

Московский авиационный институт  
(Национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Никитченко Юрий Алексеевич

СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СЛЕДУЮЩИЕ ИЗ НИХ МОДЕЛИ  
НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант

действительный член РАН, доктор технических наук, профессор Ю.А.Рыжов

Москва – 2015 год

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
---------------	---

### Раздел 1

#### СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ

1.1. Основные допущения. Используемые термины и символы.....	25
1.2. Построение системы моментных уравнений.....	32
1.3. Замыкание системы моментных уравнений.....	40
1.4. Время релаксации.....	43
1.5. Энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы молекул.....	47
1.6. Система моментных уравнений M24.....	49
1.7. Метод построения системы моментных уравнений для функции распределения общего вида.....	56

### Раздел 2

#### СОГЛАСОВАННАЯ СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Аппроксимирующая функция распределения. Моменты пятого порядка в локальном выражении.....	61
2.2. Сопоставление балансового и локального выражений моментов четвертого порядка.....	65
2.3. Согласование балансового и локального выражений моментов четвертого порядка. Расширение системы моментных уравнений.....	69
2.4. Выделение старших членов согласующих добавок. Системы M24с и M24сс.....	76
2.5. Обсуждение результатов раздела.....	83

## Раздел 3

## СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Модель первого приближения.....	86
3.2. Двухтемпературная модель.....	105
3.3. Модель второго приближения. Релаксационная модель.....	112

## Раздел 4

## ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

4.1. Общие положения.....	128
4.2. Функция распределения в граничной точке.....	134
4.3. Скольжение и скачок температуры.....	137
4.4. Вспомогательная модель граничных условий.....	140
4.5. Оценка значения свободного параметра модели.....	143

## Раздел 5

## ИНЖЕНЕРНЫЕ МОДЕЛИ

5.1. Внепорядковая модель первого приближения.....	146
5.2. Вспомогательная кинетическая модель. Анализ внепорядковой модели.....	155
5.3. Гибридная модель.....	171

## Раздел 6

## ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ ВЫРОЖДЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

6.1. Общие замечания. Граничные условия на твердой поверхности.....	179
6.2. Теплопередача в плоском слое неподвижного газа.....	183
6.3. Плоское течение Куэтта.....	186
6.4. Задача о структуре ударной волны.....	191

## Раздел 7

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НУЛЕВОМ УГЛЕ  
АТАКИ

7.1. Общие замечания.....	200
7.2. Формулировка задачи. Единицы измерения.....	203
7.3. Системы уравнений. Граничные условия.....	204
7.4. Конечно-разностная реализация.....	216
7.5. Результаты расчетов.....	220
7.6. Осуждение результатов.....	229

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	233
-----------------	-----

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Системы координат.....	237
Операции.....	237
Надстрочные и подстрочные символы.....	238
Символы микроскопических величин.....	238
Символы макроскопических величин.....	239
Основные константы и критерии подобия.....	241
Аббревиатуры.....	242

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	243
---------------------------------------	-----

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются течения высокой степени динамической неравновесности. Под термином "динамическая неравновесность" понимается такое состояние газа, при котором энергия теплового движения молекул существенно неравномерно распределена между их степенями свободы (как поступательными, так и внутренними). Функция распределения молекул по скоростям в этом случае существенно отличается от равновесной, локально-максвелловской функции. Количественная трактовка степени динамической неравновесности приведена в Разделе 1.

В качестве газовой среды рассматривается совершенный однокомпонентный газ, показатель адиабаты которого – постоянная величина.

### **Актуальность темы.**

Разработка методов описания течений высокой динамической неравновесности относится к числу наиболее актуальных задач современной аэромеханики и газовой динамики. Это связано с тем, что такого рода течения имеют место в установках газодинамического осаждения и напыления, а также в ряде других технических устройств, используемых в вакуумных и нано технологиях.

Не меньшее значение изучение неравновесных течений имеет в вопросах экологии атмосферы, в частности в задачах формирования и эволюции верхних слоев атмосферы Земли.

Одной из основных тенденций развития современной авиационной и ракетной техники является разработка гиперзвуковых летательных аппаратов. Особое внимание уделяется численному моделированию процессов, протекающих в области взаимодействия головной части аппарата с гиперзвуковым потоком. В этих областях возникают течения высокой степени неравновесности, описание которых требует адекватных физико-математических моделей.

Тестовые расчеты плоских ударных волн показывают, что количество энергии теплового движения, сосредоточенной на продольной (соответствующей направлению движения потока) поступательной степени свободы, при  $M_\infty = 5$  может почти вдвое превосходить значение средней энергии теплового движения и более чем втрое превышать энергию внутренних степеней свободы (для двухатомных газов).

Вместе с тем, интенсивность физико-химических процессов, протекающих в газе и на поверхности летательного аппарата, определены энергией (температурой) поступательного движения молекул. Из кинетической теории известно, что коэффициенты переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) определяются температурой поступательных степеней свободы. В этой связи становится актуальной разработка физико-математических моделей неравновесных течений.

### **Степень разработанности темы.**

Существующие физико-математические модели динамики газовой среды можно разделить на три группы в соответствии применяемым уровнем описания. Уровень описания, в свою очередь, целесообразно определить по элементарному объекту, относительно которого строится модель.

На уровне наиболее детального описания в качестве элементарного объекта рассматривается отдельная молекула газа. К этому уровню относятся статистические модели [1], изначально именуемые методами Монте-Карло, а в дальнейшем – методами прямого статистического моделирования. Модели газовой среды этого уровня отличаются минимальным количеством дополнительных допущений, что повышает адекватность модели, и высокой трудоемкостью численной реализации, в смысле количества вычислительных операций.

Рассмотрение полного статистического ансамбля при решении практических задач не реализуемо даже на современных суперкомпьютерах. На практике используются сокращенные ансамбли, результаты расчета которых

распространяются на полный ансамбль при ряде допущений. Тем не менее в области разреженных газов результаты расчетов по статистическим моделям часто используются в качестве эталонных для многих модельных задач.

Условия на границе раздела фаз могут быть записаны с учетом реальных процессов межмолекулярного взаимодействия в адсорбированных слоях. Органической особенностью моделей этого уровня является избыточная информативность. Принципиальных ограничений по числам Маха и Кнудсена эти модели не имеют.

Следующий уровень описания – уровень кинетических уравнений (кинетический уровень). Элементарный объект моделей этого уровня – группа молекул, объединенных по какому-либо принципу. В моделях, используемых для решения практических задач, рассматривается группа молекул, обладающих одинаковой (почти одинаковой) скоростью [2]. Уравнение баланса количества молекул в этой группе записывается с использованием одночастичной функции распределения (уравнения Больцмана и Максвелла–Больцмана). Наибольшее распространение на практике получили так называемые модельные кинетические уравнения (БГК-модель, S-модель и т.п.) [3].

В теоретических исследованиях значительный интерес представляют модели, объединяющие в группу молекулы газа в соответствии с некоторым заданным распределением по скоростям и положениям в пространстве (уравнение Лиувилля). В этом случае группа молекул определяет некоторое отдельное состояние системы. Кинетические модели, также как и статистические, не имеют ограничений по числам Маха и Кнудсена.

Изначально модели кинетического уровня использовались для описания течений одноатомных газов. В дальнейшем эти модели были распространены и на многоатомные газы [4; 5; 6; 7; 8]. Разработаны методы численной реализации кинетических моделей в достаточно плотных газах [9; 10].

Модели кинетического уровня также избыточно информативны с точки зрения задач газовой динамики. Однако трудоемкость их реализации существенно

меньше, чем трудоемкость реализации статистических моделей, и в некоторых случаях она приемлема для решения практических задач.

Условия на границе раздела фаз записываются с использованием того или иного вида функции распределения отраженных молекул, учитывающего реальные процессы межмолекулярного взаимодействия.

Следующий уровень описания базируется на теории сплошной среды и, следовательно, ограничен малыми значениями чисел Кнудсена. Будем называть его гидродинамическим уровнем. Модели этого уровня наименее информативны и, следовательно, наиболее экономичны. При построении гидродинамических моделей в качестве элементарного объекта рассматривается «жидкая частица», для которой записываются уравнения сохранения массы, импульса и энергии.

Для моделей динамики невязкой и нетеплопроводной среды этих уравнений достаточно, чтобы получить замкнутую систему. Всю систему уравнений с надлежащими граничными условиями в дальнейшем будем называть моделью Эйлера.

В модели вязкой и теплопроводной среды (модель Навье–Стокса–Фурье или НСФ) дополнительно привлекаются реологический закон Ньютона (закон трения Стокса) и закон Фурье. В рамках данной работы не рассматриваются течения анизотропных и вязкопластичных сред, поэтому для характеристики гидродинамического уровня ограничимся двумя упомянутыми моделями, отметим только, что в середине прошлого века была построена более общая теория моделей сплошной среды [11]. Однако методы этой теории не получили широкого распространения в области задач газовой динамики.

В отношении информативности гидродинамических моделей отметим следующее. При описании динамики среды, состояние которой близко к локально-равновесному, а число Кнудсена исчезающе мало, достаточно информативной является уже модель Эйлера. Граничные условия на границе раздела фаз при этом следуют из самой модели, т.е. предполагают отсутствие трения и тепловых потоков.



В слабонеравновесных течениях, в которых число Кнудсена мало, но конечно, а число Рейнольдса не настолько велико, чтобы возникла турбулентность, модель НСФ также является достаточно информативной и, по существу, основной физико-математической моделью динамики газовой среды, используемой в практических задачах. Условия на границе раздела фаз для данной модели (условия прилипания) адекватно моделируют реальные физические процессы и, как правило, не нуждаются в уточнении. Состояние газа в течениях указанного типа достаточно хорошо согласуется с базовыми положениями теории сплошной среды, чем и обусловлена высокая эффективность применения моделей Эйлера и НСФ.

Особый случай представляют неравновесные течения, т.е. течения с умеренными и большими характерными числами Кнудсена ( $Kn^*$ ). Под термином «характерное число Кнудсена» будем понимать критерий подобия, вычисленный по характерному геометрическому размеру сильно возмущенной области течения. В такой формулировке этот критерий может использоваться в качестве критерия неравновесности течения даже в достаточно плотных газах, где число Кнудсена, вычисленное традиционным способом, мало.

В неравновесных течениях проявляется недостаточная информативность моделей гидродинамического уровня и их ограниченность по числам Кнудсена. Линейная зависимость между тензорами напряжений и скоростей деформаций становится слишком грубым приближением, так же как и пропорциональность теплового потока, градиенту температуры.

Пренебрежение коэффициентом объемной вязкости, часто имеющее место в практических приложениях модели НСФ, также является слишком грубым допущением. Ниже будет показано, что даже в условиях слабонеравновесного течения такое допущение влечет ошибку того же порядка, что и нормальное неравновесное напряжение, определяемое посредством коэффициента объемной вязкости.

Такое «пренебрежительное» отношение к коэффициенту объемной вязкости, по-видимому, сложилось исторически. Изначально уравнения Навье–

Стокса использовались преимущественно для описания течения в пограничных слоях. Неравновесные нормальные напряжения не играют существенной роли в таких течениях. Совершенствование средств и методов вычислений привело к тому, что модель НСФ стала применяться во всей расчетной области. В неравновесных течениях правильный учет объемной вязкости становится принципиально важным.

Выводу выражений для коэффициента объемной вязкости из кинетических уравнений посвящен ряд работ, см. например [5]. Наиболее удобные для задач газовой динамики выражения получены в [12].

В отношении условий на границе раздела фаз отметим, что условия скольжения скорости и скачка температуры [13] даже в сильнонеравновесных течениях хорошо аппроксимируют условия взаимодействия газа с поверхностью [14]. Только при  $Kn^* > 1$  эти граничные условия требуют уточнения.

Недостаточная информативность гидродинамических моделей проявляется и в случае больших чисел Рейнольдса при возникновении турбулентных течений. Этот вид течения, вообще говоря, не может быть описан только на основе положений теории сплошной среды и требует привлечения дополнительных моделей турбулентности. В настоящей работе, посвященной существенно неравновесным течениям, числа Рейнольдса которых малы, проблемы турбулентности рассматриваться не будут.

В предлагаемой классификации моделей динамики газа, не претендующей на их исчерпывающую систематизацию, отсутствует самостоятельный уровень описания, соответствующий моделям неравновесных течений в макроскопических переменных (в дальнейшем – модели неравновесных течений).

Такие модели занимают промежуточное положение между кинетическими и гидродинамическими моделями. В их основе лежит то или иное кинетическое уравнение, из которого при помощи функции распределения специального вида получают замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно макроскопических переменных. Получаемые таким способом модели, с одной

стороны, лишены избыточной информативности кинетических моделей, с другой – содержат необходимую информацию о молекулярных процессах, отсутствующую в теории сплошной среды.

Методы построения моделей неравновесных течений начали разрабатываться в первой половине двадцатого века. Интерес к ним не ослабевает и по сегодняшний день. Прежде всего, к таким методам относятся методы Грэда [15], Чепмена–Энскога [16; 17], Гильберта [13] и целый ряд более поздних методов.

В настоящей работе для построения и анализа моделей неравновесных течений будут применяться системы моментных уравнений. Такой выбор связан с тем, что метод моментных уравнений (метод Грэда) не содержит явных ограничений по таким критериям, определяющим динамическую неравновесность, как числа Маха и Кнудсена. Этому методу уделим особое внимание.

В методе Грэда, реализованном в виде 20- и 13-моментной систем моментных уравнений [15], сначала строится аппроксимирующая функция распределения в виде разложения локально-равновесной функции по полиномам Эрмита относительно тепловой скорости. Предполагается, что бесконечный ряд разложения соответствует истинной функции распределения.

Разложение обрывается на членах, соответствующих моментам  $n$ -го порядка. Аппроксимирующая функция распределения обеспечивает “правильные” значения всех моментов до  $n$ -го порядка включительно. Далее записывается система моментных уравнений с использованием полученной функции распределения. Моменты  $(n+1)$ -го порядка (у Грэда – моменты четвертого порядка), фигурирующие в уравнении моментов  $n$ -го порядка, получают интегрированием аппроксимирующей функции распределения.

В настоящее время для замыкания системы моментных уравнений используются более сложные и более информативные аппроксимирующие функции распределения, см. например [18; 19].

С процедурой замыкания системы уравнений связана одна из особенностей метода: моменты четвертого порядка выражаются через моменты предыдущих порядков локально, без использования балансовых зависимостей – моментных уравнений. В результате полученные моменты четвертого порядка не удовлетворяют своим моментным уравнениям. В дальнейшем будем называть это рассогласованностью локального и балансового выражений замыкающих моментов.

Другой важной особенностью модели Грэда является вид аппроксимирующей функции распределения. Последняя представлена в виде разложения равновесной функции по степеням проекций тепловой скорости молекул. Коэффициентами такого разложения являются неравновесные напряжения и моменты третьего порядка. В периферийной области пространства скоростей, т.е. при больших по модулю значениях молекулярных скоростей, функция распределения приобретает отрицательные значения.

В слабонеравновесных течениях, где неравновесные напряжения и тепловые потоки (свертки моментов третьего порядка) малы, отрицательные области не оказывают существенного влияния на вычисление моментов четвертого порядка.

При высокой степени неравновесности, например в ударных волнах высокой интенсивности, неравновесные напряжения и тепловые потоки по порядку величины приближаются к значениям давления и потока энергии. Выражения моментов четвертого порядка становятся слишком грубым приближением.

В работе [20] на примере задачи о профиле ударной волны показано, что ряд, используемый для аппроксимирующей функции, сходится в среднем при числах Маха, не превышающих 1.85, т.е. имеет место ограничение по числам Маха (формальные ограничения 20-моментной системы по числам Кнудсена отсутствуют).

Интересен тот факт, что в верхней по потоку области профиля ударной волны, рассчитанной по 20-моментной системе Грэда, при  $M_\infty \approx 1.8$  возникает

разрыв пространственных производных макропараметров. Эта область, получившая название «субскачка», прогрессирует с увеличением числа Маха. В ряде работ отмеченное свойство моментных систем называют "коротковолновой неустойчивостью" системы. На основании указанного факта субскачок или коротковолновую неустойчивость ассоциируют с ограничениями работы [20].

В Разделе 1 данной работы представлена 24-моментная система моментных уравнений (система M24), соответствующая 20-моментной системе Грэда в случае одноатомного газа. Эта система может быть получена для аппроксимирующей функции, не содержащей разложений по степеням проекций тепловой скорости, а при некоторых допущениях – для функции общего вида. Тем не менее на профиле ударной волны, рассчитанном с использованием данной системы, возникает субскачок при  $M_\infty \geq 1.8$ .

Модель НСФ, в случае ее формального построения как 5-моментной системы, замыкается 13-моментной функцией (точнее, ее аналогом, часто называемым “навье-стоксовой функцией распределения”) и не имеет ограничений по числам Маха.

Приведенные доводы позволяют предположить, что ограничения на сходимость ряда [20] не являются, по крайней мере, основной причиной образования субскачка. Возникает вопрос о причинах коротковолновой неустойчивости моментных систем, что является одной из задач настоящей работы.

Наиболее часто обсуждаемой, но редко используемой на практике является 13-моментная система Грэда. Она представляет собой упрощенный вариант 20-моментной системы, в которой вместо моментов третьего порядка используются их свертки, т.е. проекции вектора теплового потока. Бездивергентной частью тензора моментов третьего порядка в уравнении напряжений пренебрегают, что вносит ограничения по числам Кнудсена. Такое упрощение привело к отсутствию решений системы в области сверхзвуковых течений (точнее, при  $M_\infty \geq 1.65$ ). Из-за пренебрежения бездивергентным тензором были потеряны члены второго

порядка малости в уравнении неравновесных напряжений, в результате чего оставшиеся члены второго порядка стали внепорядковыми.

Формально ограничения по числам Кнудсена должны быть такими же, как у модели НСФ ( $Kn^* \ll 1$ ). Этот недостаток 13-моментной системы отмечался рядом авторов и подробно исследован в [13].

В работах [21; 22] построена модель, уточняющая 13-моментную систему уравнений Грэда. Если отвлечься от специфических корректировок 13-моментной системы, то основное содержание работы сводится к тому, что для сверток моментов четвертого порядка, фигурирующих в уравнениях теплового потока, записываются соответствующие моментные уравнения, замыкаемые локализованными в указанном смысле моментами пятого порядка. Далее применяется процедура, аналогичная методу Чепмена–Энскога.

В результате для сверток моментов четвертого порядка получают балансовые (нелокализованные) зависимости, которые и используются для замыкания уравнений третьего порядка. Аналогичная процедура применяется к бездивергентному тензору моментов третьего порядка. Как указывалось выше, модель R13 не содержит явных ограничений по числам Маха. Ограничение по числам Кнудсена, связанное с использованием процедуры Чепмена–Энскога во втором приближении, менее жестки, чем в исходной 13-моментной модели:  $Kn^* < 1$ .

В настоящее время модель R13 находит применение в решении практических задач [23, 24].

Метод Грэда изначально использовался только для одноатомных газов. Позже метод был применен для построения моделей течения многоатомных газов [25; 26]. Эти модели не получили широкого распространения в практике газодинамических расчетов.

Граничные условия на твердой поверхности в моделях Грэда формулируются на основе кинетических условий с последующей аппроксимацией функции распределения в граничной точке (функции распределения с разрывом)

полиномами Эрмита. Выделение моментов функции распределения, для которых необходимо задавать граничные условия, осуществляется по количеству семейств характеристик при данной размерности задачи. Характеристики определяются при достаточно сильных допущениях. Отметим, что в гидродинамическом приближении полученные таким способом граничные условия совпадают по структуре с условиями скольжения скорости и скачка температуры, о которых было сказано выше [13].

Позже были разработаны общие методы построения граничных условий для системы моментных уравнений, см. например [27]. Набор моментов, для которых выставляются граничные условия определяется достаточно произвольно.

В отношении упрощения 20-моментной системы, не содержащей внепорядковых членов, до 13-моментной, необходимо отметить следующее. Указанное упрощение имело своей целью замену тензорного уравнения моментов третьего порядка векторным уравнением теплового потока с соответствующим сокращением системы уравнений. С появлением средств и методов многопроцессорной обработки данных такое сокращение количества уравнений в системе потеряло свою актуальность.

При решении систем уравнений в частных производных на многопроцессорных вычислительных устройствах векторное или тензорное уравнение рассматривается как единое уравнение, допускающее эффективное распараллеливание. С этой точки зрения и 20- и 13-моментные системы, в их классической форме, представляют собой системы пяти уравнений. Замена скалярного уравнения энергии и тензорного уравнения неравновесных напряжений ( $p_{ij}$ ) одним тензорным уравнением полных напряжений ( $P_{ij}$ ) позволяет свести обе системы к четырем уравнениям: скалярному уравнению сохранения массы, векторному уравнению сохранения импульса, тензорному уравнению полных напряжений и тензорному уравнению моментов третьего порядка (20-моментная система) или векторному уравнению теплового потока (13-моментная система).

Различие между 20-моментной и 13-моментной системами в случае их многопроцессорной численной реализации будет заключаться только в том, что 20-моментной системе потребуется 10 процессоров (уравнение моментов третьего порядка), а 13-моментной – 6 процессоров (уравнение полных напряжений).

В связи с указанным, в настоящей работе не будут рассматриваться сокращенные варианты разработанных систем моментных уравнений.

Еще один широко используемый метод построения моделей неравновесных течений – метод Чепмена–Энскога – основан на разложении локально равновесной функции распределения по степеням малого параметра, имеющего смысл характерного числа Кнудсена. Старшую степень малого параметра принято считать номером или порядком приближения. Для нулевого и первого приближений  $Kn^* \ll 1$ , для высших приближений  $Kn^* < 1$ .

В отличие от метода Гильберта, макропараметры  $\rho$ ,  $u$ ,  $T$  в ряд не разлагаются; разложению подлежит оператор локальной производной. Функция распределения подставляется в уравнение Больцмана, и проводится сортировка членов уравнения по порядку малости величины. Полученное интегральное уравнение относительно малых добавок к локально равновесной функции распределения в совокупности с условиями разрешимости этого уравнения позволяет определить вид функции распределения в соответствующем приближении.

Система дифференциальных уравнений, получаемая этим методом, состоит только из уравнений сохранения. Содержащиеся в ней неравновесные величины вычисляются как моменты функции распределения соответствующего приближения. В приближениях от нулевого до третьего получают модели Эйлера, НСФ, Барнетта и супер-Барнетта. Отметим что терминами «метод Чепмена–Энскога» или «процедура Чепмена–Энскога» иногда обозначают сортировку членов по порядку величины малого параметра в зависимостях, не связанных с уравнениями сохранения см. например [21].



Во второй половине прошлого века получили развитие методы расчета многокомпонентных и химически реагирующих газовых течений, базирующиеся на классическом методе Чепмена–Энскога и существенно расширяющие его возможности [12; 28; 29; 30].

Одна из особенностей метода Чепмена–Энскога заключается в том, что приближения второго и следующих порядков содержат посторонние решения [31]. Причины этого будут рассмотрены в Разделе 3 при выводе моделей второго приближения из системы моментных уравнений. Основные сложности численной реализации модели Барнетта изложены в работах [32; 33; 34].

Высшие приближения метода Чепмена–Энскога имеют значительную теоретическую значимость, так как в них появляются новые, не содержащиеся в модели НСФ члены, например температурные напряжения. Анализ таких членов способствует лучшему пониманию процессов, протекающих в неравновесных течениях. Однако область практического применения моделей высших приближений слишком узка.

В моделях первого приближения предполагается, что члены порядка  $\text{Kn}^*$  существенны, а члены порядка  $(\text{Kn}^*)^2$  и более пренебрежимо малы. Класс течений, для которых такое приближение приемлемо, достаточно широк. Значительно более узкий класс течений допускает второе приближение, предполагающее существенными членами  $(\text{Kn}^*)^2$ , но пренебрегающее членами  $(\text{Kn}^*)^3$  и выше. И только очень специфические условия течения могут потребовать приближения, в котором существенны члены порядка  $(\text{Kn}^*)^3$  и не существенны уже члены  $(\text{Kn}^*)^4$ .

Метод Гильберта позволяет строить модели течений какого-либо определенного вида. Модификации метода Гильберта [35; 36] допускают «сшивание» таких течений, например внешнее течение «сшивается» с погранслоем, а тот, в свою очередь, с кнудсеновским слоем, в котором выставляются граничные условия на твердой поверхности.

Современные тенденции в области математического моделирования течений заключаются в использовании единой физико-математической модели для описания всего течения, чему способствует интенсивное развитие вычислительных средств. Хотя методы «сшивания» и комбинации различных моделей остаются достаточно актуальными, в данной работе они рассматриваться не будут. Обзор методов комбинации различных моделей приведен в работе [37].

Модели, использующие разрывную функцию распределения, впервые были предложены И.Е. Таммом и Г.М. Мот-Смитом для решения задачи о структуре ударной волны (бимодальное распределение). Общий метод построения таких моделей описан в [13]. Сам метод не предусматривает каких-либо ограничений на числа  $M$  и  $Kn^*$ , более того, он применим для построения свободномолекулярных моделей.

Пространство скоростей разбивается на отдельные области. Внутри каждой области записывается индивидуальная функция распределения. Затем записываются системы моментных уравнений для всех функций. Количество получаемых систем, очевидно, соответствует количеству областей разбиения, что существенно повышает трудоемкость численной реализации. Модели этой группы отличаются простотой формулировки граничных условий, вполне адекватных кинетическим граничным условиям. При  $Kn \rightarrow \infty$  и соответствующем разбиении пространства скоростей, модели дают точное свободномолекулярное решение.

Чаще всего в качестве индивидуальных функций используют локально максвеллову функцию распределения. Примером может служить модель [38], построенная на базе двухпоточной функции распределения и исследованная применительно к распространению волновых возмущений в разреженном газе. При  $Kn \approx 1$  расчетные значения фазовой скорости и коэффициента затухания хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Более общий характер имеет модель [39; 40]. Здесь пространство скоростей в общем случае может быть разбито на области (фрагменты), соответствующие октантам прямоугольной декартовой системы координат. В зависимости от

условий решаемой задачи, фрагменты могут объединяться. В качестве индивидуальных функций используются не только равновесные сферические, но и «деформированные» функции распределения.

Тестирование этой модели в широком интервале чисел Кнудсена показало, что в переходной области течения ( $Kn \approx 1$ ) она почти не улучшает более экономичную модель НСФ даже в пристеночных областях, где, как предполагалось, она должна иметь существенное преимущество. Дальнейшего развития эта модель не получила.

В качестве самостоятельного направления в области моделирования неравновесных течений может быть рассмотрено направление, связанное с конструированием одночастичных функций распределения, не содержащих асимптотических разложений по малому параметру или по степеням проекций тепловой скорости [18; 19; 41; 42; 43]. Такие функции, преимущественно, имеют вид максвелловой (гауссовой) функции распределения, аргумент которой включает в себя, помимо традиционных макропараметров, энтропию и внешнее произведение проекций тепловой скорости.

В отношении моделей, построенных с использованием такой функции, отметим только, что они еще далеки от практической газодинамики. Перспективность такого рода исследований в области течений высокой динамической неравновесности вызывает сомнения. Действительно, эти исследования, по существу, подразумевают получение некоторой единой функции, описывающей "поле течения" в пространстве скоростей.

Если провести аналогию с описанием поля течения в геометрическом пространстве на базе единой функции или даже конечного набора функций, не связанных дифференциальными или интегральными зависимостями, то надежда на положительный результат таких исследований представляется слишком оптимистичной. Исключения составляют состояния, близкие к равновесному, если речь идет о пространстве скоростей, или поля течений, близкие к однородным в геометрическом пространстве. В обоих случаях можно построить разложения с приемлемым числом членов.

В отношении неравновесных течений такие, достаточно общие соображения приводят к выводу о том, что замыкание системы моментных уравнений с помощью функции распределения какого-либо конкретного вида имеет характер сильного допущения. При построении системы моментных уравнений целесообразно как можно меньше конкретизировать аппроксимирующую функцию распределения.

Рассмотренные выше модели неравновесных течений находились между кинетическим и гидродинамическим уровнями используемой классификации. В 80-х годах прошлого столетия начали развиваться методы расчета, в основу которых были положены кинетически согласованные разностные схемы [44; 45; 46; 47]. Дальнейшее развитие эти методы получили в виде квазигидродинамической системы уравнений [48].

Особенностью этих моделей является то, что в них рассматривается дискретная эволюция функции распределения, с дальнейшим преобразованием аналога кинетического уравнения в систему макроскопических уравнений. С точки зрения используемой классификации эти модели содержат элементы всех трех уровней описания и представляются достаточно перспективными. К преимуществам этих моделей также надо отнести их органическую «настроенность» на параллельные (многопроцессорные) вычисления.

Чисто формальная база моделей этого типа (разностные схемы численного решения кинетического уравнения) требует большого числа допущений феноменологического характера для согласования формальной базы с описываемыми физическими процессами. В ряде случаев допущения сделаны неудачно. Например, в работе [49] в результате произвольного выбора числа Прандтля (в исходной модели оно равно единице) коэффициент объемной вязкости не соответствует времени вращательной релаксации, используемому в данной модели.

Ввиду актуальности методов расчета неравновесных течений число исследований в этой области достаточно велико. Рассмотренные модели течений – это далеко не полный перечень современных методов описания динамики

газовых сред. Представленный выше обзор надо рассматривать скорее как некоторое сечение по множеству существующих моделей, соответствующее направленности данной работы. На основании проведенного обзора сформулированы основная цель и задачи работы.

**Цель работы** – развитие метода моментных уравнений и расширение его на течения многоатомных газов.

**Основные задачи работы.**

- Разработка метода построения системы моментных уравнений с минимальной конкретизацией аппроксимирующей функции распределения.
- Разработка метода снижения коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений.
- Разработка физико-математических моделей неравновесных течений, базирующихся на системе моментных уравнений многоатомных газов.
- Исследование основных свойств моделей первого приближения, следующих из системы моментных уравнений.
- Построение модели второго приближения, не содержащей посторонних решений.
- Разработка граничных условий на твердой поверхности для широкого интервала чисел Кнудсена.
- Разработка инженерных моделей неравновесных течений многоатомного однокомпонентного газа.
- Численное тестирование разработанных моделей.

**Объект исследования** – течения высокой степени динамической неравновесности.

**Предмет исследования** – физико-математические модели неравновесных течений однокомпонентных газов.

**Методология и методы исследования.**

В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученных систем моментных уравнений и физико-математических моделей использовался метод численного эксперимента. В численных

экспериментах рассматривались, в основном, вырожденные течения: задача о структуре ударной волны, плоское течение Куэтта, теплопередача в плоском слое неподвижного газа.

Изучение основных свойств систем моментных уравнений проводилось на основе решения задачи о структуре ударной волны. Такой выбор тестовой задачи обусловлен следующими обстоятельствами:

- задача не требует формулировки условий на границе раздела фаз и позволяет исследовать исключительно свойства систем уравнений;
- в граничных точках расчетной области определены значения всех величин, входящих в систему моментных уравнений, включая неравновесные величины;
- степень динамической неравновесности течения практически не ограничена;
- имеется обширный эмпирический и теоретический материал;
- разработаны высокоэффективные методы численного решения первой начально-краевой задачи данного вида.

#### **Научная новизна работы.**

- Предложен метод построения системы моментных уравнений для функции распределения общего вида, без конкретизации модели межмолекулярного взаимодействия. При этом вводятся два дополнительных допущения. Метод не имеет аналогов.
- Предложены два метода снижения коротковолновой устойчивости системы моментных уравнений. Процедура получения дополнительных соотношений для системы моментных уравнений, используемая в предложенных методах, имеет аналог [21].
- Впервые показана физическая неадекватность 5-моментной модели в отношении определения температур поступательных и внутренних степеней свободы молекулы.
- Разработана модель второго приближения, не содержащая посторонних решений. Показано, что в условиях равновесия эта модель не имеет единственного решения. Модель не имеет аналогов.

- Разработана модель граничных условий на твердой поверхности, не имеющая ограничений по числам Кнудсена. Модель не имеет аналогов.
- Разработаны инженерные модели, обеспечивающие достаточно широкий профиль ударной волны. Модели не имеют аналогов.

**На защиту выносятся:**

- метод построения системы моментных уравнений для функции распределения общего вида;
- методы снижения коротковолновой неустойчивости моментной системы;
- модель граничных условий на твердой поверхности, не имеющая ограничений по числам Кнудсена;
- внепорядковая и гибридная инженерные модели.

**На защиту, также выносятся положения:**

- об основной причине коротковолновой неустойчивости моментных систем;
- о физической неадекватности температур поступательных и внутренних степеней свободы, определенных 5-моментными системами уравнений, включая системы Навь-Стокса-Фурье, Барнетта и др..

**Научная и практическая значимость работы.**

Метод построения системы моментных уравнений в совокупности с методами снижения ее коротковолновой неустойчивости позволяют разрабатывать физико-математические модели с моментами более высокого порядка, что позволит расширить область применения этих моделей как по числам Маха, так и по числам Кнудсена.

Инженерные модели и модель граничных условий на твердой поверхности могут быть использованы при разработке пакетов прикладных программ для расчетов следующих задач:

- сверх- и гиперзвуковое обтекание летательных аппаратов;
- течения в каналах при  $Kn \leq 1$ .

**Достоверность результатов исследования** подтверждена сравнением полученных расчетных данных с данными экспериментальных исследований разных авторов.

**Апробация и внедрение результатов.**

Результаты работы были представлены на следующих семинарах:

- видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбГТУ – НИИМ МГУ, 4 февраля 2014г.;
- семинар Сектора кинетической теории газов Вычислительного центра им. А.А.Дородницына, 3 марта 2015г.;
- международный авиационно-космический научно-гуманитарный семинар им. С.М. Белоцерковского, 19 марта 2015г..

Результаты работы включены в курс лекций по дисциплине "Динамика неравновесных сред", читаемый на кафедре "Аэродинамика ЛА" Московского авиационного института.

**Публикации.**

Основные результаты работы опубликованы в ведущих рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК (13 статей по одному авторскому листу каждая), в монографии объемом 10 авторских листов и в учебном пособии объемом 5 авторских листов.

Из указанных публикаций 10 статей и монография опубликованы лично автором.

**Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из введения, семи разделов, заключения, списка сокращений и условных обозначений и списка использованных источников. Общий объем составляет 252 страницы, включая 51 рисунок. Список использованных источников содержит 106 наименований.



## СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ

## 1.1. Основные допущения. Используемые термины и символы

Будет рассматриваться одночастичная функция распределения, фазовое пространство которой дополнено энергией внутренних степеней свободы молекулы:  $f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$ . Здесь  $t$  – время;  $x_i$  – декартовы координаты геометрического пространства;  $\xi_i$  – проекции молекулярной скорости (скорость молекулы в лабораторной системе координат);  $\varepsilon$  – энергия внутренних степеней свободы молекулы.

Помимо молекулярной скорости, рассматривается тепловая скорость молекулы  $c_i = \xi_i - u_i$ , где  $u_i = \frac{1}{n} \int \xi_i f d\bar{\xi} d\varepsilon$  – групповая скорость молекул или макроскопическая скорость газа;  $n$  – концентрация молекул,  $d\bar{\xi} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$  – элемент объема в пространстве скоростей.

Под энергией внутренних степеней свободы понимается разность между полной энергией теплового движения молекулы и энергией ее поступательного теплового движения (энергия межмолекулярного взаимодействия принимается пренебрежимо малой). Такой подход вполне применим к описанию течений, температура которых находится в интервале  $(10^2 \dots 10^4)$  К, и, следовательно, квантование вращательных и возбуждение колебательных степеней свободы молекулы не существенны.

Используемая интерпретация энергии внутренних степеней свободы позволяет упростить вывод моментных уравнений, учитывающих обмен энергией между поступательными и внутренними степенями свободы. Хорошо разработанные методы двухтемпературной релаксации [5; 12; 41; 50; 51; 53] дают аналогичные моментные уравнения. Отличие заключается в зависимостях для времен релаксации неравновесных параметров, связанных с обменом энергией

между поступательными и внутренними степенями свободы. О времени релаксации будет сказано ниже, здесь отметим только, что использование зависимостей типа приведенных в [5; 12] позволяет несколько расширить интервал температур.

Энергию теплового движения молекул, заключенных в единице объема, определим следующим образом:

$$E = \int \left( \frac{m_0 c^2}{2} + \varepsilon \right) f d\bar{c} d\varepsilon = n \frac{m_0 \overline{c^2}}{2} + E_{\Omega}. \quad (1.1)$$

Здесь  $m_0$  – масса молекулы;  $E_{\Omega}$  – энергия внутренних степеней свободы молекул, заключенных в единице объема;  $\overline{c^2}$  – средний квадрат тепловой скорости;  $d\bar{c} \equiv dc_1 dc_2 dc_3 = d\bar{\xi}$  – элемент объема в пространстве скоростей.

Температура поступательных степеней свободы (поступательная температура) определена в молекулярно кинетической теории:

$$\frac{3}{2} k T_t = \frac{m_0 \overline{c^2}}{2}, \quad (1.2)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана. Таким образом, поступательная температура может рассматриваться как удвоенная средняя энергия поступательного движения молекулы, приходящаяся на одну поступательную степень свободы. Постоянная Больцмана в этом выражении выполняет функции коэффициента, переводящего единицу измерения энергии 1 джоуль в 1 кельвин.

Температура, называемая далее «термодинамической температурой», определена термодинамическим соотношением

$$E = c_v \rho T, \quad (1.3)$$

где  $c_v$  – изохорная теплоемкость,  $\rho$  – плотность газа.

Из определений  $E$ ,  $T_t$  и  $T$  следует определение «температуры внутренних степеней свободы»  $T_{\Omega}$ :

$$c_v T = \frac{3}{2} R T_t + c_{\Omega} T_{\Omega}. \quad (1.4)$$

Здесь  $R = \frac{k}{m_0}$  – удельная газовая постоянная;  $c_\Omega = c_v - \frac{3}{2}R$  – теплоемкость внутренних степеней свободы молекулы. При допущениях, сделанных в отношении температурного интервала рассматриваемых течений, температура  $T_\Omega$  может рассматриваться как «вращательная температура», однако такая трактовка в настоящей работе применяться не будет.

Энергия  $E_\Omega$  и температура  $T_\Omega$  связаны соотношением

$$E_\Omega = c_\Omega \rho T_\Omega. \quad (1.5)$$

Кроме этого, будем использовать разность поступательной температуры и температуры внутренних степеней свободы:

$$\theta = T_t - T_\Omega, \quad (1.6)$$

являющуюся, очевидно, неравновесной величиной.

В соответствии с (1.4) температуры находятся в следующем соотношении:

$$T_t = T + \frac{5-3\gamma}{2}\theta; \quad (1.7)$$

$$T_\Omega = T - \frac{3}{2}(\gamma-1)\theta, \quad (1.8)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Под напряжением или моментом второго порядка будем понимать  $P_{ij} = m_0 \int c_i c_j f d\bar{c} d\varepsilon$ . Для удобства записи введем удельное напряжение, т.е. напряжение (плотность потока импульса), приходящееся в среднем на одну молекулу:

$$T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}. \quad (1.9)$$

Будем рассматривать два вида разложения тензора напряжений на сферический и бездивергентный тензоры:

$$P_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m; \quad (1.10)$$

$$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p. \quad (1.11)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

В дальнейшем  $p^m$  будем называть «механическим давлением», а  $p$  – «термодинамическим давлением» в соответствии с их определениями:

$$p^m = \frac{1}{3} P_{\alpha\alpha} = \rho R T_t, \quad (1.12)$$

$$p = \rho R T. \quad (1.13)$$

В уравнении (1.12) и ниже принято суммирование по повторяющимся греческим индексам.

Механическое давление  $p^m$  в соответствии с его определением (1.12) представляет собой среднее значение нормального напряжения (плотности потока импульса), которое может быть ассоциировано с энергией поступательных степеней свободы, так как отличается от нее только постоянным множителем  $\frac{2}{3}$ .

Термодинамическое давление  $p$  подразумевает осреднение всей (не только поступательной) энергии теплового движения по всем (поступательным и внутренним) степеням свободы молекул. Таким образом термодинамическое давление характеризует энергию теплового движения, а не напряжения в их механическом понимании. В состоянии равновесия газовой среды энергия теплового движения равномерно распределена по степеням свободы. Значения обоих давлений совпадают.

В неравновесных условиях значения  $p^m$  и  $p$  уже не могут рассматриваться в виде единого параметра газовой среды. Градиенты скорости, присутствующие в поле течения, приводят к перераспределению энергий группового и теплового движений. Характерно, что энергия группового движения, например при торможении потока, передается сначала на поступательные степени свободы.

Если в качестве одной из степеней свободы рассматривать координатную ось в направлении движения среды, то энергия будет передаваться только на эту поступательную степень свободы. Такой процесс обусловлен "деформацией" функции распределения и не связан с межмолекулярными столкновениями.

Далее, в результате столкновений молекул энергия перераспределяется между поступательными и внутренними степенями свободы. При этом

энергообмен между различными поступательными степенями свободы протекает в несколько раз быстрее, чем между поступательными и внутренними.

Таким образом, поступательные и внутренние степени свободы находятся в разных условиях по отношению к процессу энергообмена, что и приводит к несовпадению средних энергий на этих степенях свободы и, следовательно, к различным значениям  $p^m$  и  $p$ . Процесс энергообмена между степенями свободы молекул подробно рассмотрен в подразделе 3.1.

Величины  $p_{ij}^m$  представляют собой неравновесные напряжения. Приставка «механическое» по отношению к  $p_{ij}^m$  избыточна, так как напряжение является механической величиной по определению. Надстрочный символ используется для единства символики в выражениях типа (1.10). Кроме этого, в рамках используемой символики  $p_{ij}^m \equiv p_{ij} \equiv P_{ij}$  при  $i \neq j$ . Нормальные неравновесные напряжения обладают очевидным свойством:

$$p_{\alpha\alpha}^m \equiv 0. \quad (1.14)$$

Величины  $p_{ii}$ , компоненты главной диагонали тензора  $\{p_{ij}\}$ , строго говоря, не являются напряжениями в механическом понимании. Будем называть их, а вместе с ними и остальные компоненты  $\{p_{ij}\}$  «термодинамическими неравновесными напряжениями».

Уравнения (1.7), (1.10) – (1.12) позволяют установить связь между тензорами  $\{p_{ij}^m\}$  и  $\{p_{ij}\}$ :

$$p_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \rho R \theta. \quad (1.15)$$

Из последнего выражения следует, что нормальные термодинамические неравновесные напряжения содержат в себе величину, пропорциональную разности энергий на поступательных и внутренних степенях свободы молекул. Такая форма неравновесного напряжения, традиционно используемая в газодинамике, обязана своим существованием неоднозначному определению понятия давления.

Будем рассматривать две группы моментов третьего порядка. Первую группу определим следующим образом:

$$\varphi_{ijk} = \frac{m_0}{2} \int c_i c_j c_k f d\bar{c} d\varepsilon. \quad (1.16)$$

Свертка тензора  $\{\varphi_{ijk}\}$ , очевидно, представляет собой вектор теплового потока, обусловленный переносом энергии поступательного движения молекул:

$$\varphi_{i\alpha\alpha} \equiv \varphi_i. \quad (1.17)$$

Моменты второй группы:

$$\omega_i = \int c_i \varepsilon f d\bar{c} d\varepsilon. \quad (1.18)$$

Это вектор теплового потока, обусловленный переносом внутренней энергии молекул. Полный тепловой поток:

$$q_i = \varphi_i + \omega_i. \quad (1.19)$$

Дадим количественную трактовку термина "степень неравновесности" течения. Этот параметр целесообразно определять по неравновесным значениям энергии на степенях свободы молекулы. Для удобства записи будем выражать энергию в терминах термодинамического давления и, следовательно, нормальных неравновесных термодинамических напряжений. Как отмечено выше, именно термодинамическое давление характеризует энергию теплового движения.

Введем следующие обозначения:

– количество степеней свободы молекулы:

$$N_\Sigma = \frac{2}{\gamma - 1}; \quad (1.20)$$

– количество внутренних степеней свободы молекулы:

$$N_\Omega = N - 3 = \frac{5 - 3\gamma}{\gamma - 1}. \quad (1.21)$$

В системе главных осей тензора напряжений неравновесные напряжения представлены только нормальными составляющими, пропорциональными неравновесным значениям энергии на поступательных степенях свободы. Сумма квадратов неравновесных нормальных напряжений в главных осях представляет

собой квадрат соответствующего тензора. В силу инвариантности квадрата тензора напряжений

$$p_{XX}^2 + p_{YY}^2 + p_{ZZ}^2 = p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}. \quad (1.22)$$

Индексы, записанные прописными латинскими буквами  $X, Y, Z$ , обозначают главные оси тензора напряжений. Правая часть (1.22) представлена в произвольной системе координат.

Неравновесное значение энергии на двух внутренних степенях свободы определено в соответствии с (1.5) и (1.8):

$$\rho R(T_{\Omega} - T) = -\frac{3}{2}(\gamma - 1)\rho R\theta. \quad (1.23)$$

Напомним, что нормальное напряжение соответствует удвоенной энергии одной степени свободы.

Определим неравновесное состояние газовой среды отношением

$$w = \frac{\sqrt{p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + N_{\Omega}(\rho R(T_{\Omega} - T))^2}}{p} = \frac{\sqrt{p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \frac{9}{4}(5 - 3\gamma)(\gamma - 1)(\rho R\theta)^2}}{p}. \quad (1.24)$$

Это отношение имеет теоретический предел, соответствующий состоянию газа, при котором вся энергия теплового движения молекул сосредоточена только на одной поступательной степени свободы. Если обогащенная энергией степень свободы соответствует одной из осей системы координат, то неравновесное напряжение, возникающее на этой оси, составляет  $(N - 1)p$ . На остальных степенях свободы напряжение принимает значение  $(-p)$ . Следовательно,

$$w_{\max} = \frac{\sqrt{((N_{\Sigma} - 1)p)^2 + 2(-p)^2 + N_{\Omega}(-p)^2}}{p} = \frac{\sqrt{6 - 2\gamma}}{\gamma - 1}. \quad (1.25)$$

Под степенью неравновесности будем понимать, определенную на единичном отрезке величину:

$$\begin{aligned}
 W = \frac{w}{w_{\max}} &= \frac{\gamma - 1}{\sqrt{6 - 2\gamma}} \frac{\sqrt{p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \frac{9}{4}(5 - 3\gamma)(\gamma - 1)(\rho R \theta)^2}}{p} = \\
 &= \frac{\gamma - 1}{\sqrt{6 - 2\gamma}} \frac{\sqrt{p_{\alpha\beta}^m p_{\alpha\beta}^m + \frac{3}{2}(5 - 3\gamma)(\rho R \theta)^2}}{p} .
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Выражение  $W$  через  $p_{ij}^m$  следует из (1.15).

## 1.2. Построение системы моментных уравнений

В работе Грэда [15] и более поздних работах (см., например, [5]) построение системы моментных уравнений начинается с определения аппроксимирующей функции распределения. Моментные уравнения получают посредством подстановки этой функции в уравнение Максвелла–Больцмана. Такая последовательность построения позволяет выразить релаксационные члены моментных уравнений через параметры столкновения молекул.

Модель процесса столкновений, как правило, сильно упрощена или представлена в настолько общем виде, что не приводит к каким-либо конкретным зависимостям. На практике даже в кинетических моделях течений используют максвелловское время релаксации в его гидродинамическом приближении:

$\tau_{\text{рел}} = \frac{\mu}{p}$  (см., например, [4]). В моментных уравнениях тепловых потоков учет

внутренних степеней свободы, как правило, ограничивается введением модифицированной поправки Эйкена в гидродинамическое приближение коэффициента теплопроводности. Впрочем, это приближение обеспечивает вполне удовлетворительную с практической точки зрения точность [54].

С учетом сказанного, представляется целесообразным строить систему моментных уравнений для функции распределения общего вида, представляя правые части уравнений в релаксационной форме, следуя работе [55] или работе [56], в которой использована система символов и обозначений, соответствующая



настоящей работе. Времена релаксации моментов могут быть выражены с привлечением эмпирических, феноменологических и других зависимостей. В настоящей работе времена релаксации будут рассматриваться в гидродинамическом приближении.

При таком построении к аппроксимирующей функции распределения будут предъявляться более мягкие требования. От нее потребуются конкретные выражения только для замыкающих моментов. В системе моментных уравнений  $n$ -го порядка это моменты порядка  $n+1$ . В отношении остальных моментов вид функции распределения может быть достаточно общим. В дальнейшем будем исходить из того, что функция распределения более общего вида меньше огрубляет истинную функцию.

Перейдем к построению системы моментных уравнений. Следуя работе Грэда [15], ограничимся системой моментных уравнений до третьего порядка включительно. Общее уравнение переноса имеет вид

$$\int V_{ijk\dots}^{(N)} \frac{\partial f}{\partial t} d\bar{\xi} d\varepsilon + \int V_{ijk\dots}^{(N)} \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} d\bar{\xi} d\varepsilon = \int V_{ijk\dots}^{(N)} J^+ d\bar{\xi} d\varepsilon - \int V_{ijk\dots}^{(N)} J^- d\bar{\xi} d\varepsilon. \quad (1.27)$$

Здесь  $V_{ijk\dots}^{(N)}$  – молекулярный признак момента  $N$ -го порядка;  $J^-$  и  $J^+$  – интегралы прямых и обратных столкновений.

Моменты, не содержащие энергию внутренних степеней свободы, определим как  $M_{ijk\dots}^{(N)} = m_0 \int c_i c_j c_k \dots f d\bar{c} d\varepsilon$ , где  $N$  (порядок момента) соответствует рангу представляющего этот момент тензора. Молекулярный признак этих моментов:  $V_{ijk\dots}^{(N)} = m_0 \xi_i \xi_j \xi_k \dots$

Моменты, содержащие энергию внутренних степеней свободы, –  $M_{ijk\dots}^{\Omega(N)} = \int \varepsilon c_i c_j c_k \dots f d\bar{c} d\varepsilon$ . Ранг соответствующего тензора  $N-2$  (моменты ниже второго порядка не существуют). Молекулярный признак этих моментов:  $V_{ijk\dots}^{(N)} = \varepsilon \xi_i \xi_j \xi_k \dots$ . Рассматриваются только центрированные моменты, т.е. моменты, вычисляемые в системе координат, связанной с потоком газа. Ниже приведены основные моменты в формальном и газодинамическом обозначениях:

$$M^{(0)} \equiv \rho; M_i^{(1)} \equiv 0; M_{ij}^{(2)} \equiv P_{ij}; M^{\Omega(2)} \equiv E_{\Omega}; M_{ijk}^{(3)} \equiv 2\varphi_{ijk}; M_i^{\Omega(3)} \equiv \omega_i.$$

Уравнение (1.27), проинтегрированное с соответствующим молекулярным признаком, позволяет записать общее моментное уравнение порядка  $N \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ijk\dots}^{(N)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( u_{\alpha} M_{ijk\dots}^{(N)} \right) + M_{***\dots\alpha}^{(N)} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{M_{***\dots}^{(N-1)}}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial M_{ijk\dots\alpha}^{(N+1)}}{\partial x_{\alpha}} = \\ = \frac{M_{ijk\dots}^{(N)+}}{\tau^{+}} - \frac{M_{ijk\dots}^{(N)}}{\tau}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\text{Здесь } \frac{M_{ijk\dots}^{(N)+}}{\tau^{+}} = \int V_{ijk\dots}^{(N)} J^{+} d\bar{\xi} d\varepsilon - u_{*} \int V_{***\dots}^{(N-1)} J^{+} d\bar{\xi} d\varepsilon - u_{*} u_{*} \int V_{***\dots}^{(N-2)} J^{+} d\bar{\xi} d\varepsilon - \dots$$

– быстрота наработки момента в результате обратных столкновений;  $\tau$  – среднее время свободного пробега молекулы;  $1/\tau^{+}$  – средняя частота обратных столкновений. В уравнениях моментов, содержащих энергию внутренних степеней свободы, символ  $M_{\dots}$  должен быть заменен символом  $M_{\dots}^{\Omega\dots}$ .

Подстрочный символ “звездочка” обозначает операцию симметрирования с исключением повторений тождественных по величине одночленов, например для симметричного тензора  $\{M_{ijk}^{(3)}\}$ :

$$\begin{aligned} M_{**\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} &\equiv M_{ij\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\alpha}} + M_{ki\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_{\alpha}} + M_{jk\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} = \\ &= M_{\underline{ji}\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\alpha}} + M_{ki\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_{\alpha}} + M_{jk\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} = M_{ij\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\alpha}} + M_{\underline{ik}\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_{\alpha}} + M_{jk\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} = \dots \quad (1.29) \\ &\dots = M_{\underline{ji}\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\alpha}} + M_{\underline{ik}\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_{\alpha}} + M_{\underline{kj}\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} \end{aligned}$$

Правая часть тождества содержит восемь эквивалентных сумм. В данном пример эквивалентность обусловлена симметрией тензора  $\{M_{ijk}^{(3)}\}$ . Символы, транспонированные относительно первой суммы, подчеркнуты.

Такая операция “компактного симметрирования” характерна для моментных уравнений. В отличие от традиционной операции симметрирования, данная операция, примененная к моментным уравнениям, освобождает их от

постоянных множителей. Например, если  $\{A_{ijkl}\} = \{P_{ij}P_{kl}\}$ , т.е.  $A = P \otimes P$  (такое произведение тензора напряжений встретится ниже), то компактная и традиционная формы записи соотносятся как  $P_{**}P_{**} = 1/8 A_{(ijkl)}$ , так как нетождественных по величине одночленов только три, и каждому из них соответствует восемь сочетаний индексов. Тожественность одночленов в данном случае обусловлена не только симметрией тензора  $\{P_{ij}\}$ , но и тем, что тензор  $\{A_{ijkl}\}$  представляет собой внешнее произведение тензора  $\{P_{ij}\}$  самого на себя.

В (1.28) предполагается, что одночлен, содержащий свертку тензора нулевого ранга  $E_{\Omega}$ , не существует.

Отметим, что уравнение (1.28) аналогично общему уравнению моментов, полученному Грэдом [15]. Последнее представляет собой линейную комбинацию уравнений для коэффициентов разложения по полиномам Эрмита. Операция компактного симметрирования аналогична векторному оператору "симметричная сумма" Грэда. В отличие от этого оператора, операция компактного симметрирования распространена на выражения, не содержащие производных по координатам геометрического пространства, что показано в приведенном выше примере.

Подставляя в (1.27) молекулярные признаки  $m_0$  и  $m_0\xi_i$ , получим уравнения сохранения массы и импульса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0; \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho u_i u_{\alpha} + P_{i\alpha}) = 0. \quad (1.31)$$

В дальнейшем помимо дивергентной записи (1.31) будет использоваться уравнение для макроскопической скорости, получаемое линейной комбинацией (1.30) и (1.31):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0. \quad (1.32)$$

Это уравнение описывает динамику неинерциальной системы координат, в которой выполняется условие  $M_i^{(1)} \equiv 0$ .

Остальные моментные уравнения получены с помощью зависимости (1.28). Уравнение энергии внутренних степеней свободы:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{\Omega} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (u_{\alpha} E_{\Omega}) + \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{E_{\Omega}^+}{\tau^+} - \frac{E_{\Omega}}{\tau} = \frac{\frac{\tau}{\tau^+} E_{\Omega}^+ - E_{\Omega}}{\tau} = \Xi. \quad (1.33)$$

Правая часть уравнения, обозначенная символом  $\Xi$ , представляет собой быстроту передачи энергии от поступательных степеней свободы к внутренним.

Уравнение напряжений:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (u_{\alpha} P_{ij}) + P_{* \alpha} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} + 2 \frac{\partial \phi_{ij \alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{P_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij}}{\tau}. \quad (1.34)$$

Правая часть уравнения с учетом (1.10) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{P_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij}}{\tau} &= \frac{p_{ij}^{m+} + \delta_{ij} p^{m+}}{\tau^+} - \frac{p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m}{\tau} = \\ &= -\frac{1}{\tau} \left( p_{ij}^m - \frac{\tau}{\tau^+} p_{ij}^{m+} \right) - \delta_{ij} \frac{1}{\tau} \left( p^m - \frac{\tau}{\tau^+} p^{m+} \right) = -\frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau^+} \Pi \right) p_{ij}^m - \delta_{ij} \frac{2}{3} \Xi \end{aligned} \quad (1.35)$$

Здесь учтено, что механическое давление составляет  $2/3$  от энергии поступательного теплового движения молекул и, следовательно, член  $\frac{1}{\tau} \left( p^m - \frac{\tau}{\tau^+} p^{m+} \right)$  представляет собой быстроту передачи энергии  $\Xi$  с соответствующим множителем. Скалярным коэффициентом  $\Pi$  обозначено отношение неравновесных напряжений, создаваемых молекулами после и до столкновений, т.е.  $\Pi = p_{ij}^{m+} / p_{ij}^m$ .

Если принять положение о том, что главные оси тензора не меняют своего направления в процессе релаксации, то становится очевидным, что отношение  $p_{ij}^{m+} / p_{ij}^m$  не зависит от значения индексов, т.е. является скаляром. Это

утверждение наиболее наглядно на примере релаксации (уменьшения по величине) вектора – тензора первого ранга.

Отмеченное свойство отношения  $p_{ij}^{m+}/p_{ij}^m$ , а также фигурирующих ниже отношений  $\varphi_{ijk}^+/\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i^+/\omega_i$  является основой применяемого метода построения моментных уравнений для функции распределения общего вида. Кроме этого, благодаря данному свойству правые части моментных уравнений могут быть представлены в виде релаксационных членов без использования какой-либо модели межмолекулярного взаимодействия.

Уточним, что напряжение  $p_{ij}^{m+}$ , рассматриваемое вне выражения  $p_{ij}^{m+}/\tau^+$ , имеющего физический смысл, представляет собой некоторую гипотетическую величину. Такое напряжение возникнет в том случае, если все молекулы, находящиеся в рассматриваемом элементе объема, испытают только одно столкновение. Описанный процесс, очевидно, физически невозможен (без участия гипотетического объекта, аналогичного демону Максвелла).

При построении моментных моделей напряжение  $p_{ij}^{m+}$  не будет рассматриваться как самостоятельная физическая величина, что и снимает неопределенность ее трактовки. К формальной трактовке  $p_{ij}^{m+}$  мы вернемся в подразделе 5.2. Все сказанное относится и к остальным макроскопическим величинам с надстрочным символом “+”.

В отношении времени  $\tau^+$  отметим следующее. Если принять, что средние частоты прямых и обратных столкновений  $1/\tau$  и  $1/\tau^+$  не зависят от степени неравновесности течения, то с необходимостью должно выполняться равенство  $\tau^+ = \tau$ . В качестве примера рассмотрим уравнение (1.34), записанное для нормального напряжения  $P_{ii}$ . В условиях равновесия  $P_{ii}^+ = P_{ii} = p^m = p$ , а релаксационный член обращается в ноль, т.е.  $P_{ii}^+/\tau^+ - P_{ii}/\tau = 0$ . Отсюда непосредственно следует  $\tau^+ = \tau$ .

Таким образом, при принятом выше допущении относительно средних частот столкновений, последнее равенство должно выполняться при любом законе взаимодействия молекул. В дальнейшем изложении время  $\tau^+$  будет рассматриваться как известная функция. Факт использования равенства  $\tau^+ = \tau$  будет оговариваться специально.

С учетом (1.35) уравнение напряжений принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}) + P_{* \alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial \varphi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} = - \frac{P_{ij}^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \Xi. \quad (1.36)$$

Время релаксации напряжений

$$\tau_p = \frac{\tau}{1 - \frac{\tau}{\tau^+} \Pi} = \frac{\tau}{1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{P_{ij}^{m+}}{P_{ij}^m}}. \quad (1.37)$$

Подстрочный символ соответствует напряжению, т.е. обозначается латинским  $p$ . Аналогичным образом будут обозначаться времена релаксации других величин.

Отметим, что в отечественной литературе максвелловское время релаксации часто обозначают  $\tau_p$ , где подстрочный символ – кириллическое “эр”. Максвелловское время релаксации (обозначим его  $\tau_{\text{рел}}$ ) определено как характерное время затухания возмущений в пространственно однородном максвелловском газе. Для обеспечения «правильного» коэффициента вязкости в гидродинамическом приближении неравновесного напряжения принимают  $\tau_{\text{рел}} = \mu/p$ . Таким образом,  $\tau_{\text{рел}}$ , так же как и  $\tau_p$ , может рассматриваться как время релаксации напряжений. При построении моментных моделей для  $\tau_p$  будет использоваться гидродинамическое приближение, в котором значения  $\tau_p$  и  $\tau_{\text{рел}}$  совпадают.

Обратим внимание на качественное соответствие зависимости (1.37) реальным процессам. Если для полной релаксации неравновесного напряжения достаточно одного столкновения, т.е.  $P_{ij}^{m+}/P_{ij}^m = 0$ , то время релаксации будет равно среднему времени свободного пробега. В другом предельном случае

(отсутствия релаксации):  $p_{ij}^{m+}/p_{ij}^m \rightarrow 1$  время релаксации неограниченно возрастает. В этом случае частоты прямых ( $1/\tau$ ) и обратных ( $1/\tau^+$ ) столкновений совпадают без каких-либо дополнительных допущений, т.к. состояния газа до и после столкновений неразличимы.

Зависимости (1.10) и (1.12) позволяют получить из (1.36) уравнения для механического давления и неравновесного напряжения, которые потребуются в дальнейшем. Свертка уравнения (1.36) деленная на три дает уравнение механического давления:

$$\frac{\partial}{\partial t} p^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p^m) + \frac{2}{3} P_{\beta\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \varphi_\alpha = -\frac{2}{3} \Xi. \quad (1.38)$$

Домножая (1.38) на символ Кронекера и вычитая полученное выражение из (1.36), приходим к уравнению неравновесных напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Уравнение моментов третьего порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} T_{**} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} M_{ijk\alpha}^{(4)} = -\frac{\varphi_{ijk}}{\tau_\varphi}; \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{E_\Omega}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} P_{i\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} M_{i\alpha}^{\Omega(4)} = -\frac{\omega_i}{\tau_\omega}. \quad (1.41)$$

Здесь для релаксационных членов  $-\varphi_{ijk}/\tau_\varphi = \varphi_{ijk}^+/\tau^+ - \varphi_{ijk}/\tau$  и  $-\omega_i/\tau_\omega = \omega_i^+/\tau^+ - \omega_i/\tau$  использованы преобразования, аналогичные (1.35), (1.37).

Учтено, что  $\varphi_{ijk}^+/\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i^+/\omega_i$  – скалярные величины.

Полученные уравнения образуют 24-моментную систему. Эта система остается незамкнутой в силу неопределенности моментов четвертого порядка  $M_{ijkl}^{(4)}$  и  $M_{ij}^{\Omega(4)}$ . Кроме этого, неопределены времена релаксации  $\tau_p$ ,  $\tau_\varphi$ ,  $\tau_\omega$  и член  $\Xi$ , характеризующий энергообмен между поступательными и внутренними

степенями свободы молекул. Причиной такой неопределенности, как указывалось выше, является функция распределения общего вида, используемая при выводе уравнений.

### 1.3. Замыкание системы моментных уравнений

Для замыкания 24-моментной системы воспользуемся работой [55], где аппроксимирующая функция распределения сконструирована исключительно для замыкания системы моментных уравнений на уровне моментов четвертого порядка. В Разделе 2 эта функция распределения будет конкретизирована для вычисления моментов пятого порядка.

Рассмотрим функцию распределения следующего вида:

$$f_A = f_P F_\Omega + f_\varphi. \quad (1.42)$$

Здесь  $f_P$  – функция распределения, моделирующая моменты от нулевого до второго порядков, за исключением энергии внутренних степеней свободы  $E_\Omega$ ;  $F_\Omega$  – функция распределения, моделирующая  $E_\Omega$ ;  $f_\varphi$  – функция распределения, моделирующая моменты третьего порядка, включая тепловой поток  $\omega$ , создаваемый переносом внутренней энергии молекул.

В качестве  $f_P$  выберем эллипсоидальную функцию (аналогичную функции работы [41]), записанную в главных осях тензора напряжений:

$$f_P = \frac{n}{(2\pi R)^{3/2} \sqrt{T_{XX} T_{YY} T_{ZZ}}} \exp\left(-\frac{c_X^2}{2RT_{XX}} - \frac{c_Y^2}{2RT_{YY}} - \frac{c_Z^2}{2RT_{ZZ}}\right). \quad (1.43)$$

Прописными латинскими буквами обозначены индексы компонентов векторов и тензоров в главных осях. Составляющие поступательной температуры обозначены  $T_{II}$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho R T_{XX} &= P_{XX} \\ \rho R T_{YY} &= P_{YY} \\ \rho R T_{ZZ} &= P_{ZZ} \end{aligned} \right\} \text{– главные значения тензора напряжений.}$$



Положение главных осей определено состоянием газовой среды в данной точке пространства в данный момент времени и не зависит от выбора «лабораторной» системы координат. Несмотря на схожесть с индексной формой записи тензорных выражений, уравнение (1.43) представляет собой скалярное выражение. Вопрос об инвариантности его относительно преобразования координат не возникает.

