v_k - 0.5 \rho v_k \quad (3.58)$$

с учетом ограничения  $t_k \geq t_k^H$ .

Соотношение (3.58) гарантирует, что точка  $(y_k, v_k)$  принадлежит области торможения. Таким образом, функция

$$T_j^+(y, v) = t_j + \rho v_j + \sum_{j=k}^N t_j^H \quad (3.59)$$

имеет минимум на нижней границе длительности пассивного участка  $t_k$ . В силу сделанных выше предположений

$$-\frac{y_k}{v_k} > 0, \quad s_{k+1} \frac{v_{k+1}}{v_k} > 0.$$

Поэтому уменьшить  $t_k$  можно путем максимизации функции

$$R_k = s_{k+1} \frac{v_{k+1}}{v_k}. \quad (3.60)$$

С учетом (3.57) получим

$$R_k = \sum_{j=k}^N t_j^H \frac{v_j}{v_k}.$$

Отсюда максимизация (3.60) при заданной скорости дрейфа  $v_k$  эквивалентна максимизации функции  $\tilde{R}_k = t_1^H v_1 + \dots + t_N^H v_N$ . Так как все величины

$t_j^H$ ,  $v_j$  положительны, максимум этой функции достигается при минимально возможных длительностях пассивных участков и при максимально возможных скоростях дрейфа  $v_j$ . Этот вывод позволяет сформулировать правило выбора целочисленных параметров алгоритмов управления. Так, на участке ступенчатого торможения целочисленные параметры  $n_k$  и  $m_k$  должны обеспечить минимально возможное изменение скорости дрейфа, а длительность пассивного участка должна быть близка к значению, определенному по формуле (3.58).

Объединяя полученные результаты, получим следующее выражение для функции будущих потерь:

$$T_k(y_k, v_k) = t_k + \rho v_k + \sum_{j=k}^N t_j^H,$$

при граничном условии минимума времени

$$y_j + s_j v_j + \rho |v_j| \frac{v_j}{2} = 0,$$

где

$$s_j = t_j^H + s_{j+1} \left| \frac{v_{j+1}}{v_j} \right|, \quad s_{N+1} = 0. \quad (3.61)$$

Попадание на границу области наилучшего быстродействия в режиме торможения осуществляется при

$$t_k = -\frac{y_k - s_{k+1} v_{k+1}}{v_k} - \rho \frac{|v_k|}{2}, \quad t_k \geq t_k^H.$$

Отношение скоростей дрейфа в (3.61) можно отнести к параметрам, программируемым с учетом мультипликативной ошибки управления путем минимизации дисперсии конечной скорости дрейфа.

Обратим внимание на то, что в обобщенном критерии данной задачи присутствует множитель Лагранжа. Для его отыскания необходимо применение численной процедуры, что существенно усложняет рабочий алгоритм. Численные процедуры поиска неизвестных в рабочем алгоритме

автономного управления нежелательны. Попытаемся заменить неизвестный множитель Лагранжа адекватной приближенной величиной. Кроме того, желательно получить условия, при которых терминальные требования выполняются автоматически.

Обратимся к упрощенной модели движения, которую мы использовали выше для анализа фазовых траекторий приведения. Запишем уравнения (3.20), (3.21) в матричной форме

$$Z_{k+1} = A_k Z_k + B_k u_k (1 + \mu_k) \quad (3.62)$$

$$\text{где } Z_k^T = \begin{pmatrix} y_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & t_k + \tau_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} \delta_k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_k = \frac{\tau_k}{2}. \quad (3.63)$$

Рассмотрим последнюю коррекцию, полагая эксцентриситет орбиты близким к нулю. Найдем корреляционную матрицу терминального вектора модели (3.62). Вводя обозначение

$$\hat{Z}_{k+1} = M[Z_{k+1} / Z_k, u_k] = A_k Z_k + B_k u_k,$$

находим корреляционную матрицу вектора  $Z_{N+1}$  :

$$P_{N+1} = M[(Z_{N+1} - \hat{Z}_{N+1})(Z_{N+1} - \hat{Z}_{N+1})^T / Z_N, u_N] = \sigma_\mu^2 u_N^2 B_N B_N^T \quad (3.64)$$

С учетом обозначений (3.55) получим выражения для элементов матрицы  $P_{N+1}$

$$P_{11} = \sigma_\mu^2 u_N^2 \frac{\tau_N^2}{4}, \quad P_{12} = P_{21} = \sigma_\mu^2 u_N^2 \frac{\tau_N}{2}, \quad P_{22} = \sigma_\mu^2 u_N^2. \quad (3.65)$$

Учитывая связь управления  $u_k$  с длительностью активного участка (4.9), находим среднеквадратические отклонения терминальной скорости дрейфа и углового отклонения

$$\sigma_{y,N+1} = \sqrt{P_{11}} = 0.5 \sigma_\mu \rho_N u_N^2, \quad \sigma_{v,N+1} = \sqrt{P_{22}} = \sigma_\mu |u_N|. \quad (3.66)$$

Отсюда в частности следует

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_v} = \frac{\rho_N |u_N|}{2}. \quad (3.67)$$

Соотношения (3.66) позволяют непосредственно оценить терминальную точность последней коррекции при  $e_{N+1} \approx 0$  если управление последней коррекцией осуществляется согласно тривиальному алгоритму

$$\begin{cases} t_N = -\frac{y_N}{v_N} - \rho_N \frac{|v_N|}{2} \\ u_N = -v_N \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

Следовательно, если СКО терминальной скорости дрейфа ограничено сверху значением  $\sigma_v^*$ , то величина последнего «импульса» должна быть ограничена сверху

$$|u_N| \leq \frac{\sigma_v^*}{\sigma_{\mu_N}}. \quad (3.68)$$

Кроме того, из (3.67), (3.68) следует связь между СКО углового отклонения и скорости дрейфа

$$\sigma_y^* \leq \frac{\rho_N \sigma_v^2}{2\sigma_{\mu_N}}. \quad (3.69)$$

Иными словами, при ограничении на СКО углового отклонения сверху последнее приращение скорости дрейфа должно удовлетворять неравенству

$$|u_N| \leq \sqrt{\frac{2\sigma_y^*}{\rho_N \sigma_{\mu_N}}}. \quad (3.70)$$

Нетрудно видеть, что если требуемые уровни СКО углового отклонения и скорости дрейфа заданы произвольно, то одно из ограничений (3.68) и (3.70) поглощается другим. Иными словами, заданная терминальная точность при близком к нулю эксцентриситете достигается автоматически если величина последнего управляющего воздействия, определяемого алгоритмом (A-1) удовлетворяет ограничению

$$|u_N| \leq u_N^B \quad (3.71)$$

$$\text{где } u_N^B = \min \left\{ \frac{\sigma_v^*}{\sigma_{\mu_N}}, \sqrt{\frac{2\sigma_y^*}{\rho_N \sigma_{\mu_N}}} \right\}. \quad (3.72)$$

Таким образом, СКО терминальной точности по угловому отклонению и скорости дрейфа связаны. Их нельзя задавать произвольно. Исключить неоднозначность можно приравняв правые части (3.68) и (3.70). В результате получим связь между СКО углового отклонения и скорости дрейфа

$$\sigma_v^* = \sqrt{\frac{2\sigma_y^* \sigma_{\mu_N}}{\rho_N}}. \quad (3.73)$$

Последнее выражение можно использовать либо для диагностики исходных данных, либо для сокращения номенклатуры терминальных требований. Действительно, предъявляя требования к СКО точности приведения, сопутствующая достигаемая точность по периоду обращения (скорости дрейфа) получается автоматически по формуле (3.73). И наоборот, если пользователь желает ограничить терминальную скорость дрейфа, то достигаемая при этом точность приведения оценивается по формуле (3.70).

Таким образом, ограничение последнего управляющего воздействия  $u_N$  позволяет говорить о возможности исключения численного поиска множителя Лагранжа  $\alpha^0$ .

Обратимся к результатам анализа возможных способов управления эксцентриситетом. Предположим что в результате проведения  $(N-1)$ -й коррекции эксцентриситет стал близок к нулю (этого можно ожидать при выборе моментов включения ДУ по условию минимизации эксцентриситета). Согласно (3.44) минимальная по множеству решений верхняя граница длительности активного участка равна

$$\tau_N^B = \frac{T_0}{\pi} \arcsin \frac{e_m}{\Delta e_m}. \quad (3.74)$$

Согласно (3.28) этой длительности активного участка соответствует предельно допустимое приращение скорости дрейфа

$$u_N^e = \frac{\rho_N}{\pi} \arcsin \frac{e_m}{\Delta e_m} \quad (3.75)$$

В итоге при корректно заданных требованиях к терминальной точности величину  $u_N$  следует ограничить значением

$$u_N^B = \min \left\{ \sqrt{\frac{2\sigma_y^*}{\rho_N \sigma_{\mu_N}}}, u_N^e \right\} \quad (3.76)$$

Отсюда следует что если величина последнего управляющего воздействия ограничена согласно (3.76), то заданная терминальная точность достигается автоматически.

Если  $\Delta\alpha_m$  – предельно допустимое угловое отклонение, то можно принять  $\sigma_y^* = \frac{\Delta\alpha_m}{3}$ . Соответствующее значение  $\sigma_v^*$  найдем по формуле (3.73).

Для учета ограничения на эксцентриситет имеем  $x_{3N+1}^2 + x_{4N+1}^2 \leq r_0^2 e_m^2$  что соответствует окружности радиуса  $r_0 e_m$ . Формально введем в рассмотрение величину  $\sigma_e^* = \frac{r_0 e_m}{3}$ . Таким образом, элементы матрицы терминальной составляющей критерия (3.9) следует вычислять по формулам

$$\beta_{11} = \sigma_y^2, \quad \beta_{22} = \sigma_v^2, \quad \beta_{33} = \beta_{44} = \sigma_e^2. \quad (3.77)$$

Для учета искусственно введенных ограничений на величины управляющих воздействий введем в критерий дополнительное слагаемое

$$J^2 = \sum_{k=1}^N w_k u_k^2 \quad (3.78)$$

Пусть величина  $k$ -го воздействия ограничена по модулю  $|u_k| \leq u_k^*$ . В рамках стохастического подхода положим  $u_k^* = 3\sigma_{uk}$ . Иными словами

$$\sigma_{uk} = \frac{u_k^*}{3} \quad (3.79)$$

Весовые коэффициенты  $w_k$  в (3.78) можно формировать по правилу

$$w_k = \begin{cases} \sigma_{uk}^2, & \sigma_{uk} \neq 0 \\ 0, & \sigma_{uk} = 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

Здесь случай  $\sigma_{uk} = 0$  соответствует отсутствию ограничения на длительность  $k$ -го активного участка. Рабочий критерий оптимальности блока синтеза стохастического управления принимает вид

$$\bar{J} = M[\alpha^0 J^0 + J^1 + J^2], \quad (3.81)$$



где весовой множитель  $\alpha^0$  примем равным  $\alpha^0 = \frac{1}{\sigma_{u\Sigma}^2}$ , где  $\sigma_{u\Sigma} = \frac{u_{\Sigma}^*}{3}$ .

Таким образом, рабочий алгоритм синтеза субоптимального управления оптимизирован по числу параметров, подлежащих поиску численными методами.

### 3.4 Алгоритм управления на этапе удержания

#### 3.4.1 Управление при удержании долготы

Этап удержания КА в рабочей позиции ГСО занимает практически весь его жизненный цикл. Он начинается, когда вектор состояния КА уже принадлежит заданной области пространства. Управление сводится к периодическому проведению коррекций периода обращения. Учитывая значительную длительность процесса (10 лет и более), можно предположить существование установившегося режима, когда коэффициенты обратной связи закона управления не зависят от времени [6]. Формально это означает, что их следует вычислить по рекуррентным соотношениям один раз, полагая  $N=1$ . Доказательство существования установившегося режима приведено в работе [6].

Интервал между коррекциями  $\Delta t$  должен обеспечивать выполнение условия

$$|y_{k+1}| \leq y_m$$

Закон управления средней долготой принимает следующий вид [19]:

$$u_k = -L_y y_k - L_v v_k - d_k, \quad (3.82)$$

где

$$L_y = \frac{\Delta t_k + \chi_2}{\gamma_k}, \quad L_v = (1 + \sigma_k^2)^{-1}, \quad d_k = \frac{\Delta t (b_R + b_S \Delta t) + \chi_2 (3b_S \Delta t + b_R) + 2b_S \Delta t \chi_1}{\gamma_k},$$

$$\gamma_k = (1 + \sigma_k^2) (\Delta t^2 + 2\chi_2 \Delta t + \chi_1), \quad b_R = -2\Delta g_R / V_0, \quad b_S = -3\pi \Delta g_S / V_0,$$

$\Delta g_R$  и  $\Delta g_S$  – проекции возмущения от нецентральности гравитационного поля Земли, которые принимаются постоянными. Их вычисляют для номинальной долготы рабочей позиции на ГСО по моделям,

приведенным в [4]. Отметим, что коэффициенты обратной связи закона (3.82) постоянны для всех коррекций удержания и поэтому индекс « $k$ » опущен. В смещении  $d_k$  присутствует дисперсия  $\sigma_k^2$  текущей ошибки тяги двигателя, периодически оцениваемая автономной навигационной системой.

Алгоритм содержит три параметра:  $\Delta t$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ , которые подлежат определению путем оценки их влияния на точность управления. Отметим, что коэффициенты  $\chi_1$  и  $\chi_2$  связаны с элементами матрицы  $\mathbf{K}^1$  в (3.9) следующим образом:  $\chi_1 = k_{2,2} / k_{1,1}$ ,  $\chi_2 = k_{1,2} / k_{1,1}$ . Если положить  $k_{1,2} = 0$ , то выражение (3.9) соответствует аппроксимации допустимой области в плоскости «долгота-дрейф» эллипсом с осями, совпадающими с осями абсцисс и ординат системы с центром в точке  $y_{N+1} = v_{N+1} = 0$ . Элемент  $k_{1,1}$  суть весовой коэффициент ошибки по долготе, а элемент  $k_{2,2}$  - весовой коэффициент скорости дрейфа. Если при удержании снять ограничение на скорость дрейфа, положив  $k_{2,2} = 0$ , то в законе управления останется только один настраиваемый параметр  $\Delta t$ :

$$u_k = -(1 + \sigma_k^2)^{-1} \left[ \frac{y_k}{\Delta t} + v_k + (b_R + b_S \Delta t) \right].$$

### 3.4.2 Алгоритм коррекции наклонения

Для формирования алгоритма обратимся к уравнению его управляемой эволюции под действием малого бинормального ускорения  $f_N$  [3]:

$$i_{k+1} = i_k + \frac{2f_N}{V_0 \omega_0} \cos\left(\alpha_k + \frac{\omega_0 \tau_k}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_0 \tau_k}{2}\right). \quad (3.83)$$

Пусть ускорение  $f_N$  складывается из управляющего и пренебрежимо малого неслучайного возмущающего, а ошибка управляющего ускорения есть аддитивная гауссова центрированная величина. Тогда модель (3.83) описывает эволюцию математического ожидания наклонения. Поэтому задачу разработки алгоритма коррекции наклонения формально можно рассматривать как детерминированную.

