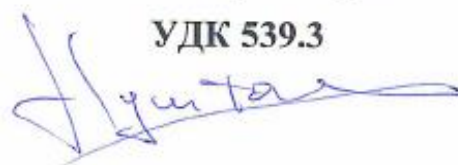


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) - МАИ

На правах рукописи

УДК 539.3



НУШТАЕВ ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:



кандидат физ.-мат. наук,
доцент С. И. Жаворонок

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Современное состояние проблемы.....	13
1.1. Основные фазовые и структурные превращения в сплавах с эффектом памяти формы	13
1.1.1. Прямое мартенситное превращение.....	16
1.1.2. Обратное мартенситное превращение.....	17
1.1.3. Фазовые превращения при ненулевых напряжениях.....	18
1.1.4. Мартенситные превращения при изотермическом нагружении.....	24
1.2. Математические модели материалов с эффектом памяти формы и основные методы их построения	27
1.2.1. Классификация математических моделей сплавов с памятью формы	27
1.2.2. Модели СПФ с внутренними степенями свободы.....	35
1.3. Устойчивость тонкостенных элементов конструкций из сплавов с эффектом памяти формы	38
2. Модель термомеханического поведения сплава с эффектом памяти формы и ее численная реализация	42
2.1. Макроскопическая модель термомеханического поведения равноатомного никелида титана и ее адаптация к конечно- элементным программным комплексам.....	42
2.1.1. Модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы.....	42
2.1.2. Инкрементальная форма записи уравнений модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы.....	44
2.1.3. Вычисление касательной матрицы податливости.....	48
2.2. Конечно-элементная реализация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы.....	49
2.3. Тестирование численной реализации модели	52
2.3.1. Тестирование силового механизма мартенситных превращений.....	55

2.3.2	Тестирование смешанного механизма мартенситных превращений	58
2.3.3	Тестирование температурного механизма мартенситных превращений	61
3.	Устойчивость стержней из сплавов с эффектом памяти формы при осевом сжатии в режиме прямого мартенситного превращения	64
3.1.	Устойчивость стержня, находящегося в полностью аустенитном и мартенситном состояниях.....	66
3.1.1.	Решение задачи в балочной постановке. Оценка уровня начальных геометрических несовершенств.....	66
3.1.2.	Решение задачи в трехмерной постановке	74
3.2.	Устойчивость стержня в режиме прямого мартенситного превращения при шарнирном закреплении.....	82
3.3.	Устойчивость стержня в режиме прямого мартенситного превращения для случая жесткой заделки.....	100
4.	Практическое приложение модели термомеханического поведения сплава с памятью формы к решению инженерных задач	109
4.1.	Изотермическое деформирование сетчатой оболочки типа сосудистого стента в режиме сверхупругого поведения.....	111
4.2.	Деформирование и устойчивость цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии в режимах дислокационной пластичности и сверхупругости.....	127
4.2.1.	Экспериментальная оценка осевой жесткости ячеистой оболочки.....	128
4.2.2.	Решение задачи о закритическом деформировании ячеистой оболочки в нелинейной постановке	131
4.2.3.	Моделирование потери устойчивости и закритического состояния ячеистой оболочки в режиме сверхупругости.....	141
	Заключение.....	145
	Список литературы.....	146
	Приложение А.....	164
	Приложение Б	176

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

A – аустенитная фаза сплава;

M – мартенситная фаза сплава;

$A \rightarrow M$ – прямое мартенситное превращение;

$M \rightarrow A$ – обратное мартенситное превращение;

M^t – хаотический мартенсит;

M^d – ориентированный мартенсит;

M_s^0 – температура начала прямого мартенситного превращения;

M_f^0 – температура окончания прямого мартенситного превращения;

A_s^0 – температура начала обратного мартенситного превращения;

A_f^0 – температура окончания обратного мартенситного превращения;

СПФ – сплав с памятью формы;

СУ – сверхупругость;

КЭ – конечный элемент;

МКЭ – метод конечных элементов;

ГУ – граничные условия;

НДС – напряжено-деформированное состояние;

МН – мартенситная неупругость;

МП – мартенситные превращения;

ЭПП – эффект пластичности превращения;

ЭПФ – эффект памяти формы;

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Развитие перспективной техники базируется на широком применении функциональных материалов с управляемыми физико-механическими свойствами. Одним из практически важных классов функциональных материалов является семейство сплавов и полимеров с эффектом памяти формы (СПФ). Уникальные свойства двухкомпонентных металлических сплавов с памятью связаны с происходящими в них фазовыми и структурными превращениями, вызванными взаимодействием действующих механических напряжений, температурных, электромагнитных и иных полей. По мере исследования СПФ выявляются новые, все более сложные особенности термомеханического поведения (реомные свойства, особенности циклического деформирования и др.). Ряд свойств СПФ обеспечивает перспективу их приложения к созданию активных и управляющих элементов энергетических установок ракетно-космических систем, где традиционные механические приводы малоэффективны. В то же время обнаружен ряд эффектов, осложняющих указанное применение СПФ и, следовательно, требующих теоретического описания, например, потеря устойчивости при аномально низких по сравнению с упругопластическими материалами нагрузках.

Практическое приложение СПФ, проектирование активных и адаптивных элементов связано с необходимостью решения задач о деформировании трехмерных тел сложной неканонической формы с многочисленными концентраторами напряжений, при больших деформациях, а также сложных краевых условиях, в частности, при контактном взаимодействии с сухим трением. Данные задачи механики и термодинамики деформируемого твердого тела являются связанными и существенно нелинейными, не допускающими в большинстве случаев аналитического решения даже для простейших канонических тел (стержней, пластин). Для исследования деформирования систем с памятью требуется развитие численных методов, в первую очередь – метода конечных элементов как основного аппарата решения инженерных задач. Все современные комплексы прикладных программ, реализующие метод конечных элементов и имеющие соответствующую сертификацию, обеспечивают адекватное описание только некоторых простейших режи-

мов деформирования СПФ. Следовательно, разработка дополнительных программных модулей, обеспечивающих адекватное моделирование термомеханического поведения СПФ, и обеспечение их работы в составе современных конечно-элементных комплексов является актуальной задачей.

Целью работы является:

1. Разработка алгоритма численного решения задач о деформировании сплавов с эффектом памяти формы системы Ni – Ti на базе связанной модели А. А. Мовчана термомеханического поведения равноатомного никелида титана.
2. Разработка программного модуля, реализующего данный алгоритм, и его адаптация к использованию в составе программного комплекса конечно-элементного моделирования SIMULIA Abaqus.
3. Исследование свойств численных решений модельных задач о термомеханическом поведении равноатомного никелида титана на базе построенного алгоритма, реализующего модель А. А. Мовчана, практическое исследование устойчивости.
4. Применение алгоритма и разработанного на его основе программного модуля системы SIMULIA Abaqus к решению задач о потере устойчивости и закритическом поведении стержней из материалов с эффектом памяти в трехмерной нелинейной постановке задачи;
5. Численное решение практических задач о термомеханическом деформировании, потере устойчивости исходной формы равновесия и закритическом состоянии тонкостенных ячеистых оболочек сложной формы из СПФ.

Научная новизна. В ходе выполнения поставленных задач в работе **впервые:**

1. Модель А. А. Мовчана термомеханического поведения СПФ, правильно описывающая фазовые переходы и апробированная на базе большого объема экспериментальных исследований, адаптирована для численного решения практических инженерных задач механики конструкций из СПФ и реализована в форме программного модуля системы SIMULIA Abaqus.

2. Получено решение задачи об устойчивости прямолинейной формы статического равновесия призматического стержня из СПФ, претерпевающего прямое мартенситное превращение под действием однородного температурного поля и постоянной сжимающей силы, в геометрически нелинейной трехмерной постановке задачи, получено распределение параметра мартенситной фазы по длине и сечению стержня в процессе фазового перехода
3. Получено численное подтверждение предположения А. А. Мовчана и Л. Г. Сильченко о решающей роли процесса фазового перехода, как дополнительного возмущающего фактора, при переходе стержня в изогнутую форму равновесного состояния, на базе точной нелинейной постановки задачи и показано, что потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия наступает при величине критической силы около 15% оценки формулой Эйлера при минимальном значении модуля упругости материала.
4. На базе связанной модели А. А. Мовчана термомеханического поведения СПФ получено решение практической задачи о деформировании ячеистой цилиндрической оболочки при радиальном сжатии и при раскрытии вследствие устранения наложенной геометрической связи.
5. На базе связанной модели А. А. Мовчана термомеханического поведения СПФ и данных серии вспомогательных экспериментов получено решение задачи о потере устойчивости и предельной несущей способности ячеистой цилиндрической оболочки при осевом сжатии и проведена оценка влияния на несущую способность сил трения при контактном взаимодействии ячеек оболочки.

