

На правах рукописи



Юрин Юрий Викторович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ
МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН
МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО
ОСРЕДНЕНИЯ**

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Димитриенко Юрий Иванович

Официальные оппоненты: **Радаев Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН), г. Москва

Киселев Федор Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики композитов Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва

Ведущая организация: Открытое акционерное общество «Композит»,
Московская область, г. Королев

Защита диссертации состоится 24 мая 2017 г., в 15⁰⁰ на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте МАИ по ссылке:

http://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=79041.

Автореферат разослан «__» апреля 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Г. В. Федотенков

Актуальность темы. При проектировании конструкций энергетических силовых установок (двигателей внутреннего сгорания, газотурбинных двигателей, ядерных двигателей), кроме инженерных расчетов на статическую прочность дополнительно обычно оценивают деформации ползучести составных деталей. Такая оценка требуется в связи с тем, что при длительной эксплуатации, измеряемой годами, в условиях воздействия высоких температур (до 1000 °С и выше), практически все жаропрочные конструкционные сплавы проявляют существенную ползучесть. Для моделирования деформаций ползучести, как известно, широко применяют различные варианты теории типа теории течения, старения и наследственные теории. Деформации ползучести большинства жаростойких сплавов, как правило, обнаруживают нелинейную зависимость от напряжений и являются практически необратимыми, поэтому для таких материалов наибольшее распространение получили теории типа теории течения, наиболее адекватно описывающие отмеченные эффекты. Указанные теории восходят к известной теории пластического течения. Среди множества работ по теории пластического течения, отметим работы А. Ю. Ишлинского, В. В. Новожилова и Ю. И. Кадашевича, Д. Д. Ивлева, Ю. Н. Радаева.

Интенсивное развитие вычислительной техники привело к появлению вычислительных устройств и программного обеспечения, предоставляющих возможности для решения трехмерных формулировок сложных задач механики деформируемого твердого тела. При этом расчет тонкостенных конструкций продолжает производиться преимущественно с помощью специальных методов, адаптированных к геометрии конструкций, так как проведение расчетов, в рамках которых тонкие тела рассматриваются как трехмерные, приводит к необходимости существенного измельчения расчетной сетки и, как следствие, к увеличению требований к характеристикам вычислительной техники. Значительное сокращение вычислительных затрат, обеспечиваемое применением двумерных теорий пластин и оболочек, стимулирует исследования по разработке уточненных модификаций классических представителей указанных теорий, с целью приближения к расчетам по трехмерным теориям. Среди множества таких модификаций выделим теорию ломаной нормали Григолюка-Куликова, а также работы Э. И. Григолюка и П. П. Чулкова, в которых строятся уточненные двумерные теории, путем наложения кинематических гипотез для каждого слоя оболочки, что приводит к зависимости порядка соответствующих систем уравнений от числа слоев. Кроме того, необходимо отметить различные модификации классических теорий пластин и оболочек, представленные, например, в работах Е. М. Зверева, В. В. Васильева, С. А. Лурье, Л. М. Гаввы, Ю. И. Димитриенко, J. R. Hutchinson, F. Gruttmann, W. Wagner, A. S. Sayyad, Y. M. Ghugal, R. P. Shimpi, J. L. Mantari, A. S. Oktem, C. Guedes Soares и большом числе работ других авторов. Данные модификации основаны на различных предположениях относительно распределения неизвестных функций (перемещений, деформаций, напряжений) по толщине пластины. Математически наиболее строгим для построения подобных теорий является применение активно разрабатываемого в настоящее время метода асимптотического осреднения, предложенного для периодических структур в работах Н. С. Бахвалова, Б. Е. Победрей, E. Sanchez-

Palencia, A. Bensoussan, J. L. Lions и G. Papanicolaou.

Непосредственное применение общей трехмерной процедуры осреднения для периодических сред к тонкостенным телам не представляется возможным в связи с отсутствием периодичности по нормальной координате. Применение метода асимптотического осреднения для пластин при дополнительном предположении о линейной зависимости начальных членов асимптотических разложений продольных перемещений от нормальной координаты было проведено в работах R.V. Kohn и M. Vogelius, A. G. Kolpakov, С. В. Шешенина и О. А. Ходоса. Вариант метода осреднения для тонких пластин без дополнительных допущений относительно неизвестных функций, но с наличием в асимптотических разложениях для вектора перемещений и тензора напряжений членов при отрицательных степенях малого геометрического параметра (характеризующего относительную толщину пластины) рассмотрен в работах С. А. Назарова, Г. П. Панасенко, М. В. Резцова, Т. Lewiński, J. J. Telega.

Новый подход к построению процедуры осреднения трехмерных уравнений теории упругости с целью получения теории тонких пластин, без дополнительных предположений о распределении неизвестных функций по толщине пластины, не допускающий возникновения членов при отрицательных степенях геометрического параметра в асимптотических разложениях для вектора перемещений и тензора напряжений, был предложен Ю. И. Димитриенко (Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2012, №. 3).

Диссертационная работа посвящена распространению указанного подхода на задачу ползучести (деформации ползучести моделируются в рамках теории типа теории течения) многослойных тонких пластин.

Цель проведенных исследований – разработка математического аппарата и численного метода моделирования напряженно-деформированного состояния многослойных тонких пластин с учетом эффектов ползучести на основе метода асимптотического осреднения.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач**:

- 1) разработка асимптотического метода решения задач ползучести многослойных тонких пластин;
- 2) разработка конечно-элементного метода расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких пластин с учетом деформаций ползучести;
- 3) численное исследование эффектов в многослойных тонких пластинах, обусловленных сочетанием факторов тонкостенности пластин и наличия эффектов ползучести материалов слоев.

Методы исследования. В работе использованы следующие методы исследования: метод асимптотического осреднения, численные конечно-элементные методы решения задачи трехмерной теории упругости, численные конечно-элементные методы решения двумерных осредненных задач асимптотического метода расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких анизотропных пластин с учетом ползучести, численные конечно-

разностные методы решения дифференциальных уравнений, численные методы решения интегральных уравнений Вольтерры второго рода.

Достоверность и обоснованность научных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата, применением классических математических методов и подтверждается сравнением численных расчетов для тестовых примеров с результатами, полученными на основе прямого конечно-элементного решения трехмерных задач механики деформируемого твердого тела. Результаты диссертационной работы согласуются с известными результатами других авторов.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту.

Разработан асимптотический метод решения задач ползучести многослойных тонких пластин, основанный на построении решения исходной трехмерной задачи теории ползучести в форме асимптотических разложений по степеням малого параметра, характеризующего относительную толщину пластины, без дополнительных предположений о характере распределения неизвестных функций.

Предложен вариант конечно-элементного метода решения осредненных задач асимптотического метода расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких анизотропных пластин, основанный на применении аппроксимации Белла для функции прогиба, аппроксимации трикубическими полиномами Биркгофа со специальным выбором степеней свободы для продольных перемещений, и применении вариационного принципа Хеллингера-Рейснера.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в возможности использования ее результатов при исследовании процессов деформирования многослойных тонких пластин с учетом деформаций ползучести в авиационной, атомной, космической и других областях, в которых применяются тонкостенные элементы конструкций, проявляющие эффекты ползучести. В частности, предложенный метод может быть применен при расчетах прочности и долговечности конструкций корпусов и внутренних частей энергетических силовых установок.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях:

- на научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 135-летию кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского, февраль 2013;

- на III Международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 100-летию со дня рождения академика В. Н. Челомея, май 2014;

- на Международной научной конференции «Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech - 2014)», посвященной 50-летию Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э.Баумана 17-19 ноября 2014 года. 2014;

- на Международной конференции «Multiscale Modeling and Methods: Up-

scaling in Engineering and Medicine», Bauman Moscow State Technical University, Moscow, June 25-27, 2015.