Нетрудно видеть, что наклонение возрастает при включении двигателя, когда  $\alpha_k = -0.5\omega_0\tau_k$ , а выключается в точке  $\alpha_k = 0.5\omega_0\tau_k$ . Иными словами, границы активного участка должны быть симметричны относительно линии узлов со стороны восходящего узла. Положительное ускорение, действующее на нисходящем витке, уменьшает наклонение. Следовательно, чтобы обеспечить монотонность изменения наклонения при непрерывно работающем двигателе, необходимо изменять знак ускорения в точках  $\alpha = 0.5\pi$ ,  $\alpha = 1.5\pi$ .

Пусть требуется изменить наклонение на величину  $\Delta i_k$  при оптимальных моментах включения – выключения двигателя. Из (3.83) следует

$$\tau_k = \frac{2}{\omega_0} \arcsin \frac{\Delta i_k V_0 \omega_0}{2 f_N}.$$

Это выражение корректно, если аргумент функции  $\arcsin$  по модулю не больше единицы. В противном случае длительность активного участка должна быть кратна половине номинального периода обращения.

Таким образом, рабочую модель коррекции наклонения можно представить в общем виде

$$i_{k+1} = i_k + \frac{2|f_N| \operatorname{sign}(i_k - i_n) F(\alpha)}{V_0 \omega_0} \sin\left(\frac{\omega_0 \tau_k}{2}\right),$$

где  $F(\alpha)$ -функция переключения:

$$F(\alpha) = \begin{cases} 1 & -0.5\pi \leq \alpha \leq 0.5\pi, \\ -1 & 0.5\pi \leq \alpha \leq 1.5\pi. \end{cases}$$

Максимальное по модулю изменение наклонения за половину периода обращения равно  $\Delta i_m = 2|f_N|/(V_0 \omega_0)$ . Длительность пассивного участка, предшествующего активному участку известной длительности, найдем из условия  $\cos(\alpha_k + \omega_0 \tau_k / 2) = \pm 1$ , где выбор знака определен характером ближайшего узла орбиты. Для восходящего узла получим

$$t_{k,a} = \frac{1}{\omega_0} \left( 2\pi n_k - \alpha_k - \frac{\omega_0 \tau_k}{2} \right).$$

Решение для нисходящего узла имеет вид

$$t_{k,d} = \frac{1}{\omega_0} \left( 2\pi(n_k + 1) - \alpha_k - \frac{\omega_0 \tau_k}{2} \right),$$

где целое число  $n_k$  необходимо найти из условия  $t_k \geq t_k''$ .

Алгоритм формирования циклограммы коррекции наклонения состоит из следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Получить от системы навигации оценку начального наклонения  $i_l$ , требуемое наклонение  $i_n$ , номинальное ускорение  $f_N$  и ограничения  $t_k''$ .  
Выбрать режим коррекции наклонения (в восходящем узле, в нисходящем узле или в обоих узлах).

Шаг 2. Вычислить потребное количество коррекций  $N_i$ :

$$N_i = \text{trunc} \left( \frac{|i_l - i_n|}{\Delta i_m} \right) + 1.$$

Шаг 3. Для всех  $k$  от 1 до  $N_i$  вычислить длительности активных участков:

$$\tau_k = \begin{cases} 0.5T_0 & , \quad k < N_i , \\ \frac{2}{\omega_0} \arcsin \left| \frac{i_k - i_n}{f_N} \right| \frac{V_0 \omega_0}{2} & , \quad k = N_i . \end{cases}$$

Шаг 4. Вычислить характеристическую скорость и длительность коррекции наклонения

$$\Delta V_\Sigma = \sum_{k=1}^{N_i} \tau_k |f_{N,k}|, \quad t_\Sigma = \sum_{k=1}^{N_i} (\tau_k + t_k) .$$

## **Глава 4. Имитационное моделирование управления движением центра масс КА на этапах довыведения на ГСО, приведения и удержания**

В силу наличия в данной задаче разнородных по своей природе возмущений, а также существенной нелинейности используемых математических моделей движения и навигационных измерений, предварительный анализ характеристик точности используемых алгоритмов управления может быть проведен только путем имитационного моделирования замкнутого контура интегрированной системы навигации и управления движением центра масс КА. Этот контур содержит блок управления и блок навигации, который формирует оценки расширенного вектора состояния. По результатам моделирования могут быть построены гистограммы, характеризующие статистические характеристики терминальной точности реализации рассматриваемых этапов жизненного цикла КА.

Имитационное моделирование рассматриваемой в работе сложной системы оказалось возможным только с помощью специально созданного инструмента: проблемно-ориентированного программного комплекса, включающего, как следует из сказанного выше, помимо разработанных в данном исследовании моделей и алгоритмов, также алгоритмы навигации и соответствующие модели движения центра масс и относительно центра масс, входящие в блок навигации.

Данная глава содержит описание созданного программного комплекса, а также результатов проведения с его помощью вычислительных экспериментов для предварительной оценки статистических характеристик точности обеспечиваемых разработанными алгоритмами автономного управления.

Вычислительные эксперименты включают статистическое и детерминированное моделирование этапов довыведения, перевода в орбитальную позицию и удержания КА в рабочей позиции на ГСО.

#### 4.1 Описание программного комплекса

Для моделирования управляемого возмущенного движения геостационарного КА на этапах довыведения, приведения в рабочую точку и удержания создан многофункциональный программный комплекс, предназначенный для отработки элементов прототипа автономной системы управления. Комплекс создан как инструмент отработки алгоритмов автономного управления и навигации в рамках решения рассмотренной в работе задачи. Программный комплекс имеет модульную архитектуру, схема которой показана на рис 4.1.

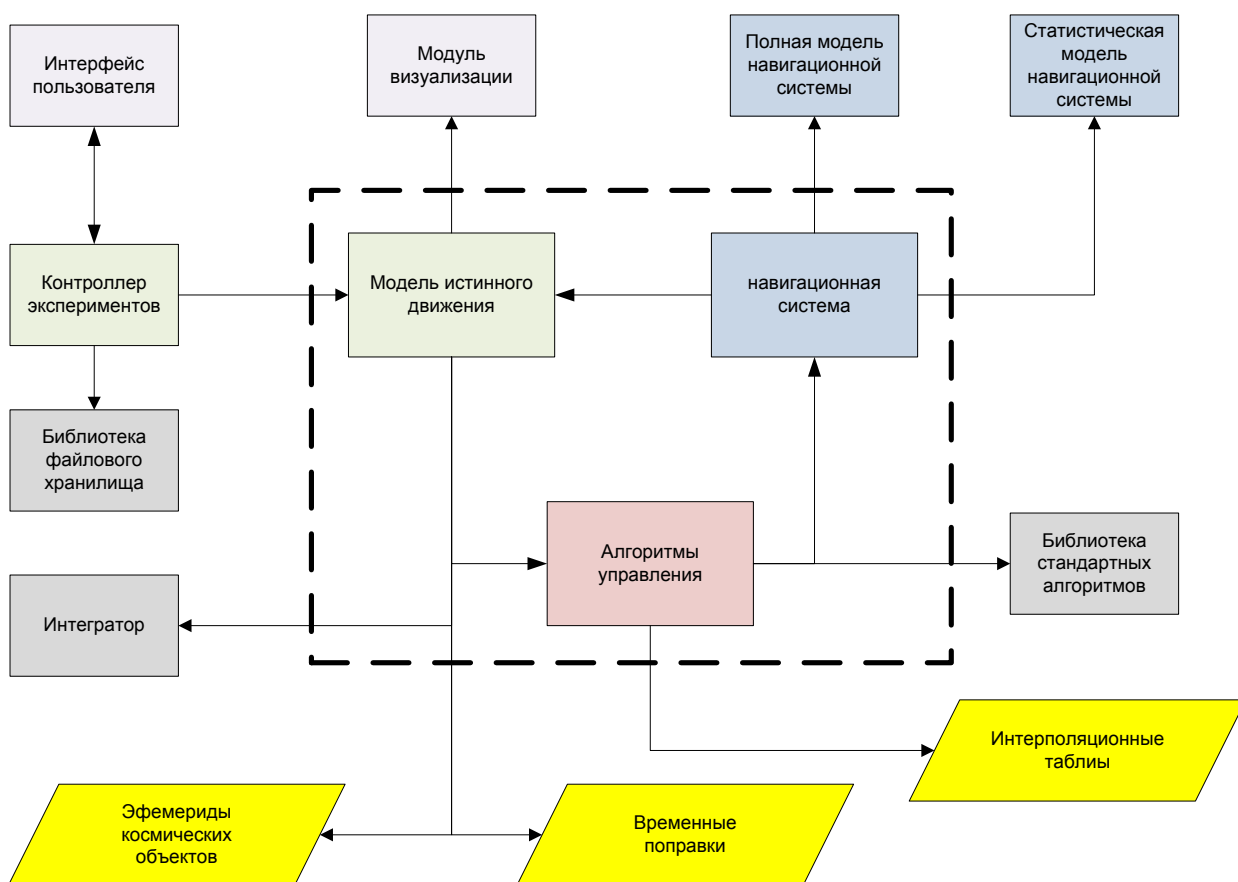


Рис. 4.1. Архитектура программного комплекса

В рамках принятой архитектуры комплекс позволяет исследовать различные версии блоков навигации и управления. Его текущая версия реализует принятый в работе алгоритм довыведения и разработанные с учетом требования автономности алгоритмы управления приведением и удержанием КА. Все алгоритмы управления работают по достаточным координатам, за вычисление которых отвечает автономная навигационная система.

Ядро комплекса, образованное модулем моделирования истинного движения, модулем моделирования навигационной системы и модулем управления движением центра масс, представляет собой модель замкнутой системы управления движением КА с обратной связью по данным навигационной системы.

Модули интерфейса пользователя и модули визуализации предназначены для взаимодействия с оператором и служат для установки параметров моделирования и отображения результатов.

Модули, отмеченные на рис. 4.1 параллелограммами, предназначены для чтения из внешних файлов эфемерид космических объектов, временных поправок и интерполяционных таблиц для этапа довыведения.

Служебные модули реализуют алгоритмы интегрирования систем дифференциальных уравнений и другие стандартные численные методы.

Модуль истинного движения позволяет моделировать движение КА с учетом детерминированных и случайных возмущающих воздействий, таких как

- несферичность гравитационного поля Земли;
- гравитация Луны и Солнца;
- давление солнечного света;
- ошибки тяги ЭРДУ;
- ошибки ориентации вектора тяги ЭРДУ;
- ошибки навигационной системы.

В модуле навигации предусмотрена возможность получения оценок вектора состояния КА либо по полной модели, либо в упрощенном режиме, когда оценка вектора состояния вычисляется с использованием его статистических характеристик.

Программный код комплекса разработан с использованием объектно-ориентированного подхода.

На рис. 4.2 показана иерархия классов систем координат.

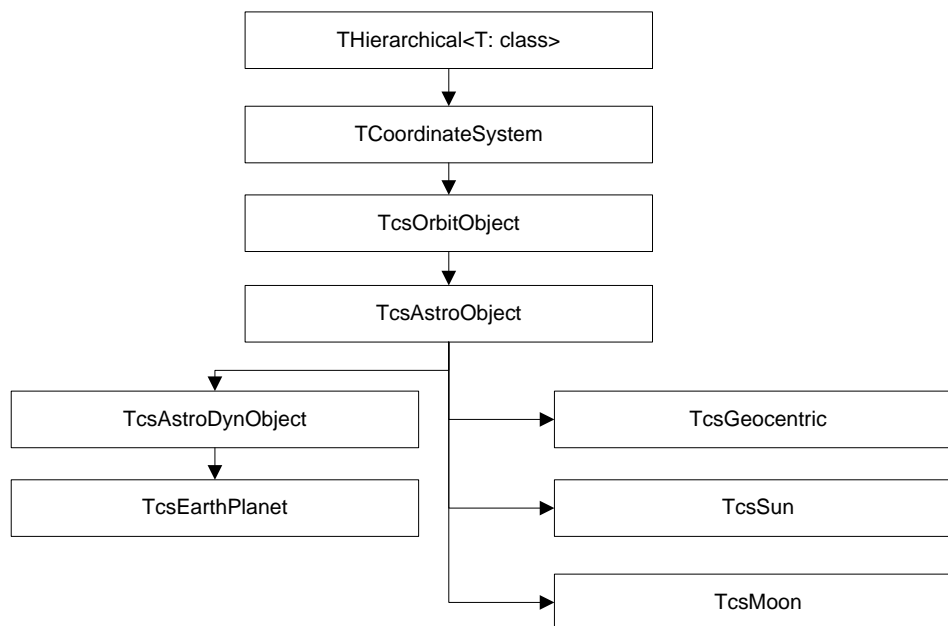


Рис. 4.2. Иерархия классов систем координат

Класс TCoordinateSystem содержит базовые механизмы определения иерархических систем координат и реализует все основные операции по пересчету координат и скоростей из любой исходной системы в другую. Его наследник TcsOrbitObject предназначен для орбитальных объектов и содержит механизмы работы с кеплеровскими элементами. Класс TcsAstroObject позволяет использовать внешние эфемериды для астрономических объектов для получения их высокоточных координат на любой момент времени. Система классов образует эффективный механизм работы с объектами, заданными в различных системах координат, вся математика пересчета координат реализуется автоматически. В рамках



разработки ПМО были использованы следующие системы координат (которые являются объектами описанных выше классов):