Практическая ценность и реализация результатов работы заключается:

1. На базе определяющих соотношений модели А. А. Мовчана разработан программный модуль в составе конечно-элементного комплекса SIMULIA Abaqus, позволяющий проводить решение практических задач для элементов из СПФ, претерпевающих фазовые превращения;
2. На базе трехмерной нелинейной постановки задачи получен ряд новых результатов, объясняющих особенности процесса потери устойчивости пря-

молинейной формы равновесного состояния сжатых стержней из никелида титана в режиме прямого мартенситного превращения и подтверждающих ранее сформулированные гипотезы;

3. Решен ряд практических задач о деформировании ячеистых оболочек из никелида титана на базе конечно-элементного комплекса SIMULIA Abaqus и разработанного программного модуля.

Внедрение отдельных результатов диссертационной работы подтверждено актом ФГБНУ НИИ «Комплексных проблем сердечно-сосудистых заболеваний».

Ряд исследований выполнен при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00446_а, № 14-01-00488_а, № 14-01-00890_а) и Гранта конкурса «У.М.Н.И.К.» (МФТИ – Умник; Договор № 11 от 01.06.2011 г.; Договор №10 от 01.06.2012 г.).

Основные методы, положенные в основу исследования:

1. Метод построения моделей СПФ и модель связного термомеханического поведения СПФ на его основе;
2. Метод конечных элементов решения трехмерных нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.
3. Методы экспериментального исследования деформирования твердых тел при изотермическом нагружении.

Достоверность основных положений, результатов, выводов основана:

1. На применении апробированной модели А. А. Мовчана к построению алгоритма численного решения задач о термомеханическом поведении СПФ.
2. На применении сертифицированного программного комплекса конечно-элементного решения задач механики деформируемого твердого тела и алгоритма включения в его состав моделей термомеханического поведения неупруго деформируемых материалов.
3. На результатах критического анализа численного решения модельных задач о термомеханическом поведении СПФ.

4. На результатах сравнительного анализа численных и экспериментальных результатов и формулировках задач, базирующихся на экспериментальных данных.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Алгоритм численной реализации феноменологической модели А. А. Мовчана термомеханического поведения равноатомного никелида титана.
2. Программный модуль, реализующий реализации модель термомеханического поведения равноатомного никелида титана и адаптированный к использованию в составе конечно-элементного программного комплекса SIMULIA Abaqus.
3. Численные решения задач о потере устойчивости прямолинейной формы равновесия и закритическом состоянии стержня из равноатомного никелида титана при прямом мартенситном превращении, полученные в трехмерной нелинейной постановке.
4. Численные решения задач о термомеханическом поведении цилиндрических ячеистых оболочек в процессе потери устойчивости прямолинейной формы равновесия при изотермическом осевом сжатии с учетом взаимодействия с сухим трением входящих в контакт ячеек.

Апробация результатов работы. Основные положения диссертационной работы доложены и обсуждены на: Международной научно – практической конференции «Инженерные системы» (г. Москва, 2011 ÷ 2015 гг.); Международной молодежной школе «Компьютерное моделирование новых материалов» (Москва, 2012 г.); Конференции «3DEXPERIENCE Customer FORUM» (Москва, 2013 г.); Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем» (Москва, 2013 г.); Конференции «Математические модели и численные методы в биомеханике» (Москва, 2013 г.); Конференции «SIMULIA Community Conference – 2014» (Providence, USA, 2014 г.); XXII Международном форуме «Газ. Нефть. Технологии» (Уфа, 2014 г.); научных семинарах кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Публикация результатов работы. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах, в т. ч. в 4 статьях в периодических изданиях, рекомендованных ВАК РФ, и защищены свидетельством о регистрации программы для ЭВМ №2015615302 от 19.05.2015.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 163 машинописных страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка и Приложения. Иллюстративный материал представлен 111 рисунками и 13 таблицами. Библиографический список включает 171 наименование.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, перечислены цели работы и задачи, поставленные и решаемые для достижения указанных целей; перечислены новые результаты, полученные в результате работы; кратко описаны примененные методы исследования; кратко обоснована достоверность основных положений и результатов диссертационной работы; описана научная и практическая значимость результатов, полученных при работе над диссертацией; описан личный вклад автора в достижение указанных результатов; перечислены основные положения, выносимые автором на защиту. Кроме того, во введении приведены сведения об апробации результатов диссертационной работы и основных публикациях, содержащих результаты работы.

В первой главе на основе обзора материалов, опубликованных в периодической профильной литературе и основных монографиях, осуществлен анализ современного состояния проблемы описания термомеханического поведения материалов с эффектом памяти формы, прежде всего двухкомпонентных сплавов на базе системы Ni – Ti, и численной реализации различных моделей деформирования данных сплавов. Во введении к главе кратко описаны основные процессы, проходящие в сплавах с эффектом памяти формы при их деформировании и под действием температурных полей: мартенситные фазовые превращения, прямые и обратные, инициируемые действием температуры либо напряжений, а также структурные превращения хаотического мартенсита в ориентированный. Предложен вариант классификации математических моделей деформирования сплавов с эффектом памяти, основанных на различных принципах и подходах: многоуров-

новые модели с усреднением, макромоделей без введения или с введением внутренних степеней свободы. Проведен критический анализ моделей с точки зрения возможности и эффективности их численной реализации в рамках инженерных методов механики деформируемого твердого тела. Проведен сравнительный анализ некоторых основных макромоделей с внутренними степенями свободы.

Во второй главе приводится описание связанной модели А. А. Мовчана термомеханического поведения двухкомпонентного сплава с эффектом памяти формы. Описаны определяющие уравнения и уравнение для параметра фазового состава. Получены инкрементальные соотношения, соответствующие данной модели и применяемые далее для численной реализации. Приведен алгоритм численной реализации модели, кратко описана процедура интеграции определяющих уравнений модели в состав программного комплекса конечно-элементного моделирования SUMULIA Abaqus. Описывается система модельных задач, применяемых для оценки работоспособности предложенного алгоритма и программного модуля, реализующего модель термомеханического поведения материала с памятью формы, в системе SUMULIA Abaqus: сверхупругое деформирование материала, мартенситные превращения при действии температуры и \ или напряженного состояния в материале.

В третьей главе приводится численное решение задачи о потере устойчивости стержнем с эффектом памяти формы, полученное методом конечных элементов на базе предложенного алгоритма в трехмерной нелинейной постановке. Рассмотрено осевое сжатие стержня при прямом мартенситном превращении под действием равномерного температурного поля в процессе охлаждения. Решение задачи об устойчивости построено методом возмущений; в качестве возмущения рассматривается начальная погибь оси стержня. Приводятся оценки величины начальной погиби стержня. Описано решение задачи в трехмерной постановке при краевых условиях типа «шарнирное опирание», допускающих аналитические решения данной задачи в одномерной бифуркационной постановке на базе различных концепций. Получена оценка зависимости критической силы от относи-

тельной длины стержня. Приводится решение задачи об устойчивости и закритическом деформировании стержня при краевых условиях «жесткое защемление».

В четвертой главе приводятся результаты численного решения ряда прикладных задач механики конструкций из сплава с эффектом памяти формы на примере коронарного стента. Получены решения задач об изотермическом радиальном обжатии стента и раскрытии в рабочее положение, проведен анализ развития и локализации фазовых деформаций в данных процессах. Рассмотрено решение задачи об осевом сжатии тонкостенной цилиндрической оболочки ячеистой структуры; на примере упруго-пластической оболочки построено численное решение тестовой задачи о закритическом деформировании, потере устойчивости прямолинейного равновесного состояния и о закритическом состоянии, получены оценки влияния сил трения в областях локального контакта ячеек на предельную несущую способность. Адекватность численного решения физически осуществимому процессу подтверждена экспериментальными данными. Получено решение аналогичной задачи для ячеистой оболочки из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости, приведено сравнение поведения сверхупругой и упруго-пластической оболочек при кинематическом сжатии с потерей устойчивости.

В заключении формулируются основные результаты диссертационной работы и выводы, следующие из перечисленных результатов.