- на семинаре «Актуальные проблемы вычислительной математики и механики» под руководством проф. Ю.И. Димитриенко, 2012-2016 гг.

Публикации. Основные научные результаты диссертации отражены в 11 научных работах, в том числе в 10 статьях в журналах, включенных в перечень российских рецензируемых научных изданий и в 1 научной публикации в изданиях, входящих в международную базу данных и систему цитирования Scopus.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем под руководством научного руководителя. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, выводов и заключения, а также списка литературы. Работа изложена на 141 странице, содержит 35 иллюстраций и 12 таблиц. Библиография включает 110 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи работы, научная новизна, указаны данные о достоверности полученных результатов, методы диссертационного исследования, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены сведения о структуре и объеме диссертационной работы.

Первая глава посвящена разработке асимптотического метода решения задач ползучести многослойных тонких пластин. Деформации ползучести при этом моделируются в рамках теории типа теории течения. Рассматривается тонкая многослойная пластина (имеющая m слоев), для которой геометрический параметр $\kappa = h/L \ll 1$ (h - постоянная толщина пластины, L - характерный линейный размер пластины, например диаметр). Вводятся прямоугольные декартовы координаты $O\tilde{x}_i$ (здесь и далее строчные индексы $i, j, k, \dots \in \{1, 2, 3\}$, а $I, J, K, L, \dots \in \{1, 2\}$), с осью $O\tilde{x}_3$ направленной по нормали к срединной плоской поверхности пластины Σ , и осями $O\tilde{x}_I$ принадлежащими Σ . Также вводятся безразмерные координаты $q_i = \tilde{x}_i/L$ и нормальная координата $\xi = \tilde{x}_3/h \in [-1/2, 1/2]$ пластины; поверхности раздела слоев пластины $\Sigma_c^k, k = 0 \dots m-1$ (соответствующие значениям $\Xi_m = \{\xi_0, \dots, \xi_{m-1}\}$ нормальной координаты ξ); операторы дифференцирования $\tilde{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$, $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q_i}$. Рассматривается краевая задача механики деформируемого твердого тела с учетом деформаций ползучести, которая в безразмерной координатной форме имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\partial}_j \sigma_{ij} = 0, \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^c), \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^c = F_{ij} (\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}), \\ 2\varepsilon_{ij} = L(\tilde{\partial}_j u_i + \tilde{\partial}_i u_j), \\ [\sigma_{i3}]_{\xi=\xi_k} = 0, \\ [u_i]_{\xi=\xi_k} = 0, \\ \varepsilon_{ij}^c|_{\tau=0} = 0, \\ \sigma_{i3}|_{\tilde{x}_3=\pm h/2} = -\hat{p}_{\pm} \delta_{i3}, \\ u_i|_{\Sigma^T} = u_i^b. \end{array} \right. \quad (1)$$

Данная система состоит из уравнений равновесия (σ_{ij} - компоненты тензора напряжений), определяющих соотношений ползучести (C_{ijkl} , ε_{ij} , ε_{ij}^c - компоненты тензора модулей упругости, тензора деформаций и деформаций ползучести) и скоростей деформаций ползучести (функции F_{ij} определяют модель ползучести и могут иметь потенциальный вид, стандартный для моделей ползучести типа теории течения), соотношений Коши (u_i - компоненты вектора перемещений), условий идеального контакта на Σ_c^k ($[f]_{\xi=\xi_k}$ - скачок функции f через поверхность Σ_c^k), начальных условий для компонент тензора деформаций ползучести, граничных условий на верхней и нижней поверхности пластины и граничных условий на торцевой поверхности пластины Σ^T .

Вводятся следующие основные допущения:

1) Давление \hat{p}_{\pm} имеют третий порядок относительно κ : $\hat{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}$ (p_{\pm} не зависят от κ).

2) Компоненты C_{ijkl} зависят только от нормальной координаты ξ .

3) Для граничных перемещений u_i^b на поверхности Σ^T справедливо представление: $u_I^b(\tau, q_J) = u_I^{b(0)}(\tau, q_J) + \kappa u_I^{b(1)}(\tau, q_J)$, $u_3^b(\tau, q_J) = u_3^{b(0)}(\tau, q_J)$.

4) Функции F_{ij} обладают следующими свойствами: $F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq})|_{\sigma_{pq}=0} = 0$, $F_{I3}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{PQ}, \sigma_{p3})|_{\sigma_{p3}=0} = 0$ (ε_{kl}^c и σ_{PQ} - компоненты произвольных симметричных матриц 3×3 и 2×2).

Решение задачи (1) ищется в виде формального асимптотического разложения (ФАР):

$$u_i(\tau, q_I, \xi) \sim u_i^{(0)}(\tau, q_I) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n u_i^{(n)}(\tau, q_I, \xi). \quad (2)$$

После подстановки разложения (2) в систему (1) получаются ФАР для компо-

нент деформаций, деформаций ползучести, напряжений. Объединив в системы члены при одинаковых степенях κ , получается рекуррентная последовательность локальных задач ползучести. В частности, локальная задача нулевого приближения имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\xi} \sigma_{i3}^{(0)} = 0, \\ \sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{(0)} - \varepsilon_{kl}^{c(0)}), \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0)} = F_{ij} (\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0)}, \sigma_{pq}^{(0)}), \\ 2\varepsilon_{ij}^{(0)} = \partial_j u_i^{(0)} + \partial_i u_j^{(0)} + \delta_{j3} \partial_{\xi} u_i^{(1)} + \delta_{i3} \partial_{\xi} u_j^{(1)}, \\ \left[\sigma_{i3}^{(0)} \right]_{\xi=\xi_k} = 0, \\ \left[u_i^{(1)} \right]_{\xi=\xi_k} = 0, \\ \varepsilon_{ij}^{c(0)} \Big|_{\tau=0} = 0, \\ \sigma_{i3}^{(0)} \Big|_{\xi=\pm 1/2} = 0, \\ \langle u_i^{(1)} \rangle = 0. \end{array} \right.$$

Здесь $\langle u_i^{(1)} \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} u_i^{(1)} d\xi$. Замкнутая форма решения указанных локальных задач

произвольного приближения имеет вид ($n \in \mathbb{Z}_+$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{IJ}^{(n)} = C_{IJKLM_{n-1}}^{\varepsilon\eta(n)} \partial_{M_{n-1}}^{n-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{IJKLM_n}^{\varepsilon\varepsilon(n)} \partial_{M_n}^n \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{IJ}^{\varepsilon(n)} + \Xi_{IJ}^{\varepsilon c(n)}, \\ \sigma_{I3}^{(n)} = C_{IKLM_{n-1}}^{\sigma S\eta(n)} \partial_{M_{n-1}}^{n-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{IKLM_n}^{\sigma S\varepsilon(n)} \partial_{M_n}^n \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_I^{\sigma S(n)} + \Xi_I^{\sigma Sc(n)}, \\ \sigma_{33}^{(n)} = C_{KLM_{n-1}}^{\sigma T\eta(n)} \partial_{M_{n-1}}^{n-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{KLM_n}^{\sigma T\varepsilon(n)} \partial_{M_n}^n \varepsilon_{KL}^{(0)} + P^{\sigma T(n)} + \Xi^{\sigma Tc(n)}, \\ \eta_{IJ}^{(n)} = C_{IJKLM_n}^{\eta\eta(n)} \partial_{M_n}^n \eta_{KL}^{(0)} + C_{IJKLM_{n+1}}^{\eta\varepsilon(n)} \partial_{M_{n+1}}^{n+1} \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{IJ}^{\eta(n)} + \Xi_{IJ}^{\eta c(n)}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $\mathbf{M}_n = (M_1, \dots, M_n)$ - мультииндекс, коэффициенты $C^{(n)}$ зависят только от ξ ,

$\eta_{IJ}^{(n)} = -\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial q_I \partial q_J}$, $\partial_{M_n}^n = \frac{\partial^n}{\partial q_{M_n} \dots \partial q_{M_1}}$, функции $P^{(n)}$ и $\Xi^{c(n)}$ учитывают зависимость

решения локальных задач от силовых граничных условий и эффектов ползучести. Для компонент $\sigma_{IJ}^{(n)}$, $\varepsilon_{i3}^{(n)}$ справедливо аналогичное представление, выражаемое через функции в (3).

