

Институт проблем машиностроения Российской академии наук  
(ИПМ РАН)

На правах рукописи

**АРХИПОВА Наталья Игоревна**



**ПРИМЕНЕНИЕ УТОЧНЕННЫХ ТЕОРИЙ СТЕРЖНЕЙ И  
ПЛАСТИН ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ  
ВОЛН В СОСТАВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор В.И. Ерофеев

Нижний Новгород – 2017

## Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Некоторые уточненные модели, описывающие распространение продольных и изгибных волн в стержнях и пластинах.....	9
1.1. Стержень Миндлина-Германа.....	10
1.2. Балка Тимошенко.....	14
1.3. Пластина Тимошенко.....	22
Глава 2. Продольные волны в составном стержне.....	25
2.1. Линейно-упругий закон контактного взаимодействия.....	26
2.2. Линейный вязкоупругий закон контактного взаимодействия.....	33
2.3. Составной нелинейно-упругий стержень.....	41
Глава 3. Поперечные волны в составной струне и составной мембране.....	47
3.1. Поперечные волны в составной струне при линейно-упругом законе контактного взаимодействия.....	48
3.2. Поперечные волны в составной нелинейно-упругой струне.....	50
3.3. Поперечные волны в составной мембране.....	55
3.4. Поперечные волны в составной мембране с учетом геометрической нелинейности.....	59
Заключение.....	81
Список литературы.....	83

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность темы.** В современном мире жесткие условия эксплуатации объектов из новых композиционных материалов, диктуют высокие требования к точности исследования (расчета) напряженно-деформированного состояния, поэтому использование классической теории пластин и оболочек (классических инженерных теорий) становится затруднительно. В связи с этим в инженерной практике наиболее приемлемо использовать уточненные (неклассические) теории (Рэлея-Лява, Бишопа, Миндлина-Германа, Тимошенко), которые учитывают дисперсионные, а иногда и нелинейные эффекты.

Кроме того, анализ причин технических аварий объектов показывает, что огромного их числа можно было избежать при наличии необходимых средств неразрушающего контроля и диагностики состояния составных элементов конструкций.

Задачи о распространении продольных и изгибных волн находят свое применение в следующих областях:

1. Расчеты напряженно-деформированного состояния, решение задач устойчивости элементов современных конструкций, рассматривающиеся в виде составных систем, в машиностроении.
2. Расчеты мощных ультразвуковых и виброударных установок, с учетом влияния нелинейных эффектов. Нелинейность также учитывается в задачах акустодиагностики.
3. Проверка конструкций на наличие скрытых дефектов – метод неразрушающего контроля. Данный метод применим при производстве материалов и на стадии эксплуатации конструкций. Направленные упругие волны могут распространяться на значительные расстояния без существенного затухания, что позволяет проводить дефектоскопию в труднодоступных местах.

Диссертационная работа проводилась по программе ФНИ Государственных академий наук на 2013-2020гг. (Раздел 3 «Технические

науки». Подраздел 30 «Методы анализа и синтеза многофункциональных механизмов и машин для перспективных технологий и новых человеко-машинных комплексов. Динамические и виброакустические процессы в технике»). По теме 0055-2014-0002, № госрегистрации 01201458047. Развитие теории нелинейной волновой динамики и виброакустики машин и ее приложение к анализу устойчивости распределенных механических систем с высокоскоростными движущимися нагрузками, созданию методов и средств диагностики конструкций на ранних стадиях повреждения и разработке высокоэффективных адаптивных систем виброзащиты машин. (Научный руководитель: профессор Ерофеев В.И.)

и при поддержке:

- Гранта Российского научного фонда «Динамика и устойчивость систем «грунт-рельсовая направляющая – высокоскоростной движущийся объект» с учетом эффектов излучения волн и накопления повреждений в материалах конструкций» (РНФ №14-19-01637 (конкурс «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами»); руководитель: профессор Ерофеев В.И.);
- Гранта Российского фонда фундаментальных исследований «Исследование объемных и поверхностных волн в составных элементах конструкций на основе уточненных моделей для акустической диагностики механических неоднородностей при неразрушающем контроле изделий» (РФФИ № 16-38-00426 мол\_a; руководитель: аспирант Архипова Н.И.);
- Гранта в рамках государственных заданий в сфере научной деятельности по теме «Оптимизация энергетических и вибрационных характеристик регулируемых автономных электромеханических систем с новым классом адаптивных полупроводниковых преобразователей» (№8.2668.2014/К; руководитель: профессор Ерофеев В.И.).

## **Цель работы**

состоит в исследовании дисперсионных, диссипативных и нелинейных эффектов, проявляющихся при распространении продольных и поперечных волн в составных элементах конструкций.

В соответствии с изложенной целью в работе поставлены и решены следующие **задачи**:

- Выбор математических моделей, описывающих продольные и поперечные колебания составных стержней и пластин.
- Выполнение аналитических и численных решений ряда задач о распространении упругих волн в составных элементах конструкций.
- Выявление соотношений, связывающих характеристики исследуемых математических моделей стержней и пластин с параметрами уточненных (неклассических) моделей.

## **Научная новизна**

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Впервые предложен и теоретически обоснован подход, позволяющий исследовать динамику составных элементов конструкций, основанный на применении уточненных моделей стержней и пластин.
- Впервые определено, что математическая модель, описывающая продольные колебания составного стержня, по своим дисперсионным свойствам эквивалентна модели Миндлина-Германа.
- Получено, что составная струна, совершающая поперечные колебания, эквивалентна балке Тимошенко с натягом; составная мембрана эквивалентна пластине Тимошенко с натягом.
- Проведен анализ дисперсионных и диссипативных свойств волн, распространяющихся в составном стержне с вязкоупругой силой контактного взаимодействия.

– Впервые показано, что в составном стержне могут существовать нелинейные уединенные стационарные волны, и исследованы особенности их распространения.

– В рамках математической модели составной мембраны с учетом геометрической нелинейности получены и исследованы одномерные и двумерные солитоны, а также представлены различные формы нелинейных периодических колебаний.

### **Практическая значимость**

Дисперсионные и диссипативные зависимости, связывающие параметры упругих волн, могут найти применение при разработке методов расчета элементов конструкций на прочность, устойчивость.

Значение проводимых исследований будет способствовать разработке новых методов и средств неразрушающего контроля материалов и элементов конструкций для предприятий разных отраслей промышленности.

### **Методы исследования**

При проведении исследований использованы методы механики сплошных сред, теории колебаний и волн.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается их согласованностью с общими положениями механики сплошных сред, теории колебаний и волн, а также согласованностью результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

### **На защиту выносятся**

– Результаты исследований распространения продольных волн, в том числе существование нелинейных уединенных стационарных волн в составном стержне.

– Математические модели, описывающие поперечные колебания в составной струне и составной мембране с линейно-упругими силами контактного взаимодействия.

– Анализ качественно различных случаев поведения солитонов в составной мембране.

### **Апробация работы**

Результаты работы докладывались и обсуждались: на международной инновационно-ориентированной конференция молодых ученых и студентов, (14-17 декабря, 2011, Москва), на X Всероссийском совещании-семинаре «Инженерно-физические проблемы новой техники», (17-19 апреля, 2012, Москва), на IX Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем», (24-29 сентября, 2012, Нижний Новгород), на Седьмой Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», (29-31 января, 2013, Москва), на 18-й Нижегородской сессии молодых ученых «Технические науки», (19-22 марта, 2013, Нижний Новгород), на международной научной конференция «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур», (16-20 сентября, 2013, Минск, Республика Беларусь), на 2-й Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем», (17-19 декабря, 2013, Москва), на 19-й Нижегородской сессии молодых ученых «Технические науки», (18-21 марта, 2014 ,Нижний Новгород), на XLII международной конференции “Advanced Problems in Mechanics (APM-2014)”, (June 30 - July 5, 2014, St. Petersburg, Russia), Proceedings of International Conference on Informatics, Networking and Intelligent Computing (INIC 2014, 16-17 November, 2014, Shenzhen, China), на Восьмой Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», (27-29 января, 2015, Москва), на III Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (19-21 октября, 2015, Москва), на Всероссийской конференции, посвященной 95-летию со дня рождения А.Г. Угодчикова и 40-летию Научно-исследовательского института механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

«Проблемы прочности, динамики и ресурса» (16-19 ноября, 2015, Нижний Новгород), на X Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем», (26-29 сентября, 2016, Нижний Новгород), на V Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (17-19 октября, 2016, Москва).

Работа была поддержана стипендией академика Г.А. Разуваева, а также почетным дипломом «За наиболее интересное научное сообщение» на XXIII международной инновационной конференции молодых ученых и студентов (Москва, 2011г.), дипломом 3 степени министерства образования Нижегородской области на 18-й Нижегородской сессии молодых учёных в 2013г, дипломом 3 степени министерства образования Нижегородской области на 19 Нижегородской сессии молодых учёных в 2014г.

### **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 23 научных работ [106-128], 4 из которых [106-109] - статьи из перечня журналов, рекомендуемых ВАК РФ.



# **ГЛАВА 1. НЕКОТОРЫЕ УТОЧНЕННЫЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ И ИЗГИБНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ И ПЛАСТИНАХ**

Теории стержней и пластин посвящена обширная литература [1-101]. Наряду с инженерными (классическими) моделями в динамике стержней существуют, так называемые, уточненные или неклассические модели. Эти модели учитывают дополнительные факторы, влияющие на динамический процесс, или свободны от некоторых гипотез, принятых в инженерных теориях и ограничивающих область их применимости.

Классическую теорию Д. Бернулли, принятую при описании продольных колебаний стержня, обобщают модели Релея-Лява (учет кинетической энергии поперечных движений частиц стержня), Бишопа (учет еще и потенциальной энергии сдвиговых деформаций), Миндлина-Германа (свобода от гипотезы об одноосности деформированного состояния стержня).

Классическую теорию Я. Бернулли и Л. Эйлера, принятую при описании изгибных колебаний стержня, обобщают модели Релея (учет кинетической энергии инерции вращения элемента стержня при изгибе) и Тимошенко (учет еще и потенциальной энергии сдвиговых деформаций при изгибе).

Для изгибных колебаний техническую теорию Кирхгофа уточняет теория Тимошенко.

Уточненные модели применяют, как правило. При описании высокочастотных волновых процессов, когда длина волны становится сравнимой с диаметром поперечного сечения стержня и инженерные модели принципиально неприменимы. Однако в упомянутом частотном диапазоне следует учитывать многомодовость волнового процесса и предпочтение, чаще всего, отдается не уточненным стержневым моделям, а моделям твердотельных

многомодовых волноводов – упругий слой (зада Лэмба) и толстостенный цилиндр (задача Похгаммера-Кри).

В этой главе остановимся на основных положениях трех уточненных теориях, которыми будем пользоваться в последующих главах: теории Миндлина-Германа для стержня, совершающего продольные колебания; теории Тимошенко для стержня и пластины, совершающих изгибные колебания.

Математическая модель стержня, соответствующая теории Миндлина-Германа, в механике часто называется «стержнем Миндлина-Германа», модели стержня и пластины, соответствующие теории Тимошенко, часто называются «балкой Тимошенко» и «пластиной Тимошенко». В нашей работе также будет использоваться эта терминология.

### 1.1. Стержень Миндлина-Германа

Уточненная теория, наиболее точно описывающая дисперсию продольных волн, была построена Миндлиным и Германом [17]. Как отметил в своей книге Э.И. Григолюк: «Двумодовая аппроксимация модели Миндлина-Германа существенно лучше описывает динамику стержня, чем одномодовые аппроксимации. Модель Миндлина-Германа является гиперболической».

При выводе уравнений Миндлина-Германа следует отказаться от гипотезы об одноосности деформированного состояния стержня. Для описания движения частиц стержня в поперечном направлении необходимо ввести еще одну функцию  $w(x, t)$ , а так же принять систему перемещений:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, t), \\ u_2(x, y, z, t) &= \frac{y}{\alpha} w(x, t), \\ u_3(x, y, z, t) &= \frac{z}{\alpha} w(x, t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

здесь  $\alpha$  – радиус стержня.

Тогда кинетическая и потенциальная энергии, согласно [13], равны:

$$W_k = \frac{\rho F}{2} \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \quad (1.2)$$

$$W_n = F \int_0^1 \left[ \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\aleph_1^2 \mu}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\aleph_2^2}{\alpha^2} (\lambda + \mu) w^2 + \frac{2\aleph_2^2 \lambda}{\alpha} w \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx, \quad (1.3)$$

здесь  $\aleph_{1,2}$  – корректирующий коэффициент.

Уравнения Миндлина-Германа, описывающие продольные колебания, согласно [13], имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \aleph_2^2 \frac{2\lambda}{\alpha \rho} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \aleph_1^2 c_\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{8\aleph_2^2 (\lambda + \mu)}{\alpha^2 \rho} w + \frac{4\aleph_2^2 \lambda}{\alpha \rho} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Представим продольное и поперечное перемещения в комплексной форме гармонических волн для исследования дисперсионных свойств системы.

$$u = u_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad w = w_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (1.5)$$

Подставляя соотношение (1.5) в уравнение (1.4), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + c_1^2 k^2) u_0 + \aleph_2^2 \frac{2\lambda}{\alpha \rho} i k w_0 &= 0; \\ \left[ -\omega^2 + \aleph_1^2 c_\tau^2 k^2 + \frac{8\aleph_2^2 (\lambda + \mu)}{\alpha^2 \rho} \right] w_0 - \frac{4\aleph_2^2 \lambda}{\alpha \rho} i k u_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Откуда частота и волновое число связаны дисперсионным уравнением:

$$(-\omega^2 + c_1^2 k^2) \left[ -\omega^2 + \aleph_1^2 c_\tau^2 k^2 + \frac{8\aleph_2^2 (\lambda + \mu)}{\alpha^2 \rho} \right] - \frac{8\lambda^2 \aleph_2^4}{\alpha^2 \rho^2} k^2 = 0. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) является биквадратным относительно и частоты и волнового числа. Это означает, что имеются две дисперсионные ветви, одна из которых выходит из начала координат, а вторая из точки  $\omega = \frac{2\kappa_2}{\alpha} \sqrt{\frac{2(\lambda + \mu)}{\rho}}, k = 0$ .

Дисперсионные зависимости представлены на рис.1.1а, закон изменения фазовой скорости в зависимости от частоты приведен на рис.1.1б.

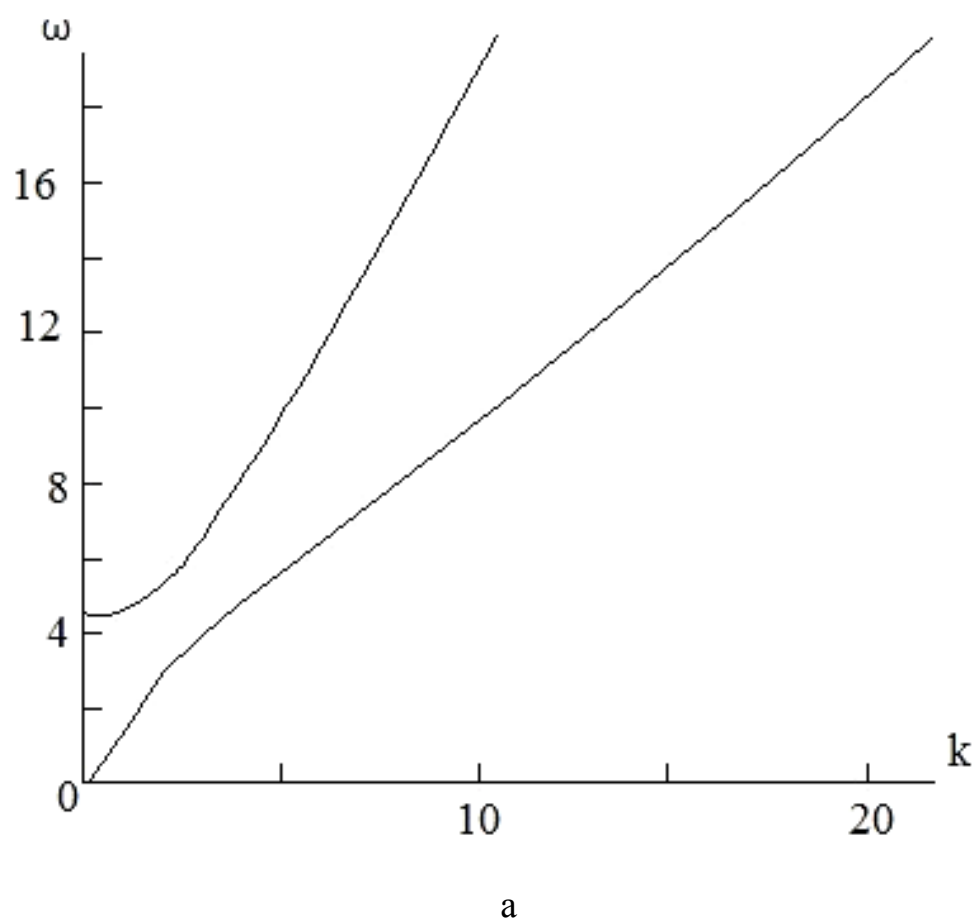


Рис. 1.1 а – зависимость частоты от волнового числа.

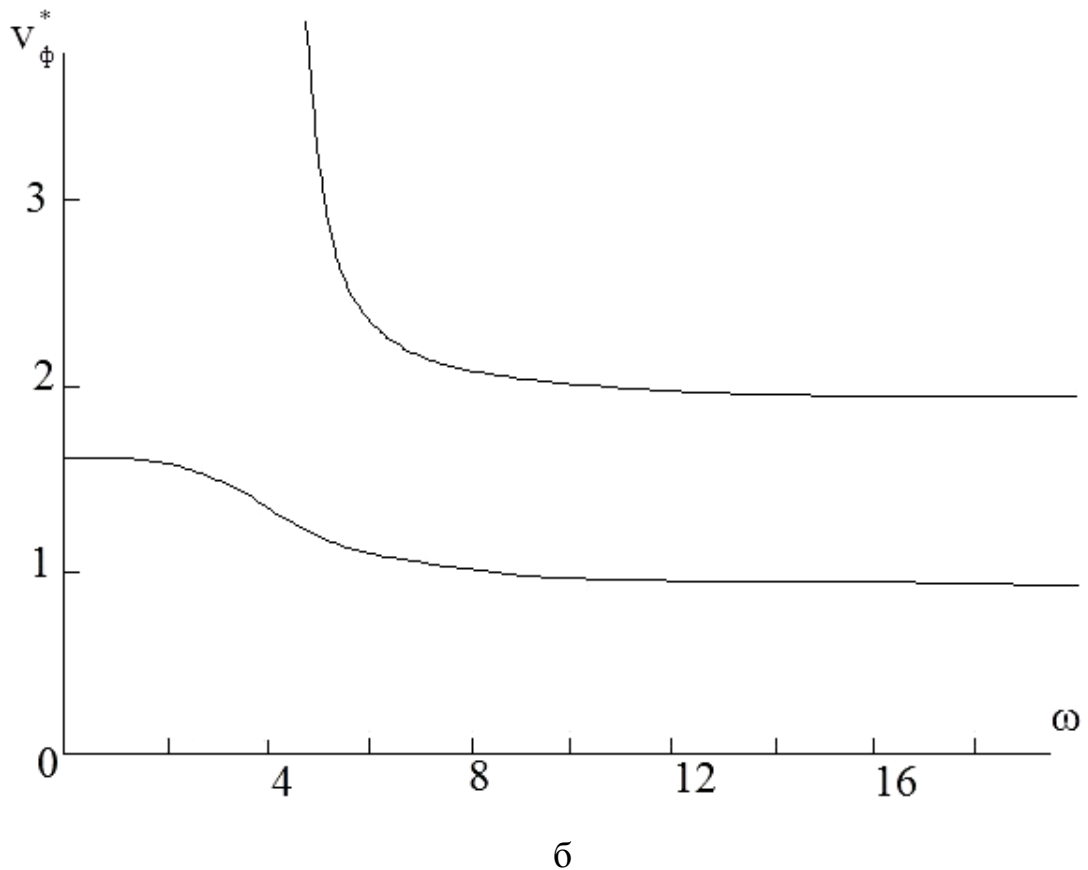


Рис. 1.1 б – зависимость фазовой скорости от частоты.

При учёте геометрической и физической нелинейности, приходим к нелинейной обобщенной уточненной математической модели.

Нелинейное обобщение модели Миндлина-Германа было рассмотрено в работах В.И. Ерофеева, Н.В. Ключевой и Н.П. Семериковой [21,22,23].

В указанных работах так же изучаются особенности распространения нелинейных стационарных волн деформации: периодических волн и солитонов [13].

Согласно определению в [24]: «Солитоны – структурно устойчивая уединенная волна в нелинейной диспергирующей среде. Солитоны ведут себя подобно частицам: при взаимодействии между собой и некоторыми другими возмущениями солитоны не разрушаются, а расходятся вновь, сохраняя свою структуру неизменной».

Солитонам посвящена обширная литература [25-28]. Физика солитонов изложена в [29].

## 1.2. Балка Тимошенко

Обобщением классической теории изгибных колебаний стержня является уточненная теория, разработанная С.П. Тимошенко, основанная на предположениях [55-59]:

1. Поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформированной оси стержня;
2. Нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, пренебрежимо малы;
3. Учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом сечений.

Обратим внимание на первое предположение, из которого следует необходимость учёта сдвиговых деформаций.

Угол поворота сечения (рис. 1.2) при малых поперечных перемещениях

$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1\right)$  будет равен:

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta, \quad (1.8)$$

где  $\beta$  – угол сдвига.

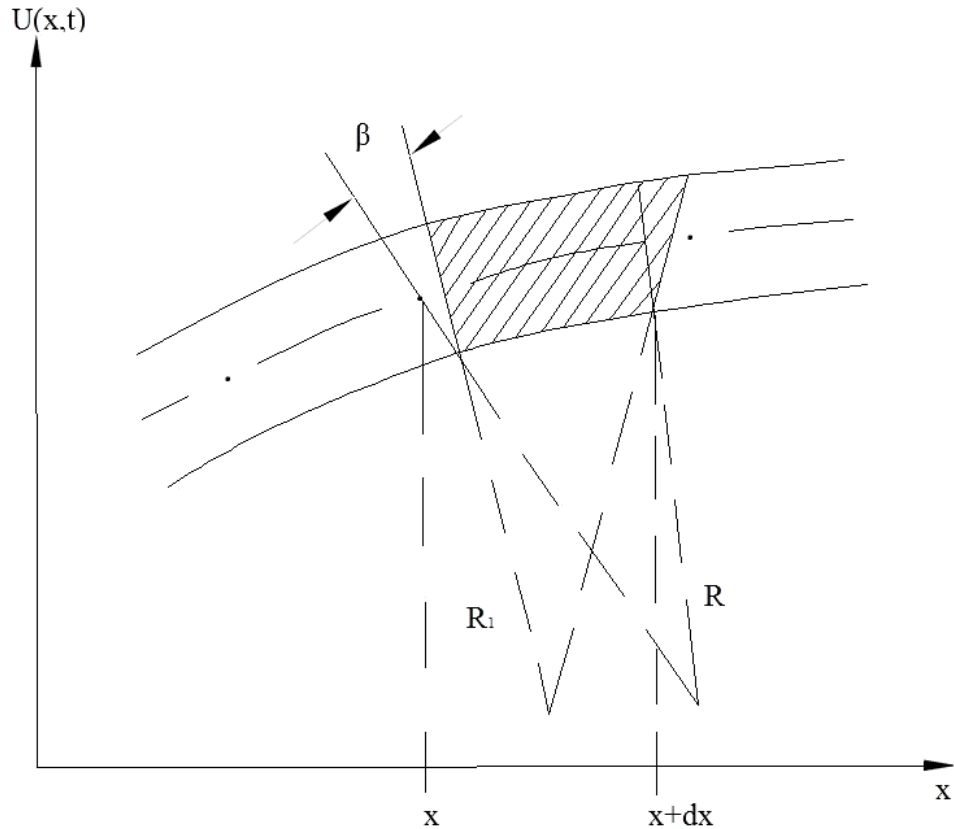


Рис. 1.2 Изгиб балки с учетом сдвиговых деформаций.

Плотность кинетической энергии, при переходе к обобщенным координатам в виде поперечных перемещений срединной линии стержня  $w(x, t)$  и угла поворота сечения  $\varphi(x, t)$ , согласно [13], определяется по формуле:

$$W_k = \frac{1}{2} \left[ \rho F \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho J_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \quad (1.9)$$

а плотность потенциальной энергии, согласно [13]:

$$W_n = \frac{1}{2} \left[ EJ_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \kappa \mu F \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)^2 \right] dx. \quad (1.10)$$

Выражение (1.10) состоит из двух частей:

1.  $\frac{1}{2} \mu F \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)^2$  – потенциальная энергия сдвига;

$$2. \frac{1}{2} \frac{EJ_y}{(R')^2} \cong \frac{1}{2} EJ_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx - \text{потенциальная энергия изгиба, где}$$

$$R' = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \right) \right]^{-1} - \text{новый радиус кривизны.}$$

Корректирующий коэффициент  $\aleph$ , учитывающий отклонение от теории плоских сечений, зависит от способа определения среднего значения для угла сдвига и характера распределения сдвигов по сечению.

По формуле Журавского определяются касательные напряжения, возникающие при изгибе:

$$\sigma_{13} = \frac{QS}{J_y b}, \quad (1.11)$$

где  $Q$  - поперечная сила ;  $S$  - статический момент части сечения, отсеченного плоскостью  $z = \text{const}$  ;  $b$  - ширина поперечного сечения при  $z = \text{const}$ , а под  $\beta$  понимается среднеквадратичное значение:

$$\beta^2 = \frac{1}{F} \iint_F (2\varepsilon_{13})^2 dF.$$

Тогда  $\aleph$  определяется по формуле:

$$\frac{1}{\aleph} = \frac{F}{J_y} \iint_F \frac{S^2 dF}{b^2}.$$

Для стержней прямоугольного сечения полагают  $\aleph=5/6$ .

Динамическое поведение стержня по теории Тимошенко, согласно [13], представлено в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \aleph \mu F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \aleph \mu F \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \rho J_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - EJ_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \aleph \mu F \left( \varphi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$



Для перехода к уравнению Тимошенко (односкалярное описание изгибных колебаний), необходимо из первого уравнения выразить  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  через производные

$w$ , подставить во второе уравнение, предварительно продифференцировав его по  $x$ .

Тогда:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho J_y \left( 1 + \frac{E}{\aleph \mu} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J_y}{\aleph \mu} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0. \quad (1.13)$$

Следует обратить внимание, что в случае  $\aleph=1$  уравнение (1.13) будет носить название уравнение Бресса.