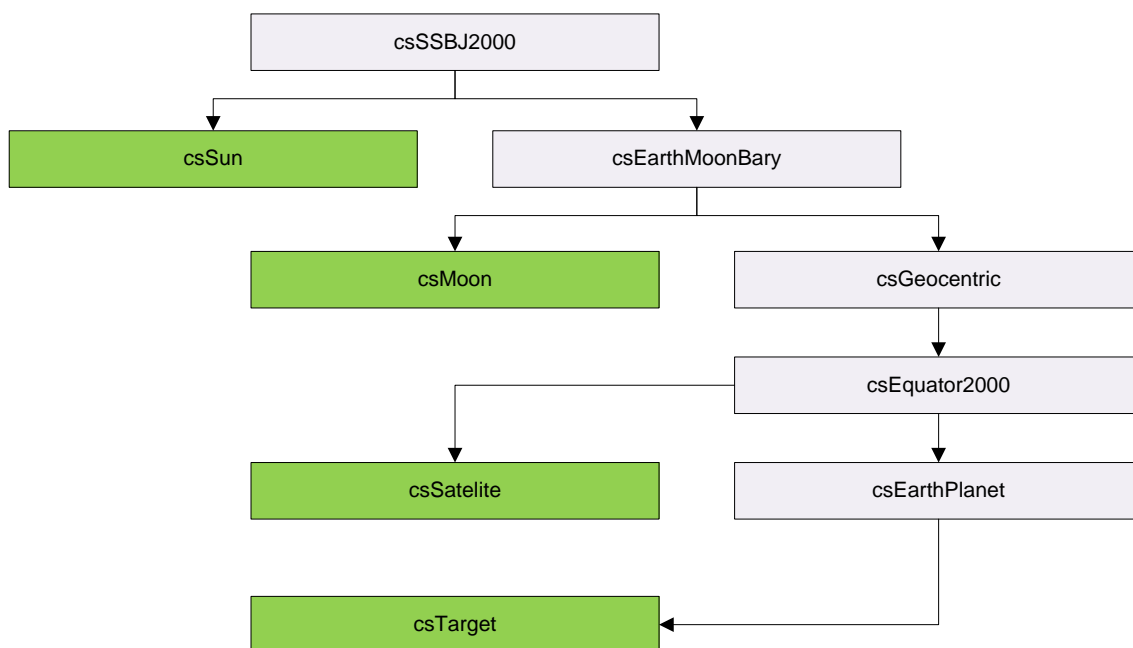


Рис. 4.3. Иерархия систем координат

На рис 4.3 показана иерархия систем координат, используемый в данной работе. Так, базовой является инерциальная система csSSBJ2000, начало которой находится в центре масс солнечной системы. В этой системе определяют координаты Солнца и барицентра системы Земля-Луна (csEarthMoonBary). Относительно барицентра задается положение Луны и центра масс Земли (csGeocentric).

Положение csEquator2000 совпадает с csGeocentric, а плоскость XOY лежит в плоскости среднего экватора на эпоху J2000.0, таким образом, csEquator2000 это АГЭСК, описанная в разделе 2.1. В этой системе координат мы интегрируем уравнения истинного движения спутника.

Иерархия классов, реализующих управление, представлена на Рис. 4.4. Класс TSateliteModel это модель движения спутника. Он инкапсулирует связанную со спутником систему координат и метод интегрирования нелинейной модели движения. TSateliteCtrl – класс базового управления, содержащий целевые параметры управления.

Конкретные реализации алгоритмов управления на рассматриваемых этапах жизненного цикла КА инкапсулированы в соответствующие классы - наследники базового класса управления.

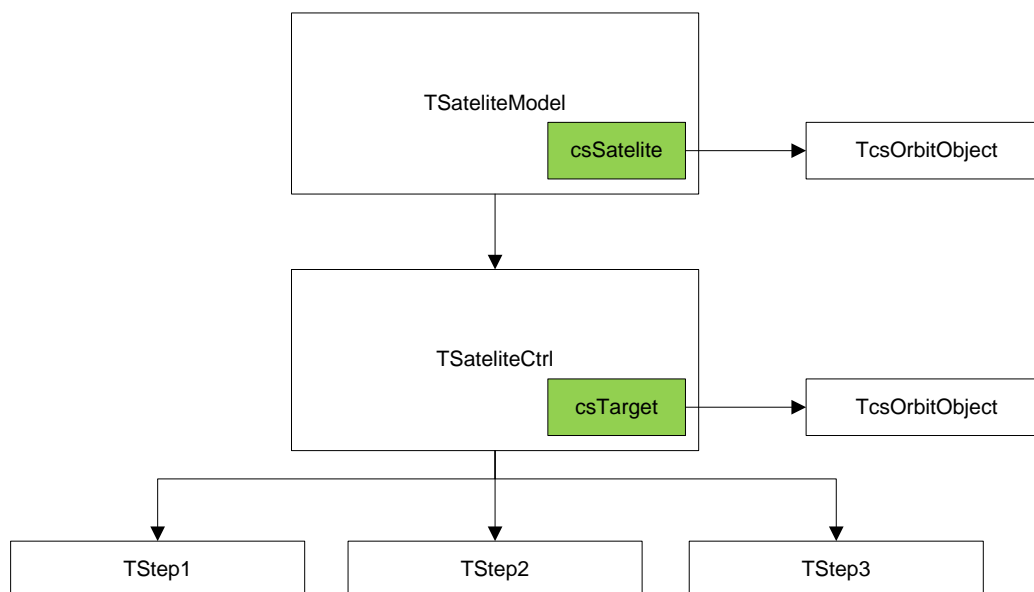


Рис. 4.4. Иерархия классов управления

Пользовательский интерфейс программного комплекса дает возможность задавать все необходимые параметры моделирования (рис. 4.5), проводить моделирование и сохранять полученные результаты в файлах.

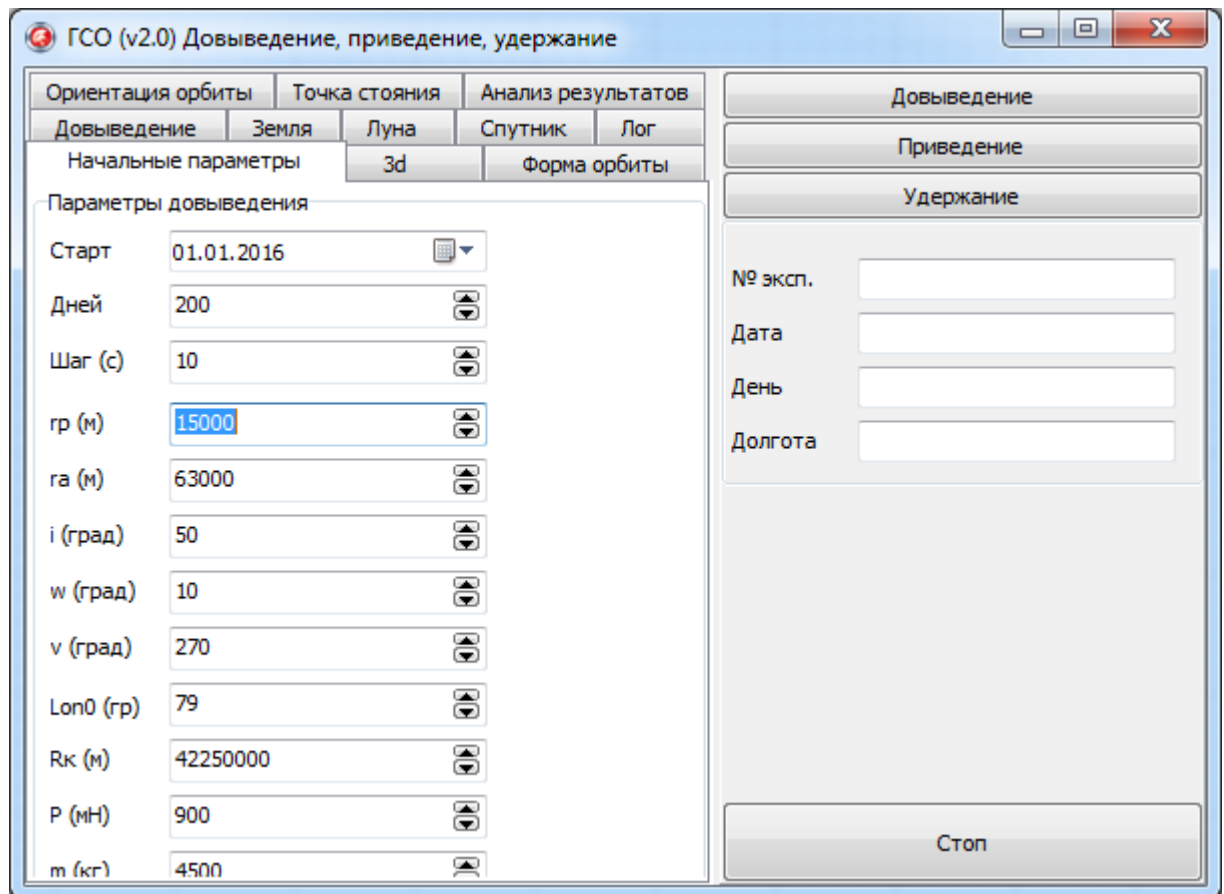


Рис. 4.5. Модули программного комплекса

Отличительной особенностью комплекса является его интерактивность, позволяющая визуально контролировать весь процесс управления в каждый момент времени (рис. 4.6, 4.7).

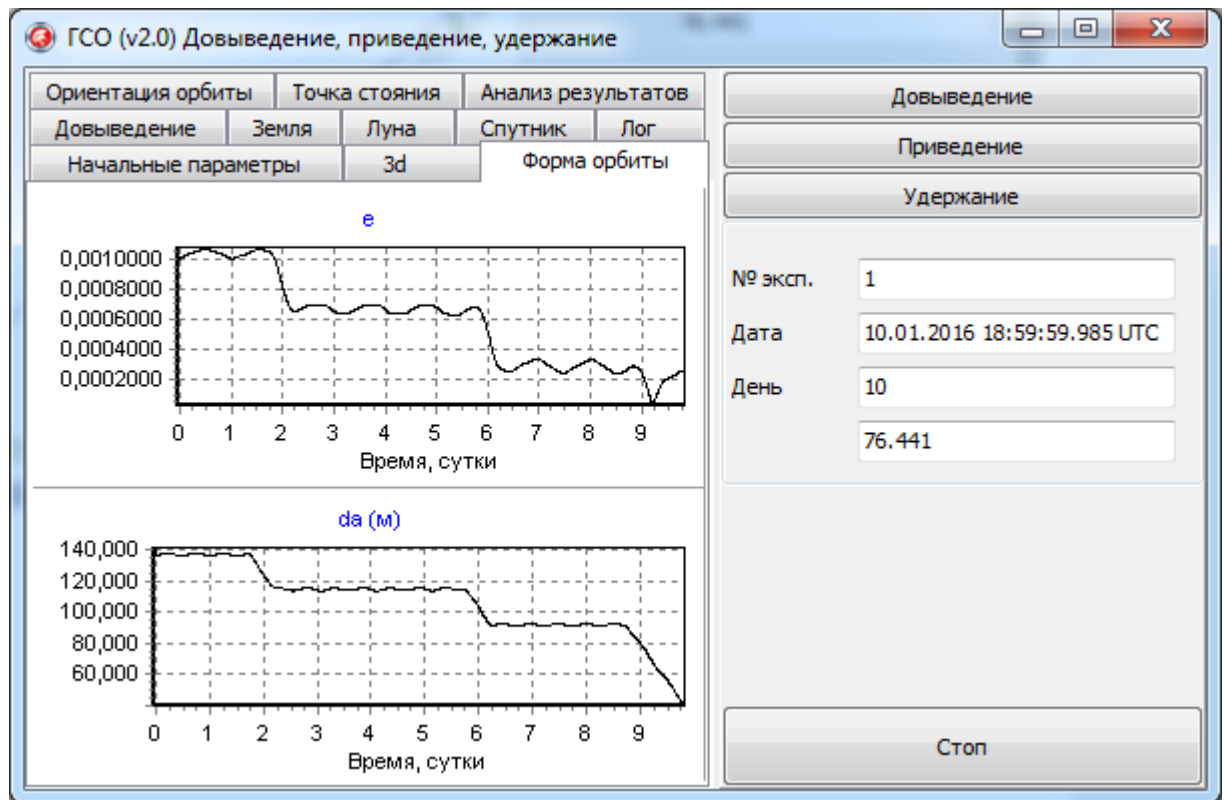


Рис. 4.6. Графики эволюции параметров орбиты

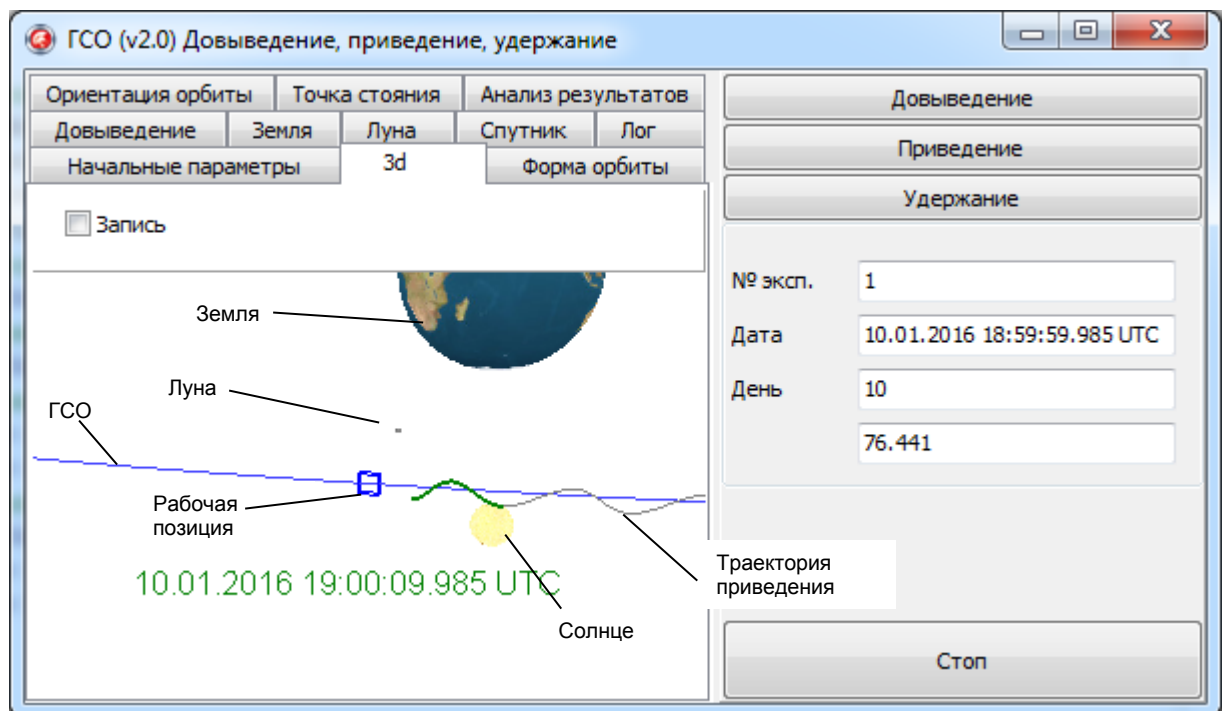


Рис. 4.7. Трехмерная визуализация

Текущее положение КА пользователь может визуально наблюдать с различных точек (Рис. 4.8), точка обзора задается пользователем при помощи мыши. Есть функция записи трехмерной траектории движения спутника в

процессе управления в видеофайл. Предусмотрена возможность отображения на экране траекторий других космических объектов для визуального контроля опасных сближений.