Вводя компоненты усилий T_{IJ} и моментов M_{IJ} :

$$T_{IJ} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n T_{IJ}^{(n)}, \quad M_{IJ} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n M_{IJ}^{(n)}, \quad T_{IJ}^{(n)} = \langle \sigma_{IJ}^{(n)} \rangle, \quad M_{IJ}^{(n)} = \langle \xi \sigma_{IJ}^{(n-1)} \rangle, \quad (4)$$

осредненные уравнения равновесия пластины бесконечного порядка принимают стандартный для теории тонких пластин ($\Delta p = p_+ - p_-$) вид:

$$\partial_J T_{IJ} = 0, \quad \partial_{IJ}^2 M_{IJ} = \kappa^2 \Delta p. \quad (5)$$

Осредненные определяющие соотношения, вытекающие из представления (3) и обозначений (4), имеют вид:

$$\begin{aligned}
T_{IJ} &\sim \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + T_{IJ}^{c(0)} + \kappa \left(B_{IJKL} \eta_{KL}^{(0)} + K_{IJKLM} \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{T}_{IJ}^{c(1)} \right) + O(\kappa^2), \\
M_{IJ} &\sim \kappa \left(B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + M_{IJ}^{c(1)} \right) + \kappa^2 \left(D_{IJKL} \eta_{KL}^{(0)} + \bar{K}_{IJKLM} \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{M}_{IJ}^{c(2)} \right) + O(\kappa^3).
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь введены следующие объекты: $\bar{C}_{IJKL} = \langle \hat{C}_{IJKL} \rangle$, $B_{IJKL} = \langle \xi \hat{C}_{IJKL} \rangle$,

$$\hat{C}_{IJKL} = C_{IJKL} - C_{Ijk3} C_{k3s3}^{-1} C_{s3KL}, \quad D_{IJKL} = \langle \xi^2 \hat{C}_{IJKL} \rangle, \quad T_{IJ}^{c(0)} = -\langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0)} \rangle,$$

$$K_{IJKLM} = \left\langle \hat{C}_{IJPQ} \langle \Phi_{PQKLM} \rangle_\xi - C_{Ijk3} C_{k3s3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_\xi \right\rangle,$$

$$M_{IJ}^{c(1)} = -\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0)} \rangle, \quad \bar{K}_{IJKLM} = \left\langle \xi \hat{C}_{IJPQ} \langle \Phi_{PQKLM} \rangle_\xi - \xi C_{Ijk3} C_{k3s3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_\xi \right\rangle,$$

$$\tilde{T}_{IJ}^{c(1)} = \left\langle C_{Ijk3} C_{k3s3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_\xi + \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1)} \right] \right\rangle,$$

$$\tilde{M}_{IJ}^{c(2)} = \left\langle \xi C_{Ijk3} C_{k3s3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_\xi + \xi \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1)} \right] \right\rangle,$$

$$2\Phi_{IJ}^{c(0)} = \left\langle C_{s3pq} \left(C_{I3s3}^{-1} \partial_J \varepsilon_{pq}^{c(0)} + C_{J3s3}^{-1} \partial_I \varepsilon_{pq}^{c(0)} \right) \right\rangle_\xi, \quad \langle f \rangle_\xi = \int_{-1/2}^{\xi} (f - \langle f \rangle) d\xi,$$

$$2\Phi_{IJKLM} = -C_{s3KL} \left(C_{I3s3}^{-1} \delta_{MJ} + C_{J3s3}^{-1} \delta_{MI} \right), \quad \langle f \rangle_\xi = \int_{-1/2}^{\xi} f d\xi + \langle (\xi - 1/2) f \rangle.$$

Неизвестные функции $u_i^{(0)}$ осредненных задач бесконечного порядка (5)

также ищутся в форме асимптотических разложений:

$$u_i^{(0)}(\tau, q_I) = v_i(\tau, q_I) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n v_i^{(n)}(\tau, q_I).$$

При подстановке этого разложения (удерживая только начальные члены) в (6), а затем в (5) (с учетом граничных условий в (1)) и приравнении коэффициентов при одинаковых степенях параметра κ , получаются осредненные задачи нулевого и первого приближения:

$$\begin{cases} \bar{C}_{IJKL} \partial_J e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) = -\partial_J f_{IJ}^{T(0)}, \\ B_{IJKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) = -\partial_{IJ}^2 f_{IJ}^{M(0)}, \\ v_I^{(0)}|_{\partial\Sigma} = u_I^{b(0)}, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \bar{C}_{IJKL} \partial_J e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + B_{IJKL} \partial_J \eta_{KL}(v_3^{(0)}) = -\partial_J f_{IJ}^{T(1)}, \\ B_{IJKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + D_{IJKL} \partial_{IJ}^2 \eta_{KL}(v_3^{(0)}) = \Delta p - \partial_{IJ}^2 f_{IJ}^{M(1)}, \\ v_I^{(1)}|_{\partial\Sigma} = u_I^{b(1)}, \\ v_3^{(0)}|_{\partial\Sigma} = u_3^{b(0)}, \\ \left. \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Sigma} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

в которых $\mathbf{v}^{L(K-1)} = \left(v_1^{(K-1)} \quad v_2^{(K-1)} \right)$, $2e_{IJ}(\mathbf{v}) = \partial_J v_I + \partial_I v_J$, $\eta_{IJ}(v_3) = -\partial_{IJ}^2 v_3$, а правые части $f_{IJ}^{T(K-1)}$, $f_{IJ}^{T(K-1)}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
f_{IJ}^{T(0)} &= -\left\langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\rangle, \quad f_{IJ}^{M(0)} = -\left\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\rangle, \\
f_{IJ}^{T(1)} &= K_{IJKLM} \partial_M e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) - \left\langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right\rangle + \\
&+ \left\langle C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_\xi + \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right] \right\rangle, \\
f_{IJ}^{M(1)} &= \bar{K}_{IJKLM} \partial_M e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) - \left\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right\rangle + \\
&+ \left\langle \xi C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_\xi + \xi \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right] \right\rangle, \\
2\Phi_{IJ}^{c(0,0)} &= \left\langle C_{s3pq} \left(C_{I3s3}^{-1} \partial_J \varepsilon_{pq}^{c(0,0)} + C_{J3s3}^{-1} \partial_I \varepsilon_{pq}^{c(0,0)} \right) \right\rangle_\xi.
\end{aligned} \tag{9}$$