Допустим, что распределение молекул по внутренним энергиям не зависит от их тепловых поступательных скоростей, т.е.

$$F_{\Omega} = F_{\Omega}(t, x_1, x_2, x_3, \varepsilon). \quad (1.44)$$

При таком допущении конкретный вид функции  $F_{\Omega}$  не существен, если речь идет о замыкании системы моментных уравнений. На эту функцию налагаются только два естественных условия:

$$\int F_{\Omega} d\varepsilon = 1 \text{ и } \int \varepsilon F_{\Omega} d\varepsilon = \frac{E_{\Omega}}{n}. \quad (1.45)$$

В отношении функции  $f_{\varphi}$  можно заметить следующее. Если эта функция представлена в виде суммы функций, нечетных по одной или трем координатам пространства скоростей, то при вычислении моментов четвертого порядка интегралы таких функций тождественно обратятся в нуль. Таким образом,  $F_{\Omega}$  и  $f_{\varphi}$  могут быть представлены широким классом функций. Можно надеяться, что среди функций этого класса найдутся достаточно хорошо аппроксимирующие истинную функцию распределения.

Таким образом, моменты  $M_{ijkl}^{(4)}$  могут быть определены интегрированием только функции  $f_P$ . Для определения моментов  $M_{ij}^{\Omega(4)}$  потребуется интегрирование произведения  $f_P F_{\Omega}$ .

Проекция вектора тепловой скорости в произвольной системе координат связана со своими проекциями в главных осях тензора напряжений зависимостью  $c_i = e_{iX}c_X + e_{iY}c_Y + e_{iZ}c_Z$ , где  $e_{ij}$  – косинусы углов между осями произвольной системы координат и главными осями.

Значения напряжений в произвольной системе координат могут быть представлены следующим образом:

$$P_{ij} = m_0 \int c_i c_j f_P d\bar{c} = m_0 \int (e_{iX} e_{jX} c_X^2 + e_{iY} e_{jY} c_Y^2 + e_{iZ} e_{jZ} c_Z^2) f_P d\bar{c}. \quad (1.46)$$

В целях сокращения записи в правой части уравнения опущены слагаемые, содержащие проекции тепловой скорости в нечетной степени, не дающие вклад в интеграл. Учтено, что преобразование координат линейно и, следовательно, модуль якобиана преобразования равен единице. Элемент объема пространства скоростей:  $d\bar{c} \equiv dc_X dc_Y dc_Z$ .

После интегрирования получаем:

$$P_{ij} = e_{iX} e_{jX} P_{XX} + e_{iY} e_{jY} P_{YY} + e_{iZ} e_{jZ} P_{ZZ}. \quad (1.47)$$

В локальном выражении момент четвертого порядка может быть представлен как

$$M_{ijkl}^{(4)} = m_0 \int c_i c_j c_k c_l f_P d\bar{c}. \quad (1.48)$$

Вычисление этого интеграла достаточно громоздко, хотя содержит только элементарные операции. Укажем алгоритм вычисления.

Проекции тепловых скоростей перемножаются с учетом их разложения по главным осям тензора напряжений. Опускаются члены, содержащие проекции  $c_i$  в нечетных степенях. Оставшиеся члены группируются в суммы вида (1.46). Проводится интегрирование и группировка в суммы вида (1.47). В результате получено следующее выражение:

$$M_{ijkl}^{(4)} = \frac{1}{\rho} (P_{ij} P_{kl} + P_{ik} P_{jl} + P_{il} P_{jk}) = \dots \equiv \frac{1}{\rho} P_{**} P_{**}. \quad (1.49)$$

Моменты четвертого порядка, содержащие энергию внутренних степеней свободы, интегрируются элементарно с учетом (1.45) и (1.46):

$$M_{ij}^{\Omega(4)} = \int \varepsilon c_i c_j f_P F_{\Omega} d\bar{c} d\varepsilon = \int \varepsilon F_{\Omega} d\varepsilon \int c_i c_j f_P d\bar{c} = \frac{E_{\Omega}}{n m_0} \frac{P_{ij}}{\rho} = \frac{E_{\Omega}}{\rho} P_{ij}. \quad (1.50)$$

Производные моментов четвертого порядка в уравнениях моментов третьего порядка (1.40) и (1.41) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial M_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_\alpha} = R \left( T_{**} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right); \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} M_{i\alpha}^{\Omega(4)} = \frac{E_\Omega}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{E_\Omega}{\rho} \right). \quad (1.52)$$

Уравнения моментов третьего порядка после подстановки (1.51), (1.52):

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} = -\frac{\varphi_{ijk}}{\tau_\varphi}; \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{E_\Omega}{\rho} \right) = -\frac{\omega_i}{\tau_\omega}. \quad (1.54)$$

Таким образом, система моментных уравнений замкнута по моментам четвертого порядка.

#### 1.4. Время релаксации

Будем рассматривать времена релаксации  $\tau_p, \tau_\varphi, \tau_\omega$  в гидродинамическом приближении. Уравнения неравновесных величин (1.39), (1.53) и (1.54) представим в безразмерном виде. Единицами измерения основных газодинамических величин будем считать некоторые их характерные значения:  $\rho_\bullet, T_\bullet, p_\bullet$ . Единицы измерения времени и теплового потока (момента третьего порядка):  $t_\bullet = L_\bullet / \sqrt{RT_\bullet}, q_\bullet = p_\bullet \sqrt{RT_\bullet}$ , где  $L_\bullet$  – характерный размер течения.

При таком выборе единиц в уравнениях неравновесных величин изменятся только члены, содержащие константы  $R$  и  $c_\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}; \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} = -\frac{\varphi_{ijk}}{\tau_\varphi}; \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{c_\Omega}{R} P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} = -\frac{\omega_i}{\tau_\omega}. \quad (1.57)$$

В последнем уравнении энергия внутренних степеней свободы заменена соответствующей температурой, см. (1.5).

В безразмерных зависимостях плотность, скорость, температуры ( $T_\Omega$  и  $T_t = T_{\alpha\alpha}/3$ ), давление, а в общем случае и производные этих величин имеют порядок единицы. Безразмерные времена релаксации по порядку величины соответствуют числу Кнудсена или безразмерному среднему времени свободного пробега молекулы  $\tau$ , которое в дальнейшем используется для оценки порядка малости величин.

Будем считать  $\tau$  малой величиной. Члены левых частей уравнений (1.55) – (1.57), не содержащие неравновесных величин, очевидно, имеют порядок единицы. Несложно сформулировать условия задачи, в которой левая часть уравнения будет содержать единственный член порядка единицы или несколько таких членов одного знака. Релаксационный член должен иметь тот же порядок величины. Отсюда непосредственно следует, что почти все неравновесные величины имеют порядок  $\tau$ . Исключение составляют моменты третьего порядка, значения индексов которых не совпадают, например  $\varphi_{123}$ . Порядок величины этих моментов –  $\tau^2$ , что непосредственно следует из (1.56).

В рассматриваемом приближении слабонеравновесного течения (гидродинамическом приближении) уравнения неравновесных величин будут вырождаться в реологический закон Ньютона и закон Фурье. После домножения (1.55) на  $\tau_p$  и исключения слагаемых, содержащих неравновесные величины (порядок этих слагаемых после домножения станет равным  $\tau^2$ ), получим выражение для неравновесных напряжений в гидродинамическом приближении. Процедура сортировки членов уравнений по порядку величины будет подробно описана в Разделе 3. Ниже будем рассматривать (1.55) – (1.57) в физической размерности, считая время релаксации малой величиной.

В целях сокращения записи рассмотрим только касательные напряжения ( $i \neq j$ ), для которых реологический закон Ньютона имеет наиболее простой вид:

$$p_{ij}^m = -\tau_p p^m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.58)$$

Учтено, что  $P_{ii} \sim p^m$ . Здесь и далее знак  $\sim$  обозначает «асимптотически равно».

В реологическом законе Ньютона касательные напряжения выражаются как

$$p_{ij}^m = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.59)$$

Сравнение правых частей двух последних выражений приводит к вполне ожидаемому результату:

$$\tau_p = \frac{\mu(T_t)}{p^m} = \frac{\mu(T)}{p}. \quad (1.60)$$

В гидродинамическом приближении оба выражения для  $\tau_p$  эквивалентны.

Аналогичным образом определяется время релаксации теплового потока. В левой части (1.56) отбрасываются слагаемые с неравновесными величинами. Учитывается, что  $T_{ii} \sim T_t \sim T$ . Моменты третьего порядка, выраженные через старшие члены (1.56):

$$\varphi_{iii} = -\tau_\varphi \frac{3}{2} R p^m \frac{\partial T_t}{\partial x_i} \sim -\tau_\varphi \frac{3}{2} R p \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad (1.61)$$

$$\varphi_{ijj} = -\tau_\varphi \frac{1}{2} R p^m \frac{\partial T_t}{\partial x_i} \sim -\tau_\varphi \frac{1}{2} R p \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i \neq j. \quad (1.62)$$

Два последних уравнения совместно с зависимостью  $\varphi_i = \varphi_{i\alpha\alpha}$  позволяют получить выражение теплового потока поступательных степеней свободы в гидродинамическом приближении:

$$\varphi_i = -\tau_\varphi \frac{5}{2} R p \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.63)$$

Из закона Фурье:

$$\varphi_i = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.64)$$

Так как рассматриваются только поступательные степени свободы, то  $c_p = (5/2)R$ ,  $\text{Pr} = 2/3$ , т.е., как и для одноатомного газа,

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.65)$$

Сравнение правых частей (1.63) и (1.65), приводит к зависимости

$$\tau_\varphi = \frac{3}{2} \frac{\mu}{p} = \frac{3}{2} \tau_p. \quad (1.66)$$

В многоатомном газе к составляющей  $\varphi_i$  добавляется составляющая  $\omega_i$ . Главные члены (1.57):

$$\omega_i = -\tau_\omega c_\Omega p^m \frac{\partial}{\partial x_i} (T_\Omega). \quad (1.67)$$

В рассматриваемом приближении  $T_\Omega \sim T$ . С учетом этого

$$\omega_i = -\tau_\omega c_\Omega p \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.68)$$

В законе Фурье на долю внутренних степеней свободы отводится часть теплового потока:

$$\omega_i = -\left( \frac{c_p}{\text{Pr}} - \frac{15}{4} R \right) \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} = -c_\omega \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.69)$$

$$\text{Здесь } c_\omega = \frac{c_p}{\text{Pr}} - \frac{15}{4} R.$$

Из двух последних выражений следует:

$$\tau_\omega = \frac{c_\omega}{c_\Omega} \frac{\mu}{p} = \frac{c_\omega}{c_\Omega} \tau_p. \quad (1.70)$$

Если использовать аппроксимацию Эйкена  $\text{Pr} = 4\gamma/(9\gamma - 5)$ , то  $c_\omega/c_\Omega = 1$  и  $\tau_\omega = \tau_p$ .

Обратим внимание на тот факт, что для определения времен релаксации в первом приближении не требуется какая-либо конкретная модель

межмолекулярного взаимодействия. Более высокие приближения требуют дополнительной информации и не могут быть получены на базе применяемого метода построения системы моментных уравнений.

### 1.5. Энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы молекул

В уравнениях (1.33) и (1.36) быстрота энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы выражена двумя способами:

$$\Xi = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\tau}{\tau^+} E_{\Omega}^+ - E_{\Omega} \right) \text{ и } \Xi = \frac{3}{2} \frac{1}{\tau} \left( p^m - \frac{\tau}{\tau^+} p^{m+} \right)$$

В терминах температуры эти зависимости принимают следующий вид:

$$\Xi = c_{\Omega} \frac{\rho}{\tau} \left( \frac{\tau}{\tau^+} T_{\Omega}^+ - T_{\Omega} \right); \quad (1.71)$$

$$\Xi = \frac{3}{2} R \frac{\rho}{\tau} \left( T_t - \frac{\tau}{\tau^+} T_t^+ \right). \quad (1.72)$$

Время релаксации неравновесных величин, например время релаксации неравновесных напряжений в (1.37), представлено в виде

$$\tau_p = \tau / \left( 1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{p_{ij}^{m+}}{p_{ij}^m} \right). \quad (1.73)$$

Время релаксации разности температур  $\theta = T_t - T_{\Omega}$ , являющейся неравновесной величиной порядка  $\tau$ , может быть выражено по аналогии с (1.73):

$$\tau_{\theta} = \tau / \left( 1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{\theta^+}{\theta} \right). \quad (1.74)$$

Здесь  $\theta^+ = T_t^+ - T_{\Omega}^+$ .

Отметим, что выражения типа (1.73) могут быть построены только в том случае, если отношение значений неравновесной величины после и до столкновения, например  $p_{ij}^{m+} / p_{ij}^m$ , являются скалярами. В частности, для

термодинамических напряжений  $p_{ij}$  и полного теплового потока  $q_i$ , как будет показано ниже, такие выражения построить нельзя. Для разности температур  $\theta$  выражение (1.74) допустимо в силу скалярности самой величины.

Представим быстроту энергообмена  $\Xi$  в виде релаксационного члена разности температур  $\theta$ . Вычтем (1.72) из (1.71). Заменим  $c_\Omega$  на  $c_v - \frac{3}{2}R$  и перегруппируем члены следующим образом:

$$\frac{3}{2}\rho R \left( 1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{(T_t^+ - T_\Omega^+)}{(T_t - T_\Omega)} \right) \frac{T_t - T_\Omega}{\tau} = c_v \frac{\rho}{\tau} \left( \frac{\tau}{\tau^+} T_\Omega^+ - T_\Omega \right). \quad (1.75)$$

Левая часть (1.75) содержит выражение (1.74), а правая аналогична (1.71). С учетом этого быстрота энергообмена может быть представлена как

$$\Xi = \frac{3}{2}\rho R \frac{c_\Omega}{c_v} \frac{\theta}{\tau_\theta} = \frac{3}{2} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\rho R \theta}{\tau_\theta}. \quad (1.76)$$

Время релаксации  $\tau_\theta$  представим в виде

$$\tau_\theta = h \tau_p \quad (1.77)$$

Отношение времен релаксации, обозначенное в настоящей работе  $h$ , вычисляется через параметр  $Z$ , обратная величина которого представляет долю неупругих столкновений по отношению к общему числу столкновений молекул. Существует ряд теоретических и полуэмпирических зависимостей для определения  $Z$ , например [53; 57; 58], а также экспериментальные данные [59; 60]. В настоящей работе величина  $h$  будет рассматриваться как свободный параметр модели или оцениваться в соответствии с рекомендациями работы [58] по зависимости

$$h = Z \frac{(7-2s)(5-2s)}{30}. \quad (1.78)$$

Здесь  $s$  – показатель степени температуры в аппроксимации коэффициента вязкости  $\mu = \mu(T_t^s)$ .

В отношении выражения (1.76) отметим, что аналогичные зависимости были получены и другими авторами (см., например, [5]). Однако при их выводе



разность между термодинамической и поступательной температурами (аналог  $T_t - T_\Omega$ ) предполагалась малой величиной, т.е. рассматривалось слабонерновесное состояние газа. Приведенный выше вывод выражения (1.76) не накладывает каких-либо ограничений на степень неравновесности газа, что принципиально важно для системы моментных уравнений.

Отметим также, что предлагаемый метод построения системы моментных уравнений не связан с каким-либо конкретным видом зависимостей  $\mu = \mu(T_t)$  или  $\mu = \mu(T)$ .

### 1.6. Система моментных уравнений M24

Из полученных выше моментных уравнений составлена замкнутая система двадцати четырех скалярных уравнений, называемая далее системой M24. В развернутом виде (без подстрочных звездочек) эта система может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
 \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_i u_\alpha + P_{i\alpha}) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial t} E_\Omega + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha E_\Omega) + \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} &= \frac{3(\gamma-1)}{2} c_\Omega \rho \frac{\theta}{h \tau_p}; \\
 \frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}) + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial \varphi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} &= \\
 &= -\frac{P_{ij} - \delta_{ij} p^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} R \rho \frac{\theta}{h \tau_p}; \quad (1.79) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \varphi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \varphi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\
 + \frac{R}{2} \left( P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) &= -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p};
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{E_\Omega}{\rho} \right) = - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}.$$

Полученную систему можно представить в термодинамических терминах. Для этого потребуется несколько дополнительных уравнений, представляющих собой линейные комбинации уравнений системы (1.79).

Уравнение температуры внутренних степеней свободы (линейная комбинация уравнения сохранения массы и уравнения энергии внутренних степеней свободы):

$$\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{\theta}{h \tau_p}. \quad (1.80)$$

Уравнение поступательной температуры (линейная комбинация уравнения сохранения массы и свертки уравнения напряжений):

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{2}{3R\rho} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = - \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\theta}{h \tau_p}. \quad (1.81)$$

Почленное вычитание (1.80) из (1.81) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) = - \frac{\theta}{h \tau_p}. \quad (1.82)$$

Почленное сложение (1.80) и (1.81) с учетом (1.4) дает уравнение термодинамической температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma-1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.83)$$

Уравнение термодинамического давления (линейная комбинация уравнения сохранения массы и (1.83)):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p) + (\gamma-1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + (\gamma-1) \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.84)$$

Зависимость (1.15) позволяет получить из (1.39) и (1.82) уравнение термодинамических неравновесных напряжений. Правая, релаксационная часть этого уравнения принимает следующий вид:

$$-\frac{p_{ij}^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} R\rho \frac{\theta}{h\tau_p}. \quad (1.85)$$

Неравновесные напряжения  $p_{ij}^m$  и разность температур  $\theta$  могут быть заменены термодинамическими неравновесными напряжениями  $p_{ij}$  с использованием уравнения (1.15) и следующей из него зависимости

$$p_{\alpha\alpha} = 3 \frac{5-3\gamma}{2} \rho R \theta. \quad (1.86)$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} (\gamma-1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} (\gamma-1) q_\alpha) = -\frac{p_{ij}}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{h-1}{h} \frac{p_{\alpha\alpha}}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Уравнение термодинамических неравновесных напряжений можно получить из (1.34) посредством почленного вычитания (1.84). При этом левая, дифференциальная часть уравнения будет соответствовать (1.87), а правая, релаксационная часть примет вид

$$\frac{P_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij}}{\tau} = \frac{p_{ij}^+ + \delta_{ij} p^+}{\tau^+} - \frac{p_{ij} + \delta_{ij} p}{\tau} = -\frac{p_{ij} - \frac{\tau}{\tau^+} p_{ij}^+}{\tau}. \quad (1.88)$$

Здесь учтено, что термодинамическое давление – инвариант столкновений. Дальнейшее преобразование правой части, аналогичное (1.35), невозможно, так как отношение  $p_{ij}^+ / p_{ij}$  не является скалярной величиной

В отличие от нормальных напряжений  $p_{ii}^m$ , термодинамические нормальные напряжения  $p_{ii}$  включают в себя неравновесность поступательных и внутренних степеней свободы, что отражено в (1.15). Релаксация термодинамических нормальных напряжений будет протекать в несколько раз дольше (коэффициент  $h$  составляет несколько единиц). Касательные же напряжения в «механическом» и в термодинамическом выражении совпадают: в соответствии с (1.15)  $p_{ij} \equiv p_{ij}^m$  при

$i \neq j$ . Следовательно, касательные и нормальные термодинамические напряжения будут релаксировать с разной быстротой. Факт участия термодинамических нормальных напряжений в двух релаксационных процессах наглядно демонстрируется правой частью (1.87).

Уравнение полного теплового потока получим почленным сложением уравнения тепловых потоков  $\omega_i$  и свертки моментов третьего порядка  $\varphi_{ijk}$ , с последующим исключением  $\omega_i$  из правой части:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha q_i) + q_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + c_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{p_{i\beta}}{\rho} \right) = \\ = -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{q_i}{\tau_p} - \left( \frac{2}{3} - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \right) \frac{\varphi_i}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Это же уравнение может быть получено из общего уравнения переноса (1.27) с молекулярным признаком  $V_i^{(3)} = \xi_i \left( m_0 \frac{\xi_\alpha \xi_\alpha}{2} + \varepsilon \right)$ . Преобразование правой части уравнения, аналогичное (1.35) и (1.37),

$$\frac{q_i^+}{\tau^+} - \frac{q_i}{\tau} = -\frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{q_i^+}{q_i} \right) q_i = -\frac{q_i}{\tau_q} \quad (1.90)$$

возможно только в гидродинамическом приближении. При этом  $\frac{\varphi_i}{q_i} = \frac{15}{4} \frac{\text{Pr}(\gamma - 1)}{\gamma}$ ,

а время релаксации принимает значение  $\tau_q = \frac{\tau_p}{\text{Pr}}$ . В таком приближении слабонервного течения уравнение (1.89) вырождается в закон Фурье и не соответствует порядку приближения всей системы уравнений. В самой же системе гидродинамические приближения используются только для времен релаксации, а не для моментных уравнений в целом.

В условиях существенно неравновесного течения преобразование (1.90) неприменимо по следующим причинам. Вектор  $\mathbf{q}$  представляет собой сумму векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$ . Направления последних определяется, преимущественно, вектор-градиентами полей  $T_\Omega$  и  $T_t$  (точнее, составляющими  $T_t - T_{ii}$ ). В общем случае

направления этих вектор-градиентов не совпадают, так как формируются под воздействием разных физических процессов. Более того, векторы  $\omega$  и  $\phi$  релаксируют с разной скоростью. Следовательно, суммарный вектор  $q$  изменяет свое направление в процессе релаксации, а именно разворачивается в направлении вектора  $\phi$ , релаксирующего с меньшей скоростью ( $\tau_\omega \approx 2/3 \tau_\phi$ ).

Отношение  $q_i^+/q_i$  не может рассматриваться как скалярная величина в силу  $q_1^+/q_1 \neq q_2^+/q_2 \neq q_3^+/q_3$ .

Полученные выше уравнения позволяют записать систему M24 в термодинамических переменных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}) + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) q_\alpha) = -\frac{P_{ij}}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{h-1}{h} \frac{P_{\alpha\alpha}}{\tau_p} \quad ; \quad (1.91) \\
\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \varphi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \varphi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\
&+ \frac{R}{2} \left( P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p} \\
\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha q_i) + q_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + c_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{P_{i\beta}}{\rho} \right) = \\
&= -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{q_i}{\tau_p} - \left( \frac{2}{3} - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \right) \frac{\varphi_i}{\tau_p}
\end{aligned}$$

Представляет интерес сравнение полученной системы уравнений с 20-моментной системой Грэда, записанной для одноатомного газа. В этом случае различия между системами содержатся только в уравнениях моментов третьего порядка. Релаксационные члены не сравниваются, так как методики их вывода принципиально различаются.

Различие в аппроксимирующих функциях распределения привело к тому, что члены уравнения (1.28)  $-\frac{M^{(N-1)}_{***}}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial M^{(N+1)}_{ijk\dots\alpha}}{\partial x_\alpha}$ , ( $N=3$ ), представлены в системе M24 выражением

$$\frac{R}{2} \left( P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right), \quad (1.92)$$

а в 20-моментной системе – выражением

$$\frac{R}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{jk} T_t) + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ik} T_t) + \frac{\partial}{\partial x_k} (p_{ij} T_t) + (\delta_{jk} p_{i\alpha} + \delta_{ik} p_{j\alpha} + \delta_{ij} p_{k\alpha}) \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \right. \\ \left. + p \left( \delta_{jk} \frac{\partial T_t}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial T_t}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial T_t}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{R\rho} \left( p_{ij} \frac{\partial P_{k\alpha}}{\partial x_\alpha} + p_{ik} \frac{\partial P_{j\alpha}}{\partial x_\alpha} + p_{jk} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} \right) \right). \quad (1.93)$$

Здесь использована символика, принятая в настоящей работе.

Отметим, что выражение (1.92) представляет собой «естественную» форму записи, так как  $P_{ij}$  и  $T_{ij}$  относятся к основным переменным системы (1.79). Компактный вид (1.92) обусловлен замыкающей функцией (1.42). В подразделе 1.7 будет показано, что к выражению (1.92) приводит, так же, допущение о линейной зависимости моментов.

Система M24, имеющая симметричный вид уравнения моментов третьего порядка, тем не менее не позволяет исключить основной недостаток 20-моментной системы – коротковолновую неустойчивость, выражающуюся в появлении субскачка на профиле ударной волны. Задача о профиле ударной волны будет рассмотрена в Разделе 6. Здесь мы только проиллюстрируем возникновение субскачка.

На Рисунке 1.1 показаны профили скорости и температуры в плоской ударной волне. В качестве геометрического масштаба принята длина пробега молекулы в невозмущенном потоке:  $\lambda_\infty = \frac{\mu_\infty}{p_\infty} \sqrt{RT_\infty}$ . Коэффициент вязкости, определяющий время релаксации напряжений, выражен через поступательную температуру:  $\mu = \mu(T_t^s)$ .

Численное решение системы M24 проводилось двумя принципиально различными методами. Использовался метод Мак-Кормака и прогонка четырехдиагональной матрицы с нестационарным членом [61] (этот метод описан в Разделе 7). Результаты расчетов практически совпадали.

При  $M > 1.8$  возникает физически неадекватное искажение профиля (субскачок). На профилях ударной волны в многоатомных газах субскачок проявляется аналогичным образом.

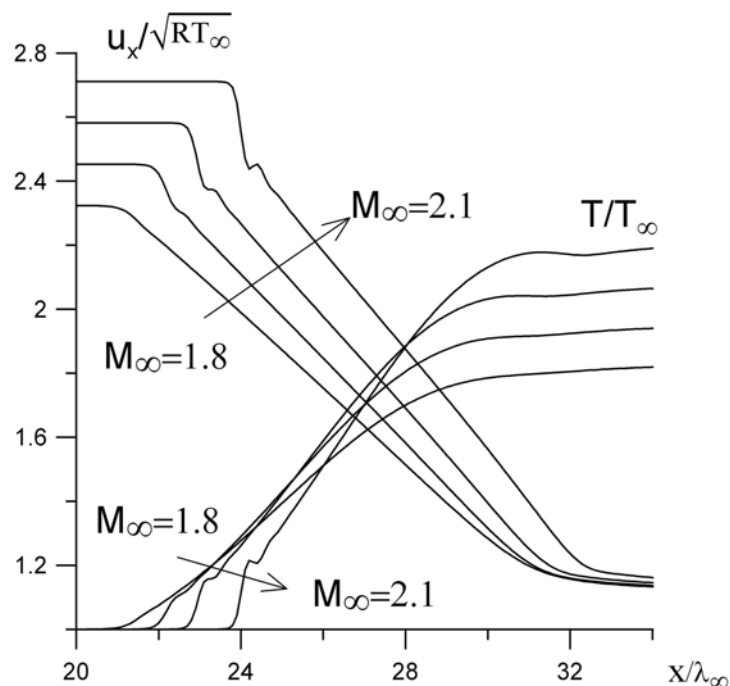


Рисунок 1.1. Профили скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа. Система M24,  $s = 1$

При многопроцессорной реализации система M24 рассматривается как система шести уравнений. Отметим, что в случае одноатомных газов система

(1.79) содержит четыре уравнения, а система (1.91) – пять. Количество скалярных уравнений в обеих системах, разумеется, одинаково.

### 1.7. Метод построения системы моментных уравнений для функции распределения общего вида

Как было отмечено во Введении, функция распределения какого-либо конкретного вида, по существу предполагает описание поля течения в фазовом пространстве в виде единой аналитической зависимости. Даже если в геометрической фазе  $(x_1, x_2, x_3)$  течение определено моментами системы, т.е.  $f_A = f(M_i^{(1)}, M_{ij}^{(2)}, \dots, M_i^{\Omega(2)}, M_i^{\Omega(3)}, \dots, c_1, c_2, c_3, \varepsilon)$ , шансы «угадать» поле течения в фазе пространства скоростей и внутренних энергий  $(c_1, c_2, c_3, \varepsilon)$  слишком малы.

Таким образом, аппроксимирующая функция распределения какого-либо конкретного вида имеет характер сильного допущения. Можно ослабить характер допущения, необходимого для замыкания системы моментных уравнений, следуя работам [56; 62].

Сформулируем допущение в отношении макропараметров (моментов), т.е. для величин, определенных только в геометрическом пространстве. Отметим, что ослабление допущения в этом случае будет связано с сокращением размерности пространства, а не с содержательной частью самого допущения.

Будем считать, что моменты высших порядков могут быть адекватно аппроксимированы линейной комбинацией моментов низших порядков. Под моментами низших порядков будем понимать моменты, определенные системой, требующей замыкания. В дальнейшем, для краткости, это допущение будем называть "допущением о линейной зависимости моментов". Очевидно, это допущение может быть распространено только на локальные выражения моментов.

Специфическим свойством системы моментных уравнений является то, что при продвижении по системе увеличение порядка момента происходит за счет



домножения подынтегральной функции распределения на проекцию тепловой скорости. Таким образом, масса молекулы –  $m_0$  или энергия внутренних степеней свободы –  $\varepsilon$  может фигурировать в выражении момента только в первой степени.

Учтем следующие положения:

- момент функции распределения по определению является симметричным тензором;
- центрированный момент первого порядка тождественно равен нулю;
- симметрирование комбинаций низших моментов является операцией компактного симметрирования – характерной операцией для моментных уравнений вообще и для моментов в частности.

Принятое допущение приводит к следующим зависимостям для моментов четвертого и пятого порядков:

$$M_{ijkl}^{(4)} = R^2 \rho (T_{ij} T_{kl} + T_{ik} T_{jl} + T_{il} T_{jk}) \equiv R^2 \rho T_{**} T_{**}; \quad (1.94)$$

$$M_{ij}^{\Omega(4)} = c_{\Omega} R \rho T_{\Omega} T_{ij}. \quad (1.95)$$

$$M_{ijklm}^{(5)} = R \rho \left( \begin{aligned} &T_{ij} \psi_{klm} + T_{ik} \psi_{jlm} + T_{il} \psi_{jkm} + T_{im} \psi_{jkl} + T_{jk} \psi_{ilm} + \\ &+ T_{jl} \psi_{ikm} + T_{lm} \psi_{ikl} + T_{kl} \psi_{ijm} + T_{km} \psi_{ijl} + T_{lm} \psi_{ijk} \end{aligned} \right) \equiv R \rho T_{**} \psi_{***}; \quad (1.96)$$

$$M_{ijk}^{\Omega(5)} = c_{\Omega} \rho T_{\Omega} \psi_{ijk} + R \rho (T_{jk} \varpi_i + T_{ik} \varpi_j + T_{ij} \varpi_k) \equiv c_{\Omega} \rho T_{\Omega} \psi_{ijk} + R \rho T_{**} \varpi_*. \quad (1.97)$$

Здесь использованы переменные  $\psi_{ijk} = 2 \varphi_{ijk} / \rho$  и  $\varpi_i = \omega_i / \rho$ , отражающие структуру полученных выражений лучше, чем системные переменные  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$ . В развернутых формах симметрируемых выражений записан только один из эквивалентных вариантов.

В работе [56] моменты четвертого порядка получены с использованием аппроксимирующей функции эллипсоидального вида. Для выражения моментов пятого порядка эллипсоидальная функция была разложена в ряд по степеням проекций тепловой скорости. Эта функция и методика получения замыкающих моментов представлены в Разделе 2 настоящей работы. В результате были получены выражения идентичные зависимостям (1.94) ... (1.97). Различия

начинают проявляться только на уровне моментов 6-го порядка. Аппроксимирующая функция работы [56] приводит к выражениям

$$M_{ijklmn}^{(6)} = R^3 \rho T_{**} T_{**} T_{**}; \quad (1.98)$$

$$M_{ijkl}^{\Omega(6)} = c_{\Omega} R^2 \rho T_{\Omega} T_{**} T_{**}. \quad (1.99)$$

Из допущения о линейной комбинации низших моментов следует:

$$M_{ijklmn}^{(6)} = R^3 \rho T_{**} T_{**} T_{**} + \rho \psi_{***} \psi_{***}; \quad (1.100)$$

$$M_{ijkl}^{\Omega(6)} = c_{\Omega} R^2 \rho T_{\Omega} T_{**} T_{**} + \rho \psi_{***} \varpi_{*}. \quad (1.101)$$

Различие в выражениях моментов шестого порядка обусловлено следующими причинами. Аппроксимирующая функция распределения вида (2.12) содержит моменты третьего порядка в качестве коэффициентов разложения четной функции (1.43). Моменты такой аппроксимирующей функции не могут содержать произведения коэффициентов разложения нечетной степени по принципиальным и очевидным причинам.

Таким образом, допущение о линейной зависимости низших моментов позволяет более простым способом получать аппроксимации высших моментов, а начиная с моментов шестого порядка – и более общие аппроксимации.

На основании материалов настоящего раздела может быть сформулирован метод построения системы моментных уравнений порядка  $N \geq 4$  для функции распределения общего вида, без конкретизации модели межмолекулярного взаимодействия. Метод имеет феноменологический характер.

В основе метода лежит феноменологическое положение о неизменности направления главных осей тензора в процессе его релаксации (изотропность релаксации). Метод содержит два допущения:

- время релаксации неравновесной величины слабо зависит от степени неравновесности течения и может быть определено из феноменологических законов: закона трения Ньютона и закона Фурье;
- моменты, замыкающие систему уравнений, могут быть представлены линейной комбинацией низших моментов.

Первое допущение, очевидно, может быть применено к времени релаксации моментов только второго и третьего порядков. Время релаксации момента более высокого порядка может быть принято в качестве свободного параметра модели.

Второе допущение применимо к замыкающим моментам четвертого порядка и выше, т.к. моменты первого порядка тождественно равны нулю. Отсюда, в частности, следует, что из всех моментных систем, которые могут быть построены предлагаемым методом, система M24 – минимальная система, т.к. порядок ее замыкающих моментов:  $N = 4$ .

Алгоритм метода построения системы моментных уравнений  $N$ -го порядка состоит в следующем.

1) Записываются моментные уравнения со второго до  $N$ -го порядка с использованием зависимости (1.28) (уравнения сохранения массы и импульса считаются известными).

2) Правые части уравнений приводятся к виду релаксационного члена. Время релаксации неравновесной величины типа  $a_{ijk\dots}$  ( $p_{ij}^m, \varphi_{ijk}, \omega_i, \dots$ ) выражаются как

$$\tau_a = \tau / \left( 1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{a_{ij\dots}^+}{a_{ij\dots}} \right).$$

Член, описывающий энергообмен между поступательными и

внутренними степенями свободы записывается с учетом (1.76).

3) Время релаксации моментов второго и третьего порядка определяются с использованием закона трения Стокса (обобщенный закон Ньютона) и закона Фурье. Время релаксации моментов порядка  $N > 3$  принимаются в качестве свободных параметров модели.

4) Для моментов  $(N + 1)$ -го порядка записываются зависимости вида (1.94) ... (1.97), (1.100), (1.101).

Отметим, что этот метод построения системы моментных уравнений содержит два сильных допущения, которые необходимо учитывать при анализе как самой системы, так и области ее применения. Эти допущения:

- времена релаксации моментов второго и третьего порядков определены в гидродинамическом приближении.

- замыкающие моменты определены локально;

В остальной система соответствует исходному кинетическому уравнению.

Специально остановимся на особенностях численной реализации систем моментных уравнений, получаемых предложенным методом. Применение зависимости (1.28) (см. п.1 метода) приводит к системе с наименьшим количеством тензорных уравнений. Для систем, замкнутых моментами четвертого порядка, это система (1.79). В такой трактовке скаляр рассматривается как тензор нулевого ранга, а вектор – тензор первого ранга.

Для численной реализации уравнения сохранения импульса как одного уравнения потребуется три процессора. Такое же количество процессоров потребуется и уравнению момента  $\omega_i$ . Для уравнения момента  $P_{ij}$  достаточно 6-ти процессоров, для момента  $\varphi_{ijk}$  – 10-ти процессоров. Это связано с симметрией соответствующих тензоров.

Выделение необходимых для расчета элементов тензора из общего числа его элементов может быть проведено с использованием стандартных процедур современных алгоритмических языков. В группе языков FORTRAN для этих целей могут быть использованы структуры, содержащие векторный индекс массива. С учетом стандартизированного порядка следования элементов массива (левый индекс меняется быстрее правого) наиболее эффективным с точки зрения адресации элементов будут следующие значения векторного индекса:

для  $P_{ij}$  – (1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (3,3);

для  $\varphi_{ijk}$  – (1,1,1), (2,1,1), (3,1,1), (2,2,1), (3,2,1), (3,3,1), (2,2,2), (3,2,2), (3,3,2), (3,3,3)

Характерно, что программный код решения уравнения должен соответствовать индексной записи соответствующего уравнения (1.79). В этом случае процесс параллельной обработки данных будет наиболее эффективен, т.к. не потребует применения синхронизирующих барьеров. В работе [63] приведены примеры алгоритмов, в которых синхронизирующий барьер замедляет многопроцессорные вычисления и даже делает их более медленными, чем однопроцессорные.

## СОГЛАСОВАННЫЕ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 2.1. Аппроксимирующая функция распределения. Моменты пятого порядка в локальном выражении

Система моментных уравнений M24 замкнута моментами четвертого порядка (1.49) и (1.50), полученными интегрированием аппроксимирующей функции распределения. Такое представление моментов локально. Вместе с тем моменты четвертого порядка определены балансовыми зависимостями, т.е. моментными уравнениями в соответствии с (1.28):

$$\frac{\partial M_{ijkl}^{(4)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha M_{ijkl}^{(4)}) + M_{****\alpha}^{(4)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{2\varphi_{***}}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial M_{ijkl\alpha}^{(5)}}{\partial x_\alpha} = \frac{M_{ijkl}^{(4)+}}{\tau^+} - \frac{M_{ijkl}^{(4)}}{\tau}; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ij}^{\Omega(4)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha M_{ij}^{\Omega(4)}) + M_{*\alpha}^{\Omega(4)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{\omega_*}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial M_{ij\alpha}^{\Omega(5)}}{\partial x_\alpha} = \\ = \frac{M_{ij}^{\Omega(4)+}}{\tau^+} - \frac{M_{ij}^{\Omega(4)}}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Покажем, что локальные выражения (1.49) и (1.50) не являются решениями уравнений (2.1) и (2.2).

В балансовых выражениях моментов четвертого порядка содержатся моменты пятого порядка:  $M_{ijklm}^{(5)}$  и  $M_{ijk}^{\Omega(5)}$ . Получим локальные выражения этих моментов, не используя допущения о линейной зависимости моментов. Конкретизируем аппроксимирующую функцию распределения (1.42).

Функция  $F_\Omega$  может иметь достаточно произвольный вид. От нее требуется только выполнение условий (1.45). Это связано с тем, что моменты  $M_{\dots}^{\Omega(\dots)}$  содержат внутреннюю энергию молекул  $\varepsilon$  только в первой степени. Повышение порядка момента обусловлено увеличением показателя степени проекций тепловой скорости.

Другим обстоятельством, допускающим достаточно произвольный вид функции  $F_\Omega$ , является сделанное выше допущение о том, что распределение молекул по внутренним энергиям не зависит от их тепловых поступательных скоростей.

Выберем в качестве  $F_\Omega$  равновесную функцию вида

$$F_\Omega = 2\sqrt{\varepsilon} / \sqrt{\pi} \left( \frac{2 E_\Omega}{3 n} \right)^{3/2} \times \exp\left( -\varepsilon / \frac{2 E_\Omega}{3 n} \right). \quad (2.3)$$

Представим функцию  $f_\varphi$  (см. (1.42)), в главных осях тензора напряжений:

$$f_\varphi = \left( \Phi_{XYZ} + \sum_{I=X,Y,Z} (\Phi_I + \Phi_I^\Omega) \right) f_P F_\Omega. \quad (2.4)$$

Вспомогательные функции  $\Phi_{...}$  определим следующим образом:

$\Phi_{XYZ} = A c_X c_Y c_Z$ , где  $A$  - неизвестный коэффициент.

Потребуем:

$$\frac{m_0}{2} \int c_X c_Y c_Z \Phi_{XYZ} f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \frac{\rho}{2} A R^3 T_{XX} T_{YY} T_{ZZ} = \varphi_{XYZ}.$$

Отсюда следует:

$$\Phi_{XYZ} = c_X c_Y c_Z \frac{2\varphi_{XYZ}}{\rho R^3 T_{XX} T_{YY} T_{ZZ}}. \quad (2.5)$$

Функцию  $\Phi_X$  представим в виде  $\Phi_X = A c_X + B c_X^3 + C c_X c_Y^2 + D c_X c_Z^2$ . Для определения неизвестных коэффициентов потребуем:

$$\int c_X \Phi_X f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = 0; \quad \frac{m_0}{2} \int c_X^3 \Phi_X f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \varphi_{XXX};$$

$$\frac{m_0}{2} \int c_X c_Y^2 \Phi_X f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \varphi_{XYY}; \quad \frac{m_0}{2} \int c_X c_Z^2 \Phi_X f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \varphi_{XZZ}.$$

После интегрирования и решения системы линейных уравнений получаем:

$$\Phi_X = \frac{c_X}{RT_{XX}} \left( - \left( \frac{\varphi_{XXX}}{P_{XX}} + \frac{\varphi_{XYY}}{P_{YY}} + \frac{\varphi_{XZZ}}{P_{ZZ}} \right) + c_X^2 \frac{\varphi_{XXX}}{3RT_{XX}P_{XX}} + c_Y^2 \frac{\varphi_{XYY}}{RT_{YY}P_{YY}} + c_Z^2 \frac{\varphi_{XZZ}}{RT_{ZZ}P_{ZZ}} \right). \quad (2.6)$$

Функции  $\Phi_Y$  и  $\Phi_Z$  получены аналогичным образом:

$$\Phi_Y = \frac{c_Y}{RT_{YY}} \left( - \left( \frac{\varphi_{YXX}}{P_{XX}} + \frac{\varphi_{YYY}}{P_{YY}} + \frac{\varphi_{YZZ}}{P_{ZZ}} \right) + c_X^2 \frac{\varphi_{YXX}}{RT_{XX}P_{XX}} + c_Y^2 \frac{\varphi_{YYY}}{3RT_{YY}P_{YY}} + c_Z^2 \frac{\varphi_{YZZ}}{RT_{ZZ}P_{ZZ}} \right); \quad (2.7)$$

$$\Phi_Z = \frac{c_Z}{RT_{ZZ}} \left( - \left( \frac{\varphi_{ZXX}}{P_{XX}} + \frac{\varphi_{ZYY}}{P_{YY}} + \frac{\varphi_{ZZZ}}{P_{ZZ}} \right) + c_X^2 \frac{\varphi_{ZXX}}{RT_{XX}P_{XX}} + c_Y^2 \frac{\varphi_{ZYY}}{RT_{YY}P_{YY}} + c_Z^2 \frac{\varphi_{ZZZ}}{3RT_{ZZ}P_{ZZ}} \right). \quad (2.8)$$

Функцию  $\Phi_X^\Omega$  представим в виде  $\Phi_X^\Omega = Ac_X + Bc_X\varepsilon$ . Для определения неизвестных коэффициентов потребуем:

$$\int c_X \Phi_X^\Omega f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = 0; \quad \int c_X \varepsilon \Phi_X^\Omega f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \omega_X.$$

После интегрирования и решения системы линейных уравнений получаем:

$$\Phi_X^\Omega = \frac{3}{2} \frac{c_X \omega_X}{RT_{XX} E_\Omega} \left( \frac{n}{E_\Omega} \varepsilon - 1 \right). \quad (2.9)$$

Аналогичным образом получены зависимости:

$$\Phi_Y^\Omega = \frac{3}{2} \frac{c_Y \omega_Y}{RT_{YY} E_\Omega} \left( \frac{n}{E_\Omega} \varepsilon - 1 \right); \quad (2.10)$$

$$\Phi_Z^\Omega = \frac{3}{2} \frac{c_Z \omega_Z}{RT_{ZZ} E_\Omega} \left( \frac{n}{E_\Omega} \varepsilon - 1 \right). \quad (2.11)$$

Из полученных выражений с учетом (2.4) может быть составлена функция  $f_\varphi$ . Соотношение (1.42) позволяет получить полную аппроксимирующую функцию распределения:

$$f_A = \left( 1 + c_X c_Y c_Z \frac{2\varphi_{XYZ}}{\rho R^3 T_{XX} T_{YY} T_{ZZ}} + \sum_{I=X,Y,Z} c_I \frac{3}{2} \frac{\omega_I}{RT_{II} E_\Omega} \left( \varepsilon \frac{n}{E_\Omega} - 1 \right) + \sum_{I=X,Y,Z} \frac{c_I}{RT_{II}} \left( - \left( \frac{\varphi_{IXX}}{P_{XX}} + \frac{\varphi_{IYY}}{P_{YY}} + \frac{\varphi_{IZZ}}{P_{ZZ}} \right) + \frac{c_X^2 \varphi_{IXX}}{(1+2\delta_{IX})RT_{XX}P_{XX}} + \frac{c_Y^2 \varphi_{IYY}}{(1+2\delta_{IY})RT_{YY}P_{YY}} + \frac{c_Z^2 \varphi_{IZZ}}{(1+2\delta_{IZ})RT_{ZZ}P_{ZZ}} \right) \right) f_P F_\Omega. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) инвариантно относительно преобразования «лабораторной» системы координат на основании соображений, приведенных в подразделе 1.3 по отношению к выражению (1.43).

Получим локальные выражения моментов порядка выше третьего с использованием аппроксимирующей функции вида (2.12). В силу нечетности функции  $f_\varphi$  локальные выражения моментов четвертого порядка соответствуют выведенным выше выражениям (1.49), (1.50).

Моменты третьего порядка с учетом разложения  $c_i = e_{iX}c_X + e_{iY}c_Y + e_{iZ}c_Z$  выразим следующим образом:

$$\varphi_{ijk} = \frac{m_0}{2} \int c_i c_j c_k f_A d\bar{c} d\varepsilon = e_{i\alpha} e_{j\beta} e_{k\gamma} \varphi_{\alpha\beta\gamma}; \quad (2.13)$$

$$\omega_i = \int c_i \varepsilon f_A d\bar{c} d\varepsilon = e_{i\alpha} \omega_\alpha. \quad (2.14)$$

В этих выражениях каждый из индексов суммирования  $\alpha, \beta, \gamma$  принимает значения  $X, Y, Z$  (индексы главных осей). Моменты третьего порядка, стоящие в правых частях, соответствуют главным осям тензора напряжений.

Локальные выражения моментов пятого порядка:

$$M_{ijklm}^{(5)} = m_0 \int c_i c_j c_k c_l c_m f_A d\bar{c} d\varepsilon; \quad (2.15)$$

$$M_{ijk}^{\Omega(5)} = \int c_i c_j c_k \varepsilon f_A d\bar{c} d\varepsilon. \quad (2.16)$$

После преобразования проекций тепловой скорости в систему координат главных осей тензора напряжений и интегрирования выражений (2.15), (2.16) получаем громоздкие суммы, из которых достаточно просто комбинируются выражения типа (1.47), (2.13) и (2.14). В результате получаем:

$$M_{ijklm}^{(5)} = 2R \left( \begin{aligned} &T_{ij}\varphi_{klm} + T_{ik}\varphi_{jlm} + T_{il}\varphi_{jkm} + T_{im}\varphi_{jkl} + T_{jk}\varphi_{ilm} + \\ &+ T_{jl}\varphi_{ikm} + T_{lm}\varphi_{ikl} + T_{kl}\varphi_{ijm} + T_{km}\varphi_{ijl} + T_{lm}\varphi_{ijk} \end{aligned} \right) \equiv 2RT_{**}\varphi_{***}; \quad (2.17)$$

$$M_{ijk}^{\Omega(5)} = 2 \frac{E_\Omega}{\rho} \varphi_{ijk} + R(T_{jk}\omega_i + T_{ik}\omega_j + T_{ij}\omega_k) \equiv 2 \frac{E_\Omega}{\rho} \varphi_{ijk} + RT_{**}\omega_*. \quad (2.18)$$

Нетрудно убедиться в эквивалентности этих выражений зависимостям (1.96) и (1.97), полученным из допущения о линейной зависимости моментов.



Таким образом, локальные выражения моментов высших порядков могут быть получены без использования аппроксимирующей функции какого-либо конкретного вида.

## 2.2. Сопоставление балансового и локального выражений моментов четвертого порядка

Для выяснения того, насколько локальное представление моментов четвертого порядка соответствует моментным уравнениям, подставим локальные выражения моментов четвертого и пятого порядков в моментные уравнения (2.1) и (2.2). Наиболее компактный вид уравнений будет получен, если моменты второго и третьего порядков отнести к плотности, т.е.

$$P_{ij}/\rho = RT_{ij}, \quad \varphi_{ijk}/\rho = \psi_{ijk}/2, \quad \omega_i/\rho = \varpi_i. \quad (2.19)$$

Локальные выражения моментов в этих символах:

$$M_{ijkl}^{(4)}/\rho = R^2 T_{**} T_{**}; \quad (2.20)$$

$$M_{ij}^{\Omega(4)}/\rho = c_{\Omega} R T_{\Omega} T_{ij}; \quad (2.21)$$

$$M_{ijklm}^{(5)}/\rho = R T_{**} \psi_{***}; \quad (2.22)$$

$$M_{ijk}^{\Omega(5)}/\rho = c_{\Omega} T_{\Omega} \psi_{ijk} + R T_{**} \varpi_{*}. \quad (2.23)$$

Моментные уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{M_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + u_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{M_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + \frac{M_{***\alpha}^{(4)}}{\rho} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} - R \psi_{***} \frac{\partial T_{*\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \\ & - R T_{*\alpha} \psi_{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{M_{ijkl\alpha}^{(5)}}{\rho} \right) + \frac{M_{ijkl\alpha}^{(5)}}{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_{\alpha}} = \frac{M_{ijkl}^{(4)+}}{\rho \tau^{+}} - \frac{M_{ijkl}^{(4)}}{\rho \tau}; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{M_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{M_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + \frac{M_{* \alpha}^{\Omega(4)}}{\rho} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - R \varpi_* \frac{\partial T_{* \alpha}}{\partial x_\alpha} - R T_{* \alpha} \varpi_* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{M_{ij \alpha}^{\Omega(5)}}{\rho} \right) + \frac{M_{ij \alpha}^{\Omega(5)}}{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{M_{ij}^{\Omega(4)+}}{\rho \tau^+} - \frac{M_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho \tau} \end{aligned} \quad (2.25)$$

После подстановки локальных выражений в моментные уравнения и деления на газовую постоянную получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (T_{**} T_{**}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_{**} T_{**}) + T_{* \alpha} T_{**} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{R} \psi_{***} \frac{\partial T_{* \alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{R} T_{* \alpha} \psi_{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_{**} \psi_{** \alpha} + T_{* \alpha} \psi_{***}) + \frac{1}{R} (T_{**} \psi_{** \alpha} + T_{* \alpha} \psi_{***}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{T_{**}^+ T_{**}^+}{\tau^+} - \frac{T_{**} T_{**}}{\tau} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (T_\Omega T_{ij}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_\Omega T_{ij}) + T_\Omega T_{* \alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c_\Omega} \varpi_* \frac{\partial T_{* \alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c_\Omega} T_{* \alpha} \varpi_* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{R} T_\Omega \psi_{ij \alpha} + \frac{1}{c_\Omega} (T_{* \alpha} \varpi_* + T_{ij} \varpi_\alpha) \right) + \\ + \left( \frac{1}{R} T_\Omega \psi_{ij \alpha} + \frac{1}{c_\Omega} (T_{* \alpha} \varpi_* + T_{ij} \varpi_\alpha) \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{T_\Omega^+ T_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{T_\Omega T_{ij}}{\tau} \end{aligned} \quad (2.27)$$

В этих уравнениях принято:

$$(T_{...} T_{...})^+ = T_{...}^+ T_{...}^+, \quad (2.28)$$

т.е. межмолекулярные столкновения не влияют на вид локальных выражений моментов четвертого порядка (2.20) и (2.21).

Уравнения моментов второго порядка (1.33), (1.34) в переменных  $T_{ij}$  и  $T_\Omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{ij} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_{ij}) + T_{* \alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_{ij \alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\psi_{ij \alpha}}{R} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{T_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{T_{ij}}{\tau}; \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} \frac{\partial \varpi_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\varpi_\alpha}{c_\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{T_\Omega^+}{\tau^+} - \frac{T_\Omega}{\tau}. \quad (2.30)$$

Домножим (2.29) на  $T_{kl}$ . Затем уравнение (2.29), записанное относительно индексов  $k$  и  $l$ , домножим на  $T_{ij}$  и почленно сложим полученные выражения. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(T_{ij}T_{kl}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(T_{ij}T_{kl}) + T_{\alpha j}T_{kl} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + T_{i\alpha}T_{kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + T_{ij}T_{\alpha l} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \\ + T_{ij}T_{k\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} \left( T_{kl} \frac{\partial \psi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} + T_{ij} \frac{\partial \psi_{kl\alpha}}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{R} (T_{kl}\psi_{ij\alpha} + T_{ij}\psi_{kl\alpha}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \quad . \quad (2.31) \\ = \frac{T_{ij}T_{kl}^+ + T_{kl}T_{ij}^+}{\tau^+} - 2 \frac{T_{ij}T_{kl}}{\tau} \end{aligned}$$

Проделав эту операцию для других, не тождественных по величине сочетаний индексов ( $T_{ik}T_{jl}$  и  $T_{il}T_{jk}$ ) и проведя почленное сложение, приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(T_{**}T_{**}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(T_{**}T_{**}) + T_{\alpha*}T_{**} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} T_{**} \frac{\partial \psi_{**\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} T_{**}\psi_{**\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \quad . \quad (2.32) \\ = \frac{T_{**}T_{**}^+}{\tau^+} - 2 \frac{T_{**}T_{**}}{\tau} \end{aligned}$$

Отметим, что в выражении  $T_{**}T_{**}^+$  шесть слагаемых, а в  $T_{**}T_{**}$  только три, что является следствием исключения тождественных по величине членов из последнего выражения, см. (1.29).

Аналогичным образом из зависимостей (2.29), (2.30), домноженных на  $T_\Omega$  и  $T_{ij}$ , можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(T_\Omega T_{ij}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(T_\Omega T_{ij}) + T_\Omega T_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} T_\Omega \left( \frac{\partial \psi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} + \psi_{ij\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right) + \\ + \frac{1}{c_\Omega} T_{ij} \left( \frac{\partial \varpi_\alpha}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{T_\Omega T_{ij}^+ + T_\Omega^+ T_{ij}}{\tau^+} - 2 \frac{T_\Omega T_{ij}}{\tau} \quad . \quad (2.33) \end{aligned}$$

Уравнения (2.32) и (2.33) являются точными, в том смысле, что соответствуют функции распределения общего вида; аппроксимирующая функция  $f_A$  не использовалась при их выводе. Вычтем (2.32) и (2.33) из (2.26) и (2.27) соответственно. Если бы уравнения (2.32) и (2.33) содержали точные

моментные соотношения, то результатом такой операции было бы тривиальное тождество. В результате указанной операции получаются следующие выражения:

$$\frac{1}{R} \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \psi^{***}}{\partial x_\alpha} + \psi^{**\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{T_{**}^+ T_{**}^+}{\tau^+} - \frac{T_{**} T_{**}}{\tau^+} + \frac{T_{**} T_{**}}{\tau}; \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{R} \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{T_\Omega^+ T_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{T_\Omega T_{ij}}{\tau^+} + \frac{T_\Omega T_{ij}}{\tau} - \frac{T_\Omega^+ T_{ij}}{\tau^+}. \quad (2.35)$$

Преобразуем правую часть (2.34). Полагая, что средние частоты прямых и обратных столкновений не зависят от степени неравновесности течения (см. подраздел 1.2), примем  $\tau^+ = \tau$ . В развернутой виде:

$$\frac{1}{\tau} \left( \begin{aligned} & T_{ij}^+ T_{kl}^+ + T_{ik}^+ T_{jl}^+ + T_{il}^+ T_{jk}^+ - \\ & - T_{ij}^- T_{kl}^- - T_{ik}^- T_{jl}^- - T_{il}^- T_{jk}^- - T_{kl}^- T_{ij}^- - T_{jl}^- T_{ik}^- - T_{jk}^- T_{il}^- + \\ & + T_{ij} T_{kl} + T_{ik} T_{jl} + T_{il} T_{jk} \end{aligned} \right). \quad (2.36)$$

После перегруппировки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left( (T_{ij}^+ - T_{ij}^-) (T_{kl}^+ - T_{kl}^-) + (T_{ik}^+ - T_{ik}^-) (T_{jl}^+ - T_{jl}^-) + (T_{il}^+ - T_{il}^-) (T_{jk}^+ - T_{jk}^-) \right) \equiv \\ \equiv \tau \frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} \frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} = \tau \left( \frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Аналогичным образом преобразована правая часть (2.35). В результате получим:

$$\frac{1}{R} \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \psi^{***}}{\partial x_\alpha} + \psi^{**\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) = \tau \frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} \frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} \equiv \tau \left( \frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} \right)^2; \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{R} \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = \tau \frac{T_\Omega^+ - T_\Omega}{\tau} \frac{T_{ij}^+ - T_{ij}}{\tau}. \quad (2.39)$$

С учетом соотношений (1.35), (1.37) и (1.76) и сделанного допущения  $\tau^+ = \tau$ , можно записать:

$$\frac{T_{ij}^+ - T_{ij}}{\tau} = -\frac{1}{R\rho} \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\theta}{h\tau_p} \equiv -\frac{1}{R\rho} \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\theta}{h\tau_p}; \quad (2.40)$$

$$\frac{T_{\Omega}^+ - T_{\Omega}}{\tau} = \frac{3}{2}(\gamma-1) \frac{\theta}{h\tau_p} \equiv \frac{3}{2} \frac{R}{c_v} \frac{\theta}{h\tau_p}. \quad (2.41)$$

Таким образом, рассогласование локального и балансового выражений моментов четвертого порядка определяется зависимостями:

$$\frac{1}{R} \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \psi_{***}}{\partial x_{\alpha}} + \psi_{**\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_{\alpha}} \right) = \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p \left( \frac{1}{R\rho} \frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{\theta}{h\tau_p} \right)^2; \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{R} \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{c_{\Omega}} \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_{*}}{\partial x_{\alpha}} + \varpi_{\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_{\alpha}} \right) = -\frac{3}{2} \frac{R}{c_v} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\theta}{h} \left( \frac{1}{R\rho} \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{\theta}{h\tau_p} \right). \quad (2.43)$$

Полученные выражения накладывают дополнительные, не следующие из молекулярно-кинетической теории, условия на процессы переноса (левая часть уравнений) и процессы релаксации (правая часть). Эти условия являются следствием несовершенства аппроксимирующей функции распределения и сами по себе не описывают каких-либо физических процессов. Однако, если ставится задача формального согласования локального и балансового выражений моментов четвертого порядка, зависимости (2.42) и (2.43) могут быть использованы в качестве условий такого согласования.

### 2.3. Согласование балансового и локального выражений моментов четвертого порядка. Расширение системы моментных уравнений

Представим моменты четвертого порядка в следующем виде:

$$M_{ijkl}^{(4)} = \frac{1}{\rho} P_{**} P_{**} + m_{ijkl}^{(4)}; \quad (2.44)$$

$$M_{ij}^{\Omega(4)} = c_{\Omega} T_{\Omega} P_{ij} + m_{ij}^{\Omega(4)}. \quad (2.45)$$

В этих выражениях  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$  выполняют функции согласующих добавок, вид которых предстоит установить.

Подставим (2.44) и (2.45) в моментные уравнения (2.24) и (2.25). Проведем преобразования полученных уравнений, описанные в предыдущем подразделе. В результате получим дифференциальные уравнения, определяющие согласующие добавки:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + \frac{m_{***\alpha}^{(4)}}{\rho} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + R \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \psi_{***}}{\partial x_\alpha} + \psi_{***\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p \left( \frac{p_{**}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right)^2 = - \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho \tau_4}; \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + \frac{m_{*\alpha}^{\Omega(4)}}{\rho} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + c_\Omega \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + R \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{3}{2} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{R\theta}{h} \left( \frac{p_{ij}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right) = - \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho \tau_{\Omega 4}}. \quad (2.47)$$

В правых частях уравнений фигурируют времена релаксации моментов четвертого порядка  $\tau_4$  и  $\tau_{\Omega 4}$ , определяемые в соответствии с описанным выше методом построения системы моментных уравнений при условии  $\tau^+ = \tau$ . Эмпирических зависимостей, подобных реологическому закону Ньютона и закону Фурье, для этих величин не существует. Из общих соображений можно предположить:  $\tau_4 \approx \tau_p$ ,  $\tau_{\Omega 4} \approx h \tau_p$ .

Такие предположения имеют характер оценки величин  $\tau_4$  и  $\tau_{\Omega 4}$ . В численных решениях отношения  $\tau_4/\tau_p$  и  $\tau_{\Omega 4}/\tau_p$  будут рассматриваться как свободные параметры модели. Если значения этих параметров не указаны, то будут приниматься приведенные выше приближенные соотношения.

Для определения отношения  $\tau/\tau_p$ , так же как для определения параметра  $h$  (см. (1.78)), может быть использовано соотношение работы [55]:

$$\frac{\tau}{\tau_p} = \frac{(7-2s)(5-2s)}{30}. \quad (2.48)$$

Определим порядок величины согласующих добавок  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$ . Представим уравнения (2.46) и (2.47) в безразмерном виде, используя характерные значения величин подраздела 1.4. Характерную величину моментов четвертого порядка определим как  $p_{\bullet}^2$ . Безразмерные уравнения совпадут по форме записи с уравнениями (2.46) и (2.47) с точностью до постоянных множителей  $R$  и  $c_{\Omega}$ , не изменяющих порядок величины остальных членов уравнений.

Для сокращения записи будем рассматривать (2.46) и (2.47) как безразмерные уравнения, в которых основные газодинамические переменные  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T_t$ ,  $T_{\Omega}$ ,  $p^m$  имеют порядок единицы, а неравновесные величины  $p_{ij}^m$ ,  $\theta$ ,  $\psi_{ijk}$  (кроме  $\psi_{123}$  и подобных),  $\varpi_i$  имеют порядок  $\tau$ . Учтем, что  $\tau$ ,  $\tau_p$ ,  $\tau_4$  и  $\tau_{\Omega 4}$  – величины одного порядка малости.

Считая порядок величины согласующих добавок неопределенным, выделим старшие члены левых частей уравнений (2.46) и (2.47). Примем во внимание

безразмерные соотношения: 
$$T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho} = \frac{1}{\rho} (\delta_{ij} p^m + p_{ij}), \quad T_t = \frac{p^m}{\rho},$$

$\delta_{*\alpha} T_t \frac{\partial \psi^{***}}{\partial x_{\alpha}} = T_t \frac{\partial \psi^{***}}{\partial x_{*}}$ . Множители порядка единицы, значения которых в данном случае несущественны, обозначим  $C_1, C_2, C_3, \dots$

Старшие члены левой части уравнения (2.46):

$$C_1 \left( T_t \frac{\partial \psi^{***}}{\partial x_{*}} + \delta_{**} \psi_{**\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_{\alpha}} \right) - (C_2 p^{**} + \delta_{**} C_3 \theta) \left( C_2 \frac{p^{**}}{\tau_p} + \delta_{**} C_3 \frac{\theta}{\tau_p} \right). \quad (2.49)$$

Старшие члены левой части (2.47):

$$C_4 \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x_{\alpha}} + C_5 \left( T_t \frac{\partial \varpi_{*}}{\partial x_{*}} + \delta_{ij} \varpi_{\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_{\alpha}} \right) + \theta \left( C_6 \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} C_7 \frac{\theta}{\tau_p} \right). \quad (2.50)$$

В общем случае в поле течения будут присутствовать области, в которых два слагаемых выражения (2.49) будут иметь разные знаки, а три слагаемых (2.50)

– одинаковые знаки. Следовательно, порядок величины выражений будет определяться порядком отдельных слагаемых, который соответствует  $\tau$ .

Возвращаясь к уравнениям (2.46) и (2.47), можем утверждать, что релаксационные члены, стоящие в правых частях уравнений и являющиеся старшими членами слагаемых, содержащих  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$ , также должны иметь порядок  $\tau$ . Отсюда непосредственно следует, что порядок малости согласующих добавок  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$  соответствует  $\tau^2$ .

Локальные выражения моментов четвертого порядка (1.49) и (1.50), в силу проведенных оценок, представляют указанные моменты с точностью до  $\tau$  включительно. Этот факт будет использован для построения моделей второго приближения в Разделе 3. Согласующие добавки при этом не потребуются.

Система моментных уравнений (1.79), после внесения производных согласующих добавок в уравнения моментов третьего порядка и дополнения всей системы уравнениями (2.46) и (2.47), может рассматриваться как самостоятельная модель неравновесного течения [62]. Эта модель включает в себя 45 скалярных уравнений. В дальнейшем будем называть ее системой M45. Так же как и система M24, система M45 не содержит явных ограничений по числам Кнудсена.