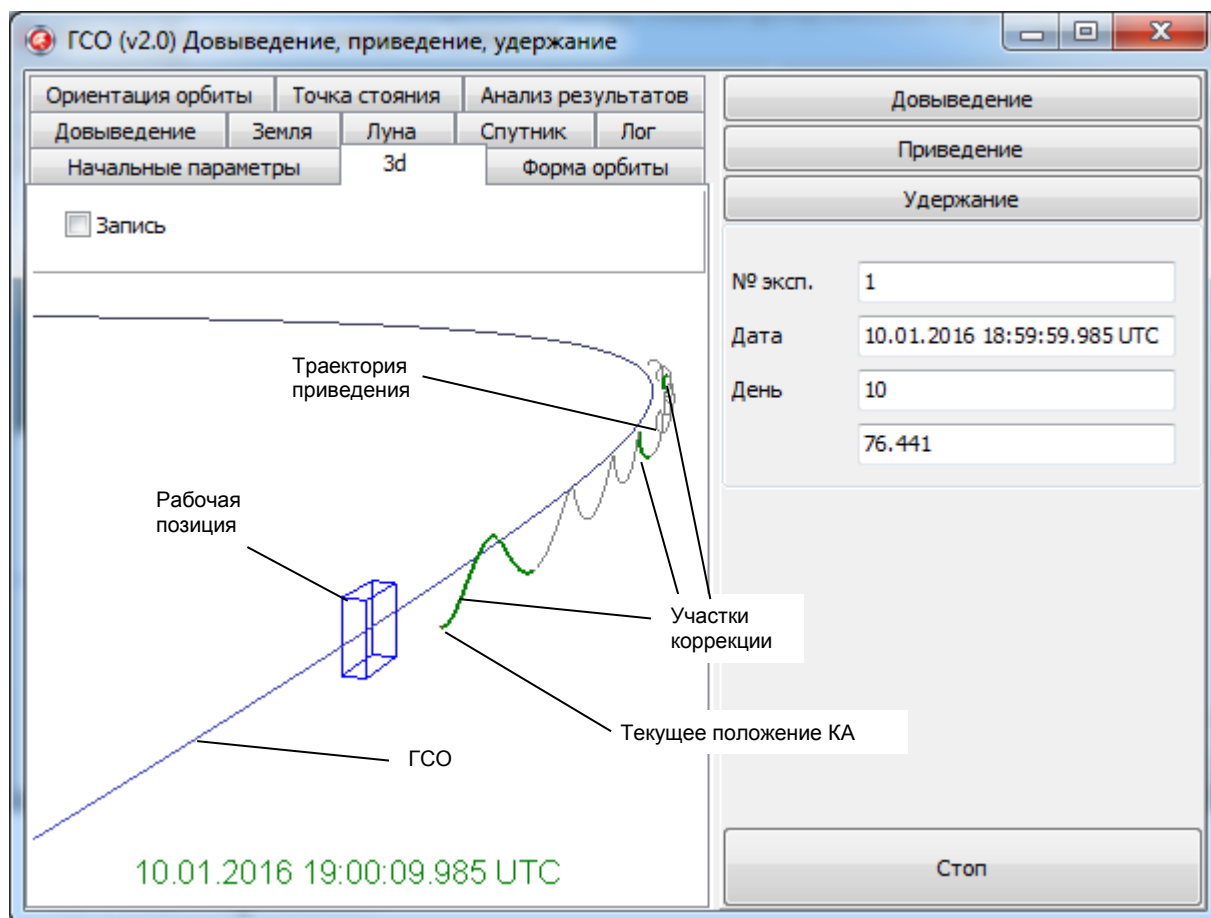


Рис. 4.8. Произвольная точка обзора

Как было сказано ранее, соответствие терминальной точности управления на рассматриваемых в данной работе этапах жизненного цикла КА на ГСО требованиям, проверяется путем имитационного моделирования замкнутой автономной системы управления движением центра масс КА. Моделирование проводится для каждого этапа в отдельности. В программном комплексе предусмотрена возможность проводить серии экспериментов с заданными статистическими свойствами с последующей оценкой результатов (рис. 4.9).

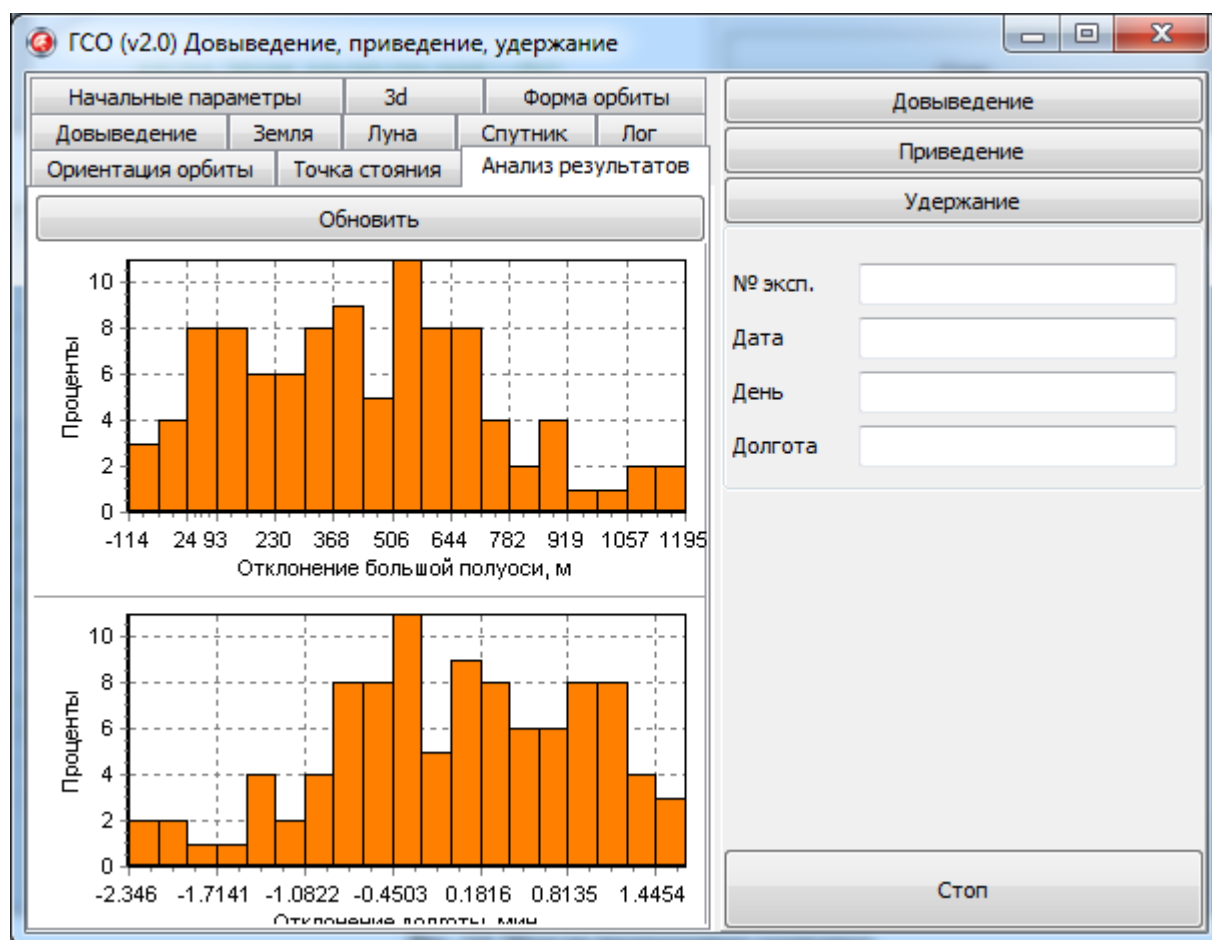


Рис. 4.9. Оценка отклонений терминальных значений под воздействием ошибок и возмущений

#### 4.2 Описание блока навигации

Блок навигации, входящий в состав замкнутого контура интегрированной навигационной системы, характеризуется составом используемых аппаратных средств, а также алгоритмами функционирования. Для более детального рассмотрения взаимодействия в рамках интегрированной системы блоков навигации и управления обратимся к функциональной схеме бортовой интегрированной системы навигации и управления движением КА на ГСО, приведенной на рис. 4.10.

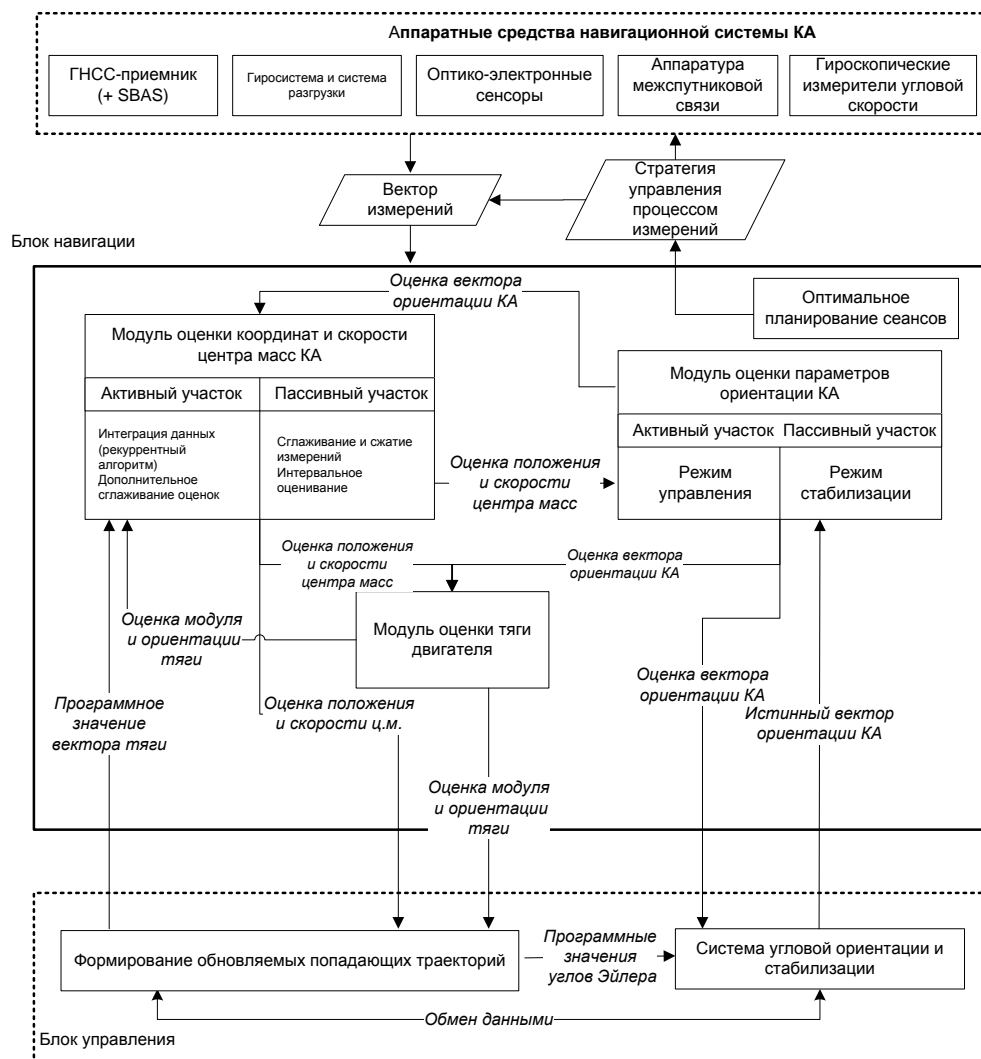


Рис. 4.10. Функциональная схема интегрированной системы навигации и управления

Эта функциональная схема отражает архитектуру интегрированной системы навигации и управления, а также основные процессы взаимодействия входящих в ее состав аппаратных средств и алгоритмов (модулей), необходимых для выполнения задач, возлагаемых на эту систему на этапах довыведения, перевода в рабочую позицию и удержания с требуемым качеством. Наиболее важными с точки зрения выполнения предъявляемых к ИС требований процессами на перечисленных этапах функционирования КА являются следующие:

- а) формирование опорной траектории движения на борту КА;
- б) решение навигационной задачи, т.е. оценка компонент вектора состояния КА, включая положение и скорость центра масс КА, углов

ориентации и их производных (угловых скоростей), а также компонент вектора тяги маршевого двигателя;

- в) формирование команд управления, а также управляющих сил и моментов для управления движением центра масс и угловым движением КА.

Заметим, что выделенные блоки на схеме на рис. 4.10 представляют собой либо программные компоненты системы, либо аппаратные средства. Стрелками на рисунке 1 обозначены направления передачи наборов данных. Перечень моделей аппаратных средств интегрированной системы, необходимых для решения задач навигации и управления движением центра масс и относительно центра масс КА включает:

- а) Четыре двигателя-маховика, трехстепенной гироскопический стабилизатор (рассматриваются два варианта);
- б) Три датчика угловых скоростей;
- в) Два звездных датчика;
- г) Два солнечных датчика;
- д) Один датчик инфракрасного излучения Земли;
- е) Шесть газовых реактивных двигателей;

Перечисленные выше аппаратные средства входят в состав системы ориентации и угловой стабилизации КА.

- ж) Приемник сигналов спутниковых систем, в том числе GPS, ГЛОНАСС, Galileo с возможностью приема сигналов дифференциальной коррекции, а также потенциальной возможностью работать с несколькими разнесенными ГНСС-антеннами;
- з) Аппаратуру межспутниковой связи, использующую лазерный информационный канал;
- и) Два привода солнечных батарей (СБ);
- к) Четыре корректирующих двигательных установки;
- л) Маршевый двигатель электрического типа.