Функции $\varepsilon_{ij}^{c(0,0)}$, $\varepsilon_{ij}^{c(0,1)}$, $\varepsilon_{ij}^{c(1,0)}$, участвующие в выражениях для правых частей, определяются следующими системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0,0)} = F_{ij} \left(\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0,0)}, \sigma_{pq}^{(0,0)} \right), \\ \sigma_{IJ}^{(0,0)} = \hat{C}_{IJKL} \left(e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) - \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right), \\ \sigma_{i3}^{(0,0)} = 0, \\ \varepsilon_{ij}^{c(0,0)} \Big|_{\tau=0} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0,1)} = F_{ij}^{(1)} \left(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0,0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^{c(0,1)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0,0)}, \sigma_{p_1 q_1}^{(0,1)} \right), \\ \sigma_{IJ}^{(0,1)} = \hat{C}_{IJKL} \left(e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(1)} \right) - \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right), \\ \sigma_{i3}^{(0,1)} = 0, \\ \varepsilon_{ij}^{c(0,1)} \Big|_{\tau=0} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(1,0)} = F_{ij}^{(1)} \left(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0,0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^{c(1,0)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0,0)}, \sigma_{p_1 q_1}^{(1,0)} \right), \\ \sigma_{IJ}^{(1,0)} = \xi \hat{C}_{IJKL} \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right) + \\ + \left(\hat{C}_{IJPQ} \left\langle \Phi_{PQKLM} \right\rangle_\xi - C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_\xi \right) \partial_M e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) + \\ + C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_\xi + \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right], \\ \sigma_{I3}^{(1,0)} = -\left\{ \hat{C}_{IMKL} \right\}_\xi \partial_M e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) + \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_\xi, \\ \sigma_{33}^{(1,0)} = 0, \\ \varepsilon_{ij}^{c(1,0)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $F_{ij}^{(1)}$ - определяющие функции модели ползучести первого приближения:

$$F_{ij}^{(1)}\left(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0,0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^c, \sigma_{p_0 q_0}^{(0,0)}, \sigma_{p_1 q_1}\right) = \kappa^{-1} \left[F_{ij}\left(\xi, \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(1)}, \tilde{\sigma}_{pq}^{(1)}\right) - F_{ij}\left(\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0,0)}, \sigma_{pq}^{(0,0)}\right) \right],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{c(1)} = \varepsilon_{ij}^{c(0,0)} + \kappa \varepsilon_{ij}^c, \quad \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(0,0)} + \kappa \sigma_{ij}.$$

Показано, что для моноклинных материалов слоев пластины начальные члены ФАР продольных перемещений, получаемые на основе предложенного асимптотического метода, линейно зависят от нормальной координаты ξ , подобно формулам в теориях типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко:

$$u_I = u_I^{(0)} - \kappa \xi \partial_I u_3^{(0)} + O(\kappa^2),$$

$$u_3 = u_3^{(0)} - \kappa \left\langle C_{33KL} C_{3333}^{-1} \left(\varepsilon_{KL}^{(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right) - \varepsilon_{33}^{c(0)} \right\rangle_{\xi} + O(\kappa^2).$$

Для немоноклинных материалов зависимость продольных перемещений от нормальной координаты не является линейной.

Вторая глава посвящена разработке конечно-элементного метода решения осредненных задач (7)-(8). В качестве конечного элемента (КЭ) предлагается использовать конечный элемент, рассматриваемый как пара $(K^u \quad K^\varepsilon)$, где КЭ $K^u = (K, P_K^u, D_K^u)$, $P_K^u = P_K^{u(1)} \times \dots \times P_K^{u(3)}$, $D_K^u = D_K^{u(1)} \times D_K^{u(2)} \times D_K^{u(3)}$ применяется для аппроксимации обобщенных перемещений $(\zeta^{(1)} = (v_1^{(1)} \quad v_2^{(1)} \quad v_3^{(0)})$ - для (8)), а КЭ $K^\varepsilon = (K, P_K^\varepsilon, D_K^\varepsilon)$, $P_K^\varepsilon = P_K^{\varepsilon(1)} \times \dots \times P_K^{\varepsilon(6)}$, $D_K^\varepsilon = D_K^{\varepsilon(1)} \times \dots \times D_K^{\varepsilon(6)}$ применяется для

аппроксимации столбца обобщенных деформаций $\varepsilon(\cdot) = (e(\cdot)^T \quad \eta(\cdot)^T)^T$

$e(\cdot) = (e_{11}(\cdot) \quad e_{22}(\cdot) \quad 2e_{12}(\cdot))^T$, $\eta(\cdot) = (\eta_{11}(\cdot) \quad \eta_{22}(\cdot) \quad 2\eta_{12}(\cdot))^T$ (с КЭ пространствами X_h^u и X_h^ε), а K - треугольник. Вводится подпространство $V_h \subset X_h^u$

функций-столбцов, удовлетворяющих однородным граничным условиям первого рода задачи (8) (в смысле теории следов) на границе области Σ_h , полученной при триангуляции Σ . Также вводятся функции $\omega_h^{(1)} \in X_h^u$, удовлетворяющие

дискретным аналогам граничных условий первого рода задачи (8) на $\partial\Sigma_h$. Предполагается, что функции $\omega_h^{(1)}$, p_\pm являются непрерывными функциями от

временного параметра τ и что для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (10)-(12) была использованная явная разностная схема Эйлера примененная для сетки $U_M = (\tau_0 = 0, \dots, \tau_M = T)$ (вводится обозначение

$(\cdot)^{(m)} = (\cdot)|_{\tau=\tau_m}$). Формулируются дискретные задачи, соответствующие слабым постановкам задач (7)-(8). В частности, в дискретной задаче, соответствующей задаче (8), для каждого $m=0, \dots, M$ требуется найти такую пару

$(\zeta_h^{(1)(m)} \quad \lambda_h^{(1)(m)}) \in X_h^u \times X_h^\varepsilon$, что $\zeta_h^{(1)(m)} - \omega_h^{(1)(m)} \in V_h$ и:

$$\begin{cases} B_{HR(h)}^1(w, \lambda_h^{(1)(m)}) = f_h^{T(1)(m)}(w) + f_h^{M(1)(m)}(w), \forall w \in V_h, \\ B_{HR(h)}^1(\zeta_h^{(1)(m)}, \mu) = B_{HR(h)}^2(\mu, \lambda_h^{(1)(m)}), \forall \mu \in X_h^\varepsilon, \end{cases} \quad (13)$$

где $(\forall \lambda, \mu \in X_h^\varepsilon, \forall u, w \in X_h^u)$:

$$B_{HR(h)}^1(w, \lambda) = \int_{\Sigma_h} \varepsilon(w)^T C \lambda d\Sigma, \quad B_{HR(h)}^2(\mu, \lambda) = \int_{\Sigma_h} \mu^T C \lambda d\Sigma, \quad F^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta p^{(m)} \end{pmatrix}^T,$$

$$\hat{f}^{T(1)(m)} = \begin{pmatrix} f_{11}^{T(1)(m)} & f_{22}^{T(1)(m)} & f_{12}^{T(1)(m)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\hat{f}^{M(1)(m)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{11}^{M(1)(m)} & f_{22}^{M(1)(m)} & f_{12}^{M(1)(m)} \end{pmatrix}^T, \quad \varepsilon(u) = Lu,$$

$$f_h^{T(1)(m)}(w) = - \int_{\Sigma_h} \varepsilon(w)^T \hat{f}^{T(1)(m)} d\Sigma, \quad f_h^{M(1)(m)}(w) = - \int_{\Sigma_h} w^T F^{(m)} d\Sigma - \int_{\Sigma_h} \varepsilon(w)^T \hat{f}^{M(1)(m)} d\Sigma.$$

Здесь C – обобщённая матрица упругости, составленная из жесткостей задачи (8); функции $f_{IJ}^{T(1)(m)}$, $f_{IJ}^{M(1)(m)}$ вычисляются по формулам (9), в которых для вычисления компонент $\varepsilon_{ij}^{c(0,0)(m)}$, $\varepsilon_{ij}^{c(0,1)(m)}$, $\varepsilon_{ij}^{c(1,0)(m)}$ используется выбранная разностная схема; L - дифференциальный оператор (матричная форма) задачи (8). Промежуточные значения неизвестных функций $\lambda_h^{(1)}$, $\zeta_h^{(1)}$ для $\tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 0, \dots, M-1$ вычисляются путем линейной интерполяции.