Уравнения моментов до второго порядка включительно системы M45 совпадают с соответствующими уравнениями системы M24, см (1.79) или (1.91).

Уравнения третьего и четвертого порядков, с учетом замены моментов  $\psi_{ijk}$  и  $\varpi_i$

их «системными» значениями  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$ , принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_\alpha} = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p};$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_{\Omega} P_{i\alpha} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_{i\alpha}^{\Omega(4)}}{\partial x_\alpha} = -\frac{c_{\Omega}}{c_{\omega}} \frac{\omega_i}{\tau_p};$$



$$\frac{\partial m_{ijkl}^{(4)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha m_{ijkl}^{(4)}) + m_{****\alpha}^{(4)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + 2R \left( T_{*\alpha} \left( \frac{\partial \varphi^{***}}{\partial x_\alpha} - \varphi^{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right) + \varphi^{***\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\tau_p}{\rho} \left( \frac{p^{**}}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right)^2 = - \frac{\tau_p}{\tau_4} \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\tau_p} ; \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial m_{ij}^{\Omega(4)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha m_{ij}^{\Omega(4)}) + m_{*\alpha}^{\Omega(4)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + R \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \omega_*}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} - \omega_* T_{*\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right) + 2c_{\Omega} \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{2} \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{R\theta}{h} \left( \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) = - \frac{\tau_p}{\tau_{\Omega 4}} \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\tau_p}$$

Система (2.51), так же как и система M24, обладает коротковолновой неустойчивостью, хотя «субскачок» на профиле ударной волны возникает при больших числах Маха, по сравнению с системой M24.

Ниже приведены результаты численного теста на примере задачи о профиле ударной волны. Для численного решения использовались указанные выше методы. На Рисунке 2.1 представлены профили скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа.

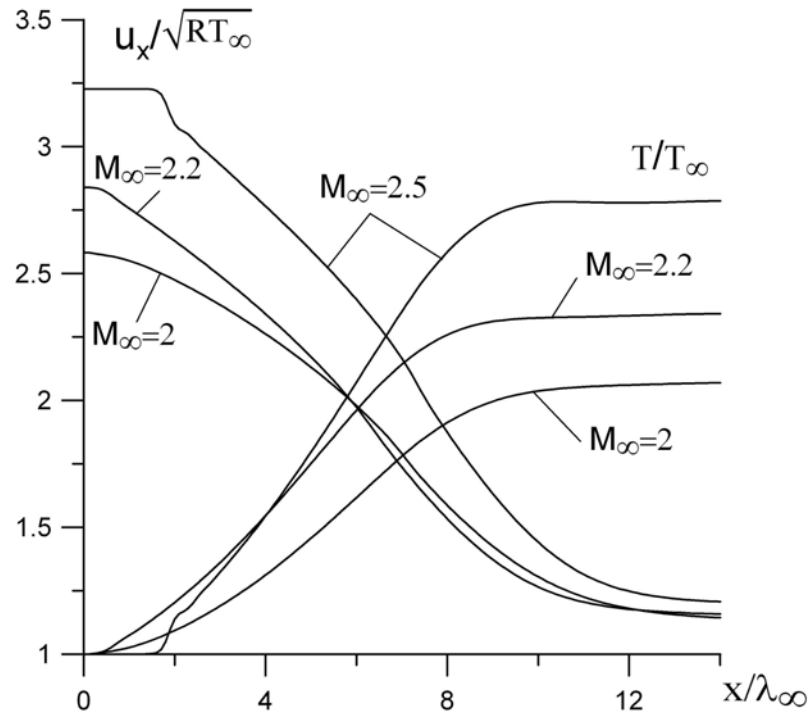


Рисунок 2.1. Профили скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа. Система M45;  $s = 1$ ,  $\tau/\tau_p = 0.5$ ,  $\tau_4/\tau_p = 1$ .

На Рисунке 2.2 и Рисунке 2.3 показаны аналогичные профили для двух- и трехатомного газа.

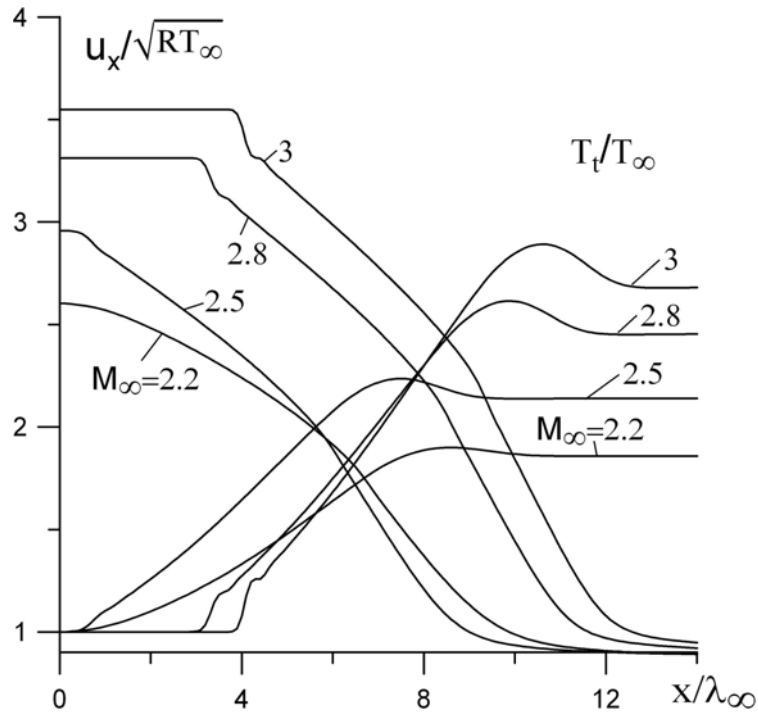


Рисунок 2.2. Профили скорости и температуры в ударной волне двухатомного газа. Система М45;  $s = 1$ ;  $\tau_4/\tau_p = 0.35$ ;  $\tau_{\Omega 4}/\tau_p = 2.5$ .

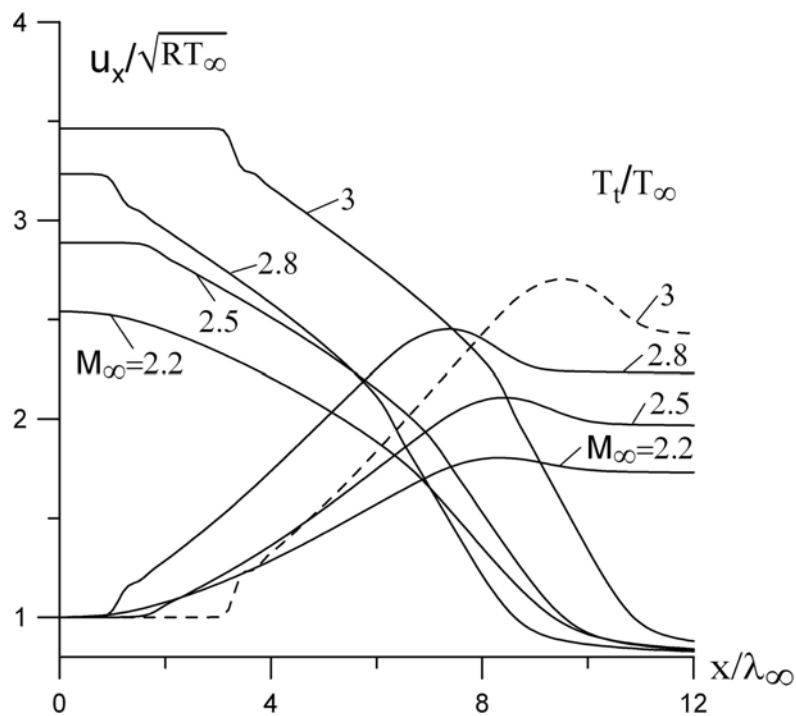


Рисунок 2.3. Профили скорости и температуры в ударной волне трехатомного газа. Система М45;  $s = 1$ ;  $\tau_4/\tau_p = 0.3$ ;  $\tau_{\Omega 4}/\tau_p = 2.5$ .

При  $M_\infty \approx 2.2 \dots 2.5$  на профилях возникает волнообразная область, прогрессирующая с увеличением числа Маха и переходящая в "субскачок". Сравнение Рисунка 1.1 и Рисунка 2.1 показывает, что свободная от коротковолновой неустойчивости область решений система M45 шире, чем у системы M24. Применение численных методов, сглаживающих решения, см. например [50], позволяет расширить эту область до чисел Маха, превышающих 2.5.

Таким образом, согласование локального и балансового выражений моментов 4-го порядка позволяет снизить, но не исключить коротковолновую неустойчивость системы моментных уравнений.

Коротковолновая неустойчивость системы M45, видимо, связана с тем, что моменты пятого порядка, присутствующие в выражениях (2.46) и (2.47), представлены своими локальными выражениями. Разложение эллипсоидальной функции по степеням тепловой скорости, используемое в (2.12), не имеет принципиального значения по двум причинам:

- идентичные выражения замыкающих моментов могут быть получены без использования аппроксимирующей функции распределения методом, предложенном в Разделе 1;
- при числах  $M_\infty \approx 1.85$ , для которых нарушена сходимость в среднем ряда аппроксимирующей функции [20], система M45 имеет гладкие решения.

Можно ожидать, что согласование локального и балансового выражений моментов пятого порядка позволит еще больше расширить область адекватных решений.

С точки зрения численного решения система M45 представляет собой систему восьми уравнений. Для многопроцессорной реализации потребуется 15 процессоров. Расширение системы согласующими добавками моментов пятого порядка преобразует ее в систему 10-ти уравнений, реализуемую на 21-ом процессоре.

## 2.4. Выделение старших членов согласующих добавок. Системы M24c и M24cc

Количество уравнений в системе M45 может быть сокращено до 24-х, если вместо дифференциальных уравнений согласующих добавок  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$  использовать их приближения. Приближения по старшим членам будут иметь порядок  $\tau^2$  и, будучи подставленными в уравнения моментов третьего порядка, замкнут систему на уровне 24-х уравнений.

Формально строгое приближение по старшим членам предполагает исключение из левых частей дифференциальных уравнений для  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$  системы (2.51) слагаемых с порядком малости  $\tau^2$ . Величины, входящие в слагаемые порядка  $\tau^1$ , должны быть представлены своими старшими приближениями. Удельные напряжения  $T_{ij} = \delta_{ij}T_t + p_{ij}/R\rho$  заменяются поступательной температурой. Неравновесные напряжения и разность температур, фигурирующие в выражениях релаксационного типа  $p_{ij}^m/\tau_p$  и  $\theta/\tau_p$ , а также моменты третьего порядка, должны быть заменены их гидродинамическими приближениями.

Описанное приближение будет подробно представлено в Разделе 3 при построении релаксационной модели. Здесь отметим только, что замена моментов третьего порядка их гидродинамическими приближениями в уравнениях согласующих добавок с последующей подстановкой полученных зависимостей в уравнения моментов третьего порядка системы (2.51) приводит к высокой нелинейности этих моментных уравнений. В частности, она повышает порядок производных температур  $T_t$  и  $T_\Omega$  до трех. Автором настоящей работы численные решения такой системы не получены.

К сокращению количества уравнений системы (2.51) можно подойти и с иных позиций [65]. Уравнения (2.46), (2.47) и соответствующие им уравнения системы (2.51) по существу не являются моментными уравнениями. Более того, они не представляют собой балансовых зависимостей, описывающих реальные

физические процессы. Указанные уравнения лишь корректируют результат вычисления моментов четвертого порядка, «подправляют» аппроксимирующую функцию распределения. Примененный метод построения моментных уравнений требовал от аппроксимирующей функции лишь «правильных» значений моментов до третьего порядка включительно.

Как отмечено выше, нет никаких оснований рассчитывать на высокую точность аппроксимации моментов высших порядков, как функцией  $f_A$ , рассматриваемой в настоящей работе, так и 20-моментной функцией Грэда. После введения согласующих добавок, отчасти компенсирующих несовершенство аппроксимирующей функции, трудно говорить о ее каком-либо определенном виде.

Зависимости, полученные из допущения о линейной зависимости моментов, определены на макроскопическом уровне и не связаны явным образом с функцией распределения. Уравнения (2.46) и (2.47) в этом случае корректируют локальные выражения (2.20), ..., (2.23).

Приведенные доводы позволяют отказаться от формально строгих преобразований уравнений согласующих добавок. Будем руководствоваться практическими соображениями, смысл которых будет пояснен ниже.

Приближение по старшим членам уравнений согласующих добавок построим следующим образом. Пренебрежем всеми слагаемыми порядка малости выше чем  $\tau^1$ . Заменяем удельные напряжения поступательной температурой:  $T_{ij} \approx \delta_{ij} T_t$ . Остальные неравновесные величины, входящие в старшие члены уравнений ( $\theta$ ,  $\varphi_{ijk}$ ,  $\omega_i$  и неравновесные напряжения  $p_{ij}^m$  в выражениях релаксационного типа), будем считать точными величинами, т.е. определяемыми соответствующими дифференциальными уравнениями системы (2.51) с учетом (1.55) и (1.82).

Такой способ преобразования уравнений согласующих добавок, очевидно, является внепорядковым, но он оправдан приведенными выше доводами. Аналогичное преобразование использовано в работе [21] при построении модели

R13, хотя в этой работе оно рассматривается в качестве процедуры Чепмена–Энскога.

В результате указанных преобразований приходим к приближениям согласующих добавок:

$$m_{ijkl}^{(4)} = -\frac{\tau_4}{\tau_p} \tau_p \left( 2R \left( T_t \left( \frac{\partial \varphi_{***}}{\partial x_*} - \varphi_{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_*} \right) + \delta_{**} \varphi_{**\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\tau_p}{\rho} \left( \frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) \left( \frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) \right); \quad (2.52)$$

$$m_{ij}^{\Omega(4)} = -\frac{\tau_{\Omega 4}}{\tau_p} \tau_p \left( 2c_{\Omega} \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{2} \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{R\theta}{h} \left( \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) + \right. \\ \left. + R \left( T_t \left( \frac{\partial \omega_*}{\partial x_*} - \omega_* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_*} \right) + \delta_{ij} \omega_{\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} \right) \right). \quad (2.53)$$

Зависимости (2.52) и (2.53) позволяют исключить два последних уравнения из системы (2.51). Полученную систему будем называть системой уравнений, согласованной по моментам четвертого порядка, или системой M24с. Отличие этой системы от системы M24 заключается только в уравнениях моментов третьего порядка. Запишем систему M24с, в которой уравнение сохранения энергии представлено в термодинамической форме, а моментные уравнения – в “механической”. В таком виде эта система будет использована в Разделе 5 для построения гибридной модели.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) = -\frac{\theta}{h\tau_p}; \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( u_\alpha p_{ij}^m \right) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( u_\alpha \varphi_{ijk} \right) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_\alpha} = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p};$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( u_\alpha \omega_i \right) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_{i\alpha}^{\Omega(4)}}{\partial x_\alpha} = -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}.$$

После подстановки зависимостей (2.52) и (2.53) в уравнения моментов  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$  порядок этих дифференциальных уравнений увеличивается до второго. При численной реализации системы (2.54) вторые производные  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$  способствуют сглаживанию решения. На этом и основывались упомянутые практические соображения.

Профили ударных волн, рассчитанные с использованием системы M24c, не содержат субскачков в широком интервале чисел Маха. Тем не менее эта система не решает полностью проблему коротковолновой неустойчивости.

На Рисунке 2.4 показаны профили скорости ударной волны в одноатомном газе. В расчетах принималось:  $s = 0.8$ ;  $\tau/\tau_p = 0.612$ ;  $\tau_4/\tau_p = 1$ . Значения параметров выбирались из соображений наилучшего сглаживания профиля.

Из рисунка видно, что при  $M_\infty \geq 3$  профиль начинает «делиться» на два участка, что не соответствует природе явления.

Аналогичный характер решения наблюдается и в случае многоатомных газов. На Рисунке 2.5 представлены профили скорости и температур в двухатомном газе.

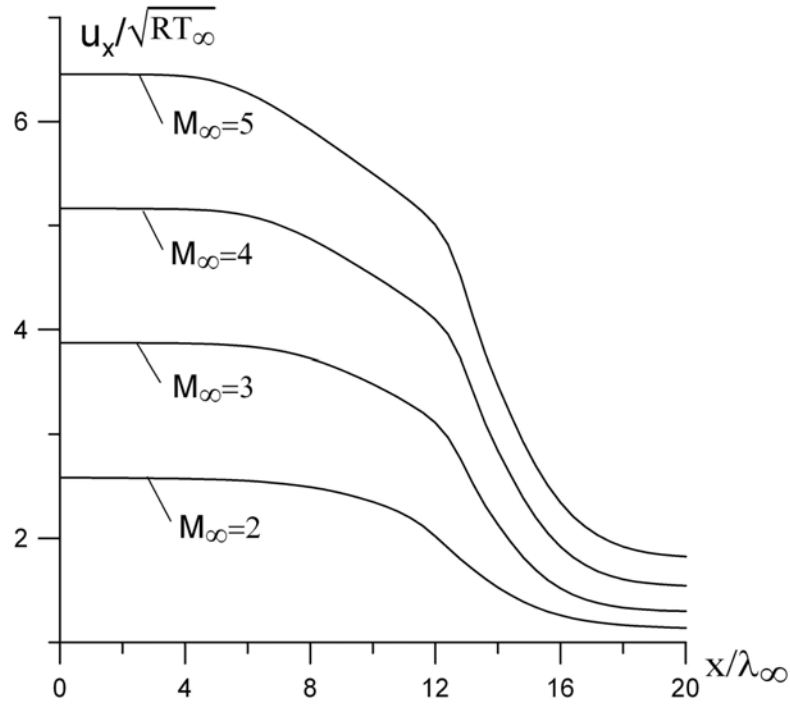


Рисунок 2.4. Профили скорости в ударной волне одноатомного газа. Система M24c;  $s = 0.8$ ;  $\tau/\tau_p = 0.612$ ;  $\tau_4/\tau_p = 1$ .

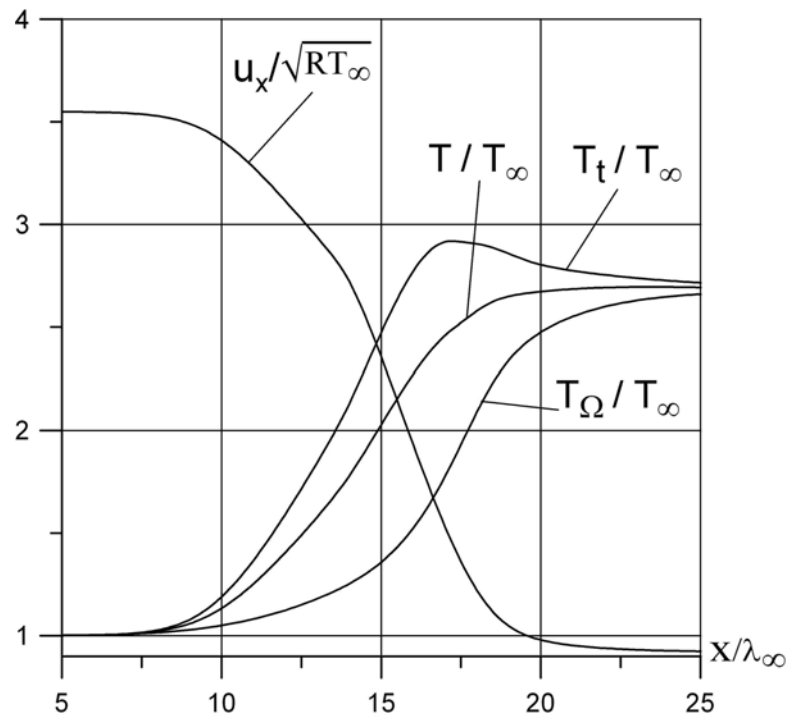


Рисунок 2.5. Профили скорости и температур в плоской ударной волне двухатомного газа. Система M24c,  $M_\infty = 3$ ,  $s = 1$ ,  $h = 3.7$ ,  $\tau/\tau_p = 0.5$ ,  $\tau_4/\tau_p = 1$ ,  $\tau_{\Omega 4}/\tau_p = h = 3.7$



Система M24c позволяет расширить интервал физически адекватных решений по числам Маха почти на всю сверхзвуковую область течений ( $M_\infty < 5$ ). Явных ограничений по числам Кнудсена эта система не имеет. Допущение о малости безразмерного  $\tau$  или  $Kn^*$ , сделанное при выделении старших членов согласующих добавок, не накладывает прямых ограничений на моментные уравнения по указанным выше причинам.

Отметим, что явные ограничения по характерным числам Кнудсена или их отсутствие не являются достаточным критерием применимости модели для расчета неравновесных течений. Классическим примером этого служит модель НСФ, имеющая прямое ограничение  $Kn^* \ll 1$ , но во многих случаях дающая качественно верные решения даже в гиперзвуковой области течения.

При выводе уравнений (2.52), (2.53) из уравнений согласующих добавок (2.46), (2.47) были выделены старшие члены, имеющие порядок малости  $\tau$ . Как было отмечено, среди элементов тензора  $\psi_{ijk}$  ( $\phi_{ijk}$ ) содержатся элементы порядка  $\tau^2$ . Это элемент  $\psi_{123}$  и тождественные ему по величине элементы. Строгое приближение уравнений (2.46), (2.47) по старшим членам требует исключения указанных элементов из зависимостей (2.46), (2.47). Этого можно добиться, выделив бездивергентную часть тензора  $\psi_{ijk}$ .

Представим указанный тензор в виде

$$\psi_{ijk} = \phi_{ijk} + \frac{1}{5}(\delta_{jk}\psi_i + \delta_{ik}\psi_j + \delta_{ij}\psi_k) \equiv \phi_{ijk} + \frac{1}{5}\delta_{**}\psi_*. \quad (2.55)$$

Нетрудно убедиться, что при  $i \neq j \neq k \neq i$  элементы тензора определены только бездивергентной частью:  $\psi_{ijk} = \phi_{ijk}$ . Таким образом, допущение

$$\psi_{ijk} \approx \frac{1}{5}\delta_{**}\psi_*, \quad (2.56)$$

примененное к зависимостям (2.52), (2.53), позволит исключить из них члены с порядком малости  $\tau^2$ . Уравнения согласующих добавок при этом принимают вид:

$$m_{ijkl}^{(4)} = -\tau_4 \rho \left( \frac{1}{5} R \left( T \delta_{**} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} + \delta_{**} \psi_* \frac{\partial T}{\partial x_*} + 2 \delta_{**} \delta_{**} \psi_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p \left( \frac{p_{**}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right)^2 \right); \quad (2.57)$$

$$m_{ij}^{\Omega(4)} = -\tau_{\Omega 4} R \rho \left( \frac{1}{5} \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} \left( \psi_* \frac{\partial T}{\partial x_*} + \delta_{ij} \psi_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) + T \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_*} + \delta_{ij} \varpi_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{2} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\theta}{h} \left( \frac{p_{ij}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right) \right). \quad (2.58)$$

Замена (2.52), (2.53) на (2.57), (2.58) приводит к новой систем уравнений, называемой далее системой M24cc. По форме эта система соответствует системе (2.54). С четом (2.57), (2.58) она является строгим приближением по старшим членам, что отмечено в ее аббревиатуре.

На Рисунке 2.6 представлены профили скорости ударной волны в одноатомном газе, соответствующие системе M24cc.

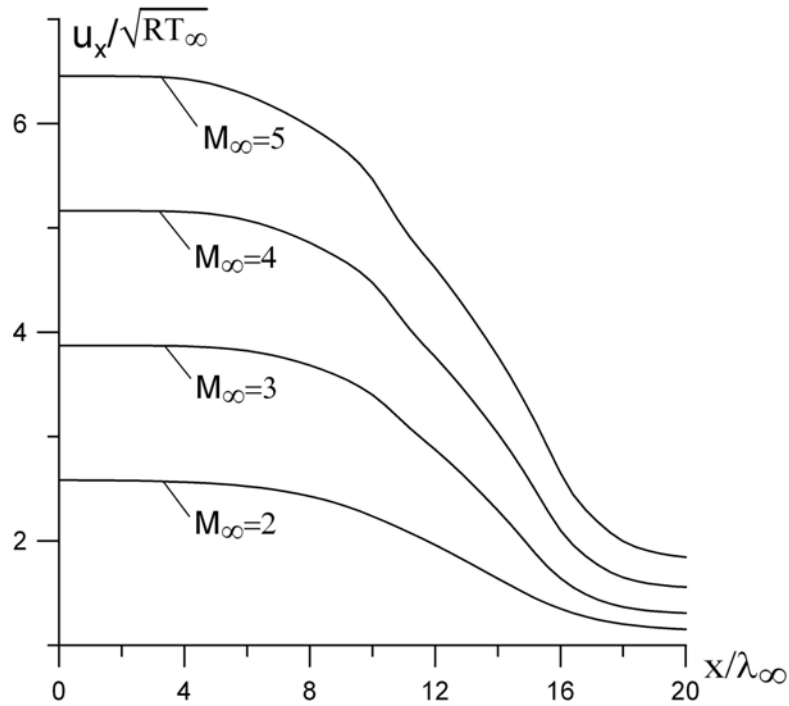


Рисунок 2.6. Профили скорости в ударной волне одноатомного газа. Система M24cc;  $s = 0.8$ ;  $\tau / \tau_p = 0.612$ ;  $\tau_4 / \tau_p = 1$ .

В случае течений многоатомных газов деформации профилей были аналогичны и лишь немного сглажены за счет влияния объемной вязкости.

Отметим, что допущение (2.56) было использовано Грэдом [15] для преобразования 20-моментной системы в 13-моментную. Это допущение изменило моментное уравнение неравновесных напряжений, сделав его внепорядковым, что и сказалось на свойствах 13-моментной системы.

В настоящей работе допущение (2.56) применяется к уравнениям согласующих добавок, которые, в отличие от моментных уравнений, не описывают какого-либо физического процесса, и являются чисто формальными зависимостями. В таком приложении допущение (2.56) позволяет снизить влияние моментов пятого порядка, представленных в (2.1) и (2.2) своими локальными выражениями (2.15), (2.16).

## 2.5. Обсуждение результатов раздела

Как было отмечено, основной недостаток физико-математических моделей течения, базирующихся на системах моментных уравнений, заключается в их коротковолновой неустойчивости. Наглядным проявлением этого дефекта моделей является субскачок на профилях ударных волн.

Принято считать, что причиной коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений является нарушение сходимости ряда, используемого в аппроксимирующей функции распределения [20; 13].

Аппроксимирующая функция распределения системы M24 не содержит разложения в ряд, тем не менее, на профиле ударной волны, рассчитанной с помощью системы M24, при  $M_\infty \approx 1.8$  возникает субскачок, см. Рисунок 1.1. Характер коротковолновой неустойчивости системы M24 полностью соответствует характеру 20-моментной системы Грэда. Еще одно сходство систем заключается в том, что замыкающие моменты обеих систем определены локально и не удовлетворяют своим моментным уравнениям.

Согласование балансового и локального выражений замыкающих моментов позволяет исключить субскачок.

Проведенные тесты показывают, что метод согласования имеет принципиальное значение. Дифференциальные уравнения согласующих добавок системы М45 получены с использованием локальных выражений момента пятого порядка. Этот недостаток не позволил существенно расширить область решений, свободных от коротковолновой неустойчивости.

Выделение старших членов из уравнений согласующих добавок позволяет ослабить влияние локальности момента высшего порядка. Коротковолновая неустойчивость моментной системы в этом случае выражается в появлении излома профиля при числах Маха, близких к гиперзвуковым значениям, см. Рисунок 2.4.

Исключение бездивергентных составляющих из тензоров, представляющих старшие члены, позволяет еще больше ослабить влияние локальности моментов высшего порядка. Напомним, что порядок малости бездивергентных составляющих выше порядка старших членов. Профили, представленные на Рисунке 2.6, существенно сглажены по сравнению с профилями Рисунка 2.4.

С точки зрения численного решения интересен тот факт, что согласующие добавки в виде (2.52), (2.53), будучи подставленными в соответствующие уравнения системы (2.54), приводят к появлению вторых производных моментов  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$  в их моментных уравнениях. Известным свойством вторых производных является сглаживание решения. Кривые Рисунка 2.4, таким образом, сглажены вторыми производными моментов  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$ . Согласующие добавки в виде (2.57), (2.58) не содержат момента  $\varphi_{ijk}$ , и будучи подставленными в (2.54) не повышают порядка дифференциальных уравнений. Таким образом, сглаженный вид профилей Рисунка 2.6 следует отнести к достоинствам метода согласования.

Хотелось бы обратить внимание на еще одно обстоятельство, связанное с последним методом согласования. Исключение бездивергентных тензоров в этом

методе имело своей целью исключение моментов типа  $\varphi_{123}$  из уравнений согласующих добавок. Однако, бездивергентные тензоры входят в состав всех моментов  $\varphi_{ijk}$ . Следовательно, проведенная операция «огрубил» все моменты  $\varphi_{ijk}$ , присутствующие в согласующих добавках. Такое «огрубление» носило явно позитивный характер, т.к. моменты типа  $\varphi_{123}$  в тестируемой задаче одномерного течения тождественно равны нулю и не влияют на результаты расчета. Система M24cc пригодна для расчета течений, по крайней мере, в сверхзвуковой области ( $M_\infty < 5$ ).

Материалы настоящего раздела приводят к следующим выводам.

- Основной причиной коротковолновой неустойчивости систем моментных уравнений является рассогласование локального и балансового выражений высших моментов, в частности – замыкающих моментов.
- Совокупность описанных выше способов согласования локального и балансового выражений моментов высших порядков может рассматриваться как метод снижения коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений.

Специально отметим, что методика получения дифференциальных уравнений согласующих добавок аналогична методике, применявшейся авторами работы [21] для "регуляризации" 13-моментной системы Грэда.

## СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ

## 3.1. Модель первого приближения

Характерной особенностью используемого выше метода построения моделей течения является отсутствие явных ограничений по числам Кнудсена. Замыкание системы проводится в предположении о том, что неточности в определении значений высших моментов слабо влияют на основные моменты: плотность, скорость, температуру, напряжения и тепловой поток. Если среднее время свободного пробега молекулы  $\tau$  мало по сравнению с характерным временем задачи, что эквивалентно ограничению  $\text{Kn}^* < 1$ , то локальные выражения моментов четвертого порядка (1.49), (1.50) вносят в уравнения  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$  системы (1.79) погрешность, соответствующую порядку малости согласующих добавок  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$ . В подразделе 2.3 порядок малости этих величин определен как  $\tau^2$ .

В случае произвольных значений  $\tau$  оценка порядка малости теряет смысл, и вопрос об использовании моделей M24, M24с, M24сс и M45 для описания течений сильно разреженных газов остается открытым и требующим дополнительных исследований. Предположение Грэда о том, что увеличение числа членов разложения равновесной функции распределения повышает точность аппроксимации истинной функции распределения, представляется необоснованным (см. например, [13]).

В качестве альтернативы методу Грэда может рассматриваться метод Чепмена–Энскога, для которого ограничение по числам Кнудсена ( $\text{Kn}^* < 1$ ) является органической особенностью. Этот метод позволяет сократить систему моментных уравнений до уравнений сохранения (5-моментная система), а неравновесные величины определять непосредственным интегрированием аппроксимирующей функции распределения в соответствующем приближении.

Модели течения, аналогичные моделям метода Чепмена-Энскога, могут быть получены непосредственно из 24-моментной системы уравнений [56; 66; 67]. Неравновесные величины в это случае определяются соответствующими моментными уравнениями в требуемом приближении. Ниже будет показано, что модели первого приближения, следующие из 24-моментной системы, обладают более общими свойствами, чем модели первого приближения метода Чепмена-Энскога.

Полагая время релаксации малой величиной  $\tau$ , выделим из моментных уравнений неравновесных величин члены требуемого порядка малости, который будем считать номером приближения. Аналогичная процедура проделана в Разделе 1 при получении гидродинамических приближений времен релаксации и в Разделе 2 для выделения старших членов неравновесных добавок. В результате может быть получена система уравнений сохранения, замкнутая выражениями неравновесных величин в требуемом приближении.

Построим систему уравнений, соответствующую первому приближению процедуры Чепмена-Энскога. Уравнения неравновесных величин будем рассматривать в размерной форме, полагая основные газодинамические переменные  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $(T_t, T_\Omega, p^m)$  и их производные величинами порядка единицы, а неравновесные величины  $\theta$ ,  $p_{ij}^m$ ,  $p_{ij}$ ,  $\varphi_{ijk}$ ,  $\omega_i$ ,  $q_i$  – малыми величинами порядка  $\tau$ . Уточнения в отношении порядка малости момента  $\varphi_{123}$  и подобных ему, в данном случае не потребуются.

Перепишем уравнение разности температур  $\theta$  (1.82) в виде

$$\theta = -h\tau_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} \left( \delta_{\alpha\beta} T_t + \frac{p_{\alpha\beta}^m}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) \right). \quad (3.1)$$

В первом приближении ( $\tau^1$ ) в правой части (3.1) удержим только старшие члены. Используем очевидное соотношение

$$\delta_{\alpha\beta} T_t \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = T_t \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.2)$$

Учтем, что в рассматриваемом приближении в соответствии с (1.60)

$$\tau_p p^m = \mu(T_t) \sim \tau_p p = \mu(T). \quad (3.3)$$

В результате получим выражение для разности температур в первом приближении (надстрочный символ):

$$\theta^{[1]} = -\frac{2}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.4)$$

Аналогичные преобразования проведем для остальных неравновесных величин. Уравнение неравновесных напряжений (1.39) представим следующим образом:

$$p_{ij}^m = -\tau_p \left( \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + (\delta_{*\alpha}^m p^m + p_{*\alpha}^m) \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \\ & - \delta_{ij} \frac{2}{3} (\delta_{\alpha\beta} p^m + p_{\alpha\beta}^m) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) \end{aligned} \right). \quad (3.5)$$

Первое приближение неравновесных напряжений:

$$p_{ij}^{m[1]} = -\mu \left( \frac{\partial u_*}{\partial x_*} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right). \quad (3.6)$$

Уравнение неравновесных термодинамических напряжений (1.87) с учетом (1.86) переписем в виде

$$p_{ij} = \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{h-1}{h} \rho R \theta - \tau_p \left( \begin{aligned} & \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}) + (\delta_{*\alpha} p + p_{*\alpha}) \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \\ & - \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} \right) (\delta_{\alpha\beta} p + p_{\alpha\beta}) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} (\gamma-1) q_\alpha) \end{aligned} \right). \quad (3.7)$$

Заменим разность температур первым приближением (3.4) и выделим главные члены в остальных слагаемых правой части (3.7). В результате приходим к выражению

$$p_{ij}^{[1]} = -\mu \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.8)$$



Это же выражение может быть получено из (1.15) с учетом первых приближений (3.4) и (3.6).

Преобразованное уравнение моментов третьего порядка  $\varphi_{ijk}$  системы (1.79):

$$\varphi_{ijk} = -\frac{3}{2} \tau_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} (\delta_{*\alpha} p^m + p_{*\alpha}^m) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \delta_{**} T_t + \frac{p_{**}^m}{R\rho} \right) \right). \quad (3.9)$$

В первом приближении

$$\varphi_{ijk}^{[1]} = -\frac{3}{4} R\mu \delta_{**} \frac{\partial T_t}{\partial x_*}. \quad (3.10)$$

Тепловой поток поступательных степеней свободы:

$$\varphi_i^{[1]} \equiv \varphi_{i\alpha\alpha}^{[1]} = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T_t}{\partial x_i}. \quad (3.11)$$

Преобразованное уравнение теплового потока  $\omega_i$  системы (1.79):

$$\omega_i = -\frac{c_\omega}{c_\Omega} \tau_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega (\delta_{i\alpha} p^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} \right). \quad (3.12)$$

В первом приближении

$$\omega_i^{[1]} = -c_\omega \mu \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_i}. \quad (3.13)$$

Первое приближение полного теплового потока  $q_i$ :

$$q_i^{[1]} = \varphi_i^{[1]} + \omega_i^{[1]} = -\frac{c_p}{Pr} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.14)$$

Здесь учтено, что в рассматриваемом приближении  $T \sim T_t \sim T_\Omega$ . Эта же зависимость может быть получена из уравнения теплового потока системы (1.91).

Система уравнений сохранения в совокупности с замыкающими ее зависимостями (3.4), (3.6), (3.8), (3.10), (3.11), (3.13), (3.14) в дальнейшем будем называть 5-моментной моделью. Она соответствует модели НСФ с явно выраженным коэффициентом объемной вязкости. Применение термина "модель" вместо, используемого ранее термина "система уравнений" оправдано тем, что количество граничных условий и сами граничные условия соответствуют модели НСФ и, следовательно, определены.

Запишем 5-моментную модель в термодинамических переменных. Ниже будет показано, что только термодинамическая форма записи уравнений сохранения является строгим первым приближением.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ p_{ij} = -\mu \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{*}} + \delta_{ij} c_\mu \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad q_i = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad c_\mu = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

В отличие от модели НСФ, система (3.15) содержит коэффициент объемной вязкости в явном виде. Если коэффициент объемной вязкости  $\mu'$  включен в уравнение неравновесных термодинамических напряжений в форме

$$\begin{aligned} p_{ij} = -\mu \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{*}} + \delta_{ij} \frac{2}{3} (\mu - \mu') \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}, \text{ то очевидно} \\ \mu' = \frac{5-3\gamma}{2} h \mu. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Первые приближения неравновесных величин  $p_{ij}^m$ ,  $\varphi_{ijk}$ ,  $\omega_i$ , полученные выше, непосредственно связаны с выбором значений времен релаксации (см. подраздел 1.4). Однако из реологического закона Ньютона и закона Фурье, используемых для определения времен релаксации  $\tau_p$ ,  $\tau_\varphi$ ,  $\tau_\omega$ , не следует, и принципиально не может следовать, выражение для коэффициента объемной вязкости.

Выражение (3.16) определено уравнением быстроты энергообмена (1.76) и зависимостью для  $\tau_\theta$  (1.77). В совокупности с системой моментных уравнений многоатомных газов указанные уравнения однозначно определяют объемную вязкость.

Проделанная процедура, отчасти дублирующая процедуру подраздела 1.4, имеет своей целью показать, что 5-моментная модель, являющаяся прямым следствием системы моментных уравнений M24, уточняет модель НСФ. Системы M24с, M24сс и M45, очевидно, имеют идентичные первые приближения.

В зависимости от условий решаемой задачи и уровня описания протекающих процессов применяются различные зависимости для коэффициента объемной вязкости (см., например, [5; 68; 69]). Отличительной особенностью выражения (3.16) является адекватность газодинамическим задачам и по методу получения, и по уровню описания процессов.

Отметим характерную особенность 5-моментной модели и, как будет показано ниже, моделей более высоких приближений процедуры Чепмена–Энскога. Уравнение энергии систем моментных уравнений (1.79), (2.51), (2.54) может быть представлено в виде двух уравнений, записанных относительно температур  $T_t$  и  $T_\Omega$ , т.е. (1.81) и (1.80). По отношению к системам M24, M24с и M45 это чисто формальное преобразование. Как отмечено выше, (1.81) представляет собой свертку уравнения напряжения  $P_{ij}$  с последующей заменой  $p^m$  на  $T_t$  посредством уравнения сохранения массы.

Количество скалярных уравнений напряжения при этом будет сокращено на единицу, что компенсирует увеличение количества уравнений энергии. Уравнение (1.80) эквивалентно уравнению энергии внутренних степеней свободы. Таким образом, проведенное преобразование по существу ничего не меняет в системах моментных уравнений.

Аналогичная процедура, распространенная на систему уравнений первого приближения, приведет к появлению в системе двух уравнений:

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{2}{3R\rho} \frac{\partial \varphi_\alpha^{[1]}}{\partial x_\alpha} = -\frac{5-3\gamma}{2} \frac{\theta^{[1]}}{h\tau_p}; \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha^{[1]}}{\partial x_\alpha} = \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{\theta^{[1]}}{h\tau_p}. \quad (3.18)$$

Общее количество скалярных уравнений системы увеличится до шести. На первый взгляд может показаться, что такое расширение системы повышает ее информативность, позволяя помимо осредненной температуры  $T$  определять ее составляющие  $T_t$  и  $T_\Omega$ . Однако в рамках системы (3.15) температуры  $T_t$  и  $T_\Omega$  представимы первыми приближениями в соответствии с (1.7), (1.8):

$$T_t = T + \frac{5-3\gamma}{2}\theta^{[1]}; \quad (3.19)$$

$$T_\Omega = T - \frac{3}{2}(\gamma-1)\theta^{[1]}. \quad (3.20)$$

Возникает вопрос об избыточности системы дифференциальных уравнений, содержащей уравнения (3.17) и (3.18). Модели первого и второго приближений построены в работе [66], однако вопрос избыточности систем уравнений первого приближения в этой работе не рассматривался. Анализ этого вопроса проведен в работе [56].

Проанализируем уравнения (3.17) и (3.18) с точки зрения порядка малости входящих в них величин. Релаксационные члены этих уравнений содержат первые приближения разности температур  $\theta^{[1]}$ . Вместе с тем сами релаксационные члены имеют порядок единицы, так как неравновесная величина порядка  $\tau$  отнесена к времени релаксации  $\tau_p$ .

Следуя процедуре Чепмена–Энскога, разность температур, как и другие неравновесные величины, можно представить в любом приближении:  $\theta^{[1]}$ ,  $\theta^{[2]}$ , ...,  $\theta^{[n]}$ , ... Истинное значение разности температур в этих обозначениях:

$$\theta = \theta^{[1]} + (\theta^{[2]} - \theta^{[1]})_+ \dots + (\theta^{[n]} - \theta^{[n-1]})_+ \dots \quad (3.21)$$

Порядок малости каждого последующего слагаемого увеличивается на единицу. Все члены уравнений (3.17), (3.18), содержащие неравновесные величины, определены с точностью до  $\tau$ . Это относится, в частности, к составляющим

температуры  $T_{ii}$ , фигурирующим в свертке  $T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}$  и имеющим порядок

единицы. Они определены выражением

$$T_{ii} = T_t + \frac{p_{ii}^{m[1]}}{R\rho}. \quad (3.22)$$

Релаксационные члены уравнений (3.17), (3.18), имеющие порядок единицы и содержащие неравновесную величину  $\theta$ , представлены без поправок первого приближения. Таким образом, релаксационные члены уравнений (3.17), (3.18) записаны в приближении  $\tau^0$ , соответствующем модели Эйлера. В первом приближении, соответствующем данной модели, релаксационные члены должны быть выражены как

$$\frac{\theta^{[1]} + (\theta^{[2]} - \theta^{[1]})}{\tau_p} = \frac{\theta^{[2]}}{\tau_p}. \quad (3.23)$$

Представление релаксационного члена в виде (3.23) вносит существенные осложнения, характерные для моделей второго приближения. Нелинейные члены, появляющиеся в уравнении энергии, не только увеличивают количество вычислительных операций при численной реализации модели, но и снижают устойчивость используемых методов решения. Ниже будет рассмотрена модель второго приближения. Забегая вперед, отметим, что численная реализация этой модели значительно сложнее реализации систем M24, M24с и M45, даже несмотря на громоздкость последних.

Вместе с тем такая усложненная модель не имеет преимуществ перед системой (3.15). Значения основных параметров потока ( $\rho$ ,  $u_i$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $p_{ij}$ ,  $q_i$ ), вычисленные по усложненной модели, совпадут со значениями, полученными из решения системы (3.15). Это следует из того, что уравнение энергии в термодинамических переменных не содержит релаксационного члена, а в соотношении (3.8) для термодинамического неравновесного напряжения использовано первое приближение  $\theta$ . Второе приближение было бы внепорядковым.

Значения температур  $T_t$  и  $T_\Omega$ , вычисленные по усложненной модели, соответствуют первому приближению. Этот же порядок приближения дают зависимости (3.19), (3.20) в совокупности с системой (3.15).

Приведенные доводы можно распространить на высшие приближения процедуры Чепмена-Энскога, примененной к системе моментных уравнений многоатомных газов. Если неравновесные величины системы (3.15), в частности  $p_{ij}$ , записаны в  $n$ -ом приближении, то разность температур  $\theta$ , также должна иметь  $n$ -ый порядок приближения. Это следует из (1.15). Температуры  $T_t$  и  $T_\Omega$  в этом случае определены зависимостями (1.7) и (1.8) с заменой  $\theta$  на  $\theta^{[n]}$ .

Эквивалентная форма записи системы (3.15), дополненная зависимостями (1.7), (1.8), будет представлена уравнениями (3.17) и (3.18), в которых неравновесные величины должны быть представлены как  $\varphi_i^{[n]}$ ,  $\omega_i^{[n]}$ ,  $\theta^{[n]}$ . Было показано (см. (3.23)), что порядки приближения дифференциальной и релаксационной частей (3.17) и (3.18) совпадут если разность температур в релаксационной части представлена приближением  $\theta^{[n+1]}$ .

Таким образом, 5-моментная система и эквивалентная ей 6-моментная система уравнений требуют разные порядки приближения  $\theta$ , независимо от порядка приближения самой системы. В моделях  $n$ -го приближения, содержащих 5 моментных уравнений, разность температур  $\theta$ , определяющая объемную вязкость, должна быть представлена приближением порядка  $n+1$ . При этом модель становится внепорядковой.

На примере численного теста покажем, что первые приближения температур  $T_t$  и  $T_\Omega$ , независимо от способа их получения, приводят к качественно неверным результатам.

На Рисунке 3.1, Рисунке 3.2 и Рисунке 3.3 представлены результаты расчета структуры ударной волны в двухатомном газе. Использовались 5-моментная модель (3.15) и ее 6-моментная модификация с уравнениями энергии (3.17), (3.18). Температуры  $T_t$  и  $T_\Omega$  в первом случае рассчитывались по зависимостям (3.19), (3.20), во втором были получены непосредственно из решения системы уравнений.

Полученные двумя различными методами значения всех параметров потока, включая  $T_t$  и  $T_\Omega$ , совпадали с точностью до численных погрешностей. Этот результат вполне ожидаем в силу эквивалентности системы (3.15) и ее модификации (3.17), (3.18). Указанная модификация используется в данной работе исключительно в целях демонстрации недостаточности порядка приближения разности температур.

Рассматривалось течение при  $M_\infty = 5$ . Принималось:  $\mu = \mu(T^s)$ ,  $s = 1$ . Параметр  $h$  задавался в интервале  $h = 1 \dots 2.5$ . Значение  $h = 2.5$  соответствует зависимости (1.78) при  $s = 1$  и  $Z = 5$ .

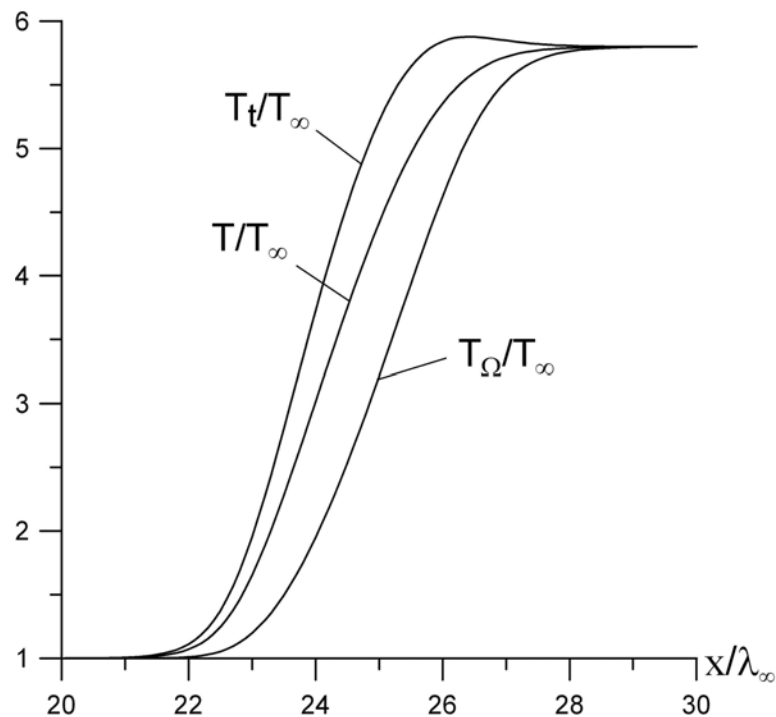


Рисунок 3.1. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа. 5-моментная модель;  $M_\infty = 5$ ;  $s = 1$ ;  $h = 1$ .

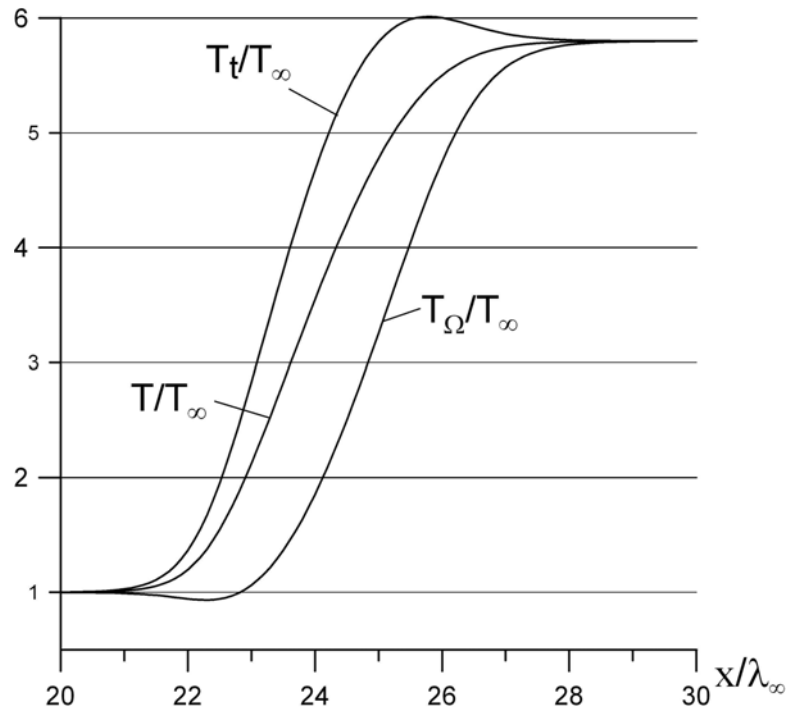


Рисунок 3.2. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа. 5-моментная модель;  $M_\infty = 5$ ;  $s = 1$ ;  $h = 1.5$ .

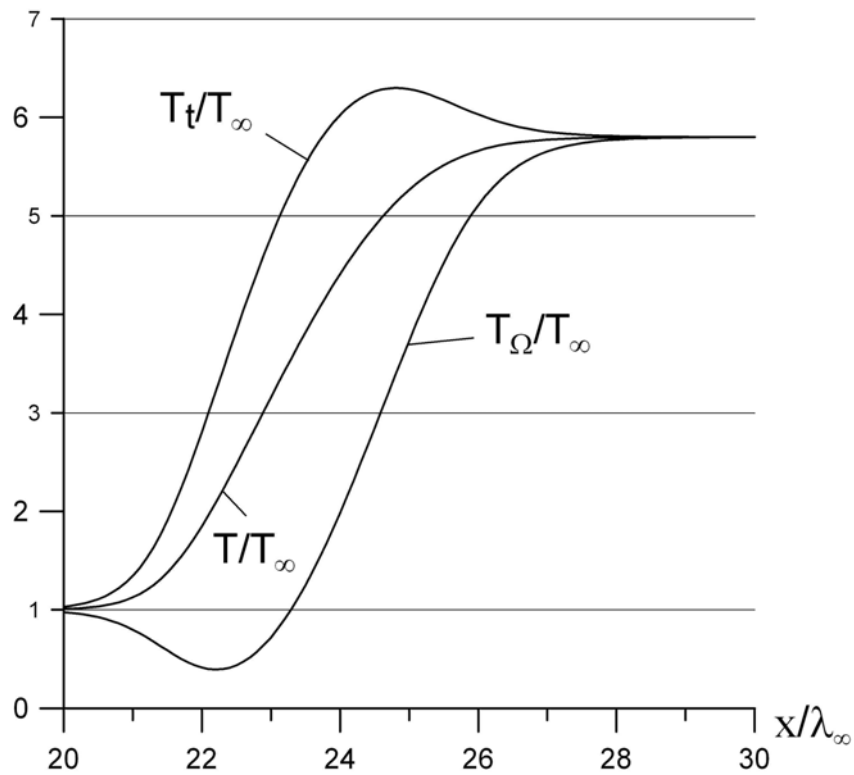


Рисунок 3.3. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа. 5-моментная модель;  $M_\infty = 5$ ;  $s = 1$ ;  $h = 2.5$ .



По мере увеличения значения параметра  $h$  на профиле температуры внутренних степеней свободы наблюдается физически неадекватная область. В начальной части профиля энергия передается от “холодных” внутренних степеней свободы к “горячим” поступательным степеням. Этот модельный эффект наблюдается при всех значениях  $h > 1$ . Так как решение системы (3.15) требует выполнения закона сохранения энергии в явной форме, то, очевидно, занижение значений  $T_\Omega$  компенсировалось соответствующим завышением  $T_t$ .

Энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы молекул протекает в несколько раз медленнее, чем энергообмен между только поступательными степенями, т.е. значение  $h$  составляет несколько единиц. Это является экспериментально установленным фактом. Вместе с тем параметр  $h$  входит в выражения для  $\theta$  и  $p_{ii}$  даже в первом приближении (см. (3.4), (3.8)). Следовательно, значения  $T_t$  и  $T_\Omega$ , соответствующие 5-моментной модели (3.15), физически неадекватны.

В моделях неравновесных течений коэффициент вязкости зачастую определяют как функцию поступательной температуры (см., например, [38]). Такой подход вполне оправдан, так как перенос импульса молекул связан исключительно с их поступательным движением. Полученный выше результат говорит о том, что  $T_t$  должна быть представлена приближением, как минимум, выше первого.

Проанализируем причину отмеченной неадекватности первых приближений  $T_t$  и  $T_\Omega$  с феноменологической точки зрения. Рассмотрим первые приближения полных нормальных напряжений  $P_{ii}$ , выраженные через механические и термодинамические переменные:

$$P_{ii} = p^m - 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad (3.24)$$

$$P_{ii} = p - \frac{5-3\gamma}{3} h\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.25)$$

Выбор именно этого параметра течения для анализа энергообмена обусловлен тем, что величина  $P_{ii}$  отличается от энергии поступательного движения молекул, заключенных в единице объема, только постоянным множителем.

Второе слагаемое правой части выражения (3.25) введено для замены  $p^m$  на  $p$  в соответствии с первым приближением уравнения (1.15). Зависимость (3.25) может быть представлена в виде

$$P_{ii} = p - 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.26)$$

При этом последние два слагаемых рассматриваются как неравновесные нормальные термодинамические напряжения  $p_{ii}$ .

Не снижая общности выводов, рассмотрим одномерное течение газа. Пусть одна из степеней свободы соответствует координатной оси, направление которой совпадает с направлением движения потока. Назовем ее продольной осью и будем считать декартовой осью  $X$ .

При изменении скорости движения газа происходит деформация функции распределения молекул по скоростям. Для определенности рассмотрим торможение газа в системе координат, связанной с центром масс жидкой частицы и движущейся со скоростью  $u_x$ . Группа молекул, летящих по направлению потока, имеет бóльшую групповую скорость и меньшую по отношению к  $T_t$  температуру. Группа молекул, летящих против направления потока, имеет меньшую групповую скорость и бóльшую температуру. В результате такой деформации возникает неравновесное напряжение  $p_{xx}^m$ .

В случае торможения потока ( $\frac{\partial u_x}{\partial x} < 0$ ) продольная степень свободы обогащается энергией ( $p_{xx}^m > 0$ ), а в случае разгона потока – обедняется ( $\frac{\partial u_x}{\partial x} > 0$ ,  $p_{xx}^m < 0$ ). Этот процесс не связан с межмолекулярными столкновениями и обогащает или обедняет только одну (продольную) поступательную степень

свободы. В выражениях (3.24), (3.25) это учтено слагаемым  $\left(-2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$  или в принятой системе координат –  $\left(-2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$ . В не упрощенном первом приближении выражении (см., например, (1.39) или (3.5)) соответствующий член “наработки напряжений” определен как  $-2\tau_p P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x}$ , т.е. различие заключается только в множителе, выполняющем функции коэффициента вязкости.

Член  $\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \equiv \frac{1}{3}2\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$  уравнений (3.24), (3.25) (в одномерной постановке это  $\frac{1}{3}2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}$ ) учитывает тот факт, что механическое давление  $p^m = \frac{1}{3}P_{\alpha\alpha}$  в процессе наработки напряжений также будет изменяться, а именно на одну треть величины наработки.

Отметим, что в одноатомных газах, не содержащих внутренних степеней свободы, межмолекулярные столкновения не оказывают влияния на величину  $p^m$ , а следовательно, и на термодинамическое давление  $p \equiv p^m$ . В результате межмолекулярных столкновений избыточная (в случае торможения потока) энергия одной поступательной степени свободы перераспределяется между остальными поступательными степенями свободы. Общее количество энергии теплового движения остается неизменным.

В многоатомных газах инвариантом столкновений является только термодинамическое давление  $p$ , так как механическое давление  $p^m$  участвует в процессе энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы. Этот факт учтен вторым слагаемым уравнения (3.25), представляющим собой первое приближение разности температур  $\theta^{[1]}$  с множителем  $\frac{5-3\gamma}{2}$ .

Если в соответствии с (1.4) рассматривать термодинамическую температуру как средневзвешенное значение  $T_t$  и  $T_\Omega$ , то множитель  $\frac{5-3\gamma}{2}$  представляет собой весовой коэффициент температуры внутренних степеней свободы:

$$T = \frac{3}{2}(\gamma - 1)T_t + \frac{5-3\gamma}{2}T_\Omega. \quad (3.27)$$

Из этого уравнения следует соотношение давлений:

$$p = \frac{3}{2}(\gamma - 1)p^m + \frac{5-3\gamma}{2}\rho RT_\Omega. \quad (3.28)$$

Величину  $\rho RT_\Omega$  в ряде работ называют “давлением внутренних степеней свободы” или “вращательным давлением”. В традиционном понимании термин “давление” ассоциируется с термином “напряжение”. Вместе с тем внутренние степени свободы не создают напряжений  $P_{ij}$  в газовой среде. В настоящей работе термин “давление” не используется применительно к величине  $\rho RT_\Omega$ .

В соответствии с (1.5) величина  $\rho RT_\Omega$  пропорциональна удельной энергии внутренних степеней свободы  $E_\Omega$ . Последнее слагаемое (3.28) может быть представлено как

$$\frac{5-3\gamma}{2}\rho RT_\Omega = (\gamma - 1)E_\Omega. \quad (3.29)$$

В последующем изложении величину  $\rho RT_\Omega$  будем трактовать как энергию внутренних степеней свободы.

Возвращаясь к уравнениям (3.24) и (3.26), отметим аналогию их структур, при условии применения (3.24) к одноатомным газам. Оба выражения содержат в качестве первого слагаемого инвариант столкновений. Вторые слагаемые описывают наработку напряжений, а третьи уменьшают (по модулю) наработку на величину, учитываемую инвариантом.

Связь между  $p^m$  и  $\frac{1}{3}2\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$  чисто формальна, так как она следует из определения механического давления. Третий член выражения (3.26), т.е.

$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{5-3\gamma}{2}h\right)2\mu\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$ , связан со своим инвариантом  $p$  более сложным образом.

Он учитывает энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы.

Поясним сказанное на схеме распределения нормальных напряжений. Как и ранее, будем рассматривать торможение потока, движущегося вдоль декартовой оси  $X$ . Пусть газ двухатомный и содержит две внутренние степени свободы (только вращательные степени). Для такого газа  $\gamma = \frac{7}{5}$ ,  $\frac{5-3\gamma}{2} = \frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{2}(\gamma-1) = \frac{3}{5}$ ,  $\rho RT_\Omega = E_\Omega$ .

Предположим, что энергообмен между поступательными и внутренними степенями протекает с той же быстротой, как и энергообмен между только поступательными степенями, т.е.  $h=1$ . В этом случае “поперечные” поступательные ( $Y, Z$ ) и внутренние степени содержат одинаковое количество энергии и характеризуются одинаковыми температурами:  $T_{yy} = T_{zz} = T_\Omega$ .

Схема распределения напряжений (энергий) приведена на Рисунке 3.4. Пунктирными линиями изображены внутренние степени свободы, не создающие напряжений, но учитываемые при вычислении средней энергии теплового движения.

Механическое давление  $p^m$ , в соответствии с его определением, представляет собой среднее арифметическое значение нормальных напряжений. Оно изображено на рисунке горизонтальной линией. Термодинамическое давление – среднее арифметическое значение энергий всех степеней свободы молекулы с соответствующим коэффициентом. Оно также отмечено горизонтальной линией.

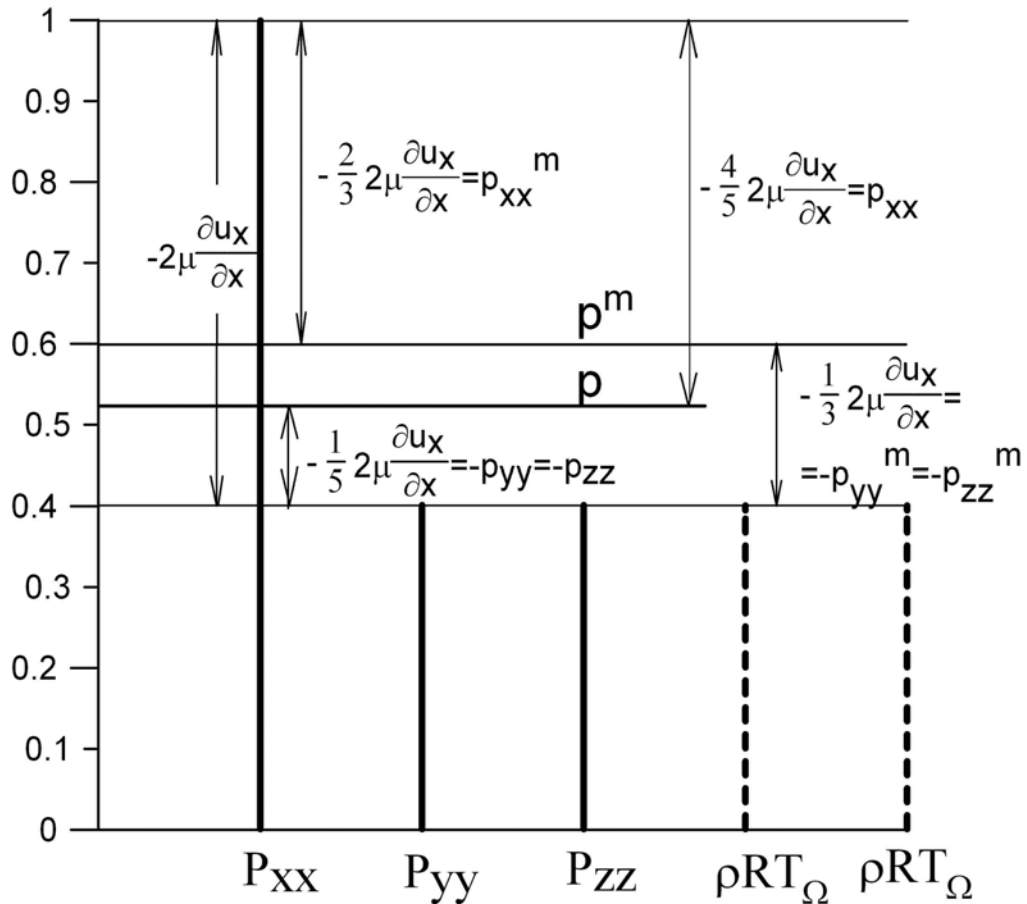


Рисунок 3.4. Схема распределения нормальных напряжений при  $h = 1$

Коэффициент энергий поступательных степеней составляет  $2/3$ , так как среднее значение потока импульса молекулы ( $m_0 \overline{c_i^2}$ ) вдвое больше ее средней кинетической энергии, отнесенной к одной из трех поступательных степеней свободы. Коэффициент энергий внутренних степеней свободы вычисляется аналогично. Для газа с двумя внутренними степенями свободы это  $2/2$ , а с тремя —  $2/3$ .

Как отмечено выше, при  $h = 1$  температура внутренних степеней свободы  $T_\Omega$  соответствует поперечным температурам  $T_{yy}$  и  $T_{zz}$ . “Провал”  $T_\Omega$  на профиле ударной волны не наблюдается (см. Рисунок 3.1).

Теперь примем  $h = 5/2$ , т.е. поступательно-вращательный энергообмен протекает медленнее поступательно-поступательного. Выбранное значение дает наиболее наглядное представление о распределении энергии между степенями

свободы, т.к. последнее слагаемое в (3.26) обратится в ноль. Вместе с тем, такое значение не противоречит экспериментальным данным и соответствует зависимости (1.78) для максвелловских молекул ( $s = 1$ ).