В приложении А приведен листинг подпрограммы на языке Fortran, обеспечивающей включение определяющих уравнений модели А. А. Мовчана термомеханического поведения СПФ в состав программного комплекса конечно-элементного моделирования SUMULIA Abaqus.

В приложении Б приведены копии свидетельств о внедрении результатов диссертационной работы.

1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

В течение последних десятилетий серьезное внимание уделяется созданию и практическому применению в различных отраслях промышленности «умных» или функциональных материалов, обладающих способностью изменять некоторые свойства (механические, электромагнитные) вследствие изменения температуры, механических напряжений, напряженности электромагнитного поля и других параметров [6]. К числу таких материалов относятся композиционные материалы с функциональными слоями, различные керамики [7], некоторые жидкости, полимеры и различные металлические сплавы [8], в том числе сплавы с памятью формы.

К *сплавам с памятью формы* (СПФ) относятся металлические сплавы, претерпевающие фазовые превращения при изменении температуры и / или напряженного состояния при тепловом, механическом, электромагнитном или комбинированном внешнем воздействии. Фазовые превращения порождают ряд необычных свойств СПФ, используемых в инженерных приложениях: большие обратимые деформации, достигающие нескольких процентов, развиваемые при нагреве в определенных условиях весьма значительные усилия, обуславливающие применение СПФ в качестве рабочих элементов силовозбудителей, и т. д. В частности, СПФ демонстрируют способность к восстановлению исходной недеформированной формы после неупругого деформирования при нагреве выше определенной температуры. Данное явление и называется эффектом памяти формы. Перечисленные свойства были обнаружены у сплавов систем Au-Cd, Cu-Zn-Al и некоторых других. Наиболее широко распространены сплавы типа «нитинол» на базе системы Ni-Ti.

1.1. ОСНОВНЫЕ ФАЗОВЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В СПЛАВАХ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

В рабочем диапазоне температур и напряжений СПФ может находиться в двух устойчивых *фазовых* состояниях с различными типами кристаллических решеток и, следовательно, с различными физико-механическими характеристиками.

Одной из них является высокотемпературная аустенитная фаза (A), другой – низкотемпературная мартенситная фаза (M). Фазовое состояние СПФ характеризуется скалярным параметром – *объемной долей мартенситной фазы* $q \in [0,1]$.

Аустенитная фаза имеет объемно-центрированную кубическую кристаллическую решетку B2 типа CsCl [9] и характеризуется более высокими значениями модуля упругости: для нитинола $E_A = 84000$ МПа. Условно проекцию объемно-центрированной кристаллической решетки аустенитной фазы на плоскость можно изобразить в форме квадрата с узлом в точке пересечения диагоналей; данная фигура является «жесткой на сдвиг». С изменением фазы сплава происходит изменение механических характеристик материала.

В мартенситном состоянии структура материала варьируется в зависимости от некоторых дополнительных условий. В частности, мартенситная фаза может иметь несколько типов кристаллических решеток:

- R-мартенсит с ромбоэдрической структурой;
- орторомбическая фаза B19;
- искаженная орторомбическая фаза B19' [10].

Проекцию на плоскость кристаллической решетки, соответствующей мартенситной фазе, можно представить в виде квадрата без диагональных элементов. Данная фигура является «податливой на сдвиг», т. е. в общем случае имеет форму параллелограмма.

Модуль упругости нитинола, находящегося в мартенситном фазовом состоянии, примерно втрое ниже модуля упругости аустенитной фазы: $E_M = 28000$ МПа.

Каждому кристаллу мартенсита соответствует его индивидуальная пространственная ориентация элементарных ячеек. Для мартенситных кристаллов нитинола возможны 24 варианта ориентации решетки. Таким образом, мартенситная фаза нитинола может находиться в различных *структурных* состояниях. По типу пространственной ориентации кристаллов мартенсит разделяют на хаотический (M^t) и ориентированный (M^d). В отличие от хаотического мартенсита, ориенти-

рованный мартенсит имеет единственный доминирующий вариант ориентации кристаллов.

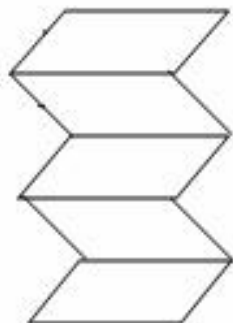


Рисунок 1.1 – Хаотический мартенсит: различная ориентация кристаллов мартенсита

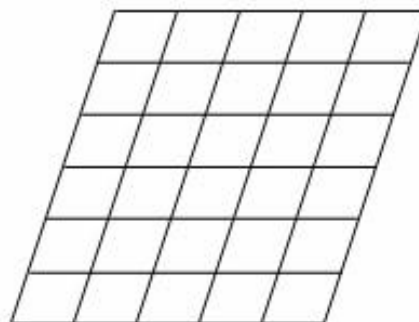


Рисунок 1.2 – Ориентированный мартенсит: единая ориентация кристаллов мартенсита

При определенном сочетании температуры и механических напряжений в СПФ возможно прохождение обратимых бездиффузионных фазовых превращений аустенитной фазы в мартенситную (*прямое мартенситное превращение* $A \rightarrow M$) и обратно, из мартенситной в аустенитную фазу (*обратное мартенситное превращение* $M \rightarrow A$). Такие фазовые переходы называются термоупругими мартенситными превращениями [9] и относятся к геометрически обратимым деформационным процессам. Геометрическая обратимость термоупругих мартенситных превращений объясняется наличием мобильного межфазного слоя между аустенитной и мартенситной фазами на всем протяжении мартенситного превращения [11].

Термоупругие мартенситные фазовые превращения являются фазовыми переходами первого рода и отличаются следующими свойствами:

- процесс является бездиффузионным;
- термоупругие мартенситные превращения не зависят от скорости изменения температуры \dot{T} и скорости изменения напряжений $\dot{\sigma}$ [12];

- температуры начала M_s^0 и окончания M_f^0 прямого превращения, также как и температуры начала A_s и окончания A_f обратного превращений не совпадают, вследствие чего на графике зависимости параметра фазового состава от температуры $q(T)$ наблюдается характерная петля гистерезиса (Рисунок 1.3);
- процесс мартенситных превращений сопровождается латентным тепловыделением / поглощением [11], [13], причем количество латентного тепла как при прямом, так и при обратном мартенситном превращениях пропорционально объёму материала, подвергнутому фазовому превращению;
- прямое превращение сопровождается выделением тепла, соответствующего изменению энтальпии (экзотермическое фазовое превращение);
- обратное превращение является эндотермическим процессом, то есть сопровождается поглощением тепловой энергии;
- из кристалла аустенита возможно образование кристалла мартенсита с различными вариантами ориентации элементарных ячеек [14];
- фазовое превращение приводит к возникновению деформаций изменения объема и формы элемента кристаллической решетки, причем деформации формоизменения имеют значения, на порядок превышающие величины упругих деформаций кристаллической решетки [11];
- как температура T , так и напряжения σ существенно влияют на кинетику мартенситных превращений [15], [13], [16].

Рассмотрим основные особенности процессов фазовых превращений, протекающих в СПФ при нулевом тензоре напряжения и монотонном изменении температуры:

$$\sigma = 0, \quad \text{sgn}(\delta T) = \text{Const.}$$

1.1.1. Прямое мартенситное превращение.

В начальный момент времени $t = t_0$ весь объем СПФ находится в аустенитном фазовом состоянии, т. е. $q|_{t=t_0} = 0$. Рассмотрим диаграмму фазового состава СПФ (Рисунок 1.3). Предполагается, что существует некая температура M_s^0 , при которой система находится в состоянии термодинамического равновесия, а имен-

но, свободные энергии аустенитной и мартенситной фаз равны. При $T < M_s^0$ начинается преобразование аустенита в мартенсит, т. е. прямое мартенситное превращение ($A \rightarrow M$). Завершение прямого превращения, то есть переход всего объема СПФ в мартенситную фазу ($q = 1$), происходит при снижении температуры до значения $T = M_f^0$ в некоторый момент времени t_1 .