В качестве аппроксимации для прогибов $v_3^{(0)(m)}$ в работе используется аппроксимация Белла, для которой:

$$P_K^{u(3)} = P_K^B = \{p \in P_5(K) : \partial_{\mathbf{n}_i} p \in P_3(l_i), 1 \leq i \leq 3\},$$

$$D_K^{u(3)} = D_K^B = \{\partial^\alpha p(A_i), 1 \leq i \leq 3, |\alpha| \leq 2\},$$

где $P_n(K)$ - множество полиномов степени n на множестве K , \mathbf{n}_i - вектор нормали к стороне треугольника l_i , $\partial_{\mathbf{n}_i}$ - производная по направлению \mathbf{n}_i , A_i - вершины треугольника K . Для аппроксимации продольных перемещений $v_I^{(K-1)(m)}$ применяются трикубические полиномы Биркгофа со специальным выбором степеней свободы:

$$P_K^{u(1)} = P_K^{u(2)} = P_K^{Bg} = P_3(K) \oplus \text{span} \{L_1^2 L_2 L_3, L_1 L_2^2 L_3, L_1 L_2 L_3^2\},$$

$$D_K^{u(1)} = D_K^{u(2)} = D_K^{Bg} = \{\partial^\alpha p(A_i), 1 \leq i \leq 3, |\alpha| = 0, 2\},$$

где $L_i(M)$ - барицентрические координаты точки M в треугольнике K . Показана P_K^{Bg} - унисольвентность такого выбора степеней свободы D_K^{Bg} , а также включение $X_h^{Bg} \subset C(\bar{\Sigma}_h)$. В качестве аппроксимации для обобщенных деформаций используются кубические полиномы на треугольнике K со стандартными лагранжевыми степенями свободы:

$$P_K^{\varepsilon(1)} = \dots = P_K^{\varepsilon(6)} = P_3(K),$$

$$D_K^{\varepsilon(1)} = \dots = D_K^{\varepsilon(6)} = \{p(A_i), p(A_{ij}), p(C), j = 1 + i \bmod 3, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2\},$$

где A_{ij} - точки на серединах сторон треугольника, C - барицентр треугольника. При этом допускаются разрывы обобщенных деформаций при переходе через межэлементную границу.

Далее показано, что при указанном выборе конечно-элементных аппрок-

симаций задача (13) сводится к системе линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{K \in D_n} e_{l(K,n)}^T \left(G^T H G T_K^u \left(\zeta_h^{(1)(m)} \right) - f_K^{(1)(m)} \right) = 0, \quad n = 1 \dots N,$$

$$f_K^{(1)(m)} = - \int_K B^T \hat{f}^{T(1)(m)} d\Sigma - \int_K (\Phi^u)^T F^{(m)} d\Sigma - \int_K B^T \hat{f}^{M(1)(m)} d\Sigma,$$

где D_n - множество конечных элементов триангуляции, содержащих степень свободы с глобальным номером n , $T_K^u(\cdot)$ - оператор, сопоставляющий элементу $f \in X_h^u$ столбец степеней свободы для данного КЭ K , $e_i^k = \delta_i^k$, $k = 1 \dots (2d^1 + d^2)$, ($d^1 = \dim(P_K^{Bg})$, $d^2 = \dim(P_K^B)$), $l(K,n)$ - локальный номер степени свободы в столбце $T_K^u(\cdot)$, N - общее число степеней свободы в сетке. Кроме того, в последней системе обозначены следующие матрицы:

$$G = \sum_{I=1}^2 G_I P_I, \quad G_I = \int_K g_I d\Sigma, \quad H = N \otimes C, \quad N = \int_K \psi \psi^T d\Sigma, \quad \tilde{\psi} = N^{-1} \psi,$$

$$g_I = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 L \varphi_1^1 & \cdots & \tilde{\psi}_1 L \varphi_1^{d^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\psi}_{10} L \varphi_1^1 & \cdots & \tilde{\psi}_{10} L \varphi_1^{d^1} \end{pmatrix}, \quad B = L \Phi^u, \quad \Phi^u = \sum_{I=1}^2 (\varphi_I^T \otimes E_3) P_I.$$

Здесь \otimes - кронекерово произведение матриц, E_3 - единичная матрица, P_I - обобщенные матрицы перестановок, ψ - столбец функций формы для пространств $P_K^{\varepsilon(1)}$, φ_1 - столбец функций формы для P_K^{Bg} , φ_2 - столбец функций формы для P_K^B . При этом, выражение для степеней свободы обобщенных деформаций $T_K^{\varepsilon}(\lambda_h^{(1)(m)})$, имеет вид:

$$T_K^{\varepsilon}(\lambda_h^{(1)(m)}) = G T_K^u(\zeta_h^{(1)(m)}).$$

Третья глава посвящена моделированию процессов деформирования многослойных пластин с учетом и без учёта эффектов ползучести на примере конкретных задач.

Решена задача изгиба прямоугольной пластины без учета деформаций ползучести со слоями из ортотропных материалов, которые расположены несимметрично относительно срединной плоской поверхности Σ . Полагаем, что $q_1 \in [0,1]$ - продольная координата, $q_2 \in [-b/2, b/2]$, $b > 0$ - поперечная координата пластины. Задача рассматривалась с граничными условиями жесткого защемления:

$$\begin{cases} v_1^{(0)}|_{q_1=0} = v_1^{(0)}|_{q_1=1} = v_2^{(0)}|_{q_2=-b/2} = v_2^{(0)}|_{q_2=b/2} = 0, \\ v_3^{(0)}|_{q_1=0} = v_3^{(0)}|_{q_1=1} = \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Sigma} = 0, \\ v_1^{(1)}|_{q_1=0} = v_1^{(1)}|_{q_1=1} = v_2^{(1)}|_{q_2=-b/2} = v_2^{(1)}|_{q_2=b/2} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда решение задач (7)-(8) может быть записано в следующей форме:

$$\begin{cases} v_1^{(0)}(q_1) = v_2^{(0)}(q_1) = 0, \\ v_3^{(0)}(q_1) = Bq_1^2(q_1 - 1)^2, \\ v_1^{(1)}(q_1) = A_1q_1(q_1^2 - 1) + A_2q_1(q_1 - 1), \\ v_2^{(1)}(q_1) = 0, \end{cases} \begin{cases} 24(D_{1111}\bar{C}_{1111} - (B_{1111})^2)B = -\Delta p\bar{C}_{1111}, \\ 6(D_{1111}\bar{C}_{1111} - (B_{1111})^2)A_1 = -\Delta pB_{1111}, \\ 4(D_{1111}\bar{C}_{1111} - (B_{1111})^2)A_2 = \Delta pB_{1111}. \end{cases} \quad (15)$$