Вся наработка напряжения будет представлена неравновесным напряжением  $p_{xx}$ . Неравновесные напряжения  $p_{yy}$  и  $p_{zz}$ , в соответствии с (3.26), не возникнут. Напомним, что рассматривается одномерное течение, в котором

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Термодинамическое давление  $p$  сравнивается с  $P_{yy}$  и  $P_{zz}$ . Компенсация избытка нормального импульса  $P_{xx}$  по отношению к среднему значению энергии ( $p$ ) будет осуществляться только за счет недостатка энергии на внутренних степенях свободы. Уточним: это особенность первого приближения.

Схема описанного распределения напряжений показана на Рисунке 3.5. Увеличение значения параметра  $h$  не повлияет на механическое давление и соответствующие ему неравновесные напряжения. Заниженная по сравнению с предыдущим случаем энергия внутренних степеней свободы означает заниженную температуру  $T_\Omega$ . Понятно, что при любых значениях  $h > 1$  температура внутренних степеней свободы будет занижена, а температура  $T_t$  - завышена ( см. Рисунок 3.2).

С феноменологической точки зрения вполне очевидно, что в тормозящемся потоке значение  $T_\Omega$  должно быть меньше значений  $T_{yy}$  и  $T_{zz}$ , если поступательно-вращательный теплообмен протекает медленнее поступательно-поступательного ( $h > 1$ ). Причина физически неадекватного определения температур, видимо кроется в количественном соотношении значений  $T_\Omega$  и  $T_{yy}, T_{zz}$ , определяемом первым приближением  $\theta$ .

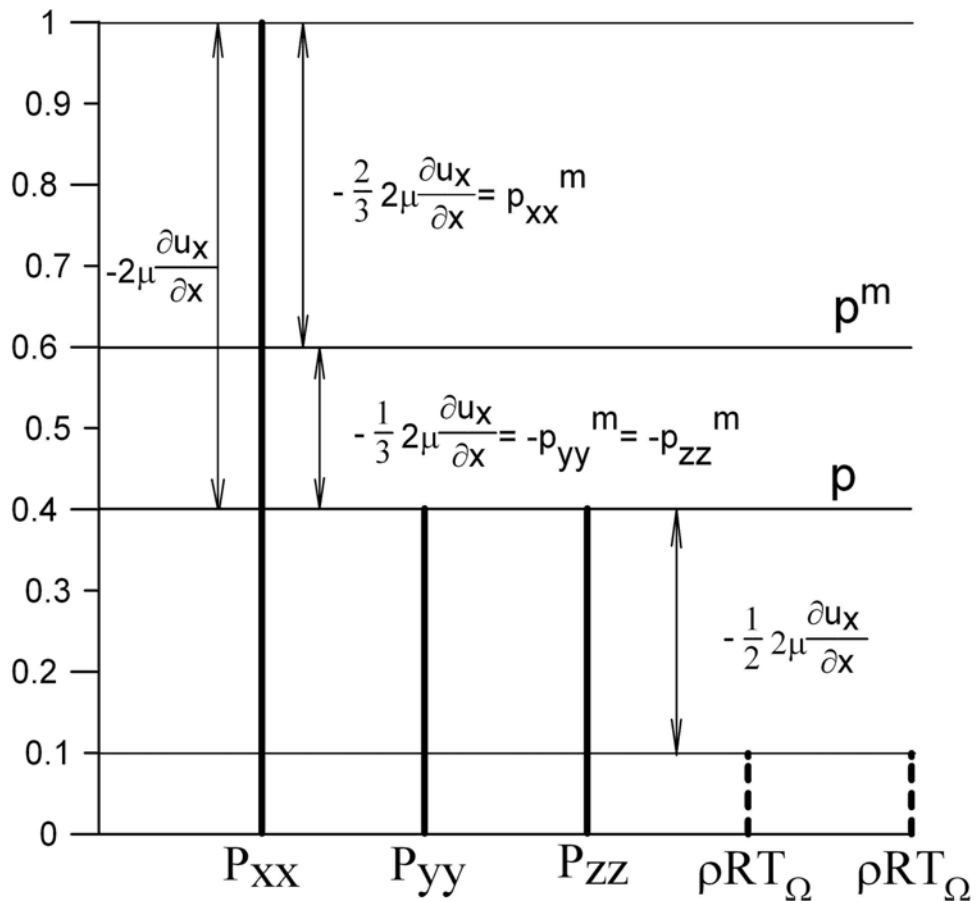


Рисунок 3.5. Схема распределения нормальных напряжений при  $h = 2.5$

Факт несоответствия порядка приближения  $\theta$  порядку приближения модели был отмечен ранее на примере релаксационного члена уравнений (3.17), (3.18). Характерно, что рассматриваемый процесс распределения энергии приводит к аналогичным выводам, хотя и не связан с релаксационным процессом.

В подразделе 3.2 мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении двухтемпературной модели, здесь ограничимся констатацией факта: формально строгое приближение разности температур, используемое в 5-моментной модели первого приближения, не позволяет физически адекватно определять температуры поступательных и внутренних степеней свободы в том же приближении.

Термодинамическая температура определена моделью (3.15) качественно верно даже в течениях высокой динамической неравновесности, для расчета которых модель первого приближения теоретически не обоснована. Специально



отметим, что пренебрежение коэффициентом объемной вязкости, имеющее место во многих пакетах программного обеспечения, приводит к существенной погрешности определения термодинамического неравновесного напряжения  $p_{ii}$ . В рассмотренном примере течения погрешность вычисления  $p_{xx}$  при  $h = 2.5$  составит  $p_{xx}/3$ .

Такая неточность может существенно сказаться на значениях основных газодинамических переменных ( $\rho, u, p, T$ ), а в ряде случаев – и на характере течения. Исключением являются безотрывные пристеночные течения, в которых нормальные неравновесные напряжения слабо влияют на параметры и характер течения.

### 3.2. Двухтемпературная модель

Рассмотренная выше физическая неадекватность определения температур  $T_t$  и  $T_\Omega$  является особенностью первого приближения. В этом приближении величина  $\tau_p$  или  $\tau$  предполагается настолько малой ( $\text{Kn}^* \approx \tau \ll 1$ ), что  $\tau^2$  рассматривается как исчезающе малая величина. Температуры  $T_t$  и  $T_\Omega$ , имеющие порядок малости  $\tau^0$ , отличаются на величину порядка  $\tau^1$ , т.е. "почти" совпадают. В уравнениях неравновесных величин удерживаются только старшие члены.

Если течение существенно неравновесно и на характерное число Кнудсена накладываются менее жесткие ограничения ( $\text{Kn}^* < 1$ ), отброшенные члены уравнения начинают играть принципиально важную роль. Это, в частности, относится к дивергенции теплового потока в уравнениях для  $\theta$  и  $p_{ii}$ , оказывающей значительное влияние на процесс наработки напряжений. Этот вопрос подробно рассмотрен в работе [56] и в Разделе 5 настоящей работы.

Модели, в которых неравновесные величины представлены своими моментными уравнениями, дают вполне адекватные значения температур  $T_t$  и  $T_\Omega$ .

Примером этого могут служить профили температур, полученные с использованием системы M24с при  $h = 3.7$  и показанные на Рисунке 2.5.

Как уже упоминалось в настоящем разделе, система моментных уравнений M24 может быть представлена различными эквивалентными выражениями. Первые приближения системы M24 зависят от вида используемого выражения и в общем случае не эквивалентны. Это зависит от того, для каких переменных системы строятся первые приближения. Было показано, что первое приближение  $\theta$  не пригодно для определения  $T_t$  и  $T_\Omega$ . Запишем систему M24 в виде, не содержащем явным образом переменную  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{2}{3R\rho} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} &= -\frac{5-3\gamma}{2} \frac{T_t - T_\Omega}{h\tau_p} \\
\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} &= \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{T_t - T_\Omega}{h\tau_p}; \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\
&+ 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}; \\
\frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \\
\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} &= -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Оставим без изменения первые четыре уравнения системы, а для остальных уравнений используем их первые приближения (3.6), (3.10) и (3.13). Первое приближение  $\theta$  (3.4) не потребуется, т.к. в системе используется механические

неравновесные напряжения, а релаксационные члены уравнений энергии выражены через системные переменные  $T_t$  и  $T_\Omega$ . В результате приходим к системе уравнений, полученной в работе [66]. Детальный анализ этой системы проведен в работе [67]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0 \\
 \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0 \\
 \frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3\rho R} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} &= -\frac{5-3\gamma}{2h} \frac{T_t - T_\Omega}{\tau_p}; \\
 \frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} &= \frac{3(\gamma-1)}{2h} \frac{T_t - T_\Omega}{\tau_p} \\
 p_{ij}^m = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right); \quad \varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T_t}{\partial x_i}; \quad \omega_i = -c_\Omega \mu \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_i}.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Здесь  $P_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m$ ,  $\mu = \mu(T_t^s)$ . Коэффициент объемной вязкости не используется. Термодинамическая температура не является системной величиной. При необходимости она может быть вычислена по уравнению (3.27).

Система (3.31) не эквивалентна системам (3.15) и (3.17), (3.18), но, разумеется, имеет эквивалентные формы записи. Например, уравнения энергии могут быть записаны в виде уравнения термодинамической температуры (см. (3.15)) и температуры внутренних степеней свободы (см. (3.31)). При этом разность температур  $\theta$  должна вычисляться в соответствии с (1.8), т.е. через системные переменные  $T$  и  $T_\Omega$ .

Система (3.31) не может рассматриваться в качестве нового научного результата, т.к. она аналогична двухтемпературной модели, полученной в работе [5] непосредственно из кинетического уравнения с использованием двухтемпературного распределения Максвелла-Больцмана. Существенным является то, что система (3.31) представляет собой прямое следствие 24-моментной системы, полученной для функции распределения общего вида.

Анализ основных свойств системы (3.31) показал, что ее характеристическое уравнение имеет два несущественных отличия от уравнения 5-моментной модели и, следовательно, от уравнением модели НСФ. Во-первых : в характеристическом уравнении системы (3.31) тепловая скорость определена как  $\sqrt{5/3 T_t}$  (скорость звука в одноатомном газе), во-вторых: кратность траектории системы (3.31) на единицу больше. В дальнейшем систему (3.31), дополненную граничными условиями модели первого приближения, будем называть двухтемпературной моделью, являющуюся, также как и модель (3.15), моделью первого приближения в смысле процедуры Чепмена-Энскога.

Ниже приводятся результаты численных тестов двухтемпературной модели. На Рисунке 3.6 показаны профили температур, рассчитанные при значениях параметров  $M_\infty$ ,  $s$  и  $h$ , соответствующих Рисунку 3.3. Из рисунка видно, что на профиле  $T_\Omega$  отсутствует физически неадекватная область.

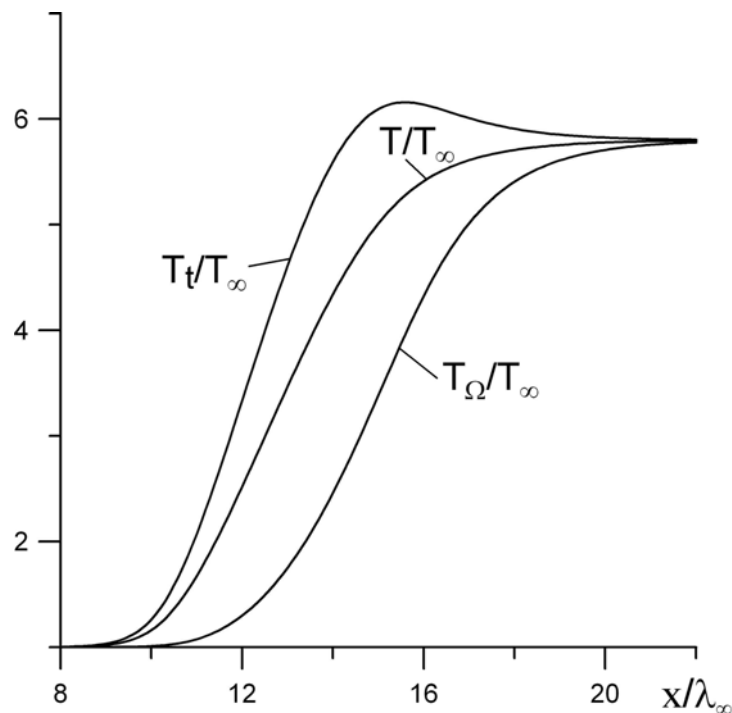


Рисунок 3.6. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа. Двухтемпературная модель;  $M_\infty = 5$ ;  $s = 1$ ;  $h = 2.5$ .

На Рисунке 3.7 совмещены профили температур 5-моментной модели и двухтемпературной модели. Параметры  $s$  и  $h$  моделей подобраны таким образом,

чтобы наклон профиля плотности соответствовал экспериментальным данным (см. работу [67]).

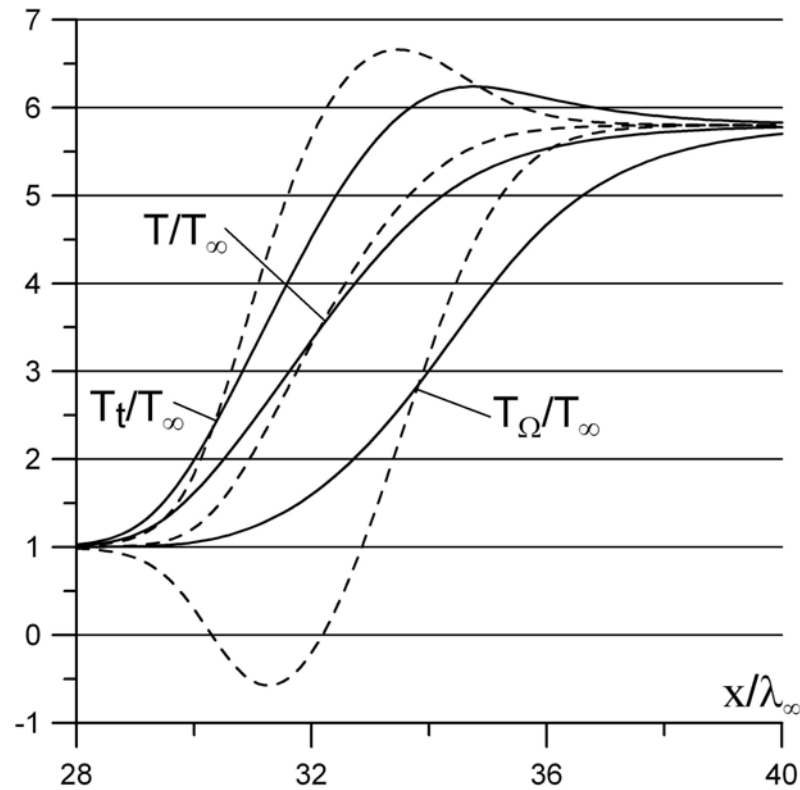


Рисунок 3.7. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа;  $M_\infty = 5$ . Сплошные линии – двухтемпературная модель,  $s = 1$ ,  $h = 3.1$ . Пунктирные линии – 5-моментная модель;  $s = 1$ ,  $h = 4$ .

Несмотря на завышенную по сравнению с предыдущими тестами величину параметра  $h = 3.1$ , двухтемпературная модель обеспечивает качественно верное решение и дает более широкую, чем 5-моментная модель, область возмущений. Последнее обстоятельство обусловлено, по-видимому, использованием в аппроксимации коэффициента вязкости поступательной температуры, что улучшает вязкие свойства модели. В 5-моментной модели такая аппроксимация привела бы к физически неадекватным решениям, так как  $T_\Omega$  и, следовательно,  $T_t$  определены этой моделью качественно неверно.

Вопрос ширины возмущенной области будет подробно рассмотрен в Разделе 5. В частности будет показано, что первые приближения процедуры Чепмена-Энскога дают зауженный профиль ударной волны. Таким образом, расширение профиля двухтемпературной моделью следует отнести к ее позитивным свойствам.

Проанализируем причины качественного различия решений систем (3.15) и (3.31). Система уравнений (3.15) содержит только уравнения сохранения массы, импульса и энергии. Эти уравнения представляют собой моментные уравнения, не содержащие релаксационных членов. Отсутствие релаксационных членов, очевидно, связано с тем, что уравнения сохранения записаны для моментов, являющихся инвариантами межмолекулярных столкновений. Таким образом, модель (3.15) явным образом требует выполнения только законов сохранения. Релаксационные процессы описаны в данной модели неявно.

Во всех моделях первого приближения, включая двухтемпературную модель, переход энергии группового движения молекул в энергию их теплового движения сводится к равенству быстроты релаксации и быстроты динамической наработки неравновесного напряжения в первом приближении. В двухтемпературной модели это:

$$p^m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) = - \frac{p_{ij}^m}{\tau_p}. \quad (3.32)$$

В 5-моментной модели:

$$p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) = - \frac{p_{ij}}{\tau_p}. \quad (3.33)$$

Принципиально важно, что зависимость (3.32) описывает перераспределение энергии только между поступательными степенями свободы, а зависимость (3.33) – еще и между поступательными и внутренними степенями свободы. В выражении (3.33) эти функции выполняет первое приближение разности температур  $\theta$ . В подразделе 3.1 показано, что этого приближения не

достаточно для адекватного описания энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы.

В двухтемпературной модели энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы описан явно и представлен релаксационными членами уравнений энергии системы (3.31). Первое приближение  $\theta$  не используется.

Принципиальное отличие описания процессов энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы двумя рассматриваемыми моделями обнаруживается и с формальной точки зрения. Если считать время релаксации известной функцией, то любое уравнение бесконечной (незамкнутой) система моментных уравнений является прямым следствием кинетического уравнения.

Для кинетического уравнения справедлива  $H$ -теорема Больцмана, определяющая процесс перехода системы в наиболее вероятное состояние (убывание  $H$ -функции). В этом смысле  $H$ -теорема может рассматриваться как молекулярно-кинетический аналог второго закона термодинамики.

Убывание  $H$ -функции обусловлено межмолекулярными взаимодействиями, т.е. определено интегралом столкновений. Дифференциальная часть кинетического уравнения влияет только на вид наиболее вероятной функции распределения, соответствующей данному состоянию системы.

Релаксационные члены моментных уравнений, являющиеся моментами интеграла столкновений, наследуют его свойства. В частности, релаксационные члены определяют процесс перехода системы в состояние равновесия. Таким образом, модели течений, базирующиеся на системе моментных уравнений и содержащие релаксационные члены, явным образом требуют выполнения второго закона термодинамики.

Численное тестирование систем моментных уравнений показывает, что даже в условиях сильно неравновесных течений процесс энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы описывается качественно верно. Отметим, что коротковолновая неустойчивость моментных систем не

связана с процессом указанного энергообмена, так как в равной степени проявляется в течениях как многоатомных, так и одноатомных газов, не имеющих внутренних степеней свободы.

Обе модели первого приближения (5-моментная и двухтемпературная) получены из 24-моментной системы уравнений. Использование термодинамических величин  $p$  и  $T$ , т.е. величин осредненных по всем степеням свободы, приводит к 5-моментной модели. В результате такого осреднения из уравнения энергии исчезают релаксационные члены, т.е. члены, выражающие второй закон термодинамики в явной форме. Профиль  $T_\Omega$  Рисунка 3.3 на интервале  $x = (20 \div 22)\lambda_\infty$  очевидно противоречит этому закону.

Уравнения энергий поступательных и внутренних степеней свободы не могут быть записаны без релаксационных членов, так как эти энергии не являются инвариантами межмолекулярных столкновений. Вместе с тем, уравнения энергии системы (3.31) и замыкающие эту систему первое приближение  $p_{ij}^m$  не содержат какого-либо приближения  $\theta$ . Таким образом, двухтемпературная модель наследует свойства 24-моментной системы уравнений в отношении строгого выполнения второго закона термодинамики. Двухтемпературная модель позволяет качественно верно определять температуры поступательных и внутренних степеней свободы.

### 3.3. Модель второго приближения. Релаксационная модель

При построении модели первого приближения величина  $\tau$  предполагалась настолько малой, что ее квадратом можно было пренебречь. Такое допущение оправданно для слаборавновесных течений. Повышение степени неравновесности может быть достигнуто, если в уравнениях неравновесных величин удерживать члены порядка малости до  $\tau^2$ , пренебрегая членами порядка  $\tau^3$  и выше. При этом в правых частях уравнений (3.1), (3.5), (3.9) и (3.12) неравновесные величины должны быть представлены своими первыми



приближениями, а одночлены, содержащие произведения двух неравновесных величин, должны быть опущены.

Уравнение (3.9) может быть заменено уравнением для  $\varphi_i$ , так как момент третьего порядка  $\varphi_{ijk}$ , фигурирующий только в (3.5), будет заменен своим первым приближением. Аналогично может быть преобразовано уравнение неравновесных термодинамических напряжений (3.7), при условии, что разность температур  $\theta$ , стоящая в правой части выражения, будет заменена своим вторым приближением.

Получаемые в результате такой процедуры неравновесные величины будут определены с точностью до  $\tau^2$ . Тем не менее такой метод построения модели второго приближения, так же как и классический метод Чепмена-Энскога, обладает существенным недостатком, связанным с выражением частных производных по времени.

В качестве примера рассмотрим уравнение (3.5). Проведя указанные замены, получим:

$$p_{ij}^{m[2]} = -\tau_p \left( \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^{m[1]} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^{m[1]}) + (\delta_{*\alpha} p^m + p_{*\alpha}^{m[1]}) \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \\ & - \delta_{ij} \frac{2}{3} (\delta_{\alpha\beta} p^m + p_{\alpha\beta}^{m[1]}) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha}^{[1]} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha^{[1]} \right) \end{aligned} \right). \quad (3.34)$$

Первое слагаемое правой части (3.34) после подстановки (3.6) будет содержать смешанные производные  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j}$ . Производная  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$  может быть

выражена из уравнения сохранения импульса модели Эйлера:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}. \quad (3.35)$$

Смешанную производную получают в результате дополнительного дифференцирования дифференциального уравнения (3.35):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \right). \quad (3.36)$$

Аналогичным образом получают производную  $\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x_j}$  в уравнении теплового потока. После подстановки выражений для  $p_{ij}^{m[2]}$  и  $\varphi_i^{[2]}$  в систему уравнений сохранения, в случае одноатомного газа ( $p_{ij}^m \equiv p_{ij}, \varphi_i \equiv q_i$ ) приходим к системе уравнений Барнетта.

Одной из особенностей уравнений Барнетта является наличие в них посторонних решений. Целый ряд работ, например [32; 34], посвящен выделению посторонних решений, что приводит к существенному усложнению зависимостей для неравновесных величин и снижает их практическую ценность. Можно предположить, что появление посторонних решений связано с операцией дополнительного дифференцирования дифференциальных уравнений сохранения импульса и энергии.

Следуя работе [66], построим модель второго приближения без использования указанной операции дополнительного дифференцирования. Преобразуем уравнения (3.1), (3.5), (3.9) и (3.12) к следующему виду (уравнение (3.9) заменено уравнением теплового потока поступательных степеней свободы  $\varphi_i$ ):

$$\theta + \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p = -h \tau_p \left( \frac{2}{3} \left( \delta_{\alpha\beta} T_t + \frac{p_{\alpha\beta}^m}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) \right); \quad (3.37)$$

$$p_{ij}^m + \left( \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial x_\alpha} \right) \tau_p = -\tau_p \left( p_{ij}^m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + (\delta_{* \alpha} p^m + p_{* \alpha}^m) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} (\delta_{\alpha\beta} p^m + p_{\alpha\beta}^m) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) \right); \quad (3.38)$$

$$\varphi_i + \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\varphi = -\tau_\varphi \left( \begin{aligned} & \varphi_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \varphi_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\ & + \frac{3}{2} R (\delta_{i\alpha} p^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \\ & + R (\delta_{\alpha\beta} p^m + p_{\alpha\beta}^m) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \delta_{i\beta} T_t + \frac{p_{i\beta}^m}{R\rho} \right) \end{aligned} \right); \quad (3.39)$$

$$\omega_i + \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\omega = -\tau_\omega \left( \omega_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega (\delta_{i\alpha} p^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} \right). \quad (3.40)$$

Члены левых частей уравнений, заключенные в скобки, представляют собой лагранжевы производные  $\frac{d}{dt}$  соответствующих неравновесных величин. Сами левые части уравнений с точностью до величин порядка  $\tau^2$  являются значениями неравновесной величины в точке траектории жидкой частицы, в которой частица окажется по истечении времени релаксации. Назовем эту точку смещенной точкой. Действительно, если  $\theta$  – разность температур в точке траектории, соответствующей времени  $t$ , то по истечении времени  $h\tau_p$  в смещенной точке разность температур примет значение

$$\theta|_{t+h\tau_p} = \theta + \frac{d\theta}{dt} h\tau_p + \frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} (h\tau_p)^2 + \dots \quad (3.41)$$

Левая часть (3.38) отличается от правой части (3.41) членами  $\frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} (h\tau_p)^2 + \dots$ , имеющими порядок малости  $\tau^3$  и выше ( $\theta$  имеет порядок  $\tau$ ). В рассматриваемом приближении такие члены являются внепорядковыми и должны быть опущены. Очевидно, положение смещенной точки для различных неравновесных величин будет различным, но в силу произвольности выбора начальной точки можно считать смещенную точку единой для всех неравновесных величин.

Перегруппируем слагаемые правых частей (3.37) – (3.41) в соответствии с их порядком малости. Опустим слагаемые, содержащие произведения двух

неравновесных величин, как внепорядковые члены. При этом левые части уравнений будут определены с точностью до  $\tau^2$ .

$$\left( \theta + \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p \right)^{[2]} = -\frac{2}{3} h \tau_p T \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \frac{h \tau_p}{R \rho} \left( p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_\alpha^{[1]} - \frac{3}{3} \frac{R}{c_\Omega} \omega_\alpha^{[1]} \right) \right); \quad (3.42)$$

$$\left( p_{ij}^m + \left( \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial x_\alpha} \right) \tau_p \right)^{[2]} = -\tau_p p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) - \tau_p \left( p_{ij}^{m[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + p_{j\alpha}^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + p_{i\alpha}^{[1]} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( 2\varphi_{ij\alpha}^{[1]} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \varphi_\alpha^{[1]} \right) \right); \quad (3.43)$$

$$\left( \varphi_i + \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\varphi \right)^{[2]} = -\frac{5}{2} R \tau_\varphi p \frac{\partial T}{\partial x_i} - \tau_\varphi \left( \varphi_i^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \varphi_\alpha^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{p_{i\alpha}^{[1]}}{\rho} \right) + \frac{5R}{2} p_{i\alpha}^{[1]} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \frac{15-9\gamma}{4} R p \frac{\partial \theta^{[1]}}{\partial x_i} \right); \quad (3.44)$$

$$\left( \omega_i + \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\omega \right)^{[2]} = -c_\Omega \tau_\omega p \frac{\partial T}{\partial x_i} - \tau_\omega \left( \omega_i^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega p_{i\alpha}^{[1]} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} - \frac{3}{2} (\gamma - 1) c_\Omega p \frac{\partial \theta^{[1]}}{\partial x_i} \right). \quad (3.45)$$

Здесь механическое давление и температуры  $T_i$  и  $T_\Omega$  заменены термодинамическими величинами, в соответствии с (1.7) и (1.8). Это позволит выразить коэффициент вязкости через термодинамическую температуру, т.е.  $\mu = \mu(T)$ .

Помимо этого, на основании выводов предыдущего раздела уравнение сохранения энергии должно быть записано в термодинамических переменных. В противном случае разность температур  $\theta$ , фигурирующая в релаксационных члена уравнений сохранения энергии (3.17) и (3.18), должна будет представлена третьим приближением.

Первые члены правых частей (3.42) – (3.45) имеют порядок  $\tau$  и представляют собой первые приближения соответствующих неравновесных величин. Все слагаемые вторых членов имеют второй порядок малости, так как содержат неравновесные величины и домножаются на время релаксации.

Записывая разложения, аналогичные (3.41), нетрудно показать, что при переходе из рассматриваемой точки в смещенную точку значения вторых членов изменяются на величину третьего порядка малости. В принятом приближении такими изменениями можно пренебречь.

Если использовать уравнения (3.42) – (3.45) для описания неравновесных величин в смещенной точке, то в левых частях этих уравнений будут фигурировать только сами неравновесные величины. Вторые члены правых частей останутся без изменений, а первые члены будут соответствовать более ранней точке – той точке, которая до этого рассматривалась в качестве расчетной для данной неравновесной величины. Уравнения (3.42) – (3.45) примут следующий вид:

$$\theta^{[2]} = \bar{\theta} - \frac{2}{3} \frac{h\tau_p}{R\rho} \left( p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_\alpha^{[1]} - \frac{3}{3} \frac{R}{c_\Omega} \omega_\alpha^{[1]} \right) \right); \quad (3.46)$$

$$p_{ij}^{m[2]} = \bar{p}_{ij}^m - \tau_p \left( p_{ij}^{m[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + p_{* \alpha}^{[1]} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( 2\varphi_{ij\alpha}^{[1]} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \varphi_\alpha^{[1]} \right) \right); \quad (3.47)$$

$$\varphi_i^{[2]} = \bar{\varphi}_i - \tau_\varphi \left( \begin{array}{l} \varphi_i^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \varphi_\alpha^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + R\rho \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{p_{i\alpha}^{[1]}}{R\rho} \right) + \frac{5}{2} \frac{p_{i\alpha}^{[1]}}{p} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \frac{15-9\gamma}{4} \frac{\partial \theta^{[1]}}{\partial x_i} \right) \end{array} \right); \quad (3.48)$$

$$\omega_i^{[2]} = \bar{\omega}_i - \tau_\omega \left( \omega_i^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_{\Omega} p_{i\alpha}^{[1]} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} - \frac{3}{2} (\gamma-1) c_{\Omega} p \frac{\partial \theta^{[1]}}{\partial x_i} \right). \quad (3.49)$$

В этих уравнениях:

$$\bar{\theta}(t) = \theta^{[1]} \Big|_{t-h\tau_p}; \quad (3.50)$$

$$\bar{p}_{ij}^m(t) = p_{ij}^{m[1]} \Big|_{t-\tau_p}; \quad (3.51)$$

$$\bar{\varphi}_i(t) = \varphi_i^{[1]} \Big|_{t-\tau_\varphi}; \quad (3.52)$$

$$\bar{\omega}_i(t) = \omega_i^{[1]} \Big|_{t-\tau_\omega}. \quad (3.53)$$

При переносе уравнений (3.37) – (3.40) в смещенную точку, с точностью до  $\tau^2$  выполнялись соотношения:

$$\theta + \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p = \theta \Big|_{t+h\tau_p}; \quad (3.54)$$

$$p_{ij}^m + \left( \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial x_\alpha} \right) \tau_p = p_{ij}^m \Big|_{t+\tau_p}; \quad (3.55)$$

$$\varphi_i + \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\varphi = \varphi_i \Big|_{t+\tau_\varphi}; \quad (3.56)$$

$$\omega_i + \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\omega = \omega_i \Big|_{t+\tau_\omega}. \quad (3.57)$$

Те же преобразования могут быть применены и к величинам с обратной стрелкой (смещенным величинам). Если смещать точку с координатой  $t - h\tau_p$  в точку с координатой  $t$ , то получим:

$$\bar{\theta} + \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p = \theta^{[1]} = -\frac{2}{3} h \tau_p T \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.58)$$

Напомним, что величины с обратной стрелкой представляют собой первые приближения соответствующих неравновесных величин в более ранний момент времени.

Смещения из точек с координатами  $t - \tau_p$ ,  $t - \tau_\varphi$ ,  $t - \tau_\omega$  приведут к выражениям:

$$\bar{p}_{ij}^m + \left( \frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial x_\alpha} \right) \tau_p = p_{ij}^{m[1]} = -\tau_p p \left( \frac{\partial u_*}{\partial x_*} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right); \quad (3.59)$$

$$\bar{\varphi}_i + \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\varphi = \varphi_i^{[1]} = -\frac{5}{2} R \tau_\varphi p \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad (3.60)$$

$$\bar{\omega}_i + \left( \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\omega = \omega_i^{[1]} = -c_{\Omega} \tau_\omega p \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.61)$$

Эти зависимости далее будут представлены в виде релаксационных уравнений.

После подстановки первых приближений неравновесных величин в уравнения (3.46) – (3.49) получаются зависимости, замыкающие систему уравнений сохранения. Уравнение энергии этой системы записано в термодинамических переменных, по указанным выше причинам. В этой связи и неравновесные величины целесообразно представлять в виде  $p_{ij}$  и  $q_i$  с использованием соотношений (1.15) и (1.19). Смещенные величины, т.е.  $\bar{p}_{ij}$ ,  $\bar{\varphi}_i$ ,  $\bar{\omega}_i$ , не могут быть заменены термодинамическими переменными. Как отмечено в Разделе 1, термодинамические величины  $p_{ij}$  и  $q_i$  формируются в результате двух различных процессов энергообмена, поэтому время релаксации этих величин не может быть определено в рамках используемого метода построения системы моментных уравнений.

В результате получена замкнутая система уравнений, описывающая течение газовой среды во втором приближении (приближение Барнетта). Будем называть эту систему релаксационной моделью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p_{i\alpha} + \delta_{i\alpha} p) &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) \left( \delta_{\alpha\beta} T + \frac{p_{\alpha\beta}}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{h \tau_p} \left( \frac{2}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \bar{\theta} \right); \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\tau_p} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \bar{p}_{ij}^m \right);$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\tau_\varphi} \left( \frac{15}{4} R \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} + \bar{\varphi}_i \right);$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\tau_\omega} \left( c_\omega \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} + \bar{\omega}_i \right).$$

В этой системе:

$$p_{ij} = \bar{p}_{ij}^m + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} R \rho \bar{\theta} + 3R \frac{\mu}{p} \left( \mu \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{1}{3} c_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) \right) + ; \quad (3.63)$$

$$+ \frac{\mu^2}{p} \left( \left( 1 - c_\mu \right) \frac{\partial u_*}{\partial x_*} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_*} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \left( c_\mu \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \left( \frac{2}{3} - c_\mu^2 \right) \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right) \right)$$

$$q_i = \bar{\varphi}_i + \bar{\omega}_i + \mu \left( \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) - c_\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + R \frac{\mu^2}{p} \left( a_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \left( a_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + a_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \left( \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + a_4 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_i} \right) T \right); \quad (3.64)$$

$$\mu = \tau_p p; \quad c_\lambda = 1 - \left( \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \right) h; \quad a_1 = \frac{63}{8} - c_\mu \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}} + \frac{c_\omega^2}{c_\Omega R}; \quad a_2 = \frac{9}{4} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}};$$

$$a_3 = \frac{63}{8} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}} + \frac{c_\omega^2}{c_\Omega R}; \quad a_4 = \frac{3}{2} - c_\lambda.$$

Система (3.62) содержит семнадцать скалярных уравнений. Первые пять уравнений (уравнения сохранения) представляют собой моментные уравнения. Остальные двенадцать уравнений получены формально. Они имеют вид релаксационных уравнений, в связи с чем будем называть их релаксационными уравнениями. Очевидно, что эти уравнения не описывают процесс релаксации



какой-либо физической величины. Смещенные величины, относительно которых записаны уравнения, также введены чисто формально. По существу система (3.62) представляет собой две подсистемы уравнений.

Анализ свойств системы (3.62) представляется достаточно проблематичным, прежде всего в силу ее высокой нелинейности. Рассмотрим эту систему в простейшем случае одномерного течения одноатомного газа, не взаимодействующего с границами раздела сред. Такое течение рассматривается в задаче о профиле плоской ударной волны.

Для сокращения записи представим систему в безразмерном виде, приняв в качестве единиц измерения следующие характерные значения величин:

плотность  $\rho_*$ ; температура  $T_*$ ; коэффициент вязкости  $\mu_*$ ; давление  $p_*$ ; время  $\tau_* = \frac{\mu_*}{p_*}$ ; скорость  $v_* = \sqrt{RT_*}$ ; геометрический размер  $l_* = v_* \tau_* = \sqrt{RT_*} \frac{\mu_*}{p_*}$ ;

тепловой поток  $q_* = p_* \sqrt{RT_*}$ .

Будем считать, что течение направлено вдоль оси  $X$ . Обозначим:  $u_x \equiv u$ ,  $q_x = \varphi_x \equiv \varphi$ . У неравновесных нормальных напряжений индексы будут сохранены ( $p_{xx}$ ,  $\bar{p}_{xx}$ ) по очевидным причинам.

Система (3.62) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx} - \bar{p}_{xx}); \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2}{3} T \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} &= -\frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \left( p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \bar{\varphi}) \right); \\ \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial t} + \frac{4}{3} p \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} &= -\frac{\bar{p}_{xx}}{\tau_p}; \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{5}{2} p \frac{\partial T}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} &= -\frac{\bar{\varphi}}{\tau_\varphi}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

В этой системе:

$$p_{xx} - \bar{p}_{xx} = \frac{28}{9} \frac{\mu^2}{p} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\mu}{p} \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right); \quad (3.66)$$

$$\varphi - \bar{\varphi} = 23 \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + 2 \mu \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (3.67)$$

Система (3.65) приведена к квазилинейному виду. Линеаризация в данном случае заключалась в том, что в левой части уравнения оставлены члены, содержащие первые производные искомых (системных) функций  $\rho$ ,  $u$ ,  $T$ ,  $\bar{p}_{xx}$ ,  $\bar{\varphi}$  с коэффициентами, не содержащими таких производных. Остальные, нелинейные члены отнесены к правой части уравнений.

В матричной форме:

$$E \frac{\partial F}{\partial t} + B \frac{\partial F}{\partial x} = r; \quad E = \{\delta_{ij}\}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ T \\ \bar{p}_{xx} \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix}; \quad (3.68)$$

$$, B = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho} & u & 1 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} T & u & 0 & \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{4}{3} p & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} p & 0 & u \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx} - \bar{p}_{xx}) \\ -\frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \left( p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \bar{\varphi}) \right) \\ -\frac{\bar{p}_{xx}}{\tau_p} \\ -\frac{\bar{\varphi}}{\tau_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_u \\ b_T \\ b_{xx} \\ b_\varphi \end{pmatrix}.$$

Определив собственные числа матрицы коэффициентов  $B$ , приходим к выводу о том, что траектория частицы является характеристикой. Помимо этого, в рассматриваемом течении имеют место две тепловые скорости. В размерных величинах:

$$V_1 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{14}}{3}} RT; \quad (3.69)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{14}}{3}} RT. \quad (3.70)$$

Для сравнения отметим, что в 13-моментной модели Грэда также присутствуют две тепловые скорости, называемые «скоростями звука» [15]:

$$r_1 = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{94}}{5}} RT; \quad (3.71)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{13 - \sqrt{94}}{5}} RT. \quad (3.72)$$

Будем решать уравнения (3.68) методом характеристик. Запишем уравнение связности. Сразу оговоримся, что метод характеристик является малоэффективным методом даже для решения систем уравнений модели НСФ, нелинейность которых существенно ниже, чем у релаксационной модели. Здесь мы используем его только для анализа свойств системы (3.62).

Уравнения связности:

$$\left\{ Td\rho + d\bar{p}_{xx} = R_0 \right\} \frac{dx}{dt} = u;$$

$$\left\{ TW_1 d\rho + \rho V_1 W_1 du + \rho V_1^2 dT + W_1 d\bar{p}_{xx} + \frac{2}{3} V_1 d\bar{\varphi} = R_1 \right\} \frac{dx}{dt} = u + V_1;$$

$$\left\{ TW_2 d\rho + \rho V_2 W_2 du + \rho V_2^2 dT + W_2 d\bar{p}_{xx} + \frac{2}{3} V_2 d\bar{\varphi} = R_2 \right\} \frac{dx}{dt} = u + V_2; \quad (3.73)$$

$$\left\{ TW_1 d\rho - \rho V_1 W_1 du + \rho V_1^2 dT + W_1 d\bar{p}_{xx} - \frac{2}{3} V_1 d\bar{\varphi} = R_3 \right\} \frac{dx}{dt} = u - V_1;$$

$$\left\{ TW_2 d\rho - \rho V_2 W_2 du + \rho V_2^2 dT + W_2 d\bar{p}_{xx} - \frac{2}{3} V_2 d\bar{\varphi} = R_4 \right\} \frac{dx}{dt} = u - V_2.$$

В этой системе:

$$W_1 = V_1^2 - \frac{5}{3} T; \quad R_1 = \left( \rho V_1 W_1 b_u + \rho V_1^2 b_T + W_1 b_{xx} + \frac{2}{3} V_1 b_\varphi \right) dt;$$

$$\begin{aligned}
W_2 = V_2^2 - \frac{5}{3}T; \quad R_2 &= \left( \rho V_2 W_2 b_u + \rho V_2^2 b_T + W_2 b_{xx} + \frac{2}{3} V_2 b_\varphi \right) dt; \\
R_0 = b_{xx} dt; \quad R_3 &= \left( -\rho V_1 W_1 b_u + \rho V_1^2 b_T + W_1 b_{xx} - \frac{2}{3} V_1 b_\varphi \right) dt; \\
R_4 &= \left( -\rho V_2 W_2 b_u + \rho V_2^2 b_T + W_2 b_{xx} - \frac{2}{3} V_2 b_\varphi \right) dt.
\end{aligned}$$

За фигурными скобками указаны характеристики, на которых следует решать эти уравнения.

Очевидно, значения величин, обозначенных одним символом, в общем случае имеют разные значения на различных характеристиках. В области невозмущенного потока (равновесной области) значения этих величин совпадут на всех характеристиках, в силу однородности течения.

Нетрудно показать, что детерминант матрицы коэффициентов левой части системы (3.73) в области невозмущенного потока обращается в ноль. Ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов левой части. Таким образом, в области невозмущенного потока нарушается условие единственности решения системы (3.73). Это относится и к системе (3.62), линеаризованной указанным выше методом.

Не вдаваясь в дальнейший анализ системы (3.62), отметим, что рассмотрение ее как единой системы неправомерно. Релаксационные уравнения системы записаны для первых приближений неравновесных величин, смещенных вдоль траектории, т.е. характеристики  $\frac{dx}{dt} = u$ . Распространение их на остальные характеристики полной системы противоречит методу получения этих уравнений.

Как отмечалось выше, система (3.62) должна рассматриваться как совокупность подсистемы уравнений сохранения и подсистемы релаксационных уравнений. Последняя должна решаться только на траектории. Характеристики системы уравнений сохранения не имеют принципиальных отличий от характеристик моделей первого приближения, например модели НСФ.

Подсистема уравнений сохранения релаксационной модели характеризуется единственной тепловой скоростью, конкретное значение которой зависит от способа приведения подсистемы к квазилинейному виду. Если квазилинейный вид подсистемы получен описанным выше способом, то тепловая скорость совпадает с адиабатической скоростью звука  $V = \sqrt{\gamma RT}$ .

Проведенный анализ полной системы уравнений (3.62) позволяет объяснить некоторые особенности решения этой системы в виде двух подсистем. Ниже представлены результаты расчета профиля плоской ударной волны с использованием релаксационной модели.

Использовались два принципиально различных метода численного решения: метод прогонки с нестационарным членом и метод характеристик. Оба метода дали близкие результаты.

Ввиду высокой нелинейности уравнений релаксационной модели реализация обоих методов проводилась следующим образом. Решаемая система уравнений записывалась в виде суммы систем модели первого приближения и релаксационной модели с весовым коэффициентом  $\alpha = 0 \dots 1$ . Члены уравнений, не совпадающие в рассматриваемых моделях, домножались на коэффициент  $\alpha$  для релаксационной модели и на  $1 - \alpha$  для модели первого приближения. Уравнения сохранения импульса и энергии (3.65) приняли следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha (p_{xx} - \bar{p}_{xx}) + (1 - \alpha) p_{xx}^{[1]} \right); \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2}{3} T \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \left( \alpha \left( p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \bar{\varphi}) \right) + (1 - \alpha) \left( p_{xx}^{[1]} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^{[1]}}{\partial x} \right) \right). \quad (3.75)$$

Здесь  $p_{xx}^{[1]}$  и  $\varphi^{[1]}$  – величины первого приближения (3.8), (3.11).

На начальном этапе решения принималось  $\alpha = 0$ . Установившееся решение модели первого приближения использовалось в качестве начального приближения для релаксационной модели. На следующем этапе значения

веса коэффициента постепенно увеличивалось до единицы, что соответствовало решению релаксационной модели. Величина шага изменения  $\alpha$  составляла  $10^{-6} - 10^{-5}$  на один шаг по времени. Число Куранта находилось в пределах  $(1 \div 5) \cdot 10^{-2}$ .

На Рисунке 3.8 представлен профиль ударной волны в одноатомном газе. Число Маха  $M = 2.23$ ,  $\mu = \mu(T^s)$ ;  $s = 1$ . При этом числе Маха в области невозмущенного потока возникает слабая волнообразность кривой профиля скорости. Аналогичная волнообразность имеет место на профилях плотности и температуры, но при данном числе Маха этот эффект не заметен, даже при сильном «растяжении» графика по вертикальной оси. В нижней по потоку невозмущенной области волнообразность кривых не наблюдается.

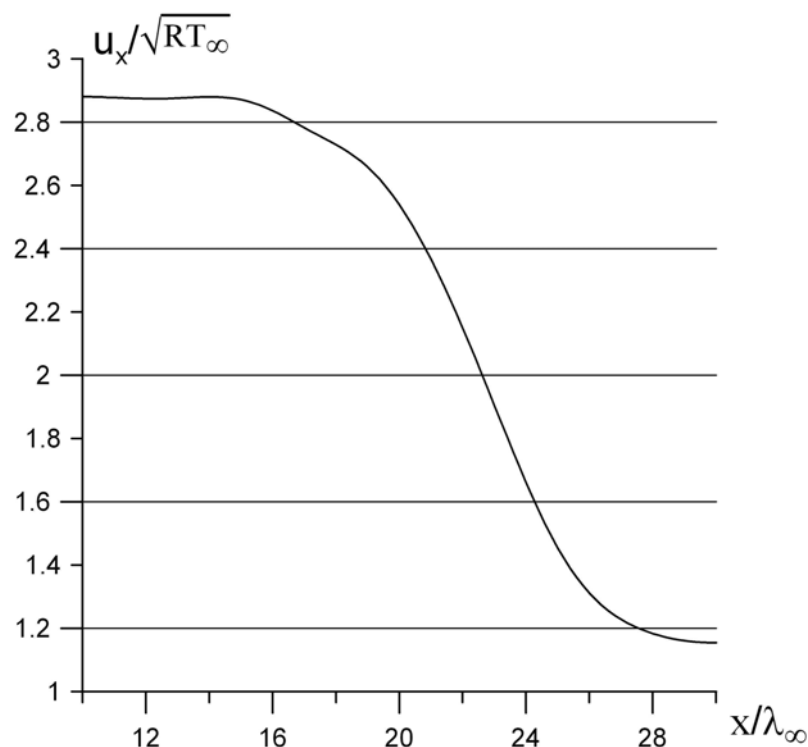


Рисунок 3.8. Профиль скорости в плоской ударной волне одноатомного газа. Релаксационная модель,  $M_\infty = 2.23$ ,  $s = 1$

По мере увеличения числа Маха волнообразность профилей в невозмущенной области постепенно прогрессирует. На Рисунке 3.9 представлены

профили плотности, скорости и температуры при  $M_\infty = 5$ . Значения  $\rho$ ,  $u_x$ ,  $T$  преобразованы к единичному отрезку:

$$\rho^* = \frac{\rho - \rho_{\min}}{\rho_{\max} - \rho_{\min}}. \quad (3.76)$$

Скорость и температура определены аналогично.

Показательно, что в сильнонеравновесной области течения, которая, собственно, и представляет профиль ударной волны, решение является гладким. Субскачок на профилях отсутствует.

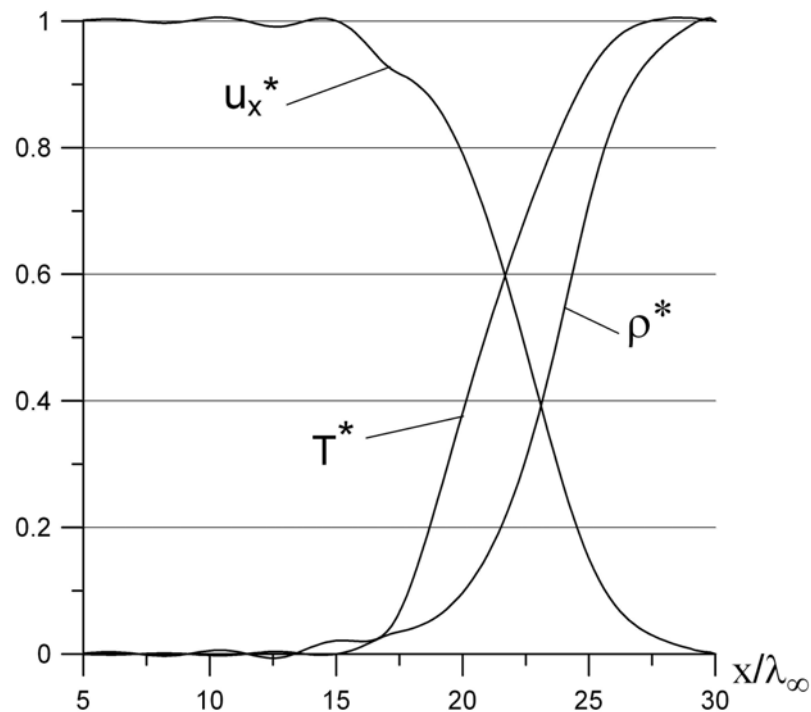


Рисунок 3.9. Профили плотности, скорости и температуры в плоской ударной волне одноатомного газа. Релаксационная модель,  $M_\infty = 5$ ,  $s = 1$

При решении данной задачи система (3.51), как указывалось выше, рассматривалась в виде двух подсистем. Условие единственности решения в равновесной области не было нарушено. Можно предположить, что неустойчивость решения в этой области связана с нарушением условий единственности полной системы уравнений.

## Раздел 4

## ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

## 4.1. Общие положения

Задачи аэромеханики непосредственно связаны с постановкой граничных условий на обтекаемых, как правило твердых, поверхностях. Если состояние газовой среды не слишком далеко от равновесного, в качестве граничных условий вполне пригодны условия прилипания, предполагающие на границе газ–стенка нулевое значение скорости и равенство температуры газа и стенки.

В условиях сильнонеравновесных течений, к которым относятся гиперзвуковые и разреженные течения, такие граничные условия не приемлемы, ввиду возникновения скольжения скорости (или просто – скольжения) и скачка температуры в граничных точках течения. Скольжение может достигать значений, близких к скорости течения невозмущенного потока (внешние течения) или скорости ядра потока (внутренние течения). Скачок температуры может приближаться по порядку величины к характерным значениям температуры.

По-видимому, первые работы по формированию граничных условий на твердой поверхности принадлежат Дж.К. Максвеллу. В этих работах процесс взаимодействия молекул газа с поверхностью твердого тела рассматривался в качестве чисто модельной задачи, а именно поверхность принималась абсолютно гладкой, адсорбированные слои отсутствовали. Рассматривался зеркально-диффузный закон рассеивания отраженных молекул. В качестве весового коэффициента между зеркальной и диффузной составляющими вводился коэффициент аккомодации тангенциального импульса. По аналогии с ним был введен коэффициент аккомодации энергии.

Такая модель содержала в себе противоречие, устраняемое только в случае полного диффузного отражения [13]. Большое количество работ было направлено на усовершенствование модели Максвелла, например [70; 71; 72].



Рассматривались как одноатомные, так и многоатомные газы, а также газовые смеси [73 ÷ 80]. Указанные работы, составляющие лишь малую часть исследований в данном направлении, в той или иной мере были направлены на построение функции распределения отраженных молекул. Скольжение скорости ( $\Delta u$ ) и скачок температуры ( $\Delta T$ ) во многих случаях удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными даже в области относительно высоких энергий взаимодействующих с поверхностью молекул. При этом рассматриваются почти свободные от адсорбированных слоев и достаточно гладкие поверхности (скол кристалла в условиях высокого вакуума).

Вместе с тем известно [72], что при энергиях взаимодействия, ненамного превышающих энергию теплового движения молекул, закон отражения является почти диффузным, с коэффициентом аккомодации энергии, близким к единице. На реальных поверхностях, имеющих высокую степень шероховатости и развитые адсорбированные слои, оба коэффициента аккомодации не намного отличаются от единицы. Особенности взаимодействия молекул с реальными поверхностями подробно изложены, например, в работе [13].

Иной подход к формулировке граничных условий на твердой поверхности был использован в работе [81] и в дальнейшем развит в работе [13]. Целью являлось «установление таких *фиктивных макроскопических* граничных условий для уравнений Навье–Стокса на твердой стенке, при выполнении которых решение уравнений Навье–Стокса вне кнудсеновского слоя совпадало бы (с точностью навье-стоксовского приближения) с решением уравнения Больцмана с заданными *истинными кинетическими* условиями на стенке» (цитирована работа [13, с. 317]).

Принципиальным отличием этого подхода является то, что моделируется функция распределения только падающих молекул. Ее представляют в виде разложения равновесной функции распределения по малому параметру. Функция распределения отраженных молекул принимается равновесной с параметрами поверхности.

В результате были получены выражения для скольжения скорости и скачка температуры в неравновесных течениях. В газодинамических задачах эти граничные условия используются наиболее часто. Однако «навье-стоксовское приближение» накладывает ограничения по числу Кнудсена.

В Разделе 6 на примере расчета плоского течения Куэтта, будет показано, что указанные зависимости дают приемлемую с практической точки зрения точность при  $Kn < 10^{-1}$ . При некоторой корректировке числовых коэффициентов  $\Delta u$  и  $\Delta T$  интервал применимости может быть расширен до  $Kn \leq 1$ .

В работе [39] функция распределения сконструирована из функций, которые в каждом октанте пространства молекулярных скоростей определялись индивидуальным набором макропараметров. На границе твердой поверхности функция распределения отраженных молекул принималась равновесной и единой для всех четырех октантов (верхняя полусфера). Функция распределения падающих на поверхность молекул была представлена в виде совокупности максвелловских функций, "подверженных деформации сдвига" в плоскости границы раздела. Такая "деформация" вводилась формально и имела искусственный характер. Формулировка граничных условий для данной модели аналогична их формулировке для кинетических моделей. Тестирование этой модели показали, что она уступает модели НСФ с граничными условиями [13] по экономичности, а в некоторых случаях и по точности.

В работе [40] для падающих молекул использовалась равновесная функция распределения (по аналогии с двухпоточной функцией Мотт-Смита). Параметры функции (концентрация, касательные составляющие групповой скорости и температура) определяются по потокам массы, импульса и энергии в граничной точке. Скольжение и скачок температуры, получаемые как моменты совокупности функций распределения отраженных и падающих на поверхность молекул, хорошо согласуются с истинными значениями этих параметров в области больших чисел Кнудсена. При  $Kn \sim 1$  точность расчетов снижается, что приводит к существенному искажению всего поля течения.

Такое поведение решения обусловлено видом моделирующей функции распределения. Если невозмущенный поток газа движется параллельно поверхности, а закон отражения молекул от поверхности принят диффузным, то при  $\text{Kn} \rightarrow \infty$  функция распределения в граничной точке имеет вид, представленный на Рисунке 4.1.

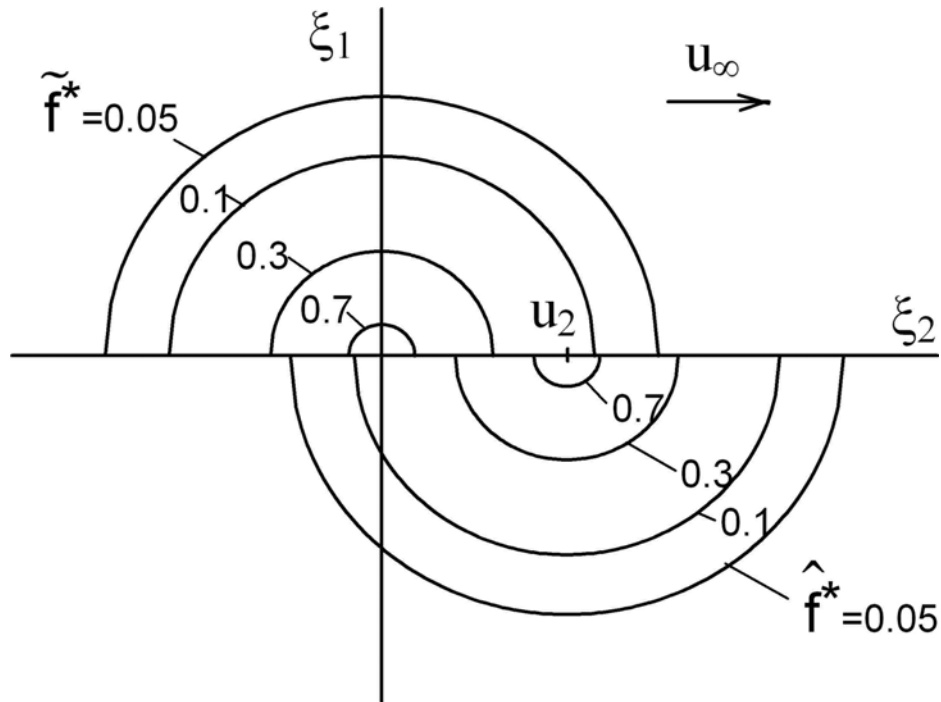


Рисунок 4.1. Линии уровня функций распределения падающих и отраженных молекул в граничной точке.  $\text{Kn} \gg 1$ . Схематическое изображение

Здесь показаны линии уровня функций распределения отраженных (тильда) и падающих (крышка) молекул в пространстве молекулярных скоростей. Система координат  $0\xi_1\xi_2$  связана с поверхностью. Направление оси  $0\xi_1$  совпадает с направлением внешней нормали поверхности. Функции отнесены к своим максимальным значениям:

$$\tilde{f}^\bullet = \tilde{f} / \frac{\tilde{n}}{(2\pi R\tilde{T}_t)^{3/2}}; \quad (4.1)$$

$$\hat{f}^\bullet = \hat{f} / \frac{\hat{n}}{(2\pi R \hat{T}_t)^{3/2}}, \quad (4.2)$$

где  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{T}_t$  – концентрация и поступательная температура отраженных молекул;  $\hat{n}$ ,  $\hat{T}_t$  – концентрация и поступательная температура падающих молекул ( $\hat{n} = n_\infty$ ,  $\hat{T}_t = T_{t\infty}$ ).

Функция распределения состоит из двух полусфер, смещенных по оси  $0\xi_2$  на величину групповой скорости  $u_2$ . Такой вид имеет моделирующая функция в работе [40], что и объясняет хорошее соответствие рассчитанных величин их истинным значениям при  $\text{Kn} \gg 1$ .

На Рисунке 4.2 схематически изображены линии уровня функции распределения в граничной точке при  $\text{Kn} < 1$ .

Функция распределения падающих молекул имеет форму, близкую к эллипсоидальной, точнее к скошенно-эллипсоидальной. На Рисунке 4.2, назначение которого чисто иллюстративное, линии уровня функции  $\hat{f}^\bullet$  изображены в виде эллипсов. Изображения реальных (расчетных) линий уровня при различных числах Кнудсена можно найти в учебном пособии [82].

Такой вид "деформации" функции распределения не был предусмотрен моделями, представленными в работах [39; 40]. Надежды на удовлетворительную аппроксимацию интегральных характеристик ( $\Delta u$ ,  $\Delta T$ ) сферически симметричной функцией с соответствующим набором параметров не оправдались. Вместе с тем функции, сконструированные аналогичным образом, дают вполне удовлетворительные результаты при расчете макропараметров на профиле ударной волны [83].

Кинетическое решение задачи о течении Куэтта [82] позволяет проследить изменения вида функции распределения падающих молекул в зависимости от числа Кнудсена. При  $\text{Kn} \sim 10^{-2}$  и менее функция имеет скошенно-эллипсоидальный вид. По мере возрастания числа Кнудсена вид функции меняется таким образом, что для быстрых молекул, т.е. молекул, имеющих

большие значения нормальной составляющей молекулярной скорости  $\xi_1$ , функция постепенно приобретает сферическую симметрию. Распределение медленных молекул остается скошенно-эллипсоидальным.

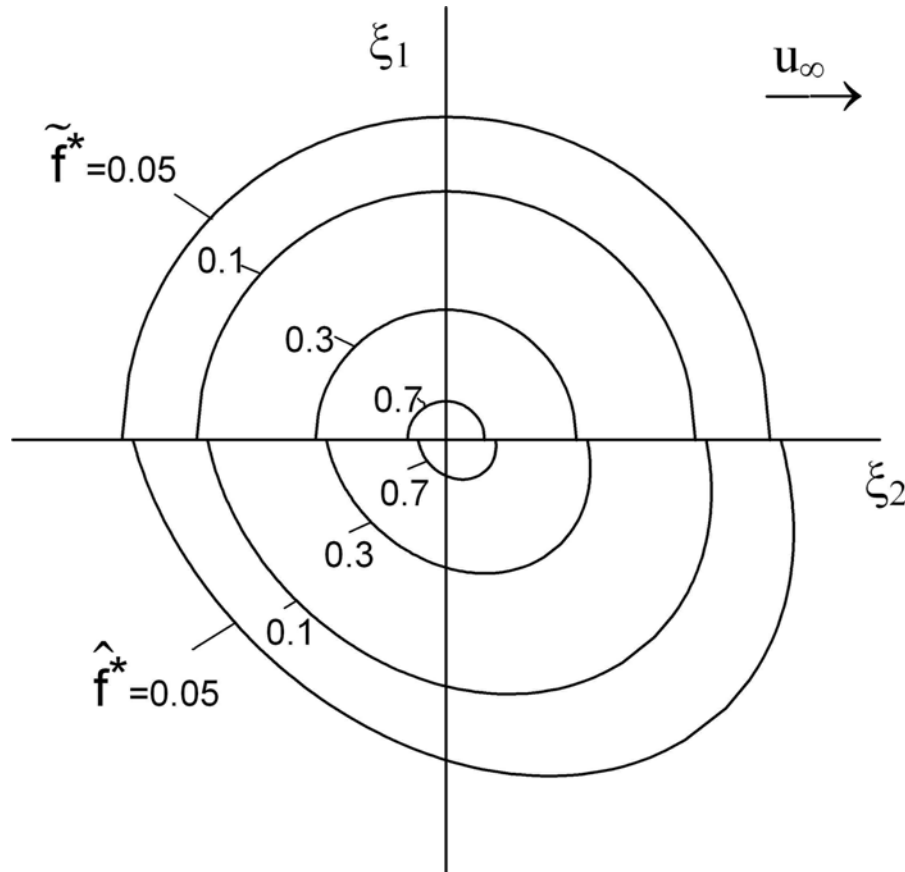


Рисунок 4.2. Линии уровня функций распределения падающих и отраженных молекул в граничной точке.  $Kn < 1$ . Схематическое изображение

Дальнейшее увеличение числа Кнудсена приводит к тому, что сферически симметричная функция распространяется на распределение более медленных молекул. При  $Kn \sim 10^2$  и более распределение практически всех падающих на поверхность молекул описывается сферически симметричной функцией вследствие того, что на второй (верхней) поверхности был задан диффузный закон отражения молекул.

Надо отметить, что использование равновесной функции распределения для описания распределения отраженных молекул или для описания распределения в

невозмущенном потоке, обтекающем поверхность, достаточно характерно для кинетических задач и в значительной степени соответствует рассматриваемым физическим процессам.

В работе [84] построена модели граничных условий с функцией распределения, изменяющей свой вид в соответствии с изложенными выше закономерностями. Дальнейшее изложение следует указанной работе.

#### 4.2. Функция распределения в граничной точке

В геометрическом пространстве будем использовать декартову прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , связанную с обтекаемой поверхностью. Ось  $Ox_1$  примем в качестве внешней нормали поверхности. В пространстве молекулярных скоростей используем декартову прямоугольную систему координат  $Oc_1c_2c_3$ , связанную с центром массы жидкой частицы, находящейся в граничной точке. Обе системы сонаправлены.

Будем рассматривать только поступательное движение молекул. При известном соотношении температур  $T$ ,  $T_t$ ,  $T_\Omega$  ((1.4), (1.7), (1.8)) и тепловых потоков  $q$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  (1.19), вообще говоря, безразлично, для какой из температур выставлять граничные условия. Поступательная температура более удобна, так как именно она определяет молекулярное движение, а следовательно, поток массы, напряжения и другие механические параметры газа.

Примем диффузный закон отражения молекул от поверхности с полной аккомодацией энергии. Введем следующие обозначения параметров в граничной точке:

$n$ ,  $\rho$  – концентрация молекул и плотность газа в граничной точке;

$\mathbf{u}$  – вектор групповой скорости, имеющий проекции  $u_1 = 0$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ;

$T_t$ ,  $T_w$  – поступательная температура газа и температура поверхности (в силу принятых допущений, поступательная и термодинамическая температуры адсорбированных молекул совпадают и соответствуют температуре поверхности);

$p_{12}, p_{13}$  – касательные напряжения ( $p_{12} \equiv p_{12}^m, p_{13} \equiv p_{13}^m$ );

$\varphi_1$  – нормальная составляющая вектора теплового потока поступательных степеней свободы.