- м) Решение навигационной задачи, т.е формирование оценок компонент вектора состояния КА представляет собой комплексный процесс, включающий следующие процедуры:
- а) Оптимальное планирование сеансов навигационных измерений в соответствии с процедурами, описанными в [17];
  - б) "Отбраковка" измерений, не соответствующих принятым характеристикам аппаратных средств, генерирующих измерения данного вида;
  - в) Интеграция данных используемых аппаратных средств. Состав и размерность вектора интегрируемых данных варьируются в зависимости от этапа жизненного цикла КА.
  - г) Оценка компонент вектора тяги с использованием отдельной специализированной процедуры.

Процедуры, указанные в пунктах в) и г) реализуются в рамках так называемого скалярного фильтра Р. Калмана, описанного в [16,17].

Оцениваемый расширенный вектор состояния центра масс КА на ГСО включает на этапе довыведения, помимо оценок компонент положения и составляющих вектора скорости, оценки модуля и ориентации вектора тяги ЭРДУ, а также углов и угловых скоростей ориентации КА; на этапах перевода и удержания в число оцениваемых компонент вектора состояния КА входят также отклонения тяги корректирующих двигателей, используемых на этих этапах.

Заметим, что в соответствии с принятым подходом к решению задачи управления по неполным данным, основанным на теореме разделения, в процессе моделирования замкнутой системы блок навигации функционирует как «черный ящик», реализующий модели и процедуры, перечисленные выше.

Управление угловой ориентацией КА осуществляется различными способами в зависимости от этапа его функционирования и в данной работе также не обсуждается.

### 4.3 Исходные данные и варианты моделирования

Моделирование этапов довыведения, приведения и удержания проводилось при следующих исходных данных

#### 4.3.1 Этап довыведения

Для отработки алгоритма довыведения использовались следующие исходные данные:

- дата старта – 01.01.2016 00:00:00 UTC;
- наклонение орбиты –  $50^\circ$ ;
- долгота восходящего узла –  $180^\circ$ ;
- аргумент перицентра –  $10^\circ$ ;
- большая полуось – 78000 км;
- эксцентриситет – 0.615385;
- истинная аномалия –  $120^\circ$ ;
- масса КА – 4500 кг;
- тяга – 0.9 Н.

Параметры алгоритма управления:

- конечное наклонение орбиты –  $0^\circ$ ;
- конечная большая полуось – 42250 км.

Терминальные условия алгоритма управления:

- наклонение орбиты  $\leq 0.1^\circ$ ;
- эксцентриситет орбиты  $\leq 0.005$ ;
- отклонение радиуса орбиты  $\leq 100$  км.

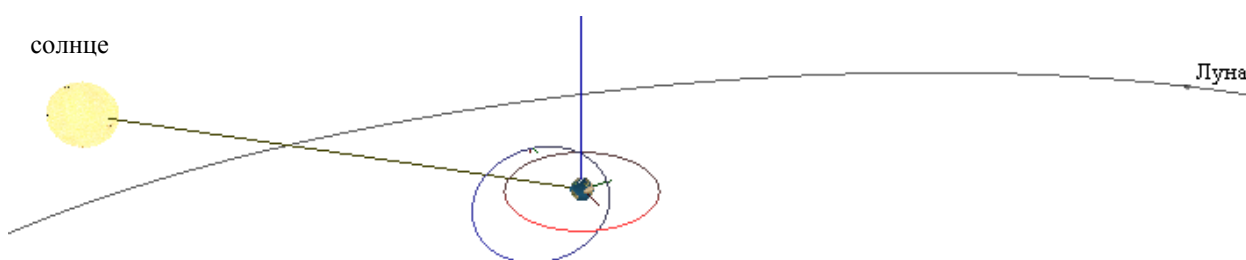


Рис. 4.11. Начальное положение

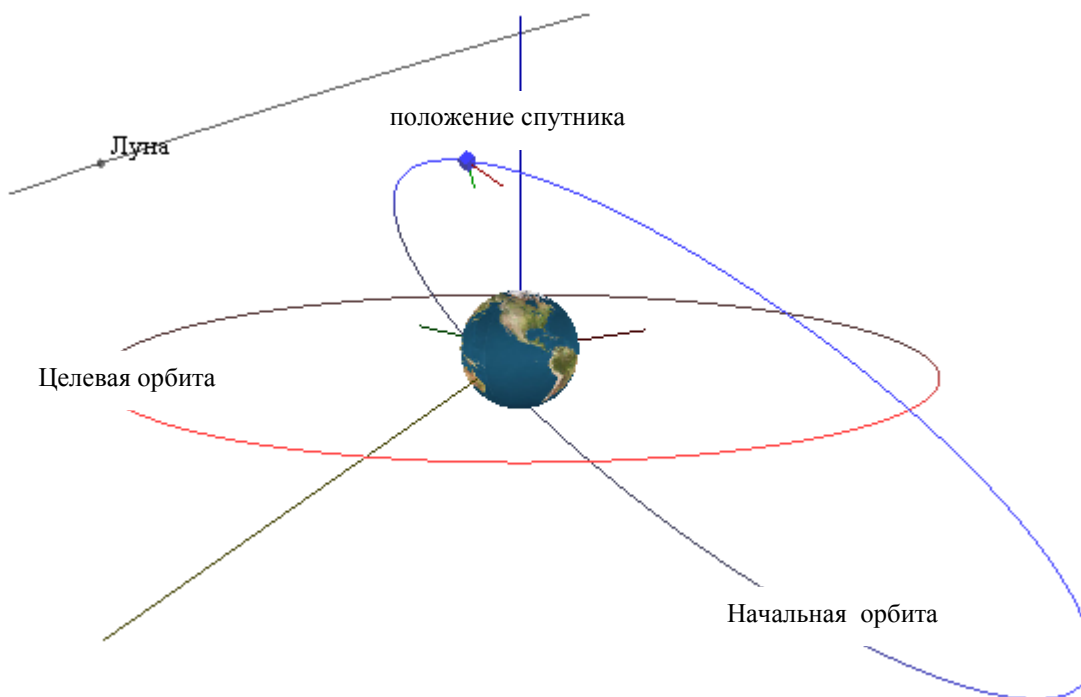


Рис. 4.12. Начальное положение. Вид со стороны Солнца

На рис. 4.11, 4.12 изображены начальная и конечная орбиты, начальное положение спутника на орбите, положения Солнца и Луны.

Моделирование проводилось как для случая с идеальным управлением и навигаций, так и для случая, когда ошибки имели следующие характеристики:

- СКО определения координат – 10м;
- СКО определения скорости – 0.2м/с;
- СКО разброса модуля тяги – 0.5%;
- СКО ошибки ориентации тяги – 0.5°;

#### 4.3.2 Этап приведения в рабочую позицию

Для этапа приведения использовались следующие исходные данные:

- дата старта – 01.01.2016 00:00:00 UTC;
- наклонение орбиты – 0.1°;
- долгота восходящего узла – 0°;
- аргумент перицентра – 0°;
- большая полуось – 42300 км;

- эксцентриситет – 0.001;
- истинная аномалия –  $180^\circ$ ;
- географическая долгота –  $89.9^\circ$ ;
- масса КА – 4000 кг;
- тяга – 0.08 Н.

Параметры алгоритма управления:

- долгота рабочей точки –  $76^\circ$  в. д.;
- конечный радиус орбиты – 42164,175 км.

Терминальные ограничения алгоритма приведения:

- отклонение географической долготы  $\leq 0.05^\circ$  (3 мин);
- эксцентриситет орбиты  $\leq 0.0004$ ;
- отклонение большой полуоси  $\leq 26$  км.

Моделирование проводилось как для случая с идеальным управлением и навигаций, так и для случая, когда ошибки имели следующие характеристики:

- СКО определения координат – 10м;
- СКО определения скорости – 0.1м/с;
- СКО разброса модуля тяги – 0.5%;
- СКО ошибки ориентации тяги –  $0.5^\circ$ ;

### **4.3.3 Этап удержания**

При проведении моделирования использовались следующие исходные данные:

- дата старта – 01.01.2016 UTC
- наклонение орбиты –  $0.02^\circ$
- долгота восходящего узла –  $0^\circ$
- аргумент перицентра –  $0^\circ$
- большая полуось – 42164.475км
- эксцентриситет – 0.0003

- истинная аномалия –  $-3.84^\circ$
- географическая долгота –  $76.05^\circ$
- шаг коррекции – 5 суток
- первая коррекция через 5 суток

Моделирование проводилось как для случая с идеальным управлением и навигаций, так и для случая, когда ошибки имели следующие характеристики:

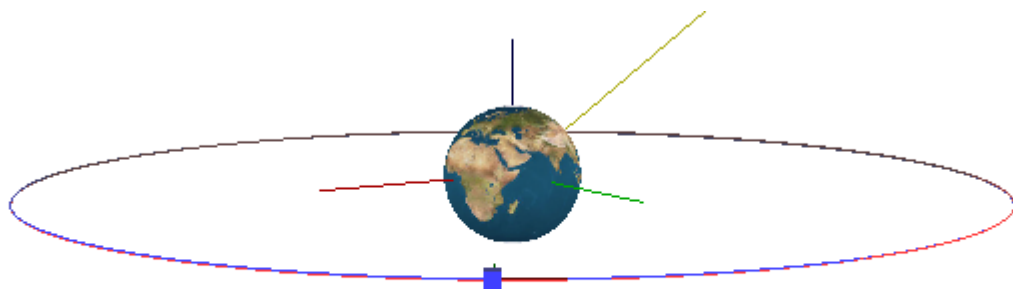
- СКО определения координат – 10м;
- СКО определения скорости – 0.1м/с;
- СКО разброса модуля тяги – 0.5%;
- СКО ошибки ориентации тяги –  $0.5^\circ$ ;

#### 4.4 Описание результатов моделирования

##### 4.4.1 Этап довыведения

В результате моделирования были получены следующие конечные параметры процесса довыведения:

- время довыведения – 14424450 с (167 суток);
- радиус орбиты – 42254609 м;
- наклонение орбиты –  $0.1^\circ$ ;
- эксцентриситет – 0.000312;
- географическая долгота –  $68.1049^\circ$  в. д.
- географическая широта –  $0.1378^\circ$  с. ш.



15.06.2016 22:00:00.047 UTC

Рис. 4.13. Эволюция наклонения орбиты (град.)

На рис. 4.14, 4.15 изображена эволюция углов ориентации тяги.

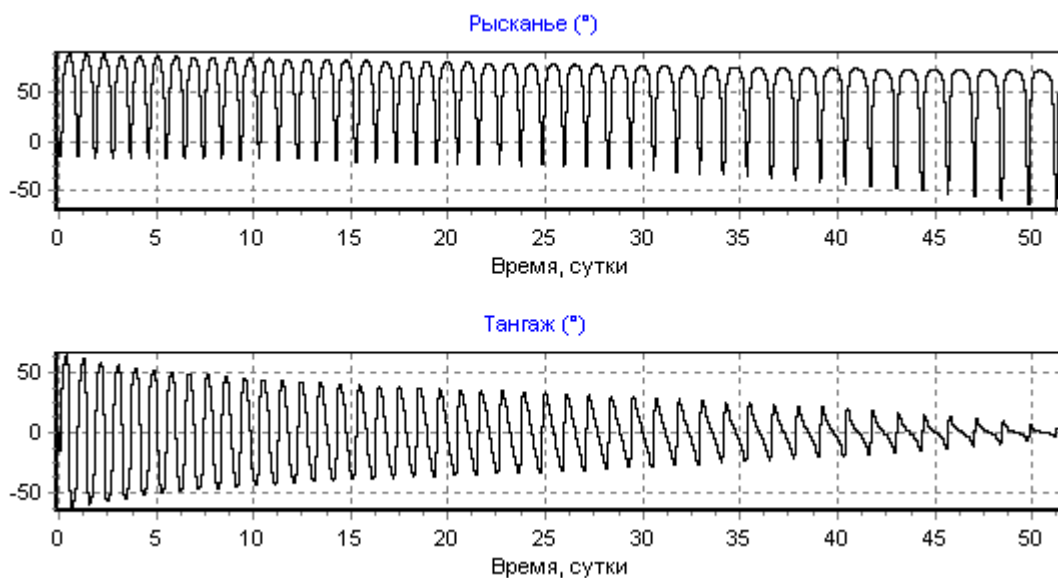


Рис. 4.14. Эволюция углов ориентации тяги. Часть 1

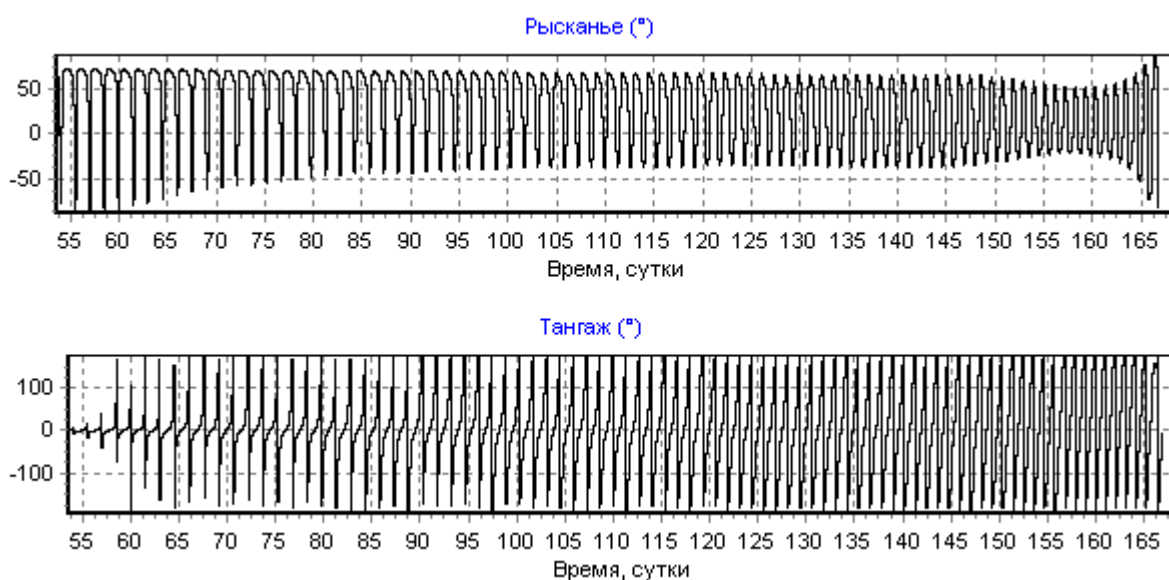


Рис. 4.15. Эволюция углов ориентации тяги. Часть 2

На рис. 4.16-4.18 изображена эволюция наклонения и большой полуоси в течение шести месяцев этапа довыведения.