Соответствующие выражения для начальных членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \kappa \hat{C}_{1111} \left(e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \xi \eta_{11}(v_3^{(0)}) \right), \\ \sigma_{13} &= -\kappa^2 \left(\left\{ \hat{C}_{1111} \right\}_{\xi} \partial_{11} e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \left\{ \xi \hat{C}_{1111} \right\}_{\xi} \partial_{11} \eta_{11}(v_3^{(0)}) \right), \\ \sigma_{33} &= \kappa^3 \left(-\left(p_- + \Delta p(\xi + 1/2) \right) + \left\{ \left\{ \hat{C}_{1111} \right\}_{\xi} \right\} \partial_{11}^2 e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \left\{ \left\{ \xi \hat{C}_{1111} \right\}_{\xi} \right\} \partial_{11}^2 \eta_{11}(v_3^{(0)}) \right). \end{aligned}$$

Проведено сравнение распределений напряжений по толщине пластины, найденных для этой задачи на основе асимптотического метода и вычисленных с использованием трехмерного конечно-элементного решения, полученного в комплексе ANSYS (КЭ SOLID187). Расчет производился для трехслойной пластины с геометрическим параметром $\kappa = 0.025$, а толщины слоев соответствовали сетке $A_3 = (-1/2, -1/42, 3/14, 1/2)$ по нормальной координате ξ . Общее число конечных элементов для всей пластины составило 10864455 (14658117 узлов). Относительное отклонение вычислялось в метрике $L_2[-1/2, 1/2]$. Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Относительное отклонение компонент тензора напряжений (значения в %, * - аналитическое значение компоненты - ноль), вычисленных на основе двух методов

δ	$q_1 = 0.125$	$q_1 = 0.25$	$q_1 = 0.375$	$q_1 = 0.5$
δ_{11}	0.528	2.59	0.448	0.364
δ_{22}	2.779	3.059	2.647	0.452
δ_{13}	0.066	0.065	0.065	*
δ_{33}	0.021	0.012	0.013	0.009

Для тестирования предложенного конечно-элементного метода (описанного в главе 2) было проведено сравнение аналитического (15) и конечно-элементного решения задачи изгиба трехслойной пластины с несимметричным расположением слоев и геометрическим параметром $\kappa = 0.025$. Толщины слоев соответствовали сетке $A_3 = (-1/2, -1/4, 0, 1/2)$ по нормальной координате ξ . Некоторые результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Относительное отклонение компонент тензора напряжений для конечно-элементной стеки 8×4 ($N_1 \times N_2$, где N_l - число разбиений по оси Oq_l).

δ	$q_1 = 0$	$q_1 = 1/8$	$q_1 = 1/4$	$q_1 = 3/8$
δ_{11}	1.615×10^{-13}	1.86×10^{-13}	2.112×10^{-13}	2.146×10^{-13}
δ_{22}	1.612×10^{-13}	1.087×10^{-13}	1.155×10^{-12}	5.909×10^{-13}
δ_{13}	2.179×10^{-14}	1.352×10^{-13}	4.891×10^{-13}	6.473×10^{-13}
δ_{33}	1.245×10^{-13}	1.876×10^{-13}	5.526×10^{-13}	1.06×10^{-12}

Рассмотрена задача изгиба прямоугольной трехслойной пластины с симметричным расположением слоев (толщины слоев соответствовали сетке $A_3 = (-1/2, -1/4, 1/4, 1/2)$ по нормальной координате ξ) из изотропных материалов и граничными условиями (14). В качестве модели ползучести материалов слоев использовалась линеаризованная модель вида:

$$F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}) = \frac{1}{\eta(\xi)} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right),$$

где $\eta > 0$ - константа модели, различная для слоев. Проведено сравнение конечно-элементного и аналитического решения для данной задачи. Часть результатов представлена в таблице 3. Распределение некоторых компонент напряжений по толщине пластины для этой задачи приведены на рисунке 1.

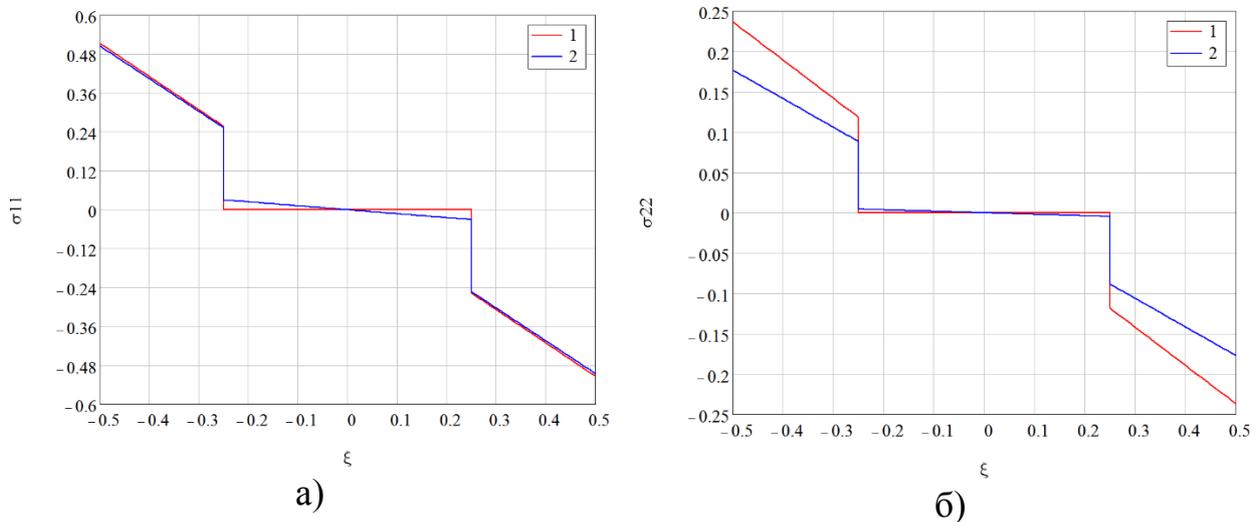


Рисунок 1 – Распределение компонент σ_{11} (а) и σ_{22} (б) ($q_1 = 1/4$, $q_2 = 0$) тензора напряжений (безразмерных) по толщине (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$)

Таблица 3.

Относительное отклонение компонент тензора напряжений в точках пластины для $\tau = T = 1$ при шаге разностной схемы $\Delta\tau = 10^{-4}$.

δ	$q_1 = 0$	$q_1 = 1/4$
δ_{11}	1.236×10^{-7}	1.236×10^{-7}
δ_{22}	7.53×10^{-6}	7.53×10^{-6}
δ_{13}	1.024×10^{-8}	1.024×10^{-8}
δ_{33}	1.237×10^{-7}	1.237×10^{-7}

Рассмотрена задача изгиба прямоугольной пластины ($\kappa = 0.025$, $q_1 \in [0, 1]$, $q_2 \in [-1/4, 1/4]$) с граничными условиями (14) с несимметричным расположением слоев (толщины соответствовали сетке $A_3 = (-1/2, -1/4, 0, 1/2)$ по ξ) под действием переменного давления. Для моделирования деформаций ползучести материалов слоев пластины использовалась степенная модель следующего вида:

$$F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}) = \frac{1 - \varpi(\xi)(\varepsilon_u^c)^2}{\eta(\xi)} \left(1 + \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_T(\xi)} \right)^{2r(\xi)} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right),$$

где $\varpi, \eta, \sigma_T > 0, r > 3$ - константы модели, различные для слоев. На рисунке 2 показаны кривые ползучести для материала среднего слоя рассматриваемой пластины (для напряжений в пределах между максимальным и минимальным давлением \hat{p}_{\pm}). Для решения задач (11)-(12) применялась разностная схема с шагом $\Delta\tau = 10^{-4}$. На рисунке 3 представлено изменение обобщенных перемещений во времени в центре пластины. На рисунках 4-6 представлены распределения компонент тензора напряжений по толщине пластины в различных ее точках.