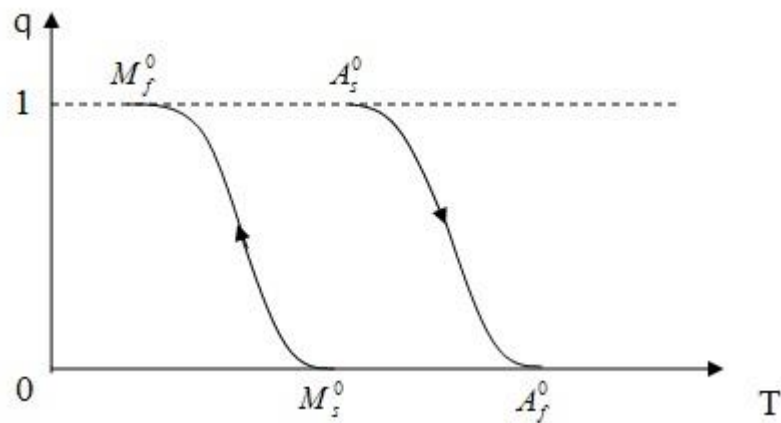


Рисунок 1.3 – Диаграмма фазового состава

Зарождение и рост кристаллов мартенситной фазы сопровождается *микроскопическими* сдвиговыми деформациями. При $\sigma = 0$ как ориентация элементарных ячеек, так и направление сдвиговых микродеформаций в разных кристаллах мартенситной фазы различны. С кристаллографической точки зрения образовавшиеся кристаллы мартенсита совершенно идентичны [17]. В результате возможности образования элементарных ячеек различной ориентации микроскопические деформации решетки взаимно компенсируются, вследствие чего накопления *макроскопической* деформации не наблюдается.

1.1.2. Обратное мартенситное превращение.

Предположим, что в момент времени $t'_1 \geq t_1$ весь объем СПФ находится в мартенситном фазовом состоянии, $q|_{t=t'_1} = 1$. При последующем нагреве мартенситной фазы сплава до температуры равновесия A_s^0 происходит обратное превращение ($M \rightarrow A$). Фазовое превращение продолжается до достижения температуры

значения A_f^0 , при которой материал полностью переходит в исходное аустенитное состояние: $q = 0$.

Для СПФ критические температуры фазовых переходов M_s^0 , M_f^0 , A_s^0 , A_f^0 и ширина петли гистерезиса $M_s^0 - M_f^0$, $A_f^0 - A_s^0$ являются одними из основных характеристик сплава и зависят как от его состава, так и от обработки. Микроструктурные дефекты, степень упорядоченности и размер зерен исходной фазы могут существенно изменить температуры фазовых переходов [18].

1.1.3. Фазовые превращения при ненулевых напряжениях.

Механические напряжения существенно влияют на кинетику мартенситных превращений. Рассмотрим диаграмму деформирования нитинола в одноосном напряженном состоянии, температуре $T < M_f^0$ после прямого превращения, прошедшего в отсутствие напряжений: $A \rightarrow M$ ($\sigma = 0$) (Рисунок 1.4).

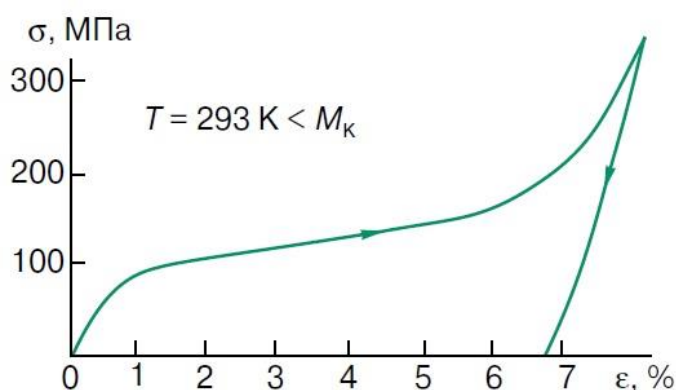


Рисунок 1.4 – Диаграмма деформирования никелида титана при одноосном растяжении в режиме мартенситной неупругости [17]

На начальном участке диаграммы при $\sigma < \sigma_M$ наблюдается деформирование, полностью обратимое при разгрузке, с модулем упругости E_M . При $\sigma > \sigma_M$ наблюдается некое подобие площадки текучести со слабым деформационным упрочнением. Накопление *макроскопической* деформации осуществляется за счет пространственной переориентации кристаллов мартенсита – *структурного пре-*

вращения, т. е. перехода хаотического мартенсита в ориентированный ($M^t \rightarrow M^d$). Направление переориентации элементарных ячеек однозначно определено направлением действия нагрузки. Последний этап нагружения характеризуется упрочнением материала с образованием необратимых пластических деформаций. При $\delta\sigma < 0$ происходит упругая разгрузка с модулем E_M . Описанный процесс деформирования называется *мартенситной неупругостью* (МН).

Схожий с МН процесс деформирования наблюдается при прямом мартенситном превращении при постоянном напряжении, ($A \rightarrow M$) ($\sigma = \text{Const}$). Образование элементарных ячеек мартенситной фазы происходит с «благоприятной» ориентацией, способствующей деформированию материала в направлении действующей нагрузки (Рисунок 1.5).

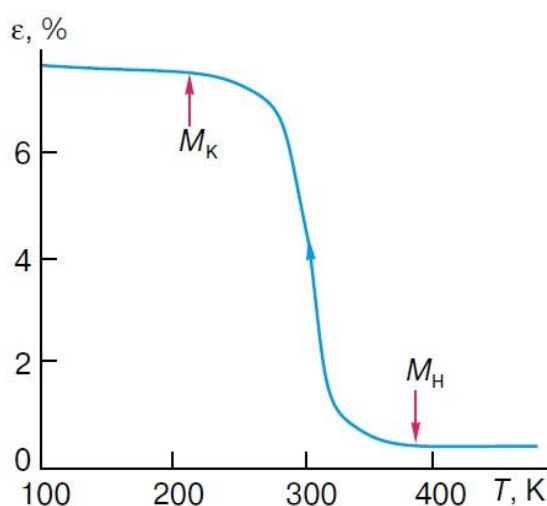


Рисунок 1.5 – Эффект пластичности превращения при постоянном напряжении у никелида титана [17]

Рост макродеформации наблюдается на всем протяжении прямого превращения ($A \rightarrow M$) и заканчивается с его окончанием. Явление накопления неупругих деформаций на стадии прямого превращения под действием постоянных напряжений называется *эффектом пластичности превращения* (ЭПП). Зависимость величины фазово-структурной деформации от напряжений объясняется тем, что незначительные напряжения не обеспечивают переориентации всех кристаллов мартенсита вдоль направления действия нагрузки, таким образом, образуется

смешанная мартенситная фаза, содержащая как ориентированный, так и хаотиче-ский мартенсит. С ростом напряжений объемная доля *ориентированного* мартен-сита увеличивается, следовательно, возрастает и величина макродеформации. Ве-личина деформаций, возникающих при реализации СПП, нелинейно зависит от величины напряжений, наиболее сильно в области низких напряжений, при высо-ких уровнях напряжений относительно слабо (Рисунок 1.6).

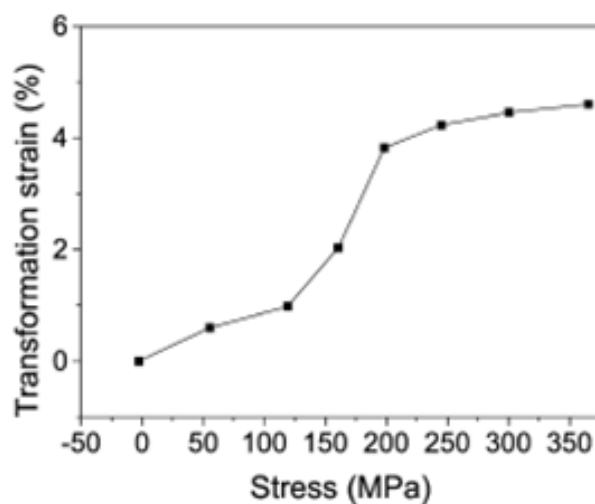


Рисунок 1.6 – Зависимость максимальной фазово-структурной деформации от действующих напряжений при реализации ЭПП

Как мартенситная неупругость, так и эффект пластичности превращения наблюдаются при напряжениях, существенно меньших предела текучести матери-ала; при $\sigma > \sigma_T$ наблюдается дислокационная пластичность.

Восстановление кристаллической решетки аустенита в процессе обратного превращения ($M \rightarrow A$) при $T > A_s^0$, $\delta T > 0$ сопровождается полным возвращением накопленной по каналу мартенситной неупругости или ЭПП неупругой деформа-ции. При этом происходит, следовательно, и восстановление исходной формы ма-териала. Явление снятия неупругих деформаций, полученных после реализации явлений МН, ЭПП, прямого превращения, при нагреве называется *эффектом па-мяти формы* (ЭПФ) (Рисунок 1.7).