Как и в подразделе 4.1, будем использовать надстрочные символы “тильда” и “крышка” для обозначения величин, относящихся к отраженным и падающим молекулам соответственно. Например, концентрации отраженных и падающих молекул  $\tilde{n}$  и  $\hat{n}$ . Эти концентрации определены в соответствующих полупространствах пространства молекулярных скоростей.

В соответствии с принятым законом взаимодействия молекул с поверхностью функция распределения отраженных от поверхности молекул представляет собой максвелловскую функцию:

$$\tilde{f} = \frac{2\tilde{n}}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tilde{c}^2}{2RT_w}\right). \quad (4.3)$$

Здесь  $\tilde{c}_i = c_i + u_i$ . Из условий непротекания следует:  $u_1 = 0$ .

Распределение падающих на поверхность молекул сформируем из соображений феноменологического характера. Падающие на поверхность молекулы условно разобьем на группы медленных и быстрых молекул. Медленными молекулами будем называть молекулы, имеющие малые по модулю скорости  $c_1$ . Составляющие скорости  $c_2$  и  $c_3$  не ограничены. Все остальные молекулы будем называть быстрыми.

Медленные молекулы испытывают последнее столкновение вблизи поверхности. Целесообразно принять составляющие температуры  $T_{22}$  и  $T_{33}$  этих молекул равными температуре газа  $T_t$  в граничной точке, а их групповую скорость равной скорости газа  $\mathbf{u}$  в той же точке. Составляющую температуры  $T_{11}$  обозначим  $\hat{T}_*$ . Эта температура существенно меньше  $T_t$ , так как группа медленных молекул состоит в основном из молекул, движущихся почти параллельно поверхности. Концентрацию медленных молекул обозначим  $\hat{n}_0$ . Функция распределения примет вид

$$\hat{f}_0 = \frac{2\hat{n}_0}{(2\pi R)^{3/2} T_t \sqrt{\hat{T}_*}} \exp\left(-\frac{c_1^2}{2R\hat{T}_*} - \frac{c_2^2 + c_3^2}{2RT_t}\right). \quad (4.4)$$

Быстрые молекулы испытывают последнее столкновение во внешней области течения. Распределение этих молекул зададим в виде суммы двух функций. Первая содержит как быстрые, так и медленные молекулы:

$$\hat{f} = \frac{2\hat{n}}{(2\pi R\hat{T})^{3/2}} \exp\left(-\frac{\hat{c}^2}{2R\hat{T}}\right), \quad \hat{c}_i = c_i - \hat{u}_i, \quad \hat{u}_1 = 0. \quad (4.5)$$

Отметим, что параметры этой функции  $\hat{u}_i$  и  $\hat{T}$  в общем случае не равны групповой скорости и поступательной температуре газа в граничной точке.

Вторая функция “вырезает” (знак “минус”) из первой медленные молекулы:

$$\hat{f}_- = -\frac{2\hat{n}_0}{(2\pi R)^{3/2} \hat{T} \sqrt{\hat{T}_*}} \exp\left(-\frac{\hat{c}_1^2}{2R\hat{T}_*} - \frac{\hat{c}_2^2 + \hat{c}_3^2}{2R\hat{T}}\right). \quad (4.6)$$

Такая комбинация функций позволяет существенно упростить интегрирование результирующей функции распределения при определении ее моментов.

Для того чтобы все молекулы, имеющие скорость  $c_1 = \hat{c}_1 = 0$ , были исключены из распределения  $\hat{f}$ , необходимо выполнение следующего очевидного условия:

$$\hat{f}_-(c_1 = 0) = -\hat{f}(c_1 = 0), \quad (4.7)$$

откуда следует:

$$\frac{\hat{n}_0}{\hat{n}} = \sqrt{\frac{\hat{T}_*}{\hat{T}}} = \sigma. \quad (4.8)$$

Параметр  $\sigma$ , значение которого находится в пределах  $0 \leq \sigma < 1$ , будем считать свободным параметром модели. Введение этого параметра позволяет формально исключить из рассмотрения  $\hat{n}_0$  и  $\hat{T}_*$  на основании соотношений

$$\hat{n}_0 = \sigma \hat{n}, \quad \hat{T}_* = \sigma^2 \hat{T}. \quad (4.9)$$

Функция распределения  $f$  в граничной точке представлена следующим образом:



$$f = \begin{cases} \tilde{f} & \text{при } c_1 > 0; \\ \hat{f} + \hat{f}_- + \hat{f}_0 & \text{при } c_1 \leq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

На Рисунке 4.3 моделирующие функции представлены схематически своими линиями уровня в пространстве тепловых скоростей.

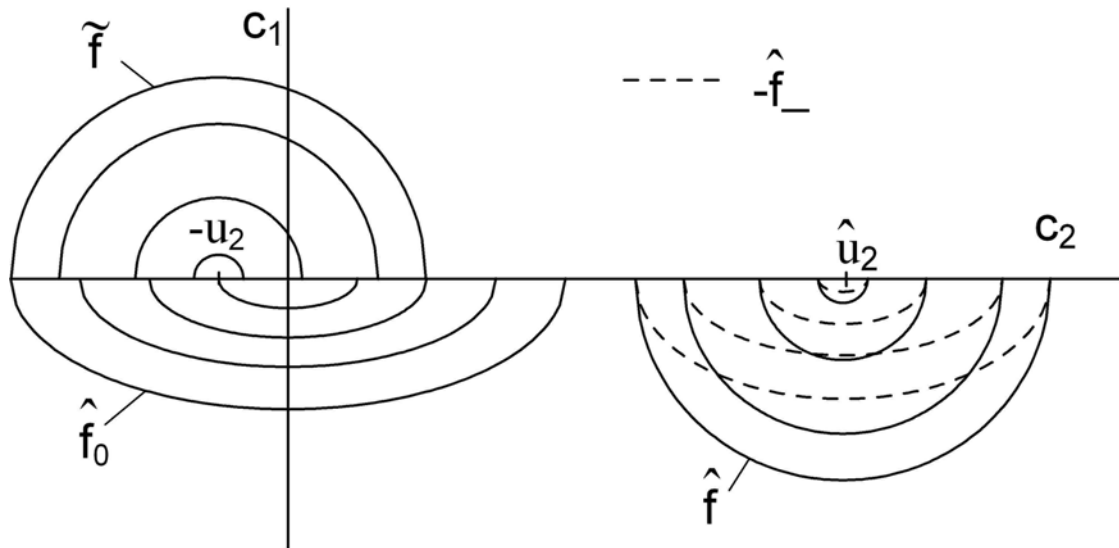


Рисунок 4.3. Схема расположения моделирующих функций распределения в пространстве тепловых скоростей

#### 4.3. Скольжение и скачок температуры

Функция распределения в граничной точке содержит восемь неизвестных величин:  $\tilde{n}$ ,  $\hat{n}$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $\hat{u}_2$ ,  $\hat{u}_3$ ,  $T_t$ ,  $\hat{T}$  ( $\sigma$  – свободный параметр). Для их определения запишем пять скалярных уравнений сохранения и уравнения для  $p_{12}$ ,  $p_{13}$ ,  $\varphi_1$ . Анализ известных моделей граничных условий позволяет сделать вывод о том, что три последние величины являются определяющими параметрами скольжения и скачка температуры, с чем и связан их выбор. Предполагается, что эти величины, а также концентрация газа в граничной точке  $n$  определяются системой уравнений, для которой разрабатываемая модель является граничными условиями.

Указанные восемь уравнений могут быть получены интегрированием функции распределения  $f$ , домноженной на соответствующие молекулярные скорости:

$$\int_0^\infty \int \int \begin{vmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c^2 \\ c_1 c_2 \\ c_1 c_3 \\ c_1 c^2 \end{vmatrix} \tilde{f} dc_1 dc_2 dc_3 + \int_{-\infty}^0 \int \int \begin{vmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c^2 \\ c_1 c_2 \\ c_1 c_3 \\ c_1 c^2 \end{vmatrix} (\hat{f} + \hat{f}_- + \hat{f}_0) dc_1 dc_2 dc_3 = \begin{vmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3nRT_t \\ p_{12}/m_0 \\ p_{13}/m_0 \\ 2\varphi_1/m_0 \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

В результате получаем систему восьми уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{n} + \hat{n} &= n; \\ \tilde{n}\sqrt{T_w} &= \hat{n}\sqrt{\hat{T}}; \\ \tilde{n}u_i &= (1 - \sigma)\hat{n}\hat{u}_i, \quad i = 2, 3; \\ 3\tilde{n}T_w + \tilde{n}\frac{u^2}{R} + (3 - 2\sigma)\hat{n}\hat{T} + (1 - \sigma)\hat{n}\frac{\hat{u}^2}{R} &= 3nT_t - 2\sigma\hat{n}T_t; \\ \tilde{n}u_i\sqrt{T_w} + (1 - \sigma^2)\hat{n}\hat{u}_i\sqrt{\hat{T}} &= -\sqrt{\frac{\pi}{2R}} \frac{p_{li}}{m_0}, \quad i = 2, 3; \\ 2\tilde{n}T_w^{3/2} + \tilde{n}\frac{u^2}{2R}\sqrt{T_w} - \sigma^2\hat{n}T\sqrt{\hat{T}} - (2 - \sigma^2)\hat{n}\hat{T}^{3/2} - (1 - \sigma^2)\hat{n}\frac{\hat{u}^2}{2R}\sqrt{\hat{T}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \frac{\varphi_1}{m_0 R}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Решение этой системы позволяет связать скольжение и скачок температуры с температурой поверхности и параметрами газа в граничной точке:

$$u'_i = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \mathcal{G}}{\mathcal{G} + (1 + \sigma)\mathcal{G}^2} p'_{li}, \quad i = 2, 3; \quad (4.13)$$

$$\Delta T' = \frac{(3 - 2\sigma)(\mathcal{G}^2 - 1) + \mathcal{G}(1 + \frac{\mathcal{G}}{1 - \sigma})u'^2}{3\mathcal{G} + 3 - 2\sigma}. \quad (4.14)$$

Здесь:

$$u'_i = \frac{u_i}{\sqrt{RT_w}}; \quad \Delta T' = \frac{T_i - T_w}{T_w}; \quad p'_{li} = \frac{p_{li}}{\rho RT_w}, \quad i = 2, 3;$$

$$\varphi'_1 = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\frac{2RT_w}{\pi} \rho RT_w}}; \quad \mathcal{G} = \sqrt{\frac{\hat{T}}{T_w}} = 2A \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{B}{2A^3}\right)\right);$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{2 - \sigma^2 + 0.5u'^2 - \sigma^2 \Delta T' - \varphi'_1}{2 - \sigma^2 + 0.5 \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} u'^2}}; \quad B = \frac{\varphi'_1}{2 - \sigma^2 + 0.5 \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} u'^2}.$$

Указанное выше выражение  $\mathcal{G}$  является единственным из трех вещественных корней уравнения

$$\mathcal{G}^3 - 3A^2 \mathcal{G} + B = 0, \quad (4.15)$$

имеющим физический смысл. В условиях равновесия  $\hat{T} = T_w$  и, следовательно  $\mathcal{G} = 1$ . Два других корня в этих условиях имеют значения  $\mathcal{G} = 0$  и  $\mathcal{G} = -1$ . Уравнение (4.15) будет использовано ниже для оценки величины параметра  $\sigma$ .

Уравнения (4.13) – (4.15) записаны в удобном для итерационного решения виде. Само решение не представляет большой сложности, по крайней мере для не слишком неравновесных течений, так как итерируемые переменные  $u'_i$ ,  $\Delta T'$  и  $\mathcal{G}$  слабо влияют друг на друга. Кроме этого, значение  $\mathcal{G}$  близко к единице в широком интервале значений параметров течения.

Единственной неопределенной величиной остается свободный параметр модели  $\sigma$ . Исходя из физических соображений, можно утверждать, что в течениях, близких к свободномолекулярным, значение этого параметра должно быть близко к нулю. Действительно, в условия редких межмолекулярных столкновений даже медленные в указанном выше смысле молекулы попадают в граничную точку из области внешнего течения.

Другими словами, практически все падающие на поверхность молекулы должны быть описаны функцией распределения  $\hat{f}$ , т.е.  $\hat{n}_0 \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\sigma \rightarrow 0$ . В этом случае функция (4.10) вырождается в двухпоточную функцию, аналогичную изображенной на рис. 4.1.

В гидродинамическом приближении параметр  $\sigma$  должен принимать некоторое конечное значение. Обозначим это значение  $\sigma_0$ . Линии уровня функции (4.10) принимают скошенно-эллипсоидальную форму, конкретный вид которой зависит от значения параметра  $\sigma_0$ . В первом приближении свободный параметр  $\sigma$  представим в следующем виде:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \beta \text{Kn}^*}; \quad \text{Kn}^* = \frac{\lambda}{L^*}. \quad (4.16)$$

Здесь  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега в граничной точке,  $L^*$  – характерный размер возмущенной области течения, вычисленный по нормали к поверхности в данной точке,  $\beta$  – свободный параметр модели.

При расчете внешних течений в качестве характерного размера может рассматриваться толщина пограничного слоя в его общем понимании. Для внутренних течений характерный размер целесообразно принимать равным меньшему из двух значений, одно из которых – толщина погранслоя, второе – поперечный размер канала.

#### 4.4. Вспомогательная модель граничных условий

Оценка параметра  $\sigma_0$  может быть проведена по модели граничных условий с эллипсоидальной функцией распределения падающих молекул. Модель [13] дает завышенные значения скольжения, спрямляя профиль скоростей в кнудсеновском слое. Модель [15], использующая 13-моментную функцию распределения для падающих на поверхность молекул, принимает коэффициенты разложения этой функции равными соответствующим коэффициентам, полученным для внешнего течения.

Такой автоматический перенос функции распределения из внешнего течения в граничную точку не корректен по следующей причине. По мере прохождения кнудсеновского слоя молекулы, распределение которых сформировалось во внешнем слое, взаимодействуют с отраженными от

поверхности молекулами. Распределение последних принципиально отличается от распределения молекул во внешнем слое, так как формируется под воздействием процессов иной физической природы.

Таким образом, коэффициенты разложения 13-моментной функции падающих молекул в граничной точке должны быть определены с учетом распределения отраженных молекул.

Будем считать, что отраженные от поверхности молекулы описываются распределением (4.3). Для падающих молекул примем 13-моментную функцию распределения:

$$\hat{f} = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right) \left(1 + \sum_{i=1}^3 (A_{ii}c_i^2 + (c^2 - 5RT_t)B_i c_i) + \sum_{i=2}^3 A_{1i}c_1 c_i\right). \quad (4.17)$$

В отличие от классической 13-моментной функции распределения,  $\hat{f}$  не содержит члена  $A_{23}c_2 c_3$ , так как последний не участвует в определении скольжения и скачка температуры. Функции  $\tilde{f}$  и  $\hat{f}$  в совокупности содержат 12 неизвестных величин. Для их определения запишем уравнения двенадцати моментов, считая напряжения и тепловые потоки в граничной точке известными:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \begin{vmatrix} 1 \\ c_i \\ c_i^2 \\ c_1 c_j \\ c_i c^2 \end{vmatrix} \tilde{f} dc_1 dc_2 dc_3 + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \begin{vmatrix} 1 \\ c_i \\ c_i^2 \\ c_1 c_j \\ c_i c^2 \end{vmatrix} \hat{f} dc_1 dc_2 dc_3 = \begin{vmatrix} n \\ 0 \\ P_{ii}/m_0 \\ p_{1j}/m_0 \\ 2\varphi_i/m_0 \end{vmatrix}; \quad i=1, 2, 3; \quad j=2, 3. \quad (4.18)$$

Здесь  $P_{ii} = \rho RT_t + p_{ii}^m$ .

В результате решения системы уравнений (4.18) получаем зависимости для определения скорости и температуры в граничной точке. Безразмерные скорости, касательные напряжения и тепловые потоки введены аналогично (4.14).

Нормальные напряжения  $p'_{11} = \frac{p_{11}^m}{\rho RT_w}$ . Безразмерная температура:  $T' = T_t/T_w$ ;

$$a_2 u_2'^3 + \frac{b_2 b_4}{b_3} u_2'^2 + b_5 u_2' + \frac{b_4}{b_3} (b_1 + b_2 u_3'^2) = 0; \quad (4.19)$$

$$a_1 = \frac{9}{25\pi - 42}; \quad a_2 = \frac{1}{5\pi - 6};$$

$$b_1 = -5T' + 20a_1T'^{-1/2} + 24a_1 + 3; \quad b_2 = 5a_1T'^{-1/2} + 3a_1 + 1;$$

$$b_3 = (44a_1 - 2)T' + 20a_1\phi_1'T'^{-1/2} + 30a_1p'_{11}; \quad b_4 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} a_2(5\pi p_{12}\sqrt{T'} + 2\phi_2');$$

$$b_5 = T' + \frac{2}{\pi}(6a_2 + 1)\sqrt{T'} + a_2(5 + u_3'^2).$$

Выражение для скорости  $u_3'$  может быть получено из (4.19) взаимной заменой индексов 2 и 3 скоростей, напряжений и тепловых потоков. Индексы комплексов  $a$  и  $b$  не являются индексами осей координат и замене не подлежат.

Уравнение для температуры в граничной точке запишем в удобном для дальнейших преобразований виде:

$$(h_1h_2T'^2 + (25\pi h_1p'_{11} - r_1)T' + r_2p'_{11} + 36h_1\phi_1')^2 T' - (2h_1h_3T'^2 + (r_3 - 54h_1p'_{11} - 28h_1\phi_1')T' + r_5p'_{11} + r_4\phi_1')^2 = 0; \quad (4.20)$$

$$h_1 = 25\pi - 42; \quad h_2 = 45\pi - 14; \quad h_3 = 5\pi - 48;$$

$$r_1 = 5\pi h_1 s_2 + h_2 s_1; \quad r_2 = 5\pi(27s_2 - 5s_1); \quad r_3 = s_3(9h_2 + 14h_3); \quad r_4 = -90\pi s_2 + 28s_1;$$

$$r_5 = s_3(225\pi - 378); \quad s_1 = 3(5\pi + 6) + (5\pi - 3)u'^2; \quad s_2 = u'^2 + 8; \quad s_3 = s_2 - 4.$$

Как уже упоминалось выше, использование эллипсоидальной функции распределения падающих на поверхность молекул оправданно только в гидродинамическом приближении. Помимо этого, в исследованиях ряда авторов, например [13], показано, что 13-моментное приближение имеет порядок точности не выше навье-стоксовского. Таким образом, зависимости (4.19), (4.20) могут рассматриваться как модель граничных условий только при малых значениях  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\Delta T'$ ,  $p'_{ij}$ ,  $\phi'_i$ . Будем считать указанные параметры величинами первого порядка малости. В уравнениях (4.19) и (4.20) пренебрежем членами более высоких порядков. В частности, примем:  $(T')^k = 1 + k \Delta T'$ , где  $k$  – показатель степени.

После преобразований уравнения приобретают следующий вид:

$$u'_i = -\sqrt{2\pi} \frac{10p'_{1i} + \frac{4}{\pi} \varphi'_i}{5\pi + 9} \quad \text{или} \quad u'_i \cong -1.0145p'_{1i} - 0.1292\varphi'_i; \quad (4.21)$$

$$\Delta T' = -\frac{4(5\pi + 9)p'_{11} + 152\varphi'_1}{3h_2 - 4h_3 - r_1/h_1} \quad \text{или} \quad \Delta T' \cong -0.25p'_{11} - 0.3845\varphi'_1; \quad (4.22)$$

где  $i = 2, 3$ .

В пристеночной области в условиях гидродинамического приближения тангенциальными составляющими теплового потока  $\varphi'_2$ ,  $\varphi'_3$  и нормальным неравновесным напряжением  $p'_{11}$  можно пренебречь:

$$u'_i = -\frac{10\sqrt{2\pi}}{5\pi + 9} p'_{1i} \quad \text{или} \quad u'_i \cong -1.0145p'_{1i}; \quad (4.23)$$

$$\Delta T' = -\frac{152}{3h_2 - 4h_3 - r_1/h_1} \varphi'_1 \quad \text{или} \quad \Delta T' \cong -0.3845\varphi'_1. \quad (4.24)$$

#### 4.5. Оценка значения свободного параметра модели

В гидродинамическом приближении значение параметра  $\sigma$ , в соответствии с (4.16), стремится к значению  $\sigma_0$ . Примем допущения относительно порядка малости неравновесных величин, сделанные выше. Кроме этого, будем полагать, что  $\Delta \mathcal{G} = \mathcal{G} - 1$  также является величиной первого порядка малости. Уравнение (4.15) позволяет получить его гидродинамическое приближение:

$$\Delta \mathcal{G} = -\frac{\sigma_0^2 \Delta T' + 2\varphi'_1}{2(2 - \sigma_0^2)}. \quad (4.25)$$

В уравнении (4.13) можно принять  $\mathcal{G} = 1$ , так как правая часть уравнения содержит множитель  $p'_{1i}$ , имеющий первый порядок малости. В гидродинамическом приближении

$$u'_i = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2 + \sigma_0} p'_{1i}. \quad (4.26)$$

Приравнивания правые части выражений (4.23) и (4.26) для скольжения скорости, рассчитанного по двум моделям, находим:

$$\sigma_0 = \frac{5\pi - 11}{10} \cong 0.4708. \quad (4.27)$$

Скачок температуры (4.14) с учетом уравнения (4.25) принимает вид:

$$\Delta T' = -2 \frac{3 - 2\sigma_0}{12 - 4\sigma_0 - 3\sigma_0^2} \varphi_1'. \quad (4.28)$$

Приравнивая правые части уравнений (4.24) и (4.28), получаем уравнение

$$2 \frac{3 - 2\sigma_0}{12 - 4\sigma_0 - 3\sigma_0^2} \varphi_1' = 0.3845 \varphi_1', \quad (4.29)$$

не имеющее вещественных корней, т.е. значения скачка температуры, рассчитанные по двум рассматриваемым моделям, не совпадут ни при каких значениях  $\sigma_0$ . Это обстоятельство отчасти снимает неопределенность, заключающуюся в том, что значение  $\sigma_0$  должно удовлетворять двум не связанным между собой условиям.

Параметр  $\sigma_0$  может принимать значения в интервале  $0 \leq \sigma_0 < 1$ . Такому интервалу соответствует следующий интервал отношения  $-\frac{\Delta T'}{\varphi_1'}$  (см. (4.28)):

$$0.4 < -\frac{\Delta T'}{\varphi_1'} \leq 0.5. \quad (4.30)$$

Для вспомогательной модели это отношение составляет 0.3845.

Интервал отношения  $-\frac{u_i'}{p_{1i}'}$  (см. (4.26)):

$$0.83 < -\frac{u_i'}{p_{1i}'} \leq 1.25. \quad (4.31)$$

Для вспомогательной модели это отношение составляет 1.0145. Сравнение интервалов (4.30) и (4.31) позволяет сделать вывод о том, что в гидродинамическом приближении параметр  $\sigma_0$  влияет на скачок температуры

существенно меньше, чем на скольжение. Интервал  $-\frac{\Delta T'}{\varphi_1'}$  в четыре раза меньше

интервала  $-\frac{u_i'}{p_{1i}'}$ .



Если принять значение  $\sigma_0 = 0.47$ , обеспечивающее совпадение значений скольжения в обеих моделях, то отношение  $-\frac{\Delta T'}{\varphi_1'}$  примет значение 0.4356.

Относительная погрешность вычисления скачка температуры составит примерно 13%. Учитывая приближённый характер обеих моделей, такую погрешность можно считать удовлетворительной.

В соответствии с (4.16), свободный параметр  $\sigma$  принят в следующем виде:

$$\sigma = \frac{0.47}{1 + \beta \text{Kn}^*}. \quad (4.32)$$

Параметр модели  $\beta$  буде подобран по результатам тестов в Разделе 6.

## ИНЖЕНЕРНЫЕ МОДЕЛИ

## 5.1 Внепорядковая модель первого приближения

Область адекватных решений рассмотренных выше систем моментных уравнений и моделей течения, сформированных на их основе, ограничена числом Маха. Предельное значение этого параметра для систем M24 и M45 составляет  $M_{\max} < 2$ . Для релаксационной модели  $M_{\max} \approx 2$ . Для систем M24с и M24сс –  $M_{\max} \approx 3 \div 4$  и  $M_{\max} \approx 5$  соответственно.

Такая оценка  $M_{\max}$  получена из решений задачи о структуре плоской ударной волны, относящейся к разряду высоконеравновесных течений. В задачах, связанных с расчетом сверхзвуковых и даже гиперзвуковых течений с косыми скачками уплотнения, предельное число Маха может быть увеличено. При описании потоков расширяющегося газа перечисленные модели не имеют ограничений по указанному параметру.

Задачи аэрокосмической техники, так же как и ряд задач вакуумных технологий, зачастую связаны с течениями, содержащими как области интенсивного расширения, так и области скачкообразного торможения газового потока. В связи с этим возникает необходимость создания моделей течения, адекватно описывающих физические процессы в широком интервале чисел Маха.

С практической точки зрения особый интерес представляют “инженерные” модели, позволяющие с определенной точностью рассчитывать некоторую, неполную, совокупность параметров газовой среды. Теоретическая обоснованность таких моделей отходит на второй план, хотя очевидно, что между “точностью” и теоретической обоснованностью существует прямая связь.

Адекватная инженерная модель, по-видимому, должна базироваться на теоретически обоснованной модели. Отдельные элементы последней, требующие дополнительных частных моделей или сильных допущений, могут быть заменены

упрощенными зависимостями, содержащими так называемые “свободные параметры модели”. Значения параметров устанавливаются эмпирическим путем. Примером может служить упрощенная зависимость коэффициента вязкости от температуры  $\mu = \mu(T^s)$ , в которой  $s$  – параметр модели.

Ключевым моментом построения инженерной модели является “конструирование” приближенных зависимостей с определенным, как правило минимальным, набором параметров. Замена элементов исходной модели такого рода приближениями сужает область применимости полученной инженерной модели, хотя известны случаи, когда введение эмпирических параметров расширяло область применимости.

В практике расчета неравновесных течений наиболее широкое распространение получила модель НСФ, теоретически обоснованная только для слабонеравновесных течений. Вместе с тем эта модель дает вполне адекватные описания течений в “неожиданно широкой” области, как по числам Кнудсена, так и по числам Маха. Исключение составляют течения, при описании которых количественные неточности модели НСФ приводят к качественно неверным результатам. Это относится к задачам, связанным с отрывом потока, аэродинамическим разогревом поверхностей и т. п. Одно из течений этого класса, а именно задача гиперзвукового обтекания острой кромки, будет рассмотрено в Разделе 7.

По отношению к сильно неравновесным течениям модель НСФ можно рассматривать как инженерную модель (очень удачную инженерную модель), в основе которой лежит первое приближение системы моментных уравнений одноатомных газов. Не определенная первым приближением величина – время релаксации – рассматривается как параметр модели. Произведение времени релаксации и давления заменено эмпирическим коэффициентом – коэффициентом вязкости.

Оговоримся, что исторически модель НСФ строилась в обратной последовательности: от эмпирически установленных законов (закона трения

Ньютона и закона Фурье) к формальной записи уравнений сохранения с учетом этих законов.

Количественно неверное описание процессов, очевидно, связано с применением модели НСФ к таким течениям, для которых она не предназначена. В задаче о структуре ударной волны количественное несоответствие выражается, прежде всего, в слишком высоких градиентах параметров потока на профиле волны. Модели НСФ, условно говоря, не хватает вязкости. В расширяющемся газе вязкость этой модели избыточна, хотя это в меньшей степени сказывается на результатах расчета, ввиду меньшей неравновесности течения.

Формально коэффициент вязкости может быть определен первым приближением моментного уравнения неравновесного напряжения (1.39), приводящим к выражению (1.58). Из последнего непосредственно следует

$$\mu = \tau_p p^m. \quad (5.1)$$

Еще раз оговоримся, что исторически первым был введен коэффициент вязкости (реологический закон Ньютона). Затем Максвелл дал определение времени релаксации, которое, как было отмечено в подразделе 1.2, представляет собой время релаксации напряжений, обеспечивающее “правильный” коэффициент вязкости.

Рассмотрим формальную трактовку коэффициента вязкости, считая время релаксации  $\tau_p$  определенным из каких-либо иных соображений (см., например, [3; 5]). В моментном уравнении (1.39) член, отвечающий за наработку напряжений  $p_{ij}^m$  (см. подраздел 3.1), имеет вид

$$-\tau_p P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \equiv -\tau_p (\delta_{j\alpha} p^m + p_{j\alpha}^m) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p (\delta_{i\alpha} p^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}. \quad (5.2)$$

Для получения этого выражения обе части уравнения (1.55) необходимо умножить на  $-\tau_p$ , чтобы уравнение определяло само напряжение, а не его релаксационный член.

В первом приближении, приближении модели НСФ, член наработки не содержит неравновесных напряжений  $p_{ij}^m$  и преобразуется к виду

$$-2\tau_p p^m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.3)$$

При одномерном течении газа вдоль декартовой оси  $X$  наработка напряжений имеет место только на этой оси. Выражение (5.2) преобразуется:

$$-2\tau_p P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} \equiv -2\tau_p (p^m + p_{xx}^m) \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.4)$$

В первом приближении

$$-2\tau_p p^m \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.5)$$

В случае торможения газа  $p_{xx}^m > 0$ . Множитель перед производной скорости больше, чем в приближении модели НСФ, в ускоряющемся потоке – наоборот. Таким образом, при торможении член наработки напряжения в моментном уравнении “более вязкий”, чем в модели НСФ, при ускорении – “менее вязкий”. Это отчасти объясняет отмеченное выше свойство модели НСФ.

Очевидно, что сохранение неравновесного напряжения в члене наработки (5.4) при переходе к первому приближению позволит улучшить вязкие свойства модели. Очевидно и то, что полученная модель уже не будет строгим первым приближением, более того – приближение станет внепорядковым. Поясним роль внепорядковых членов с точки зрения физического содержания модели.

Адекватная математическая модель какого-либо естественного (физического) процесса обладает свойством “самокомпенсации” вносимых ею погрешностей. Такая самокомпенсация, разумеется, распространяется только на тот уровень процессов, который соответствует выбранному порядку приближения. Примером такой адекватной самокомпенсирующейся модели может служить закон сопротивления Ньютона, широко распространенный в практике расчета сопротивления тел при гиперзвуковом обтекании.

Несмотря на простейшую модель физического процесса, формула Ньютона позволяет во многих случаях достаточно точно определять сопротивление тела при  $M_\infty \gg 1$ . Характерно, что эта модель предназначена для определения интегральной характеристики процесса взаимодействия газа с поверхностью тела, а не для описания самого процесса.

Другая особенность закона сопротивления Ньютона связана с порядком приближения, который определен условием  $M_\infty \rightarrow \infty$ . Если энергия теплового движения молекул пренебрежимо мала по сравнению с энергией их группового движения, т.е.  $M \rightarrow \infty$ , то физическая модель Ньютона совпадает с моделью молекулярно-кинетической теории.

Внепорядковые члены, искусственно включаемые в модель, нарушают ее способность к самокомпенсации. Внепорядковый член вносит в модель описание процесса следующего порядка без учета остальных процессов этого порядка. Примером негативного влияния внепорядковых членов служит 13-моментная модель Грэда, рассмотренная во Введении. Внепорядковость 13-моментной модели связана с исключением части членов порядка  $\tau^2$  из 20-моментной модели. Оставшиеся члены этого порядка малости становятся внепорядковыми.

Другим примером является “испорченная” внепорядковыми членами формула Ньютона, известная как формула Буземана. В этой интерпретации физическая модель Ньютона дополнена центробежными силами, действующими на поток газа при обтекании им выпуклой поверхности. Процессы, отвечающие за возникновение такого потока и отсутствующие в модели Ньютона, в модели Буземана также не учтены. Формула Буземана существенно хуже описывает некоторые виды течений [85]. Справедливости ради надо отметить, что при определении формы тела наименьшего сопротивления формула Буземана приводит к весьма конструктивным выводам.

Несмотря на отмеченные негативные свойства внепорядковых членов, в отдельных случаях их использование позволяет улучшить модель течения. Например, в работе [86] введение внепорядковых членов позволило подавить

коротковолновую неустойчивость, свойственную уравнениям Барнетта. В ряде работ по динамике неравновесных течений рассматриваются “усеченные” уравнения Барнетта, представляющие собой, по существу, внепорядковые выражения. Такие уравнения имеют определенные преимущества перед исходным уравнением.

Улучшение вязких свойств модели первого приближения за счет учета неравновесного напряжения в выражениях типа (5.4) использовалось в ряде работ при расчете одномерных течений. В работах [87; 88] для задачи о структуре плоской ударной волны в многоатомном газе применялась упрощенная модель – “simplified translational nonequilibrium model”. В этой модели в выражения для  $p_{xx}$  и  $q_x$  вводился член, соответствующий первому приближению  $p_{xx}^m$  с некоторыми постоянными коэффициентами. Применение внепорядкового члена обосновывалось несколько иными соображениями [89], что, впрочем, не меняло существа вопроса. Рассчитанная обратная ширина профиля плотности лучше согласовывалась с экспериментальными данными, чем ширина, получаемая из решения модели НСФ без объемной вязкости.

В работе [40] рассматривались структура плоской ударной волны и одномерное течение между движущимися поверхностями, имеющими разную температуру (аналог течения Куэтта). Расчеты проводились для одноатомного газа. Отмечено существенное улучшение результатов расчета (наклон профилей, расход газа между пластинами) в случае вычисления коэффициента вязкости по составляющей температуры, соответствующей направлению градиентов основных параметров газа. В принятых обозначениях для ударной волны  $\mu = \mu(T_{xx}^s)$ .

Принимая во внимание приведенные выше доводы, рассмотрим неравновесные величины в неполном втором приближении (в первом приближении с внепорядковым членом) [90]. В дальнейшем мы не будем использовать термины “приближенный” или “усеченный” применительно к

выражениям с внепорядковыми членами. Будем использовать термин “внепорядковый”, лучше отображающий существо вопроса.

В механических переменных:

$$\rho R \theta = -\frac{2}{3} h \tau_p P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}; \quad (5.6)$$

$$p_{ij}^m = -\tau_p P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \tau_p P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad (5.7)$$

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha}; \quad (5.8)$$

$$\omega_i = -c_\omega \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha}. \quad (5.9)$$

В термодинамических переменных:

$$p_{ij} = -\tau_p P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} c_\mu \tau_p P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad (5.10)$$

$$q_i = -\frac{c_p}{Pr} \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}. \quad (5.11)$$

Обозначим:

$$\mu_{ij} = \tau_p P_{ij}. \quad (5.12)$$

В дальнейшем переменную  $\mu_{ij}$  будем называть тензорным коэффициентом вязкости. В отличие от коэффициента вязкости (5.1), соответствующего строгому первому приближению, тензорный коэффициент вязкости содержит внепорядковый член – неравновесное напряжение  $p_{ij}^m$ . Этот член введен искусственно для улучшения вязких свойств модели первого приближения. Следуя такой логике построения модели, целесообразно ввести параметр ( $\chi$ ), позволяющий изменять влияние внепорядкового члена:

$$\mu_{ij} = \tau_p \left( \delta_{ij} p^m + \chi p_{ij}^m \right) = \mu \left( \delta_{ij} + \chi \frac{p_{ij}^m}{p^m} \right); \quad (5.13)$$



Это выражение содержит механические напряжения. Коэффициент сдвиговой вязкости определен по поступательной температуре:  $\mu = \mu(T_t)$ . Качественно верно первое приближение поступательной температуры определено только двухтемпературной моделью (3.31). Если для внепорядкового приближения использовать 5-моментную модель (3.15), то тензорный коэффициент вязкости следует определять как

$$\mu_{ij} = \tau_p \left( \delta_{ij} p + \chi p_{ij} \right) = \mu \left( \delta_{ij} + \chi \frac{p_{ij}}{p} \right), \quad (5.14)$$

где  $\mu = \mu(T)$ .

Неравновесные напряжения и моменты третьего порядка с учетом (5.12) примут следующий вид:

$$p_{ij}^m = -\mu_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \mu_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad (5.15)$$

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R \mu_{i\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha}; \quad (5.16)$$

$$\omega_i = -c_\omega \mu_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha}. \quad (5.17)$$

$$p_{ij} = -\mu_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \mu_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} c_\mu \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad (5.18)$$

$$q_i = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \mu_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}. \quad (5.19)$$

Проводя аналогию с электромагнитными явлениями, заметим, что неравновесные члены  $p_{ij}^m$  и  $p_{ij}$  в зависимостях (5.13) и (5.14) приводят к появлению “индуктивного” сопротивления. Пространственная производная вектора скорости, содержащаяся в  $p_{ij}^m$  и  $p_{ij}$ , в этом случае выполняет функции производной по времени вектора магнитной индукции, ограничивая “быстроту” развития процесса. Разумеется, что такую аналогию нельзя рассматривать в

качестве феноменологического обоснования введения внепорядковых членов. Данный пример носит иллюстративный характер.

Систему уравнений сохранения модели (3.31) в совокупности с (5.15), (5.16), (5.17) будем называть двухтемпературной внепорядковой моделью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3\rho R} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} &= -\frac{5-3\gamma}{2h} \frac{T_t - T_\Omega}{\tau_p}; \\ \frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} &= \frac{3(\gamma-1)}{2h} \frac{T_t - T_\Omega}{\tau_p} \\ p_{ij}^m &= -\mu_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \mu_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad \varphi_i = -\frac{15}{4} R \mu_{i\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha}; \quad \omega_i = -c_\omega \mu_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Систему уравнений сохранения модели (3.15) в совокупности с (5.18) и (5.19) будем называть 5-ти моментной внепорядковой моделью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma-1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ p_{ij} &= -\mu_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \mu_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} c_\mu \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad q_i = -\frac{c_p}{Pr} \mu_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}; \quad \mu_{ij} = \tau_p P_{ij}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Во внепорядковой модели тензорный коэффициент вязкости получен из уравнения неравновесных напряжений (1.32). При этом был опущен член

$$2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right). \quad (5.22)$$

Если учтенные члены отвечали за “динамическую” наработку напряжений, то (5.22) определяет “тепловую” наработку.

Кроме этого, мы пренебрегли членами

$$\frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) \equiv \frac{dp_{ij}^m}{dt} + p_{ij}^m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (5.23)$$

Первое слагаемое правой части представляет собой лагранжеву производную, а второе слагаемое левой части – градиент потока неравновесных напряжений в эйлеровых переменных. Обе величины не принимают участия в наработке и релаксации напряжений. Они только “констатируют” результат этого совокупного процесса.

Представляет интерес, насколько велико влияние опущенных членов на неравновесное напряжение в сильнонеравновесном течении. Строгий формальный анализ, по-видимому, невозможен. Проведем качественную оценку влияния опущенных членов на основе численного решения.

## 5.2. Вспомогательная кинетическая модель. Анализ внепорядковой модели

Рассмотренные выше моментные модели обладают теми или иными недостатками в области сильнонеравновесных течений. Для оценки влияния членов (5.22) и (5.23) на неравновесное напряжение целесообразно использовать модель кинетического уравнения, лежащего в основе моментных уравнений системы (1.79), и в частности уравнения (1.39).

В общем уравнении переноса (1.27) интеграл столкновений не конкретизирован. Интерес представляла только структура моментов этого интеграла. В модельном кинетическом уравнении интеграл столкновений должен быть представлен в явном виде.

Рассмотрим кинетическую модель релаксационного типа:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{f^+}{\tau^+} + \frac{f}{\tau}. \quad (5.24)$$

Применительно к задаче о структуре ударной волны это уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f^+}{\tau^+} + \frac{f}{\tau}. \quad (5.25)$$

В качестве функции  $f^+$  выберем аппроксимирующую функцию (2.12). В случае одномерного течения вдоль оси  $X$  одна из главных осей тензора напряжений совпадет с этой осью. Положение двух других осей произвольно. Заменим в (2.12) индексы главных осей индексами выбранной “лабораторной” системы координат. Функция  $f^+$  примет следующий вид:

$$f^+ = \left( 1 + \frac{c_x}{RT_{xx}^+} \left( - \left( \frac{\varphi_{xxx}^+}{P_{xx}^+} + \frac{\varphi_{xyy}^+}{P_{yy}^+} + \frac{\varphi_{xzz}^+}{P_{zz}^+} \right) + c_x^2 \frac{\varphi_{xxx}^+}{3RT_{xx}^+ P_{xx}^+} \right. \right. \\ \left. \left. + c_y^2 \frac{\varphi_{xyy}^+}{RT_{yy}^+ P_{yy}^+} + c_z^2 \frac{\varphi_{xzz}^+}{RT_{zz}^+ P_{zz}^+} + \frac{3}{2} \left( \frac{n}{E_{\Omega}^+} \varepsilon - 1 \right) \frac{\omega_x^+}{E_{\Omega}^+} \right) \right) f_P F_{\Omega}. \quad (5.26)$$

В этом уравнении

$$f_P = \frac{n}{(2\pi R)^{3/2} \sqrt{T_{xx}^+ T_{yy}^+ T_{zz}^+}} \exp \left( - \frac{c_x^2}{2RT_{xx}^+} - \frac{c_y^2}{2RT_{yy}^+} - \frac{c_z^2}{2RT_{zz}^+} \right); \quad (5.27)$$

$$F_{\Omega} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi} \left( \frac{2}{3} \frac{E_{\Omega}^+}{n} \right)^{3/2}} \exp \left( - \frac{\varepsilon}{\frac{2}{3} \frac{E_{\Omega}^+}{n}} \right). \quad (5.28)$$

На следующем шаге построения кинетической модели определим среднее время свободного пробега молекул  $\tau$  и макроскопические параметры с надстрочным символом “+”.

Уточним, что указанные параметры, в отличие от их аналогов, использованных при построении системы моментных уравнений в Разделе 1, имеют формальное определение. Это моменты функции  $f^+$ . Сама же функция носит гипотетический характер. Предполагается, что распределение молекул по скоростям после каждого столкновения соответствует  $f^+$ .

При построении кинетических моделей релаксационного типа вид этой функции выбирается из дополнительных допущений, например используется принцип наиболее вероятного состояния при заданных моментах функции

распределения. Если рассматриваемый элемент объема газовой среды считать изолированной системой, то, очевидно, наиболее вероятное состояние будет соответствовать локально-максвелловской функции распределения. Так получена модель БГК. При таком допущении описываемое состояние газа близко к равновесному.

В условиях высокой неравновесности газовой среды наиболее вероятное состояние не может быть определено локально. Этот вопрос подробно рассмотрен в работе [3].

Для определения моментов функции  $f^+$  привлечем следующие соображения [56]. Задача о пространственно однородной релаксации неравновесных напряжений в терминах уравнения (1.39) формулируется как

$$\frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}. \quad (5.29)$$

Решение этого уравнения:

$$p_{ij}^m = p_{ij}^m|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right). \quad (5.30)$$

Аналогичным образом могут быть получены уравнения релаксации остальных неравновесных величин:

$$\theta = \theta|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{h\tau_p}\right); \quad (5.31)$$

$$\varphi_i = \varphi_i|_{t=0} \exp\left(-\frac{2}{3}\frac{t}{\tau_p}\right); \quad (5.32)$$

$$\omega_i = \omega_i|_{t=0} \exp\left(-\frac{c_\Omega}{c_\omega}\frac{t}{\tau_p}\right). \quad (5.33)$$

Предположим, что макропараметры газа, а следовательно, и функция  $f^+$  слабо меняются за время  $\tau$ . Такое допущение, соответствующее слабонеравновесному течению, вполне пригодно для оценочных расчетов. Будем рассматривать столкновения молекул на интервале времени  $\tau$  и, следовательно,

примем  $\tau^+ = \tau$ . Из кинетического уравнения в интегральной форме (см., например, [3], [13]) непосредственно следует, что доля молекул, не испытавших столкновения (нижний индекс “нс”) в течение времени  $t < \tau$ ,

$$(fd\bar{\xi})_{нс} = f|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d\bar{\xi}. \quad (5.34)$$

Это справедливо и для моментов функции распределения:

$$(p_{ij}^m)_{нс} = p_{ij}^m|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (5.35)$$

$$\theta_{нс} = \theta|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (5.36)$$

$$(\varphi_i)_{нс} = \varphi_i|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (5.37)$$

$$(\omega_i)_{нс} = \omega_i|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (5.38)$$

Рассмотрим баланс неравновесного напряжения  $p_{ij}^m$ . По истечении промежутка времени  $t$  напряжение будет складываться из напряжений, создаваемых молекулами в начальном состоянии  $\left(p_{ij}^m|_{t=0}\right)$ , и молекулами, образовавшимися в результате столкновений  $\left(p_{ij}^{m+}\right)$ . Повторными столкновениями молекул можно пренебречь, так как они не изменяют напряжения  $p_{ij}^{m+}$ , в силу сделанного допущения относительно медленной эволюции  $f^+$ .

Экспоненциальный множитель уравнения (5.35) в этом случае играет роль весового коэффициента напряжений  $p_{ij}^m|_{t=0}$  и  $p_{ij}^{m+}$ . В соответствии с (5.30) можно записать

$$p_{ij}^m|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) = p_{ij}^m|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + p_{ij}^{m+} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right). \quad (5.39)$$

Это уравнение явным образом требует выполнения условия  $\tau_p \geq \tau$ , при невыполнении которого  $p_{ij}^{m+}$  меняет знак, что противоречит процессу релаксации. Покажем, что требование  $\tau_p \geq \tau$  является естественным условием.

Время релаксации напряжений  $\tau_p$  определено зависимостью (1.37). С учетом  $\tau^+ = \tau$  эту зависимость можно представить в виде

$$p_{ij}^{m+} = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_p}\right) p_{ij}^m. \quad (5.40)$$

Формально (5.40) представляет собой линеаризованный вариант выражения  $p_{ij}^{m+} = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) p_{ij}^m$ , из которого следует, что мгновенной релаксации соответствует бесконечно малое время  $\tau_p$ . Процесс релаксации непрерывен во времени.

В интерпретации уравнения (1.37)  $p_{ij}^{m+}$  имеет смысл напряжения, создаваемого молекулами, испытавшими одно столкновение. В этом случае релаксация рассматривается как дискретная последовательность отдельных столкновений. Мгновенной релаксации соответствует  $\tau_p = \tau$ . Верхний предел отношения  $\frac{\tau}{\tau_p}$  не может быть больше единицы. В противном случае релаксация протекала бы при отсутствии столкновений.

Вернемся к уравнению (5.39). Начальный момент времени  $t=0$  выбран произвольно. Будем считать, что интересующее нас напряжение  $p_{ij}^m$  соответствует начальному моменту, т.е.  $p_{ij}^m = p_{ij}^m|_{t=0}$ . По истечении периода времени  $t = \tau$  баланс напряжений примет вид

$$p_{ij}^m \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) = p_{ij}^m e^{-1} + p_{ij}^{m+} (1 - e^{-1}). \quad (5.41)$$

Это выражение позволяет связать напряжения  $p_{ij}^{m+}$  и  $p_{ij}^m$ :

$$p_{ij}^{m+} = \frac{\exp\left(1 - \frac{\tau}{\tau_p}\right) - 1}{e - 1} p_{ij}^m = k_p p_{ij}^m. \quad (5.42)$$

По аналогии с (5.42) могут быть получены зависимости для остальных неравновесных величин:

$$\theta^+ = \frac{\exp\left(1 - \frac{\tau}{h\tau_p}\right) - 1}{e - 1} \theta = k_\theta \theta; \quad (5.43)$$

$$\varphi_{ijk}^+ = \frac{\exp\left(1 - \frac{2}{3} \frac{\tau}{\tau_p}\right) - 1}{e - 1} \varphi_{ijk} = k_\varphi \varphi_{ijk}; \quad (5.44)$$

$$\omega_i^+ = \frac{\exp\left(1 - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\tau}{\tau_p}\right) - 1}{e - 1} \omega_i = k_\omega \omega_i. \quad (5.45)$$

Закон сохранения энергии будет выполнен, если полные напряжения и энергию внутренних степеней свободы выразить через инварианты столкновений  $p$  и  $T$ :

$$P_{ii}^+ = p + p_{ii}^+ = p + p_{ii}^{m+} + \frac{5-3\gamma}{2} \rho R \theta^+ = p + k_p p_{ii}^m + \frac{5-3\gamma}{2} \rho R k_\theta \theta; \quad (5.46)$$

$$E_\Omega^+ = c_\Omega \rho T_\Omega^+ = c_\Omega \rho \left( T - \frac{3}{2} (\gamma - 1) k_\theta \theta \right). \quad (5.47)$$

Отношение  $\frac{\tau}{\tau_p}$  будем считать параметром модели. Его значение подберем опытным путем.

На Рисунке 5.1 пунктирной линией показан профиль ударной волны в аргоне [91] при  $M_\infty = 7.183$ . Аппроксимация экспериментальных данных приведена авторами работы [91]. Кривая **1** соответствует расчету по модельному кинетическому уравнению (5.25) с релаксационным членом (5.26).



Наилучшее совпадение расчетных и экспериментальных данных получено при  $\frac{\tau}{\tau_p} \approx 0.8$ . Для сравнения показан расчет методом прямого статистического моделирования (кривая **2**), выполненный Г. Бердом при  $s = 0.68$  [91].

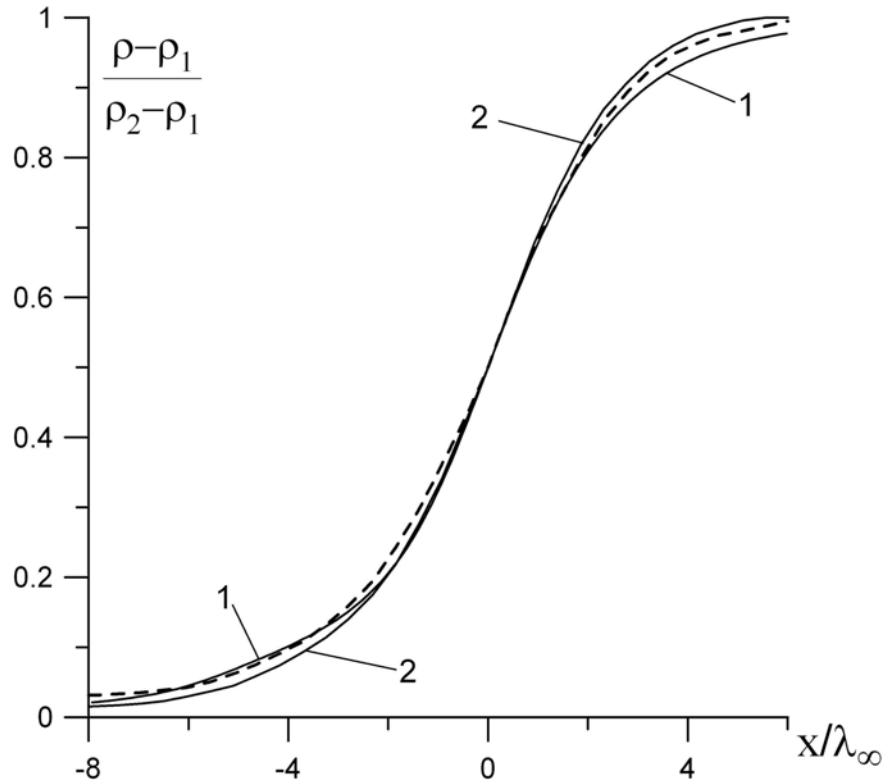


Рисунок 5.1. Профиль плотности в плоской ударной волне аргона.  $M_\infty = 7.183$ . Пунктирная линия – экспериментальные данные [91]; **1** – модельное кинетическое уравнение (5.25),  $\tau / \tau_p = 0.8$ ; **2** – DSM [91],  $s = 0.68$

На Рисунке 5.2 показан профиль ударной волны в азоте [92] при  $M_\infty = 10$ . Здесь также наблюдается удовлетворительное совпадение расчетного и экспериментального профилей при  $\frac{\tau}{\tau_p} = 0.92$ . Значение параметра  $h$  определялось по зависимости (1.78) при  $Z = 5$ .

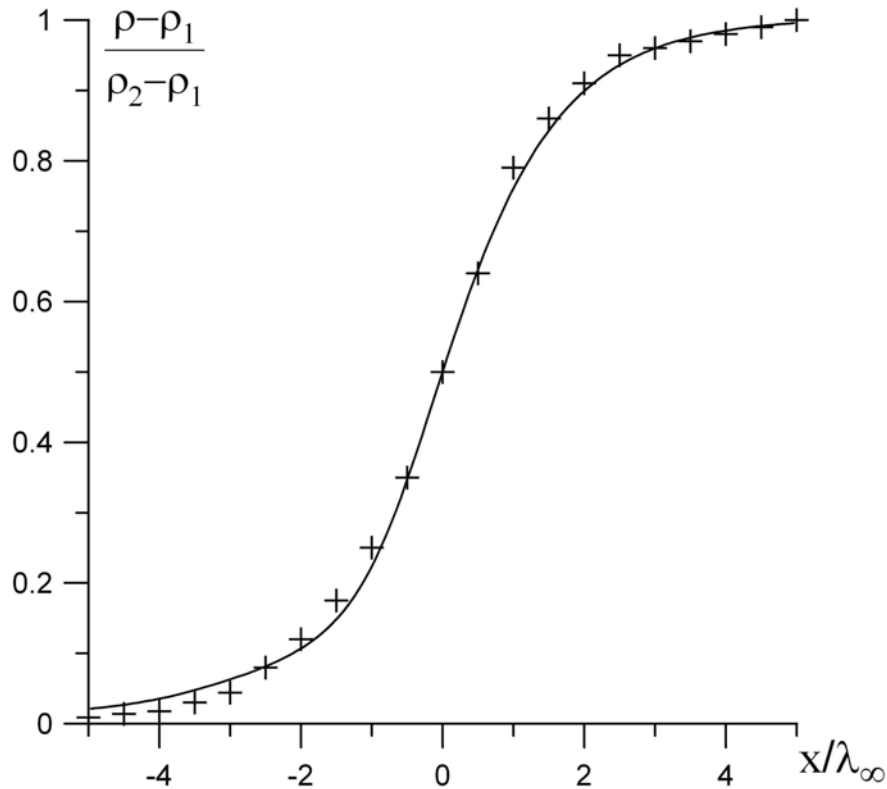


Рисунок 5.2. Профиль плотности в плоской ударной волне азота.  $M_\infty = 10$ . Точки (+) – экспериментальные данные [92]; линия – модельное кинетическое уравнение (5.21),  $\tau/\tau_p = 0.92$ ,  $Z = 5$

Вернемся к рассмотрению внепорядковой модели. Проведем качественную оценку влияния членов (5.22) и (5.23) на неравновесное напряжение в моментном уравнении (1.39). Напомним, что эти члены были опущены при “конструировании” внепорядковой модели.

Используя подобранные значения  $\tau/\tau_p$ , получим решения модельного кинетического уравнения (5.25) при  $M_\infty = 5$  для одно- и двухатомного ( $\gamma = 7/5$ ) газов. Такое значение числа Маха можно расценивать и как сильно сверхзвуковое, и как слабо гиперзвуковое, чем и обусловлен его выбор.

Рассчитаем все моменты функции распределения, фигурирующие в моментных уравнениях неравновесного напряжения (1.39) и разности температур (1.82). Запишем уравнение неравновесных напряжений в универсальной для одно-

и многоатомных газов форме. Для этого уравнение (1.82) домножим на  $\frac{5-3\gamma}{2}h$  и почленно сложим его с (1.39). С учетом стационарности и одномерности решаемой задачи получим выражение

$$p_{xx} = -\frac{\mu}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right) + \left( \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\varphi_{xxx} - \left( \frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \varphi_x - (\gamma-1) h \omega_x \right) \right]. \quad (5.48)$$

Здесь принято:  $\tau_p = \frac{\mu}{p}$ ,  $\mu = \mu(T^s)$ . Очевидно, что в случае одноатомного газа

$p_{xx}^m \equiv p_{xx}$ , а  $\theta$  и  $\omega_x$  не существуют.

Рассмотрим уравнение (5.48), в котором все величины правой части, включая их производные, взяты из кинетического решения. Примем следующие значения параметра  $s$ : для одноатомных газов  $s = 0.847$ , для двухатомных  $s = 0.92$ . При этих значениях профиль  $p_{xx}$ , полученный из решения модельного кинетического уравнения, близок к профилю, вычисленному по (5.48).

Помимо самого напряжения  $p_{xx}$ , определим его первое приближение:

$$p_{xx}^{[1]} = -\left( \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \mu \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.49)$$

В приближении внепорядковой модели (5.21) неравновесное напряжение

$$p_{xx}^{[2-]} = -\left( \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \tau_p P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\left( \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \mu_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.50)$$

Кроме этого, вычислим члены уравнения (5.48), опускаемые в первом и во внепорядковом приближениях:

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right); \quad (5.51)$$

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\varphi_{xxx} - \left( \frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \varphi_x - (\gamma-1) h \omega_x \right). \quad (5.52)$$

На Рисунке 5.3 и Рисунке 5.4 показаны распределения указанных величин, отнесенные к термодинамическому давлению, для одно- и двухатомного газа. Пунктирной линией показано кинетическое решение.

Профили неравновесного напряжения в первом и внепорядковом приближениях (кривые **2** и **3**) имеют вид узких пиков. Область распространения этих напряжений вверх по потоку существенно меньше области напряжения, определенного моментным уравнением (кривая **1**). Причина этого наглядно представлена на рисунках.

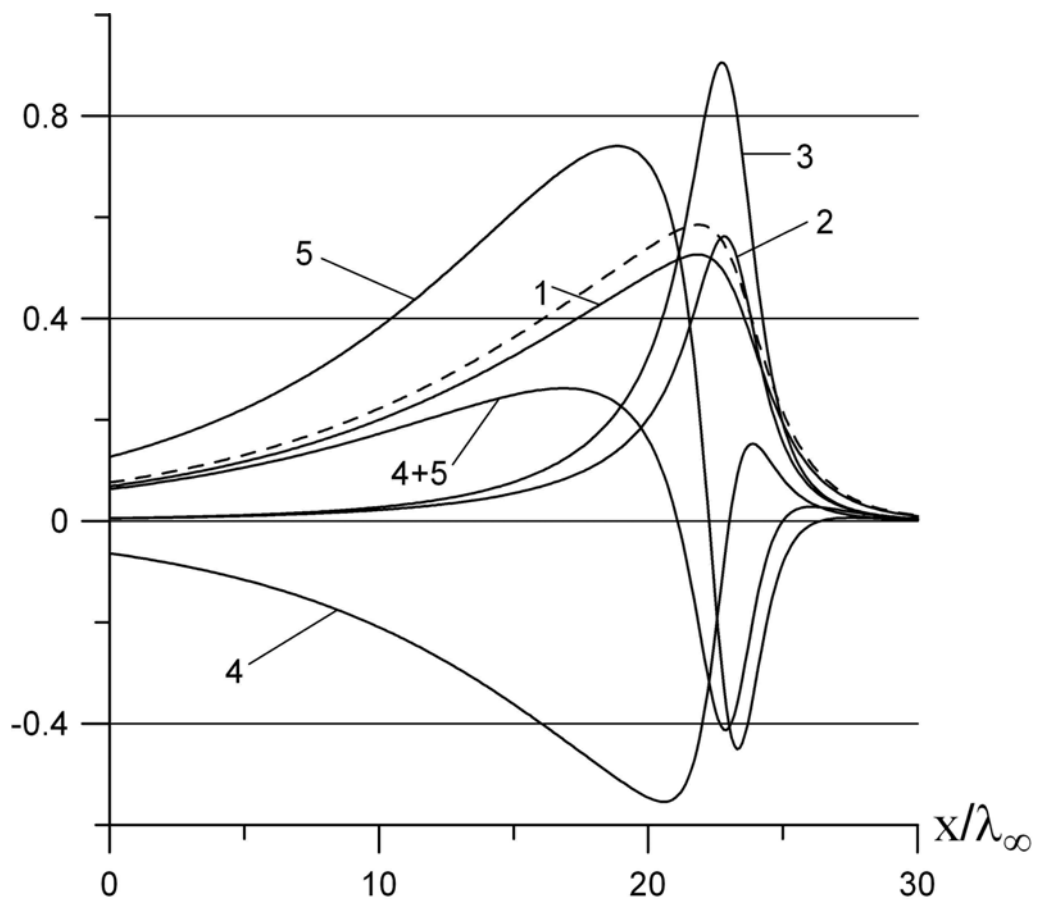


Рисунок 5.3. Распределение параметров в плоской ударной волне одноатомного газа.  $M_\infty = 5$ . Все величины отнесены к давлению  $p$ . ---- модельное кинетическое уравнение; **1** – (5.48); **2** – (5.49); **3** – (5.50); **4** – (5.51); **5** – (5.52)

В верхней по потоку области ударной волны напряжение формируется за счет градиентов составляющих теплового потока (5.52) (кривая **5**), даже несмотря на их частичную компенсацию членом (5.51) (кривая **4**). Пренебрежение членами (5.51) и (5.52) в первом и внепорядковом приближениях значительно сужает протяженность возмущенной области.

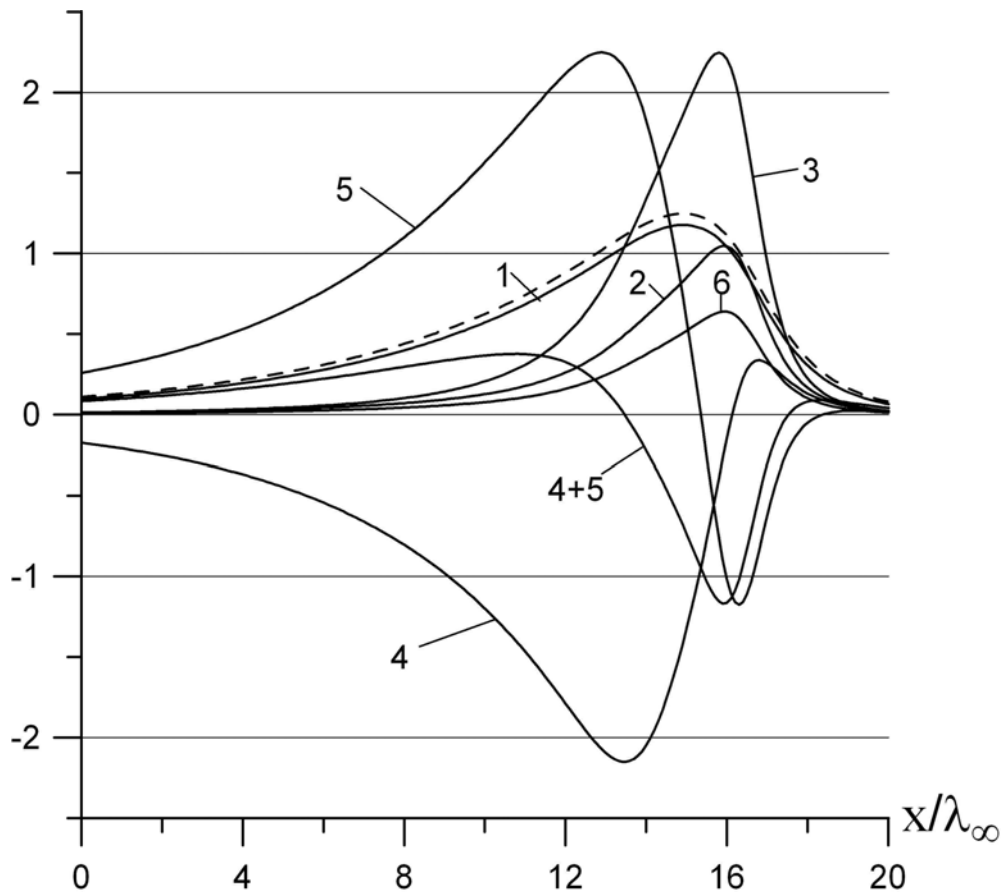


Рисунок 5.4. Распределение параметров в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 5$ . Все величины отнесены к давлению  $p$ . ---- модельное кинетическое уравнение; **1** – (5.48); **2** – (5.49); **3** – (5.50); **4** – (5.51); **5** – (5.52); **6** – модель НСФ без коэффициента объемной вязкости

Обращает на себя внимание, что относительная ширина пиков **2** и **3** в двухатомном газе несколько шире, чем в одноатомном. Это, очевидно, связано с

запаздыванием энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы.

Сравнение кривой **3** с кривой **2** показывает, что внепорядковое приближение, увеличивая напряжение, практически не меняет пропорции его профиля. Следовательно, увеличение вязких свойств модели только за счет члена наработки напряжений не позволяет удовлетворительно аппроксимировать профиль напряжений.

В Разделе 6 будет показано, что искусственное завышение неравновесного члена тензорного коэффициента вязкости (5.13), (5.14) позволяет получать наклон профиля ударной волны с приемлемой точностью в широком интервале чисел Маха. Однако размер области возмущения и форма профиля не соответствуют экспериментальным данным.