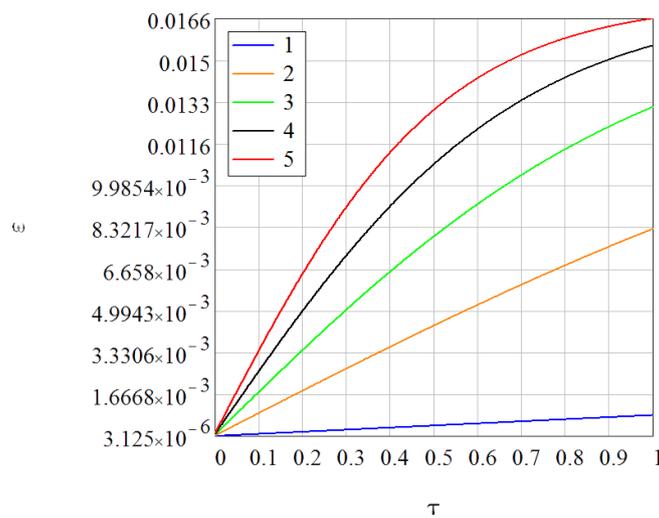
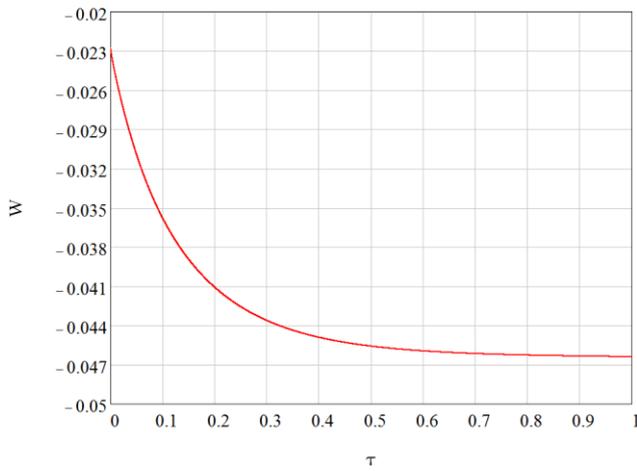
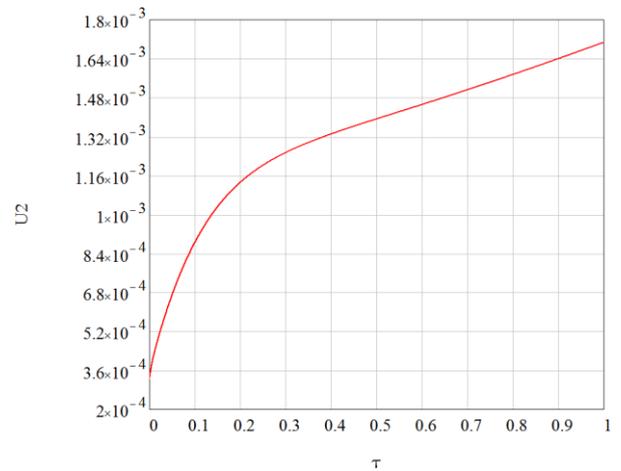


Рисунок 2 – Кривые ползучести для материала среднего слоя пластины для различных напряжений (i -я кривая: $\sigma_i = \sigma_{\min} + (i-1)(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/4$, $\sigma_{\min} = 1.25 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_{\max} = 5 \cdot 10^{-3}$).

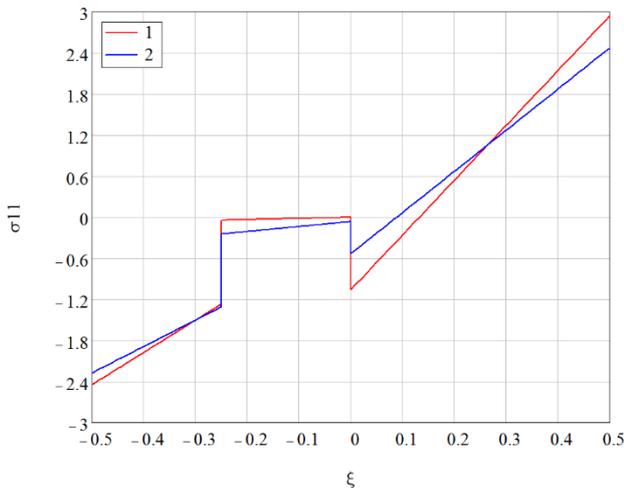


а)

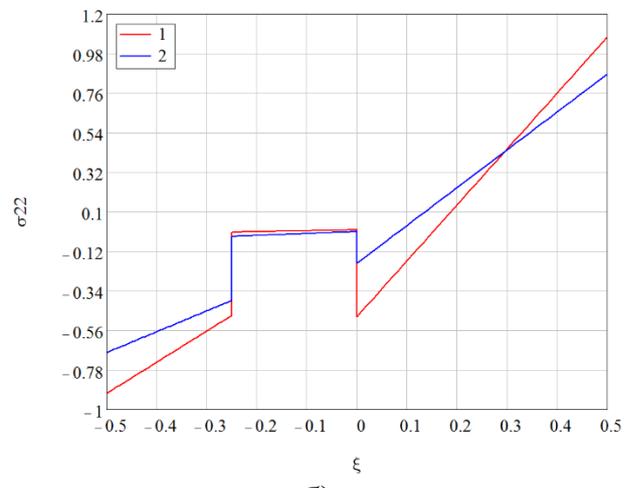


б)

Рисунок 3 – Изменение прогиба $v_3^{(0)}$ (а) и компоненты $v_2^{(1)}$ обобщенных перемещений (б) (безразмерных) в центре пластины во времени

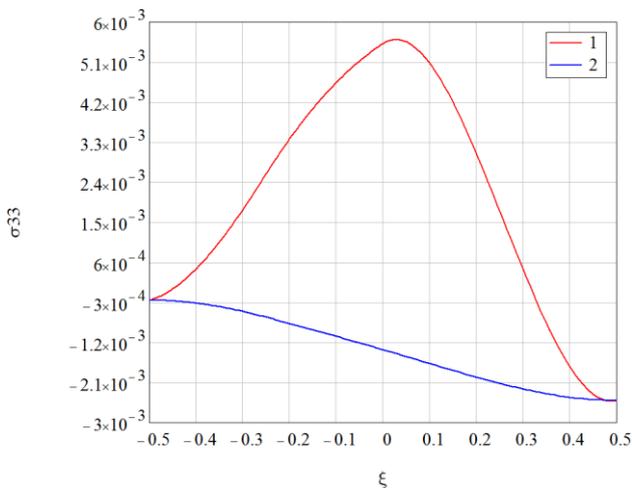


а)