Решение уравнения (1.13), которое как и в предыдущих моделях находится в виде бегущей гармонической волны, приведет к дисперсионному уравнению четвертого порядка по  $k$  и четвертого порядка по  $\omega$ .

$$\omega^4 - k^2 \omega^2 \left( c_0^2 + \aleph c_\tau^2 + \frac{c_\tau^2}{r_y^2 k^2} \right) + \aleph c_0^2 c_\tau^2 k^4 = 0. \quad (1.14)$$

Дисперсионное соотношение запишется в виде:

$$k = \left\{ \left( \omega^2 c_0^2 + \omega^2 \aleph c_\tau^2 \right) r_y \pm \omega \left[ \omega^2 c_0^4 r_y^2 - 2 \omega^2 c_0^2 \aleph c_\tau^2 r_y^2 + \omega^2 \aleph^2 c_\tau^4 r_y^2 + 4 \aleph c_0^2 c_\tau^4 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} / \left[ 2 \aleph c_0^2 c_\tau^2 r_y \right]^{1/2}$$

На рис.1.3 изображены дисперсионные зависимости.

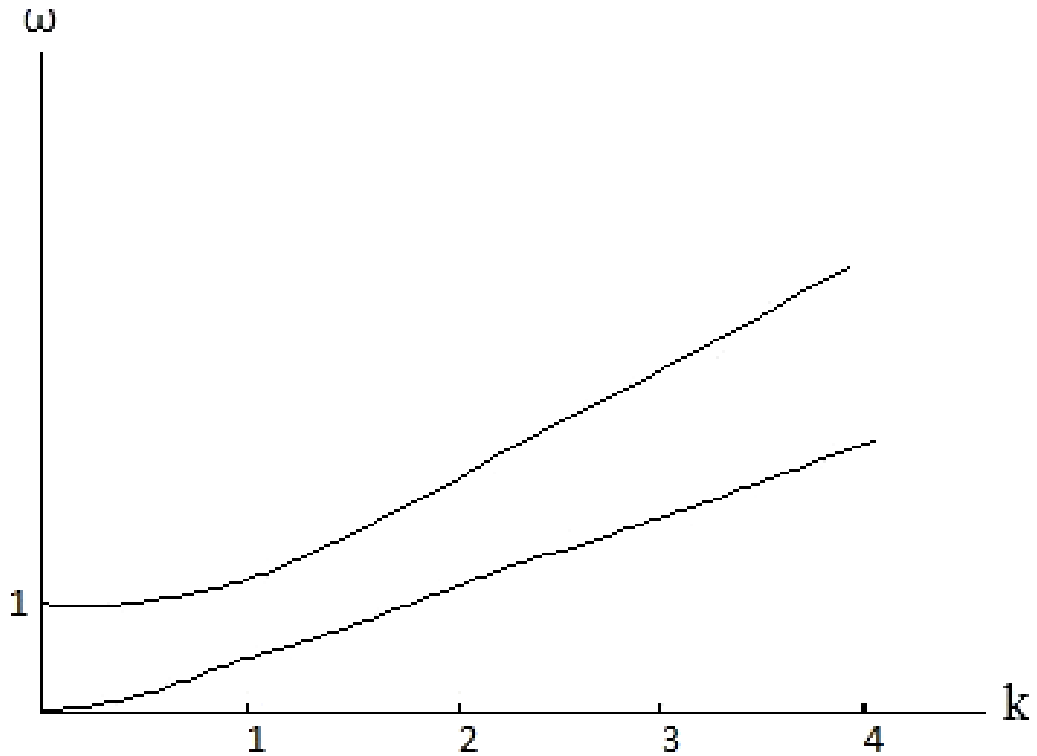


Рис. 1.3 Дисперсионные характеристики.

На дисперсионной плоскости из начала координат выходит первая дисперсионная ветвь, описывающая преимущественно изгибные волны, вторая ветвь, описывающая преимущественно сдвиговые волны, исходит из точки

$$\omega = \frac{c_\tau}{r_y}, k = 0.$$

Для каждого фиксированного значения  $\omega$  или  $k$  будет существовать два значения фазовой скорости:

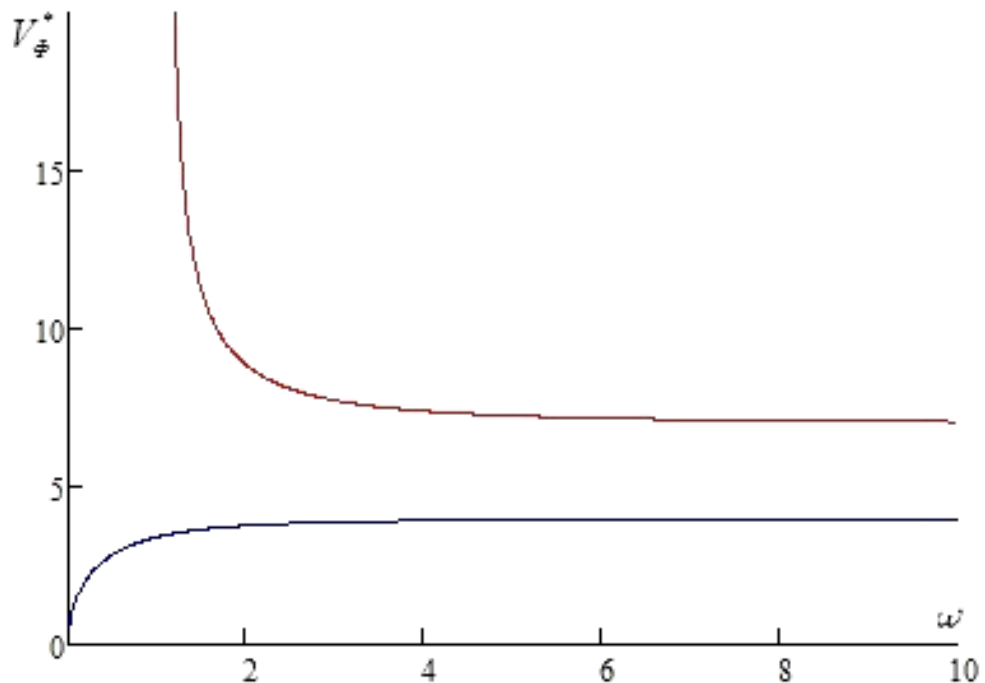
$$v_\phi^{(1,2)} = \left\{ \frac{1}{2} \left( c_0^2 + \aleph c_\tau^2 + \frac{c_\tau^2}{r_y^2 k^2} \right) \pm \left[ \frac{1}{4} \left( c_0^2 + \aleph c_\tau^2 + \frac{c_\tau^2}{r_y^2 k^2} \right)^2 - \aleph c_0^2 c_\tau^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (1.15)$$

$$v_\phi^{(1,2)} = c_0 c_\tau [2\omega \aleph r_y]^{1/2} / \left\{ \left( \omega c_0^2 + \omega \aleph c_\tau^2 \right) r_y \pm \left[ \omega^2 c_0^4 r_y^2 - 2\omega^2 c_0^2 \aleph c_\tau^2 r_y^2 + \omega^2 \aleph^2 c_\tau^4 r_y^2 + 4\aleph c_0^2 c_\tau^4 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

Аналогично два значения групповой скорости для каждого фиксированного значения  $\omega$ :

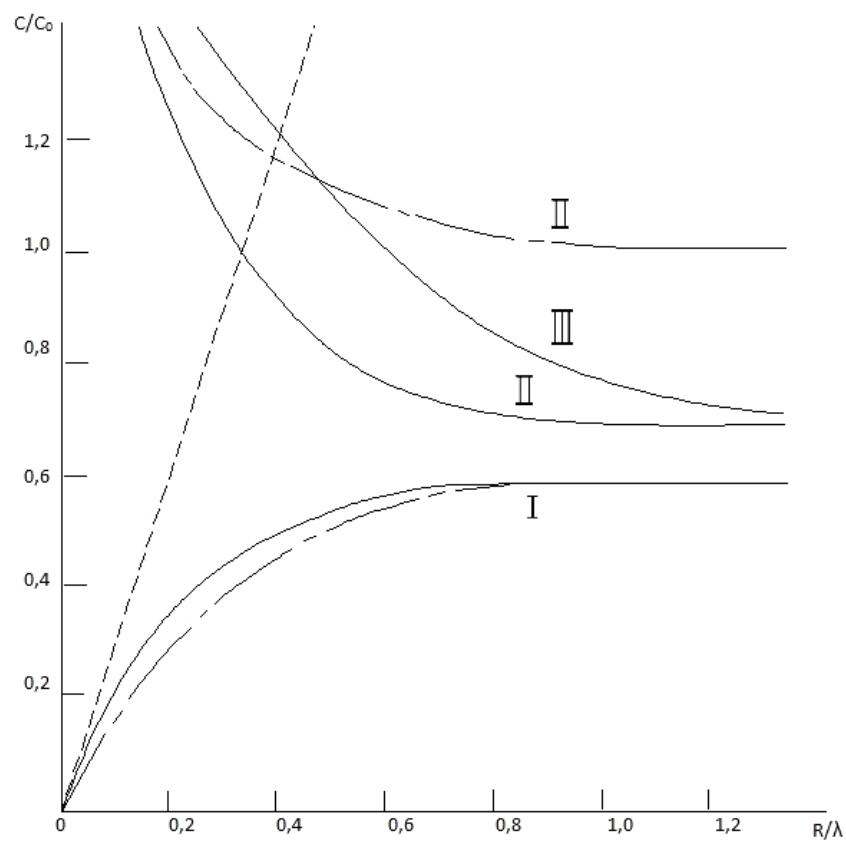
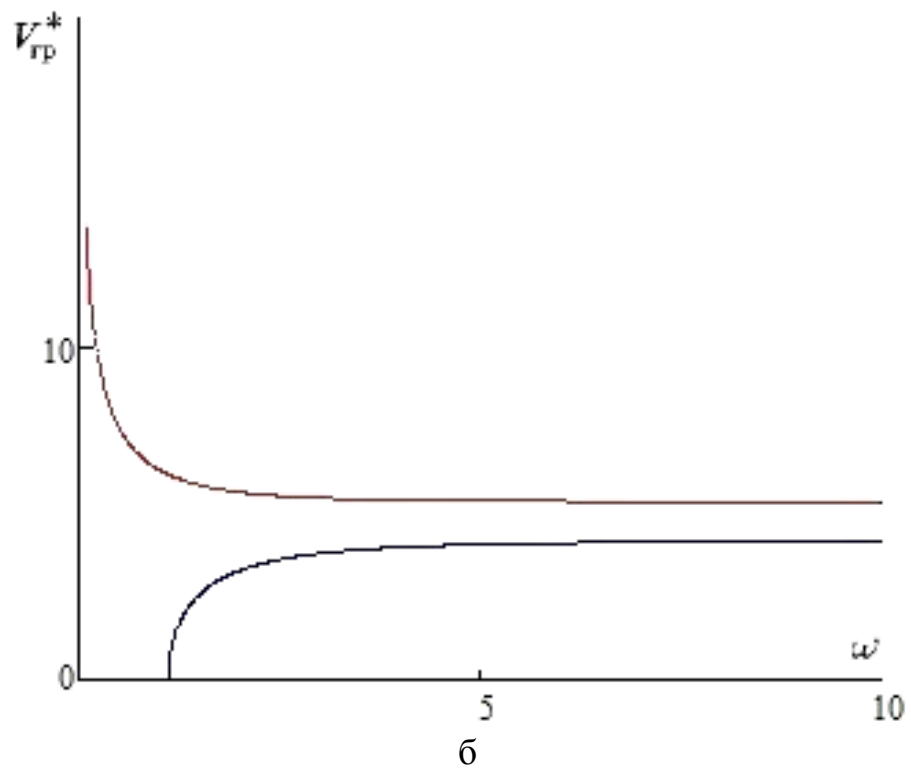
$$v_{гп}^{(1,2)} = \{2c_0c_\tau(2\aleph r_y)^{1/2}[(\omega^2c_0^2 + \omega^2\aleph c_\tau^2)r_y \pm \omega(\omega^2c_0^4r_y^2 - 2\omega^2c_0^2\aleph c_\tau^2r_y^2 + \omega^2\aleph^2c_\tau^4r_y^2 + 4\aleph c_0^2c_\tau^4)^{1/2}]^{1/2}\} / \{2(\omega c_0^2 + \omega\aleph c_\tau^2)r_y \pm [\omega(2c_0^4r_y^2 - 4c_0^2\aleph c_\tau^2r_y^2\omega) \pm (\omega^2c_0^4r_y^2 - 2\omega^2c_0^2\aleph c_\tau^2r_y^2 + \omega^2\aleph^2c_\tau^4r_y^2 + 4\aleph c_0^2c_\tau^4)^{1/2}]\} / [2(\omega^2c_0^4r_y^2 - 2\omega^2c_0^2\aleph c_\tau^2r_y^2 + \omega^2\aleph^2c_\tau^4r_y^2 + 4\aleph c_0^2c_\tau^4)^{1/2}]$$

На рис. 1.4 (а,б) изображены зависимости фазовых и групповых скоростей изгибных волн в стержне от частоты, на рис. 1.4 в изображены зависимости фазовых скоростей от волнового числа.



а

Рис. 1.4 а – зависимость фазовой скорости от частоты.



В

Рис. 1.4 б – зависимость групповой скорости от частоты; в – зависимость фазовых скоростей от волнового числа.

Штриховыми линиями на рис. 1.4 в изображены зависимости, полученные [13] по теориям Бернулли-Эйлера и Рэлея, штрих-пунктиром - зависимости, полученные по теории Тимошенко ( $T_1$  и  $T_2$ ). Сплошными линиями изображены дисперсионные зависимости, соответствующие трем первым антисимметричным нормальным волнам ( $a_0, a_1, a_2$ ), рассчитанные [13] с помощью решения уравнения Ламе для упругого цилиндра.

В книге [2] показано, что путем введения не одного  $\aleph$ , а большего числа произвольных коэффициентов, имеется возможность «улучшения» дисперсионных свойств модели Тимошенко, в частности, удастся добиться количественного совпадения ее дисперсионной ветви с кривой  $a_1$ .

Особенности распространения нелинейных изгибных волн в стержне Тимошенко изучаются в работах В.И. Ерофеева, В.В. Кажаява, Н.П.Семериковой, [69-71]. При учёте геометрической и физической нелинейности в работе [72] было получено уравнение:

$$\begin{aligned} \rho F w_{tt} - \aleph \mu F (w_{xx} - \varphi_x) = & [2\alpha_2 J_2 w_x \varphi_x^2 + 4\alpha_3 F w_x^3 + 2\alpha_4 F \varphi^2 w_x + \\ & + \alpha_5 J_2 \varphi w_x^2 + 3\alpha_6 F \varphi w_x^2 + \alpha_6 F \varphi^3]_x \\ \rho J_2 \varphi_{tt} - E J_2 \varphi_{xx} + \aleph \mu F (\varphi - w_x) = & [4\alpha_1 J_1 \varphi_x^3 + 2\alpha_2 J_2 \varphi_x (\varphi^2 + w_x^3) + \\ & + 2\alpha_5 J_2 \varphi \varphi_x w_x]_x - 2\alpha_2 J_2 \varphi \varphi_x^2 - 2\alpha_4 F \varphi w_x^2 - 2\alpha_3 F \varphi^3 - \alpha_5 J_2 w_x \varphi_x^2 - \\ & - \alpha_6 F w_x^3 - 3\alpha_6 F \varphi^2 w_x \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $w(x,t)$  – поперечное смещение;  $\varphi(x,t)$  – угол поворота поперечного сечения;

$\rho$  – объемная плотность материала;  $J_1 = \iint_F z^4 dF$ ,  $J_2 = \iint_F z^2 dF$  – осевые моменты

инерции;  $\aleph$  – коэффициент Тимошенко;  $\alpha_j (j = \overline{1,6})$  – коэффициенты, характеризующие геометрическую и физическую нелинейности среды.

Отметим работы, в которых построены более сложные модели (трех- и четырехволновые) [1, 73-77], но в связи с громоздкими выкладками, уравнение Тимошенко и двухволновые уравнения являются общепринятыми в инженерных расчётах конструкций на колебания.

### 1.3. Пластина Тимошенко

Согласно определению в [78]: «Пластинкой постоянной толщины называют тело, имеющее форму прямой призмы или прямого цилиндра и малую, по сравнению с размерами основания, толщину».

В книге [1] показано, что результаты, относящиеся к стержням, распространяются на пластины. В случае нарушения условия классической теории пластин, при рассмотрении задач поперечных колебаний пластин, необходимо учитывать влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига [98, 99]. В этом случае так же учитывается натяжение пластины.

Тогда плотность потенциальной энергии деформации пластины при изгибе имеет вид:

$$\begin{aligned}
 W_{\pi} = & \frac{\lambda + 2\mu}{2} \cdot \frac{h^3}{12} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\lambda h^3}{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\aleph \mu}{2} \cdot \frac{h^3}{12} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
 & + \aleph \mu \cdot \frac{h^3}{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \aleph \mu \cdot \frac{h}{2} \left[ \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{N}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь  $\aleph$  – коэффициент Тимошенко,  $\varphi, \psi$  – осредненные углы сдвига.

Плотность кинетической энергии пластины равна:

$$W_k = \frac{\rho h}{2} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] \right\}$$

Тогда изгибные колебания пластины [33] с натяжением представлены в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)} \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left( 1 + \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)} \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left( 1 + \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( N + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

При решении задач динамики пластин в уточненной постановке удобно ввести в рассмотрение две потенциальные функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Delta \Theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\Delta \chi, \quad \text{здесь } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.19)$$

Тогда система уравнений (1.18) переписывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \Theta + \frac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)} (\Theta - w) = 0 \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \chi + \frac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)} \chi = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( N + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \right) \Delta w + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \Theta = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Из системы исключаем второе уравнение, тогда система (1.20) переписывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \Theta + \frac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)} (\Theta - w) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( N + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \right) \Delta w + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \Theta = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Для перехода к уравнению изгибных колебаний пластины с натяжением, необходимо из второго уравнения системы (1.21) выразить  $\Delta\Theta$ , подставить в первое уравнение, предварительно умножив его на  $\Delta$ .

Тогда:

$$\begin{aligned} & \frac{12\rho}{(\lambda+2\mu)h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \frac{2N\rho(1+\nu)}{\aleph E} + 1 \right) \Delta \Delta w + \frac{2\rho^2(1+\nu)}{(\lambda+2\mu)\aleph E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - \frac{12N\rho}{(\lambda+2\mu)h^2} \Delta w - \\ & - \left[ \frac{2\rho(1+\nu)}{\aleph E} + \frac{2N\rho^2(1+\nu)}{(\lambda+2\mu)\aleph E} + \frac{\rho}{\lambda+2\mu} \right] \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

В работе 2016 года И.Т. Селезова [95] представлены этапы развития обобщенных динамических теорий изгибных колебаний стержней, пластин и оболочек основанных на сдвиговой модели С.П. Тимошенко.



## **ГЛАВА 2. ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНОМ СТЕРЖНЕ**

В главе описано распространение продольных периодических волн в составных элементах конструкций с линейно-упругими и вязкоупругими силами контактного взаимодействия с помощью уточненных стержневых моделей. Определено, что энергия волн в составных элементах конструкций, как и в диспергирующих системах, переносится с групповой скоростью. Показано, что уточненная стержневая модель Миндлина-Германа может быть применена для описания динамических процессов в составных элементах конструкций. Так же изучается существование нелинейных уединенных стационарных волн (солитонов) в составном нелинейно-упругом стержне, поведение которых может быть как классическим, так и неклассическим.

Глава написана на основании публикаций [106-120].

## 2.1. Линейно-упругий закон контактного взаимодействия

Рассмотрим распространение одномерных продольных волн по бесконечному составному стержню. Составной стержень представляет собой совокупность двух стержней, находящихся в контакте друг с другом (рис.2.1). Сила контактного взаимодействия предполагается линейно-упругой.

Движение стержней описывается системой уравнений [102]:

$$\begin{cases} E_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2), \\ E_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1), \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $u_i$  – продольные перемещения стержней,  $E_i$ ,  $S_i$ ,  $\rho_i$  - их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности) ( $i=1,2$ ),  $R$ -сила упругого взаимодействия стержней.

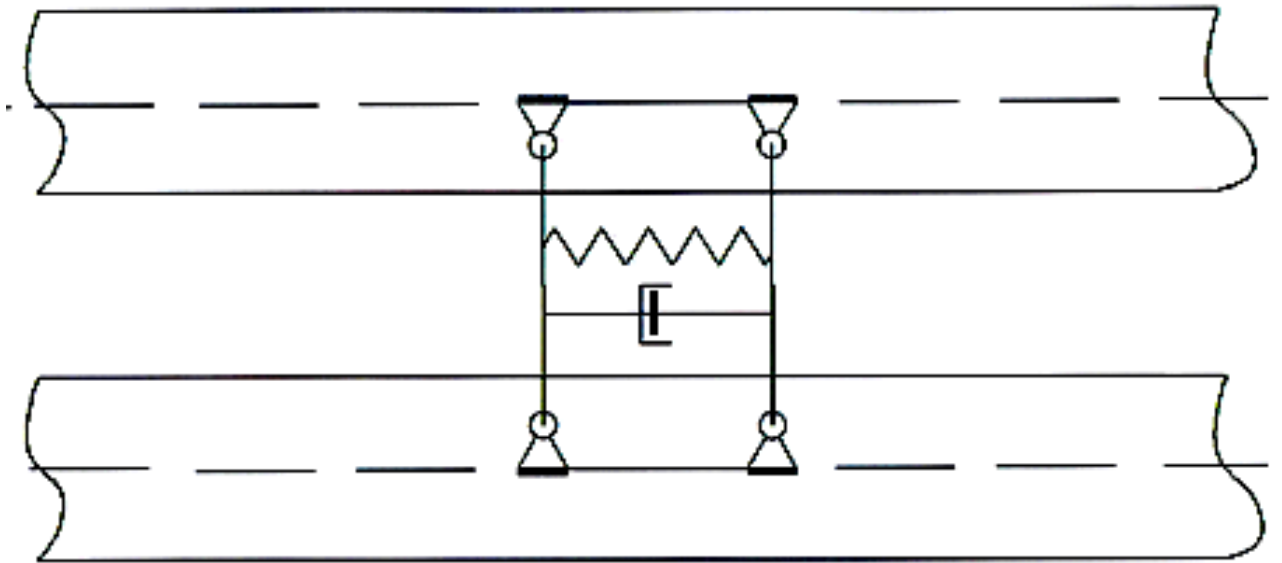


Рис. 2.1 – Составной стержень.

Система (2.1) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения  $u_1$ . Для этого достаточно выразить  $u_2$  из первого уравнения и подставить во второе уравнение системы. В результате получим:

$$\left(1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \left(C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\rho_1 S_1}{R} \left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial t^4} - (C_2^2 + C_1^2) \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial t^2 \partial x^2} + C_2^2 C_1^2 \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial x^4}\right) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{u} = u_1(x, t)$ ,  $C_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$ ,  $C_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$  – скорости продольных волн в стержнях.

Заметим, что аналогичное уравнение может быть получено в модели Миндлина-Германа, описывающей продольные колебания стержня [2,13,33]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - C_1^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - k_2^2 \frac{2\lambda}{H\rho} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_1^2 C_\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_2^2 \frac{8(\lambda + \mu)}{H^2 \rho} w + k_2^2 \frac{4\lambda}{H\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  – продольные и поперечные перемещения частиц стержня,  $H$  – толщина стержня,  $\rho$  – плотность материала,  $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho}}$ ,  $C_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  – скорости продольных и сдвиговых волн,  $\lambda, \mu$  – константы Ламэ,  $k_1, k_2$  – корректирующие коэффициенты, позволяющие увеличить частотный диапазон применимости модели. Система (2.3) сводится к одному уравнению относительно продольного смещения:

$$\begin{aligned} &4\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - 4\left(C_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{k_2^2 \lambda}{\rho}\right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{H^2 \rho}{2k_2^2 \lambda} \left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial t^4} - (C_1^2 + k_1^2 C_\tau^2) \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial t^2 \partial x^2} + C_1^2 k_1^2 C_\tau^2 \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial x^4}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, продольные колебания составного стержня можно описать уравнением Миндлина-Германа продольных колебаний некоторого

гипотетического стержня, параметры которого выражаются через параметры исходных стержней следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} = 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}, \\ 4 \left( C_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{k_2^2 \lambda}{\rho} \right) = C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}, \\ \frac{H^2 \rho}{2k_2^2 \lambda} = \frac{\rho_1 S_1}{R}, \\ \frac{H^2 \rho}{2k_2^2 \lambda} (C_1^2 + k_1^2 C_\tau^2) = \frac{\rho_1 S_1}{R} (C_2^2 + C_1^2), \\ \frac{H^2 \rho}{2k_2^2 \lambda} k_1^2 C_\tau^2 C_1^2 = C_1^2 C_2^2 \frac{\rho_1 S_1}{R}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Сведение к модели Миндлина-Германа возможно, если параметры составного стержня удовлетворяют условию  $\rho_1 S_1 > 3\rho_2 S_2$ , или (что тоже самое)

$\frac{h_1}{h_2} > 3 \frac{\rho_1}{\rho_2}$ , где  $h_{1,2}$  -толщины стержней. Для совместности системы (2.5)

необходимо также предположить равенство скоростей  $C_1 = C_1$ ,  $k_1 C_\tau = C_2$  (или наоборот). В этом случае толщина эквивалентного стержня выражается

соотношением  $H = \sqrt{\frac{(C_1^2 - C_2^2)R}{2\rho_1 S_1}}$ , которая будет увеличиваться с ростом силы

упругого взаимодействия стержней по закону  $\sqrt{R}$  и уменьшаться как  $\frac{1}{\sqrt{\rho_1 S_1}}$  с

ростом погонной плотности первого стержня. Корректирующие коэффициенты в модели Миндлина-Германа связаны с параметрами исходных стержней

зависимостями  $k_1^2 = 2 \frac{C_2^2 \rho_1 S_1 - \rho_2 S_2}{C_1^2 \rho_1 S_1 - 3\rho_2 S_2}$ ,  $k_2^2 = \frac{C_1^2 - C_2^2}{8C_1^2} \frac{\rho_1 S_1 - \rho_2 S_2}{\rho_2 S_2}$ , что позволяет

получить выражение для скорости волн сдвига в виде:  $C_\tau = C_1 \sqrt{2 \frac{\rho_1 S_1 - 3\rho_2 S_2}{\rho_1 S_1 - \rho_2 S_2}}$ .