Особый интерес представляет кривая **6** Рисунка 5.4. Она показывает напряжение первого приближения без учета объемной вязкости, т.е. соответствует уравнению (5.49) при  $h = 0$ . Вязкие свойства газа при этом значительно занижены. Более того, в условиях, близких к равновесным, кривая **3** будет вырождаться в кривую **2**. Кривые **4** и **5** почти исчезнут. Это связано с тем, что неравновесный член в тензорном коэффициенте вязкости и выражения (5.51), (5.52) имеют порядок малости  $\tau^2$ . Соотношение кривых **2** и **6** останется прежним, так как порядок соответствующих напряжений  $\tau$ .

Приведенные графики являются наглядным примером того, что даже в условиях слабонеравновесного течения пренебрежение объемной вязкостью вносит существенную погрешность в значения нормальных неравновесных напряжений.

На рисунках 5.3 и 5.4 показаны данные, полученные из решения модельного кинетического уравнения. Эти данные поясняют структуру моментного уравнения напряжений. Профили напряжений, рассчитанные по внепорядковой модели, отличаются от представленных выше, но это отличие имеет скорее количественный, чем качественный характер.

На Рисунке 5.5 и Рисунке 5.6 показаны профили неравновесных напряжений и профили скорости в плоской ударной волне одноатомного газа. Параметр  $s$  в аппроксимации  $\mu = \mu(T^s)$  выбирался таким образом, чтобы наклон профиля плотности соответствовал экспериментальным данным [92]. Для модели НСФ (5-моментной модели)  $s = 0.99$ . Для внепорядковой модели:  $s = 0.88$  ( $\chi = 1$ ),  $s = 0.81$  ( $\chi = 2$ ),  $s = 0.75$  ( $\chi = 3$ ),  $s = 0.7$  ( $\chi = 4$ ).

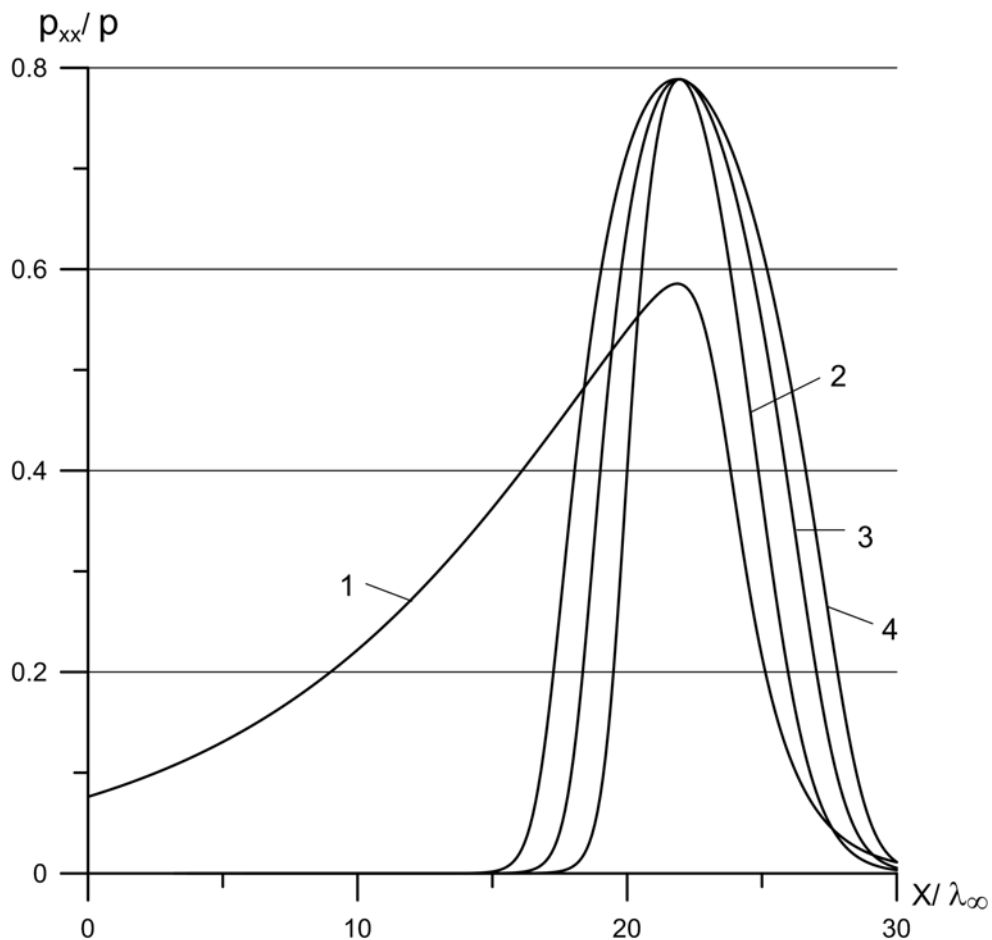


Рисунок 5.5. Профили неравновесного напряжения в плоской ударной волне одноатомного газа.  $M_\infty = 5$ . **1** – модельное кинетическое уравнение; **2** – модель НСФ ( $\chi = 0$ ); **3** – внепорядковая модель  $\chi = 1$ ; **4** – внепорядковая модель  $\chi = 2$ .

Обращает на себя внимание, что увеличение параметра  $\chi$  приводит только к расширению профиля, не изменяя максимального значения напряжения и,

следовательно, степени неравновесности (1.26). Для кривых **2, 3, 4**  $W = 0.394$ , для модельного кинетического уравнения  $W = 0.334$ .

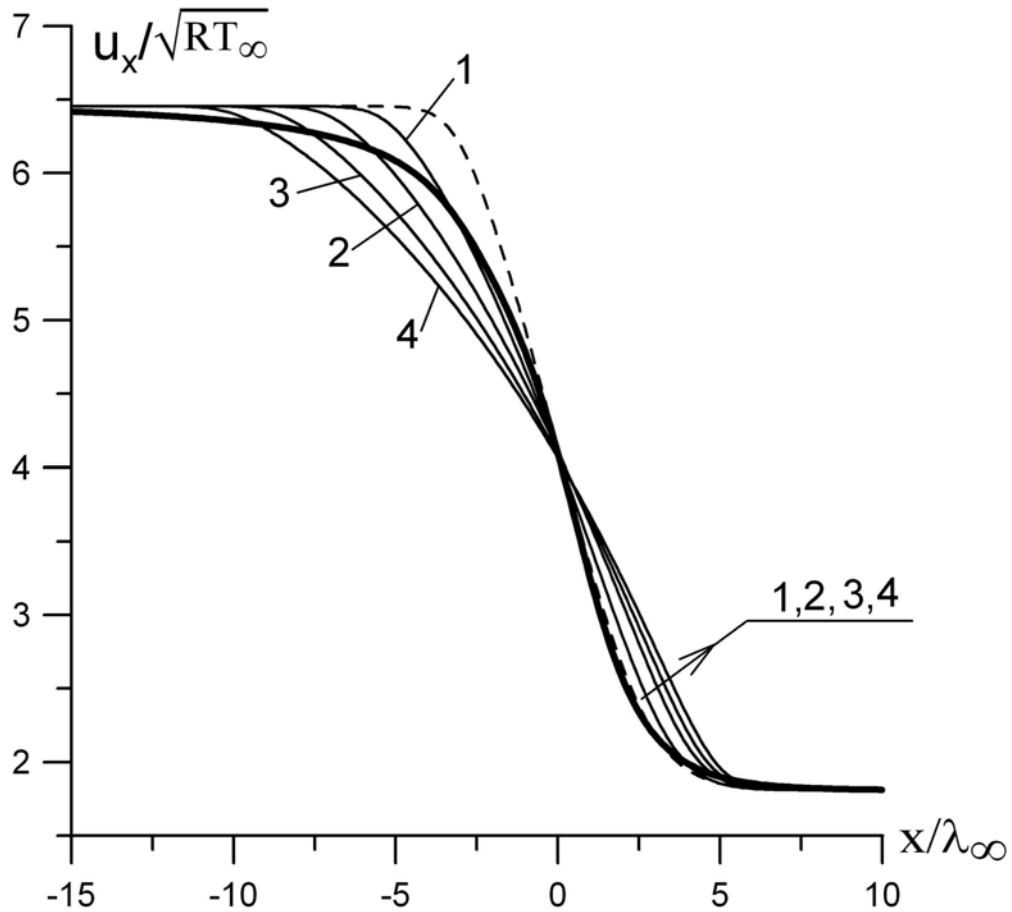


Рисунок 5.6. Профили скорости в плоской ударной волне одноатомного газа.  $M_\infty = 5$ . Жирная линия – модельное кинетическое уравнение; пунктирная линия – модель НСФ; **1, 2, 3, 4** – внепорядковая модель, номер линии соответствует значению параметра  $\chi$ .

Расширение профиля скорости сопровождается увеличением угла наклона соответствующего профиля (см. Рисунок 5.6). Эталонная кинетическая модель дает ширину возмущенной области ( по профилю скорости)  $\sim 20\lambda_\infty$ . Модель НСФ сокращает профиль до  $\sim (7... 8)\lambda_\infty$ . Внепорядковая модель позволяет существенно



расширить возмущенную область, но при этом наблюдается искажение формы профиля.

Профили неравновесного напряжения и профили скорости в двухатомном газе представлены на Рисунке 5.7 и Рисунке 5.8. Значения параметра  $s$  выбирались так же, как в случае одноатомного газа. Для внепорядковой 5-моментной модели  $s = 0.9$  ( $\chi = 1$ ),  $s = 0.77$  ( $\chi = 2$ ). Для внепорядковой двухтемпературной модели  $s = 0.95$  ( $\chi = 1$ ),  $s = 0.9$  ( $\chi = 2$ ). Для 5-моментной и

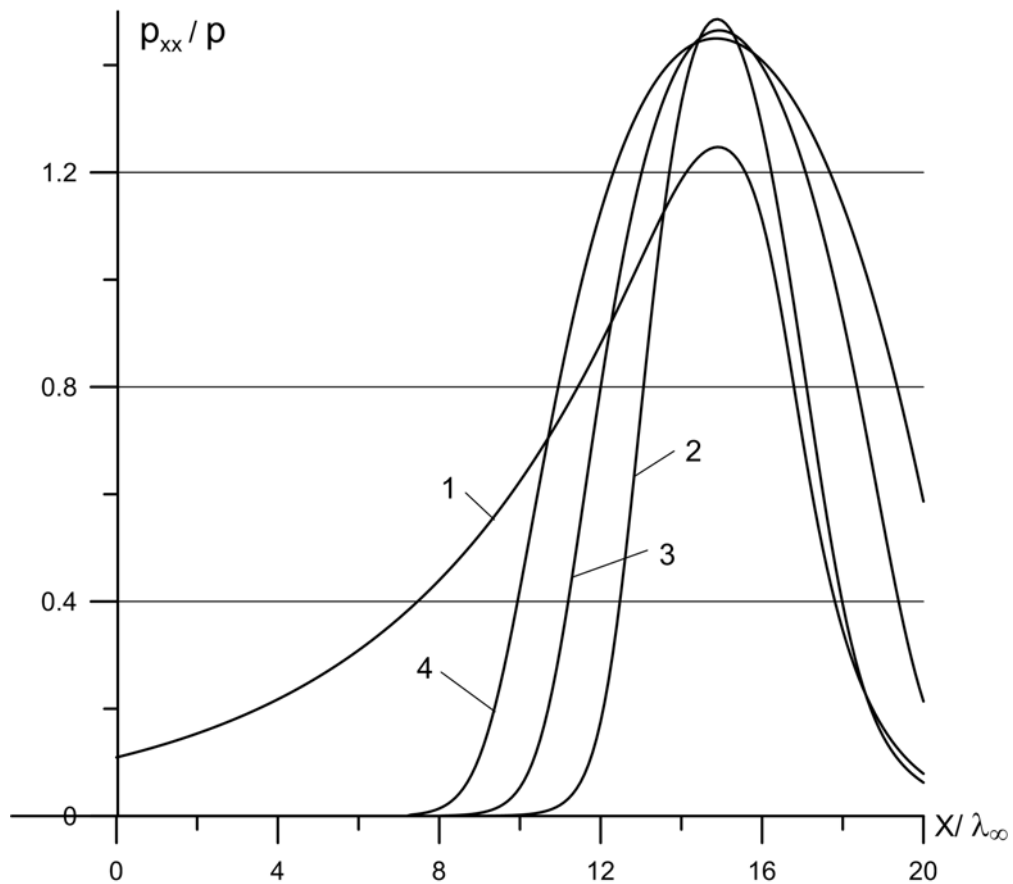


Рисунок 5.7. Профили неравновесного напряжения в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_{\infty} = 5$ . **1** – модельное кинетическое уравнение; **2** – двухтемпературная модель; **3, 4** – внепорядковая двухтемпературная модель  $\chi = 1$  и  $\chi = 2$  соответственно.

двухтемпературной моделей первого приближения ( $\chi = 0$ ) требуемый наклон профиля плотности не получен даже при  $s = 1$ . В расчетах принято  $s = 1$ .

Максимальное значение степени неравновесности, даваемое модельным кинетическим уравнением:  $W = 0.345$ . Для кривых **2**, **3**, **4** (Рисунок 5.7):  $W = 0.376; 0.368; 0.362$  соответственно.

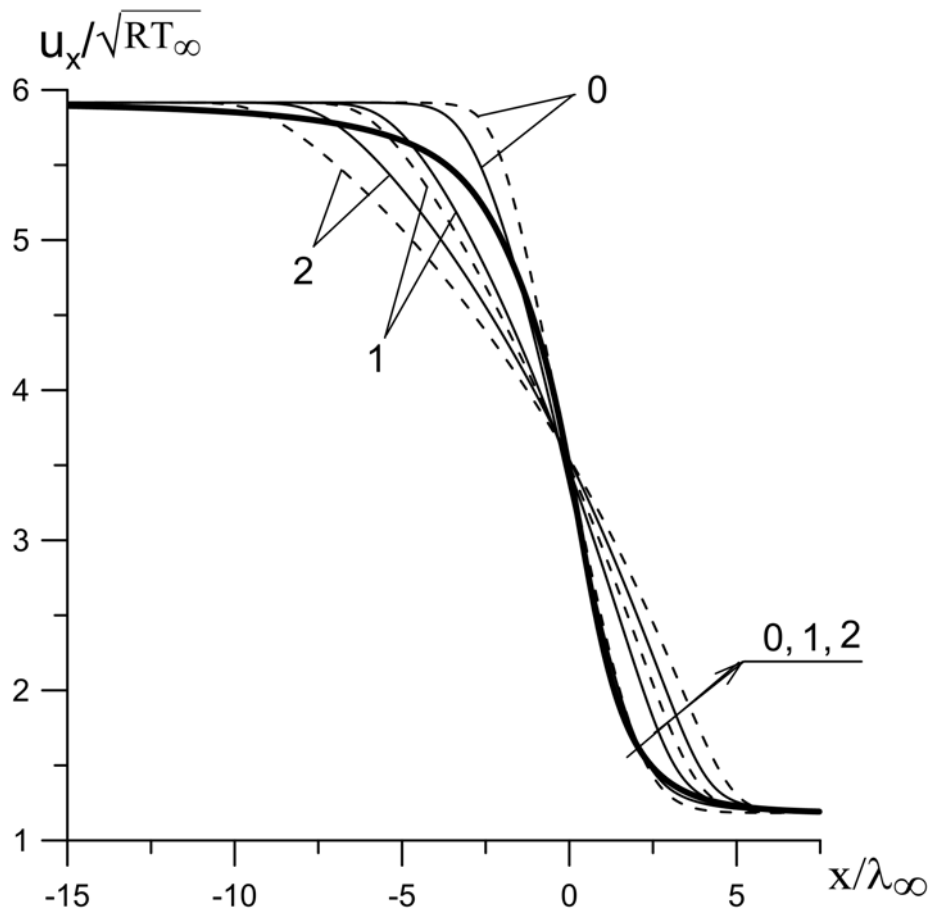


Рисунок 5.8. Профили скорости в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 5$ . Жирная линия – модельное кинетическое уравнение; пунктирные линии – внепорядковая 5-моментная модель; сплошные линии – внепорядковая двухтемпературная модель. Номера линий соответствует значению параметра  $\chi$ .

Из Рисунка 5.8 следует, что параметр  $\chi$  оказывает большее влияние на 5-моментную внепорядковую модель, чем на двухтемпературную.

Обе рассмотренные модификации внепорядковой модели позволяют получать достаточно широкие области возмущений, что принципиально важно для ряда газодинамических задач. К этому классу относится задача обтекания острой кромки, модельный вариант которой будет рассмотрен в Разделе 7.

### 5.3. Гибридная модель

Рассмотренные выше модели имели те или иные недостатки, ограничивающие их область адекватного описания неравновесного течения. Поставим своей задачей расширение этой области за счет комбинации решений, даваемых разными моделями. Комбинационный принцип построения инженерной модели применялся, например, в работе [34]. Авторы данной работы не называли свою модель “инженерной”, но это вопрос терминологии.

Из числа рассмотренных теоретически обоснованных моделей наибольший интерес представляют модели M24c и M24cc, т.е. системы M24c и M24cc, дополненные надлежащими граничными условиями. Основным недостатком этих модели заключается в возникновении физически неадекватных участков профиля ударной волны в высокоградиентной области течения при гиперзвуковых значениях числа Маха. У модели M24c это излом профиля (см. Рисунок 2.4). У модели M24cc это волнообразность профиля (см. Рисунок 2.6). В остальной области течения профили гладкие. Размер возмущенной области (ширины профиля) достаточно велик.

Своего рода альтернативой 24-моментных моделей являются модели первого и внепорядкового приближений. В наиболее неравновесной области течения эти модели сильно спрямляют профиль (см. Рисунок 5.6 и Рисунок 5.8). При увеличении числа Маха профили становятся почти линейными. Возникновение “излома” или “волнообразности” профиля исключено. Вместе с тем, при больших числах Маха возмущения практически локализируются в окрестности высокоградиентной части профиля, почти не проникая в невозмущенный поток. Причины этого были рассмотрены выше.

Представляется естественным комбинирование 24-моментных моделей с какой-либо из упомянутых моделей. Такая комбинация должна предусматривать преобладание решения 24-моментной модели в области с малой степенью неравновесности. В высокоградиентной области течения решение должно определяться преимущественно моделью первого или внепорядкового приближения.

Все модели, по очевидным причинам, содержат единую систему уравнений сохранения (в 24-моментной модели это подсистема). Различие заключается только в интерпретации неравновесных величин  $p_{ij}^m$ ,  $\varphi_i$ ,  $\omega_i$  или  $p_{ij}$ ,  $q_i$  в зависимости от вида используемого уравнения энергии. Уточним, что 5- и 6-моментные модели не содержат моменты  $\varphi_{ijk}$  и  $\theta$ . Комбинирование будет распространяться только на неравновесные величины, входящие в уравнения сохранения.

Внепорядковая модель имеет некоторые преимущества перед моделью первого приближения. Во-первых, область возмущений внепорядковой модели шире, что лучше согласуется с экспериментальными данными. Во-вторых, внепорядковая модель может быть непосредственно связана с 24-моментной моделью неравновесным напряжением, входящим в тензорный коэффициент вязкости (5.13), (5.14). Ниже будет показано, что такая связь позитивно сказывается на свойствах внепорядковой модели.

Связь модели первого приближения с 24-моментной моделью опосредована и осуществляется только через основные газодинамические переменные  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$  (или  $p$ ). В случае комбинирования с моделью первого приближения неравновесные величины будут представлять осредненные значения двух различных моделей.

Конкретизируем способ комбинирования на примере моделей M24сс и двухтемпературной внепорядковой модели, следуя работе [93]. Комбинация модели M24с с 5-моментной внепорядковой моделью рассмотрена в работе [56].

Обозначим какую-либо из перечисленных выше неравновесных величин символом  $r$ . Значение этой величины, определенное моментным уравнением модели M24сс, обозначим  $r^M$ . Эта же величина, определенная внепорядковой моделью (моделью неполного второго приближения), обозначим символом  $r^{[2-]}$ . “Гибридное” значение неравновесной величины:

$$r^H = (1 - W)r^M + Wr^{[2-]}. \quad (5.53)$$

Весовой коэффициент  $W$  должен принимать значения, близкие к единице, в сильнонеравновесной области. В условиях равновесия  $W = 0$ . В этом случае будут удовлетворены сформулированные выше требования к методу комбинирования моделей.

Весовой коэффициент в (5.53) выполняет функции степени неравновесности среды, определенной на единичном отрезке. Степень неравновесности введена в подразделе 1.1 уравнением (1.26). Весовой коэффициент обозначен тем же символом.

Соотношение значений неравновесной величины  $r^M$  и  $r^{[2-]}$  в (5.53) однозначно определено степенью неравновесности среды. Введем параметр модели, позволяющий “настраивать” модель на эмпирические данные. В уравнении (5.53) заменим  $r^M$  на  $r^H$ , определенное тем же уравнением., т. е.

$$r^H = (1 - W)\left((1 - W)r^M + Wr^{[2-]}\right) + Wr^{[2-]}. \quad (5.54)$$

Продолжая эту процедуру несколько раз, получим

$$r^H = (1 - W)^\eta r^M + \left( W \sum_{l=1}^{\eta} (1 - W)^{l-1} \right) r^{[2-]}. \quad (5.55)$$

При значении параметра модели  $\eta = 1$  уравнение (5.55) соответствует (5.53), при  $\eta = 2$  – уравнению (5.54). При неограниченном возрастании  $\eta$  гибридное значение величины  $r^H$  вырождается в  $r^{[2-]}$ . Исключение составляет состояние равновесия ( $W = 0$ ), при котором неравновесные величины не существуют.

Будем считать, что неравновесное напряжение, входящее в тензорный коэффициент вязкости (5.13) внепорядковой модели, определено моментным

уравнением системы M24сс. После принятия такого условия величина  $r^{[2-]}$  уже не будет приближением внепорядковой модели, приобретая гибридные свойства. Последнее положение замыкает разрабатываемую модель. Назовем ее гибридной моделью. Она содержит следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\delta_{i\alpha} p^m + p_{i\alpha}^{mH}) &= 0; \\
\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} \left( \delta_{\alpha\beta} T_t + \frac{p_{\alpha\beta}^{mH}}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3\rho R} \frac{\partial \varphi_\alpha^H}{\partial x_\alpha} &= -\frac{5-3\gamma}{2h} \frac{T_t - T_\Omega}{\tau_p}; \\
\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha^H}{\partial x_\alpha} &= \frac{3(\gamma-1)}{2h} \frac{T_t - T_\Omega}{\tau_p}; \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\
&+ 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}; \\
\frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij\alpha}^{(4)}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \\
\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_{i\alpha}^{\Omega(4)}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{\omega_i}{\tau_p}
\end{aligned} \tag{5.56}$$

В этой системе:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{mH} &= k_1 p_{ij}^m - k_2 \left( \mu_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \mu_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right); & \varphi_i^H &= k_1 \varphi_i - k_2 \frac{15}{4} R \mu_{i\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha}; \\
\omega_i^H &= k_1 \omega_i - k_2 c_\Omega \mu_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha}; & \mu_{ij} &= \mu \left( \delta_{ij} + \chi \frac{p_{ij}}{p} \right); & k_1 &= (1-W)^\eta; & k_2 &= 1 - k_1; \\
\tau_p &= \frac{\mu}{p^m}; & \mu &= \mu(T_t^s); & \eta &= \text{параметр модели.}
\end{aligned}$$

Гибридная модель, построенная с использованием системы M24c и 5-моментной внепорядковой модели (5.21) [56]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\delta_{i\alpha} p + p_{i\alpha}^H) &= 0; \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) \left( \delta_{\alpha\beta} T + \frac{p_{\alpha\beta}^H}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha^H}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) &= -\frac{\theta}{h \tau_p}; \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\
&+ 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}; \\
\frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \\
\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_{i\alpha}^{\Omega(4)}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

В этой системе:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^H &= k_1 p_{ij} - k_2 \left( \mu_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} c_\mu \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right); \quad q_i^H = k_1 q_i - k_2 \frac{c_p}{Pr} \mu_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}; \\
\mu_{ij} &= \mu \left( \delta_{ij} + \chi \frac{p_{ij}}{p} \right); \quad k_1 = (1 - W)^\eta; \quad k_2 = 1 - k_1; \quad \tau_p = \frac{\mu}{p}; \quad \mu = \mu(T^s),
\end{aligned}$$

Этот вариант гибридной модели позволяет повысить устойчивость численного решения за счет вторых производных в уравнениях для  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$  (см. пояснения к системе (2.54)). Вопрос устойчивости становится актуальным при расчете течения, содержащего особую точку. Такая задача будет рассмотрена в Разделе 7.

Оценку параметра модели  $\eta$  проведем по результатам численного теста. На Рисунке 5.9 представлен профиль скорости в одноатомном газе при  $M_\infty = 7.183$  и  $s = 0.75$ . Кривые **1** ÷ **5** рассчитаны по гибридной модели (5.56), кривая **6**

рассчитана по внепорядковой двухтемпературной модели. Кривые **1** ÷ **4** соответствуют значениям параметра  $\eta = 1, 2, 3, 4$ . Кривая **5** рассчитана при  $\eta \rightarrow \infty$ .

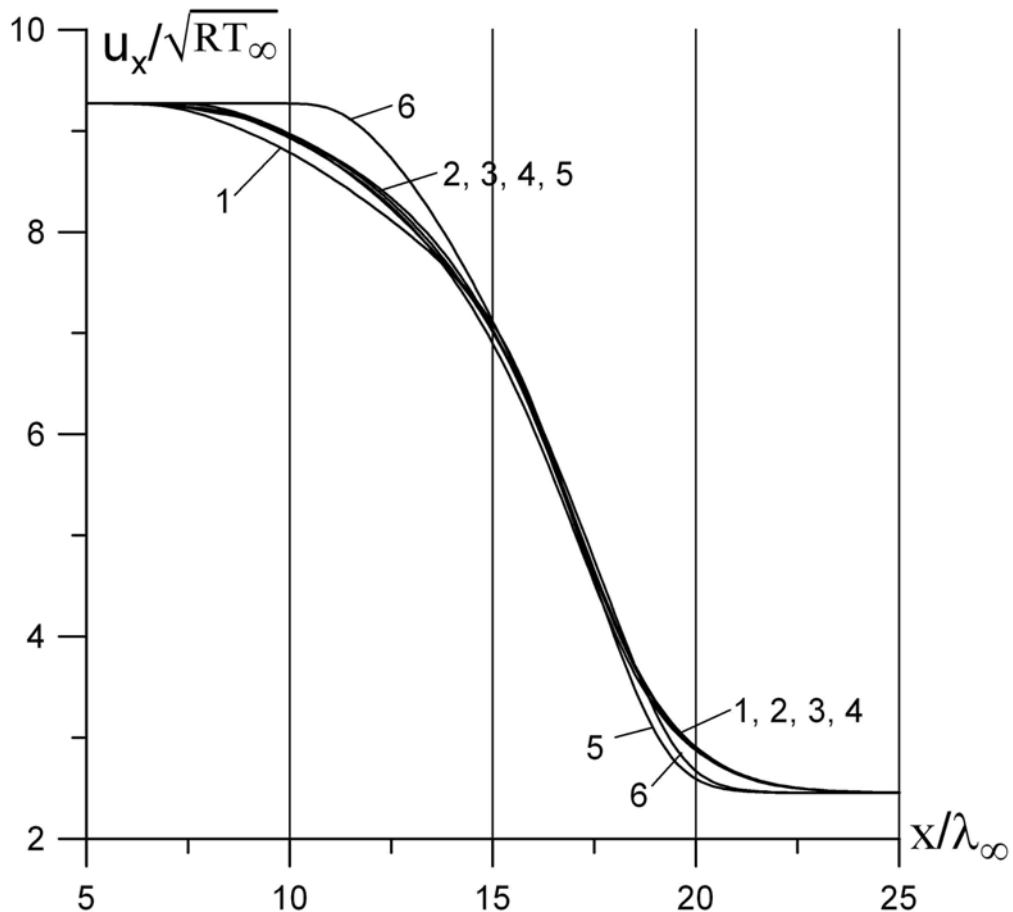


Рисунок 5.9. Профиль скорости в плоской ударной волне одноатомного газа.  $M_\infty = 7.183$ . **1, 2, 3, 4** – гибридная модель (5.56) при  $\eta = 1, 2, 3, 4$ ; **5** – гибридная модель при  $\eta \rightarrow \infty$ ; **6** – внепорядковая двухтемпературная модель,  $\chi = 1$ . Все кривые рассчитаны при  $s = 0.75$

Значение параметра  $\eta$  практически не влияет на решение, если оно составляет несколько единиц. Даже в рассматриваемом гиперзвуковом течении высокой неравновесности профиль достаточно широкий и гладкий. С точки зрения настройки модели на экспериментальные данные отметим, что узкий



высокоградиентный профиль практически всегда можно получить, приняв  $s \approx 0.5$  (модель молекул-шаров).

При неограниченном увеличении  $\eta$  (кривая 5) на нижнем по потоку участке профиля возникает высокоградиентная область. Профиль сужается, но остается более широким, чем профиль внепорядковой модели (кривая 6).

На основании проведенного анализа представляется целесообразным считать значение параметра модели  $\eta$  постоянным и равным нескольким единицам. Во всех последующих расчетах будет принято  $\eta = 2$ .

На Рисунке 5.10. показаны профили скорости в ударной волне двухатомного газа (азота) при  $M_\infty = 5$ . Свободные параметры всех моделей выбирались из соображений совпадения наклона профиля плотности с экспериментальными данными [92].

Из рисунка следует, что гибридная модель (кривая 1, модель (5.57)) лишена коротковолновой неустойчивости. Максимальное значение степени неравновесности, даваемое этой моделью, составляет  $W = 0.348$  и не на много превышает соответствующий параметр модельного кинетического уравнения ( $W = 0.345$ ). Аналогичные результаты получены и при больших числах Маха. Область возмущения гибридной модели несколько меньше, чем у кинетической (пунктирная линия). Для сравнения приведены профили двухтемпературной и 5-моментной моделей.

Описанный метод построения гибридной модели применялся к моделям M24 и M45. Сглаживание профилей имело место только в случае сильного, почти полного, преобладания модели первого приближения. Решение мало отличалось от решения этой модели. Комбинация моделей M24 и M45 с внепорядковой моделью не позволила получить гладкое решение. Видимо, характерный для моделей M24 и M45 “субскачок” является слишком сильным дефектом.

Остается надеяться, что другие методы построения инженерной модели на базе M24 и M45 позволят решить эту проблему.

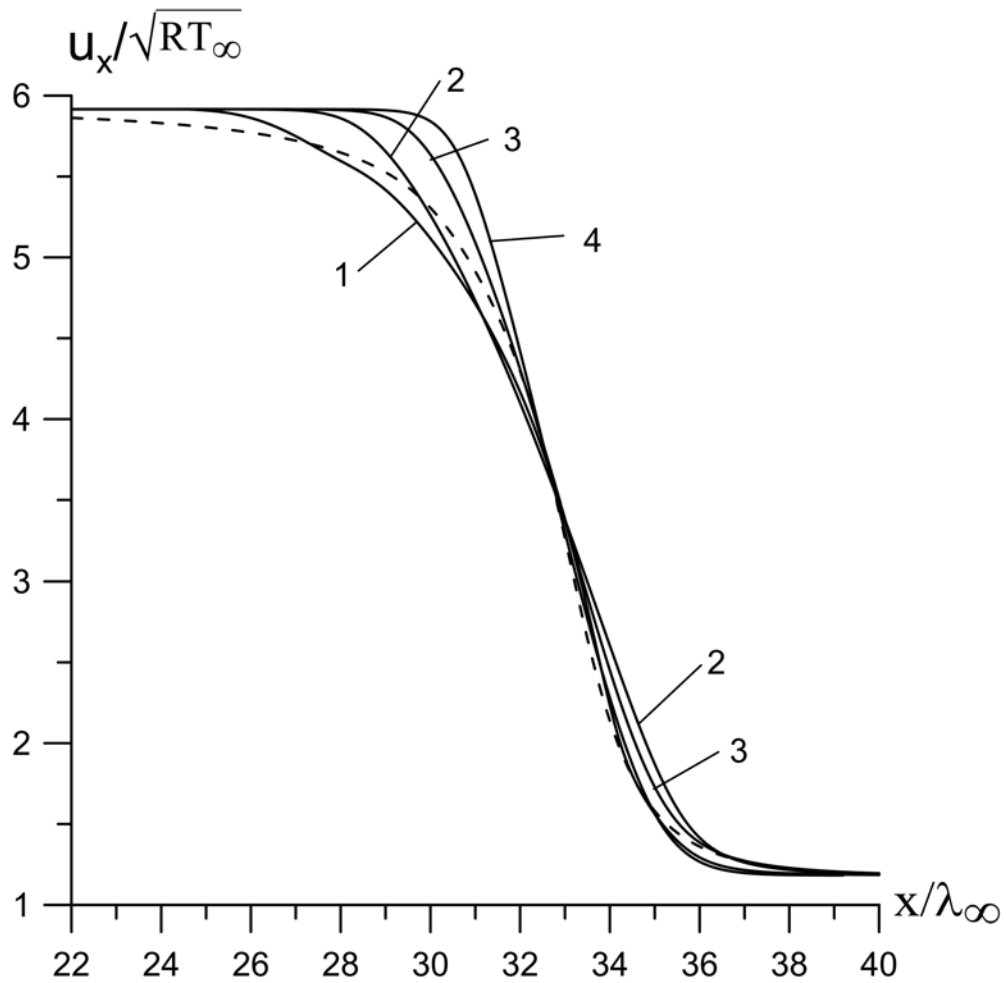


Рисунок 5.10. Профили скорости в ударной волне двухатомного газа,  $M_\infty = 5$ . Пунктирная линия – кинетическая модель; **1** – гибридная модель (5.57),  $s = 0.73$ ,  $h = h(s)$ ,  $\eta = 2$ ,  $\chi = 0.5$ ; **2** – внепорядковая двухтемпературная модель,  $s = 0.98$ ,  $h = h(s)$ ,  $\chi = 1$ ; **3** – двухтемпературная модель,  $s = 1$ ,  $h = 3.1$ ; **4** – 5-моментная модель,  $s = 0.82$ ,  $h = 7.3$ .

## ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ ВЫРОЖДЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

## 6.1. Общие замечания. Граничные условия на твердой поверхности

Расчеты вырожденных течений широко распространены в практике моделирования течений газовой среды на разных уровнях описания. Безусловным достоинством такого рода задач является возможность выделения небольшого числа факторов, определяющих условия течения. Анализ полученных результатов, как правило, приводит к вполне определенным выводам относительно свойств рассматриваемой модели.

Тестирование моделей на примере вырожденных течений и сравнение результатов с экспериментальными данными позволяют определить свободные параметры модели. Экспериментальные данные, полученные для вырожденных течений, отличаются высокой степенью достоверности.

В настоящей работе рассматриваются три вида задач, связанных с расчетом вырожденных течений: теплопередача в плоском слое неподвижного газа, плоское течение Куэтта и задача о структуре ударной волны.

В первой задаче течение не относится к числу высоконеравновесных. Расчеты показывают, что даже при отношении температур на границах расчетной области  $T_{w1}/T_{w2} = 3$  степень неравновесности  $W$ , полученная из решения модели M24, не превышает 0.03 для одноатомных газов и 0.045 для двухатомных. Модели первого приближения в случае неподвижного газа, очевидно, дают  $W = 0$ . Основным фактором, определяющим параметры газовой среды в этой задаче, являются граничные условия на твердой поверхности. Анализ некоторых видов таких граничных условий будет основной целью тестовых расчетов теплопередачи в неподвижном газе.

Течение Куэтта обладает более высокой степенью неравновесности. Модели M24, M45, M24с, M24сс при  $M=1$  и  $Kn=1$  дают степень неравновесности

$W \approx 0.35$  и  $W \approx 0.24$  для одноатомных и двухатомных газов соответственно. В течении Куэтта начинают проявляться различия между моделями, содержащими моментные уравнения и не содержащими таковых. Относительно небольшая неравновесность этих течений позволяет сделать достаточно общие выводы относительно граничных условий на твердой поверхности.

Задача о структуре плоской ударной волны, уже применявшаяся для качественной оценки некоторых свойств разрабатываемых моделей, является своего рода альтернативой двум предыдущим задачам. Число Маха, определяющее степень неравновесности течения, ограничивается, как правило, физическими соображениями. Адекватность между газодинамическим уровнем описания (в узком смысле) и реальными физическими процессами достигается при отсутствии конденсации газа перед ударной волной и отсутствии его диссоциации и ионизации за волной. Других причин, ограничивающих степень неравновесности течения, нет.

Значения основных параметров газа на границах расчетной области определяются исключительно законами сохранения. Требование равновесного состояния среды на границах расчетной области, по существу, определяет значения всех производных параметров газа, что, впрочем, является избыточным граничным условием.

Еще одна позитивная сторона этой тестовой задачи – большое количество экспериментальных данных. Перечисленные выше факторы делают задачу о структуре ударной волны основным тестом для моделей неравновесных течений, пока речь не идет о граничных условиях на твердой поверхности.

В этом разделе будут сопоставлены две модели граничных условий на твердой поверхности: феноменологическая модель Раздела 4 и традиционные для неравновесных течений условия скольжения [13; 81]. Классическая форма условий скольжения в терминах настоящей работы может быть представлена следующим образом:

$$\Delta u_i = -1.431 \frac{p_{i1}^{m[1]}}{\rho \sqrt{RT_t}} - 0.224 \frac{\varphi_i^{[1]}}{p^m}, \quad i = 2, 3; \quad (6.1)$$

$$\Delta T_t = -0.735 \frac{\varphi_1^{[1]}}{\rho R \sqrt{RT_t}}. \quad (6.2)$$

Здесь координата  $x_1$ , фигурирующая в напряжении  $p_{i1}^{m[1]}$  и тепловом потоке  $\varphi_1^{[1]}$ , рассматривается как внешняя нормаль к обтекаемой поверхности.

В уравнении (6.2) коэффициент аккомодации энергии принят равным единице. При описании процессов на реальных шероховатых поверхностях, покрытых развитым адсорбированным слоем, такое допущение в отношении коэффициента аккомодации вполне оправданно, если принимается диффузный закон отражения молекул. Подробнее этот вопрос рассмотрен в [72; 13].

Зависимости (6.1) и (6.2) получены как граничные условия, удовлетворяющие модели НСФ в одноатомном газе. Они весьма эффективны при решении краевых задач. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для вырожденных течений позволяют скорректировать постоянные множители уравнений (6.1) и (6.2) применительно к другим моделям и к течениям многоатомных газов. С этой целью будут рассмотрены граничные условия в виде:

$$\Delta u_i = -\zeta_u \frac{p_{i1}^{m[1]}}{\rho \sqrt{RT_t}} - \zeta_{uT} \frac{\varphi_i^{[1]}}{p^m}, \quad i = 2, 3; \quad (6.3)$$

$$\Delta T_t = -\zeta_T \frac{\varphi_1^{[1]}}{\rho R \sqrt{RT_t}}. \quad (6.4)$$

Здесь  $\zeta_u$ ,  $\zeta_{uT}$  и  $\zeta_T$  рассматриваются как свободные параметры модели граничных условий. Задача о теплопередаче позволяет подбирать коэффициент  $\zeta_T$  независимо от двух других коэффициентов. В течении Куэтта независимо определяется  $\zeta_u$ . Значение коэффициента  $\zeta_{uT}$  не может быть определено, в силу одномерности рассматриваемых течений. Некоторые его оценки приведены в Разделе 7.

Феноменологическую модель (4.13), (4.14), (4.32) будем применять для тестирования всех моделей, зависимости (6.3) и (6.4) – только для моделей M24, M45, M24c и релаксационной модели. Обе 5-моментные модели (первого и внепорядкового приближений), как следует из материалов подраздела 3.1, могут вносить существенную погрешность в определение поступательной температуры. Для 5-моментных моделей будут использоваться граничные условия, содержащие термодинамические переменные:

$$\Delta u_i = -\zeta_u \frac{p_{i1}^{[1]}}{\rho\sqrt{RT}} - \zeta_{uT} \frac{q_i^{[1]}}{p}, \quad i = 2, 3; \quad (6.5)$$

$$\Delta T = -\zeta_T \frac{q_1^{[1]}}{\rho R\sqrt{RT}}. \quad (6.6)$$

В отношении количества граничных условий, рассматриваемых моделей, отметим следующее. Характеристические свойства 5-моментных моделей соответствуют модели НСФ как в отношении количества характеристических направлений, так и в отношении значений тепловых скоростей. Это же относится и к релаксационной модели, т.к. подсистема релаксационных уравнений решается на траектории и не вносит изменения в характеристические свойства основной системы.

Кратность корня, соответствующего траектории (для одномерного случая:  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ), у двухтемпературной модели на единицу больше, чем у 5-моментной модели, а тепловая скорость представляет собой скорость звука в одноатомном газе, т.е.  $\sqrt{5/3 RT_t}$ . Увеличение размерности задачи приводит только к увеличению кратности траектории. Таким образом, формулировка граничных условий двухтемпературной модели не имеет существенных отличий от соответствующей формулировки модели НСФ.

Характеристическое уравнение модели M24 в одномерном течении представляет собой уравнение шестой степени, коэффициенты которого содержат неравновесную величину  $\varphi_{iii}$ . Даже если не принимать во внимание сложность

решения этого уравнения, можно предположить, что тип его корней будет существенно зависеть от значений неравновесной величины.

В сильно неравновесных течениях порядок величины момента  $\varphi_{iii}$  соответствует порядку основных газодинамических величин  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$ , но в отличие от них,  $\varphi_{iii}$  может менять знак. Последнее обстоятельство приводит к тому, что выделение вещественных корней характеристического уравнения представляется весьма сложной задачей. Полученные уравнения характеристик будут определены только в узких областях поля течения.

Если, следуя Грэду [15], пренебречь неравновесной величиной, то будут получены семейства характеристик, соответствующих трем тепловым скоростям:

$\sqrt{RT_{ii}}$ ,  $\sqrt{\frac{3}{2}\left(2 \pm \sqrt{\frac{8}{3}}\right)RT_{ii}}$ . В одноатомных газах характеристическое направление

$u_i \pm \sqrt{RT_{ii}}$  является однократным корнем, в многоатомных газах – двукратным.

Можно допустить, что модели M24 и родственным ей моделям в одномерных течениях достаточно трех граничных условий. При решении двухмерной задачи с помощью гибридной модели в Разделе 7 будут введены дополнительные граничные условия.

Для численного решения тестовых задач применялись различные методы решения, в частности явная схема Мак-Кормака и метод прогонки ленточной матрицы с нестационарным членом [61]. Результаты расчетов с использованием различных методов практически совпадали. Ввиду того что сами тестовые задачи и методы их численного решения широко известны, мы не приводим систем уравнений рассмотренных моделей, преобразованных для численного решения этих задач.

## 6.2. Теплопередача в плоском слое неподвижного газа

Схема задачи показана на Рисунке 6.1. Газовая среда заключена между параллельными бесконечными поверхностями, имеющими температуры  $T_{w1}$  и

$T_{w2}$ . Будем считать верхнюю поверхность “холодной”, т.е.  $T_{w1} > T_{w2}$ . Характерной особенностью этой задачи является отсутствие градиентов скорости и связанных с ними диссипативных тепловых потоков.

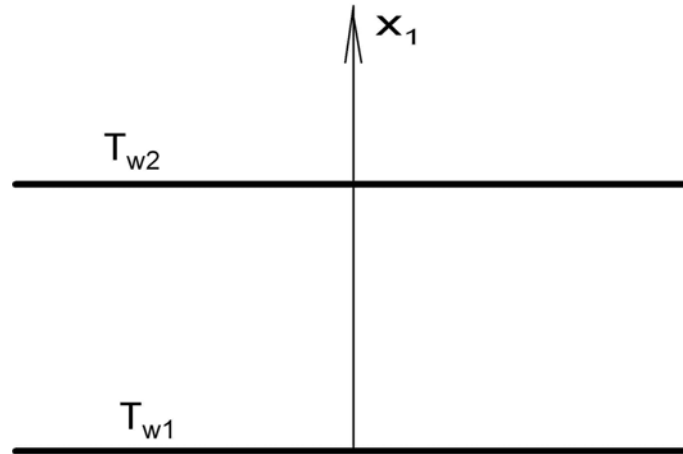


Рисунок 6.1. Схема задачи о теплопередаче в плоском слое неподвижного газа

Рассматривалась зависимость отношения теплового потока  $q_1 \equiv q$  к его свободномолекулярному пределу  $q_m$  от числа Кнудсена:

$$q_m = \frac{\gamma + 1}{4(\gamma - 1)} \sqrt{\frac{2R}{\pi}} R \rho_{w2} \sqrt{T_{w2}} (T_{w1} - T_{w2}); \quad (6.7)$$

$$\text{Kn} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_{w2}}{\rho_{w2} \sqrt{RT_{w2}}} \frac{1}{L}. \quad (6.8)$$

Здесь  $\mu_{w2}$ ,  $\rho_{w2}$  – коэффициент вязкости и плотность газа у “холодной” поверхности;  $L$  – толщина слоя.

Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными [94; 95]. Отношение температур составляло:  $T_{w1}/T_{w2} = 1.013$  для аргона и  $T_{w1}/T_{w2} = 1.2$  для воздуха. Степень неравновесности среды при таких значениях температур незначительна. При  $\text{Kn} = 1$  модель M24 дает значения  $W < 10^{-3}$ . В течениях столь низкой неравновесности двухтемпературная, внепорядковая и релаксационная



модели вырождаются в модель первого приближения (для этой модели  $W = 0$ ). Модели M45, M24с, M24сс и гибридная модель переходят в модель M24.

Отношения тепловых потоков практически совпадали для всех моделей и зависели только от граничных условий. Результаты для аргона и воздуха также практически совпали. Кроме этого, получаемые решения слабо зависели от параметра  $s$  в коэффициенте вязкости и от параметра  $\beta$  феноменологической модели (4.32).

Зависимость отношения тепловых потоков от числа Кнудсена показана на Рисунке 6.2. Для сравнения приведены расчеты модели НСФ с граничными условиями прилипания ( $\Delta u_i = 0, \Delta T = 0$ ). Из рисунка видно, что при  $\text{Kn} > 10^{-2}$  кривая 1, соответствующая условиям прилипания, существенно отклоняется от области экспериментальных точек.

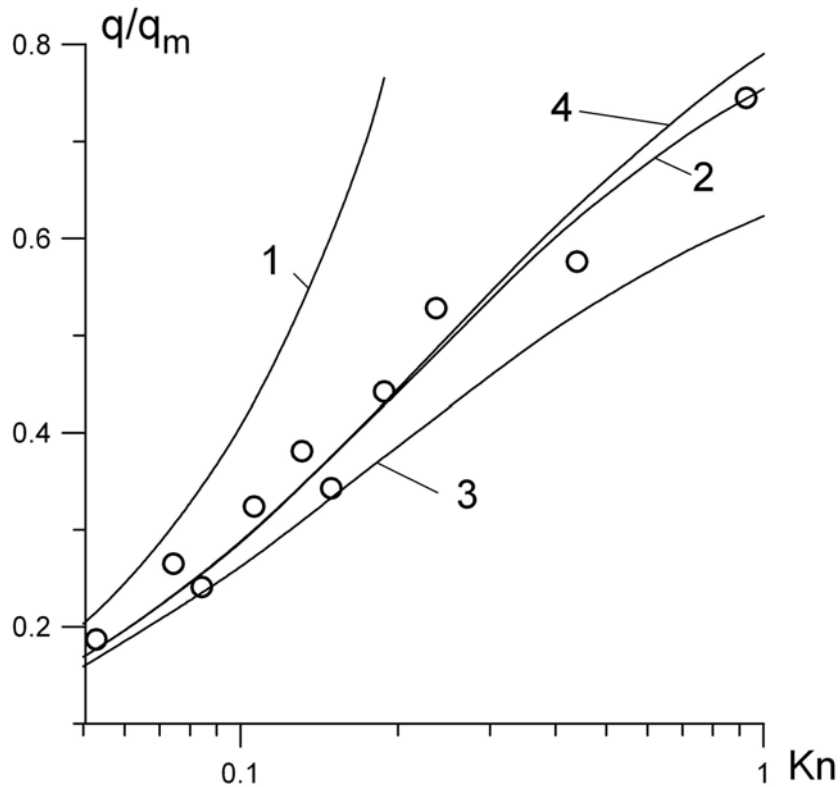


Рисунок 6.2. Тепловой поток в плоском слое газа. Газ – воздух,  $T_{w1}/T_{w2} = 1.2$ . О – экспериментальные данные [94; 95]. 1 – модель НСФ с граничными условиями прилипания; 2, 3, 4 – M24, релаксационная, 5-моментная и двухтемпературная модели; 2 – феноменологические граничные условия (4.13), (4.14); 3 – граничные условия (6.2); 4 – граничные условия (6.4), (6.6),  $\zeta_T = 0.55$ .

Граничные условия скольжения (6.2) дают заниженные результаты при числах Кнудсена, близких к единице (кривая 3). Уменьшение коэффициента  $\zeta_T$  от 0.735 до 0.55 позволяет улучшить результаты вычислений (кривая 4).

Наилучшую согласованность с экспериментальными данными дает феноменологическая модель граничных условий. Кривая 2 построена по результатам расчета модели M24 при  $s = 1$  и  $\beta = 5$ .

Ниже будет показано, что полученная оценка параметров  $\zeta_T$  и  $\beta$  распространяется и на более неравновесные течения.

### 6.3. Плоское течение Куэтта

Схема течения показана на Рисунке 6.3. Система координат связана с центральной областью течения. Бесконечные параллельные поверхности, имеющие одинаковую температуру  $T_w$ , движутся в противоположных направлениях со скоростью  $u_w$ .

Рассматривается отношение коэффициента трения  $c_f$  к его свободномолекулярному пределу  $c_{fm}$  в зависимости от числа Кнудсена при заданном числе Маха:

$$\frac{c_f}{c_{fm}} = 2 \frac{|P_{12}|}{\rho(2u_w)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2u_w}{\sqrt{RT_w}}; \quad (6.9)$$

$$\text{Kn} = \frac{\mu_w}{\rho \sqrt{RT_w}} \frac{1}{L}; \quad (6.10)$$

$$\text{M} = \frac{2u_w}{\sqrt{\gamma RT_w}}. \quad (6.11)$$

Здесь  $\rho$  – средняя по толщине зазора плотность газа,  $L$  – расстояние между пластинами.

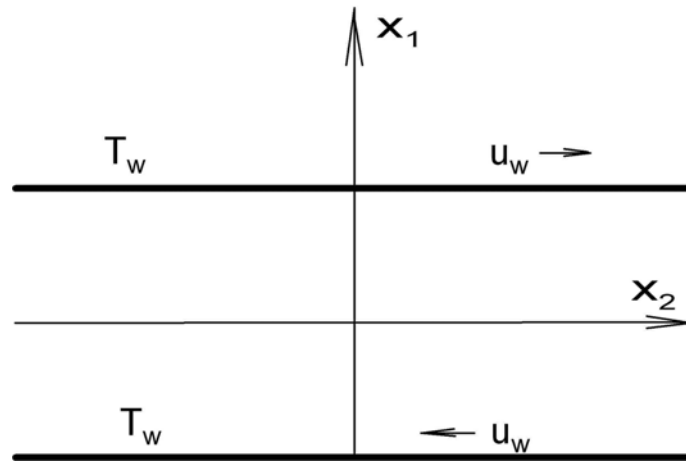


Рисунок 6.3. Схема плоского течения Куэтта

При решении этой задачи с ограничением  $M < 2$  модель M24 и базирующиеся на ней родственные модели M45, M24с, M24сс, а также гибридная модель дают близкие результаты. На этом основании, ниже будут анализироваться расчетные данные только модели M24.

На Рисунке 6.4 точками обозначены экспериментальные данные Культо и Чанга для воздуха при  $M = 1.4$  [95]. Из приведенных данных следует, что в сильнонеравновесных течениях ( $Kn = 1$ ,  $M = 1.4$ ,  $\gamma = 7/5$ ,  $W \approx 0.3$ ) условия прилипания дают существенно завышенные результаты. При  $Kn < 0.1$  феноменологические граничные условия (4.13), (4.14) и условия скольжения обеспечивают практически одинаковый и вполне удовлетворительный коэффициент трения.

При  $Kn > 0.1$  все модели с граничными условиями (6.1), (6.2) занижают результат (кривая **3**, модель M24). Граничные условия скольжения при  $\zeta_u = 1.21$  и  $Kn < 10$  обеспечивают удовлетворительные значения коэффициента трения (кривая **4** – модель M24, кривая **5** – 5-моментная модель). При бóльших значениях числа Кнудсена эти граничные условия дают коэффициент трения, превышающий свободномолекулярный предел.

Здесь необходимо учитывать и тот факт, что модели первого приближения теоретически обоснованы только при  $Kn \ll 1$ . Удовлетворительные значения

коэффициента трения, даваемые 5-моментной моделью, даже при  $Kn \approx 1$ , в значительной степени обусловлены спецификой решаемой задачи. К таким специфическим свойствам задачи относится слабая зависимость коэффициента трения от значений нормального неравновесного напряжения.

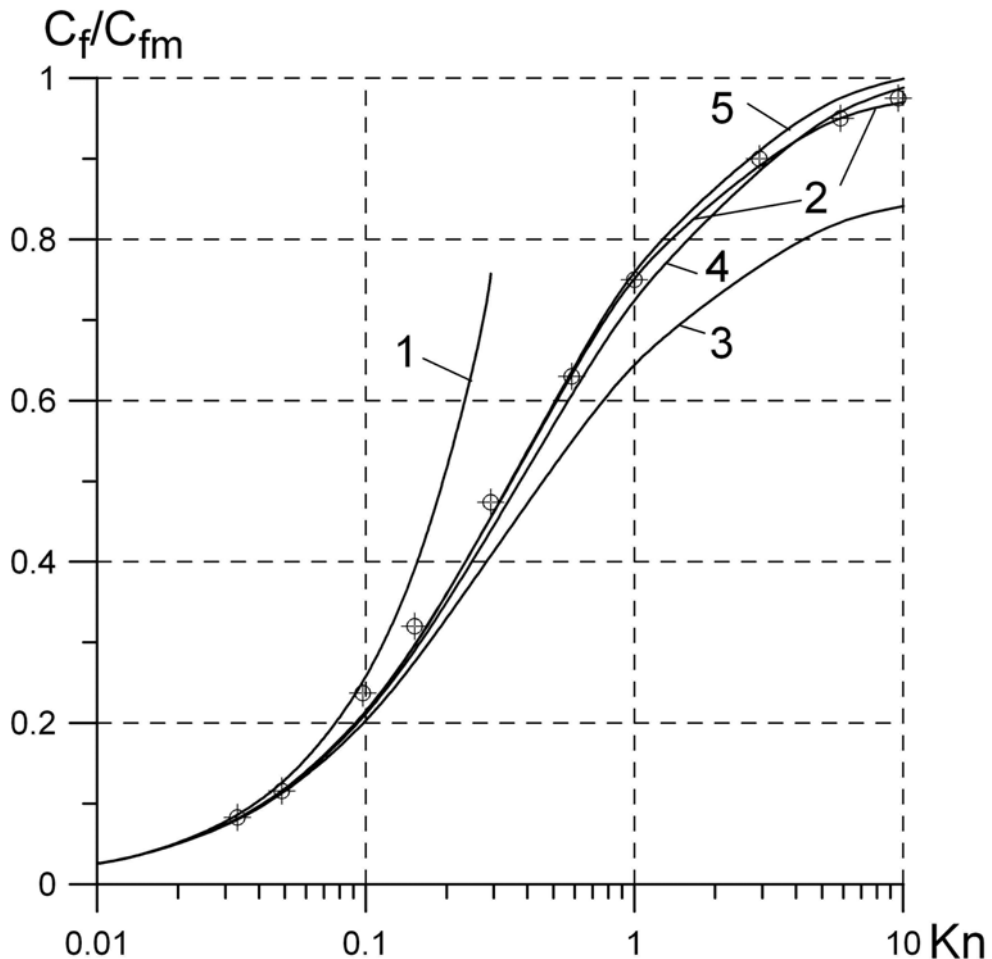


Рисунок 6.4. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена в плоском течении Куэтта. Газ – воздух.  $M = 1.4$ .  $\circ$  – экспериментальные данные [95; 96]; **1** – модель НСФ с граничными условиями прилипания; **2, 3, 4** – модель М24; **2** – феноменологические граничные условия; **3** – граничные условия (6.1), (6.2); **4** – граничные условия (6.3), (6.4),  $\zeta_u = 1.21$ ,  $\zeta_T = 0.55$ ; **5** – 5-моментная модель, граничные условия (6.5), (6.6),  $\zeta_u = 1.21$ ,  $\zeta_T = 0.55$ .

Следует отметить, что граница физической адекватности условий скольжения зависит от числа Маха, и при  $M \approx 4$  превышение свободномолекулярного предела наблюдается уже при  $Kn \approx 1$ . У феноменологических граничных условий такого недостатка нет. Соответствующая этим граничным условиям кривая **2** построена для модели M24.

Применительно к течению Куэтта при  $Kn \rightarrow \infty$  феноменологические граничные условия соответствуют точной свободномолекулярной функции распределения. Уточним, что это относится только к модели граничных условий. Рассматриваемые модели течения таким свойством не обладают.

На Рисунке 6.5 все кривые соответствуют феноменологическим граничным условиям. Наилучшие результаты получены для 24-моментной модели при  $\beta = 5$  (4.32). Обращает на себя внимание тот факт, что наибольшее расхождение между кривыми имеет место в области  $Kn \approx 1$ . Именно в этой области чисел Кнудсена функция распределения падающих молекул меняет эллипсоидальную форму на сферическую.

Аналогичные результаты получены при расчетах течений одноатомных газов. На Рисунке 6.6 представлено сравнение опытных данных Талбота и Бауэра (см. [95]) с результатами расчетов течения одноатомного газа при  $M = 0.88$ .

Проведенные тесты показали, что феноменологические граничные условия (4.13), (4.14), учитывающие изменение вида функции распределения падающих молекул при  $Kn \approx 1$ , вполне адекватны при  $Kn = 10$ . Граничные условия скольжения (6.3), (4.4) или (6.5), (6.6) при  $\zeta_u = 1.21$  и  $\zeta_T = 0.55$  обеспечивают удовлетворительные значения коэффициента трения в переходной области течения ( $Kn \approx 1$ ). При больших значениях числа Кнудсена коэффициент трения, даваемый этой моделью граничных условий, может оказаться физически неадекватным.

Расчеты, проведенные с использованием моделей M24, M24с и M24сс, позволяют сделать вывод о том, что при решении одномерных задач 24-моментной системе уравнений достаточно трех граничных условий.

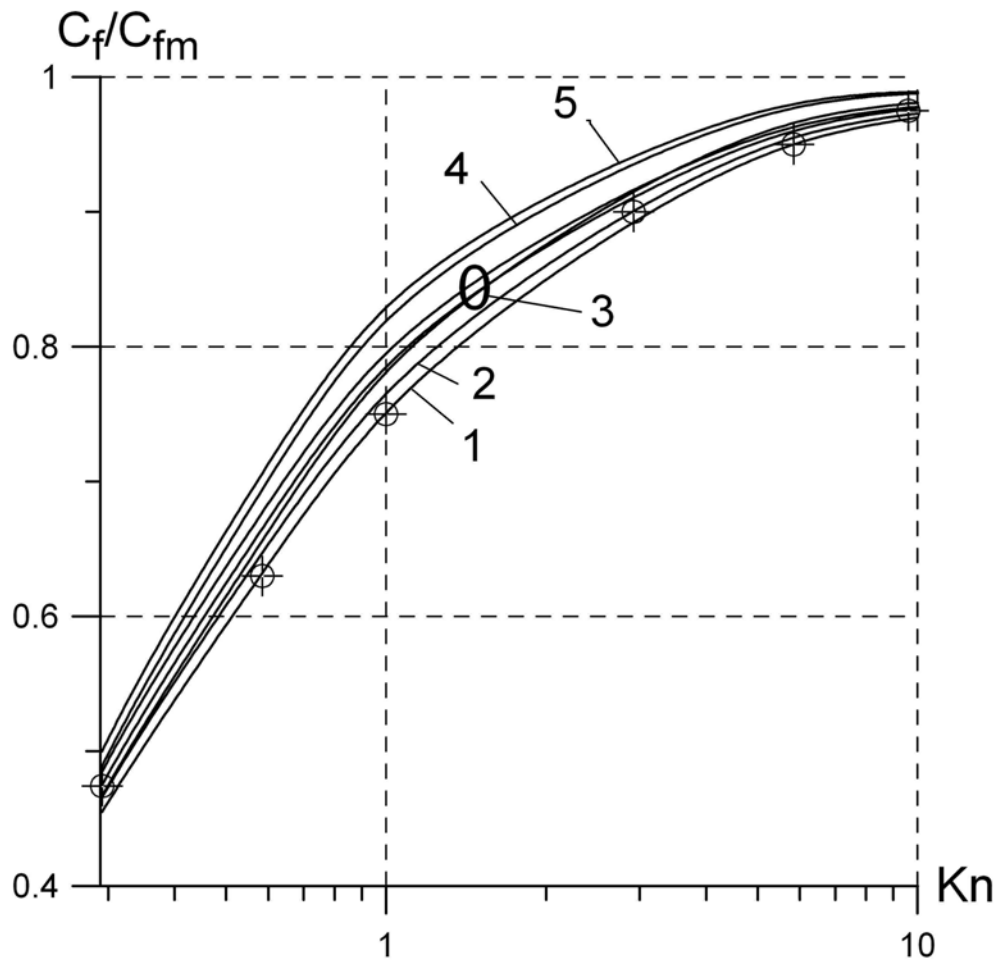


Рисунок 6.5. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена в плоском течении Куэтта. Газ – воздух.  $M = 1.4$ .  $\circ$  – экспериментальные данные [95; 96]. Феноменологическая модель граничных условий. **1, 2** – модель M24  $\beta = 5$ ; **1** –  $s = 0.7$ ; **2** –  $s = 1$ ; **3** – модель M24 ( $s = 0.7 \dots 1$ ,  $\beta = 1$ ), релаксационная, двухтемпературная и 5-моментная модели ( $s = 0.7 \dots 1$ ,  $\beta = 5$ ); **4, 5** – релаксационная двухтемпературная и 5-моментная модели ( $\beta = 1$ ); **4** –  $s = 0.7$ ; **5** –  $s = 1$

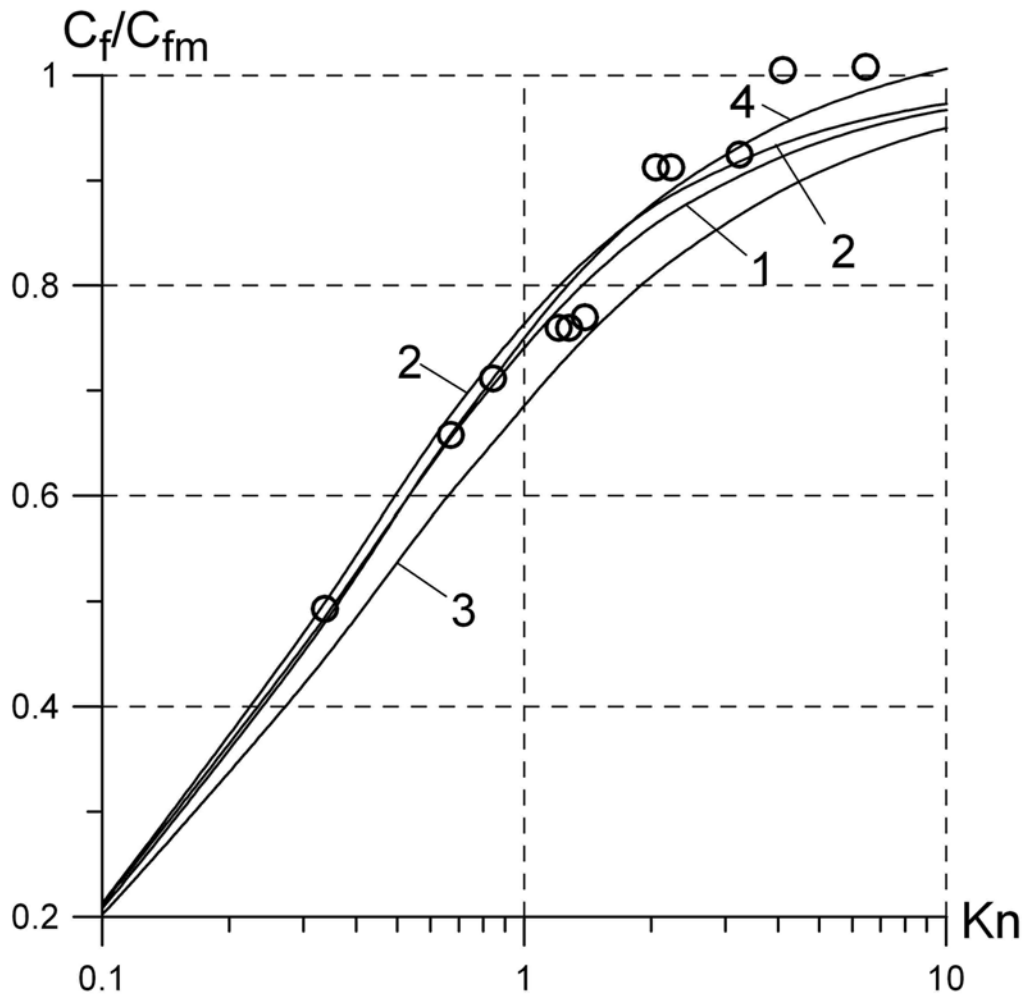


Рисунок 6.6. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена в плоском течении Куэтта. Газ – криптон.  $M = 0.88$ .  $\circ$  – экспериментальные данные [95]. **1** – модель M24 и релаксационная модель,  $s = 1$ ,  $\beta = 5$ , феноменологические граничные условия; **2, 3, 4** – 5-моментная модель; **2** – феноменологические граничные условия,  $s = 1$ ,  $\beta = 5$ ; **3** – граничные условия (6.1), (6.2); **4** – граничные условия (6.5), (6.6),  $\zeta_u = 1.21$ ,  $\zeta_T = 0.55$

#### 6.4. Задача о структуре ударной волны

Задача формулируется следующим образом. На границах расчетной области выставляются условия Ренкина–Гюгонио. В силу того, что указанные граничные условия предполагают равновесное состояние газа перед и за ударной волной,

значения неравновесных величин становятся также определенными, т.е. равными нулю. При таких граничных условиях решаемая задача представляет собой первую начально-краевую задачу, методы которой хорошо разработаны. Наиболее эффективным методом ее численного решения, по-видимому, является метод прогонки ленточной матрицы.