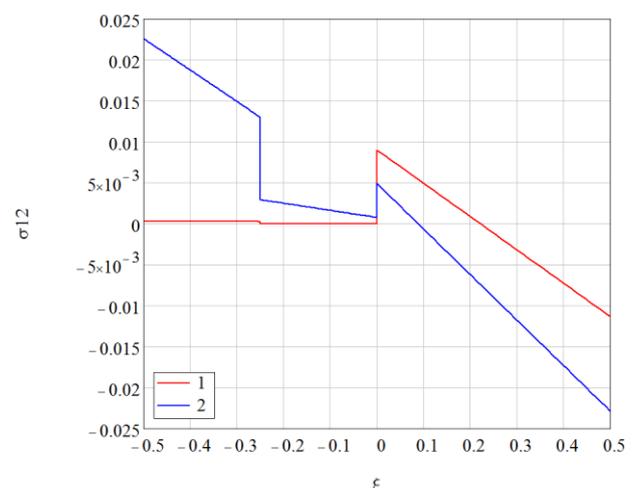


б)

Рисунок 4 – Распределение компонент σ_{11} (а) и σ_{22} (б) тензора напряжений (безразмерных, $q_1 = 0$, $q_2 = -1/4$) по толщине пластины (1 - $\tau = T = 1$, 2 - $\tau = 0$)



а)



б)

Рисунок 5 – Распределение компонент σ_{33} (а) ($q_1 = 1/4$, $q_2 = 0$) и σ_{12} (б) ($q_1 = 3/4$, $q_2 = 0$) тензора напряжений (безразмерных) по толщине пластины (1 - $\tau = T = 1$, 2 - $\tau = 0$)

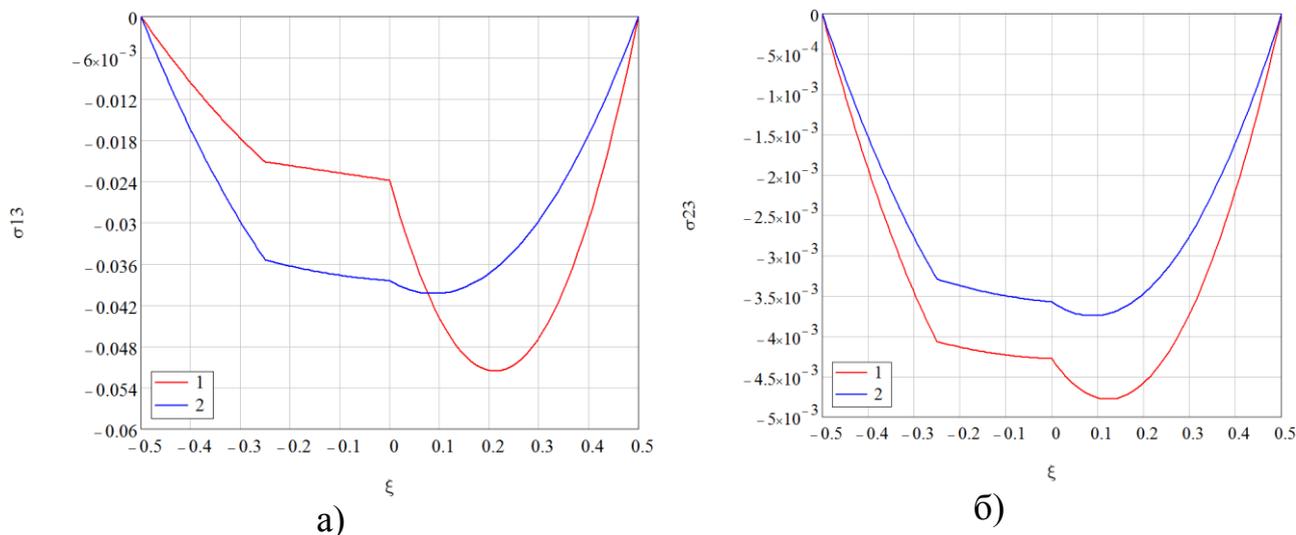


Рисунок 6 – Распределение компонент σ_{13} (а) ($q_1 = 1/4, q_2 = -1/4$) и σ_{23} (б) ($q_1 = 1, q_2 = 0$) тензора напряжений (безразмерных) по толщине пластины (1 - $\tau = T = 1, 2 - \tau = 0$)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Предложен метод расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких анизотропных пластин с учетом ползучести, основанный на асимптотическом анализе трехмерной задачи теории ползучести без дополнительных предположений о характере распределения неизвестных функций по толщине пластины. Метод приводит к двумерным осредненным системам уравнений типа теории Кирхгофа-Лява, а также позволяет математически строго обосновать формулы для вычисления распределения всех шести компонент тензора напряжений по толщине. Разработанный метод обеспечивает высокую точность расчетов распределения по толщине пластины всех шести компонент напряжений. Такая точность в рамках трехмерной теории может быть достигнута только на очень мелких конечно-элементных сетках.

2. Предложен вариант конечно-элементного метода решения двумерных осредненных задач для асимптотического метода расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких анизотропных пластин с учетом ползучести. Метод основан на применении аппроксимации Белла для функции прогиба, аппроксимации трикубическими полиномами Биркгофа со специальным выбором степеней свободы для продольных перемещений и на применении вариационного принципа Хеллингера-Рейснера для получения вариационных уравнений.

3. На примере задачи изгиба пластины с несимметричным расположением слоев, продемонстрирована возможность существенного влияния ползучести на напряженно-деформированное состояние пластины, в частности, показана воз-

возможность изменения характера кривых напряжений по толщине пластины.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Юрин Ю. В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 4. С. 18-36.

2. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Юрин Ю. В. Вариационные уравнения асимптотической теории многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки.- 2015.-№ 4. с.67-87.

3. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Юрин Ю. В. Конечно-элементное моделирование процессов термоползучести на основе методов Рунге-Кутты// Наука и образование. Электронный журнал. # 03, март 2015 DOI: 10.7463/0315.0759406. <http://technomag.bmstu.ru/doc/759406.html>.

4. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Юрин Ю. В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации // Инженерный журнал: наука и инновации, 2016, вып. 12(60). DOI: 10.18698/2308-6033-2016-12-1557. <http://engjournal.ru/articles/1557/1557.pdf>.

5. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Шпакова Ю. В., Юрин Ю. В. Моделирование поверхностей прочности композитов на основе микроструктурного конечно-элементного анализа // Наука и образование. Электронный журнал.- # 11, ноябрь 2012.-DOI: 10.7463/1112.0496336.

6. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом ползучести// Математическое моделирование и численные методы. № 3.-2015 г. с.101-118.

7. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Европин С. В. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 1. Численное моделирование накопления повреждений // Известия ВУЗов. Машиностроение, 2013, №11. С.3-11.

8. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Европин С. В., Шиверский Е. А., Корецкий С. А., Прозоровский А. А. Метод расчета характеристик надежности корпусов теплоэнергетических двигательных установок на основе детального конечно-элементного моделирования // Безопасность в техно-сфере.-№ 3.- 2014. С. 28-36.

9. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Федонюк Н.Н. Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных кон-

струкций с дефектами // Математическое моделирование и численные методы, 2016, № 3 (11). С. 3–23.

10. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Шиверский Е.А. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 2. Численное статистическое моделирование // Известия ВУЗов. Машиностроение.-2013.-№12.- С.12-19.

11. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O., Yurin Yu.V. Asymptotic homogenization for harmonic vibrations of multilayer thin elastic plates// Multiscale Modeling and Methods: Upscaling in Engineering and Medicine: Abstracts of the Fifth International Conference / Ed. by Yu. Dimitrienko, G. Panasenko; Bauman Moscow State Technical University, Moscow: BMSTU, June 25-27, 2015. Pp.17-18.