В частном случае, если считать плотность одного из стержней малой (пусть  $\rho_2 \rightarrow 0$ ), система уравнений (2.1) сводится к уравнению продольных колебаний стержня модели Бишопа:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho v^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \mu v^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (2.6)$$

Здесь  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $I_0$  - полярный момент инерции, а параметры эквивалентного стержня с параметрами исходных стержней связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \rho S = \rho_1 S_1 \\ ES = E_1 S_1 + E_2 S_2 \\ \rho v^2 I_0 = \frac{\rho_1 S_1 E_2 S_2}{R} \\ \mu v^2 I_0 = \frac{E_1 S_1 E_2 S_2}{R} \end{cases} \quad (2.7)$$

В этом случае параметры составного стержня должны удовлетворять условию  $\frac{E_2}{E_1} > \frac{S_1}{S_2}$ , а полярный радиус инерции и коэффициент Пуассона эквивалентного

стержня определяются соотношениями  $r_p = \frac{2E_1 S_1}{E_2 S_2 - E_1 S_1} \sqrt{\frac{E_2 S_2}{R}}$ ,

$\nu = \frac{E_2 S_2 - E_1 S_1}{2E_1 S_1}$ . Скорости продольной и сдвиговой волн в стержне модели

Бишопа выражаются через скорость продольной волны в исходном стержне

$$C_0 = \sqrt{C_1^2 + \frac{E_2 S_2}{\rho_1 S_1}}, C_\tau = C_1.$$

Известно (см., например, [103]), что энергия волн в диспергирующих системах переносится с групповой скоростью. Исследуем, сохраняется ли эта закономерность для составных элементов конструкций.

Система (2.1) может быть получена из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского с помощью уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)} - \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)} - \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Здесь лагранжиан  $L$  задается в виде:

$$L = \frac{\rho_1 S_1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_1 S_1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\rho_2 S_2}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_2 S_2}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 - \frac{R}{2} (u_1 - u_2)^2 \quad (2.9)$$

Уравнение переноса энергии (уравнение Умова-Пойнтинга), соответствующее (2.8), запишется в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

Здесь [13]

$$W = \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) - L \right) \quad (2.11)$$

– плотность энергии;

$$S = \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) \right) \quad (2.12)$$

– плотность потока энергии.

Для лагранжиана (2.9) явный вид выражений (2.11), (2.12) следующий:

$$W = \frac{\rho_1 S_1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{E_1 S_1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\rho_2 S_2}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \frac{E_2 S_2}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{R}{2} (u_1 - u_2)^2 \quad (2.13)$$

$$S = -E_1 S_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - E_2 S_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \quad (2.14)$$

Скорость переноса энергии волн введем как отношение:

$$v_{\text{эн}} = \frac{\langle S \rangle}{\langle W \rangle}, \quad (2.15)$$

где в числителе стоит среднее значение плотности потока энергии, а в знаменателе – среднее значение плотности энергии.

Перемещения  $u_1(x, t), u_2(x, t)$  считаем изменяющимися по закону бегущей гармонической волны:

$$u_1(x, t) = Ae^{i\theta} + A^* e^{-i\theta}, \quad u_2(x, t) = Be^{i\theta} + B^* e^{-i\theta} \quad (2.16)$$

где  $A, B$  – комплексные амплитуды,  $A^*, B^*$  – их комплексно-сопряженные значения,  $\theta = \omega t - kx$  – фаза волны,  $\omega$  – круговая частота,  $k$  – волновое число.

Усреднение в (2.15) проведено по периоду изменения фазы гармонической

$$\text{волны } (\langle S \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S) d\theta, \langle W \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (W) d\theta).$$

Скорость переноса энергии, вычисленная по формуле (2.15), описывается выражением

$$v_{\text{эн}} = [2E_1 S_1 \omega k R^2 + 2E_2 S_2 \omega k (-\rho_1 S_1 \omega^2 + E_1 S_1 k^2 - R)^2] / [R^2 (-\rho_1 S_1 \omega^2 + 3E_1 S_1 k^2 - R) + (\rho_2 S_2 \omega^2 + E_2 S_2 k^2 + R) (-\rho_1 S_1 \omega^2 + E_1 S_1 k^2 - R)^2], \quad (2.17)$$

в котором учтена связь между комплексными амплитудами  $A$  и  $B$ :

$$B = - \frac{(-\rho_1 S_1 \omega^2 + E_1 S_1 k^2 - R) A}{R} \quad (2.18)$$

Частота и волновое число связаны законом дисперсии:

$$\omega = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left[ k^2 \frac{\rho_1 S_1}{R} (C_1^2 + C_2^2) + \left( 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \pm \left[ k^4 \frac{\rho_1^2 S_1^2}{R^2} (C_1^2 - C_2^2)^2 + \left( 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right)^2 + 2k^2 \frac{\rho_1 S_1}{R} (C_1^2 - C_2^2) \left( 1 - \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \right]^{1/2} \right] R \right\}^{1/2} / [\rho_1 S_1]^{1/2} \quad (2.19)$$

Это соотношение получается из (2.1) подстановкой решения в виде (2.16).

Групповую скорость  $v_{гр}$  определим, продифференцировав (2.19) по волновому числу. Она равна:

$$v_{гр} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left\langle \left\{ k \frac{\rho_1 S_1}{R} (C_1^2 + C_2^2) + \left[ 2k^3 \frac{\rho_1^2 S_1^2}{R^2} (C_1^2 - C_2^2)^2 + \left( 2k \rho_1 S_1 (C_1^2 - C_2^2) \left( 1 - \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \right) / R \right] / \left[ k^4 \frac{\rho_1^2 S_1^2}{R^2} (C_1^2 - C_2^2)^2 + \left( 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right)^2 + 2k^2 \frac{\rho_1 S_1}{R} (C_1^2 - C_2^2) \left( 1 - \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \right]^{1/2} \right\} R \right\rangle / \left\langle \left\{ \left[ k^2 \frac{\rho_1 S_1}{R} (C_1^2 + C_2^2) + \left( 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) + \left[ k^4 \frac{\rho_1^2 S_1^2}{R^2} (C_1^2 - C_2^2)^2 + \left( 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right)^2 + 2k^2 \frac{\rho_1 S_1}{R} (C_1^2 - C_2^2) \left( 1 - \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \right]^{1/2} \right] R \right\} / [\rho_1 S_1]^{1/2} \right\rangle \rho_1 S_1 \right\} \quad (2.20)$$

Если частоту, входящую в (2.17), заменить волновым числом по формуле (2.19), то убедимся, что  $v_{эп} = v_{гр}$ .

Таким образом, показано, что энергия упругих волн и по составным элементам конструкций переносится с групповой скоростью.



## 2.2. Линейный вязкоупругий закон контактного взаимодействия

Если в контакте действует как упругая сила, пропорциональная относительному перемещению, так и сила трения, пропорциональная относительной скорости перемещения частиц срединных линий стержней, то движение стержней, согласно [104], описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} E_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) + R_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \right), \\ E_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) + R_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right), \end{cases} \quad (2.21)$$

где  $u_i$  – продольные перемещения частиц срединных линий стержней,  $E_i, S_i, \rho_i$  ( $i = 1, 2$ ) – их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности),  $R, R_1$  – коэффициенты упругого и вязкого взаимодействия стержней.

Система (2.21) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения одного из стержней, например  $u_1$ . Складывая оба уравнения системы (2.21), получаем связь в виде:

$$\rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - E_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = E_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \rho_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \quad \text{Выразим также из первого}$$

$$\text{уравнения } R u_2 + R_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} = \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - E_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + R u_1 + R_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad \text{и полученные}$$

соотношения подставим во второе уравнение системы. В результате получается уравнение относительно  $u = u_1(x, t)$ :

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_1 S_1}{R} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (C_2^2 + C_1^2) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \right. \\ & \left. + C_2^2 C_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) + \frac{R_1}{R} \left( \left( 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \left( C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь  $\frac{R_1}{R}$  – коэффициент диссипации,  $u = u_1(x, t)$ ,  $C_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$ ,  $C_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$  – скорости продольных волн в стержнях.

Заметим, что продольные колебания составного стержня можно описать уравнением Миндлина-Германа продольных колебаний некоторого гипотетического стержня:

$$4\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\left(C_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{k_2^2 \lambda}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{H^2 \rho}{2k_2^2 \lambda} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (C_1^2 + k_1^2 C_\tau^2)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + C_1^2 k_1^2 C_\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + \chi \left(4\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - 4\left(C_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{k_2^2 \lambda}{\rho}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right) = 0. \quad (2.23)$$

Здесь  $u(x, t)$  – продольные перемещения частиц стержня,  $H$  – толщина стержня,  $\rho$  – плотность материала,  $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho}}$ ,  $C_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  – скорости продольных и сдвиговых волн,  $\lambda, \mu$  – константы Ламэ,  $k_1, k_2$  – корректирующие коэффициенты, позволяющие увеличить частотный диапазон применимости модели.

Параметры гипотетического стержня выражаются через параметры исходных стержней следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\frac{\lambda + \mu}{\lambda} = 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}; \quad 4\left(C_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{k_2^2 \lambda}{\rho}\right) = C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}; \\ \frac{H^2 \rho}{2k_2^2 \lambda} = \frac{\rho_1 S_1}{R}; \quad \frac{H^2 \rho}{2k_2^2 \lambda} (C_1^2 + k_1^2 C_\tau^2) = \frac{\rho_1 S_1}{R} (C_2^2 + C_1^2); \\ \frac{H^2 \rho}{2k_2^2 \lambda} C_1^2 k_1^2 C_\tau^2 = \frac{\rho_1 S_1}{R} C_2^2 C_1^2; \quad \chi = \frac{R_1}{R}; \\ 4\chi \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right) = \frac{R_1}{R} \left(1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right); \\ 4\chi \left(C_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{k_2^2 \lambda}{\rho}\right) = \frac{R_1}{R} \left(C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right). \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Для анализа дисперсионных и диссипативных свойств волн перейдем в уравнении (2.22) к безразмерным переменным

$$t' = \frac{C_2^2 \rho_2 S_2 + C_1^2 \rho_1 S_1}{\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1} \frac{t}{r}, \quad x' = \frac{x}{r}, \quad u' = \frac{u}{u_0},$$

где  $u_0$  – характерная амплитуда волны,

$$r = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1)} \frac{\rho_1 S_1 \rho_2 S_2}{R}} \quad - \quad \text{некоторый пространственный масштаб,}$$

$$\varphi = \frac{C_1^2 + C_2^2 (\rho_1 S_1)^2}{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1) (C_1^2 + C_2^2)}.$$

В результате уравнение (2.22) принимает вид

(штрихи над безразмерными переменными опущены):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + d \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \varphi \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \delta \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) = 0. \quad (2.25)$$

В (2.25) входят два безразмерных параметра, один из них

$$d = \frac{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1) C_1^2 C_2^2}{(C_2^2 \rho_2 S_2 + C_1^2 \rho_1 S_1)^2 (C_2^2 + C_1^2)}$$

определяет дисперсию, а

$$\delta = \sqrt{\frac{C_2^2 \rho_2 S_2 + C_1^2 \rho_1 S_1}{(C_2^2 + C_1^2) \rho_2 S_2 \rho_1 S_1 R}} R_1$$

– диссипацию. Для дисперсионного параметра легко

получить оценку, если воспользоваться неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим ( $a + b > 2\sqrt{ab}$ , ( $a, b > 0, a \neq b$ )).

Очевидно, что параметр дисперсии  $d < \frac{1}{2}$ , а наличие диссипации приводит к

тому, частота и волновое число линейной волны связаны комплексным дисперсионным соотношением:

$$\omega^2 - k^2 + \omega^2 k^2 - dk^4 - \varphi \omega^4 + i\delta \omega^3 - i\delta \omega k^2 = 0. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) является биквадратным относительно волнового числа  $k$ , разрешая которое, получим зависимость в виде:

$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2d}} \left( \omega^2 - 1 - i\delta\omega \pm \sqrt{(\omega^2 - 1 - i\delta\omega)^2 - 4\varphi d\omega^4 + 4id\delta\omega^3 + 4d\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

Из (2.27) видно, что волновое число является комплексным  $k = k' + ik''$ , где  $k' = \text{Re}(k)$ ,  $k'' = \text{Im}(k)$ . Это означает, что волна имеет постоянную распространения  $k'$  и затухает по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания  $k''$ .

На дисперсионной плоскости  $(\omega, k')$ , где  $k'$  – действительная часть комплексного волнового числа  $k$ , существуют две дисперсионные ветви, выходящие из начала координат. При этом одна ветвь в низкочастотном диапазоне приближается к прямой  $\omega = k'$ , а в высокочастотном – выходит на

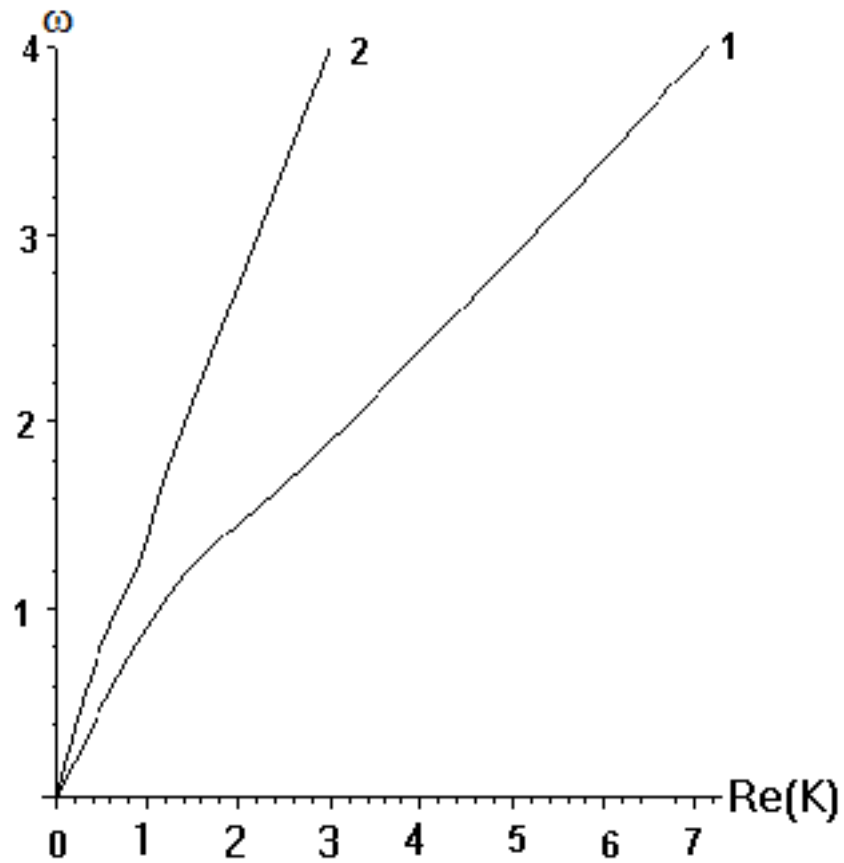
асимптоту  $\omega = \sqrt{\frac{k'(k'+1) - \sqrt{(k')^2(1+4d) - 4\varphi}}{2\varphi}}$ . Вторая ветвь выходит из начала

координат по прямой  $\omega = \frac{2\sqrt{d}}{\delta} k'$ , угол наклона которой уменьшается с ростом коэффициента диссипации  $\delta$ . В высокочастотном диапазоне эта ветвь

приближается к асимптоте  $\omega = \sqrt{\frac{k'(k'+1) + \sqrt{(k')^2(1+4d) - 4\varphi}}{2\varphi}}$ , не зависящей

от  $\delta$ .

Качественный вид дисперсионных зависимостей  $\omega(k')$  приведен на рис.2.2а при  $d = 0,25; \delta = 0,1; \varphi = 0,5$ .



а

Рис. 2.2. Дисперсионные характеристики вязкоупругой среды:  
а – зависимость частоты от действительной части волнового числа.

На рис. 2.2б приведены зависимости мнимых частей  $k''$  волнового числа  $k$  от частоты  $\omega$ . На плоскости  $(k'', \omega)$  также имеются две ветви, одна из которых выходит из начала координат и с увеличением частоты приближается к

горизонтальной асимптоте  $k'' = \frac{\delta(1-p^2)}{2p(2dp^2-1)}$ , где

$p = \frac{\sqrt{2\varphi}}{\sqrt{k'(k'+1) + \sqrt{(k')^2(1+4d) - 4\varphi}}}$ . Вторая ветвь  $k''$  выходит из точки

$\omega = 0, k'' = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$  и убывает с ростом частоты, приближаясь к горизонтальной

асимптоте  $k'' = \frac{\delta(1-p_1^2)}{2p_1(2dp_1^2-1)}$ , где  $p_1 = \frac{\sqrt{2\varphi}}{\sqrt{k'(k'+1)-\sqrt{(k')^2(1+4d)-4\varphi}}}$ . Таким

образом, в низкочастотном диапазоне коэффициент затухания  $k''$  зависит от частоты волны, а в высокочастотном диапазоне затухание становится частотно-независимым, так как в этом случае усиливается влияние дисперсионных эффектов.

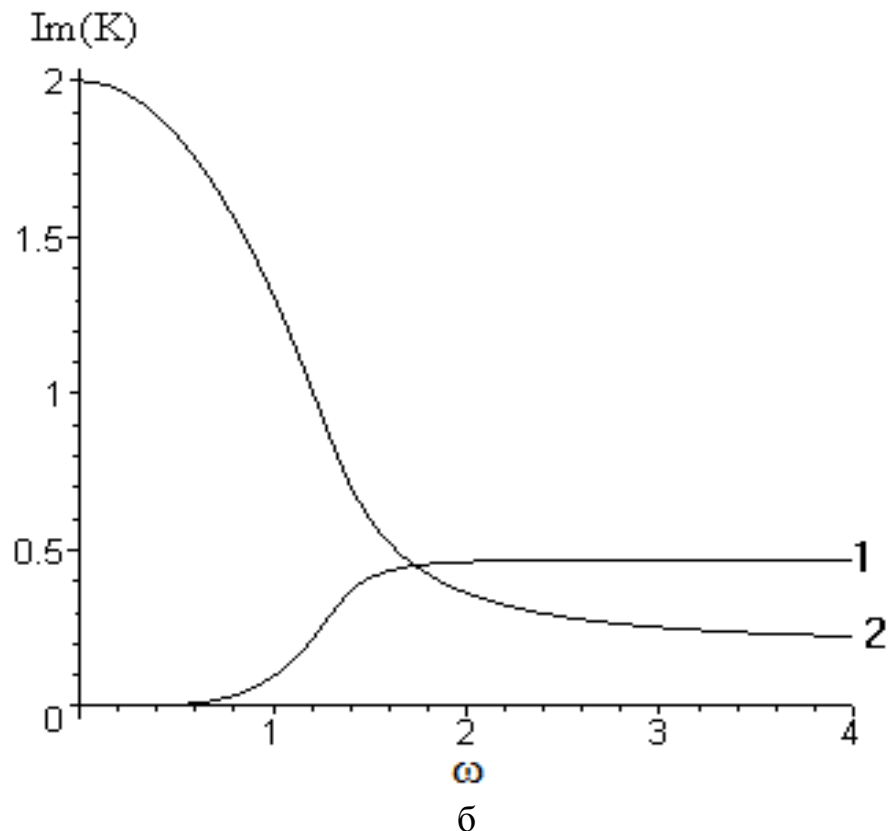
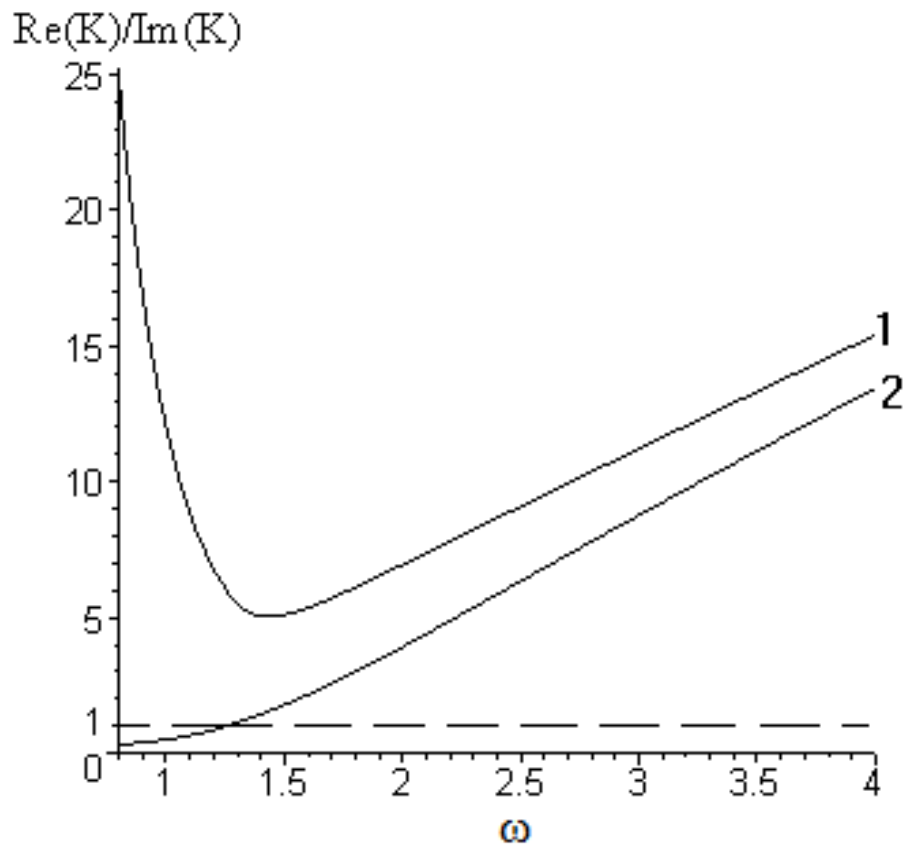


Рис. 2.2. Дисперсионные характеристики вязкоупругой среды:

$\omega$  – частотная зависимость мнимой части волнового числа.

На рис.2.2в приведены частотные зависимости отношения  $\text{Re}(k)/\text{Im}(k)$ . Неравенству  $\frac{\text{Re}(k)}{\text{Im}(k)} > 1$  соответствуют области частот, где процесс распространения волны преобладает над процессом ее затухания.



в

Рис. 2.2. Дисперсионные характеристики вязкоупругой среды:

в – частотная зависимость отношения действительной части волнового числа к мнимой.

В частном случае, при  $\delta = 0$  из (2.27) получаем решение дисперсионного уравнения :

$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2d}} \left( \omega^2 - 1 \pm \sqrt{(\omega^2 - 1)^2 - 4\phi d \omega^4 + 4d\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.28)$$

В этом случае на дисперсионной плоскости  $(\omega, k)$  существуют две дисперсионные ветви, одна из которых выходит из начала координат и имеет асимптоту  $\omega = k$  в низкочастотном диапазоне, а при больших частотах выходит

на асимптоту  $\omega = \sqrt{\frac{k(k+1) - \sqrt{k^2(1+4d)} - 4\varphi}{2\varphi}}$  (рис.2.3).

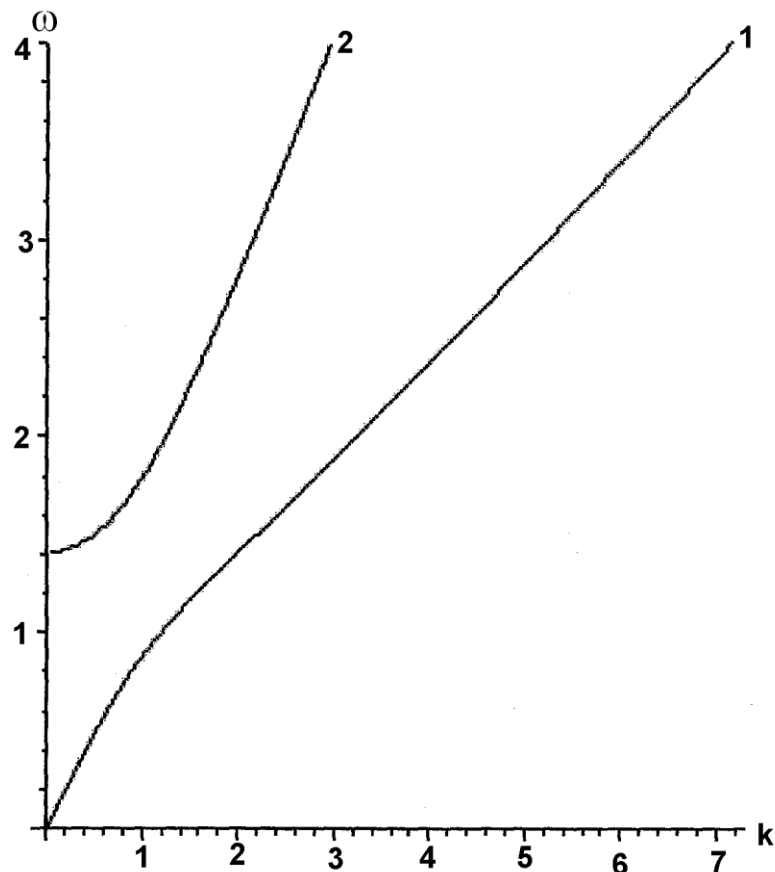


Рис. 2.3. Дисперсионные характеристики упругой среды.

Вторая дисперсионная ветвь появляется при частотах  $\omega \geq \sqrt{2}$ , что соответствует в размерных переменных значению  $\omega \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{I}}$ . В высокочастотном

диапазоне асимптотическое решение имеет вид:  $\omega = \sqrt{\frac{k(k+1) + \sqrt{k^2(1+4d)} - 4\varphi}{2\varphi}}$ .

Сравнение дисперсионных зависимостей в обоих случаях показывает, что диссипация оказывает влияние на дисперсионные свойства волн только в



низкочастотном диапазоне. В высокочастотном диапазоне диссипация не проявляется, так как дисперсионные ветви при  $\delta = 0$  и при  $\delta \neq 0$  выходят на одинаковые асимптоты.

Таким образом, на примере составного стержня, совершающего продольные колебания, показано, что уточненная стержневая модель Миндлина-Германа может быть применена для описания динамических процессов в составных вязкоупругих элементах конструкций.

### 2.3. Составной нелинейно-упругий стержень

Если в каждом из стержней учесть геометрическую и физическую нелинейности, то динамика системы будет описываться уравнениями:

$$\begin{cases} E_1 S_1 \left( 1 + \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) \\ E_2 S_2 \left( 1 + \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) \end{cases} \quad (2.29)$$

где  $u_i$  – продольные перемещения стержней,  $E_i, S_i, \rho_i$  – их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности) ( $i=1,2$ ),  $R$  – коэффициент, характеризующий силу упругого взаимодействия стержней,  $\alpha_{1,2}$  – коэффициенты, характеризующие их геометрические и физические нелинейности.