Размер расчетной области составляет несколько десятков длин свободного пробега молекулы в невозмущенном потоке:  $\lambda_\infty = \frac{\mu_\infty}{p_\infty} \sqrt{RT_\infty}$  и подбирается опытным путем в зависимости от числа Маха.

Анализ результатов расчета проводился по так называемой обратной ширине профиля плотности. Этот параметр вычисляют следующим образом. Значения плотности приводятся к единичному отрезку:

$$\rho^* = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (6.12)$$

Здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – значения плотности перед и за ударной волной.

Затем в точке максимального наклона профиля  $\rho^*$  проводится касательная, см. Рисунок 6.7. Отрезок  $\delta$ , отсекаемый касательной, принимается в качестве ширины профиля. Обратная ширина профиля вычисляется как  $\lambda_\infty/\delta$ . Этот параметр, очевидно, характеризует не ширину профиля в обычном понимании, а его максимальный наклон.

Задача о структуре ударной волны будет решаться в широком интервале чисел Маха. В связи с этим не будут тестироваться модели M24 и M45, профили которых при  $M_\infty > 2$  содержат физически неадекватный субскачок, существенно влияющий на определение обратной ширины профиля. Модели M24с и M24сс также не будут тестироваться, поскольку они могут быть заменены моделью того же уровня информативности и сложности – гибридной моделью. Последняя, в отличие от указанных моделей, позволят рассчитывать гладкие профили в гиперзвуковой области. Релаксационная модель, не имеющая аналогов среди



разработанных моделей, будет тестироваться в ограниченном по числам Маха интервале.

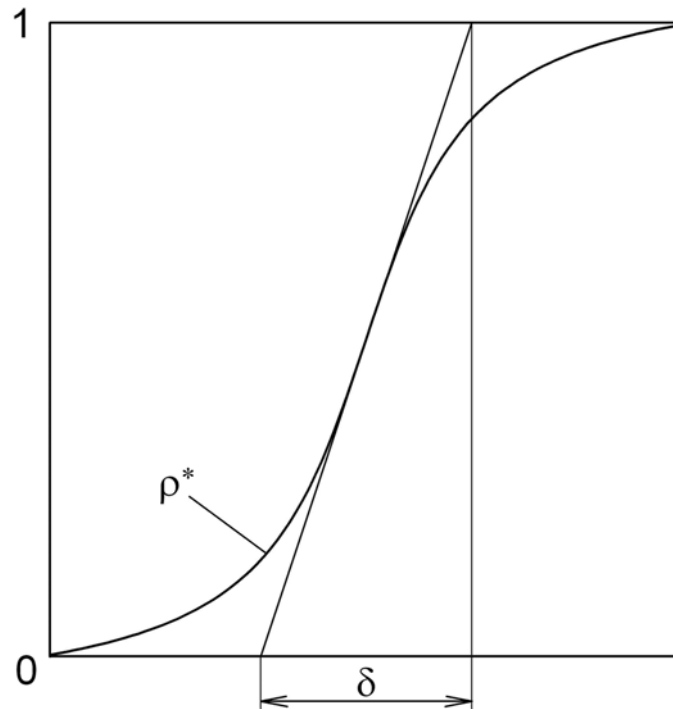


Рисунок 6.7. К вычислению обратной ширины профиля плотности  $\lambda_\infty/\delta$ .

В настоящем тесте рассмотрена внепорядковая модель (5.20). Множитель  $\chi$  в тензорном коэффициенте вязкости (5.14) подобран опытным путем и составляет  $\chi = 2.3$ .

На Рисунке 6.8 приведены экспериментальные и расчетные данные обратной ширины профиля плотности в ударной волне аргона. Кривая 1 соответствует 5-моментной модели, совпадающей в данном случае с моделью НСФ. В сверхзвуковой области чисел Маха даже при  $s = 1$  профиль слишком крутой, в гиперзвуковой области – слишком пологий.

Удовлетворительный наклон профиля дает релаксационная модель (кривая 2). Эта кривая построена для  $M_\infty \leq 5$ . При бóльших числах Маха характерная для данной модели волнообразность профиля в невозмущенной области потока

становится настолько большой, что возникает вопрос о физической адекватности такого решения.

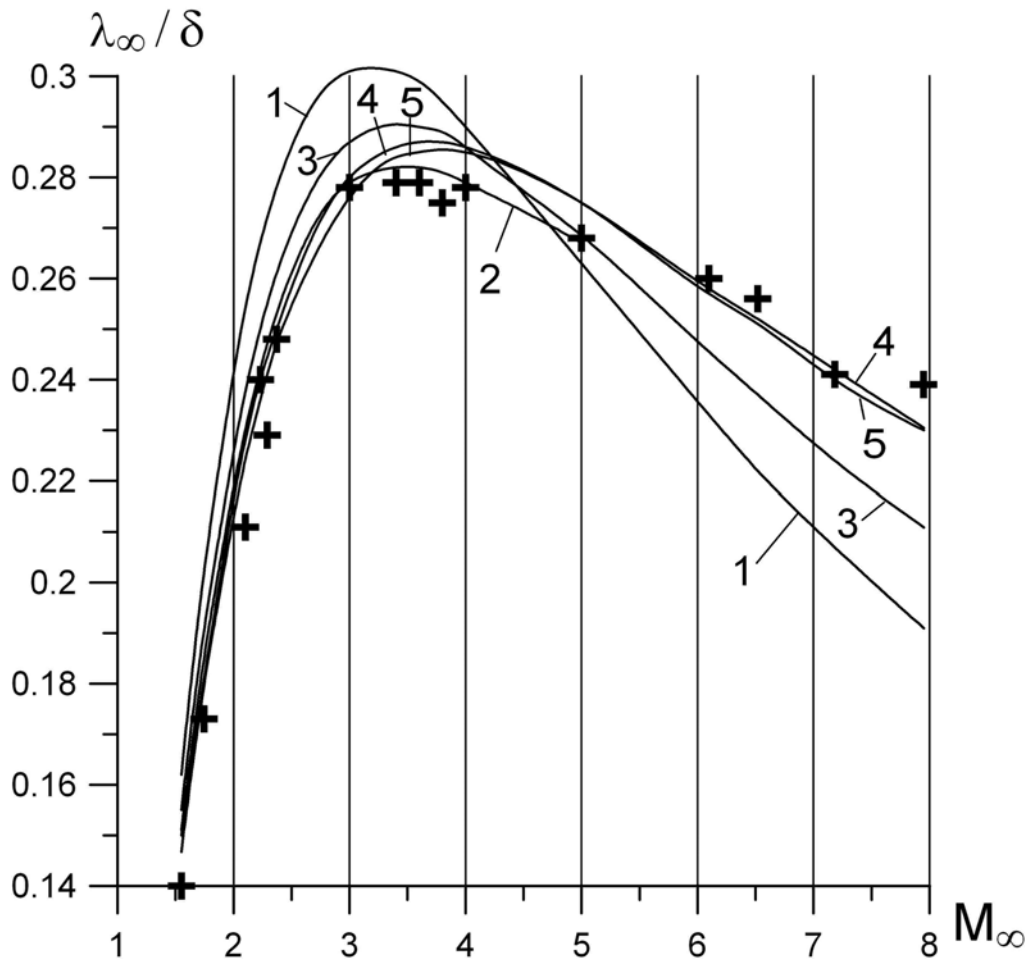


Рисунок 6.8. Обратная ширина ударной волны в аргоне. Знак + - экспериментальные данные [91; 92; 97]; **1** - модель первого приближения (НСФ)  $s=1$ ; **2** - релаксационная модель  $M_\infty \leq 5$ ,  $s=0.9$ ; **3** - внепорядковая модель,  $s=0.9$ ,  $\chi=1$ ; **4** - внепорядковая модель,  $s=0.82$ ,  $\chi=2.3$ ; **5** - гибридная модель  $s=0.8$ .

Внепорядковая модель (кривая **3**) улучшает модель первого приближения, хотя в значительной мере наследует ее недостатки. Множитель  $\chi=2.3$  перед внепорядковым членом, позволяет получить наклон профиля, удовлетворительно согласующийся с экспериментальными данными (кривая **4**). Из рисунка видно,

что кривая **4** мало отличается от кривой **5**, построенной по гибридной модели. Среди рассмотренных моделей гибридная модель является наиболее информативной, вместе с тем ее численная реализация существенно проще и экономичнее, чем у релаксационной модели.

В неравновесных, и прежде всего в гиперзвуковых, течениях принципиально важную роль играет не столько наклон профиля, сколько ширина возмущенной области, занимаемой профилем. Во многих задачах гиперзвукового обтекания тел размер возмущенной области определяет характер течения. Одна из таких задач будет рассмотрена в Разделе 7.

На Рисунке 6.9 показан профиль плотности в ударной волне аргона при  $M_\infty = 7.183$ . Экспериментальные данные [91] изображены пунктирной линией.

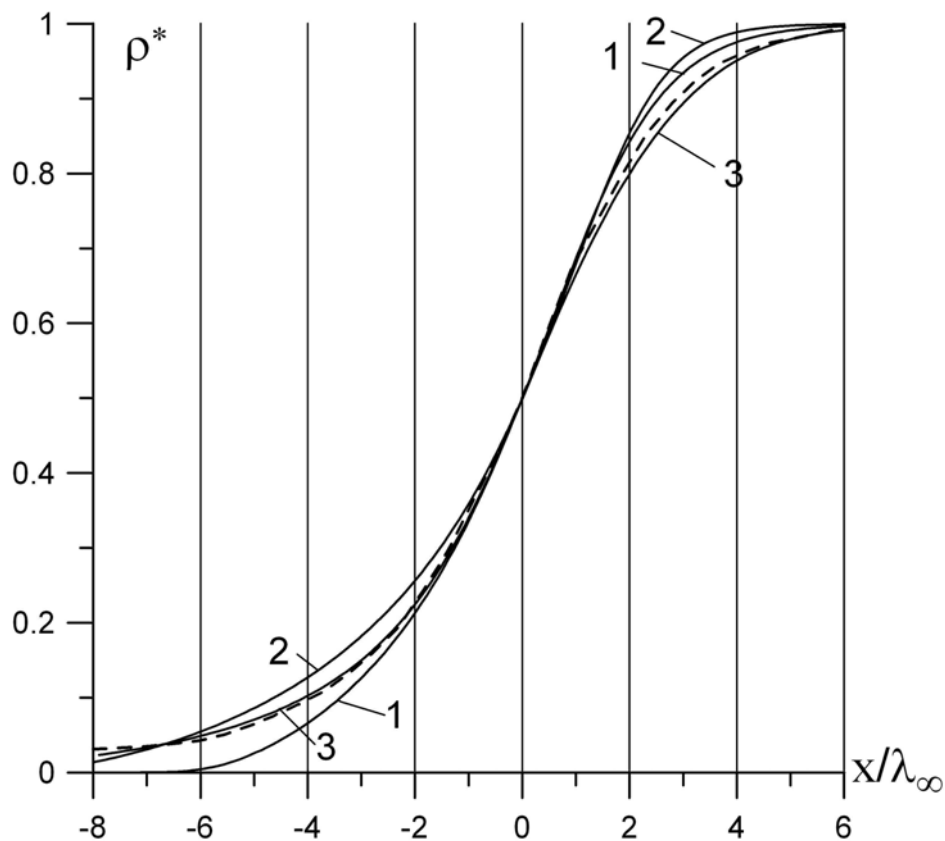


Рисунок 6.9. Профиль плотности в плоской ударной волне аргона.  $M_\infty = 7.183$ . Пунктирная линия – экспериментальные данные [91]; **1** – 5-моментная модель (НСФ),  $s = 0.945$ ; **2** – внепорядковая модель  $s = 0.81$ ,  $\chi = 2.3$ ; **3** – гибридная модель

Профиль, рассчитанный по 5-моментной модели, наиболее узкий (кривая 1). Его ширину (в обычном понимании) можно оценить десятью длинами пробега. Расчеты по 5-моментной модели проводились с параметром  $s = 0.945$  для совпадения наклона расчетного профиля с экспериментальным. В связи с этим кривая 1 Рисунка 6.9 не соответствует кривой 1 Рисунка 6.8.

Возмущения, рассчитанные внепорядковой моделью, дальше проникают в невозмущенный поток, но и быстрее затухают за фронтом ударной волны (кривая 2). Ширина профиля –  $13 \div 14$  длин пробега. На Рисунке 6.9 не показана периферийная область профиля [91], распространяющаяся вверх по потоку до значений  $\approx -14 \lambda_{\infty}$ .

Наилучшее соответствие с экспериментальными данными дает гибридная модель (кривая 3). Ширина ее профиля оценивается в  $18 - 19$  длин пробега. Ширина экспериментального профиля составляет не менее двадцати длин пробега.

При расчете ударных волн в многоатомных газах проявляется различие 5-моментной модели и модели НСФ. В остальном результаты тестирования аналогичны полученным выше.

На Рисунке 6.10 расчетные значения обратной ширины профиля плотности в азоте сопоставлены с экспериментальными данными [92; 98]. Кривая 1, соответствующая модели НСФ при  $s = 1$  и  $h = 0$ , проходит далеко от области экспериментальных точек. Кривая 2 соответствует 5-моментной модели, в которой параметр  $h$  рассчитывался по зависимости (1.78). В пояснениях к рисунку эта зависимость условно обозначена  $h = h(s)$ . Для некоторых практических задач наклон профиля, даваемый 5-моментной моделью, можно считать приемлемым.

Если рассматривать  $h$  как свободный параметр модели, то при  $s = 0.82$  и  $h = 7.3$  5-моментная модель (кривая 3) дает наклон профиля, не сильно заниженный в сверхзвуковой области и вполне удовлетворительный – в гиперзвуковой.

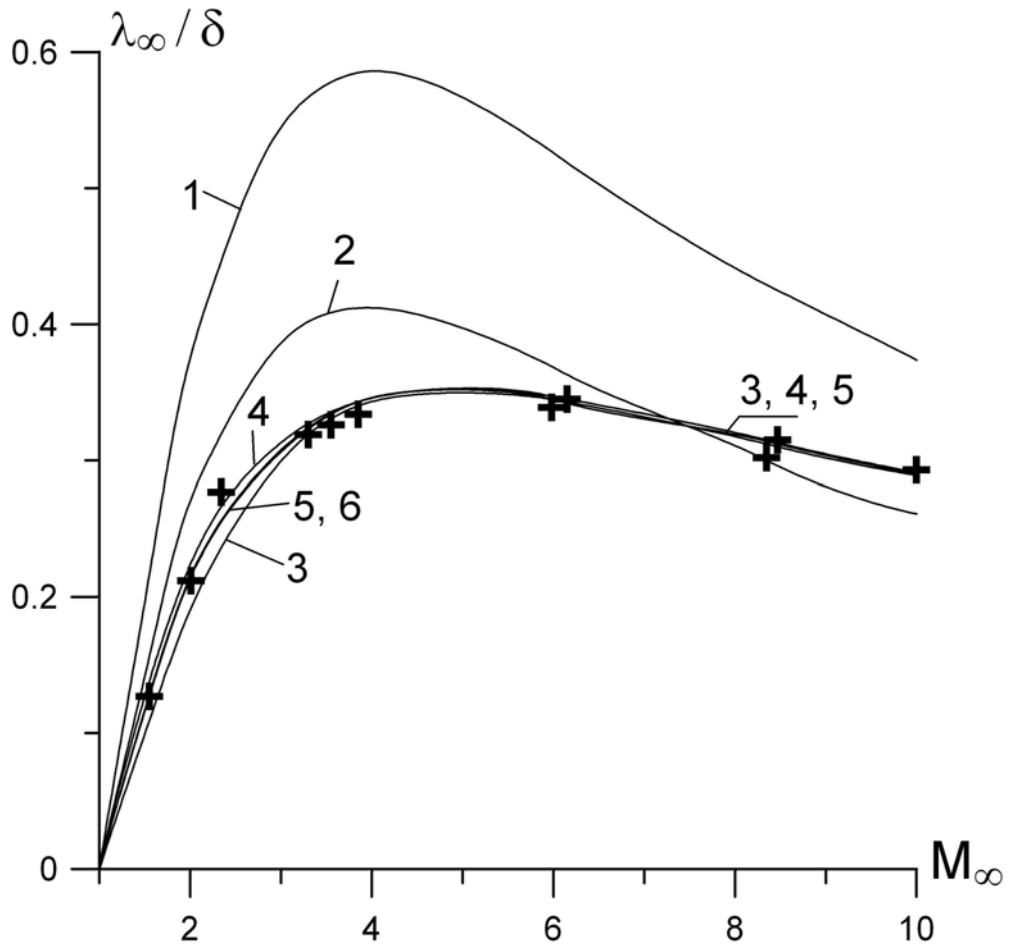


Рисунок 6.10. Обратная ширина ударной волны в азоте. Знак + – экспериментальные данные [92; 98]; **1** – НСФ  $s=1$ ; **2** – 5-моментная модель  $s=1$ ,  $h=h(s)$ ; **3** – 5-моментная модель  $s=0.82$ ,  $h=7.3$ ; **4** – двухтемпературная внепорядковая модель  $s=0.81$ ,  $h=h(s)$ , ;  $\chi=2.3$  **5** – гибридная модель  $s=0.8$ ,  $h=h(s)$ ; **6** – релаксационная модель  $M_\infty < 6$ ,  $s=0.83$ ,  $h=h(s)$

Обращает на себя внимание двухтемпературная внепорядковая модель (5.20). Результаты расчета этой модели при  $s=0.81$ ,  $h=h(s)$  и  $\chi=2.3$  представлены кривой **4**. Наклон профиля хорошо согласуется с экспериментальными данными и гибридной моделью (кривая **5**) как для аргона, так и для азота при одних и тех же значениях параметров  $s$  и  $\chi$ .

Расчеты по релаксационной модели (кривая **6**) проводились при  $M_\infty < 6$  по указанным выше причинам (см. пояснения к Рисунку 6.8). Наклон профиля

плотности хорошо согласуется с экспериментальными данными и почти совпадает со значениями, даваемыми гибридной моделью.

Профиль плотности при  $M_\infty = 10$  представлен на Рисунке 6.11. Экспериментальный профиль взят из работы [92]. Наиболее крутой профиль (кривая **1**) и наименьшая область возмущения соответствуют модели НСФ при  $s = 1$  и  $h = 0$ . Наклон этого профиля больше наклона остальных профилей, так как для его уменьшения потребовались бы значения  $s > 1$ .

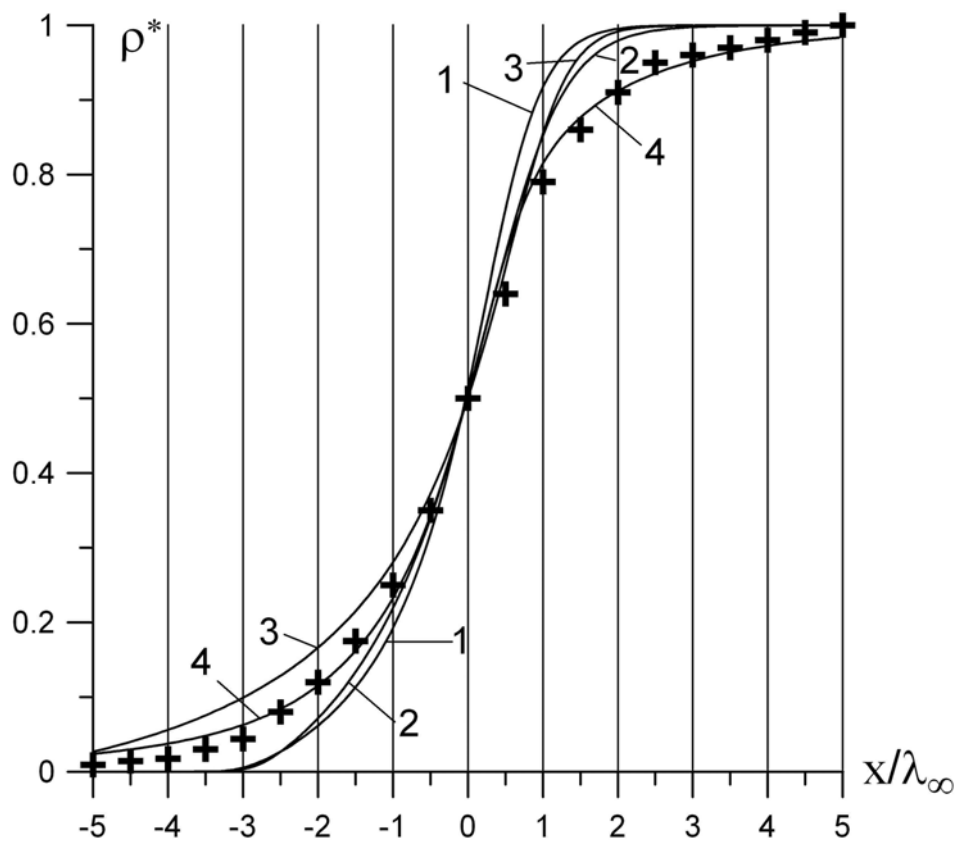


Рисунок 6.11. Профиль плотности в плоской ударной волне азота.  $M_\infty = 10$ . Знак + – экспериментальные данные [92]; **1** – НСФ  $s = 1$ ; **2** – 5-моментная модель  $s = 0.82$ ,  $h = 7.3$ ; **3** – внепорядковая модель (5.20),  $s = 0.81$ ,  $h = h(s)$ ,  $\chi = 2.3$ ; **4** – гибридная модель  $s = 0.8$ ,  $h = h(s)$ .

Модель первого приближения (5-моментная) со свободными параметрами модели  $s = 0.82$  и  $h = 7.3$  (кривая **2**) дает более широкую область возмущений (за счет верхней части профиля) и “правильный” наклон.

Внепорядковая модель (кривая **3**), как и в случае одноатомного газа, позволяет расширить область возмущения вверх по потоку. Это свойство внепорядковых моделей (5-моментной и двухтемпературной) обсуждалось в подразделе 5.2.

Наиболее широкая область возмущения и лучшее соответствие формы профиля экспериментальным данным имеет место для гибридной модели (кривая **4**). Это свойство гибридной модели, очевидно, наследует у модели M24сс.

Тесты позволяют сделать следующие выводы в отношении применения рассмотренных моделей к расчету ударных волн:

1. При соответствующем выборе параметра  $s$  5-моментная модель позволяет получать приемлемый наклон профилей либо в сверхзвуковой, либо в гиперзвуковой области течения. В случае течения многоатомного газа параметр  $h$ , рассматриваемый как свободный параметр модели, улучшает свойства модели, расширяя интервал чисел Маха.

2. Внепорядковые модели (5-моментная и двухтемпературная), оцениваемые по наклону и ширине профиля, имеют существенные преимущества по сравнению с 5-моментной моделью при незначительном увеличении трудоемкости численной реализации. Форма профиля плохо согласуется с экспериментальными данными.

3. Релаксационная модель позволяет рассчитывать наклон профиля ударной волны с удовлетворительной точностью в сверхзвуковой области течений. Однако даже в этой области течений верхняя по потоку часть профиля имеет не характерную для реальных профилей форму (см. Рисунок 3.8 и Рисунок 3.9).

4. Наилучшие результаты по наклону и по форме профиля получены для гибридной модели. Эта модель значительно уступает в экономичности (в смысле количества вычислительных операций) внепорядковой модели. Программный код гибридной модели существенно сложнее.

## ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НУЛЕВОМ УГЛЕ АТАКИ

### 7.1. Общие замечания

Задача об обтекании острой кромки гиперзвуковым потоком представляет как практический, так и теоретический интерес. Отдельные элементы летательных аппаратов, например кромки воздухозаборных устройств прямооточных реактивных двигателей, в силу своих конструктивных особенностей имеют настолько малый радиус скругления, что в расчетах рассматриваются как “острые” кромки. На этих участках имеют место высокий аэродинамический разогрев поверхностей и аномально большие напряжения. Достоверные данные о параметрах газа и температуре поверхности на этих участках принципиально важны при разработке и проектировании летательных аппаратов.

Области острых кромок являются областями формирования косых скачков уплотнения и головных ударных волн. Погрешности в определении параметров газа в этих областях могут привести к качественно неверному описанию интерференции ударных волн, системы косых скачков в каналах и т.п..

В результате движения газа с высокими скоростями вблизи поверхностей большой кривизны образуются области сильнонеравновесного течения. Методы механики сплошной среды в этих областях теоретически не обоснованы. Расчетные данные, полученные с помощью этих методов, не отличаются высокой достоверностью и, как правило, требуют всесторонней экспериментальной проверки.

Определение самого термина “острая кромка” в терминах критериев подобия течения и в контексте применимости методов механики сплошной среды представляет собой самостоятельную и весьма сложную задачу.



Практика расчетов гиперзвуковых обтеканий острых кромок сталкивается с проблемой определения масштаба расчетных сеток. Хорошо разработанные методы построения адаптивных сеток по градиентам параметров газа в слабонеровновесных течениях приводят в условиях высокой неравновесности к столь подробным сеткам, что их численная реализация теряет практический интерес.

Причина этого напрямую связана с сильно завышенными градиентами, даваемыми, например, моделью НСФ. Характерно, что даже на хорошо адаптированных и подробных сетках, интерпретирующих кромку как криволинейную поверхность, решения модели НСФ зачастую физически не адекватны.

В настоящем разделе проведена оценка применимости модели первого приближения, а также внепорядковой и гибридной моделей к описанию гиперзвукового обтекания острой кромки. Рассматривается обтекание бесконечно тонкой пластины, установленной под нулевым углом атаки. Такая постановка тестовой задачи позволяет, с одной стороны, предельно сузить широкий спектр конкретных геометрий обтекаемой кромки, с другой – создать “экстремальные” условия обтекания.

Специфика такого обтекания заключается в следующем. На носовой части пластины отсутствует точка торможения потока, так как кромка абсолютно острая. Взаимодействие потока газа с поверхностью происходит за счет касательных напряжений и тепловых потоков.

В набегающем потоке в плоскости размещения пластины выполняются условия симметрии течения и, следовательно, касательные напряжения отсутствуют. В верхней по потоку точке передней кромки, называемой в дальнейшем носиком пластины, касательные напряжения имеют конечное, отличное от нуля значение. Это же относится и к поперечной по отношению к направлению потока составляющей теплового потока. Таким образом, носик пластины является особой точкой течения, а именно точкой разрыва первой

производной продольной составляющей скорости, температуры и других параметров газа.

Отметим, что в расчетных схемах обтекания тел конечной толщины с клиновидной или конусообразной носовой частью особая точка также будет иметь место, если пренебречь величиной затупления носика, т.е. считать его "острой кромкой". Это связано с тем, что при отсутствии точки торможения в малой окрестности носика вектор скорости должен иметь два различных направления, если на поверхности выполняется условие непротекания. Такая особенность вычислительной задачи возникает только при решении систем дифференциальных уравнений в газодинамических переменных. Для методов DSM и кинетических уравнений этот "модельный эффект" не характерен.

В реальных условиях, даже при очень малых радиусах скругления передней кромки, на ее поверхности будет присутствовать точка торможения потока. При построении детальных расчетных сеток особая точка не возникнет. В этом смысле рассматриваемая тестовая задача "экстремальна" и в большей степени направлена на определение области применимости различных моделей течения, чем на изучение физических процессов, протекающих в области острой кромки.

Гиперзвуковое обтекание острой кромки изучалось как экспериментальными, так и численными методами в ряде работ [99÷103]. В качестве острой кромки рассматривался носик клиновидного тела. Поток был направлен параллельно верхней поверхности клина.

В работе [99] эксперименты проводились для клина, размер затупления носика которого был намного меньше средней длины свободного пробега молекулы. Носик клина мог рассматриваться как абсолютно острая кромка. Изменение угла клиновидности в пределах  $7.5 \div 27.5^\circ$  не оказывало существенного влияния на величину нормального напряжения на верхней поверхности клина. В этой связи экспериментальные данные работы [99] могут быть использованы для оценки результатов расчетов распределения нормального напряжения по поверхности тонкой пластины.

В расчетных работах верхняя по потоку граница расчетной области устанавливалась либо на носике [101; 102; 103], либо в непосредственной близости от него ( $0.2\lambda_\infty$ ) [100]. Возмущением потока перед носиком пренебрегали. Целью настоящих расчетов является оценка влияния размера возмущенной области, даваемой различными моделями, на результаты расчета обтекания острой кромки. С этой точки зрения результаты указанных работ не представляли интереса.

В настоящем разделе использованы материалы работ [56; 61; 104].

## 7.2. Формулировка задачи. Единицы измерения

Рассматривается двумерное обтекание бесконечно тонкой пластины, установленной под нулевым углом атаки. Поверхность пластины термостабилизирована. Температура поверхности  $T_w$ . Плотность, скорость, температура и давление невозмущенного потока  $\rho_\infty$ ,  $u_\infty$ ,  $T_\infty$ ,  $p_\infty$ . Используется декартова прямоугольная система координат, начало которой расположено на носике пластины. Ось  $X$  направлена вдоль вектора скорости невозмущенного потока  $u_\infty$ . Ось  $Y$  является внешней нормалью к верхней поверхности пластины.

Все физические величины приведены к безразмерному виду. В связи с тем, что рассматриваемое течение относится к разряду сильнонеравновесных, в качестве единиц измерения используются величины, характерные для молекулярно-кинетической теории:

время  $\tau_{p_\infty} = \frac{\mu_\infty}{p_\infty}$  (время релаксации напряжений);

геометрический размер  $\lambda_\infty = \tau_{p_\infty} \sqrt{RT_\infty}$  (средняя длина свободного пробега молекулы);

скорость  $\sqrt{RT_\infty}$  (средняя скорость теплового движения молекул);

плотность  $\rho_\infty$ ;

температура  $T_\infty$ ;

давление и напряжения  $p_\infty = \rho_\infty RT_\infty$ ;

тепловой поток  $p_\infty \sqrt{RT_\infty}$ .

При выбранных единицах измерения числа Маха, Кнудсена и Рейнольдса связаны следующим соотношением:

$$\text{Kn} \cdot \text{Re} = \sqrt{\gamma} M.$$

Число Кнудсена, рассчитанное по длине пластины или ее участка, совпадает с соответствующей безразмерной длиной.

### 7.3. Системы уравнений. Граничные условия

Из всех рассмотренных выше моделей неравновесных течений для решения данной задачи будут использованы модели, не содержащие физически неадекватных участков в области гиперзвукового течения. Это модель первого приближения, внепорядковая и гибридная модели.

Ниже приведены системы уравнений перечисленных моделей. Эти системы записаны в виде развернутых скалярных уравнений, преобразованных для численного решения. Такая форма записи уравнений гибридной модели весьма громоздка и может быть заменена компактной тензорной записью, о чем сказано ниже.

Рассматриваемая тестовая задача накладывает специфические ограничения на методы ее численного решения. Эта специфика связана, прежде всего, с наличием особой точки. В работе [61] показано, что применение явной схемы решения (явная схема Мак-Кормака) не позволяет разместить верхнюю по потоку границу расчетной области достаточно далеко от носика пластины. Там же проведены аналогии с работой [100].

Выбор метода и схемы решения непосредственно связаны с видом конкретного уравнения системы. Порядок дифференциальных уравнений в пределах одной системы каждой из рассматриваемых моделей различен. Более

того, уравнения сохранения импульса и энергии гибридной модели меняют свой порядок в зависимости от степени неравновесности течения. В этой связи целесообразно записать все системы уравнений в развернутой скалярной форме.

В принятой системе координат в преобразованном для численного решения виде система уравнений 5-моментной модели (3.15) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \rho = 0; \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_1 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left( u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + (c_2 + 1) \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_1 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left( u_y - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + (c_2 + 1) \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left( u_y - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \\ + (\gamma - 1) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) T = \\ = \frac{\gamma - 1}{\rho} \mu \left( c_1 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2c_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_1 \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (7.4)$$

В этих уравнениях и ниже  $c_1 = \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h$ ,  $c_2 = \frac{5-3\gamma}{3} h - \frac{2}{3}$ .

Система уравнений внепорядковой модели (5.21) содержит уравнение сохранения массы в форме (7.1). Остальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_1 \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left( u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + \mu_{xy} \left( c_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + c_2 \mu_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \right) \quad ; \quad (7.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_1 \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left( u_y - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( -p + c_2 \mu_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu_{xy} \left( c_1 \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) \right) \quad ; \quad (7.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \\ + \left( u_y - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma - 1) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) T = 2 \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu_{xy}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\gamma - 1}{\rho} \left( c_1 \mu_{xx} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + c_2 (\mu_{xx} + \mu_{yy}) \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_1 \mu_{yy} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu_{xy} \left( \left( c_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left( c_1 \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \left( \mu_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \right) \quad . \quad (7.7) \end{aligned}$$

Коэффициент вязкости определен зависимостями (5.14) и (3.8):

$$\mu_{ij} = \tau_p \left( \delta_{ij} p + \chi p_{ij}^{[1]} \right). \quad (7.8)$$

Множитель  $\chi$  выполняет функции параметра модели.

Система уравнений гибридной модели (5.57) записана в переменных  $\psi_{ijk} = 2\varphi_{ijk}/\rho$  и  $\varpi_i = \omega_i/\rho$ . Она содержит уравнение сохранения массы в форме (7.1). Остальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_1 k_2 \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - k_2 \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ + \left( u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} = \quad ; \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -p - k_1 p_{xx} + k_2 \left( \mu_{xy} \left( c_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + c_2 \mu_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k_1 p_{xy} + k_2 \left( \mu_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} - k_2 \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_1 k_2 \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \\ + \left( u_y - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} = \quad ; \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -k_1 p_{xy} + k_2 \left( \mu_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( -p - k_1 p_{yy} + k_2 \left( c_2 \mu_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu_{xy} \left( c_1 \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} k_2 \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} k_2 \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \\ + \left( u_y - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma - 1) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) T = - \frac{\gamma - 1}{\rho} \times \quad ; \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\times \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 q_x - \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} k_2 \mu_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_1 q_y - \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} k_2 \mu_{xy} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. p_{xx}^H \frac{\partial u_x}{\partial x} + p_{yy}^H \frac{\partial u_y}{\partial y} + p_{xy}^H \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{h\tau_p} \theta = & -\frac{2}{3} \left( T_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + T_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) - \\ & - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{3} \varphi_x - \frac{2(\gamma-1)}{5-3\gamma} \omega_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2}{3} \varphi_y - \frac{2(\gamma-1)}{5-3\gamma} \omega_y \right) \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}^m}{\partial t} + u_x \frac{\partial p_{xx}^m}{\partial x} + u_y \frac{\partial p_{xx}^m}{\partial y} + \left( \frac{7}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_p} \right) p_{xx}^m = & \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) p^m + \\ & + \frac{2}{3} \left( p_{yy}^m \frac{\partial u_y}{\partial y} + p_{xy}^m \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) - 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_{xxx} - \frac{1}{3} \varphi_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_{xyy} - \frac{1}{3} \varphi_y \right) \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{yy}^m}{\partial t} + u_x \frac{\partial p_{yy}^m}{\partial x} + u_y \frac{\partial p_{yy}^m}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{7}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_p} \right) p_{yy}^m = & \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) p^m + \\ & + \frac{2}{3} \left( p_{xx}^m \frac{\partial u_x}{\partial x} + p_{xy}^m \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - 2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) - 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_{xyy} - \frac{1}{3} \varphi_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_{yyy} - \frac{1}{3} \varphi_y \right) \right) \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xy}^m}{\partial t} + u_x \frac{\partial p_{xy}^m}{\partial x} + u_y \frac{\partial p_{xy}^m}{\partial y} + \left( 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{\tau_p} \right) p_{xy}^m = & \\ = -P_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} - P_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} - 2 \left( \frac{\partial \varphi_{xyy}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{xyx}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} - 2\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - \tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \\ + \left( u_x - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \left( u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\tau_\varphi} \right) \psi_x = \\ = -\psi_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - 2 \left( \psi_{xxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \psi_{xyy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \psi_{xyx} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - \\ - 3 \left( T_{xx} \frac{\partial T_t}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2 \left( T_{xx} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + T_{xy} \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \right) + T_{yy} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) + \end{aligned} \quad (7.16)$$



$$\begin{aligned}
& \left. \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_4 \rho \left( 2T_t \left( \frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xyx}}{\partial y} \right) + 7 \left( \psi_{xxx} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyx} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) + \right) \right) \right) + \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_4 \rho \left( T_t \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial y} \right) + 7 \left( \psi_{xy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - \right) \right) \right) \right) \\
& \left. \left( + \psi_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_y \frac{\partial T_t}{\partial y} - 2\tau(R_0 R_{xx} + R_{xx}^2 + R_{xy}^2) \right) \right) \right); \quad (7.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_y}{\partial t} - \tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - 2\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \\
& + \left( u_x - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \left( u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\varphi} \right) \psi_y = \\
& = -\psi_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2 \left( \psi_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \psi_{xyy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \psi_{yyy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - \\
& - 3 \left( T_{xy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2 \left( T_{xx} \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + T_{xy} \left( \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial x} \right) + T_{yy} \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \right) + \\
& \left. \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_4 \rho \left( T_t \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial y} \right) + 7 \left( \psi_{xy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) + \right) \right) \right) + \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_4 \rho \left( 2T_t \left( \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial y} \right) + 7 \left( \psi_{xy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{yyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) + \right) \right) \right) \right) \\
& \left. \left( + \psi_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_y \frac{\partial T_t}{\partial y} - 2\tau(R_0 R_{yy} + R_{xy}^2 + R_{yy}^2) \right) \right) \right); \quad (7.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial t} - 4\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xxx}}{\partial x^2} - \tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xxx}}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial x} + \\
& + \left( u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial y} + \left( 3 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\tau_\phi} \right) \psi_{xxx} = -3 \left( T_{xx} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial T_{xx}}{\partial y} \right); \quad (7.18) \\
& - 3\psi_{xyy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_4 \rho \left( 4 \left( \psi_{xxx} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2\tau R_{xx}^2 \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_4 \rho \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} (T_t \psi_{xyy}) + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2\tau R_{xx} R_{xy} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial t} - \tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{yyy}}{\partial x^2} - 4\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{yyy}}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial x} + \\
& + \left( u_y - \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial y} + \left( 3 \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\phi} \right) \psi_{yyy} = -3 \left( T_{xy} \frac{\partial T_{yy}}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \right); \quad (7.19) \\
& - 3\psi_{xyy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_4 \rho \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial y} (T_t \psi_{xyy}) + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial x} \right) - 2\tau R_{yy} R_{xy} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_4 \rho \left( 4 \left( \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{yyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2\tau R_{yy}^2 \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial t} - 2\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xyy}}{\partial x^2} - 3\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xyy}}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial x} + \\
& + \left( u_y - \frac{3}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\phi} \right) \psi_{xyy} = -2\psi_{xyy} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \\
& - \psi_{yyy} \frac{\partial u_x}{\partial y} - T_{xx} \frac{\partial T_{yy}}{\partial x} - T_{xy} \left( \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \right) - 2T_{yy} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_4 \rho \left( 2T_t \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial y} + (\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) \frac{\partial T_t}{\partial x} + (\psi_{xyy} + \psi_{yyy}) \frac{\partial T_t}{\partial y} - \right) \right) + \right. \\
& \left. - \tau (2R_{xy}^2 + R_{xx} R_{yy}) \right) + \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_4 \rho \left( T_t \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial x} + 3 \left( \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 3\tau R_{xy} R_{yy} \right) \right) \right); \quad (7.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial t} - 3\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial x^2} - 2\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{3}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} + \\
& + \left( u_y - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial y} + \left( 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\varphi} \right) \psi_{xy} = -2\psi_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \\
& - \psi_{xxx} \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2T_{xx} \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} - T_{xy} \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) - T_{yy} \frac{\partial T_{xx}}{\partial y} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_4 \rho \left( T_t \frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial y} + 3 \left( \psi_{xy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 3\tau R_{xx} R_{xy} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_4 \rho \left( 2T_t \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial x} + (\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) \frac{\partial T_t}{\partial x} + (\psi_{xyy} + \psi_{yyy}) \frac{\partial T_t}{\partial y} - \right) \right) \right); \quad (7.21) \\
& \left. - \tau (2R_{xy}^2 + R_{xx} R_{yy}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varpi_x}{\partial t} - 2\tau_{\Omega 4} T_t \frac{\partial^2 \varpi_x}{\partial x^2} - \tau_{\Omega 4} T_t \frac{\partial^2 \varpi_x}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{\Omega 4} p^m) \right) \frac{\partial \varpi_x}{\partial x} + \\
& + \left( u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{\Omega 4} p^m) \right) \frac{\partial \varpi_x}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\tau_\omega} \right) \varpi_x = \\
& = -\varpi_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{c_\Omega}{R} \left( T_{xx} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_{\Omega 4} \rho \left( \frac{c_\Omega}{R} \left( \psi_{xxx} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + \varpi_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + \varpi_y \frac{\partial T_t}{\partial y} + \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p R_0 R_{xx} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{\Omega 4} \rho \left( \frac{c_\Omega}{R} \left( \psi_{xyy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + \psi_{yyy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + T_t \frac{\partial \varpi_y}{\partial x} + \tau R_0 R_{xy} \right) \right) \quad ; \quad (7.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varpi_y}{\partial t} - \tau_{\Omega 4} T_t \frac{\partial^2 \varpi_y}{\partial x^2} - 2\tau_{\Omega 4} T_t \frac{\partial^2 \varpi_y}{\partial y^2} + \left( u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{\Omega 4} p^m) \right) \frac{\partial \varpi_y}{\partial x} + \\
& \quad + \left( u_y - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{\Omega 4} p^m) \right) \frac{\partial \varpi_y}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\omega} \right) \varpi_y = \\
& \quad = -\varpi_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{c_\Omega}{R} \left( T_{xy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + \quad . \quad (7.23)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_{\Omega 4} \rho \left( \frac{c_\Omega}{R} \left( \psi_{xy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + \psi_{yy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + T_t \frac{\partial \varpi_x}{\partial y} + \tau R_0 R_{xy} \right) \right) + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{\Omega 4} \rho \left( \frac{c_\Omega}{R} \left( \psi_{xy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + \psi_{yy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + \varpi_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + \varpi_y \frac{\partial T_t}{\partial y} + \tau R_0 R_{yy} \right) \right) \right)$$

Здесь  $R_0 = \frac{5-3\gamma}{2h} \frac{\theta}{\tau_p}$ ;  $R_{ii} = \frac{p_{ii}^m}{\rho \tau_p} + R_0$ ;  $R_{xy} = \frac{T_{xy}}{\tau_p}$ . Коэффициент вязкости определен

уравнением (5.14). Гибридные неравновесные напряжения  $p_{xx}^H$ ,  $p_{yy}^H$ ,  $p_{xy}^H$  соответствуют системе (5.57). Среднее время свободного пробега молекулы вводится соотношением  $\tau = \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p$ . Параметр  $\frac{\tau}{\tau_p}$  определен зависимостью (2.48).

Принято  $\tau_4 = \tau_p$ ,  $\tau_{\Omega 4} = h \tau_p$ .

Системы уравнений могут быть записаны в индексной тензорной форме. Такая форма использована для записи общих систем уравнений моделей в предыдущих разделах. Характерно, что при построении алгоритма численного решения эта форма более удобна, а при многопроцессорной численной реализации – более экономична.

Вместе с тем для эффективной многопроцессорной реализации тензорной формы требуется вводить в программный код “задаваемые операции” или “формальные процедуры” (использованы термины стандарта алгоритмического языка Фортран). Применительно к системе моментных уравнений это операции внешнего произведения, свертывания и симметрирования (компактное симметрирование предпочтительно).

В более общем случае этот перечень должен быть дополнен операциями альтернирования и векторного произведения. Построение кода таких операций не содержит принципиальных трудностей, но выходит за рамки настоящей работы.

На Рисунке 7.1 показана схема расчетной области течения. Толстой линией изображена обтекаемая пластина. В качестве начальных условий принимались условия невозмущенного потока во всей расчетной области. Граничные условия выставлялись следующим образом.

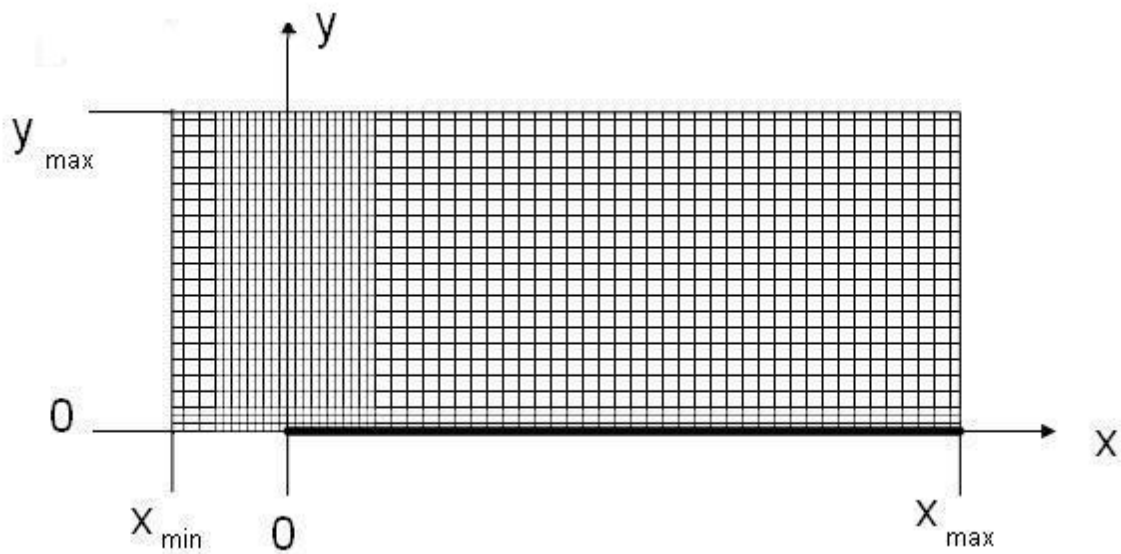


Рисунок 7.1. Схема расчетной области

На верхней по потоку границе (линия  $x = x_{\min}$ ) и на линии  $y = y_{\max}$  задавались параметры невозмущенного потока. На нижней по потоку границе расчетной области (линия  $x = x_{\max}$ ) вторые производные рассчитываемых функций принимались равными нулю. На интервале  $x_{\min} < x < 0$  линии  $y = 0$  (область набегающего потока перед носиком пластины) выставлены условия симметрии, заключающиеся в следующем.

Первые производные по координате  $Y$  от параметров, являющихся четными моментами функции распределения по тепловой скорости  $c_y$ , равны нулю. Символически это можно представить так:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho, u_x, T, T_t, T_{ii}, \psi_x, \psi_{xxx}, \psi_{xyy}, \varpi_x) = 0. \quad (7.24)$$

Нечетные моменты в этой области:

$$u_y, T_{xy}, \psi_y, \psi_{yyy}, \psi_{xxy}, \varpi_y = 0. \quad (7.25)$$

Их вторые производные по координате  $Y$  также равны нулю.

Здесь приведен полный перечень переменных гибридной модели. Для модели первого приближения и внепорядковой модели условия распространяются на  $\rho, u_x, T$  и  $u_y$  соответственно.

На поверхности пластины выставлялись условия скольжения и скачка температуры (6.5) и (6.6). Рассматривались традиционные значения постоянных коэффициентов

$$\zeta_u = 1.431, \zeta_{uT} = 0.224, \zeta_T = 0.735, \quad (7.26)$$

и значения, полученные в Разделе 6:

$$\zeta_u = 1.21, \zeta_T = 0.55. \quad (7.27)$$

Значение  $\zeta_{uT}$  было подобрано опытным путем из условий лучшего сглаживания решения в окрестности особой точки. Оно составило  $\zeta_{uT} \approx 0.2$  для всех рассмотренных моделей течения.

При численной реализации гибридной модели были рассмотрены дополнительные граничные условиями:

$$p_{xy} = -\frac{1}{\zeta_u \sqrt{RT}} (p u_x + \zeta_{uT} q_x); \quad (7.28)$$

$$q_y = \frac{\rho R \sqrt{RT}}{\zeta_T} (T_w - T). \quad (7.29)$$

Уравнения записаны в физических единицах измерения. Значения всех параметров взяты на поверхности пластины. Применительно к уравнениям (7.15), (7.17) и (7.23) эти зависимости имеют вид:

$$p_{xy} \equiv p_{xy}^m = -\frac{\rho}{\zeta_u \sqrt{T}} \left( T u_x + \zeta_{uT} \left( \frac{1}{2} \psi_x + \varpi_x \right) \right); \quad (7.30)$$

$$\frac{1}{2}\psi_y + \varpi_y = \frac{\sqrt{T}}{\zeta_T}(T_w - T). \quad (7.31)$$

Граничные условия (7.28), (7.29) представляют собой зависимости (6.5) и (6.6), в которых напряжение и тепловые потоки первого приближения заменены их значениями, определенными из соответствующих моментных уравнений. Условия (7.28) и (7.29) по своей структуре соответствуют граничным условиям 13-моментной модели [15].

В слабонеравновесной области ( $W \ll 1$ ,  $k_1 \approx 1$ ,  $k_2 \ll 1$ ) моментные значения напряжений и тепловых потоков близки к их первым приближениям. Дополнительные граничные условия слабо отличаются от условий (6.5), (6.6).

В области высокой неравновесности ( $W \approx 1$ ,  $k_1 \ll 1$ ,  $k_2 \approx 1$ ) граничные условия (7.28), (7.29) выполняют функции самостоятельных граничных условий. Но моментные значения напряжений и тепловых потоков, входящие в уравнения сохранения и гибридные выражения напряжений и тепловых потоков системы (5.57) с весовым коэффициентом  $k_1$ , уже не играют определяющей роли. В этом случае преобладают первые приближения соответствующих величин ( $k_2 \approx 1$ ). Таким образом, дополнительные граничные условия "уточняют" условия (6.5) и (6.6) в подсистеме моментных уравнений.

На основании приведенных доводов в работе [56] было сделано предположение о достаточности трех граничных условий для гибридной модели. Однако, независимо от степени преобладания ( $k_1$  и  $k_2$ ) гибридизированных моделей система уравнений M24c по существу использует пять граничных условий.

Попытки решения данной тестовой задачи с использованием системы уравнений M24c в совокупности с тремя граничными условиями на твердой поверхности, не позволили получить установившегося решения. Причиной этого может служить как недостаточное количество граничных условий, так и коротковолновая неустойчивость системы M24c. Вопрос о необходимом

количестве граничных условий для системы M24 и ей подобным (включая 20-моментную систему Грэда) на сегодняшний день остается открытым.

#### 7.4. Конечно-разностная реализация

В расчетной области использована единая прямоугольная сетка с переменным шагом (см. схему на Рисунке 7.1). В начале координат (носик пластины) шаг минимален и составляет  $\Delta x = \Delta y = 0.1\lambda_\infty$ . По мере удаления от начала координат (по оси  $X$  – в обоих направлениях) шаг увеличивается в геометрической прогрессии со знаменателем 1.05 – 1.07. После достижения максимального значения  $0.5\lambda_\infty$  шаг остается постоянным. Таким образом обеспечивается наибольшее сгущение сетки в наиболее неравновесной области течения.

Размер расчетной области менялся в пределах  $x_{\min} = -(7 \div 10)\lambda_\infty$ ,  $x_{\max} = (120 \div 150)\lambda_\infty$ ,  $y_{\max} = (50 \div 60)\lambda_\infty$ . Общее количество узлов расчетной сетки составляло  $\sim 30000$ .

Особая точка течения, как отмечено выше, накладывает существенные ограничения на методы численного решения. В частности, широко распространенные и весьма простые схемы Мак-Кормака, как явная, так и неявная [105], не позволяют получить установившееся решение при достаточно широкой области невозмущенного потока ( $|x_{\min}| > 0.5\lambda_\infty$ ). Видимо, этим обстоятельством обусловлена малая протяженность указанной области ( $|x_{\min}| \approx 0.2\lambda_\infty$ ), используемой в работе [100].

В настоящей работе применен метод прогонки (алгоритм Томаса [106]) в направлении оси  $X$ . Ввиду того что решаемые системы уравнений содержат уравнения разных типов, использовалась нестационарная версия этого метода – прогонка ленточной матрицы с нестационарным членом. Таким образом, метод расчета представлял собой метод установления, реализуемый на трех- и четырехдиагональных матрицах.



Для конечно-разностной аппроксимации производных применялись следующие шаблоны. Локальная производная по времени аппроксимировалась линейной зависимостью на отрезке времени  $\Delta t$ . В схемах, использующих трехдиагональную матрицу, первая и вторая производные аппроксимировались квадратной параболой. Шаблон такой схемы изображен на Рисунке. 7.2.

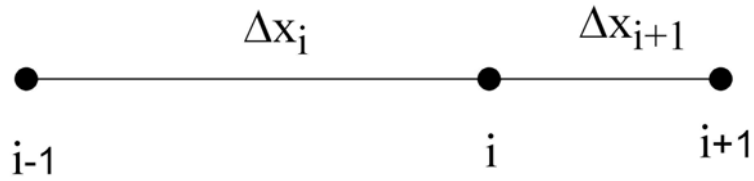


Рисунок 7.2. Шаблон для аппроксимации производных на трех узлах расчетной сетки

Дискретные аналоги производных функции  $F$ :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_i} = -\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i \Delta_R} F_{i-1} + \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} F_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1} \Delta_R} F_{i+1} + O(\Delta x^3). \quad (7.32)$$

Здесь и ниже  $\Delta_R = \Delta x_i + \Delta x_{i+1}$ .

В граничных точках:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_{i-1}} &= \\ &= -\frac{2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\Delta x_i \Delta_R} F_{i-1} + \frac{\Delta_R}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} F_i - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1} \Delta_R} F_{i+1} + O(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (7.33)$$

В случае аппроксимации квадратной параболой в любом узле шаблона

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{\Delta x_i \Delta_R} F_{i-1} - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} F_i + \frac{2}{\Delta x_{i+1} \Delta_R} F_{i+1} + O(\Delta x^3). \quad (7.34)$$

Для производных по координате  $Y$  имеют место эти же соотношения с заменой  $\Delta x_{...}$  на  $\Delta y_{...}$ .

Трехдиагональная матрица, получаемая после подстановки дискретных аналогов в системы уравнений исследуемых моделей течения, может быть использована для метода прогонки уравнений (7.2) – (7.4) 5-моментной модели, уравнений (7.5) – (7.7) внепорядковой модели и уравнений (7.16) – (7.23) гибридной модели. Для остальных уравнений (дифференциальных уравнений первого порядка) матрица коэффициентов будет плохо обусловлена.

Причиной этого являются малые значения разности  $\Delta x_{i+1} - \Delta x_i$  (знаменатель прогрессии сетки 1.05 – 1.07) во втором слагаемом правой части (7.32). В периферийных областях расчетной области, где шаг дробления сетки постоянен, рассчитываемый  $i$ -й узел полностью “выпадает” из численной схемы.

Отдельно отметим, что уравнения (7.9) – (7.11) гибридной модели содержат вторые производные с коэффициентом  $k_2$ , обращающимся в ноль в области равновесного течения.

Для дифференциальных уравнений первого порядка применена аппроксимация кубической параболой на четырех узлах расчетной сетки. Шаблон показан на Рисунке 7.3.

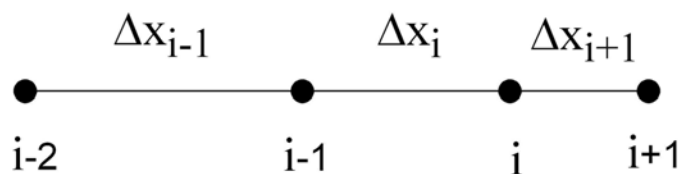


Рисунок 7.3. Шаблон для аппроксимации производных на четырех узлах расчетной сетки

Дискретный аналог производной:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_i} &= \frac{\Delta x_i \Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-1} \Delta_L \Delta_\Sigma} F_{i-2} - \frac{\Delta x_{i+1} \Delta_L}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i \Delta_R} F_{i-1} + \\
&+ \left( \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} + \frac{\Delta x_{i-1} \Delta x_i \Delta_L + \Delta x_{i+1} \Delta_L \Delta_\Sigma - \Delta x_i \Delta x_{i+1} \Delta_R}{\Delta x_{i-1} \Delta_L \Delta_R \Delta_\Sigma} \right) F_i + \\
&+ \left( \frac{1}{\Delta x_{i+1}} - \frac{\Delta x_i + \Delta_\Sigma}{\Delta_R \Delta_\Sigma} \right) F_{i+1} + O(\Delta x^4)
\end{aligned} \quad (7.35)$$

Здесь  $\Delta_L = \Delta x_{i-1} + \Delta x_i$ ,  $\Delta_\Sigma = \Delta x_{i-1} + \Delta x_i + \Delta x_{i+1}$ .

Производные по координате  $Y$  аппроксимированы зависимостями (7.32) и (7.33) с заменой  $\Delta x_{\dots}$  на  $\Delta y_{\dots}$ .

Получаемая четырехдиагональная матрица также плохо обусловлена. Это становится очевидным при постоянном шаге  $\Delta x$ :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{1}{6\Delta x} (F_{i-2} - 6F_{i-1} + 3F_i + 2F_{i+1}) + O(\Delta x^4). \quad (7.36)$$

Коэффициент главной диагонали втрое меньше суммы модулей остальных коэффициентов. Вместе с тем он ни при каких значениях знаменателя прогрессии сетки не обращается в ноль. Сохраняется связь рассчитываемого узла с соседними узлами.

Введение нестационарного члена (локальной производной по времени) позволяет улучшить обусловленность четырехдиагональной матрицы. При решении системы, содержащей уравнения первого и второго порядков, возникает необходимость включения нестационарного члена также и в трехдиагональные матрицы.

Для решения уравнений (7.9) – (7.11) гибридной модели, обладающих отмеченным выше свойством “терять” вторые производные в области равновесного течения, использована комбинация дискретных аналогов производных. Первые производные описываются уравнением (7.35), а вторые – уравнением (7.34). Коэффициенты получаемой четырехдиагональной матрицы

представляют собой сумму соответствующих коэффициентов уравнений (7.34) и (7.35).

В отношении устойчивости численного решения рассматриваемых систем уравнений отметим следующее. Число Куранта при  $\Delta x_{\max} = 0.5$  для системы уравнений 5-моментной модели составляло  $\sim 0.2$ . Для гибридной модели этот параметр  $\sim 0.1$ . Число Куранта внепорядковой модели зависело от параметра  $\chi$  (см.(7.8)), максимальное значение которого ограничено числом Маха невозмущенного потока.

### 7.5. Результаты расчетов

Расчеты проводились для двухатомного газа при  $M_{\infty} = 10.15$  и  $T_w = 2.16T_{\infty}$  [99]. В указанной работе исследовалось обтекание острого клина. Вектор скорости невозмущенного потока был параллелен верхней поверхности клина. Измерялись нормальные напряжения  $P_{yy}$  на этой поверхности.

Рассчитанные кривые распределения нормального напряжения на поверхности бесконечно тонкой пластины ( $y = 0$ ) содержат осцилляции  $P_{yy}$  в окрестности особой точки. Отсутствие осцилляций имело бы место только в случае полного торможения потока на носике пластины. Носик перестал бы быть особой точкой. Из общих физических соображений можно утверждать, что такое течение невозможно.

Амплитуда осцилляций, а именно ее минимальное значение, использовалась для выбора параметров рассматриваемых моделей течения. Разумеется, нет теоретического обоснования для того, чтобы рассматривать минимум амплитуды в качестве основного критерия применимости той или иной модели к описанию обтекания острой кромки. Выбор такого критерия носит скорее феноменологический и практический характер.

На Рисунке 7.4 показано распределение нормального напряжения для 5-моментной модели при различных значениях параметра  $s$ . Параметр  $h$  определялся по зависимости (1.78) при  $Z = 5$ .

Из графиков следует, что наименьшие осцилляции решения соответствуют  $s = 0.5$  в аппроксимации  $\mu = \mu(T^s)$ . При этом имеет место слабая зависимость коэффициента вязкости от температуры. Аналогичные результаты получены и для других аппроксимаций коэффициента вязкости. В последующих расчетах для модели первого приближения принято  $s = 0.5$ ,  $h = 4$  (1.78).

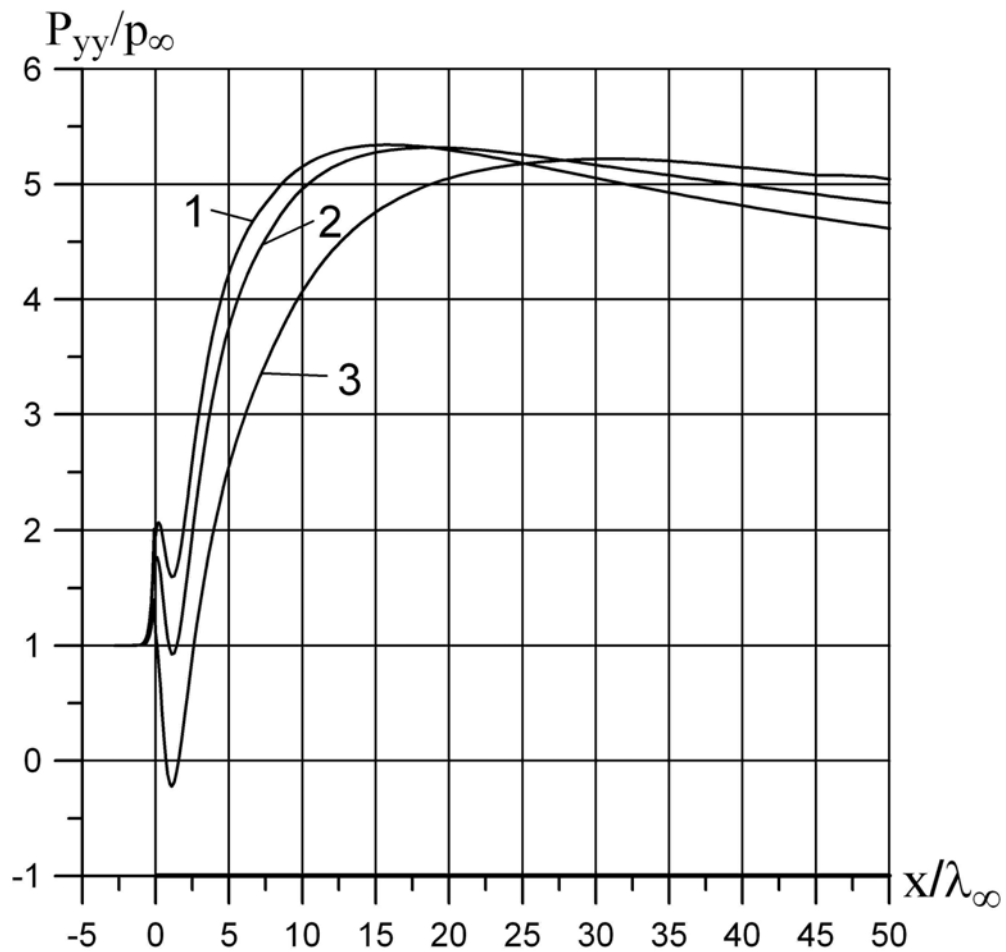


Рисунок 7.4. Распределение нормального напряжения при  $y = 0$ .