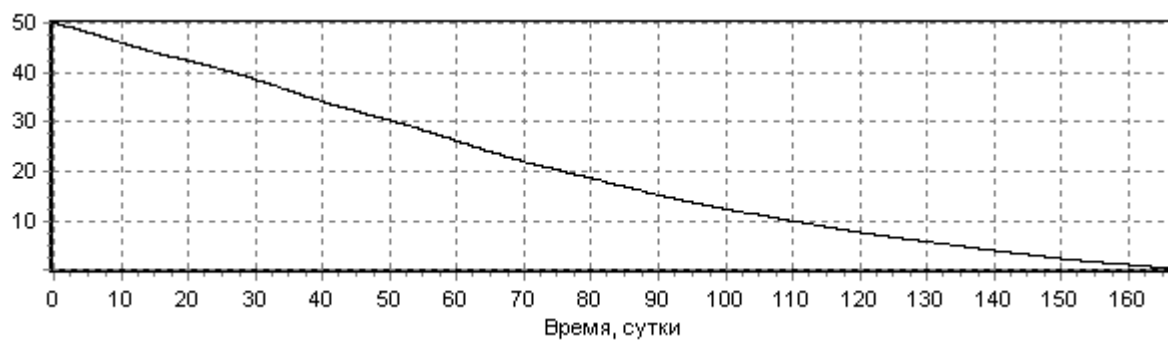


Рис. 4.16. Эволюция наклонения орбиты (град.)

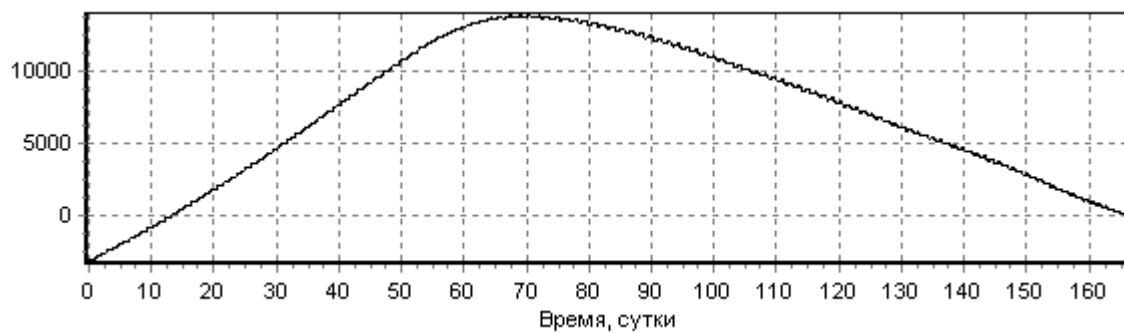


Рис. 4.17. Эволюция отклонения большой полуоси от заданного терминального значения (м)

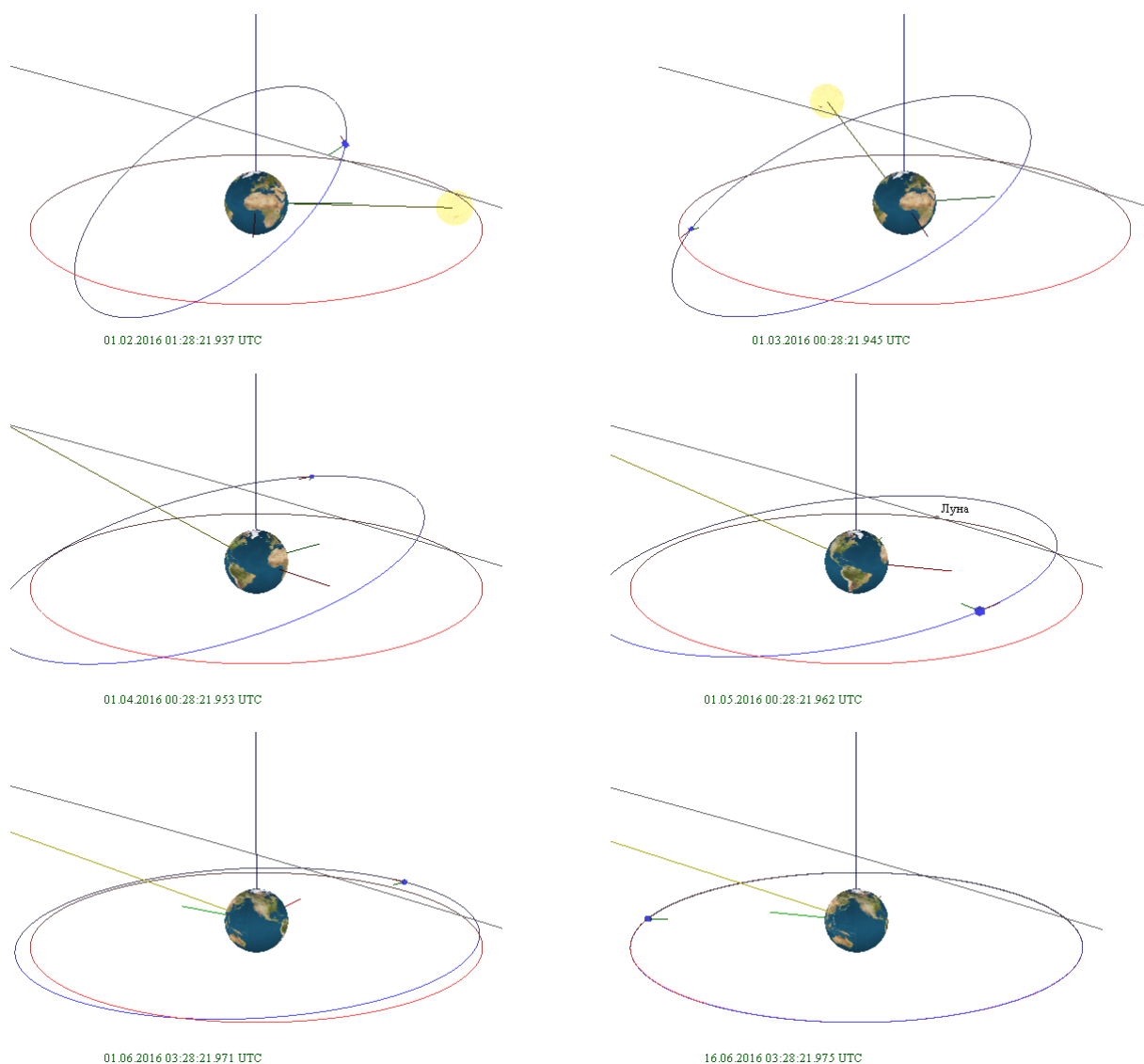


Рис. 4.18. Эволюция орбиты КА при довыведении

Здесь можно отметить первоначальный рост большой полуоси с последующим уменьшением до требуемого значения. Связано это с тем, что наиболее энергоемкой операцией является коррекция наклонения, а эффективность коррекции наклонения тем выше, чем больше период орбиты.

На рис 4.19 показана эволюция географической долготы. Видно, что положение спутника относительно Земли в течение довыведения существенно меняется и стабилизируется только в последние несколько дней.



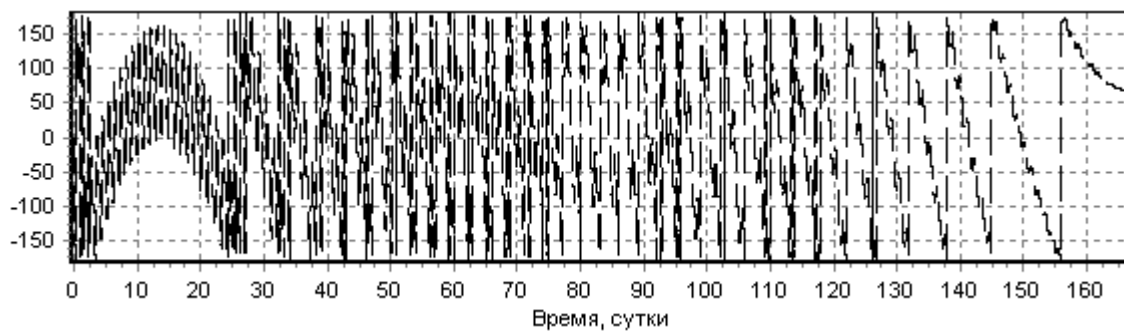


Рис. 4.19. Эволюция географической долготы (град.)

Для оценки влияния случайных факторов на точность довыведения была проведена серия математических экспериментов, где к рассмотренным выше начальным условиям были добавлены следующие случайные факторы. Результаты распределения отклонений конечных параметров процесса довыведения от случая с идеальным управлением и навигацией представлены на рис 4.18.

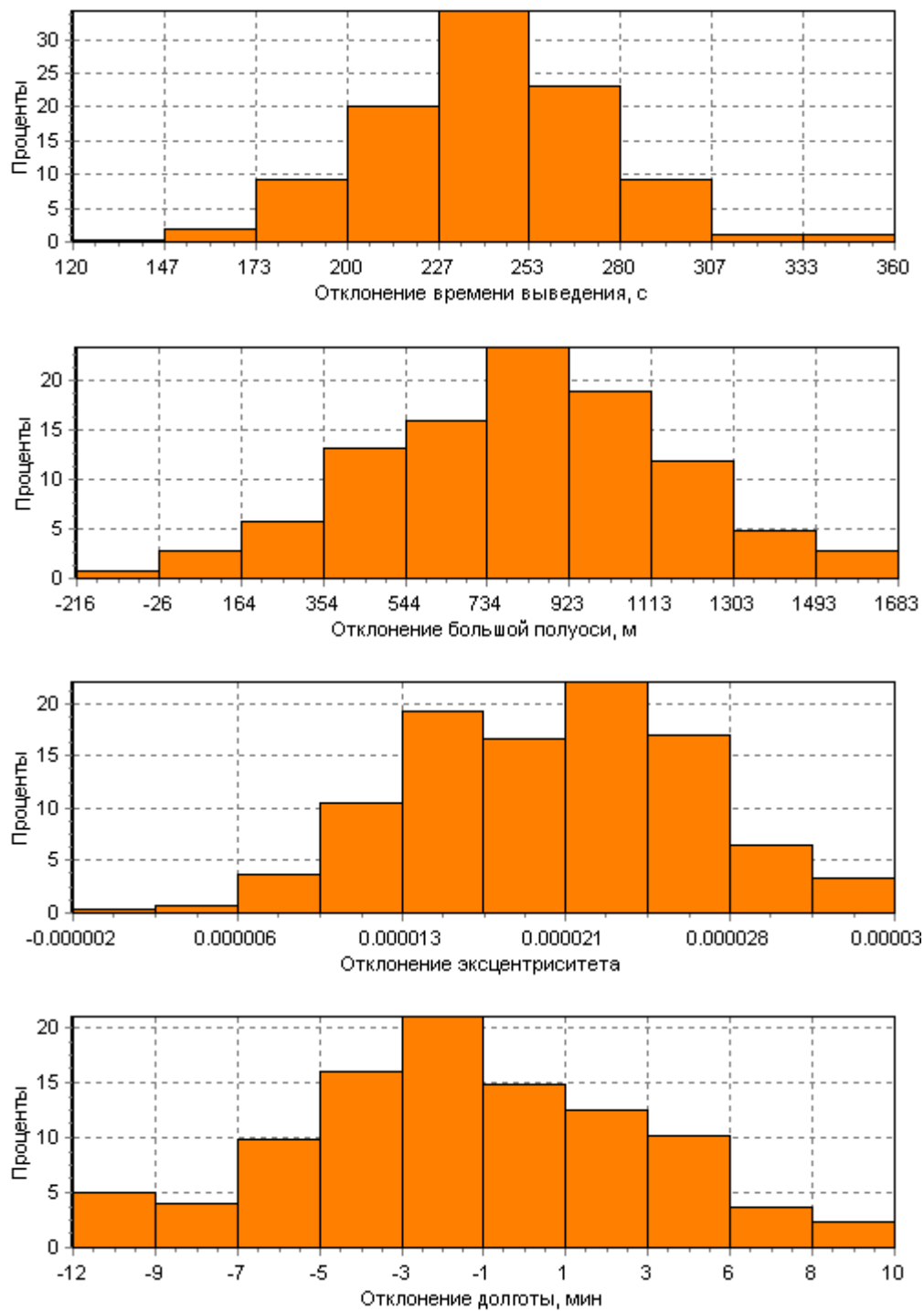


Рис. 4.20. Гистограммы отклонений длительности довыведения, большой полуоси, эксцентриситета и долготы

#### 4.4.2 Этап приведения в рабочую позицию

В результате моделирования при идеальном управлении и навигационной системе были получены следующие результаты процесса приведения:

- время приведения – 1009083 с ( $\approx 12$  суток);
- большая полуось – 42164737 м;
- наклонение орбиты –  $0.0973^\circ$ ;
- эксцентриситет – 0.00024;
- географическая долгота –  $75.954^\circ$  в. д.

В ходе работы алгоритма управления было выработано следующее управление:

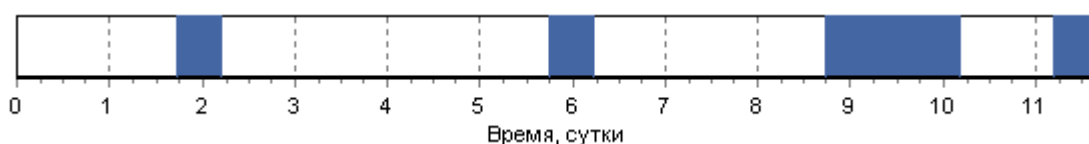


Рис. 4.21. Циклограмма коррекций приведения

$k$	$t_k(c)$	$\tau_k(c)$
1	149939	40922
2	305768	41621
3	217091	124683
4	86118	42941

Рис. 4.22. Таблица длительностей пассивных и активных участков

Как видно из таблицы 4.22 решение содержит четыре участка коррекции. На рис. 4.23-4.26 изображены эволюции параметров орбиты в течение 12 суток коррекции. Здесь можно отметить, что скорость дрейфа сходится к нулю, географическая долгота и большая полуось к заданному значению, а терминальное значение эксцентриситета не превышает ограничение.