Система (2.29) может быть сведена к одному уравнению. Действительно, введём безразмерные переменные

$$U = u/u_0; \quad y = x/X; \quad \tau = t/T; \quad \gamma = 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2},$$

обозначения

$$D = C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}; \quad X = \Lambda; \quad T^2 = \Lambda^2 \gamma / D,$$

где  $u_0$  – перемещение,  $\Lambda$  – длина волны, удовлетворяющие соотношению  $u_0/\Lambda = 10^{-4}$ ,  $T$  – период волны

и пренебрегая величинами, в которых степень отношения  $u_0/\Lambda$  выше 3, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\rho_1 S_1 D}{R \gamma^2 \Lambda^2} \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - \frac{\rho_1 S_1 (C_2^2 + C_1^2)}{R \gamma \Lambda^2} \frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial \tau^2} + \frac{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}{R \Lambda^2 D} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - \frac{\left( C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) u_0}{D} \frac{\partial U}{\Lambda} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial y^2} = 0 \quad (2.30)$$

Здесь:  $C_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$ ,  $C_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$  – скорости продольных волн в стержнях.

Решение уравнения (2.30) будем искать в классе стационарных волн, то есть в виде функции  $U=U(y-v\tau)$ , зависящей от  $y-v\tau=\xi$ , где  $v=\text{const}$  – скорость стационарной волны.

Введен пересчет производных:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{d}{d\xi}; \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -v \frac{d}{d\xi}$$

Тогда уравнение (2.30) будет иметь вид:

$$v^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} - \frac{d^2 U}{d\xi^2} + v^4 \frac{\rho_1 S_1 D}{R \gamma^2 \Lambda^2} \frac{d^4 U}{d\xi^4} - v^2 \frac{\rho_1 S_1 (C_2^2 + C_1^2)}{R \gamma \Lambda^2} \frac{d^4 U}{d\xi^4} + \frac{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}{R \Lambda^2 D} \frac{d^4 U}{d\xi^4} - \frac{\left( C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) u_0}{D} \frac{1}{\Lambda} \frac{d}{2 d\xi} \left( \frac{dU}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (2.30a)$$

Проинтегрируем уравнение (2.30a) по  $d\xi$  и введем замену:  $\frac{dU}{d\xi} = w$ .

Тогда уравнение в частных производных (2.30) сведется в этом случае к уравнению ангармонического осциллятора относительно продольной

деформации  $\frac{dU}{d\xi} = w$ :

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + aw + bw^2 = 0, \quad (2.31)$$

где

$$a = [v^2 - 1]/B;$$

$$b = -\frac{u_0}{2} \left[ C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right] / BD \Lambda;$$

$$B = \frac{\rho_1 S_1 D}{R \gamma^2 \Lambda^2} v^4 - \frac{\rho_1 S_1 (C_2^2 + C_1^2)}{R \gamma \Lambda^2} v^2 + \frac{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}{RD \Lambda^2}.$$

Заметим, что корни уравнения  $B=0$  имеют вид:

$$v_1^2 = \frac{C_2^2 \gamma}{D}; v_2^2 = \frac{C_1^2 \gamma}{D}. \quad \text{Они, в частности, могут удовлетворять условию}$$

$$\frac{C_2^2 \gamma}{D} = 5 - 4 \frac{C_1^2 \gamma}{D} \quad (\text{для определенности считаем, что } C_1 > C_2). \quad \text{В этом случае}$$

$$0 < \frac{C_2^2 \gamma}{D} < 1; 1 < \frac{C_1^2 \gamma}{D} < 5/4, \quad \text{тогда } 0 < v_1^2 < 1; 1 < v_2^2 < 5/4.$$

Также определим знаки корней: между корней(-):  $\frac{C_2^2 \gamma}{D} < v^2 < \frac{C_1^2 \gamma}{D}$ ; вне

$$\text{корней(+): } v^2 > \frac{C_1^2 \gamma}{D}, v^2 < \frac{C_2^2 \gamma}{D}.$$

Анализ (2.31) показывает, что частными решениями уравнения (2.30) являются нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны).

В первом случае  $a < 0, b > 0$  солитон имеет положительную полярность. В этом случае сепаратрисное решение имеет вид [13]:

$$w(\xi) = A_c \text{ch}^{-2}(\xi / \Delta)$$

Амплитуда солитона  $A_c$  и его ширина  $\Delta$  описываются выражениями:

$$A_c = [3(v^2 - 1)D] / \left[ \left( C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \frac{u_0}{\Lambda} \right];$$

$$\Delta = 2 / [(v^2 - 1)/B]^{1/2}$$

На рис.2.4 приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости.

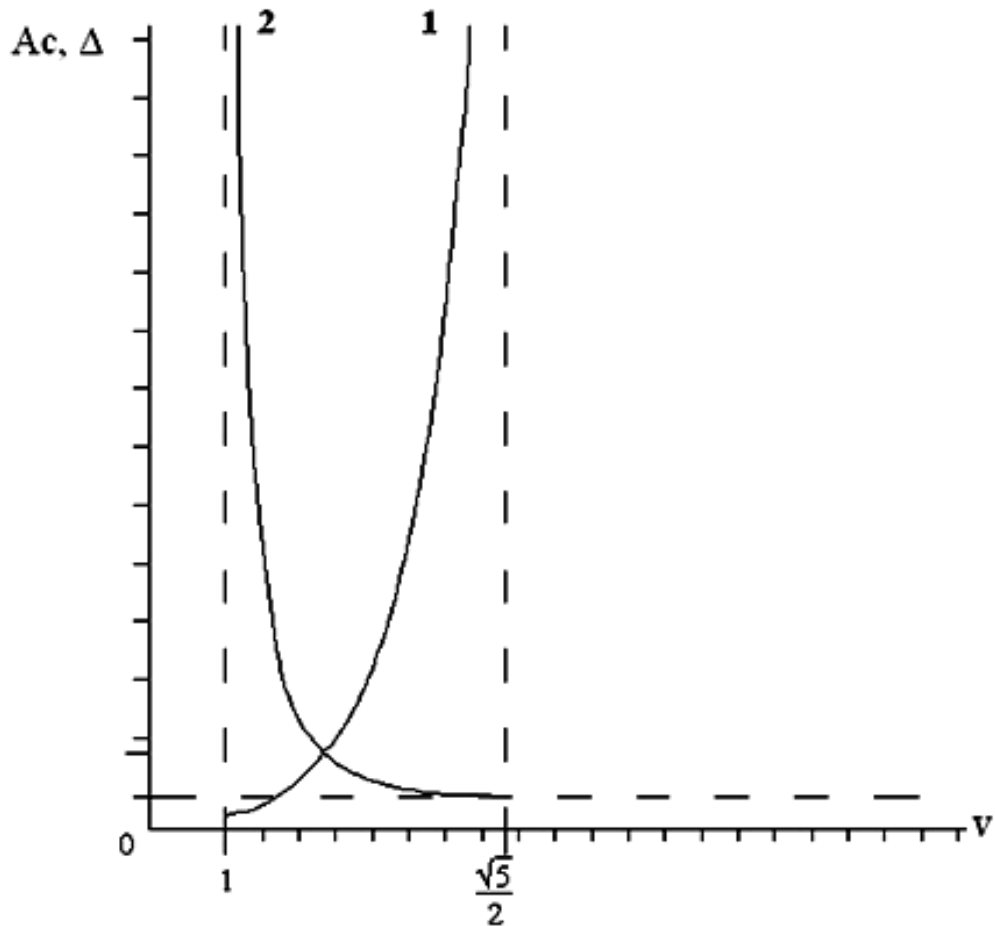


Рис. 2.4. Зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона положительной полярности от его скорости.

В данном случае с ростом скорости уединенной стационарной волны ее амплитуда возрастает, а ширина уменьшается. Такое поведение характерно для классического солитона [13,105].

Во втором случае  $a < 0$ ,  $b < 0$  солитон имеет отрицательную полярность. Сепаратрисное решение записывается в виде [13]:

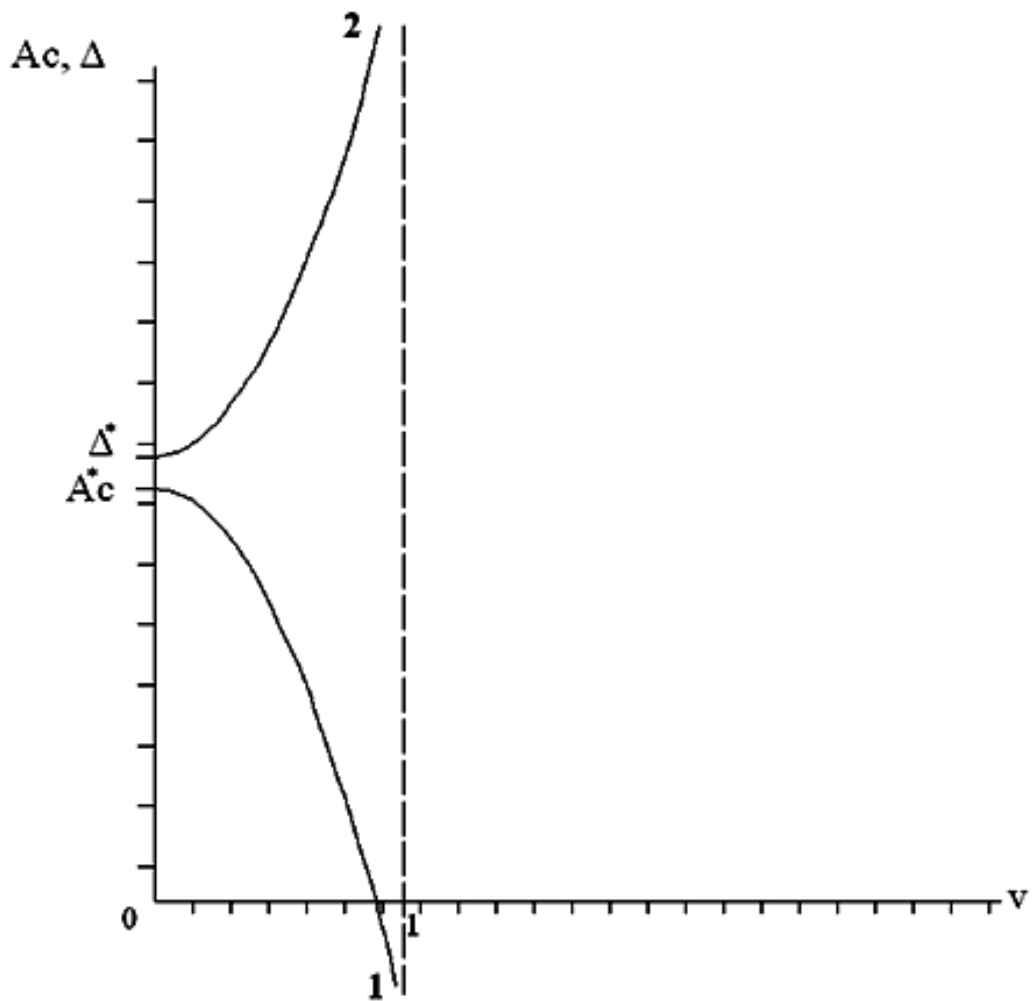
$$w(\xi) = -A_c / \text{ch}^2(\xi / \Delta)$$

Его амплитуда и ширина описываются выражениями:

$$A_c = \left[ 3(1-v^2)D \right] / \left[ \left( C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \frac{u_0}{\gamma \Lambda} \right];$$

$$\Delta = 2 / \left[ (1-v^2) / B \right]^{1/2}$$

Зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости приведены на рис.2.5.



$$A_c^* = 3D / \left[ \left( C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right) \frac{u_0}{\gamma \Lambda} \right];$$

$$\Delta^* = 2 / \left[ RD \Lambda^2 / \rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2 \right]^{1/2}$$

Рис. 2.5 Зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона отрицательной полярности от его скорости.

В этом случае с ростом скорости уединенной стационарной волны одновременно увеличивается и ее амплитуда, и ширина. Такое поведение не характерно для классического солитона и является аномальным.

Таким образом, показано, что в составном нелинейно-упругом стержне могут существовать локализованные волны (солитоны) деформации, имеющие как отрицательную, так и положительную полярность.

### **ГЛАВА 3. ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНОЙ СТРУНЕ И СОСТАВНОЙ МЕМБРАНЕ**

В главе исследована задача о поперечных колебаниях составной струны, которая сводится к задаче об изгибных колебаниях эквивалентного стержня модели Тимошенко с натяжением. Также рассматривается совокупность двух нелинейно-упругих струн, находящихся в контакте друг с другом. Показано, что составная мембрана эквивалентна пластине Тимошенко с натягом. Исследована задача о поперечных колебаниях составной мембраны с учетом геометрической нелинейности, получены и исследованы одномерные и двумерные солитоны, а также представлены различные формы нелинейных периодических колебаний.

Глава написана на основании публикаций [121-128].

### 3.1. Поперечные волны в составной струне при линейно-упругом законе контактного взаимодействия

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях составной струны (рис. 3.1).

Поперечные колебания составной струны описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $u_{1,2}$  – поперечные отклонения струн,  $\rho_{1,2}$  – погонные плотности,  $N_{1,2}$  – натяжения струн,  $R$  – сила их упругого взаимодействия.

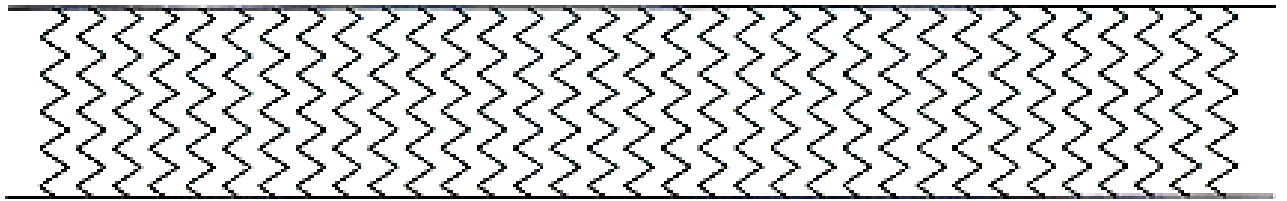


Рис. 3.1 – Составная струна

Система (3.1) может быть сведена к одному уравнению относительно поперечного смещения  $u_1$ . Для этого достаточно выразить  $u_2$  из первого уравнения и подставить во второе уравнение системы. В результате получим уравнение в виде:

$$\begin{aligned} (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (N_1 + N_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{N_1 N_2}{R} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1}{R} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \\ + \frac{\rho_1 \rho_2}{R} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.1a)$$

где  $u = u_1(x, t)$ .



Изгибные колебания балки Тимошенко с натяжением описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (N + kGF) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + kGF \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + kGF \left( \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь  $u$  - поперечные отклонения срединной линии стержня,  $\varphi$  - угол поворота поперечного сечения балки,  $\rho$  - объемная плотность,  $E, G$  - модули сжатия и сдвига,  $N$  - натяжение,  $F$  - площадь поперечного сечения,  $I$  - момент инерции,  $k$  - поправочный коэффициент Тимошенко. Система (3.2) сводится к одному уравнению относительно поперечного смещения:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EI \left( \frac{N + kGF}{kGF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho I \left( \frac{N + kGF}{kGF} + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0.$$

При этом параметры эквивалентного стержня связаны с параметрами струн условиями:

$$\begin{cases} \rho F = \rho_1 + \rho_2; \quad N = N_1 + N_2; \quad EI \left( \frac{N + kGF}{kGF} \right) = \frac{N_1 N_2}{R}; \\ \rho I \left( \frac{N + kGF}{kGF} + \frac{E}{kG} \right) = \frac{N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1}{R}; \quad \frac{\rho^2 I}{kG} = \frac{\rho_1 \rho_2}{R}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что погонная плотность стержня равна сумме плотностей обеих струн, а натяжение стержня складывается из натяжений струн. Система (3.3) является совместной, если скорости волн в балке Тимошенко связаны со

скоростями волн в струне соотношениями  $C_0 = C_1$ ,  $\sqrt{k}C_\tau = \left[ C_2^2 - \frac{N_1 + N_2}{\rho_1 + \rho_2} \right]^{1/2}$ , где

$C_0 = [E/\rho]^{1/2}$  - скорость продольных волн в стержне,  $C_\tau = [G/\rho]^{1/2}$  - скорость волн сдвига,  $C_1 = [N_1/\rho_1]^{1/2}$ ,  $C_2 = [N_2/\rho_2]^{1/2}$  - скорости волн в струнах. На скорость поперечной волны в одной из струн необходимо также наложить

условие  $C_2 > [(N_1 + N_2)/(\rho_1 + \rho_2)]^{1/2}$ , которое приводит к тому, что для эквивалентного стержня в модели Тимошенко поправочный коэффициент  $k$  нужно выбирать большим единицы. При этом радиус инерции поперечного сечения балки Тимошенко выражается через параметры составной струны

$$\text{следующим образом } r_y = [I/F]^{1/2} = [\rho_1 \rho_2 / (R(\rho_1 + \rho_2))]^{1/2} \left( C_2^2 - \frac{N_1 + N_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, поперечные колебания натянутой составной струны соответствуют изгибным колебаниям некоторого гипотетического стержня модели Тимошенко с натяжением.

### 3.2. Поперечные волны в составной нелинейно-упругой струне

Рассмотрим составную струну, представляющую собой совокупность двух нелинейно-упругих струн, находящихся в контакте друг с другом.

Движение струны описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $U_{1,2}$  – поперечные отклонения струн,  $\rho_{1,2}$  – погонные плотности,  $N_{1,2}$  – натяжения струн,  $R$  – сила их упругого взаимодействия.

Система (3.4) может быть сведена к одному уравнению. Действительно, введём безразмерные переменные

$$U = u/u_0; \quad y = x/X; \quad \tau = t/T; \quad \gamma = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

обозначения

$$D = N_1 + N_2; \quad X = \Lambda; \quad T^2 = \Lambda^2 \rho_2 \gamma / D,$$

где  $u_0$  – перемещение,  $\Lambda$  – длина волны, удовлетворяющие соотношению  $u_0/\Lambda = 10^{-4}$ ,  $T$  – период волны

и пренебрегая величинами, в которых степень отношения  $u_0/\Lambda$  выше 3, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\rho_1 D}{R\gamma^2 \Lambda^2 \rho_2} \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - \frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{R\gamma \Lambda^2 \rho_2} \frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial \tau^2} + \frac{N_1 N_2}{R\Lambda^2 D} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - \\ - \frac{N_1 + N_2}{2D} \frac{u_0^2}{\Lambda^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.5) будем искать в классе стационарных волн, то есть в виде функции  $U=U(y-v\tau)$ , зависящей от  $y-v\tau=\xi$ , где  $v=\text{const}$  – скорость стационарной волны. Аналогичные преобразования проведены в главе 2 (стр.42).

Уравнение в частных производных (3.5) сведется в этом случае к уравнению ангармонического осциллятора относительно продольной деформации  $\frac{dU}{d\xi} = w$ :

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + aw + bw^3 = 0, \quad (3.6)$$

где

$$a = (v^2 - 1)/B; \quad b = -u_0^2/6B\Lambda^2;$$

$$B = \frac{\rho_1 D}{R\gamma^2 \Lambda^2 \rho_2} v^4 - \frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{R\gamma \Lambda^2 \rho_2} v^2 + \frac{N_1 N_2}{R\Lambda^2 D}.$$

Заметим, что корни уравнения  $B=0$  имеют вид:

$v_1^2 = \rho_2 N_1 \gamma / \rho_1 D$ ;  $v_2^2 = N_2 \gamma / D$ . Они, в частности, могут удовлетворять условию

$\frac{N_2 \gamma}{D} = 5 - 4 \frac{\rho_2 N_1 \gamma}{\rho_1 D}$  (для определенности считаем, что  $N_1 > N_2$ ). В этом случае

$$0 < \frac{N_2 \gamma}{D} < 1; \quad 1 < \frac{\rho_2 N_1 \gamma}{\rho_1 D} < 5/4, \quad \text{тогда} \quad 0 < v_1^2 < 1; \quad 1 < v_2^2 < 5/4.$$

Также определим знаки корней: между корней(-):  $\frac{N_2\gamma}{D} < v^2 < \frac{\rho_2 N_1\gamma}{\rho_1 D}$ ; вне

корней(+):  $v^2 > \frac{\rho_2 N_1\gamma}{\rho_1 D}, v^2 < \frac{N_2\gamma}{D}$ .

Анализ (3.6) показывает, что частными решениями уравнения (3.5) являются нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны).

В первом случае  $a < 0, b > 0$  солитон имеет положительную полярность.

Сепаратрисное решение записывается в виде [13]:

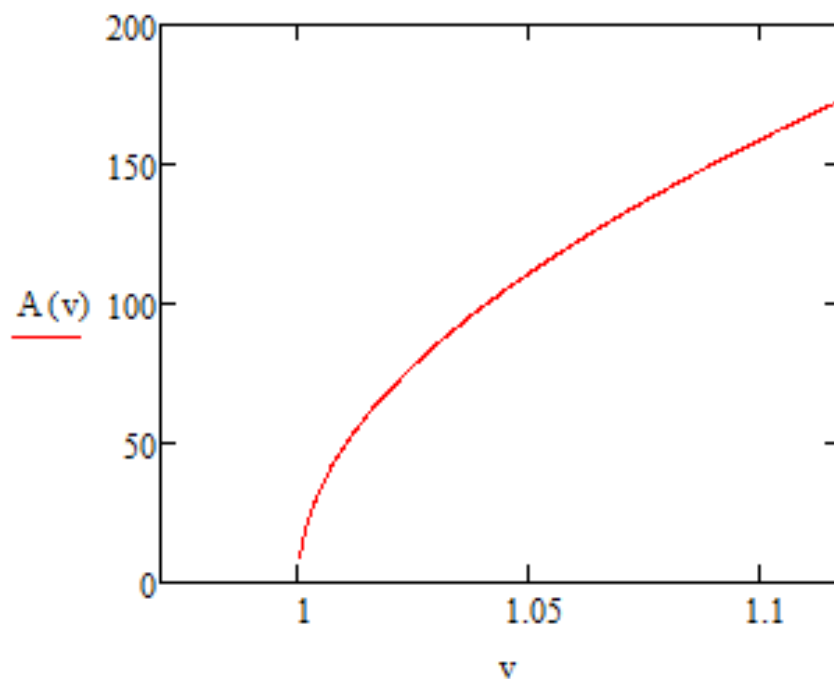
$$w(\xi) = A_c / \text{ch}(\xi / \Delta),$$

Амплитуда солитона  $A_c$  и его ширина  $\Delta$  описываются выражениями:

$$A_c = \pm \left[ (12(v^2 - 1)\Lambda^2) / u_0^2 \right]^{1/2};$$

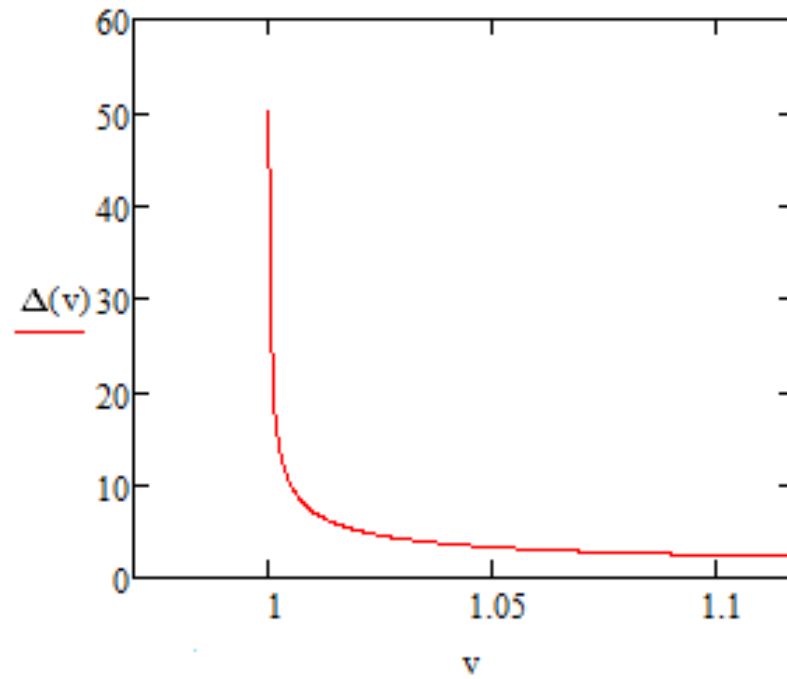
$$\Delta = \left[ B / (v^2 - 1) \right]^{1/2}.$$

На рис.3.2 (а,б) приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости. Если  $1 < v_2^2 < 5/4$



а

Рис. 3.2 а – зависимость амплитуды солитона положительной полярности от его скорости.



б

Рис. 3.2 б – зависимость ширины солитона положительной полярности от его скорости.

Во втором случае  $a > 0$ ,  $b < 0$  солитон имеет положительную полярность. Сепаратрисное решение имеет вид [13]:

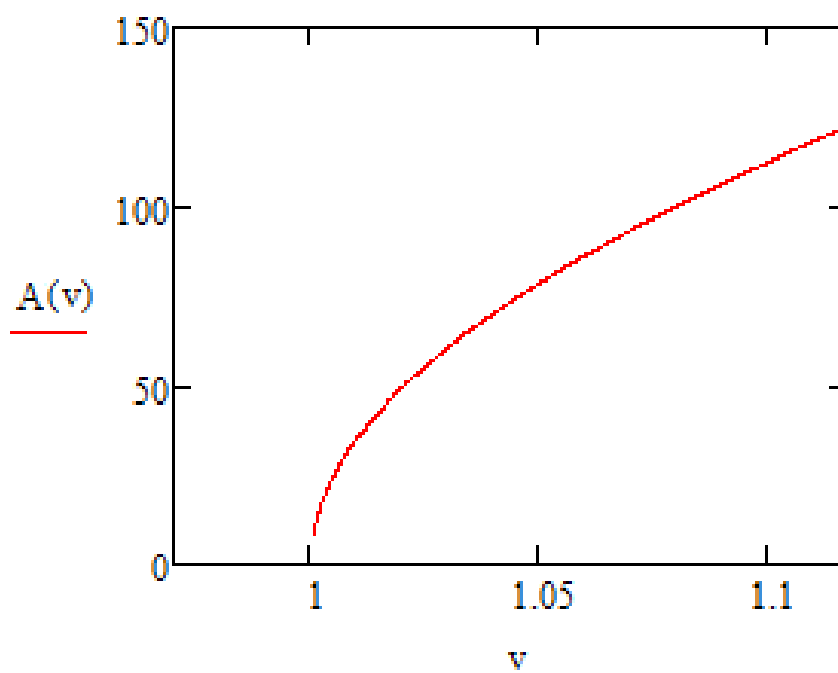
$$w(\xi) = A_c \operatorname{th}(\xi/\Delta)$$

Амплитуда и ширина солитона описываются выражениями:

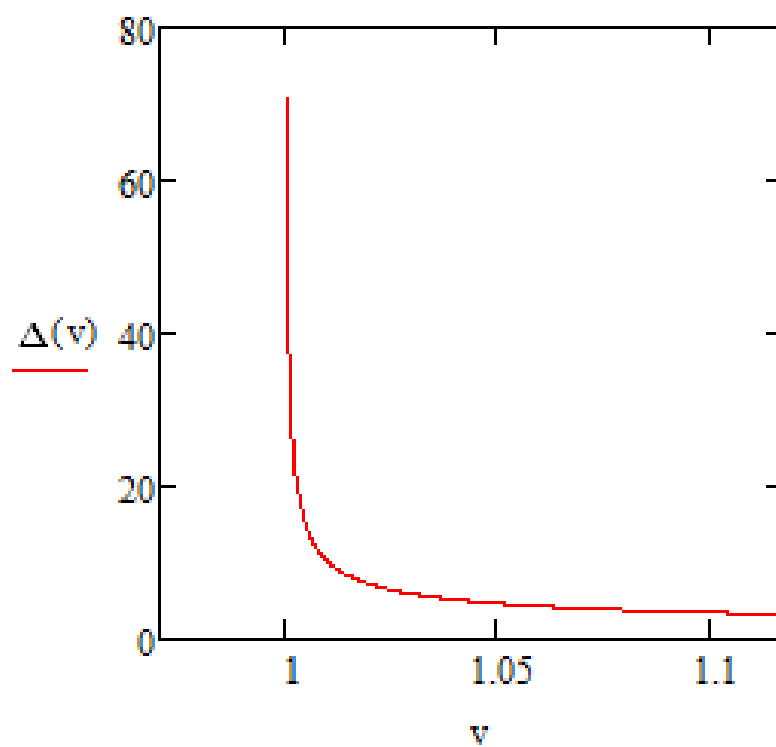
$$A_c = \pm \left[ \frac{6(v^2 - 1)\Lambda^2}{u_0^2} \right]^{1/2};$$

$$\Delta = \left[ \frac{2B}{(v^2 - 1)} \right]^{1/2}.$$

Зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости приведены на рис.3.3 (а, б). Если  $1 < v_2^2 < 5/4$ .