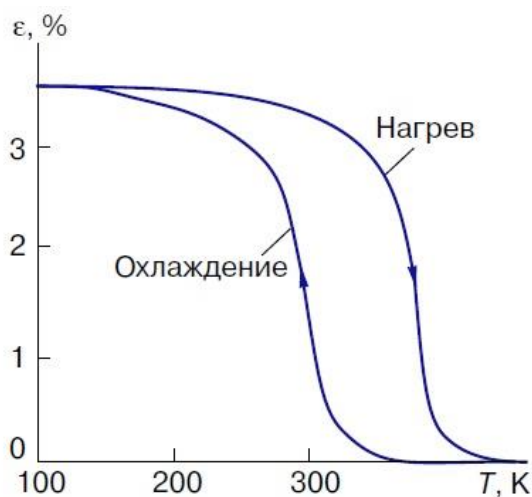


Рисунок 1.7 – Эффект пластичности превращения при охлаждении под действием постоянного напряжения и эффект памяти формы при нагреве у никелида титана

При реализации ЭПФ в условиях наложенных на тело кинематических связей, стесняющих возвращение накопленной деформации и исходной формы тела, в материале возникают *реактивные напряжения* (Рисунок 1.8). Величина возникающих реактивных напряжений существенно превышает предел текучести материала и для некоторых СПФ может достигать 1300 МПа.

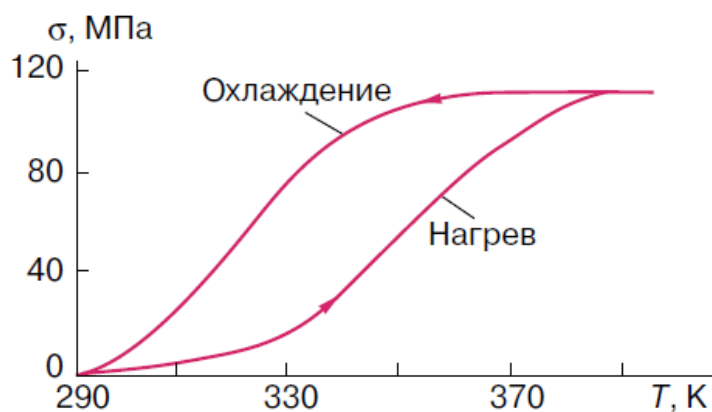


Рисунок 1.8 – Изменение реактивных напряжений при охлаждении (прямое превращение) и нагреве (ЭПФ)

В работе [19] предложено схематически представлять деформирование СПФ в виде диаграммы в трехмерном пространстве с координатами: напряжение (σ) – деформация (ε) – температура (T) (Рисунок 1.9).

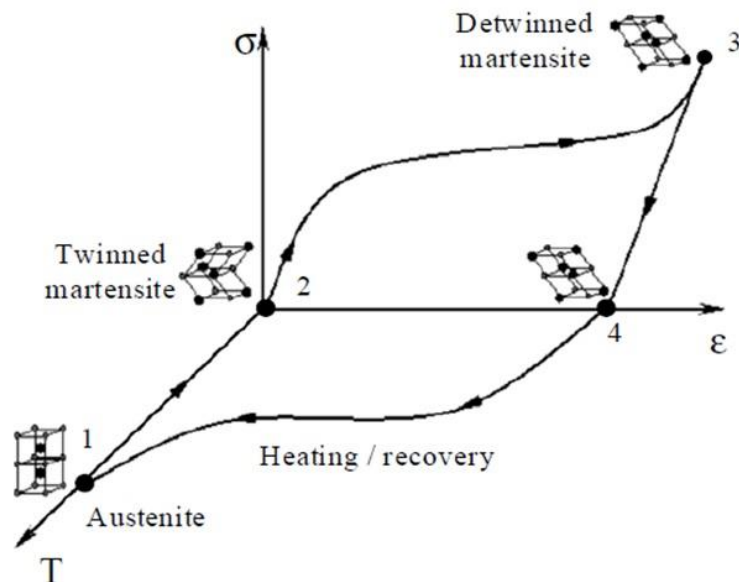


Рисунок 1.9 – Характер поведения СПФ при термосиловом воздействии

- 1 → 2: прямое фазовое превращение ($A \rightarrow M^t$) с образованием хаотического мартенсита без накопления макродеформаций при охлаждении через интервал температуры $[M_f^0, M_s^0]$;
- 2 → 3: структурное превращение хаотического мартенсита в ориентированный ($M^t \rightarrow M^d$) с накоплением неупругих деформаций при механическом нагружении (явление мартенситной неупругости);
- 3 → 4: упругая разгрузка;
- 4 → 1: обратное фазовое превращение ($M \rightarrow A$) при нагреве через интервал температуры $[A_s^0, A_f^0]$ с устранением неупругой деформации структурного превращения (эффект памяти формы).

Механические напряжения существенно влияют на критические температуры фазовых превращений в СПФ. В соответствии с термодинамическим уравнением Клаузиуса – Клапейрона увеличение действующих напряжений приводит к

смещению диаграммы фазового состава вправо, в сторону более высоких температур (Рисунок 1.10):

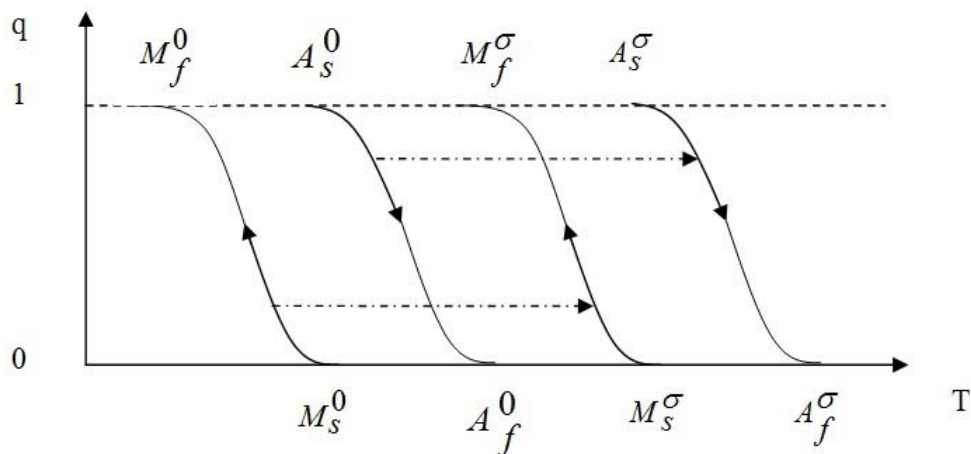


Рисунок 1.10 – Влияние действующих напряжений на температуры фазовых переходов

Как правило, используется линейная аппроксимация зависимости температур фазовых превращений от напряжений:

$$M_{s,f}^{\sigma} = M_{s,f}^0 + k\sigma, \quad (1.1)$$

где $M_{s,f}^{\sigma}$ – температура начала/окончания прямого превращения при $\sigma \neq 0$, $M_{s,f}^0$ – температура начала/окончания прямого превращения при $\sigma = 0$, k – коэффициент линейной модели, σ – абсолютная величина напряжения (в одноосном состоянии) либо интенсивность тензора напряжения (в случае многоосного состояния). Аналогичные зависимости существуют и для температур начала и окончания обратного мартенситного превращения $A_{s,f}^{\sigma}$. Зависимости интервалов температур от напряжений приводят к развитию фазовых превращений только за счет изменения напряжения при изотермическом нагружении. Поведение материала в таких процессах существенно зависит от положения температуры начала нагружения относительно интервалов температур фазовых превращений.

1.1.4. Мартенситные превращения при изотермическом нагружении.

Пусть в начальный момент нагружения весь объем СПФ находится в аустенитном состоянии: $T_0 > M_S^0$, $q = 0$. Рост механических напряжений приводит к смещению диаграммы фазового состава $q(T, \sigma)$ в область высоких температур. При $\sigma_s^1 \leq \sigma < \sigma_T$ в соответствии с (1.1) $M_S^\sigma \geq T_0$, что приведет к началу прямого превращения ($A \rightarrow M$) на этапе изотермического нагружения (Рисунок 1.11).