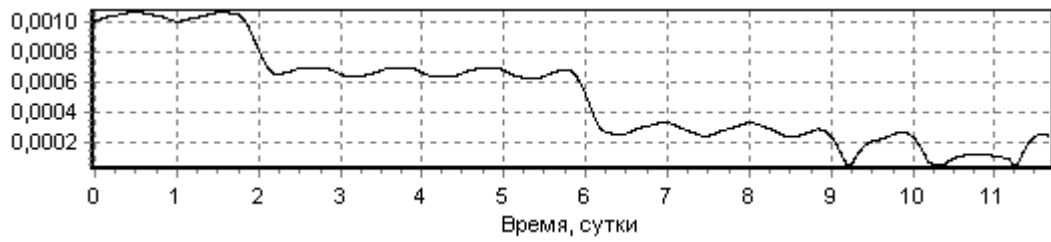


Рис. 4.23. Эволюция отклонения эксцентриситета

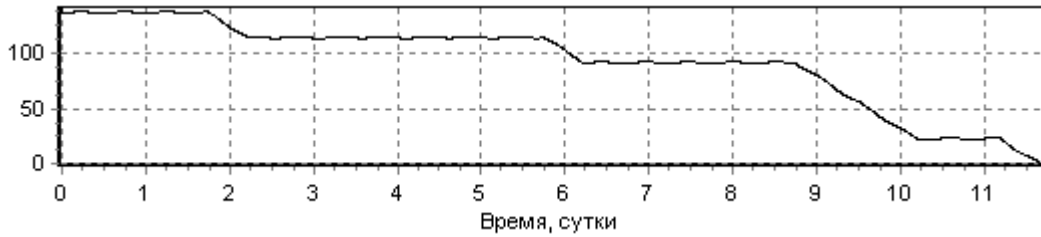


Рис. 4.24. Эволюция отклонения большой полуоси (км)

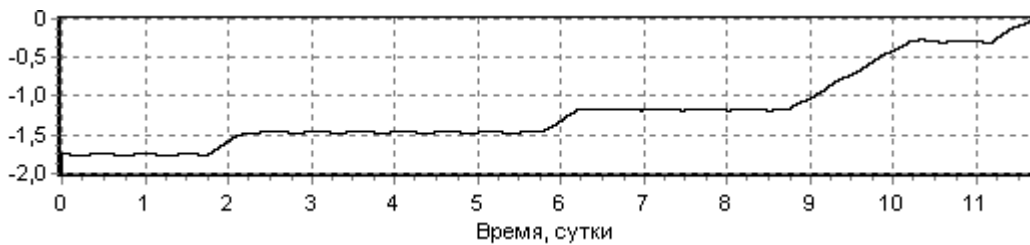


Рис. 4.25. Эволюция скорости дрейфа (град/оборот)

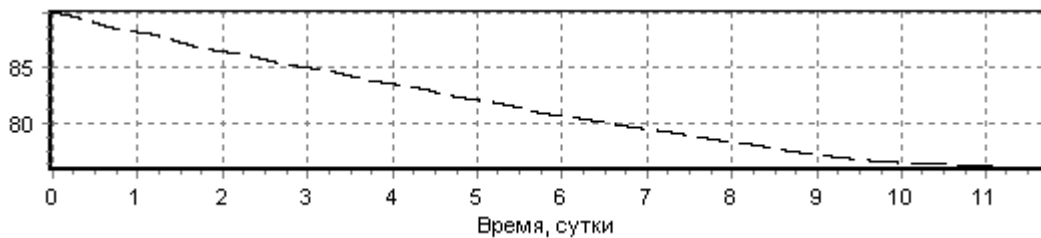
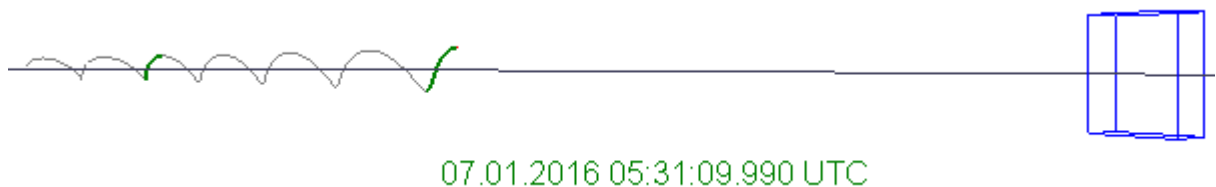


Рис. 4.26. Эволюция географической долготы (град. в.д.)

На рис 4.27 изображена траектория приведения в трехмерном пространстве после первых двух коррекций.



07.01.2016 05:31:09.990 UTC

Рис. 4.27. Фазовая траектория приведения после двух коррекций

На рис. 4.28 изображена траектория приведения после трех коррекций.

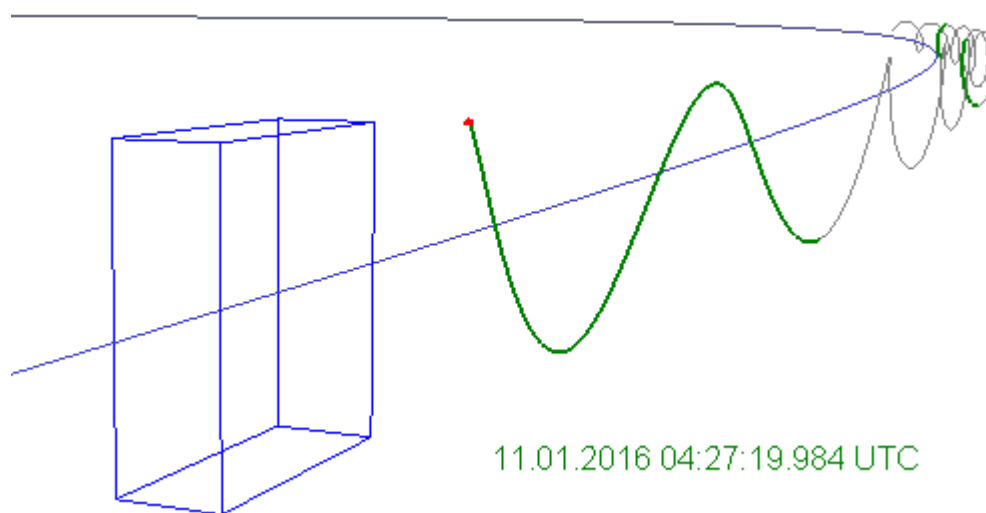


Рис. 4.28. Фазовая траектория приведения после трех коррекций

На рис. 4.29 изображена финальная коррекция.

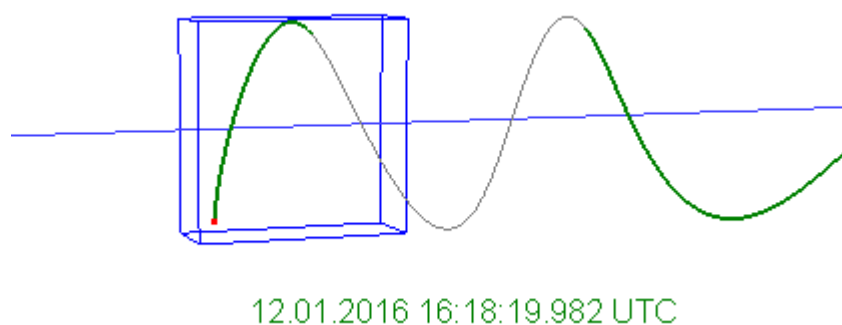


Рис. 4.29. Фазовая траектория приведения после последней коррекции

Как можно видеть на рис. 4.30, после последнего активного участка спутник еще какое-то время будет оставаться в рабочей позиции. Этого времени достаточно для запуска процесса удержания.

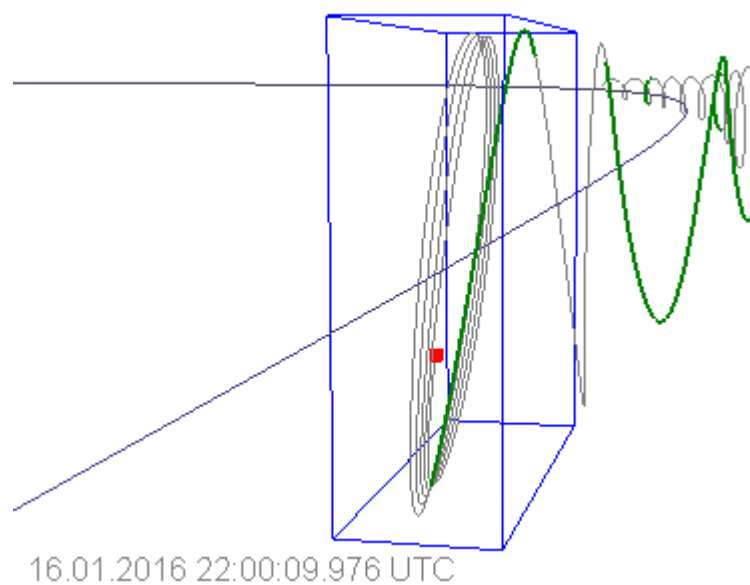
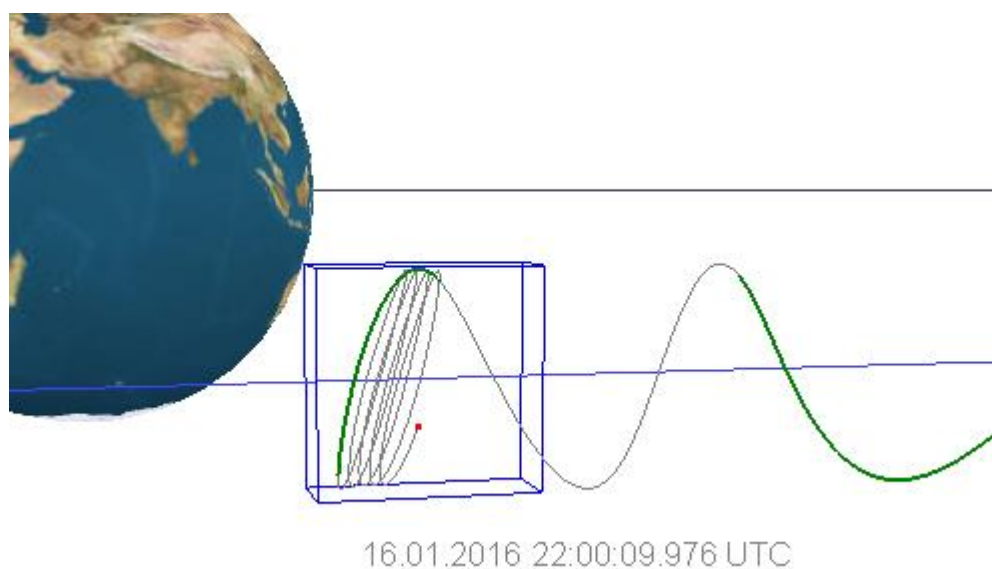


Рис. 4.30. Фазовая траектория движения спутника после окончания этапа приведения

Для оценки влияния случайных факторов на терминальную точность приведения была проведена серия статистических экспериментов, где к рассмотренным выше начальным условиям были добавлены случайные факторы. Результаты распределения отклонений конечных параметров процесса довыведения от случая с идеальным управлением и навигацией представлены на рис. 4.31.

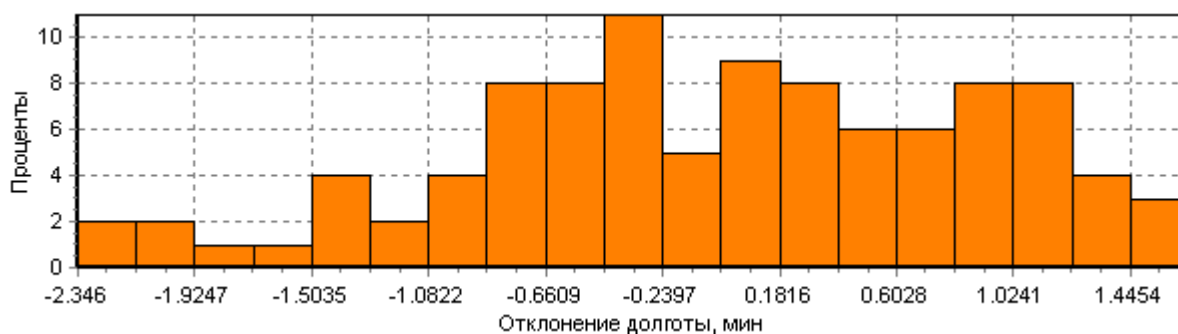


Рис. 4.31. Гистограммы отклонений долготы

Статистические параметры отклонений по долготе:

- МО –  $-0.0004^\circ$ ;
- СКО –  $0.015^\circ$ .

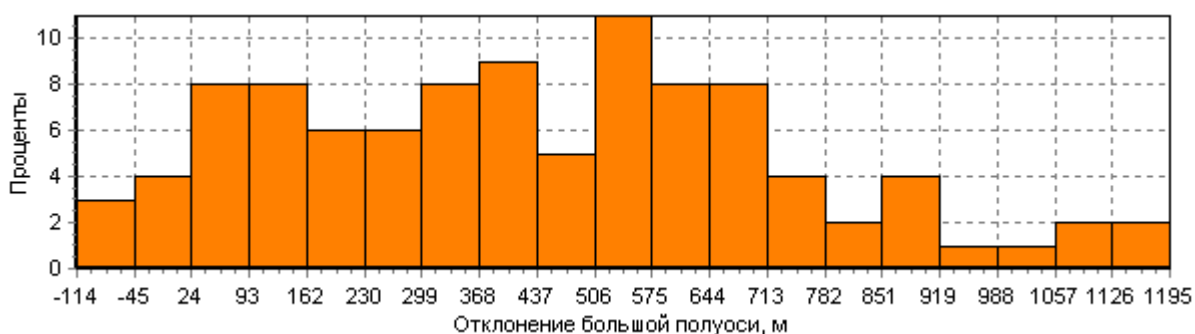


Рис. 4.32. Гистограммы отклонений большой полуоси

Статистические параметры отклонений большой полуоси:

- МО – 435 м;
- СКО – 300 м;

или в пересчете для отклонения периода:

- МО – 1,33 с;
- СКО – 0,92 с.

Эксцентриситет во всех случаях был равен 0.00024

#### 4.4.3 Этап удержания

Как было сказано ранее, алгоритм удержания был разработан для установившегося режима, когда функция будущих потерь от времени не зависит, и поэтому коэффициенты обратной связи постоянны. Однако, как

показывают результаты моделирования, алгоритм удержания устойчив к начальным условиям.