а



б

Рис. 3.3 а – зависимость амплитуды солитона отрицательной полярности от его скорости; б – зависимость ширины солитона отрицательной полярности от его скорости.

### 3.3. Поперечные волны в составной мембране

Рассмотрим поперечные колебания составной мембраны (рис.3.4), которые описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + N_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $u_{1,2}$  – поперечные отклонения струн,  $\rho_{1,2}$  – погонные плотности,  $N_{1,2}$  – натяжения струн,  $R$  – сила их упругого взаимодействия.

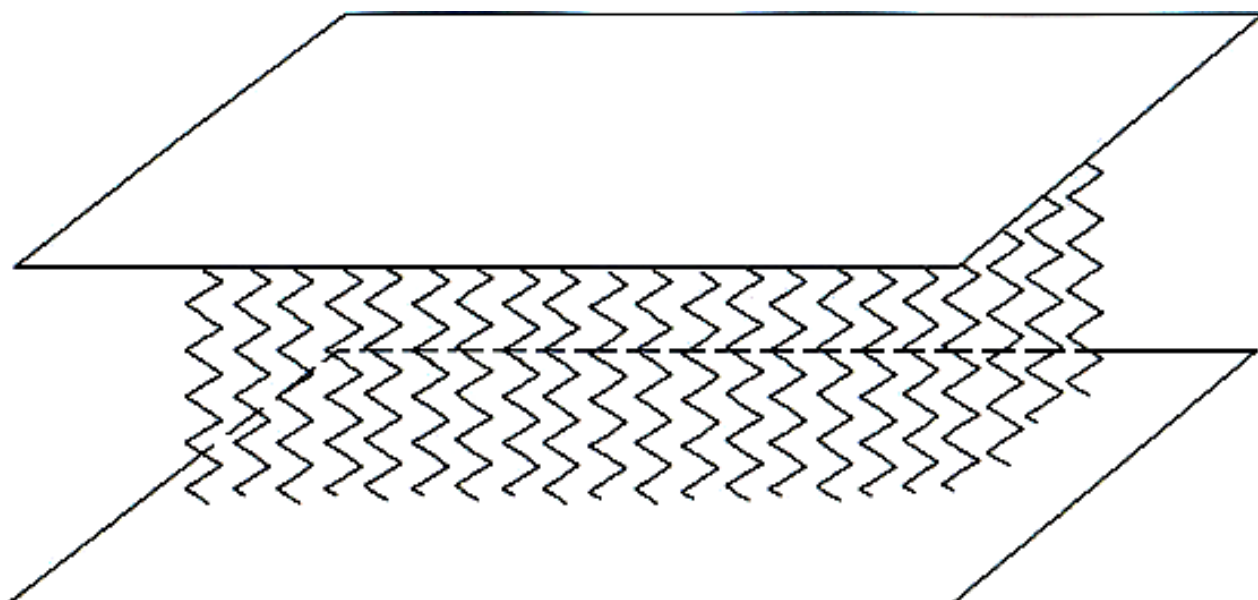


Рис. 3.4 – Составная мембрана.

Система (3.7) может быть сведена к одному уравнению относительно поперечного смещения  $u_1$ . В результате получим уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\rho_1 \rho_2}{R} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (N_1 + N_2) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{N_1 N_2}{R} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \frac{N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1}{R} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $u = u_1(x, t)$ .

Заметим, что аналогичное уравнение (1.22) получено при распространении теории Тимошенко для стержней на пластины. Таким образом, поперечные колебания составной мембраны можно описать уравнением (1.22), параметры которого выражаются через параметры мембран следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12\rho}{(\lambda + 2\mu)h^2} = \rho_1 + \rho_2; \\ \frac{2\rho^2(1 + \nu)}{(\lambda + 2\mu)\aleph E} = \frac{\rho_1\rho_2}{R}; \\ \frac{12N\rho}{(\lambda + 2\mu)h^2} = N_1 + N_2; \\ \frac{2N\rho(1 + \nu)}{\aleph E} + 1 = \frac{N_1N_2}{R}; \\ \frac{2\rho(1 + \nu)}{\aleph E} + \frac{2N\rho^2(1 + \nu)}{(\lambda + 2\mu)\aleph E} + \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} = \frac{N_1\rho_2 + N_2\rho_1}{R} \end{array} \right.$$

Перемещение  $u$  считаем изменяющимся по закону бегущей гармонической волны:  $u(x, y, t) = Ae^{i\theta} + A^*e^{-i\theta}$ , здесь  $\omega t - k_x x - k_y y = \theta$  – фаза волны.

Уравнение в частных производных (3.8) сведем к бигармоническому уравнению:

$$\omega^4 \rho_1 \rho_2 - \omega^2 (N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1) (k_x^2 + k_y^2) + N_1 N_2 (k_x^2 + k_y^2)^2 - \omega^2 R (\rho_2 + \rho_1) + R (N_1 + N_2) (k_x^2 + k_y^2) = 0$$

Частота и волновые числа связаны соотношением:

$$\omega = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1) (k_x^2 + k_y^2) + R (\rho_2 + \rho_1) \pm \left[ (N_1 \rho_2 - N_2 \rho_1)^2 (k_x^2 + k_y^2)^2 + R^2 (\rho_2 + \rho_1)^2 + 2R (k_x^2 + k_y^2) (N_1 \rho_2 - N_2 \rho_1) (\rho_2 - \rho_1) \right]^{1/2} \right\}^{1/2} / [\rho_1 \rho_2]^{1/2}$$

Качественный вид дисперсионных зависимостей  $\omega(k_x, k_y)$  приведен на рис.3.5.



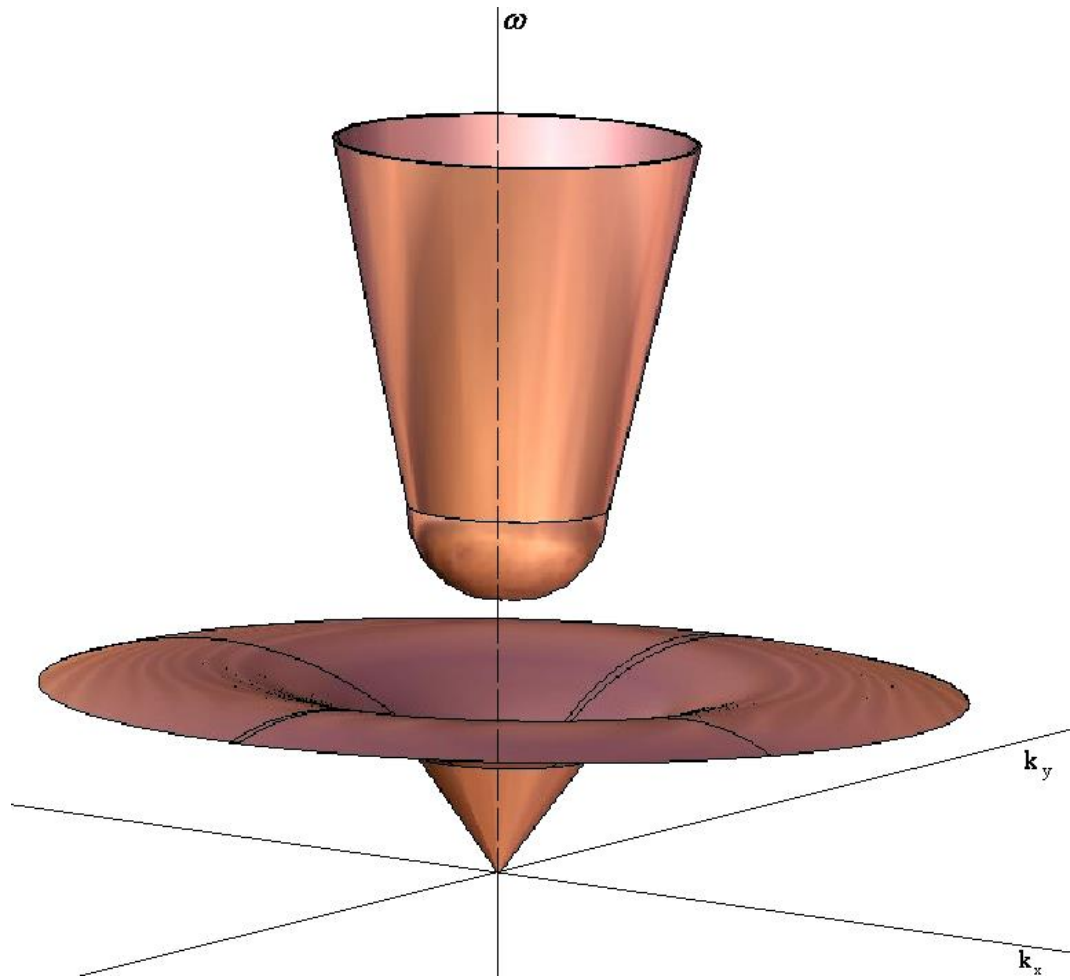


Рис. 3.5 Зависимость частоты волны от волновых чисел.

Из рисунка 3.5 видно, что купол, выходящий из начала координат движется вперёд по оси  $\omega$ , расплываясь в стороны по осям  $k_x, k_y$ . С ростом  $k_x, k_y$  парабола  $\omega(k_x, k_y)$  растёт до определенного предела, постоянно расплываясь в стороны и двигаясь вперёд, приводя к крестообразной структуре.

В случае пересечения поверхности вращения плоскостью  $k_y$ , на дисперсионной плоскости  $(\omega, k_x)$ , где  $k_x$  – волновое число, существуют две дисперсионные ветви, одна из которых выходит из начала координат и приближается к горизонтальной асимптоте

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ R(\rho_2 + \rho_1) + \left[ R^2(\rho_2 + \rho_1)^2 + 2R(k_x^2 + k_y^2)(N_1\rho_2 - N_2\rho_1)(\rho_2 - \rho_1) \right]^{1/2} \right\}^{1/2} / [\rho_1\rho_2]^{1/2}$$

. Вторая ветвь выходит из точки  $\omega = [R(\rho_2 + \rho_1)]^{1/2} / [\rho_1 \rho_2]^{1/2}$  и с увеличением частоты приближается к наклонной асимптоте  $\omega = \pm k_x$ . Качественный вид дисперсионных зависимостей  $\omega(k_x, k_y)$  приведен на рис.3.6.

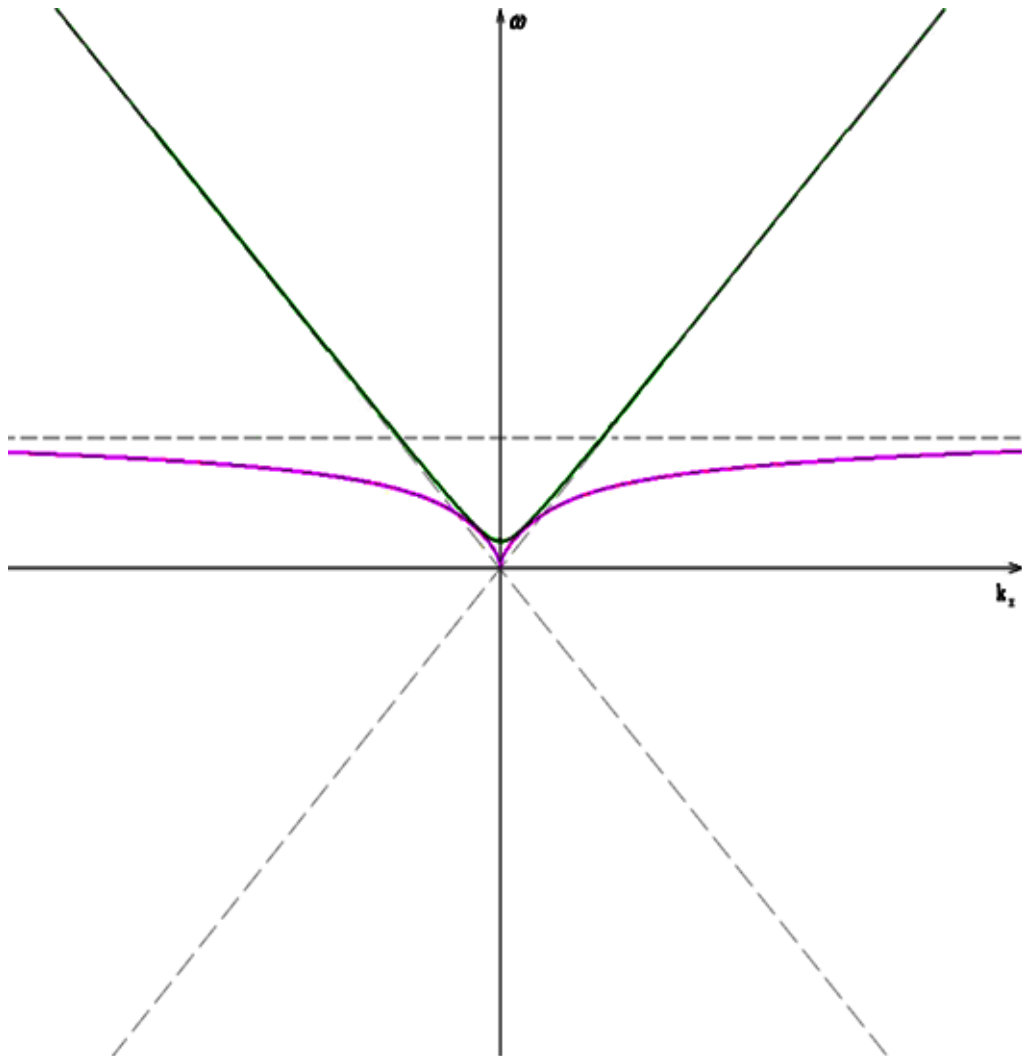


Рис. 3.6 Зависимость частоты от волнового числа при  $k_y=0$ .

### 3.4. Поперечные волны в составной мембране с учетом геометрической нелинейности

Рассмотрим далее поперечные колебания составной мембраны с учетом геометрической нелинейности, которые описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right] \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right] \end{cases} \quad (3.9)$$

Система (3.9) может быть сведена к одному уравнению, которое в безразмерных величинах:

$$U = u/u_0; \quad X = x/\Lambda; \quad T = t D^{1/2} / \Lambda (\rho_2 \gamma)^{1/2}; \quad Y = y/\Lambda; \quad \gamma = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (\text{где } u_0 - \text{ перемещение,}$$

$\Lambda$  – длина волны, удовлетворяющие соотношению  $u_0/\Lambda = 10^{-4}$ ) и с учётом обозначения:  $D = N_1 + N_2$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\rho_1 D}{R \Lambda^2 \gamma^2 \rho_2} \frac{\partial^4 U}{\partial T^4} - \frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{R \gamma \rho_2 \Lambda^2} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial T^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial Y^2 \partial T^2} \right) + \\ & + \frac{N_1 N_2}{R \Lambda^2 D} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial Y^4} \right) - \frac{u_0^2}{2 \Lambda^2} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.10) будем искать в виде функций  $\xi = X - cT$ ;  $\eta = \varepsilon X$ ;  $\chi = \sqrt{\varepsilon} Y$ , где  $c = \text{const}$  – скорость волны. Предположим, что слагаемые в уравнении (3.10) порядка  $\varepsilon$ . Пренебрегаем величинами, в которых степень  $\varepsilon$  выше 2. Это позволяет перейти от уравнения в частных производных к системе алгебраических уравнений, где  $U$  представим в виде  $U = U_0 + \varepsilon U_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (c^2 - 1) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} = 0 \Rightarrow c = 1 \quad (a) \\ (c^2 - 1) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial \chi^2} + \left[ \frac{\rho_1 D}{\varepsilon R \Lambda^2 \gamma^2 \rho_2} c^4 - \frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{\varepsilon R \gamma \rho_2 \Lambda^2} c^2 + \right. \\ \left. + \frac{N_1 N_2}{\varepsilon R \Lambda^2 D} \right] \frac{\partial^4 U_0}{\partial \xi^4} - \frac{u_0^2}{2 \Lambda^2 \varepsilon} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} = 0 \quad (б) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

После сведения системы (3.11) к одному уравнению и дифференцирования полученного уравнения по  $\xi$ , получим:

$$\frac{\partial^3 U_0}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U_0}{\partial \chi^2 \partial \xi} + \Gamma \frac{\partial^5 U_0}{\partial \xi^5} + \frac{u_0^2}{4 \Lambda^2 \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} \right] = 0, \quad (3.12)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{R \gamma \rho_2 \Lambda^2} - \frac{\rho_1 D}{R \Lambda^2 \gamma^2 \rho_2} - \frac{N_1 N_2}{R \Lambda^2 D} \right]$$

Уравнение (3.12) сводится к уравнению относительно продольной деформации  $\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = W$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial W}{\partial \eta} + G W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} + \Gamma \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \chi^2}, \quad (3.13)$$

где  $G = \frac{u_0^2}{12 \Lambda^2 \varepsilon}$ .

Таким образом, поперечные колебания составной мембраны с учетом геометрической нелинейности можно описать модифицированным уравнением Кадомцева-Петвиашвили (3.13).

Решение уравнения (3.13) будем искать в виде функции

$\zeta = \xi - k\chi - v\eta$ , где  $k$  – параметр характеризующий диффузионное расплывание волнового пучка вдоль поперечной оси ;  $v$  – скорость волны.

Получаем уравнение:

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ -v \frac{dW}{d\zeta} + GW^2 \frac{dW}{d\zeta} + \Gamma \frac{d^3W}{d\zeta^3} \right] = -\frac{1}{2} k^2 \frac{d^2W}{d\zeta^2} \quad (3.14)$$

Проинтегрируем уравнение (3.14) по  $d\zeta$ . Тогда:

$$-v \frac{dW}{d\zeta} + \frac{G}{3} \frac{d(W)^3}{d\zeta} + \Gamma \frac{d^3W}{d\zeta^3} + \frac{1}{2} k^2 \frac{dW}{d\zeta} = 0 \quad (3.15)$$

И с помощью замены  $\frac{dW}{d\zeta} = U'$  перепишем (3.15) в виде уравнения ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью (уравнение Дуффинга):

$$\frac{d^2U'}{d\zeta^2} + aU' + bU'^3 = 0 \quad (3.16)$$

$$\text{где } a = \left( \frac{1}{2} k^2 - v \right) / \Gamma; \quad b = G/3\Gamma.$$

Уравнение (3.16) имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dU'}{d\zeta} \right)^2 = E - f(U'), \text{ который можно интерпретировать как закон сохранения}$$

энергии для ангармонического осциллятора. Здесь  $E$  – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы, а функция  $f(U') = (a/2)U'^2 + (b/4)U'^4$  имеет смысл потенциальной энергии.

Вид решения уравнения (3.16) зависит от коэффициентов  $a$  и  $b$ , и начальной энергии  $E$ . Знак коэффициентов  $a$  и  $b$  зависит от параметров  $k, v$ . Рассмотрим случаи изменения коэффициентов.

1. Если  $k^2 > 2v$ ,  $v > 0$ , тогда  $a > 0, b > 0$ . В этом случае функция потенциальной энергии  $f(U') = (a/2)U'^2 + (b/4)U'^4$  имеет минимум  $f_{\min} = 0$  при  $U' = 0$  (рис.3.7 а). На фазовой плоскости  $(U', dU'/d\zeta)$  точка с координатами  $(0,0)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр» (рис.3.7 б). Ограниченные решения уравнения (3.16) существуют при  $0 < E < +\infty$ . Полином

$E - f(U')$  в этом случае имеет два действительных корня  $U'_{1,2} = \pm\alpha$  и два мнимых корня  $U'_{3,4} = \pm i\beta$ , где  $\alpha^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}$ ;  $\beta^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}$  и принимает положительные значения при  $-\alpha < U' < \alpha$  (рис.3.7 а)

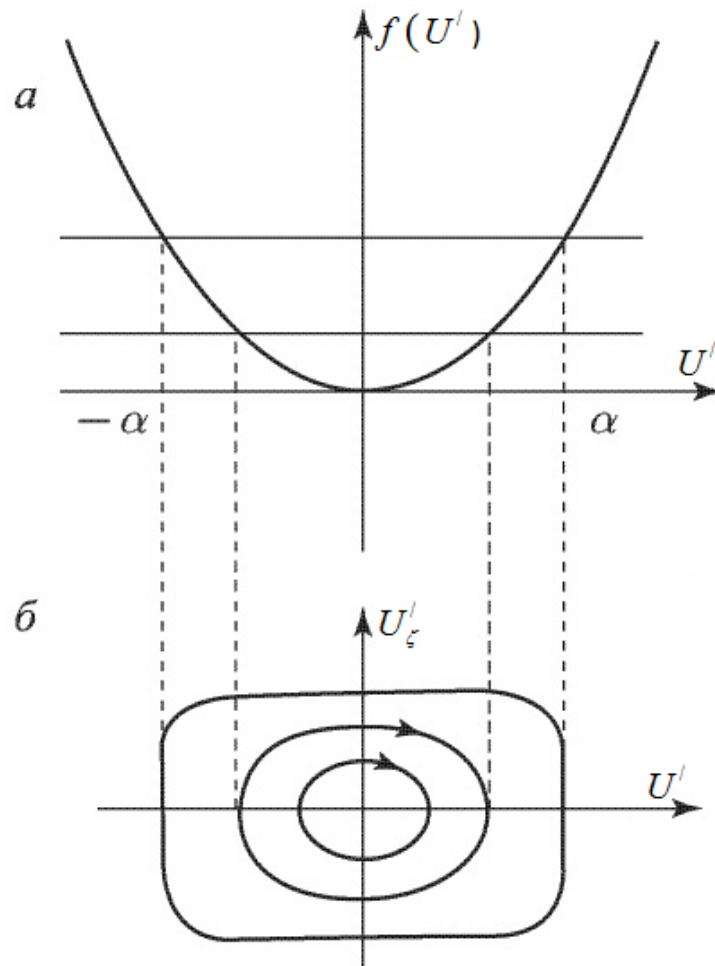


Рис.3.7 а – функция потенциальной энергии при различных значениях  $U'$  ;

б – фазовые траектории.

В соответствии с [13] решение, описывающее нелинейные периодические колебания представляется в виде:

$$U'(\zeta) = A \operatorname{cn}(\omega\zeta, s) \quad (3.17)$$

где

$$A = \left\{ -a + [a^2 + 4bE]^{1/2} \right\}^{1/2} / b^{1/2}; \omega = [a^2 + 4bE]^{1/4}; \quad (3.18)$$

$$s^2 = \left\{ -a + [a^2 + 4bE]^{1/2} \right\} / 2[a^2 + 4bE]^{1/2}; L = 4K(s)/\omega$$

$A$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – пространственная частота (волновое число),  $s$  – модуль эллиптической функции, имеющий смысл коэффициента нелинейных искажений формы колебания  $u(\zeta)$ ,  $L$  – длина волны,  $K(s)$  – полный эллиптический интеграл первого рода. Из соотношений (3.18) видно, что при изменении  $E$  от 0 до  $+\infty$  амплитуда и пространственная частота колебаний изменяются в пределах  $0 \leq A < +\infty, \sqrt{a} \leq \omega < \infty$ , а коэффициент нелинейных искажений – в интервале:  $0 \leq s^2 < 1/2$ .