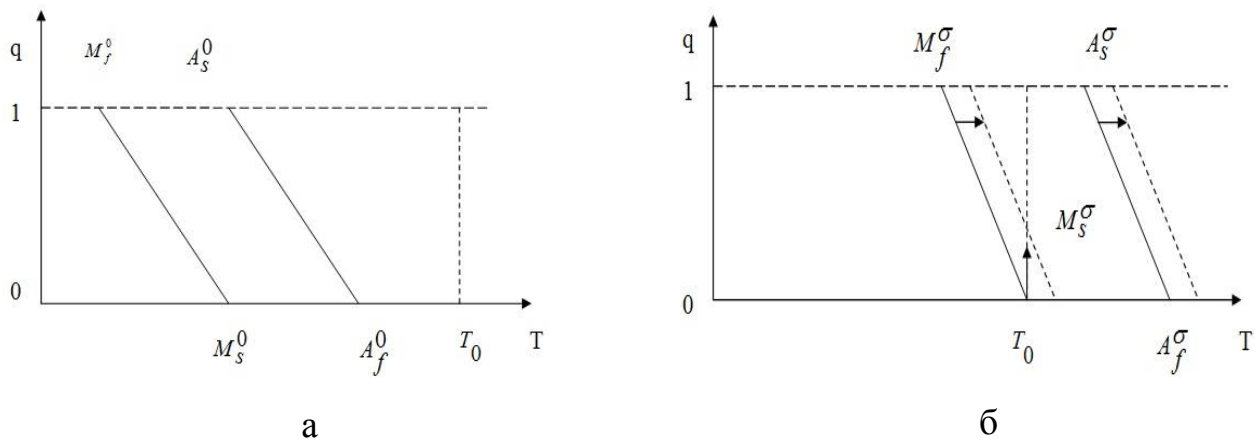


Рисунок 1.11 – а) Начальное состояние диаграммы фазового состава;
б) состояние диаграммы в момент начала прямого превращения

Образовавшийся мартенсит называется мартенситом напряжений.

При разгрузке диаграмма фазового состава смещается влево, к своему исходному состоянию. В зависимости от положения температуры начала процесса нагружения T_0 относительно интервала температур мартенситных превращений возможны несколько вариантов поведения материала.

1. $T_0 > A_f^0$: падение напряжений до $\sigma = \sigma_s^2$ приводит к уменьшению температуры A_f^σ . При $A_f^\sigma = T_0$ термодинамически неустойчивая мартенситная фаза начинает переходить в аустенитную. Дальнейшее падение напряжений приводит к завершению обратного превращения при $A_f^\sigma = T_0$ с полным восстановлением накопленной ранее неупругой деформации (Рисунок 1.12). Таким образом, при последовательном нагружении – разгрузке происходит полностью обратимое

деформирование СПФ при постоянной температуре. Данный процесс носит название сверхупругого деформирования, или состояния сверхупругости СПФ.

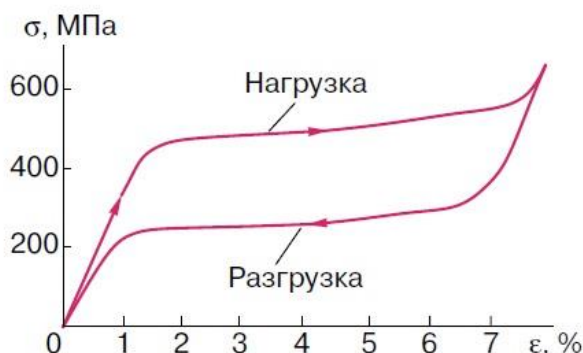


Рисунок 1.12 – Эффект сверхупругости. Изотермическое нагружение аустенитной фазы сплава при температуре $T_0 > A_f^0$

2. $A_s^0 < T_0 < A_f^0$: падение напряжений инициирует обратное превращение ($M \rightarrow A$) при $A_s^0 = T_0$, однако, так как $T_0 < A_f^0$, весь объем СПФ не может превратиться в аустенит, и полного возврата накопленных деформаций не происходит. В материале образуется смешанная фаза аустенит – мартенситная фаза. Для завершения обратного превращения и восстановления исходной формы необходимо нагреть материал до температуры A_f^0 (Рисунок 1.13).

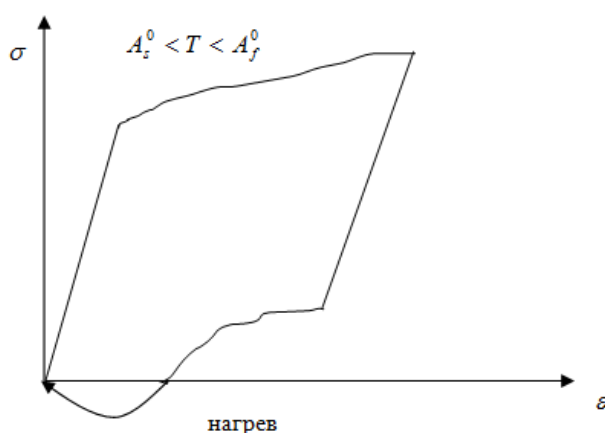


Рисунок 1.13 – Изотермическое нагружение аустенитной фазы сплава при температуре $A_s^0 < T_0 < A_f^0$

3. $M_s^0 < T_0 < A_s^0$: происходит полностью упругая разгрузка, обратное мартенситное превращение не возникает. Накопленные в ходе прямого мартенситного превращения деформации сохраняются при полном снятии нагрузки. Возвращение к исходной форме возможно при нагреве материала до температуры A_f^0 (рисунок 1.14).

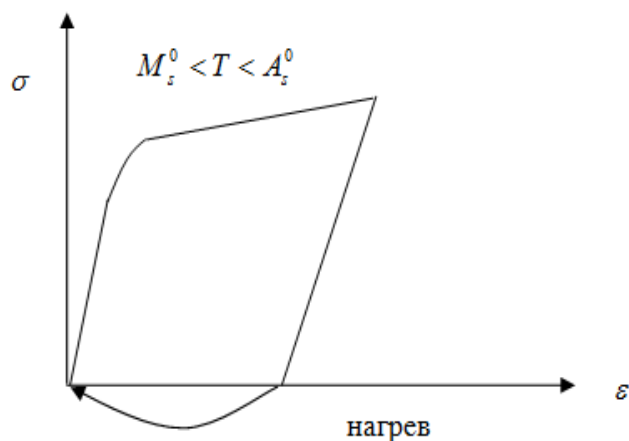


Рисунок 1.14 – Изотермическое нагружение аустенитной фазы сплава при температуре $M_s^0 < T_0 < A_s^0$

Явление, описанное диаграммами, приведенными на Рисунках 1.13 и 1.14, внешне схоже с пластическим деформированием, однако как механизм его осуществления иной, а зависимость формы диаграммы от температуры противоположна. При пластическом деформировании прирост температуры приводит к снижению предела текучести σ_T . При мартенситных превращениях, протекающих при постоянной температуре под действием напряжений, сопротивление материала деформированию по каналам мартенситной неупругости возрастает с ростом температуры. Данный эффект обусловлен зависимостью напряжений начала фазового перехода от температуры, $\sigma_s^1(T_0)$. Чем ближе значение T_0 к температуре начала прямого превращения M_s^0 , тем ниже значение σ_s^1 .

Следует заметить, что описанные модели являются идеализацией реальных процессов, так как само по себе прямое фазовое превращение приводит к интенсивному выделению латентного тепла, обратное превращение – к поглощению

тепла, что, в свою очередь, изменяет поле температуры в объеме СПФ. Следовательно, в реальных процессах тепловые и механические причины фазовых переходов являются взаимосвязанными.

При $\sigma_s^1 > \sigma_T$ происходит пластическое деформирование аустенитной фазы до начала прямого мартенситного превращения, или эффект сверхпластичности [10], [20]. Накопление неупругой деформации происходит как по каналу мартенситной неупругости, так и дислокационной пластичности. В данном случае при обратном превращении вследствие снятия нагрузки либо повышения температуры обратимы только деформации, порождаемые прямым мартенситным превращением, но не пластические деформации, являющиеся необратимыми.

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛОВ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ И ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

По мере расширения области практического применения перед исследователями всё более остро стоит задача создания соответствующих методик оценки напряжено-деформированного состояния (НДС) изделий на основе СПФ. Благодаря особым, несвойственным большинству классических металлов, свойствам, наблюдаемым в СПФ при термосиловых воздействиях, корректное описание их поведения требует создания новых систем определяющих соотношений, в которых помимо описания зависимостей напряжения - деформация - температура, необходимы соотношения, однозначно характеризующие фазовый состав сплава при текущем термо-силовом воздействии. Использование же классических подходов оценки НДС, успешно применяемых для моделирования большинства металлов, применительно к СПФ, не дает должных результатов или приводит к учёту только частных случаев.