Эволюции географической долготы и скорости дрейфа в течение первых 60 суток удержания изображены на рис. 4.33 и рис. 4.34.

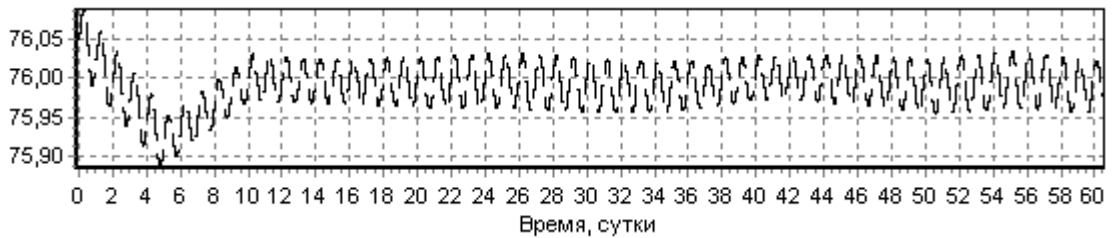


Рис. 4.33. Эволюция географической долготы (град. в.д.)

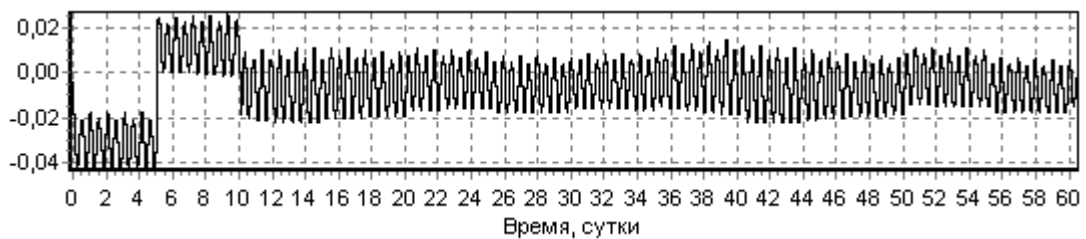


Рис. 4.34. Эволюция скорости дрейфа (град/оборот)

На рис. 4.35 проиллюстрирована суточная фазовая траектория движения спутника внутри рабочей позиции.

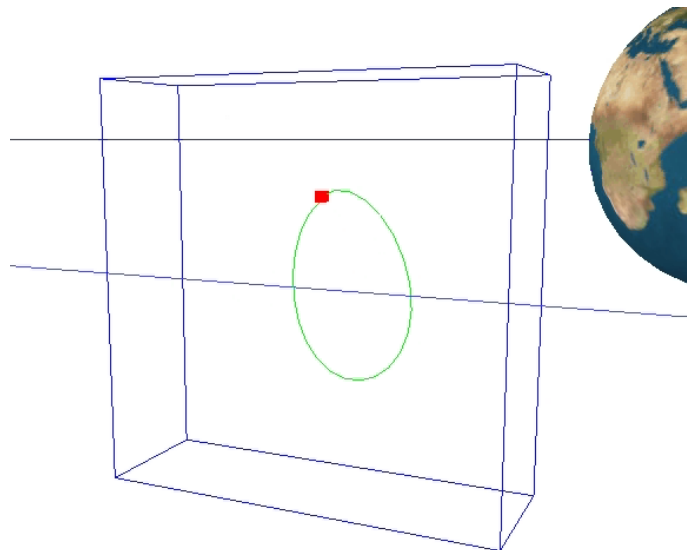


Рис. 4.35. Суточная траектория спутника внутри рабочей позиции

На рис. 4.36 проиллюстрирована траектория движения спутника в плоскости орбиты в установившемся режиме в течение месяца. Данная картина демонстрирует достаточно устойчивую фазовую траекторию внутри



рабочей позиции, что позволяет говорить о возможности размещения нескольких спутников в одной рабочей позиции.

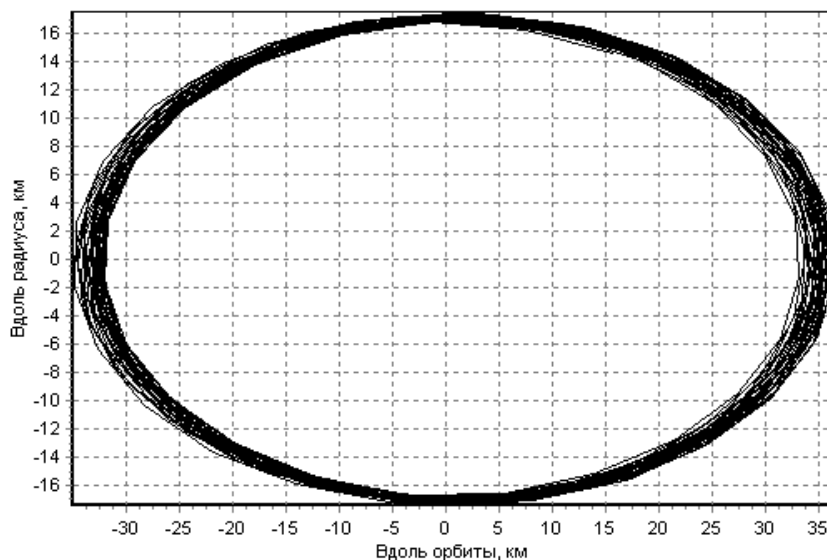


Рис. 4.36. Установившийся режим

#### 4.5 Анализ результатов моделирования

Как следует из результатов сквозного моделирования, проведенного в соответствии с исходными данными, перечисленными выше, можно сделать следующий главный вывод относительно характеристик точности, обеспечиваемых разработанными алгоритмами и принятыми математическими моделями управляемого движения и действующих возмущений: на всех рассмотренных этапах жизненного цикла КА на ГСО удовлетворяются сформулированные выше требования по точности реализации этих этапов.

Более детальный анализ полученных в результате моделирования характеристик точности на отдельных этапах, приведен ниже.

*Этап довыведения.* Определяющей характеристикой качества этого этапа является область отклонения географической долготы от требуемого значения, гарантирующая пребывание центра масс КА в этой области с вероятностью 0.997 ( $3\Delta\sigma_\lambda$ ). Результаты моделирования показывают, что это значение составляет:

$$3\Delta\sigma_\lambda = 0.25^\circ > 0.05^\circ.$$

Это соответствует требованиям по точности, предъявляемым к данному этапу. В то же время, полученное значение  $3\Delta\sigma_\lambda$  превосходит требования к отклонению по долготе, предъявляемые международными организациями к точности вывода КА в рабочую позицию на ГСО. Таким образом, как и предполагалось априори, алгоритм довыведения не позволяет перевести спутник непосредственно в рабочую позицию и, тем самым, исключить этап приведения.

*Этап приведения.* Определяющими характеристиками качества этого этапа являются среднеквадратические отклонения от требуемых терминальных значений периода и географической долготы. Что касается эксцентриситета, то требования по его терминальному значению состоит в том, что его значение гарантированно не должно превышать величины 0.0004. Результаты моделирования показывают, что по отклонениям периода и географической долготы центр масс КА с вероятностью не ниже 0.997 находится в области, соответствующей международным требованиям, т.е.:

$$3\sigma_\lambda = 0.045^\circ < 0.05^\circ$$

$$3\sigma_T = 2.76 \text{ с} < 5 \text{ с}.$$

Поскольку в процессе моделирования этапа приведения во всех реализациях величина эксцентриситета была постоянной и равной 0.00024, можно утверждать, что и по значению эксцентриситета международные требования выполняются, а именно:

$$e = 0.00024 < 0.0004$$

*Этап удержания.* Наиболее важным результатом моделирования этапа удержания является тот факт, что во всех полученных реализациях центр масс КА гарантированно находился в пределах заданной области пространства по географической долготе, эксцентриситету, периоду и наклонению.

## Заключение

Сформулирована актуальная техническая задача формирования алгоритмов автономного управления движением центра масс геостационарного КА на этапах довыведения, приведения в рабочую позицию и удержания с учетом детерминированных и случайных неконтролируемых факторов : гравитации Земли, Луны и Солнца, ускорений, вызываемых давлением солнечного света, случайных разбросов начальных условий движения на каждом из этапов и тяги ЭРДУ, используемого на этапе довыведения, ошибок реализации импульсов тяги корректирующей двигательной установки на этапах перевода и удержания, а также ошибок решения навигационной задачи.

Основная особенность рассмотренной технической задачи, отличающая ее от аналогичных решений в данной предметной области, состоит в учете влияния ошибок решения навигационной задачи на характеристики создаваемой автономной системы управления с точки зрения терминальной точности и затрат рабочего тела ЭРДУ. Для этого в замкнутый контур автономной системы управления движением центра масс КА включен блок навигации, формирующий оценки расширенного вектора состояния КА по данным бортового приемника ГЛОНАСС.

Показано, что в качестве алгоритма автономного управления на этапе довыведения с помощью стационарного плазменного двигателя малой тяги (СПД) целесообразно использовать квазиоптимальный алгоритм непрерывного управления ориентацией вектора тяги ЭРДУ [5], разработанный без учета влияния случайных неконтролируемых факторов.

Задачи оптимизации, которые решены в рамках данного исследования, состоят в нахождении алгоритма формирования циклограмм управления двигателями коррекции на этапах перевода в рабочую позицию и удержания в ней непосредственно на борту КА. Задачи управления движением решены

как задачи синтеза оптимального стохастического управления по полным данным.

Для согласованного координатно-временного обеспечения алгоритмов навигации и управления определен состав систем координат и систем счисления времени. Выбран состав математических моделей, необходимых для получения истинной траектории движения КА с учетом гравитационного влияния Земли, Луны и Солнца, давления солнечного света и тяги двигателя. Выбрана математическая модель для синтеза оптимального управления на этапе довыведения КА на ГСО. Получена линеаризованная модель движения центра масс КА, используемая при синтезе оптимального управления на этапах приведения и удержания КА на ГСО.

Разработан алгоритм синтеза оптимального управления на основе комбинированного метода оптимизации, в котором программными компонентами являются количество активных участков и длительности пассивных участков. Данные параметры ищутся численно. Синтезируемой компонентой является длительность коррекции, которая определяется методом последовательных приближений.

Разработан программный комплекс, реализующий все рассмотренные алгоритмы. Программный код написан с использованием объектно-ориентированного подхода и имеет модульную структуру.

Результаты моделирования замкнутой системы автономного управления и навигации подтвердили работоспособность принятых решений. Получена оценка точности автономного управления движением центра масс КА на этапах довыведения, приведения в рабочую позицию на ГСО и удержания в ней с учетом ошибок решения навигационной задачи.

Основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту:

- математические модели управляемого движения центра масс КА на ГСО с учетом влияния детерминированных и стохастических неконтролируемых факторов, вызываемых естественными

- факторами, ошибками решения навигационной задачи и работы элементов системы управления;
- алгоритмы автономного управления движением центра масс на этапах приведения в рабочую позицию и удержания в ней, разрабатываемые с использованием комбинированного метода оптимизации;
  - применение квазиоптимального алгоритма управления движением центра масс КА с обратной связью на этапе довыведения на ГСО в условиях влияния стохастических неконтролируемых факторов;
  - программно-моделирующий комплекс для отработки замкнутой системы управления движением центра масс КА на ГСО, включающей блок навигации;
  - результаты отработки замкнутой автономной системы управления движением центра масс КА на ГСО, подтверждающие возможность обеспечения требуемых международных характеристик терминальной точности приведения и удержания с использованием разработанных алгоритмов автономного управления.

## Список литературы

1. Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 440 с., ил.
2. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М Физматлит, 1975.- 704с., ил.
3. Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез, управление / В.В. Малышев, М.Н. Красильщиков, В.Т. Бобронников, О.П. Нестеренко, А.В. Федоров / Под ред. В.В. Малышева. – М.: Изд-во МАИ, 2000. – 585 с., ил.
4. Чернявский Г.М., Бартенев В.А., Малышев В.А. Управление орбитой стационарного спутника. – М.: Машиностроение, 1984 – 144 с., ил.
5. Петухов В. Г. Квазиоптимальное управление с обратной связью для многовиткового перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами. Космические исследования, 2011, том 49, № 2 , с. 128–137
6. Малышев В.В., Старков А.В., Федоров А.В. Синтез оптимального управления при решении задачи удержания космического аппарата в орбитальной группировке// Космонавтика и ракетостроение. 2012.№4(69). С.150-158.
7. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т.и др. Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез, управление /Под ред. Малышева В.В. М.: Изд-во МАИ, 2000. 585 с.
8. Красильщиков М.Н., Малышев В.В., Федоров А.В. Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. I. Формализация задачи управления// Изв. РАН. ТиСУ 2015. №6. С.82-96.
9. А.П. Войсковский, М.Н. Красильщиков, В.В.Малышев, А.В. Федоров. Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. 2. Синтез алгоритмов управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6.

10. Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Кружков Д.М., Сыпало К.И. Автономная навигация при довыведении КА на ГСО. 1. Концепция автономной интегрированной навигационной системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. №5. С.106-118.
11. А. П. Войсковский, Д. А. Козорез, М.Н. Красильщиков, Д.М. Кружков, К. И. Сыпало. Автономная навигация при довыведении космического аппарата на геостационарную орбиту. 2. Моделирование процессов функционирования интегрированной автономной системы навигации и управления космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 5.
12. Технология оптимального планирования работы навигационных средств и автоматизации типовых операций наземного комплекса управления современных и перспективных космических систем. Сыпало К.И. , Москва, 2005.
13. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Машиностроение, 1978.
14. IERS Technical Note 13. IERS Standards (1992). Ed. Dennis D. McCarthy, US Naval Observatory. July 1992.
15. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука 1974, 600 с.
16. Современные и перспективные информационные ГНСС-технологии в задачах высокоточной навигации /Под ред. В.А. Бартенева, М.Н. Красильщикова. М.:Физматлит, 2014. 192 с.
17. Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов /Под общей ред. М.Н. Красильщикова, В.В. Малышева. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Альянс, 2013. 403 с.
18. Решетнев М.Ф., Бартнев В.А., Красильщиков М.Н. и др. Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. М.:Машиностроение, 1988. 336 с.

19. М. Н. Красильщиков, Войсковский А.П. Разработка функционально-программного прототипа системы автономной навигации космического аппарата на геостационарной орбите на этапах выведения, удержания в рабочей точке и коррекции орбиты с использованием перспективных методов, алгоритмов и аппаратных средств // Отчет по гранту РФФИ 15-08-00833, 2015