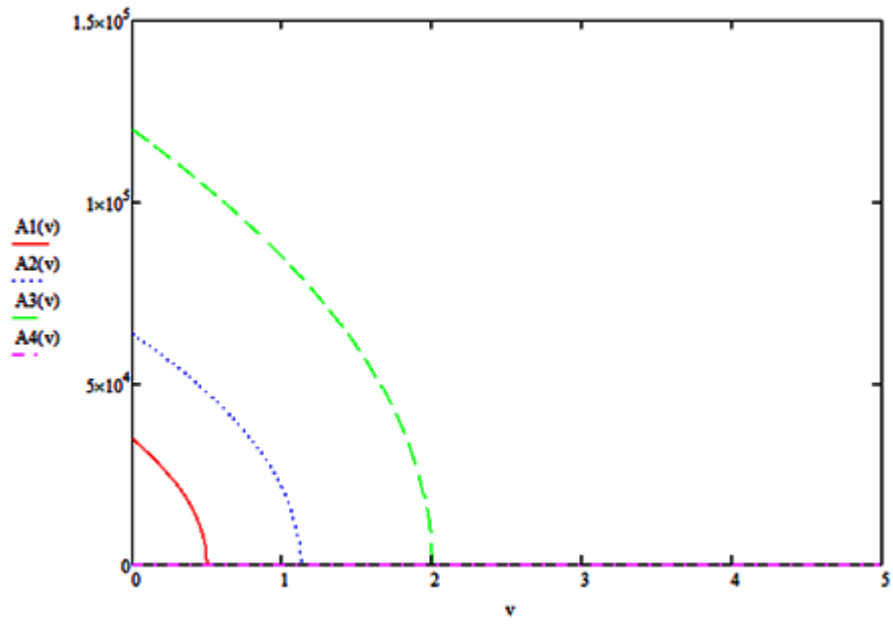
Исключая из выражений (3.18) константу интегрирования  $E$ , получаем зависимость амплитуды и пространственной частоты колебаний от коэффициента нелинейных искажений и коэффициентов уравнения Дуффинга:

$$A = [2as^2]^{1/2} / [b(1-2s^2)]^{1/2}; \quad \omega = a^{1/2} / [1-s^2]^{1/2} \quad (0 \leq s^2 < 1/2). \quad (3.19)$$

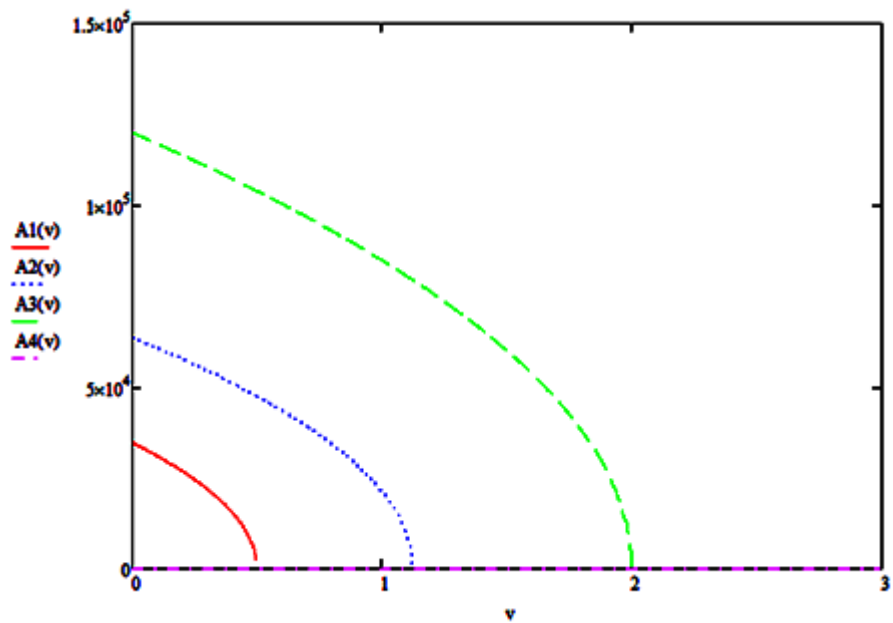
Подставим в выражение (3.19) значения коэффициентов  $a$  и  $b$  :

$$\begin{aligned} A &= \left[ 6s^2 \left( \frac{1}{2}k^2 - v \right) \right]^{1/2} / \left[ G(1-2s^2) \right]^{1/2} = \\ &= 6(\Lambda/u_0) \left[ (k^2 - 2v)\varepsilon s^2 \right]^{1/2} / [1-2s^2]^{1/2}; \\ \omega &= \left[ \frac{1}{2}k^2 - v \right]^{1/2} / \left[ \Gamma(1-s^2) \right]^{1/2} = \\ &= \left\{ \Lambda\gamma / [\rho_2 N_1 - \rho_1 N_2] \right\} \left[ (k^2 - 2v)R\rho_2 D\varepsilon \right]^{1/2} / [1-s^2]^{1/2} \\ &0 \leq s^2 < 1/2 \end{aligned} \quad (3.19 \text{ a})$$

Качественный вид зависимости амплитуды и пространственной частоты волны от ее скорости представлен на рисунках 3.8(а,б), 3.9(а,б) соответственно.



а

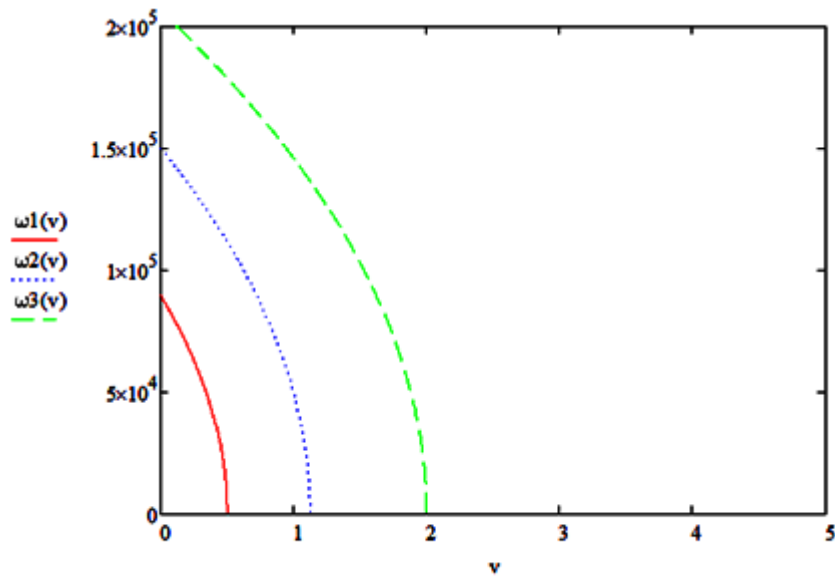


б

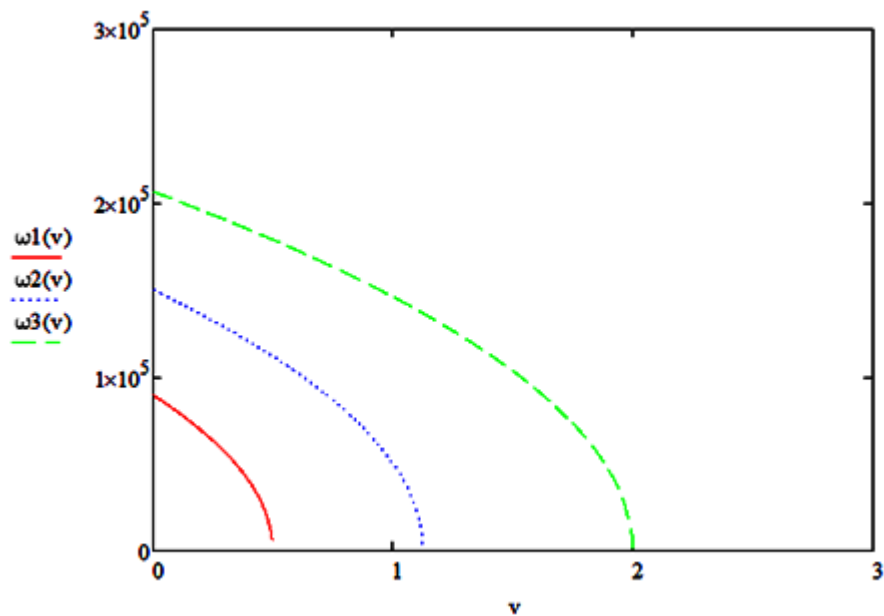
Рис.3.8 – Зависимость амплитуды волны от ее скорости. Графики построены

при следующих значениях:  $k = \pm 1; \pm 1,5; \pm 2; \pm 1,7$ ;  $s^2 = \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; 0$ .





а

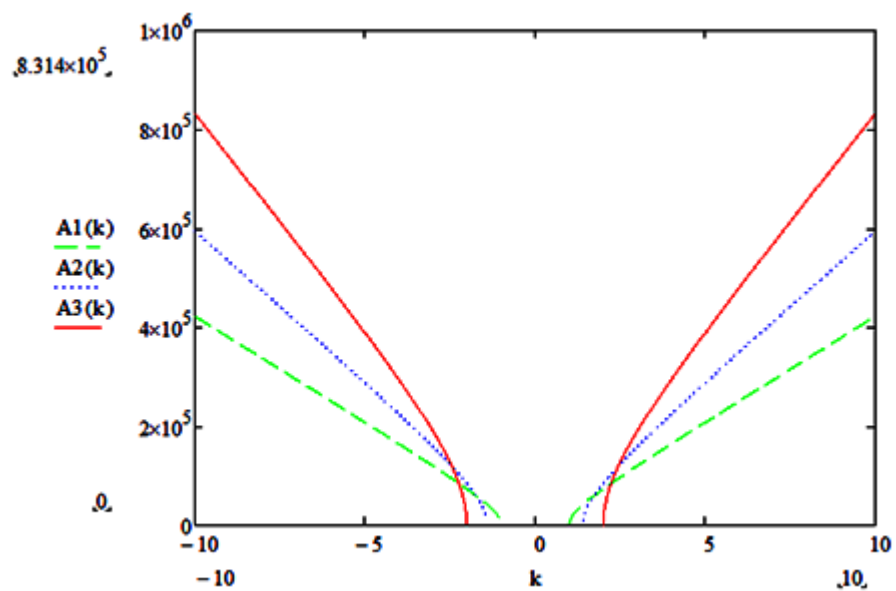


б

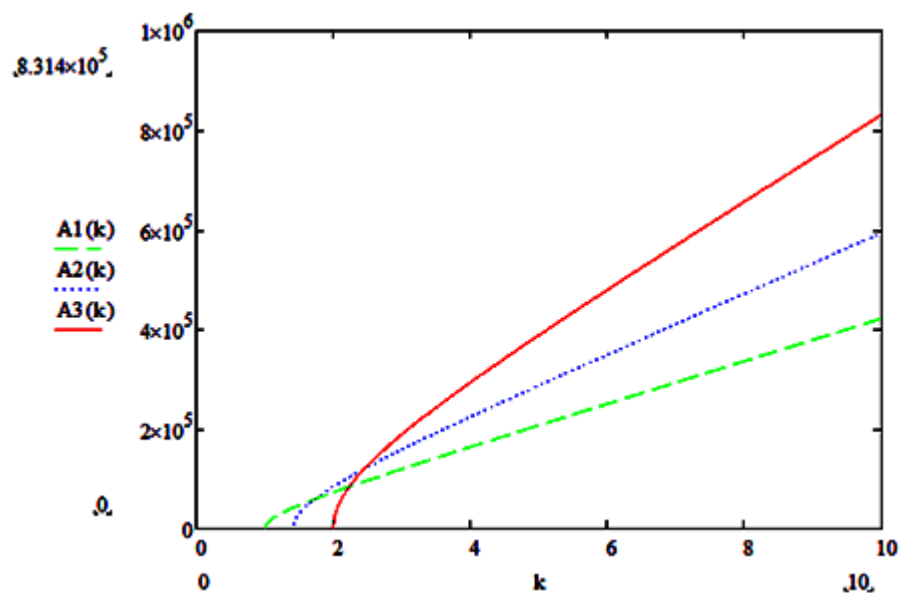
Рис.3.9 – Зависимость пространственной частоты волны от ее скорости.

Графики построены при следующих значениях:  $k = \pm 1; \pm 1,5; \pm 2$ ;  $s^2 = 0; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}$ .

Зависимости амплитуды и пространственной частоты волны от параметра  $k$  представлены на рисунках 3.10 (а,б), 3.11 (а,б).



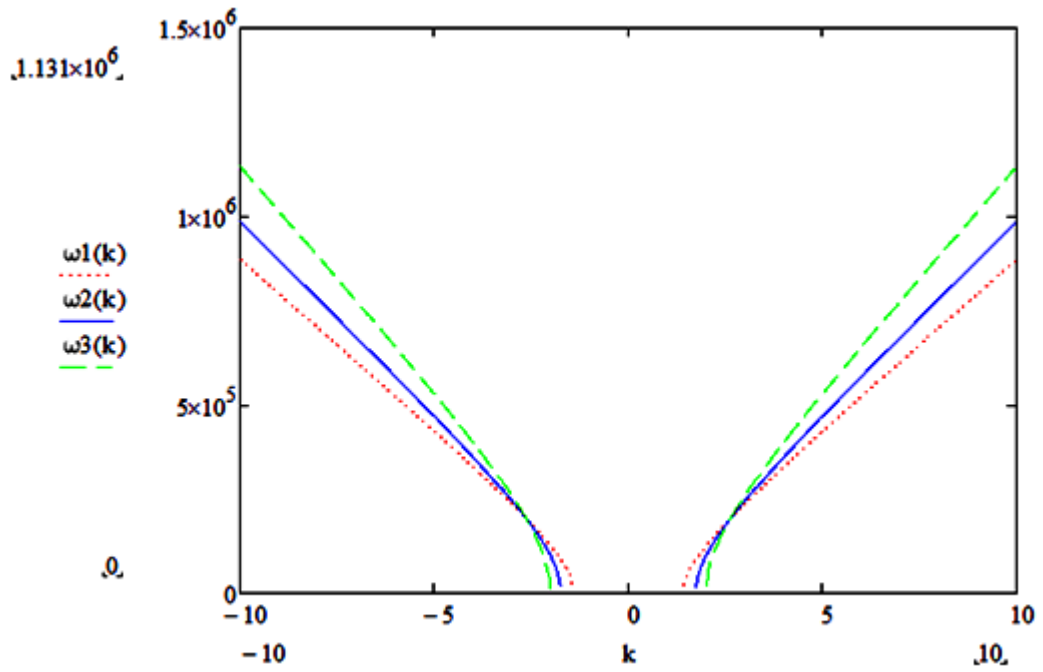
а



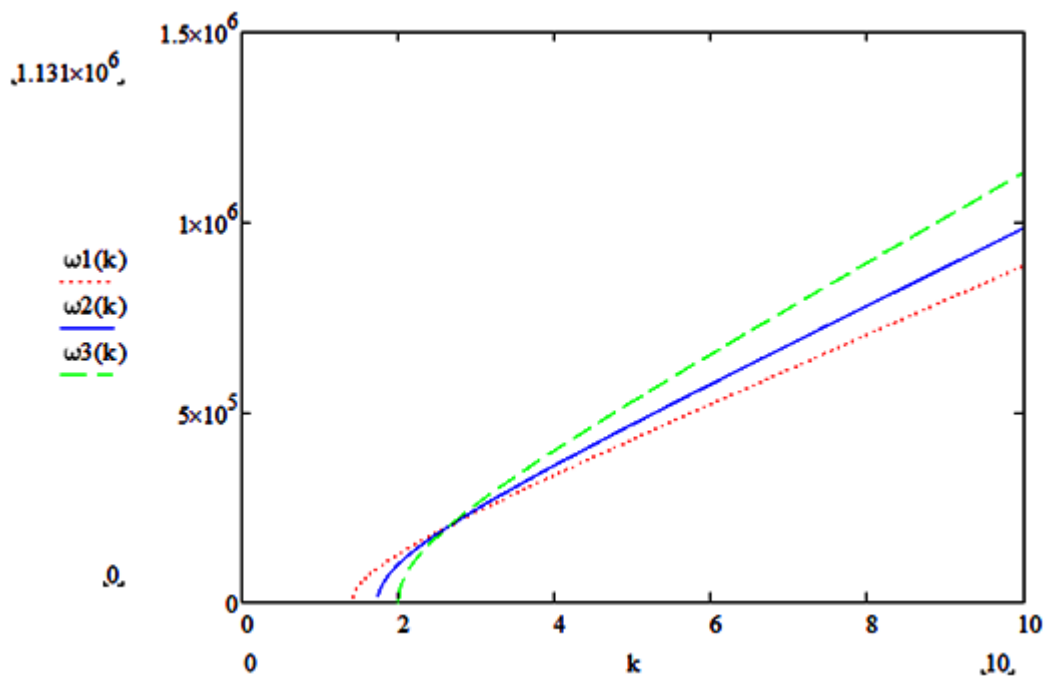
б

Рис. 3.10 – Зависимость амплитуды волны от параметра  $k$ . Графики построены

при следующих значениях:  $v = \frac{1}{2}; 1; 2$ ;  $s^2 = \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}$ .



а



б

Рис. 3.11 – Зависимость пространственной частоты волны от параметра  $k$ .

Графики построены при следующих значениях:  $\nu = 1; 1,5; 2$ ;  $s^2 = 0; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}$ .

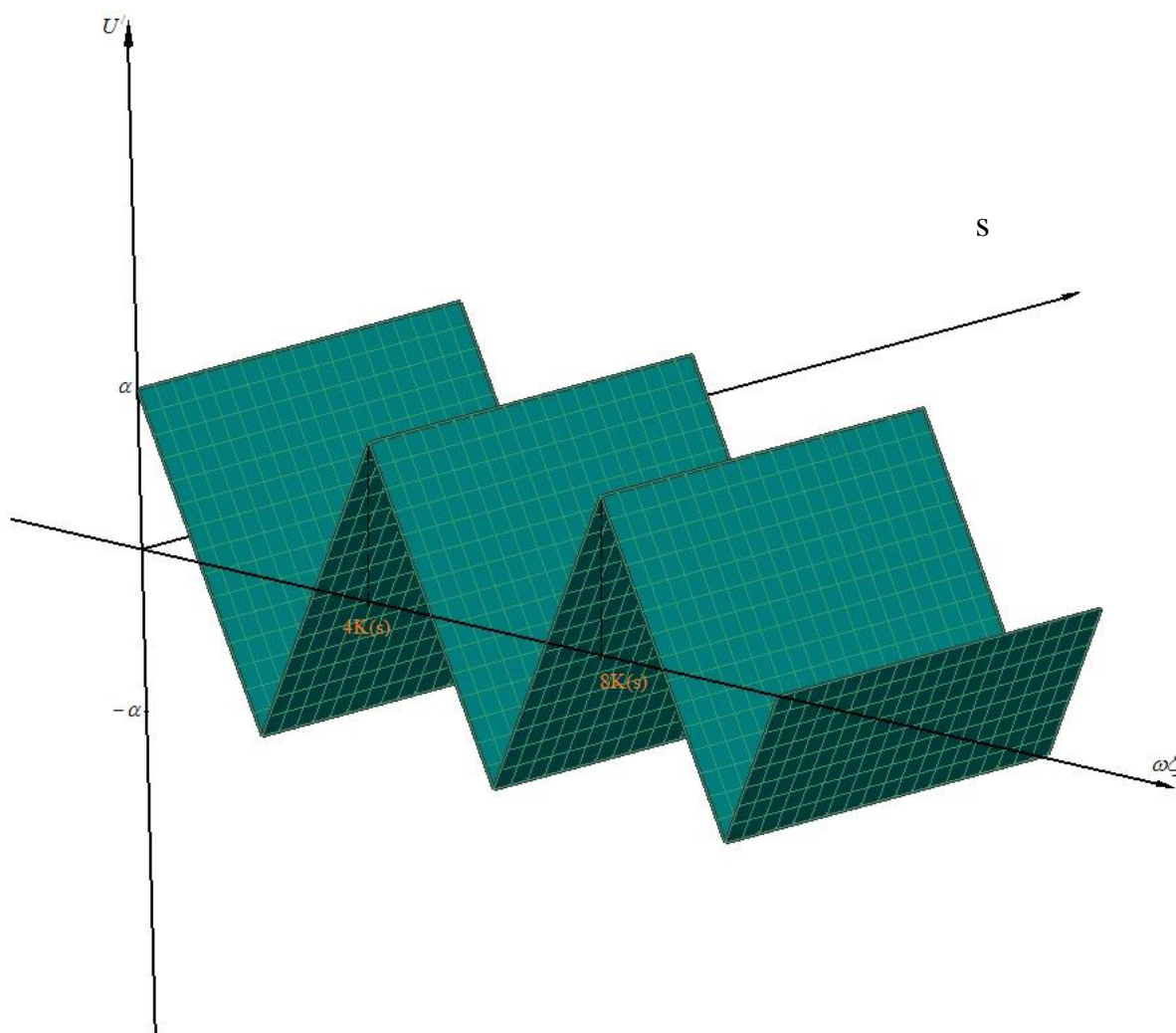
При  $E \rightarrow 0$  ( $s^2 \approx 0$  и  $A \rightarrow 0$ ) выражение (3.17) описывает квазигармонические колебания вблизи положения равновесия вида [13]:

$$U' = A \cos(\omega \zeta) \quad (3.20)$$

При  $E \rightarrow +\infty, s^2 \rightarrow 1/2$ , и в этом случае (3.17) описывает существенно нелинейные колебания [13]:

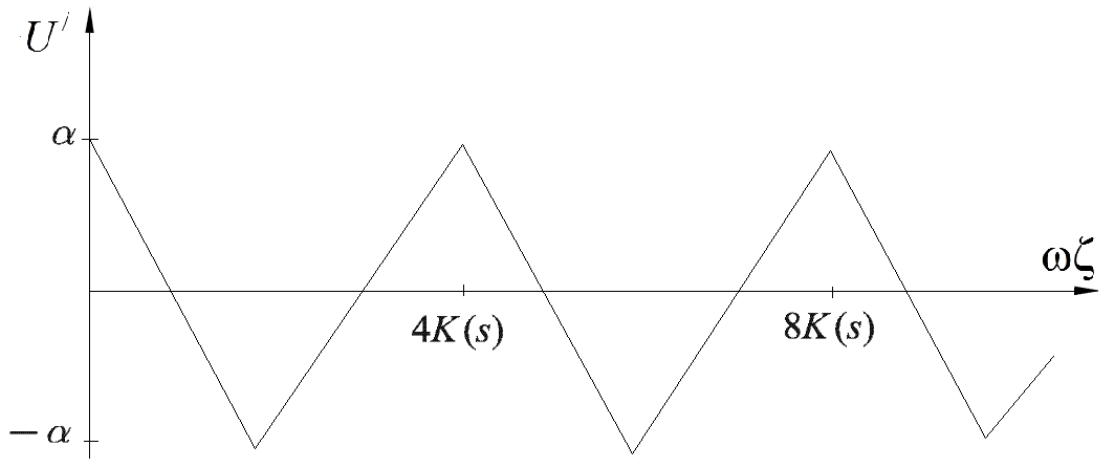
$$U' = A \operatorname{cn}(\omega \zeta, s) \quad (3.21)$$

которые имеют пилообразную форму (рис. 3.12 а,б)



а

Рис.3.12 а – нелинейные колебания (трехмерный вид).



б

Рис.3.12 б – нелинейные колебания (двумерный вид).

2. Если  $k^2=0$ ,  $\nu>0$ , тогда  $a<0$ ,  $b>0$ . Коэффициенты уравнения (3.16) переписутся в виде:  $a = -\frac{\nu}{\Gamma}$ ;  $b = \frac{G}{3\Gamma}$ . В этом случае функция потенциальной энергии  $f(U') = (a/2)U'^2 + (b/4)U'^4$  имеет локальный максимум  $f_{\max} = 0$  при  $U' = 0$  и локальные минимумы  $f_{\min} = -a^2/4b$  в точках  $U' = \pm\sqrt{-a/b}$  (рис. 3.13 а). На фазовой плоскости  $(U', dU'/d\zeta)$  точки  $(\pm\sqrt{-a/b}, 0)$  являются устойчивыми положениями равновесия типа «центр», а точка  $(0,0)$  является «седлом» (рис. 3.13 б).

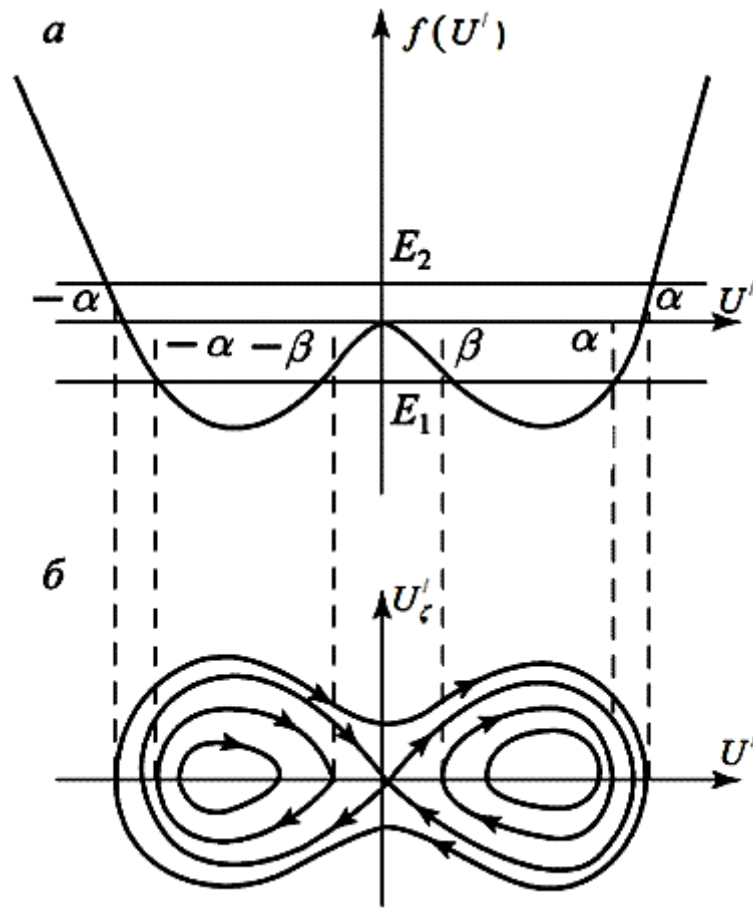


Рис. 3.13 а – функция потенциальной энергии при различных значениях  $U'$  ;  
 б – фазовые траектории.

Ограниченные решения уравнения (3.16) существуют, если константа интегрирования изменяется в диапазоне  $f_{\min} \leq E < +\infty$ , причем различным значениям начальной энергии  $E$  соответствуют качественно различные режимы движения.

Пусть  $f_{\min} \leq E < 0$ . В этом случае полином  $E - f(U')$  имеет четыре действительных корня  $U'_{1,2} = \pm\alpha$ ,  $U'_{3,4} = \pm\beta$ , где

$$\alpha^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}; \quad \beta^2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4bE}}{b} \quad \text{и принимает положительные}$$

значения при  $|\beta| \leq U' \leq |\alpha|$  (рис.3.13 а). На фазовой плоскости им соответствуют замкнутые траектории, лежащие внутри сепаратрисы.

В соответствии с [13] решение, описывающее нелинейные периодические колебания имеет вид:

$$U'(\zeta) = A \operatorname{dn}(\omega\zeta, s) \quad (3.22)$$

где

$$A = \left\{ -a + [a^2 + 4bE]^{1/2} \right\}^{1/2} / b^{1/2}; \quad \omega = \left\{ \frac{1}{2} \left( -a + [a^2 + 4bE]^{1/2} \right) \right\}^{1/2}; \quad (3.23)$$

$$s^2 = 2[a^2 + 4bE]^{1/2} / \left\{ -a + [a^2 + 4bE]^{1/2} \right\}; \quad L = 4K(s)/\omega$$

Из соотношений (3.23) видно, что при изменении  $E$  от  $E_{\min} = -a^2/4b$  до 0 пространственная частота увеличивается от  $\omega = \sqrt{-a/2}$  до  $\omega = \sqrt{-a}$ , амплитуда периодических колебаний изменяется от значения  $A = \sqrt{-a/b}$  до значения  $A = \sqrt{-2a/b}$ . Коэффициент нелинейных искажений формы колебаний изменяется в пределах  $0 \leq s^2 \leq 1$ .