1.2.1. Классификация математических моделей сплавов с памятью формы

В силу множественности подходов, применяемых при создании математических моделей СПФ, их классификация представляется достаточно сложной задачей. Обзору существующих моделей посвящен ряд работ [21], [22], [23], [24], [25],

[26]. Однако единой, принятой большинством авторов, классификации найдено не было.

По размеру представительного объема существующие модели можно условно разделить на макроскопические модели (макро-модели) и микроскопические модели (микро-модели).

Микро-модели сосредоточены на описании микро-масштабных эффектов и предлагают многоуровневый подход к описанию макро поведения сплава [27], [28], [29]. В рамках микро – моделей проводится моделирование поведения монокристалла с последующим осреднением полученных результатов по представительному объему для получения макроскопического отклика материала. Большинство микроструктурных моделей для получения макроскопического отклика материала, используют самосогласованный метод осреднения, разработанный для описания гетерогенных материалов [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37]. Фазово – структурное состояние сплава определяется на основе движения границ раздела двух фаз. Микро – модели обладают большими функциональными возможностями по моделированию достаточно сложных процессов, происходящих в СПФ, например, таких как переориентация и раздвойникование кристаллов мартенситной фазы [38], [39], [40]. Тем не менее, они используют большое количество внутренних переменных, подчас не имеющих явного физического смысла, что приводит к увеличению машинного времени и делает расчет реальных конструкций достаточно трудоемким.

Макро-модели описывают макроскопическое поведение сплава, не затрагивая детального описания микроструктуры и процессов, вызывающих её изменение. Они имеют несколько преимуществ в сравнении с более детализированными подходами, а именно, параметры макро – моделей могут быть получены, как правило, из «классических» экспериментальных исследований; для частных случаев возможно получение аналитического решения; структура определяющих соотношений хорошо подходит для численной реализации. Благодаря перечисленным достоинствам, макро – модели нашли широкое применение в инженерных расчетах.

Макро – модели без введения внутренних переменных. Ряд ранних макро – моделей СПФ основываются на подходах успешно применяемых при моделировании ферроэлектриков. Данный выбор был не случаен. Дело в том, что кривая деформирования СПФ в изотермическом режиме хорошо коррелирует с кривыми намагничивания ферромагнитных материалов [41], [42]. Имея схожий характер кривых, ряд исследователей предприняли попытки адаптации отработанных подходов к моделированию поведения СПФ. Так в работе [43] для формирования системы определяющих соотношений используется теория фазовых переходов Гинзбурга – Ландау [44]. Дальнейшее развитие модель получила в работах [45], [46], причем в [47] представлен её трехмерный вариант.

Позже были предложены модели с возможностью описания петли гистерезиса, что позволило уточнить поведение СПФ в режиме сверхупругости. Зависимости между переменными состояния вводятся через определенным образом подобранную передаточную функцию, аппроксимирующую экспериментальные данные. Форма записи передаточной функции, связывающей в случае описания СПФ напряжение, деформацию и температуру, имеет решающее значение при формировании модели. Большинство гистерезисных моделей основано либо на математической модели магнитного гистерезиса Прейзаха (Preisach) [48], либо на дифференциальной модели Дюгема – Маделунга (Duhem-Madelung) [49].

В модели Прейзаха вводится передаточная функция, связывающая напряжение и деформацию. Петля гистерезиса описывается с помощью интегрального оператора Прейзаха. Константы передаточной функции подбираются на основе экспериментальных данных. Вследствие внутренних ограничений [50], этот подход может быть использован только для описания сверхупругого поведения СПФ [51], [52], [53], [54], [55]. Кроме того, в ряде работ [54], [55], использующих модель Прейзаха, выявлено существенное несоответствие результатов расчета экспериментальным данным, что авторы связывают с формой оператора Прейзаха.

В отличие от модели Прейзаха, модель Дюгема – Маделунга (Duhem-Madelung) использует дифференциальные соотношения для описания петли гистерезиса. В общем случае используется два дифференциальных оператора для

описания поведения материала на этапе нагружения и разгрузки. Стоит отметить работы [56], в которых помимо сверхупругого поведения СПФ, проводится моделирование фазовых превращений инициированных температурой.

Представленные модели описывают поведение СПФ без введения дополнительных внутренних переменных состояния и уравнений состояния, отвечающих за фазовый состав сплава. К их основным достоинствам можно отнести малый объем необходимых вычислений и простоту реализации. В связи с этим, они успешно применяются для контроля поведения изделий в режиме реального времени, например, актуаторов [57]. Однако, отсутствие внутренних переменных и уравнений, отвечающих за кинетику фазовых превращений, существенно ограничивают их функциональные возможности.

Макро – модели с внутренними переменными. Как уже было отмечено раньше, в процессе термомеханического нагружения СПФ возможно изменение фазово – структурного состояния, что существенным образом влияет на поведение сплава. Состояние любой термодинамической системы характеризуется набором макроскопических величин – *переменными состояния*. Классическая механика сплошных сред включает в себе стандартный набор переменных состояния, однозначно характеризующих термодинамическую систему, а именно - напряжения (σ), деформация (ε), температура (T) и энтальпия (s). Описание изменения фазово – структурного состояния и его влияния на поведение сплава с использованием приведенных переменных состояния крайне затруднительно. Исходя из этого, необходимо введение дополнительного набора переменных состояния, характеризующих внутреннюю структуру сплава, а также создание новой системы уравнений состояния, однозначно определяющих поведение материала при фазово – структурных превращениях. Модели, полученные в рамках подобного подхода, можно классифицировать как *модели с внутренними степенями свободы* [58].

Первоочередной задачей формирования модели с внутренними степенями свободы является выбор внутренних переменных состояния, описывающих протекающие физические процессы. Для моделей СПФ внутренние переменные должны содержать информацию о текущем состоянии структуры сплава и не-

упругих деформационных процессах мартенситных превращений [59]. Для описания текущего состояния структуры сплава обычно используется скалярная внутренняя переменная состояния – *объемная доля мартенситной фазы* (q). Величина объемной доли мартенсита лежит в пределах $0 \leq q \leq 1$, причем $q = 0$ соответствует полностью аустенитной фазе сплава, а $q = 1$ – полностью мартенситной. Прохождение мартенситных превращений сопровождается накоплением неупругой *фазово – структурной деформации* ε^t . В общем случае, неизвестными являются как величина этой деформации, так и её направление. Использование только скалярных внутренних переменных при формировании моделей СПФ, по сути, не является адекватным из – за потери явного определения направления накопления фазово – структурной деформации. Например, представленная в работе [60] модель описывает поведения СПФ с использованием набора скалярных внутренних переменных состояния и предполагает заранее известное направление накопления фазово – структурных деформаций. Однако, экспериментальные исследования показывают возможность переориентации мартенситных зерен при непропорциональном нагружении и, как следствие, изменение направления фазово – структурной деформации [61], [62]. С другой стороны, использование в качестве внутренней переменной состояния только тензора фазово – структурной деформации, также приводит к некоторым ограничениям, связанным с наличием связи между структурой сплава и проходящими деформационными процессами [63]. Таким образом, для корректного описания мартенситных превращений и сопровождающих их деформационных процессов, необходимо введение двух внутренних переменных состояния: объемной доли мартенсита q (скаляр) и фазово – структурной деформации ε^t (тензор).

Введение дополнительных внутренних переменных состояния предполагает проведение операций по получению новых уравнений состояния системы. В общем случае, проблема получения функциональной формы уравнений состояния для моделей с внутренними степенями свободы, может быть решена в рамках подходов рациональной термодинамики. Для описания термодинамического состояния системы и её зависимости от переменных состояния, используются тер-

термодинамические потенциалы, такие как внутренняя энергия (u), энтальпия (h), свободная энергия (ψ), и потенциал Гиббса (G). Использование первых двух термодинамических потенциалов крайне затруднительно, так как они зависят от энтропии системы, выступающей в этом случае в качестве независимой переменной состояния. Для вывода уравнений состояния моделей СПФ обычно используются функция свободной энергии, либо потенциал Гиббса. Выбор термодинамического потенциала определяется принятым набором независимых переменных состояния. В случае использования напряжений (σ) в качестве независимой переменной состояния используется потенциал Гиббса $G(T, \sigma, q)$, а при выборе деформаций (ε) – функция свободной энергии $\psi(T, \varepsilon, q)$.