5-моментная модель. **1** –  $s = 0.5$ ; **2** –  $s = 0.6$ ; **3** –  $s = 0.9$

На Рисунке 7.5 кривая **1** рисунка 7.4 сопоставлена с кривой нормального напряжения, полученной при  $s = 0.5$  и  $h = 0$  (модель НСФ без коэффициента объемной вязкости). В области особой точки “провал” напряжения достигает значения  $P_{yy} = -0.6$ .

В слабонеравновесной области ( $x \approx 50\lambda_\infty$ ) кривые практически совпадают, чего и следует ожидать в слабо возмущенном пограничном слое. В совокупности с результатами расчетов плоской ударной волны (подраздел 6.4) такой результат говорит о возможности получения качественно неверных решений при использовании указанной модели для описания неравновесных течений.

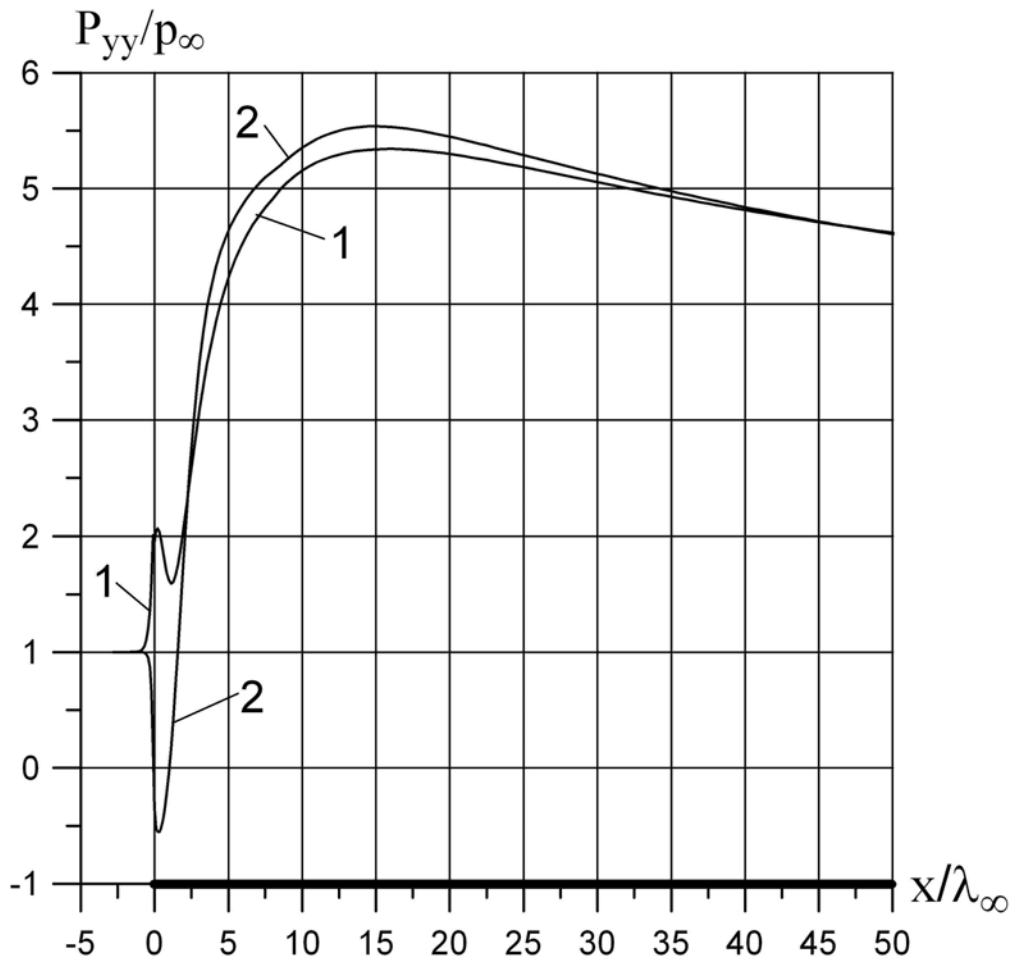


Рисунок 7.5. Распределение нормального напряжения при  $y = 0$ .

5-моментная модель,  $s = 0.5$ . **1** -  $h = 4$ ; **2** -  $h = 0$ .

Решения внепорядковой и гибридной моделей в меньшей степени зависят от параметра  $s$ . Наименьшая амплитуда осцилляций достигается при значениях  $s \approx 0.8$ ,  $h = 3.06$  (1.78), которые использованы в дальнейших расчетах. Оценка сделана на основе числовых данных. Графические зависимости не наглядны.

Решения внепорядковой модели сильно зависели от параметра  $\chi$  (7.8). При  $\chi > 0.5$  не удалось получить установившееся решение с использованием описанной расчетной схемы. Это, видимо, связано с тем, что разрыв производных скорости  $u_i$ , возникающий в особой точке, дважды входит в выражение неравновесного напряжения.

Производные  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  присутствуют в уравнении неравновесного напряжения (5.10) и в коэффициенте вязкости  $\mu_{ij}$  (5.14). Таким образом, неравновесные напряжения содержат член  $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2$ . Приводимые ниже расчетные данные получены при  $\chi = 0.4$ .

Гибридной модели коэффициент  $\chi$  не требовался, так как в коэффициенте вязкости  $\mu_{ij}$  фигурирует напряжение  $p_{ij}$ , определенное моментным уравнением.

На Рисунке 7.6 показаны распределения нормального напряжения в плоскости пластины, полученные из решения трех рассматриваемых моделей течения. Коэффициенты граничных условий на пластине соответствовали (7.26).

На рисунке приведены экспериментальные данные работы [99]. Пунктирной линией изображено нормальное напряжение, возникающее в условиях свободномолекулярного обтекания. Оно определяется зависимостью

$$(P_{yy})_{FM} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{T_w})p_\infty. \quad (7.37)$$

Значение этого напряжения потребуется при обсуждении результатов.

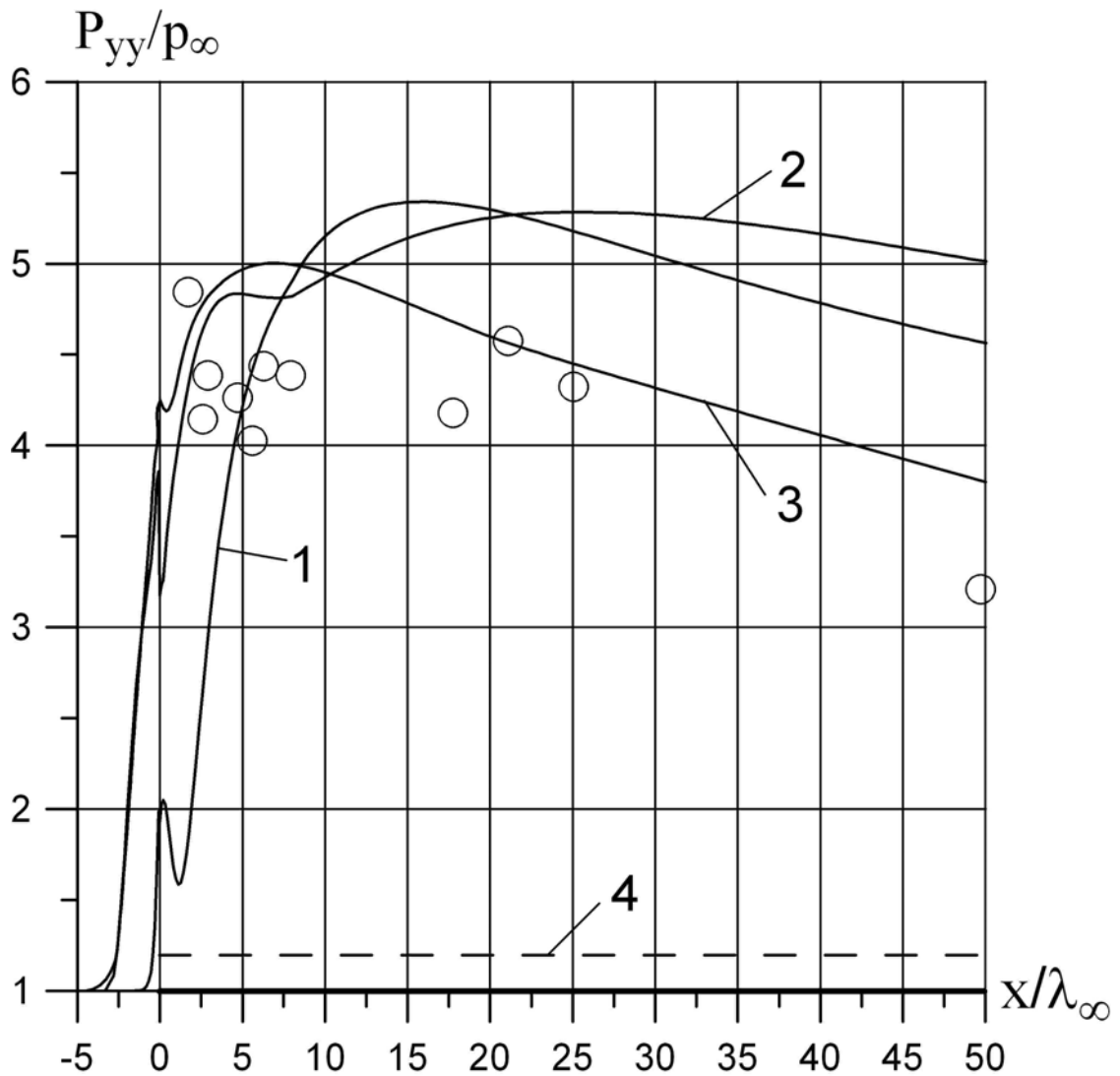


Рисунок 7.6. Распределение нормального напряжения при  $y = 0$ ,  $M_{\infty} = 10.15$ ,  $T_w = 2.16$ . Граничные условия (7.26). О – экспериментальные данные [99]; **1** – 5-моментная модель; **2** – внепорядковая модель; **3** – гибридная модель; **4** – нормальное напряжение на поверхности пластины при свободномолекулярном обтекании (7.37).

График 5-моментной модели (кривая **1**) существенно смещен в направлении течения относительно области экспериментальных точек. Размер возмущенной области перед носиком пластины в несколько раз меньше соответствующей области двух других моделей. Этот факт, очевидно, связан с отмеченной ранее недостаточной вязкостью модели первого приближения.



Графики внепорядковой и гибридной моделей (кривые **2** и **3**) практически полностью находятся в области экспериментальных точек возле носика пластины.

На Рисунке 7.7 показана возмущенная область перед носиком пластины, соответствующая Рисунку 7.6.

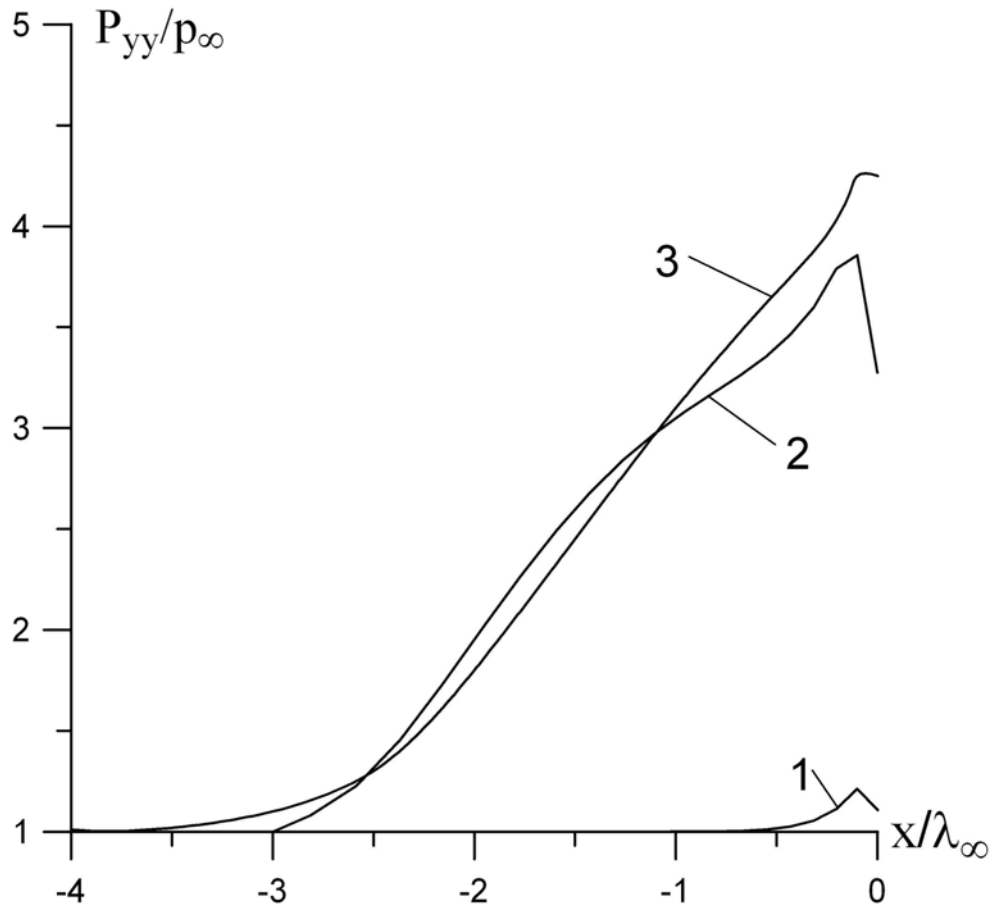


Рисунок 7.7. Распределение нормального напряжения при  $y = 0$ . Фрагмент Рисунка 7.6. Область торможения потока перед носиком пластины. **1** – 5-моментная модель; **2** – внепорядковая модель; **3** – гибридная модель

Перед носиком пластины течение, рассчитанное по внепорядковой и гибридной моделям, сильно заторможено. На Рисунке 7.8 показано распределение продольной составляющей скорости  $u_x$  в этой области. Вблизи носика локальные числа Маха составляют: 7.58 – 5-моментная модель; 3.21 – внепорядковая модель; 2.29 – гибридная модель.

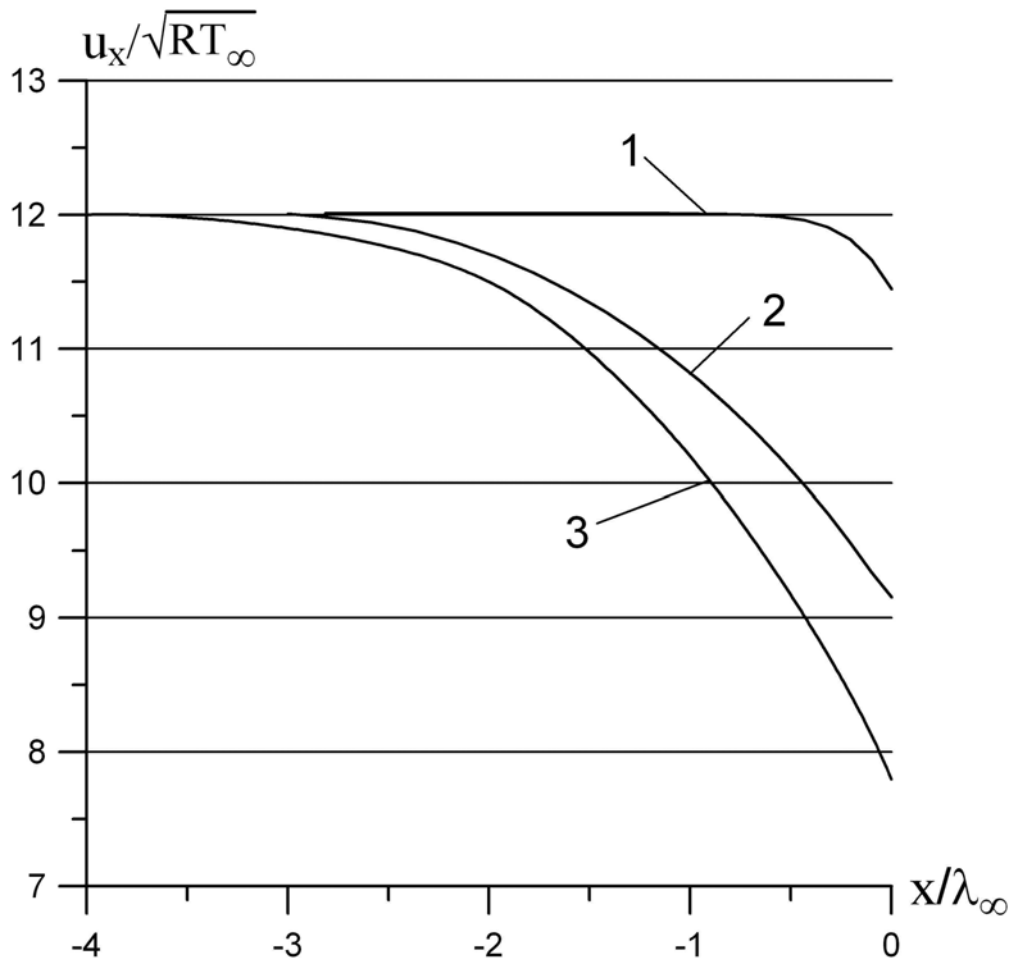


Рисунок 7.8. Распределение скорости  $u_x$  при  $y=0$ . Область торможения потока перед носиком пластины. **1** – 5-моментная модель; **2** – внепорядковая модель; **3** – гибридная модель.

Зависимость распределения нормального напряжения от коэффициентов граничных условий показана на Рисунке 7.9. Пунктирные кривые соответствуют коэффициентам (7.26). Они перенесены с Рисунка 7.6. Сплошные линии построены для коэффициентов (7.27) и  $\zeta_{uT} \approx 0.2$ .

Граничные условия на пластине с коэффициентами (7.27) увеличивают напряжение  $P_{yy}$  во всей неравновесной области течения. Это связано с тем, что меньшие значения коэффициентов  $\zeta_u$  и  $\zeta_T$  повышают интенсивность процессов

трения и теплопередачи. В слабонеравновесной области ( $x > (50 \dots 100)\lambda_\infty$ ) различие в коэффициентах (7.26) и (7.27) слабо влияет на величину  $P_{yy}$ .

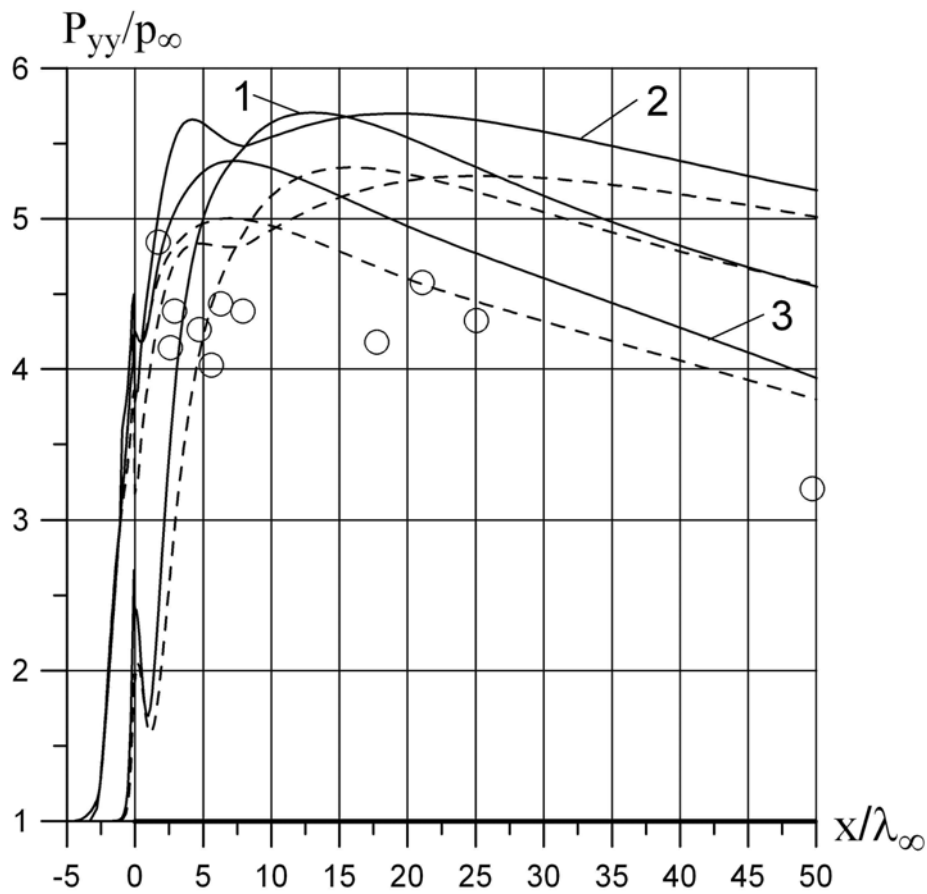


Рисунок 7.9. Распределение нормального напряжения при  $y = 0$ . Граничные условия (7.27). O – экспериментальные данные [99]; ----- линии Рисунка 7.6; **1** – 5-моментная модель; **2** – внепорядковая модель; **3** – гибридная модель

Как отмечалось, экспериментальные данные [99] получены для обтекания клина. Кроме этого, принятое в работе [99] и в настоящем тесте постоянство температуры поверхности существенно искажает процесс теплопередачи в области носика обтекаемого тела. В связи с этим не представляется возможным определить, какие из граничных условий в данном случае лучше.

Распределения осредненных параметров (давления и температуры) не содержат осцилляций. На Рисунке 7.10 показаны распределения

термодинамического давления, даваемые тремя исследуемыми моделями. Граничные условия соответствовали (7.26).

Гладкие решения являются следствием выполнения законов сохранения. Осцилляции напряжений  $P_{xx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{zz}$  находятся “в противофазе”, что и приводит к гладким распределениям осредненных параметров.

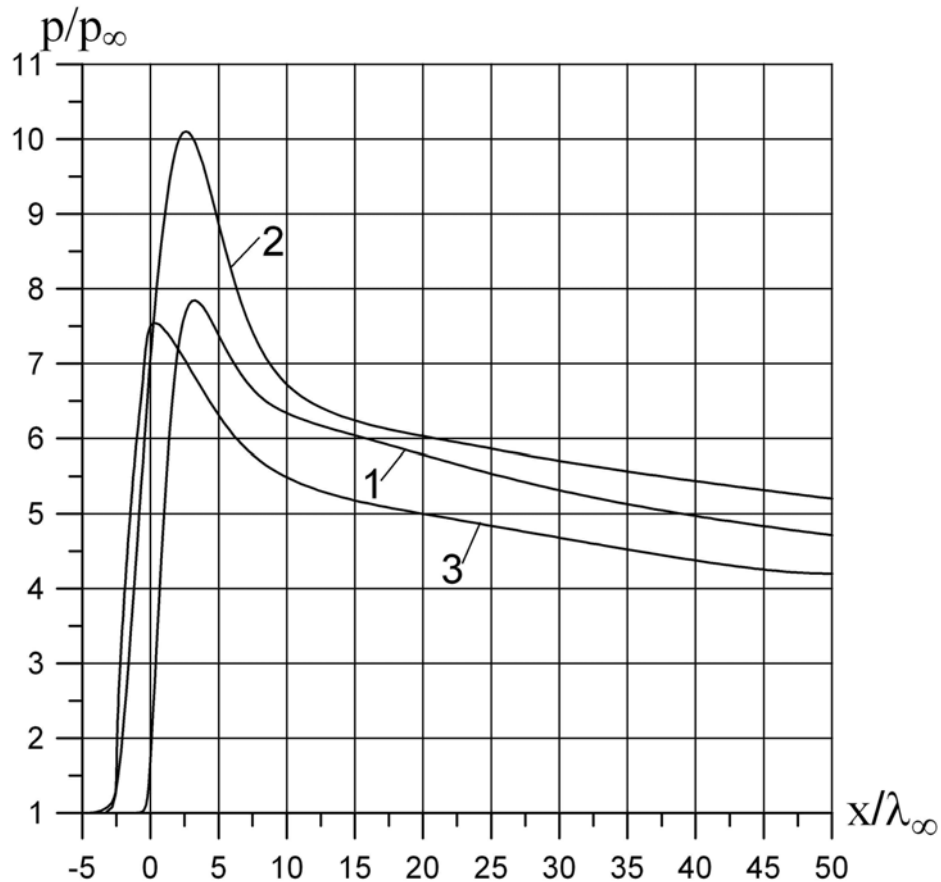


Рисунок 7.10. Распределение давления при  $y = 0$ . **1** – 5-моментная модель; **2** – внепорядковая модель; **3** – гибридная модель

При числах Маха  $M_\infty \leq 5$  и при соответствующем выборе коэффициента объемной вязкости могут быть получены гладкие распределения  $P_{yy}$  [104]. На Рисунке 7.11 представлены результаты расчетов, выполненных с использованием 5-моментной модели при  $s = 0.75$ ,  $h = 1.75$ . Температура пластины принята, как и

в предыдущих расчетах  $T_w = 2.16$ . Коэффициенты граничных условий скольжения скорости и скачка температуры на пластине соответствовали (7.26).

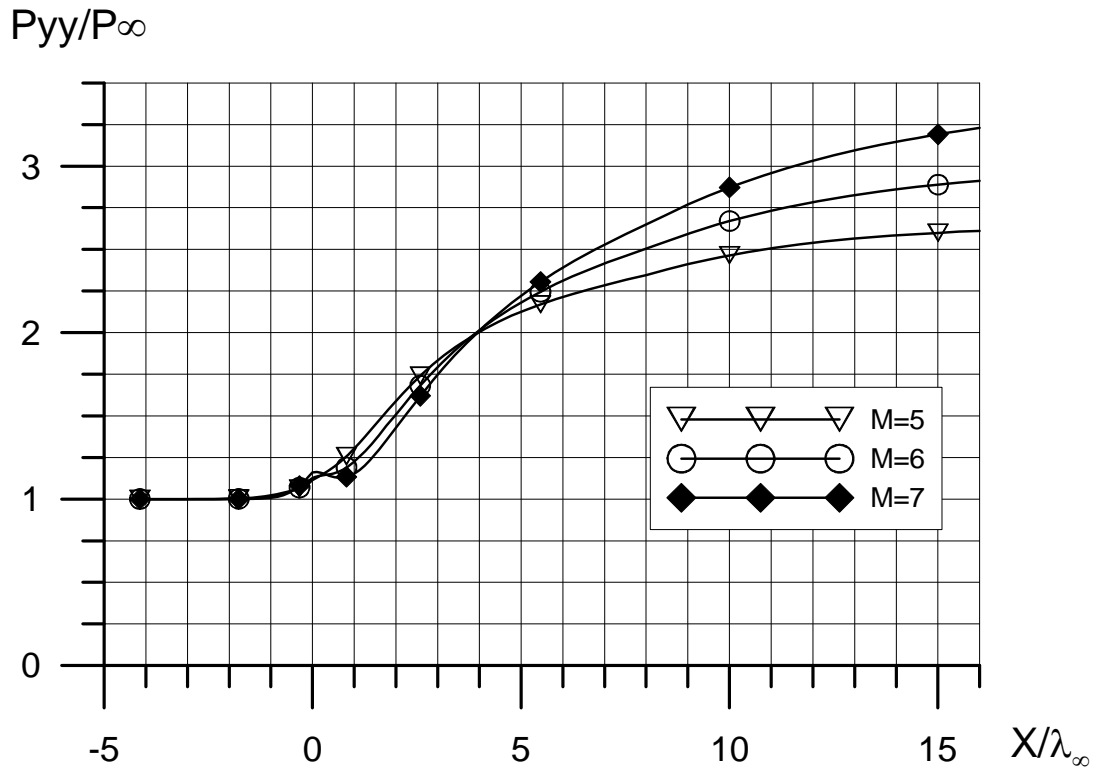


Рисунок 7.11. Распределение нормальных напряжений по поверхности пластины. 5-моментная модель,  $s = 0.75$ ,  $h = 1.75$ .

### 7.6. Осуждение результатов

Тестирование гиперзвукового обтекания тонкой пластины позволяет сделать следующие выводы.

Модель первого приближения (5-моментная модель) неудовлетворительно описывает гиперзвуковое отекание острой кромки, в силу того что область возмущения перед особой точкой значительно сокращена. Такое сокращение области, в свою очередь, является причиной завышения градиентов параметров газа на поверхности обтекаемого тела.

Часто используемая в практических приложениях (в том числе и для гиперзвуковых расчетов) модель НСФ без коэффициента объемной вязкости может давать качественно неверные результаты.

Отметим, что даже в случае детального описания кромки как поверхности большой кривизны при расчете гиперзвуковых обтеканий модель первого приближения не вполне адекватна решаемой задаче. Об этом свидетельствуют результаты тестирования плоской ударной волны, с необходимостью возникающей перед точкой торможения.

Внепорядковая модель позволяет в значительной мере исправить недостатки модели первого приближения. Область возмущения внепорядковой модели существенно шире. Градиенты параметров газа на поверхности обтекаемого тела снижаются. С практической точки зрения важно, что экономичность внепорядковой модели не намного ниже экономичности модели первого приближения.

Наиболее широкую область возмущения и, следовательно, наилучшее сглаживание решения в области особой точки обеспечивает гибридная модель. Относительно широкая область возмущения хорошо согласуется с результатами расчетов профиля плоской ударной волны. Эта же модель требует и наибольших вычислительных ресурсов, что является серьезным ограничением для ее практического использования.

С физической точки зрения лобовая поверхность тела, стянутая в одну точку, представляет собой математическую абстракцию. Однако использование такого рода абстракций в практических расчетах вполне обоснованно, так как это позволяет значительно экономить вычислительные ресурсы. Возникающая в этом случае особая точка течения предъявляет специфические требования к используемой модели процесса, что и демонстрирует проведенное тестирование.

Расчеты острой кромки, стянутой в одну точку, с использованием гибридной модели, в ряде случаев могут оказаться более экономичными, чем расчеты детально описанной лобовой поверхности кромки с использованием более простых моделей. Проведенное тестирование не позволяет сформулировать

конкретные рекомендации в этом плане. Такого рода задача требуют специального исследования.

Полученные результаты позволяют сделать некоторые общие оценки процесса гиперзвукового обтекания острой кромки.

В ряде работ, посвященных решению рассматриваемой задачи и использующих модель НСФ, например [100], давление газа в области носовой части отождествляется с нормальным напряжением. Нормальное напряжение в этой области принимает отрицательное значение и не анализируется. Значение вычисленного давления оказывается близким к значению нормального напряжения при свободномолекулярном обтекании (7.37). Расчеты методами прямого статистического моделирования, например [101], дают значения нормального напряжения, также близкие к  $(P_{yy})_{FM}$ . На этом основании делается вывод: характер гиперзвукового обтекания острых кромок близок к свободномолекулярному.

В упомянутых работах верхняя по потоку граница располагалась практически на носике пластины. Вместе с тем давление в невозмущенном потоке не намного отличается от свободномолекулярного предела нормального напряжения. В рассматриваемой задаче, в соответствии с (7.37), отношение этих величин составляет 1.235 и изображено пунктирной линией на Рисунке 7.6. Не удивительно, что при указанном расположении верхней границы нормальное напряжение, рассчитанное методами прямого статистического моделирования, слабо отличается от давления в невозмущенном потоке.

Если верхняя по потоку граница достаточно удалена от носика обтекаемого тела, возмущения распространяются вверх по потоку на несколько длин свободного пробега молекулы. На основании проведенного тестирования нельзя точно определить размер возмущенной области, так как разрыв производных в особой точке вносит погрешность в параметры течения. Тем не менее тесты трех моделей свидетельствуют о наличии сильно возмущенной зоны перед носиком бесконечно тонкой пластины. Нормальное напряжение на носике в несколько раз

превышает свободномолекулярное значение (см. Рисунок 7.6). Очевидно, что перед носиком реального, даже сильно заостренного тела возмущения будут еще более интенсивными.

Проведение аналогии между гиперзвуковым и свободномолекулярным течениями в области носовой части заостренного тела представляется необоснованным.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложен метод, предусматривающий построения системы моментных уравнений многоатомных газов в терминах моментов функции распределения молекул по скоростям. Микроскопические характеристики газовой среды – функция распределения и потенциал межмолекулярных столкновений, в предложенном методе не конкретизируются. Отказ о такого рода конкретизаций является концептуальной основой метода.

Преобразование моментов интеграла столкновений кинетического уравнения к виду релаксационного члена моментного уравнения проводится на основе двух положений феноменологического характера:

в процессе релаксации

- главные оси тензоров не меняют своего положения,
- энергия теплового движения молекул (поступательного, вращательного, колебательного) не переходит в энергию их группового движения.

Для определения времени релаксации моментов второго и третьего порядков используются эмпирические законы (закон Фурье и закон трения Стокса или обобщенный закон Ньютона), обоснованные только для гидродинамического приближения. Применение этих законов к описанию неравновесных течений подразумевает следующее допущение: время релаксации неравновесных величин не зависит от степени неравновесности среды.

Для замыкания системы моментных уравнений третьего порядка и выше принято допущение: локальное выражение момента четвертого порядка и выше может быть представлено линейной комбинацией моментов низших порядков.

Указанным методом построена замкнутая система моментных уравнений третьего порядка (24-моментная система). Основные свойства полученной системы исследованы на примере решения тестовых задач. Тесты показали, что несмотря на более симметричный, чем у 20-моментной системы Грэда вид уравнений момента третьего порядка, 24-моментная система содержит основной "дефект" моментных систем – коротковолновую неустойчивость. В остальном эта

система дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными данными.

На базе разработанного метода может быть поставлена и решена задача о необходимом порядке системы моментных уравнений для описания течений при  $Kn \geq 1$ . Предпосылками, позволяющими надеяться на позитивный результат такого исследования, являются следующие обстоятельства:

- метод моментных уравнений не содержит явных ограничений по числам Кнудсена;
- неточности, вносимые замыкающими систему моментами, непосредственно влияют только на высшие моменты системы; уравнения остальных моментов являются прямым следствием кинетического уравнения;
- современные методы и средства многопроцессорной обработки данных позволяют получать численные решения систем моментных уравнений достаточно высокого порядка.

2. Установлена основная причина коротковолновой неустойчивости моментных систем, заключающаяся в несоответствии локального выражения замыкающего момента его моментному уравнению (рассогласование локального и балансового выражений замыкающего момента). Предложены методы частичного устранения этого дефекта. Область решений 24-моментной системы, не содержащих коротковолновой неустойчивости, расширена до области гиперзвуковых течений.

Представляется перспективным распространение разработанных методов снижения коротковолновой неустойчивости на моменты более высокого порядка, чем замыкающий момент. Предполагается проведение исследований в этом направлении на базе 24-моментной системы.

3. Показано, что строгое (не содержащее дополнительных допущений) первое приближение 24-моментной системы уравнений приводит к двум неэквивалентным моделям течения многоатомного газа:

- к модели Навье-Стокса-Фурье с явно выраженным коэффициентом объемной вязкости (5-моментная модель);

– к двухтемпературной модели (6-моментная модель).

Обе модели позволяют определять поступательную и внутреннюю температуры или соответствующие энергии теплового движения. В 5-моментной модели для этого используется коэффициент объемной вязкости. В двухтемпературной модели – дополнительное уравнение энергии.

Показано, что в условиях течения высокой неравновесности 5-моментная модель определяет поступательную и внутреннюю температуры качественно неверно. Качественно верное определение температур в первом приближении дает только двухтемпературная модель.

Установлена причина неэквивалентности 5-моментной и двухтемпературной моделей. Показано, что первого приближения разности температур  $T_t - T_\Omega$  не достаточно для определения самих температур в том же приближении.

Для описания течений высокой степени неравновесности с использованием модели первого приближения рекомендуется применять двухтемпературную модель. Температурную зависимость коэффициента вязкости следует определять через поступательную температуру.

Обе модели первого приближения используются в программных продуктах, разрабатываемых на кафедре "Аэродинамики ЛА" МАИ.

4. Построена модель второго приближения (релаксационная модель), не содержащая посторонних решений, вносимых дополнительным дифференцированием уравнений модели Эйлера. Решение задачи о профиле ударной волны показало, что на границе гиперзвуковой области течения разработанная модель дает физически неадекватные решения. В отношении экономичности решения релаксационная модель существенно уступает моделям, построенным на базе 24-моментной системы уравнений. Дальнейшего исследования релаксационной модели не планируется.

5. Разработана модель граничных условий на твердой поверхности (феноменологическая модель), не имеющая ограничений по числам Кнудсена.

Модель предназначена для определения скорости скольжения и скачка температуры в условиях сильно неравновесного течения. Решение задачи о плоском течении Куэтта показало, что при возрастании числа Кнудсена феноменологическая модель вырождается в точные свободномолекулярные граничные условия с диффузным законом отражения молекул от поверхности.

6. Разработана внепорядковая модель, позволяющая улучшить вязкие свойства моделей первого приближения (5-моментной и 6-моментной). Улучшение вязких свойств достигнуто за счет введения тензорного коэффициента вязкости, имеющего характер феноменологического допущения. В сильнонеравновесном течении внепорядковая модель позволяет получать физически адекватный размер возмущенной области. Поле течения в этой области может существенно отличаться от реального.

Модель используется в программных продуктах кафедры "Аэродинамики ЛА" МАИ, ориентированных на расчет обтекания острых кромок.

7. Разработана гибридная модель неравновесного течения, сочетающая в себе свойства 24-моментной системы и модели первого приближения. Гибридная модель, также как и модели первого приближения, лишена коротковолновой неустойчивости и позволяет получить физически адекватное поле течения в высоко неравновесной области, наследуя позитивные свойства 24-моментной системы.

В отношении экономичности численной реализации эта модель уступает моделям, построенным на базе 24-моментной системы уравнений. Особенностью данной модели является изменение порядка дифференциальных уравнений в зависимости от степени неравновесности течения. Для высоко эффективной численной реализации модели требуется разработка специальных методов решения.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

## Системы координат

Основная система координат:

прямоугольная декартова система координат  $0x_1x_2x_3$ . Векторные и тензорные выражения записаны в индексной форме, соответствующей этой системе координат.

Дополнительная система координат:

прямоугольная декартова система координат  $0XYZ$ , соответствующая главным осям тензора напряжений. Индексы векторов и тензоров в этой системе обозначаются крупными латинскими буквами, например:  $c_X$ ,  $P_{YY}$ ,  $\varphi_{XYZ}$ .

## Операции

Вычисление момента функции распределения:

используется сокращенная запись интегралов по пространству молекулярных скоростей и пространству внутренних энергий молекул:

$$\int \dots d\bar{c} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots dc_1 dc_2 dc_3, \quad \int \dots d\bar{\xi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$\int \dots d\bar{c} d\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 dc_2 dc_3 \int_0^{\infty} \dots d\varepsilon, \quad \int \dots d\bar{\xi} d\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \int_0^{\infty} \dots d\varepsilon$$

Свертка тензора:

обозначена повторяющимися греческими подстрочными индексами, например:

$$P_{\alpha\alpha} \equiv P_{11} + P_{22} + P_{33},$$

$$\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \equiv \varphi_{i11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \varphi_{i12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \varphi_{i13} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \varphi_{i21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \varphi_{i22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \varphi_{i23} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} +$$

$$+ \varphi_{i31} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \varphi_{i32} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \varphi_{i33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Симметрирование тензора (компактное симметрирование):

обозначено подстрочными символами “звездочка” и подразумевает операцию симметрирования с исключением повторений тождественных по величине

одночленов, например для симметричного тензора  $\{M_{ijk}^{(3)}\}$  одна из эквивалентных записей:

$$M_{**\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} \equiv M_{ij\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + M_{ki\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + M_{jka}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$$

Количество звездочек равно рангу тензора.

### Надстрочные и подстрочные символы

$X^+$  (надстрочный символ) обозначает принадлежность величины ( $X$ ) к процессу обратных столкновений молекул.

$\tilde{X}$  (надстрочный символ) используется для обозначения величины ( $X$ ), относящейся к отраженным поверхностью молекулам (Раздел 4).

$\hat{X}$  (надстрочный символ) используется для обозначения величины ( $X$ ), относящейся к падающим на поверхность молекулам (Раздел 4).

$X_\infty$  (подстрочный символ) используется для обозначения величины ( $X$ ), относящейся к невозмущенному потоку.

$X^{[...]}$  надстрочные квадратные скобки обозначают номер приближения, соответствующего приближению процедуры Чепмена-Энскога, например:  $q_i^{[1]}$  - тепловой поток в гидродинамическом (первом) приближении.

### Символы микроскопических величин

$m_0$  - масса молекулы.

$\xi_i = c_i + u_i$  - молекулярная, тепловая и групповая (макроскопическая) скорости.

$\varepsilon$  - внутренняя энергия молекулы.

$f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$  - функция распределения, фазовое пространство, которой содержит подпространство внутренних энергий молекулы  $\varepsilon$ .

$f_0 = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right)$  - равновесная или локально-максвелловская функция

распределения молекул по тепловым скоростям.

$J^-$  – интеграл прямых столкновений

$J^+$  – интеграл обратных столкновений

$\tau$  – среднее время свободного пробега молекулы.

$\frac{1}{\tau^+}$  – средняя частота обратных столкновений молекул.

$\tau_p$  – время релаксации напряжений.

$\tau_\varphi$  – время релаксации теплового потока  $\varphi_i$ , обусловленного поступательным движением молекул.

$\tau_\omega$  – время релаксации теплового потока  $\omega_i$ , обусловленного переносом внутренней энергии молекул.

$\tau_\theta$  – время релаксации разности температур  $\theta$ .

$\tau_4$  – время релаксации моментов четвертого порядка поступательных степеней свободы  $M_{ijkl}^{(4)}$ .

$\tau_{\Omega 4}$  – время релаксации моментов четвертого порядка внутренних степеней свободы  $M_{ij}^{\Omega(4)}$ .

$\lambda = \frac{\mu}{p} \sqrt{RT}$  – средняя длина свободного пробега молекулы.

$$h = \frac{\tau_\theta}{\tau_p}$$

#### Символы макроскопических величин

$n$  – концентрация молекул.

$\rho = m_0 \rho$  – плотность газа.

$u_i$  – проекция вектора макроскопической скорости газа.

$P_{ij}$  – компонент тензора напряжений (потока импульса)

$T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}$  – поток импульса, отнесенный к одной молекуле (единица измерения –

1 кельвин), или удельное напряжение.

$p^m$  – механическое давление.

$p$  – термодинамическое давление.

$T_t$  – поступательная температура

$T_\Omega$  – температура внутренних степеней свободы молекул.

$\theta = T_t - T_\Omega$ .

$T$  – термодинамическая температура.

$E$  – энергия теплового движения молекул (поступательного, вращательного и колебательно), отнесенная к единице объема.

$E_\Omega$  – энергия внутренних степеней свободы молекул (вращательных и колебательных), отнесенная к единице объема.

$p_{ij}^m$  – компонент тензора неравновесных напряжений (механических).

$p_{ij}$  – компонент тензора неравновесных напряжений (термодинамических).

$q_i$  – проекция вектора теплового потока.

$\varphi_i$  – проекции вектора теплового потока, обусловленного только поступательным движением молекул.

$\omega_i$  – проекция вектора теплового потока, обусловленного переносом внутренней энергией молекул.

$$\varpi_i = \frac{\omega_i}{\rho}$$

$\varphi_{ijk}$  – моменты третьего порядка (по поступательным степеням свободы).

$$\psi_{ijk} = \frac{2\varphi_{ijk}}{\rho}$$

$\Delta u$  – скольжение скорости на границе газ – твердая поверхность. В Разделе 4 для обозначения этой величины использован символ  $u$ .

$\Delta T$  – скачок температуры на границе газ – твердая поверхность.



$M_{ijkl}^{(4)}$  – моменты четвертого порядка (по поступательным степеням свободы).

$M_{ij}^{\Omega(4)}$  – моменты четвертого порядка (по внутренним степеням свободы).

$\mu$  – коэффициент вязкости (сдвиговой).

$\mu_{ij} = \tau_p P_{ij}$  – тензорный коэффициент вязкости.

$W$  – степень неравновесности газа.

### Основные константы и критерии подобия

$k$  – постоянная Больцмана.

$c_p, c_v$  – изобарная и изохорная теплоемкости.

$R = \frac{k}{m_0}$  – удельная газовая постоянная.

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  – показатель адиабаты.

$c_{\Omega}$  – теплоемкость внутренних степеней свободы.

$$c_{\omega} = \left( \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} - \frac{15}{4} \right) R = \frac{c_p}{\text{Pr}} - \frac{15}{4} R$$

$$c_{\mu} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5 - 3\gamma}{2} h \right)$$

$$c_{\lambda} = 1 - \left( \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \right) h$$

$\zeta_u, \zeta_{uT}, \zeta_T$  – эмпирические коэффициенты в выражениях скольжения скорости и скачка температура на границе газ - твердая поверхность (граничные условия скольжения).

$s$  – показатель степени температуры в аппроксимациях  $\mu = \mu(T_t^s)$  или  $\mu = \mu(T^s)$ .

$\eta$  – свободный параметр гибридной модели.

$\text{Pr}$  – число Прандтля.

$M$  – число Маха.

$\text{Kn}$  – число Кнудсена.

## Аббревиатуры

НСФ – модель Навье-Стокса-Фурье.

БГК – кинетическая модель Бхатнагара-Гросса-Крука.

М24 – двадцати четырех моментная система уравнений (модель).

М24с и М24сс – двадцати четырех моментные системы уравнений (модели), согласованные по моментам четвертого порядка, см. подраздел 2.4.

М45 – сорока пяти моментная система уравнений (модель).

R13 – регуляризованная тринадцати моментная модель [21].

DSM – метод прямого статистического моделирования.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Берд, Г. Молекулярная газовая динамика / Г.Берд.–М.: Мир, 1981. – 320 с.
2. Больцман, Л. Лекции по теории газов / Л.Больцман. – М.: Гостехиздат, 1956. – 235с.
3. Шахов, Е.М. Метод исследования движений разреженного газа /Е.М.Шахов. – М.: ВЦ АН СССР, 1975. – 207 с.
4. Рыков, В.А. Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы / В.А.Рыков // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1975. – № 6. – С. 107-115.
5. Жданов, В.М. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах / В.М.Жданов, М.Я.Алиевский. –М.: Наука, 1989. – 336 с.
6. Блохинцев, Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды / Д.И.Блохинцев. – М.: Наука, 1981. – 206 с.
7. Титарев, В.А. Течение Пуазейля и термокрип в капилляре на основе кинетической R-модели / В.А.Титарев, Е.М.Шахов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 5. – С. 114-125.
8. Черемисин, Ф.Г. Метод решения кинетического уравнения Больцмана для многоатомного газа / Ф.Г.Черемисин. // Ж. вычислит. матем. и матем. физ.. – 2012. – Т. 52. – № 2. – С. 270-287.
9. Ларина, И.Н. Метод численного решения уравнения Больцмана при малых числах Кнудсена / И.Н.Ларина, В.А.Рыков. // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12. – №6. – С. 109-125.
10. Ларина, И.Н. Исследование медленных течений однокомпонентного газа около кругового цилиндра / И.Н.Ларина, В.А.Рыков. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 6. – С. 146-155.
11. Седов, Л.И. О тензоре энергии – импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах/ Л.И.Седов. // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 164. – №3.

12. Галкин, В.С. К теории объемной вязкости и релаксационного давления / В.С.Галкин, С.В.Русаков. // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып.6. – С. 1062-1075.
13. Коган, М.Н. Динамика разреженного газа / М.Н.Коган.–М.: Наука, 1967. – 440 с.
14. Гусев, В.Н. Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов / В.Н.Гусев, И.В.Егоров, А.Н.Ерофеев, В.П.Провоторов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1999. – №2. – С.128-137.
15. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов: перевод с английского / Г.Грэд // Механика. – 1952. – №4. – С.71-97.
16. Enskog, D. The kinetic theory of phenomena in fairly rare gases / D.Enskog – Upsala, 1917. – 279 p.
17. Chapman, S. On the law of distribution of velocities and on the theory of viscosity and thermal conduction in a non-uniform simple monatomic gas / S.Chapman // Phil. Trans. Roy. Soc.. – 1916. – A 216. – Pp.279.
18. Levermore, C.D. Moment closure hierarchies for kinetic theories / C.D.Levermore // J. Stat. Phys. – 1996. – Vol 83. – No 5/6. – Pp. 1021-1065.
19. Torrilhon, M. Hyperbolic moment equations in kinetic gas theory based on multi-variate Pearson-IV-distributions / M.Torrilhon // Commun. comput.Phys. – 2010. – V7. – № 4. – Pp. 639-673.
20. Holway, L.H., Existence of kinetic theory solutions to the shocks structure problem / L.H.Holway // Phys. Fluids. – 1964. – V.7. – № 6. – Pp. 342-361.
21. Struchtrup, H. Regularization of Grad's 13 moment equations: Derivation and linear analysis / H.Struchtrup, M.Torrilhon // Physics of fluids. – 2003. – V.15, – № 9. – Pp. 2668-2680.
22. Torrilhon, M. Regularized 13-moment equations: shock structure calculations and comparison to Burnett models / M.Torrilhon, H.Struchtrup // J. Fluid Mech. – 2004. – V. 513. – Pp.171-178.

23. Тимохин, М.Ю. Применение системы моментных уравнений R13 для численного моделирования газодинамических течений / М.Ю.Тимохин // Вестник Нижегородского университета. – 2011. – № 4. – С. 1168-1176.

24. Иванов, И.Э. Применение системы моментных уравнений для математического моделирования газовых микротечей / И.Э.Иванов, И.А.Крюков, М.Ю.Тимохин // Ж. вычислит. матем. и матем. физ.. – 2013. – Т.53. – №10. – С. 1721-1738.

25. Жданов, В.М. К кинетической теории многоатомных газов / В.М.Жданов // Ж. эксп. и теор. физ. – 1967. – Т. 53. – С. 2099-2108.

26. Алиевский, М.Я. Релаксация, распространение звука и процессы переноса в молекулярных газах / М.Я.Алиевский // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1970. – № 5. – С. 53-67.

27. Сакабеков, А. Начально-краевые задачи для систем моментных уравнений Больцмана в произвольном приближении / А.Сакабеков // Математический сборник. – 1992. – Т. 183, – № 9. – С. 67-88.

28. Галкин, В.С. Обобщенный метод Чепмена–Энскога: часть 1. Уравнения неравновесной газовой динамики / В.С.Галкин, М.Н.Коган, Н.К.Макашев // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. – Т.5. – № 5. –С. 66-76.

29. Галкин, В.С. Обобщенный метод Чепмена–Энскога: часть 2. Уравнения многоскоростной многотемпературной смеси газов / В.С.Галкин, М.Н.Коган, Н.К.Макашев // Ученые записки ЦАГИ. – 1975. – Т. 6. – № 1. – С. 15-27.

30. Галкин, В.С. Систематизация уравнений релаксационной газовой динамики / В.С.Галкин, С.А.Лосев // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. –2010. – №4. – С. 3-25.

31. Бузыкин, О.Г. О модификациях газодинамических уравнений высших приближений метода Чепмена–Энскога / О.Г.Бузыкин, В.С.Галкин // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2001. – № 3. – С.185-199.

32. Cercignani, C. The Boltzmann equation and its applications / C.Cercignani – N.Y.: Springer, – 988. – 455 p.

33. Галкин, В.С. Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена–Энскога / В.С.Галкин, М.Ш.Шавалиев // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1998. – № 4. – С.3-28.
34. Бузыкин, О.Г. Модификации уравнений Барнетта и задача о структуре ударной волны / О.Г.Бузыкин, В.С.Галкин, В.И.Носик // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1998. – № 3. –С.164-176.
35. Жигулев,В.Н. Уравнения движения неравновесной среды с учетом излучения / В.Н.Жигулев // Инженерный журнал. – 1964. –Т. 4. – С. 231-241.
36. Галкин, В.С. Вывод уравнений медленных течений смесей газов из уравнений Больцмана / В.С.Галкин // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. – Т. 5. – № 4. – С.40-47.
37. Брыкина, И.Г. Континуальные модели разреженных потоков газа в задачах гиперзвуковой аэродинамики / И.Г.Брыкина, Б.В.Рогов, Г.А.Тирский // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70. – Вып. 6. – С. 990 – 1016.
38. Лебле, С.Б. Уравнения трехмерной динамики газа по функции распределения с разрывом в пространстве скоростей / С.Б.Лебле, М.А.Соловчук // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18. – № 4. – С. 118-128.
39. Никитченко, Ю.А. Модель течения газа вблизи поверхности раздела сред / Ю.А.Никитченко // Математическое моделирование. – 2003. – Т.15. – №8. – С. 88-98.
40. Никитченко, Ю.А. Сравнение различных моделей течения газа в широком интервале чисел Кнудсена / Ю.А.Никитченко // Математическое моделирование. – 2004. – Т.16. – № 8. – С. 77-93.
41. Holway, L.H. New statistical models in kinetic theory: methods of construction / L.H.Holway // Phys. Fluids. – 1966. – V. 3. – № 3.
42. Pearson, K. Mathematical contributions to the theory of evolution: – X. Supplement to a memoir on skew variation / K.Pearson // Phil. Trans. Royal Soc. London A 197, (1901)443.

43. Pearson, K. Mathematical contributions to the theory of evolution: – XIX. Second supplement to a memoir on skew variation / K.Pearson // Phil. Trans. Royal Soc. London A 216, (1916)429.

44. Поткин, В.А. Кинетический анализ разностных схем для газовой динамики / В.А.Поткин // Журнал выч. матем. и матем. физ. – 1975. – Т.15. – № 6. – С. 1492-1498.

45. Волочинская, М.И. Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики / М.И.Волочинская, А.Н.Павлов, Б.Н.Четверушкин –М., 1983. – 215с. – Препринт №113 ИПМ им. Келдыша АН СССР.

46. Deshpande, S.M. On the maxwellian distribution symmetric form and entropy conservation for Euler equations / S.M.Deshpande // NASA Technical Paper 2583. – 1986.

47. Deshpande, S.M. Kinetic flux splitting schemes. In: Comp. Dynamic Rev. / S.M.Deshpande. – J. Wiley: Chichester, 1995, – Pp. 161-181.

48. Елизарова, Т.Г. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений: сб. Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах / Т.Г.Елизарова, Б.Н.Четверушкин // –М.: Наука, 1986. – С. 261-278.

49. Елизарова, Т.Г. Макроскопическая модель газа с поступательно-вращательной неравновесностью / Т.Г.Елизарова, И.А.Широков // Журнал выч. матем. и матем. физ. – 1999. – № 1. – С.141-153.

50. Жигулев, В.Н. Об уравнениях физической аэродинамики / В.Н.Жигулев // Инженерный журнал. – 1963. – Т. 3. – № 1. – С. 137-139.

51. Кнезер Г. Релаксационные процессы в газах: Физическая акустика: т. 2: ч. А / Г.Кнезер; под ред. У. Мэзона: пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – С. 155-221.

52. Жигулев, В.Н. Некоторые проблемы физической аэродинамики / В.Н.Жигулев, В.М.Кузнецов //Труды ЦАГИ. – 1969. – Вып. 1136. – С. 1-26.

53. Lordi, J. A. Rotational relaxation in nonpolar diatomic gases / J.Lordi, R.E.Mates // Phys. Fluids. – 1970. – Vol. 13. - № 2. – Pp. 121-132.

54. Галкин, В.С. О точности модифицированной поправки Эйкена к коэффициенту теплопроводности молекулярных газов / В.С.Галкин, С.В.Русаков // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 4. – С. 180–185.
55. Никитченко, Ю.А. Система моментных уравнений многоатомных газов / Ю.А.Никитченко // Полет. – 2010. – № 11. – С. 43-51.
56. Никитченко, Ю.А. Модели неравновесных течений: монография / Ю.А.Никитченко. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.
57. Ларина, И.Н. Подобие гиперзвуковых течений разреженного газа около тупых тел / И.Н.Ларина, В.А.Рыков // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1981. – № 2. – С. 130-135.
58. Bird, G.A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows / G.A.Bird. – Oxford: Clarendon Press, 1994. – 420 p.
59. Carnevale, E.H. Ultrasonic determination of rotational collision numbers and vibrational relaxation times of polyatomic gasses at high temperatures / E.H.Carnevale, C.Carey, G.Larson // J. Chem. Phys. – 1967. – V. 47, – № 8. – Pp. 2829-2835.
60. Prangma, G.J. Ultrasonic determination of the volume viscosity of  $N_2$ ,  $CO$ ,  $CH_4$ , and  $CD_4$  between 77 and 300 K / G.J.Prangma, A.H.Alberga, J.M.Beenakker // Physica. – 1973. – V. 64. – № 2. – Pp. 278-288.
61. Никитченко, Ю.А. Применение модели Навье–Стокса–Фурье к расчету гиперзвукового обтекания тонкой пластины / Ю.А.Никитченко // Вестник МАИ. – 2011. – Т. 18. – № 3. – С. 21-28.
62. Никитченко, Ю.А. Снижение коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений за счет ее расширения / Ю.А.Никитченко // Ученые записки ЦАГИ. – 2015. – Т. 46. – № 1. – С. 72-84.
63. Никитченко, Ю.А. Оценка эффективности методов распараллеливания вычислений в задачах динамики разреженных газов / Ю.А.Никитченко, Ю.А.Рыжов, С.А.Попов, О.Ю.Власов // Научный вестник МГТУ ГА. – 2015. – № 211. – С. 85-92.
64. Пирумов, У.Г. Численные методы газовой динамики: учебное пособие / У.Г.Пирумов, Г.С.Росляков. –М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.



65. Никитченко, Ю.А. Моментные модели для течений с большим числом Маха / Ю.А.Никитченко // Вестник МАИ. – 2014. – Т.21. – № 4. – С. 39-48.
66. Никитченко, Ю.А., Модели первого и второго приближений для течений многоатомных газов / Ю.А.Никитченко // Вестник МАИ. – 2012. – Т. 19. – № 2. – С. 11-17.
67. Никитченко, Ю.А. Модели первого приближения для неравновесных течений многоатомных газов / Ю.А.Никитченко // Электронный журнал Труды МАИ. – 2014, – № 77.
68. Ландау, Л.Д. Механика сплошных сред / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц –М.: Наука, 1954. – 520с.
69. Физическая энциклопедия: Т.3. –М.: Изд-во «Большая Российская энциклопедия», 1992.
70. Nocilla, S. The surface re-emission law in free molecular flow / S.Nocilla // Proc. of 3rd Int. symp. on rarefied gas dynamics. 1963. V.1. Pp. 327-346.
71. Черчиньяни, К. Математические методы в кинетической теории газов / К.Черчиньяни. –М.: Наука, 1973. –245 с.
72. Баранцев, Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями / Р.Г.Баранцев. –М.: Наука, 1975. –343 с.
73. Gross, E.F. Boundary value problems in kinetic theory of gases / E.F.Gross, E.A.Jackson, S.Ziering // Ann. Phys. – 1957. – V. 1. – № 2. – Pp. 141-167.
74. Ивченко, И.М. Кинетическая теория течения газа, находящегося над твердой стенкой в поле градиента скорости / И.М.Ивченко, Ю.И.Яламов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1968. – № 6. – С. 139-143.
75. Loyalka, S.K. Approximate method in the kinetic theory / S.K.Loyalka // Phys. Fluids. – 1971. – V. 14. – № 11. – Pp. 2291-2294.
76. Савков, С.А. О зависимости коэффициентов скольжения от характера взаимодействия молекул газа с твердой поверхностью / С.А.Савков, А.А.Юшканов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1986. – № 5. – С. 149-152.

77. Sone, Y. Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary / Y.Sone // Rarefied gas dynamics. – N.Y.; L.: Acad. Press. 1969. – V. 1. – Pp. 243-253.
78. Поддоскин, А.Б. Скольжение двухатомного газа вдоль плоской поверхности / А.Б.Поддоскин, А.А.Юшканов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1998. – № 5. – С. 182-189.
79. Латышев, А.В. Моментные граничные условия в задачах скольжения разреженного газа / А.В.Латышев, А.А.Юшканов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2004. – № 2. – С. 193-208.
80. Поддоскин, А.Б. Влияние неупругих столкновений на коэффициенты скольжения первого порядка двухатомного газа с вращательными степенями свободы / А.Б.Поддоскин // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2004. – № 6. – С. 176-182.
81. Welander P. / P.Welander. Arkiv far Fysik 7, Hafte 6, 507 (1954).
82. Свирцевский, С.Б. Кинетические методы в аэрогазодинамике: учебное пособие / С.Б.Свирцевский, Ю.А.Никитченко. – М.: Изд-во МАИ, 2001. – 63 с.
83. Mott-Smith, H.M. The solution of the Boltzmann equation for a shock wave / H.M.Mott-Smith // Phys. Rev., – 82(6): 885.
84. Никитченко, Ю.А. Феноменологическая модель граничных условий на твердой поверхности / Ю.А.Никитченко // Вестник МАИ. – 2012. – Т. 19. – №3. – С. 5-14.
85. Черный, Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью / Г.Г.Черный. – М.: Физматгиз, 1959. – 220с.
86. Zhong, X. Stabilization of the Burnett equations and application to hypersonic flows / X.Zhong, R.W.MacCormack, D.R.Chapman // AIAA Journal. – 1993. – V. 31. – № 6. – Pp. 1036-1043.
87. Lumpkin, F.E. III, A new rotational relaxation model for use in hypersonic computational fluid dynamics / F.E.Lumpkin III, D.R.Chapman // AIAA Paper 89-1737. 1989.

88. Lumpkin, F.E. III, Accuracy of the Burnett equations for hypersonic real gas flows / F.E.Lumpkin III, D.R.Chapman // Journal of thermophysics and heat transfer. – 1992. – Vol. 6. – № 3, july-sept.
89. Chapman D.R., Fisco K.A., Lumpkin F.E. Fundamental problem in computing radiating flow fields with thick shocks / D.R.Chapman, K.A.Fisco, F.E.Lumpkin // SPIE proc. on sens. distr. – 1988. – V. 879. – Pp. 106-112.
90. Никитченко, Ю.А. Инженерная модель неравновесного течения / Ю.А.Никитченко // Изв. Вузов. Авиационная техника. – 2014. – № 3. – С. 37-40.
91. Holtz, T. Molecular velocity distribution functions in an argon normal shock wave at Mach number 7 / T.Holtz, E.P.Muntz // Phys. Fluids. – 1983. – 26 (9). – Pp. 2425-2436.
92. Alsmeyer, H. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam / H.Alsmeier // J. Fluid Mech. – 1976. – V. 74. – Pt. 3. – Pp. 497-513.
93. Рыжов, Ю.А. Гибридная модель гиперзвукового течения / Ю.А.Рыжов, Ю.А.Никитченко, С.А.Попов // Изв. Вузов. Авиационная техника. – 2015. – № 1. – С. 7-11.
94. Teagan, W.P. Heat-transfer and density-distribution measurements between parallel plates in the transition regime / W.P.Teagan, G.S.Springer // The Physics of Fluids, – 1968. – V. 11, – № 3. – Pp. 497-506.
95. Кошмаров, Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа / Ю.А.Кошмаров, Ю.А.Рыжов. – М.: Машиностроение, 1977. – 184 с.
96. Alofs, H. Cylindrical Couette flow experiments in the transition regime / H.Alofs, G.S.Springer // The Physics of Fluids. – 1971. – V. 14. – № 2. – Pp. 298-305.
97. Schmidt, B. Electron beam density measurements in argon / B.Schmidt // J. Fluid Mech. – 1969. – № 39. – Pp. 361-366.
98. Robben, F. Experimental study of the rotational distribution function of nitrogen in a shock wave / F.Robben, L.Talbot // Phys. Fluids. – 1966. – V. 9. – № 4. – Pp. 653-662.

99. Becker, M. Flow field and surface pressure measurements in the fully merged and transition flow regimes on a cooled sharp flat plate: *Rarefied Gas Dynamics*, Suppl. 4, Vol. 2, / M.Becker, D.E.Boyland; ed. by C.L. Brundin. – New York: Academic Press. 1967. Pp. 993-1014.

100. Tannehill, J.C. Numerical computation of the hypersonic rarefied flow near the sharp leading edge of a flat plate / J.C.Tannehill, R.A.Mohling, J.V.Rakich // *AIAA Paper*. – 1973. – №73-200. – Pp. 1-13.

101 Butler, T.D. Numerical Solutions of Hypersonic Sharp-Leading-Edge Flows / T.D.Butler // *The Physics of Fluids*. – 1967. – Vol. 10. – No. 6.. – Pp. 1205-1215.

102. Stookesberry, D.C. Computation of separated flow using the space-marching conservative supra-characteristics method / D.C.Stookesberry, J.C.Tannehill // *AIAA Journal*. – 1987. – V. 25. – №8. – Pp. 1063-1070.

103. Kuznetsov, M.M. Rheology of rarefied gas flow in hypersonic shock and boundary layers / M.M.Kuznetsov, I.I.Lipatov, V.S.Nikolskii // *Fluid Dynamics*. – 2007. – V.42. – № 5. – Pp. 851-857.

104. Рыжов, Ю.А. Численное исследование гиперзвукового обтекания острой кромки на основе модели Навье–Стокса–Фурье / Ю.А.Рыжов, Ю.А.Никитченко, И.В.Парамонов // *Электронный журнал Труды МАИ*. – 2012. – № 55. – 9 с.

105. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: том 2 / К.Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 552с.

106. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: том 1 / К.Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 502с.