Исключая из выражений (3.23) константу интегрирования  $E$ , получим зависимость между амплитудой и пространственной частотой колебаний от коэффициента нелинейных искажений и коэффициентов уравнения Дуффинга.

$$A = [-2a]^{1/2} / [b(2-s^2)]^{1/2},$$

$$\omega = [-a]^{1/2} / [2-s^2]^{1/2} \quad (3.24)$$

$(0 \leq s^2 \leq 1)$ .

Подставим в выражение (3.24) значения коэффициентов  $a$  и  $b$  :

$$A = [6v]^{1/2} / [G(2-s^2)]^{1/2} = 6(\Lambda/u_0) \left\{ 2v\varepsilon / (2-s^2) \right\}^{1/2},$$

$$\omega = \left\{ v/\Gamma(2-s^2) \right\}^{1/2} = \left\{ \Lambda\gamma / (\rho_2 N_1 - \rho_1 N_2) \right\} \left\{ 2\varepsilon v R \rho_2 D / (2-s^2) \right\}^{1/2} \quad (3.24 \text{ a})$$

$0 \leq s^2 \leq 1$

Зависимости амплитуды и пространственной частоты волны от ее скорости представлены на рис. 3.14, 3.15. Графики построены при следующих значениях:  $s^2 = 0; \frac{1}{2}; 1$

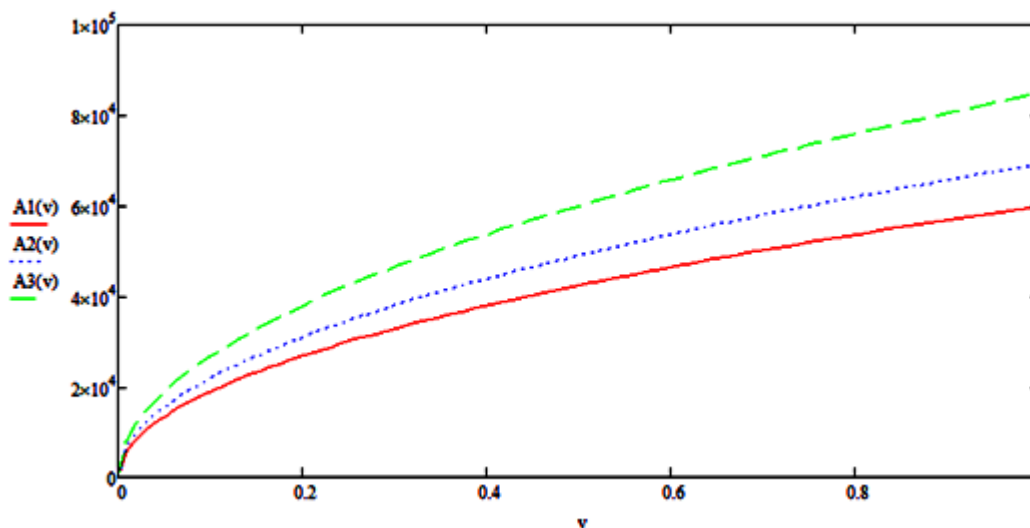


Рис.3.14 – Зависимость амплитуды волны от ее скорости.

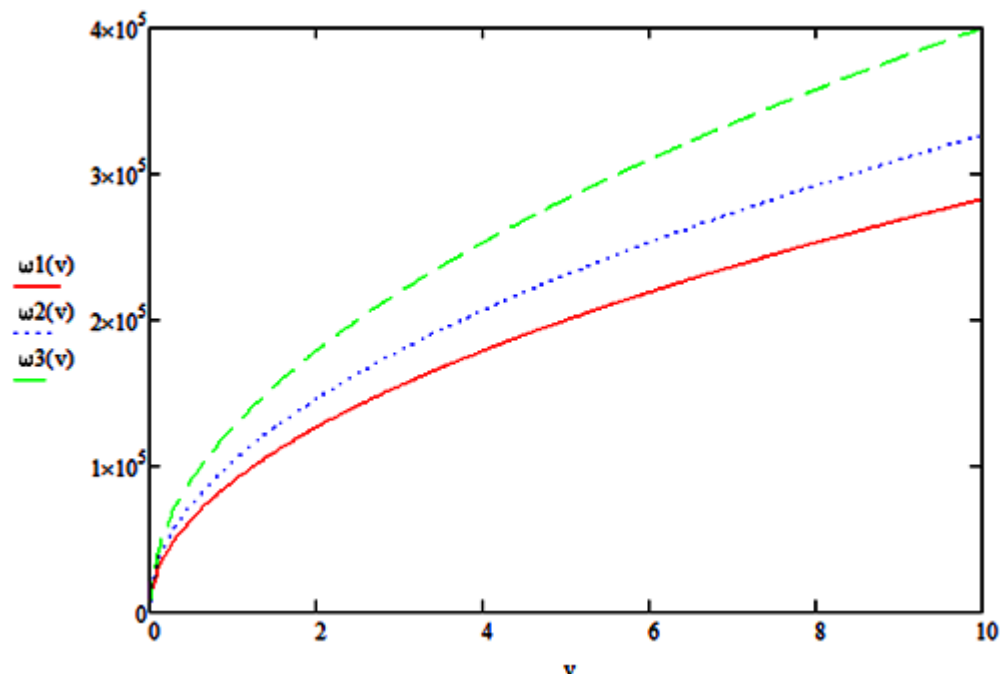


Рис.3.15 – Зависимость пространственной частоты волны от ее скорости.



Нелинейные периодические колебания по замкнутым фазовым траекториям внутри сепаратрисы не имеют линейного вырождения, так как при  $E \rightarrow E_{\min} = -a^2/4b$   $s \rightarrow 0$  и  $\text{dn}(\omega\zeta, 0) = 1$ .

При  $E = 0$   $s = 1$  из (3.22) получаем вырождение в сепаратрисное решение [13]:

$$U'(\zeta) = A/\text{ch}(\zeta/\Delta), \quad (3.25)$$

$$\text{где } A = \{-2a/b\}^{1/2}, \Delta = \{-1/a\}^{1/2} \quad (3.26)$$

Подставим в выражение (3.26) значения коэффициентов  $a$  и  $b$  :

$$\begin{aligned} A &= \{6v/G\}^{1/2} = 6(\Lambda/u_0)[2v\epsilon]^{1/2}, \\ \Delta &= \{\Gamma/v\}^{1/2} = [(\rho_2 N_1 - \rho_1 N_2)/\Lambda\gamma][2\epsilon v R \rho_2 D]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.26 \text{ a})$$

$A$  – амплитуда колебания,  $\Delta$  – его длительность.

На рисунках 3.16, 3.17 приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости.

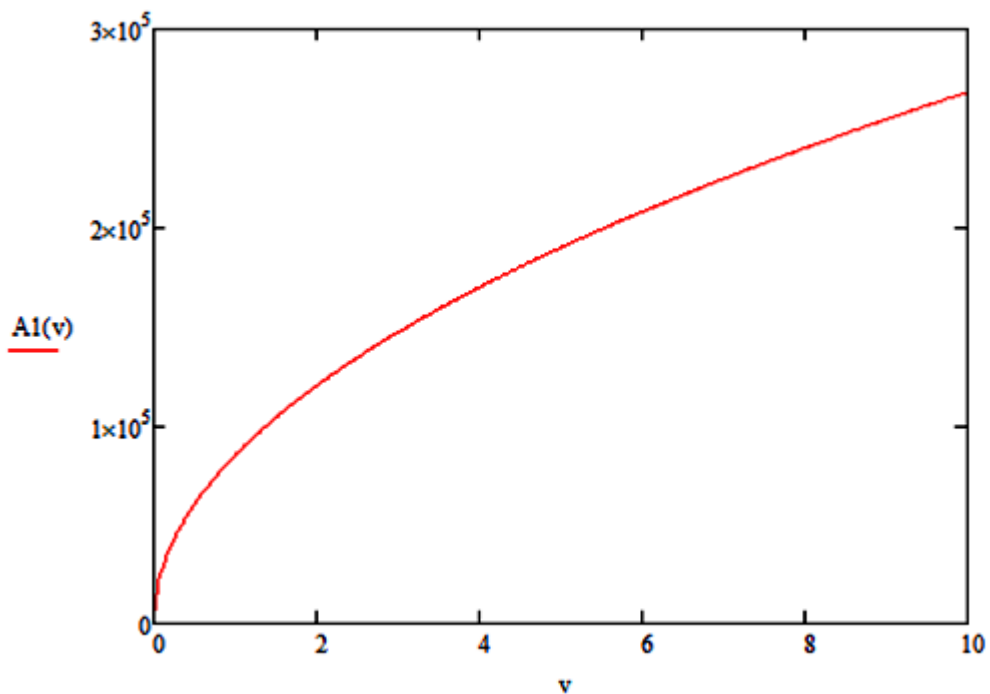


Рис.3.16 – Зависимость амплитуды солитона от его скорости.

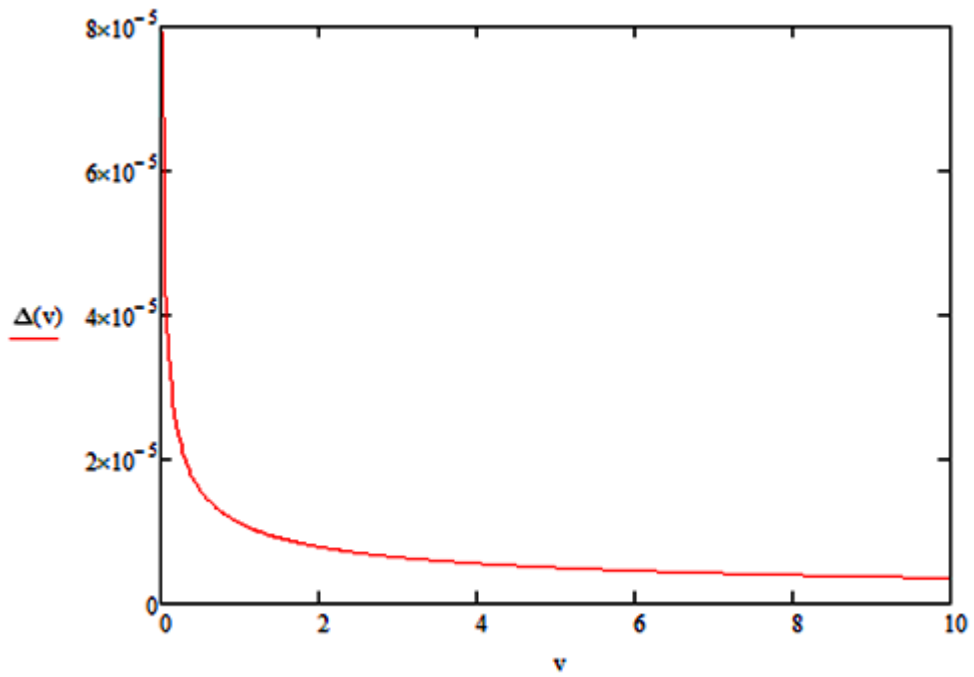
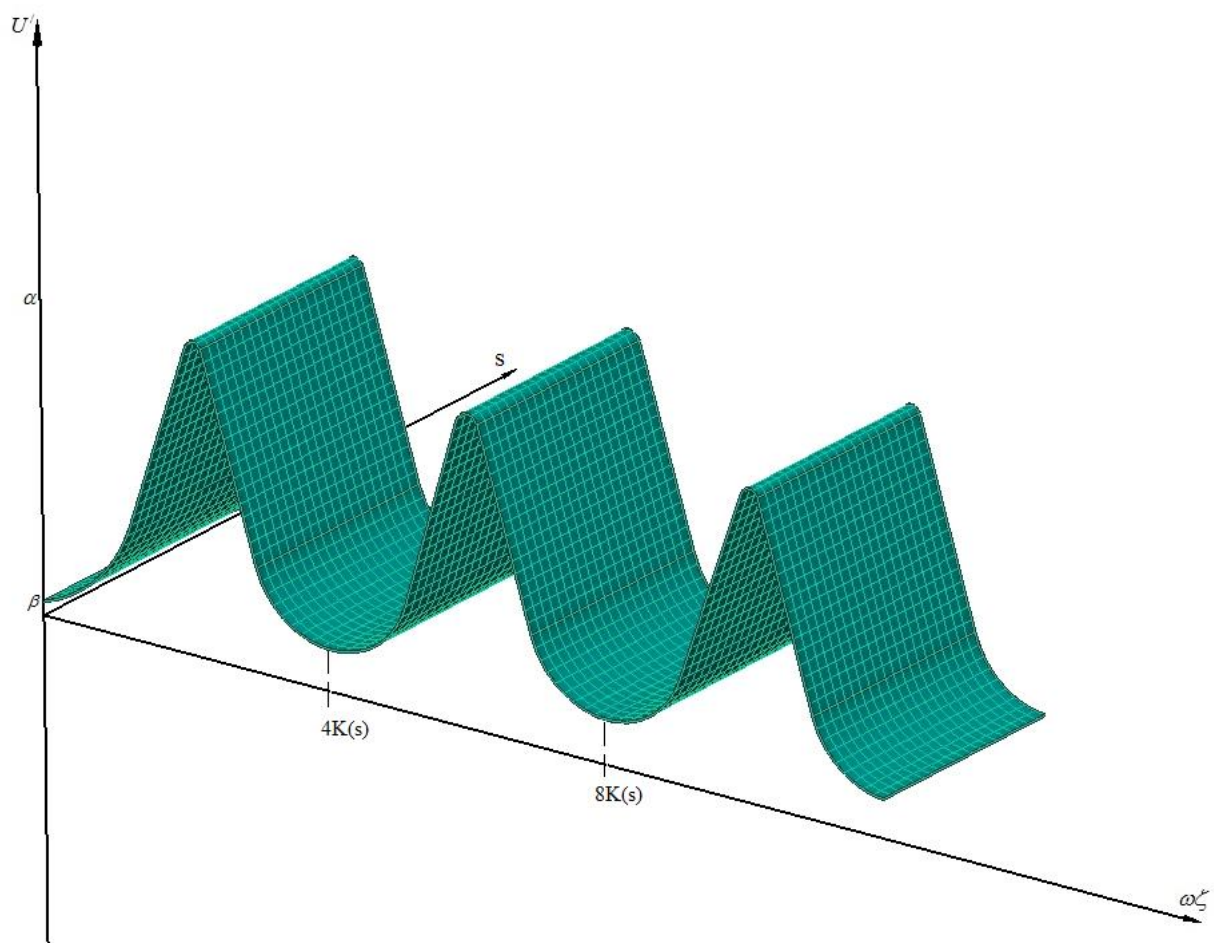
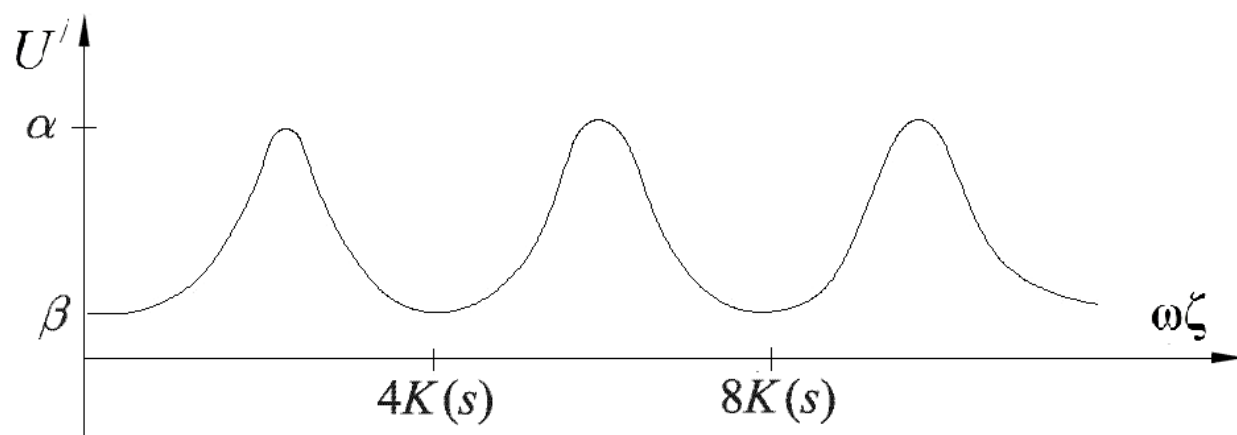


Рис.3.17 – Зависимость ширины солитона от его скорости.

Качественный вид нелинейных периодических движений, описываемых дельта-амплитудой (3.22) приведен на рисунке 3.18 (а,б), а на рисунке 3.19 (а,б) показан вид сепаратрисного решения (3.25).

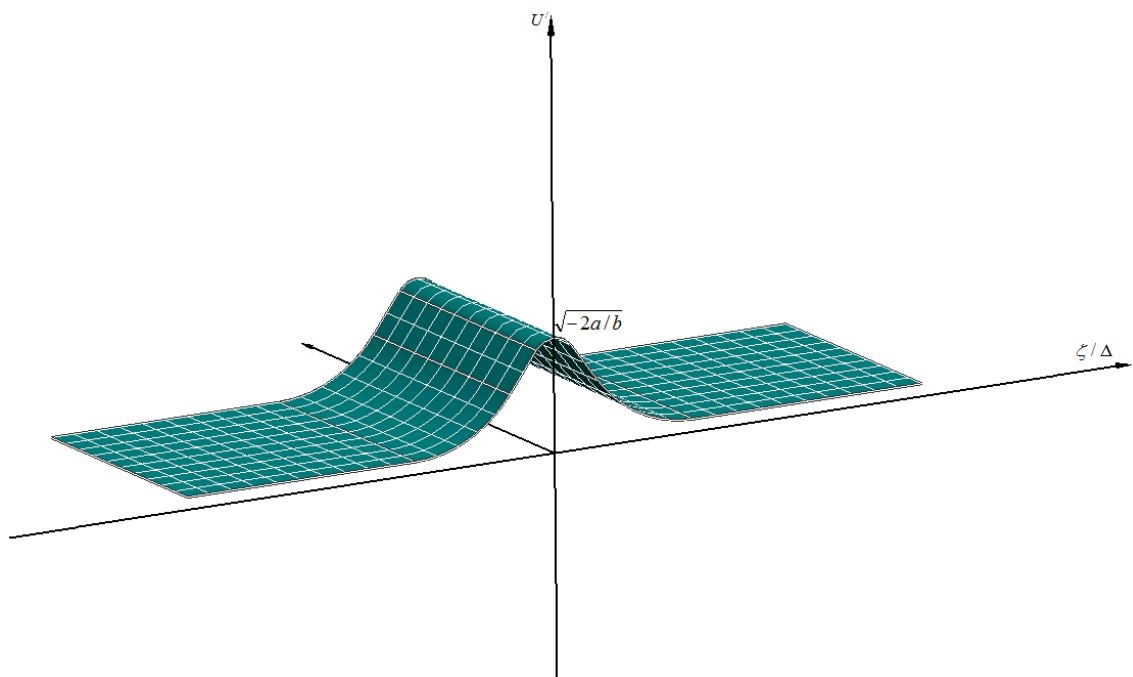


а

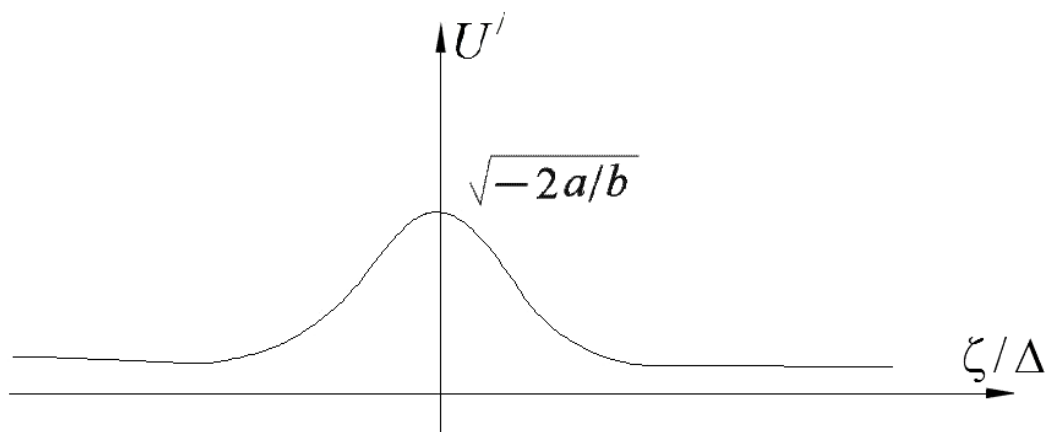


б

Рис. 3.18 Нелинейные периодические движения, описываемые дельта-амплитудой: а – трехмерный вид; б – двумерный вид.



a



б

Рис. 3.19 Сепаратрисное решение.

Пусть  $E=0$ . В этом случае полином  $E - f(U')$  имеет два действительных корня  $U'_{1,2} = \pm\alpha$ , и два мнимых  $U'_{3,4} = \pm i\beta$ , где  $\alpha^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}$ ;  $\beta^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}$  и принимает положительные значения при  $-\alpha < U' < \alpha$  (рис. 3.13 а). на фазовой плоскости ограниченными решениями при таких значениях  $E$  соответствуют замкнутые фазовые траектории, лежащие вне петли сепаратрисы (рис. 3.13 б). Решение, описывающее нелинейные периодические колебания представлено в виде [13]:

$$U'(\zeta) = A \operatorname{cn}(\omega\zeta, s) \quad (3.27)$$

где

$$A = \left\{ \left[ -a + (a^2 + 4bE)^{1/2} \right] / b \right\}^{1/2}; \quad \omega = \{a^2 + 4bE\}^{1/4}; \quad (3.28)$$

$$s^2 = \left[ -a + (a^2 + 4bE)^{1/2} \right] / 2(a^2 + 4bE)^{1/2}; \quad L = 4K(s)/\omega$$

Анализируя соотношения (3.28), получим, что при изменении  $E$  от 0 до  $+\infty$  пространственная частота колебаний возрастает от значения  $\omega = \sqrt{-a}$  до  $+\infty$ , амплитуда колебаний также неограниченно возрастает от значения  $A = \sqrt{-2a/b}$ , а коэффициент нелинейных искажений при этом уменьшается от 1 до 1/2.

Исключая из (3.28) константу  $E$ , получим зависимости:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ -2as^2/b(2s^2 - 1) \right\}^{1/2}, \\ \omega &= \left\{ -a/(2s^2 - 1) \right\}^{1/2} \\ &(1 \geq s^2 > 1/2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Подставим в выражение (3.29) значения коэффициентов  $a$  и  $b$  :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ 6vs^2/G(2s^2 - 1) \right\}^{1/2} = 6[\Lambda/u_0] \left\{ 2v\epsilon s^2/(2s^2 - 1) \right\}^{1/2}, \\ \omega &= \left\{ v/\Gamma(2s^2 - 1) \right\}^{1/2} = [\Lambda\gamma/\rho_2 N_1 - \rho_1 N_2] \left\{ 2v\epsilon R\rho_2 D/(2s^2 - 1) \right\}^{1/2} \\ &(1 \geq s^2 > 1/2) \end{aligned} \quad (3.29 \text{ а})$$

На рисунках 3.20, 3.21 приведены зависимости амплитуды и пространственной частоты волны от ее скорости. Графики построены при следующих значениях:  $s^2 = 0,6; 0,75; 1$

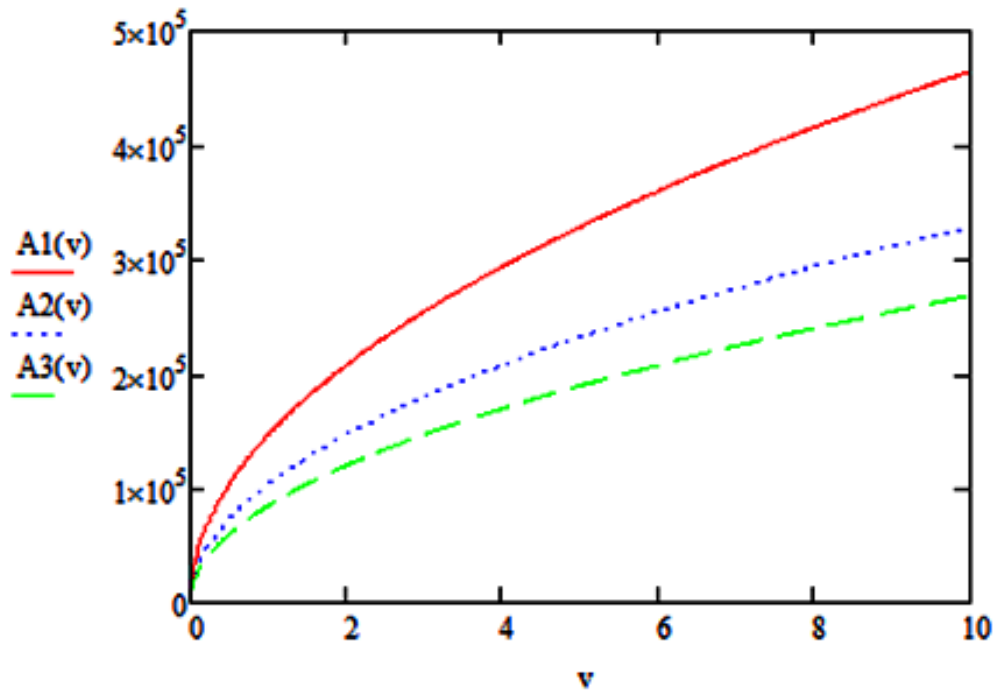


Рис. 3.20 – Зависимость амплитуды волны от ее скорости.

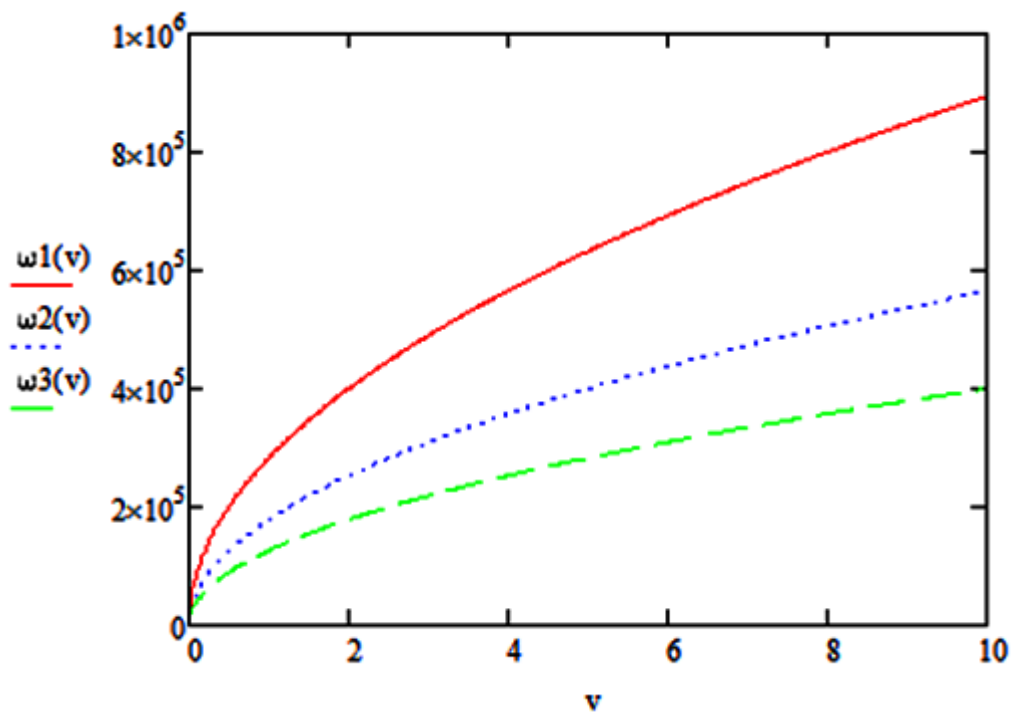
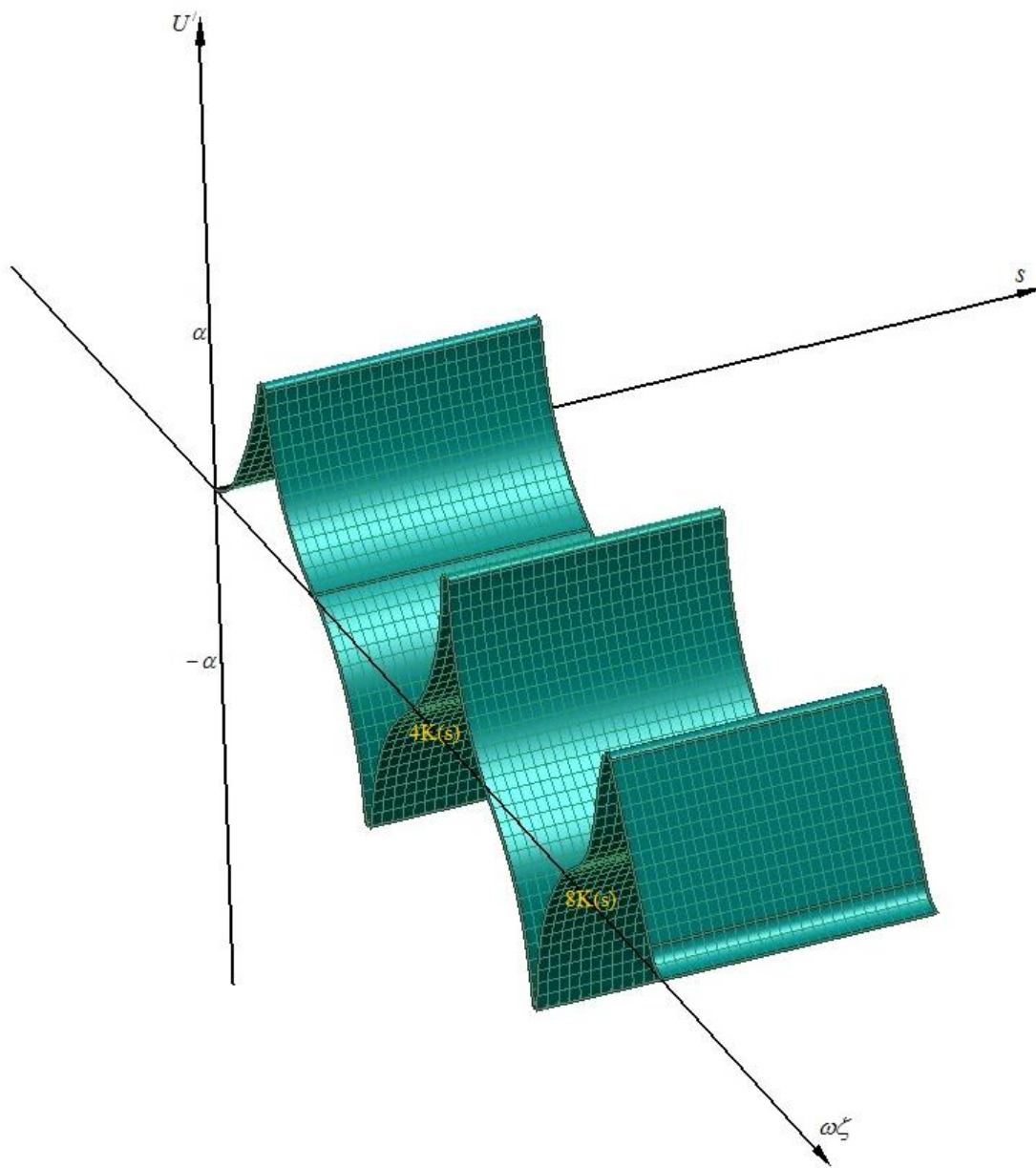


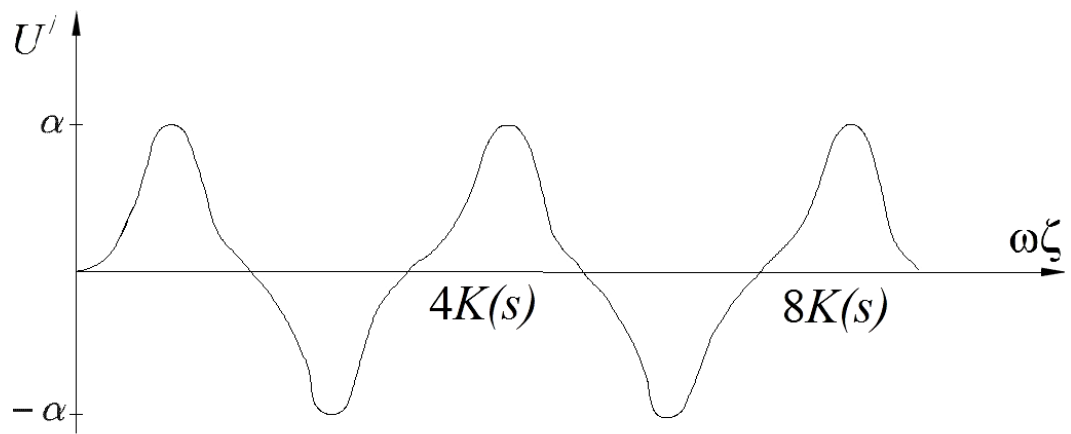
Рис. 3.21 – Зависимость пространственной частоты волны от ее скорости.

Решение (3.27) описывает нелинейные колебания, которые не имеют линейного вырождения. Их форма при  $s^2$ , близких к единице, показана на рисунке 3.22(а,б).



а

Рис. 3.22 а – нелинейные колебания (трехмерный вид).



б

Рис. 3.22 б – нелинейные колебания (двумерный вид).



## Заключение

**В заключении** приводятся основные результаты и выводы по работе.

1. Предложен подход к исследованию динамики составных элементов конструкций, основанный на применении уточненных моделей стержней и пластин, и сходстве дисперсионных зависимостей.

Выявлено, что составной стержень, совершающий продольные колебания по своим дисперсионным свойствам эквивалентен модели Миндлина-Германа. Составная струна, совершающая поперечные колебания, эквивалентна балке Тимошенко с натягом. Составная мембрана эквивалентна пластине Тимошенко с натягом.

2. В рамках математической модели составного стержня с вязкоупругой силой контактного взаимодействия проведен анализ дисперсионных и диссипативных свойств волн, показывающий, что в низкочастотном диапазоне коэффициент затухания зависит от частоты, в высокочастотном диапазоне усиливается влияние дисперсионных эффектов, а коэффициент затухания становится частотно-независимым.

3. В результате проведения аналитических исследований показано, что в нелинейно-упругом составном стержне могут существовать нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны). Исследование зависимости между основными параметрами (амплитудой, скоростью, шириной) солитона показывает, что поведение нелинейных уединенных волн может быть как классическим, когда с ростом скорости уединенной стационарной волны ее амплитуда возрастает, а ширина уменьшается, так и неклассическим, когда с ростом скорости волны ее амплитуда убывает, а ширина возрастает.

4. Показано, что поперечные колебания составной мембраны с учетом геометрической нелинейности можно описать модифицированным уравнением Кадомцева-Петвиашвили, решения которого получены в виде одномерных и двумерных солитонов. Проведен расчёт параметров волн (амплитуды,

пространственной частоты) и представлены различные формы нелинейных периодических волн.

## Список литературы

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. - М.: ИЛ, 1955
4. Ляв А. Математические теории упругости. - М.; Л: ОНТИ, 1935
5. Скучик Е. Основы акустики. - М.: ИЛ, 1959, Т. II.
6. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. - М.: Мир, 1971.
7. Скучик Е. Основы акустики. - М.: ИЛ, 1976, Т.1,2.
8. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Наука, 1967.
9. Филиппов А.П. Колебания механических систем. - Киев: Наукова думка, 1965.
10. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. - Oxford: Clarendon Press, 1975.
11. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge, Univ. Press, 1927 (4th edition); Ляв А. Математическая теория упругости. М,-Л., ОНТИ, 1935.
12. Rayleigh J. W. S. The theory of sound. Vol. 1-2. London, Macmilan and Co., 1877-1888; Релей Д.В. Теория звука. Т.1-2. М., Гостехиздат, 1955.
13. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Наука, Физматлит. 2002. 208 с.
14. Pochhammer L. Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder. J. reine und angew. Math., 1876, 81, № 4, 324—336.
15. Chree C The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, then solution and application. Trans. Cambridge Philos. Soc, 1889, 14, Part III, 250—369.

16. Prescott J. Elastic waves and vibrations of thin rods. *Phil. Mag.*, 1942, 33, Ser. 7, № 225, 703—754.
17. Mindlin R. D, Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod. *Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech*, Publ. Amer. Soc. Mech. Engrs, N. Y, 1952, 187—191; *Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech*, Ann Arbor, Mich, 1954, New York, 1955, 233 -*РЖМех*, 1954, № 11, 5747; 1957, № 10, 11934.
18. Zachmanoglou E. C., Volterra E. An engineering theory of longitudinal wave propagation in cylindrical elastic rods. *Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mechanics*, Providence, Rhode Island, 1958. New York, N. Y., 1958, 239-245– *РЖМех*, 1961, 12B166.
19. Volterra E. Dispersion of longitudinal waves. *J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1957, 83, № 3, 1322-1-1322-24 - *РЖМех*, 1958, № 9, 10308.
20. Clarkson P.A., LeVeque R.J., Saxton R. Solitary wave interaction in elastic rods // *Stud. Appl. Math.*, 1986. V. 75. № 2. P. 95-122.
21. Ерофеев В.И., Ключева Н.В., Семерикова Н.П. Нелинейно-упругие волны в стержне Миндлина-Германа // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1999. Т. 7. № 4. С. 35-47.
22. Ерофеев В.К, Ключева КВ., Семерикова Н.П. Солитоны деформации в стержне Миндлина-Германа // *Прикладная механика и технологии машиностроения. / Сб. науч. трудов. Н.Новгород: Изд-во «Интелсервис» НФ ИМАШ РАН*, 1998. С. 85-95.
23. Ерофеев В.К, Ключева КВ., Семерикова Н.П. Об особенностях распространения нелинейных стационарных волн в стержне Миндлина-Германа // *Труды 3-й научной конференции по радиофизике. Н.Новгород: ННГУ*, 1999. С. 236-237.
24. *Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. - М.: Сов. Энциклопедия.*

25. Карпман В.И. нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973.
26. Скотт Э., Чу Ф., Маклафлин Д. Солитон - новое понятие в прикладных науках. - В кн.: Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.- М.: Сов.радио, 1977, с.215-284.
27. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. теория солитонов. Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980.
28. Солитоны в действии/ Под ред.К.лонгрена и Э. Скотта. - М.: Мир, 1981.
29. Ребби К. Солитоны. - УФН, 1980, т.130, с.329-356.
30. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн: Учебное пособие. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. - 432с.
31. Авиационная акустика / Под ред. Мунина А.Г. - М.: Машиностроение, 1986, Т. 1,2.
32. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - М.: Высшая школа. 1980.
33. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах/ Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) – М.: Машиностроение. Т1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. И доп./ Под ред. В.В Болотина. 1999. 504с.
34. Никифоров А. С, Будрин СВ. Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. - Л.: Судостроение, 1968.
35. Светлицкий В.А. Механика стержней. - М.: Высшая школа. 1987. Т. 1,2.
36. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods // J. of Math and Phys. Sciences. 1970. V. 4. P. 64-73.
37. Nariboli G.A., SedovA. Burgers 's-Korteweg-de Vries equation for viscoelastic rods and plates // J. Math. Anal. And Appl., 1970. V. 32. № 3. P. 661-667.
38. Abramson H.N., Plass H.J., Rippenger E.A. Stress waves propagation in rods and beams. - Adv.in appl.mech., 1958, №5

39. Green W.A. Dispersion relations for elastic waves in bars. - Progress in solid mechanics, ed. by I.N. Sneddon, R. Hill. - Amsterdam: North-Holland publishing company, 1960, vol.1.
40. McNiven H.D. Extensional waves in a semi-infinite elastic rod. - J. of the acoust.soc. Of America, 1961, v.33, №1.
41. Miklowitz J. Recent developments in elastic wave propagation. - Appl.mech. Reviews, 1960.v.13, №12.
42. Mindlin R.D. Low frequency vibrations of elastic bars. - Int.J. of solids and structures, 1976, v.12, №1.
43. Volterra E. A one-dimensional theory of wave propagation in elastic rods based on the method of internal constraints. -Ingenieur-Archiv, 1955, v.23, h.6.
44. Бобровницкий Ю.И. Вынужденные изгибные колебания тонкостенной бесконечной полосы. - В кн.: Вопросы судостроения. Сер. "Технология судостроения".-Л.: 1974, вып.5
45. Бобровницкий Ю.И. О приближенных теориях изгибных колебаний стержней.- В кн.: Виброизолирующие системы в машинах и механизмах. - М.: Наука, 1977.
46. Шмидт Г. Параметрические колебания/перевод с немецкого В.М. Старжинского, под ред. М.З. Литвина-Седого.- М.: Мир, 1978.
47. Бабаков И.М. Теория колебаний.-М.:Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1958.
48. Снеддона И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости.-М.: Физматгиз, 1961, 220 с.
49. Ван Цзи-Де. Прикладная теория упругости.-М.: Физматгиз, 1959, 455с.
50. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2.- М.: «Наука», 1970, 580с.
51. Сен-Венан Б. Мемуары о кручении и изгибе призмы. - М.: Физматгиз, 1961.
52. Bress M. Cours de mecanique appliquee. - Paris: Mallet-Bachelier, 1859, p.1.

53. Rayleigh J. W. S. The theory of sound. Vol. 1. London, Macmililan and Co., 1877-1888; Релей Д. В. Теория звука. Т. 1. М., Гостехиздат, 1955.
54. Рэлей Д.В. Теория звука. - Гостехиздат, 1955, т.2.
55. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1972.
56. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975.
57. Timoshenko S.P. on the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. - The collected papers. - N.Y.; McGraw Hill, 1953.
58. Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar. Phil. Mag., 1921, Ser. 6, 41, № 245, 744-746; Timoshenko S. P. The collected papers. New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Co., 1953, 288-290.
59. Timoshenko S. Vibration problems in engineering. 3 ed. Van Nostrand, 1955—РЖМех, 1958, № 10, 11488К; Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959—РЖМех, 1960, № 2, 2410К.
60. Engesser F. Die Knickfestigkeit gerader Stabe. Zbl. Bauverwaltung, 1891, 11, № 49, 483—486
61. Engesser F. Uber die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Zbl. Bauverwaltung, 1907 27, № 93, 606—607
62. Engesser F. Knicksicherheit von Gitterstaben. VDI-Zeitschrift, 1908, 52, № 9, 359—360.
63. Prandtl L. Knicksicherheit von Gitterstaben. VDI-Zeitschrift, 1907, 51, № 47, 11867—1869
64. Prandtl L. Gesammelte Abhandlungen zur angewandte Mechanik, Hydro- und Aerodynamik. Erster Teil. Berlin—Gottingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961, 87—93.
65. Амбарцумян С.А. К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. - Прикладная математика и механика, 1960, т.24, вып.2.

66. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. - J. of appl.mech. (Trans. ASME), 1945, v.12, №2.
67. Гольденвейзер А.Л. О теории изгиба пластинок Райсснера. - Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 4.
68. Амбарцумян С.А. К теории изгиба анизотропных пластинок. - Изв. АН СССР, ОТН, 1958, №5.
69. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Квазигармонические изгибные волны в нелинейно-упругой балке Тимошенко // Испытания материалов и конструкций / Сб. научн. трудов. Н.Новгород, Изд-во «Интелсервис», 1996. С. 180-187.
70. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Нелинейные стационарные изгибные волны в балке Тимошенко // Прикладная механика и технологии машиностроения / Сб. научн. трудов. Н.Новгород, Изд-во «Интелсервис», 1997. Вып. 3. С. 56-66.
71. Erofejev VI, Semerikova N.P. Nonlinear modulated waves in the Timoshenko beam // Wave mechanical systems / Prog, intern, seminar. Kaunas: Technology a. 1996. P. 12- 15.
72. Ерофеев В.К. Распространение нелинейных изгибных волн в стержнях с движущимися закреплениями // Прикл. задачи динамики систем /Сб. научн. трудов / Горьк. ун-т., 1983. Вып. 6. С. 90-107.
73. Медик М.А. одномерные теории распространения волн и колебаний в упругих стержнях прямоугольного сечения. - Прикладная механика, 1966, т. Е33, №3.
74. Торвик П.Д. Упругая полоса с заданными на краю перемещениями. - Прикладная механика, 1971, т.Е37, №4.
75. Уэйд Д.Е., Торвик П.Д. Распространение упругих волн в неоднородных стержнях сложного сечения. - Прикладная механика, 1973, т. Е40, №4.



76. Barr A.D.S., Duthie T. influence of cross-section distortion in the bending vibrations of thin-walled beams of H-section.- J.of mech.eng. Science, 1964, v.6, №3.
77. Weidman D.J. the effect of shear deformation and cross-sectional distortion on natural frequencies of wide-flanged beams. - Developments in mech., 1961, № 1.
78. Прочность. Устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко.
79. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин// Прикладная математика и механика. 1948. 12. №3. P.287-300.
80. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J. Appl. Mech., 1951, 18 № 1, 31-38.
81. Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней. - Л; М.: Гостехиздат, 1948.
82. Джанелидзе Г.Ю., К теории тонких и тонкостенных стержней. - Прикладная математика и механика, 1949, т.13, вып. 6.
83. Селезов І. Т. Досліження поперечних коливань пластини. Прикл. механіка, 1960, 6, № 3, с. 319-327.
84. Selezov I.T. Degenerated hyperbolic approximations of the wave theory of elastic plates. In Operator Theory. Advances and Applications. V.117. Differential Operators and Related Topics // Proc. Of Mark Krein Int.Conference - Ukraine, Odessa, Ukraine, 1997. Base/Switzerland: Birhauser.2000.P.339-354.
85. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1963, 12, № 2, 146-155-РЖМех, 1964, 3В103.
86. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье к анализу напряженных состояний и двумерных теорий упругих плит,

- Прикл. матем. и механ., 1963, 27, № 3, 583-588-РЖМех, 1964, 3В77.
87. Brune11e E. J. Buckling of transversely isotropic Mindlin plates. AIAA Journal, 1971, 9, № 6, 1018-1022- РЖМех, 1972, 1В363.
88. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Квазимонохроматические волны в нелинейно-упругих пластинах // Изв. АН СССР. Механ. тверд, тела, 1981, № 4.
89. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических волн в пластинах и оболочках // Труды XXII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. - Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1980.
90. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. О нелинейных одномерных волнах в пластинах // Пробл. динамики взаимодействия деформируемых сред. - Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1990, С. 50-52.
91. Callahan W. R. On the flexural vibrations of circular and elliptical plates. Quart. Appl. Math., 1956, 13, № 4, 371-380-РЖМех, 1958. № 6, 6963.
92. Москаленко В. Н. Об учете инерции вращения и деформации сдвига в задачах о собственных колебаниях пластин. В сб. Теория пластин и оболочек. Киев, АН УССР, 1962, 264-266-РЖМех, 1963, 9В127.
93. Шенявский Л. А. Влияние геометрической нелинейности на волны, распространяющиеся в свободной тонкой пластине // ПММ, 1979. Вып. 6. Т. 43. С. 1089-1094.
94. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Thickness-shear and flexural vibrations of rectangular crystal plates. J. Appl. Phys., 1955, 26, №,12, 1435-1442-РЖМех, 1957, № 4, 4670.
95. Селезов И.Т. О развитии теории Тимошенко поперечных колебаний упругих стержней. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016, №1.
96. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

97. Весниций А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320с.
98. Айнола Л.Я., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН Эст.ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3-63.
99. Бердичевский В.А. К динамической теории тонких упругих пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 99-109.
100. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций // Изд. ИПРИМ РАН. 2002. Т. 8. №1. С. 28-64.
101. Фирсанов В.В., Доан Ч.Н. Свободные колебания произвольных оболочек на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. РАН, Изд-во «Наука». 2014. № 5. С. 21-29.
102. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Распространение волн по составному стержню // Волновая динамика машин и конструкций. Материалы Всероссийской конференции, посвященной памяти А.И. Весницкого. Н.Новгород: Изд. «ТИРАСП», 2004. С.110.
103. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
104. Товстик Т.П. Распространение продольных волн по двухслойному стержню // Моделирование динамических систем: сборник научных трудов. Н.Новгород: Изд-во «Интелсервис». 2011. с.91-98.
105. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор)// Акустический журнал. 2002. Т.48, № 6. С.725-740.

**Основные результаты работы опубликованы в следующих работах**

*Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ*

106. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Семерикова Н.П. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с

помощью уточненных стержневых моделей // Вестник Нижегородского университета им Н.И. Лобачевского. 2011. №4. С. 130-133. (из списка ВАК)

107. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Распространение продольных волн в составном вязко-упругом стержне // Приволжский научный журнал. 2013. №3. С.18-23. (из списка ВАК)

108. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Миклашевич И.А., Сандалов В.М. Уединенные волны деформации в составном нелинейно-упругом стержне // Приволжский научный журнал. 2013. №4. С.19-23. (из списка ВАК)

109. N.I.Arkipova, V.I.Erofeev Solitary strain waves in the composite nonlinear elastic rod // Informatics, Networking and Intelligent Computing - Zhang (Ed.), 2015 Taylor & Francis Group, London, ISBN: 978-1-138-02678-0. p.225-226. (индексируется в базе данных Web of Science)

*Публикации в сборниках и сборниках материалов конференций*

110. Архипова Н.И. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с линейно-упругими и вязко-упругими силами контактного взаимодействия с помощью уточненных стержневых моделей// XXIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2011): материалы конференции (Москва, 14-17 декабря 2011г.). /М: Изд-во ИМАШ РАН, 2011. С. 69.

111. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Уединенные волны в составном нелинейно-упругом стержне // X Всероссийское совещание-семинар «Инженерно-физические проблемы новой техники». Сборник материалов – Москва, МГТУ им. Баумана, 2012. С. 156-157.

112. Архипова Н.И. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с линейно-упругими и вязко-упругими силами контактного взаимодействия с помощью уточненных стержневых

- моделей // XXIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС – 2011): избранные труды конференции (Москва, 14-17 декабря 2011 г.). /М: Изд-во ИМАШ РАН, 2012. С. 14-21.
113. Архипова Н.И. Составной нелинейно-упругий стержень: математическая модель и анализ волновых процессов // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Н.Новгород, 24–29 сентября 2012 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Н.Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2012. С. 103-105.
114. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Составной нелинейно-упругий стержень: математическая модель и анализ волновых процессов // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Седьмой Всероссийской конференции 29-31 января 2013г. (В трех частях) Ч.П.-М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. С.94-97.
115. Архипова Н.И. Составной нелинейно-упругий стержень: математическая модель и анализ волновых процессов // XVIII Нижегородская сессия молодых ученых. Технические науки: материалы докладов. 19-22 марта 2013г./Отв. за вып. И.А. Зверева – Н.Новгород: НИУ РАНХиГС, 2013. С. 4-7.
116. Arkhipova N.I. Describing the diffusion of elastic and solitary waves in layered structural elements with linear-elastic and visco-elastic contact interaction forces using precise rod models // Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро до наноразмерных структур = Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: from Macro- to Nanoscale Structures: Беларусь/ под общ. ред. Г. И. Михасева, Х. Альтенбаха. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. С. 221-223.
117. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Применение уточненных стержневых моделей для описания распространения упругих волн в слоистых

- конструкциях // «Механика наноструктурированных материалов и систем». Тезисы докладов 2-й Всероссийской научной конференции. Москва, 17 – 19 декабря 2013г. – Москва, ИПРИМ РАН, 2013. С. 14.
118. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Уточненные стержневые модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах конструкций // «Механика наноструктурированных материалов и систем». Сборник трудов 2-й Всероссийской научной конференции в 3-х томах. Том 1. Москва, 17-19 декабря 2013г. – М.: ИПРИМ РАН, 2013. С. 6-19.
119. Arkhipova N.I., Erofeev V.I. Rod model specified in problems on the propagation of elastic waves in the laminated element designs // XLII Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics” St. Petersburg. – СПб.: СОЛО, 2014. С. 31-32.
120. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Сандалов В.М. Уточненные модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах конструкций // Вестник научно-технического развития. 2014. №12(88). С. 3-16.
121. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Сандалов В.М. Поперечные волны в двумерной слоистой конструкции // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / под ред. В.И. Ерофеева, В.Н. Перевезенцева и С.И.Смирнова. - Нижний Новгород: Издательство общества „Интелсервис“, 2014, №1(23). С.95-100
122. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Сандалов В.М. Применение уточненных моделей для описания распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций // Необратимые процессы в природе и технике: труды Восьмой Всероссийской конференции 27-29 января 2015г. Ч. II. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. С.220-223
123. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Применение неклассических теорий стержней и пластин для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // Тезисы докладов III Международного

- научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М. ООО «ТВ-принт», 2015. С.16-18.
124. Ерофеев В. И., Архипова Н.И. Упругие волны в двумерных слоистых конструкциях // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2016. – № 1. С.33-38; URL: [mathmod.esrae.ru/1-5](http://mathmod.esrae.ru/1-5).
125. Архипова Н.И. Поперечные волны в двухслойной мембране // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2016 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. С. 58-61
126. Архипова Н.И. Поперечные волны в двухслойной мембране с учетом геометрической нелинейности // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2016 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. С.62-71
127. Архипова Н.И. Применение неклассических теорий стержней и пластин для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М., 2016. С.16-18.
128. Архипова Н.И., Семерикова Н.П. Поперечные волны в двухслойной геометрически нелинейной мембране // Научный журнал «Процессы в геосредах». 2016. №3(7). С.176-183.