В общем случае, термодинамический потенциал двухфазной среды является суммой упругих выражений потенциалов для аустенитной и мартенситной фаз с весами, равными их объемным долям, и неаддитивной по отношению к параметру фазового состава части, описывающей межфазные взаимодействия. Введение неаддитивной части приводит к существенному усложнению структуры термодинамического потенциала, при которой он перестает быть однозначной функцией параметров состояния [64], [65]. В работах [66], [67], [68], [69], [70] исследован вопрос применимости упрощенной структуры аддитивного термодинамического потенциала.

Уравнения состояния для внутренних переменных могут быть получены двумя способами. Самым простым способом является непосредственное задание функциональной формы изменения внутренних переменных (либо скорости их изменения), основанной на экспериментальных данных. Альтернативный подход заключается в описании кинетики изменения внутренних переменных путем введения явных термодинамических ограничений и выполнении второго закона термодинамики, сформулированного через скорость механической диссипации.

Метод фазовых диаграмм. Ряд авторов для формирования уравнений состояния предлагают совместное использование термодинамического и феноменологического подходов [71], [72], [73], [56], [74], [75], [76]. Большое распространение получили модели, в которых вводится функциональная форма зависимости объ-

емной доли мартенсита от напряжений и температуры – $q(\sigma, T)$. Для этого часто используют тригонометрические и экспоненциальные функции, аппроксимирующие экспериментальные фазовые диаграммы СПФ. Фазовые диаграммы являются удобным способом описания текущего фазово – структурного состояния сплава. Согласно фазовой диаграмме, представленной на Рисунке 1.15, СПФ может находиться в аустенитном или мартенситном состояниях, причем проводится разделение мартенситной фазы на зоны ориентированного и хаотического мартенсита. Области устойчивого состояния сплава разделены линиями преобразования, при переходе через которые, происходят фазово – структурные превращения. Основанная на экспериментальных исследованиях [15], [16], подобная форма представления фазового состава сплава впервые была предложена в работе [77]. Получение физически допустимых значений объемной доли мартенсита $q \in [0,1]$, достигается применением дополнительных ограничений к форме аппроксимирующих функций [78], [79].

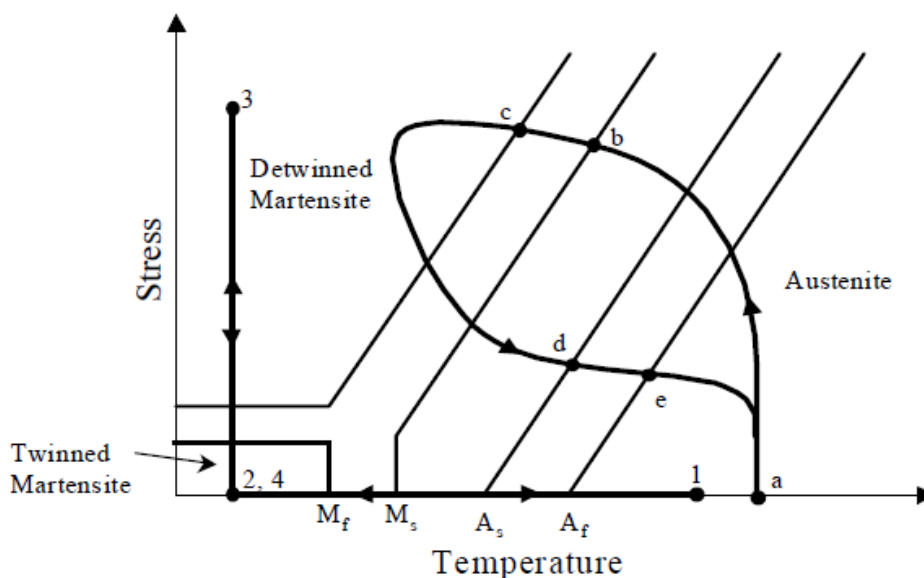


Рисунок 1.15 – Идеализированная диаграмма фазового состава СПФ [19]

Также стоит отметить модели, использующие для описания кинетики мартенситных превращений метод фазовых диаграмм в сочетании с теорией течений

[80], [81], [82], [83], [84], [85]. В них предлагается введение функциональной формы скорости изменения параметра фазового состава (Δq) через потенциал Друкера-Прагера, который широко используется в задачах пластичности грунтов.

Диссипативные модели (модели с неизвестной кинетикой фазовых превращений). Вследствие наличия неупругой деформации и латентного тепловыделения, мартенситные превращения по своей природе являются термодинамически необратимым процессом. На этапах прямого и обратного мартенситного превращения происходит диссипация механической энергии. Причем, согласно второму закону термодинамики, для СПФ скорость механической диссипации (D) является неотрицательной величиной на этапах мартенситных превращений и равна нулю при их отсутствии.

Большой класс моделей используют скорость механической диссипации для описания кинетики изменения объемной доли мартенсита (q). В рамках данного подхода предполагается, что скорость механической диссипации является линейной функцией скорости изменения объемной доли мартенсита. Вводится пороговое значение величины скорости механической диссипаций для прямого (Y) и обратного мартенситного превращения ($-Y$). На основе соотношения для скорости механической диссипации (D) и её порогового значения (Y) формируется функция трансформации (Φ). Причем на этапе прохождения мартенситных превращений $\Phi = 0$. Из соотношения для функции трансформации (Φ) удастся получить уравнения состояния для объемной доли мартенсита (q). В качестве ограничений роста объемной доли мартенсита к функции трансформации и скорости изменения объемной доли мартенсита обычно применяется условия Куна-Таккера (Kuhn-Tucker).

Для получения конечных соотношений для объемной доли мартенсита, необходимо добавление неаддитивной части ($f(q)$) в структуру взятого за основу термодинамического потенциала. Причем форма неаддитивной добавки подбирается таким образом, чтобы было обеспечено выполнение термодинамических ограничений для величины скорости механической диссипации. В качестве $f(q)$ обычно используются экспоненциальные и тригонометрические функции.

Стоит отметить, что гипотеза о линейной зависимости скорости механической диссипации от скорости изменения объемной доли мартенсита не имеет достаточного обоснования и в общем случае не может быть проверена экспериментальным путем. Помимо этого, использование данной гипотезы приводит к неадекватным уравнениям состояния для фазово – структурной деформации ε^t , согласно которым интенсивность накопленной деформации не зависит от интенсивности напряжений, действующих при прямом превращении.

1.2.2. Модели СПФ с внутренними степенями свободы

С начала 80-х годов созданию и развитию математических моделей поведения СПФ посвящено множество научных трудов. Ниже представлен литературный обзор макро – моделей, использующих для описания мартенситных превращений набор внутренних переменных.

Большинство ранних работ посвящено созданию одномерных макро – моделей СПФ, основанных на методе фазовых диаграмм. Одним из первых, подобный подход был применен Танака К. в работах [71], [86], [87] [88]. Для описания мартенситных превращений вводится внутренняя переменная (q), характеризующая фазовый состав сплава. В качестве независимых переменных состояния выступают деформация (ε), температура (T) и объемная доля мартенсита (q). Уравнения состояния для напряжений были получены с использованием функции свободной энергии $\psi(T, \varepsilon, q)$. Была предложена экспоненциальная форма зависимости внутренней переменной состояния от действующих напряжений и температуры - $q(\sigma, T)$. Аналогичная модель была представлена в работе [72]. Авторы используют тригонометрическую форму функции эволюции объемной доли мартенсита, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными. Можно отменить серию работ Мюллера с соавторами [89], [90], [91], [92], которые посвящены описанию сверхупругого поведения СПФ.

Руководствуясь работами [88] и [72], Бринстон Л. предложила одномерную модель способную описать явление мартенситной неупругости [73]. В рамках модели проводится декомпозиция объемной доли мартенсита на хаотический (q_t) и ориентированный мартенсит (q_s). В уравнение состояния для переменной (q_s)

введена величина критического напряжения перехода хаотического мартенсита в ориентированный. Проведен учет влияния изменения фазового состава сплава на упругие свойства материала с использованием правила смеси. Представлены результаты использования модели для описания сверхупругого поведения при различных температурных режимах, эффекта пластичности превращения, мартенситной неупругости.

В работах Бойда Дж. и Лагудаса Д. [93], [94] представлен трехмерный вариант исходной модели Танака К. [88]. Причем, в [93] предложена трехкомпонентная модель с возможностью моделирования явления мартенситной неупругости. Переориентация мартенсита при непропорциональном нагружении была рассмотрена в работе [95]. Трехмерная модель, описывающая сверхупругое поведение СПФ, представлена Ранески В. и Лекселентом С. [96], [97]. Возможность учета одновременного прохождения фазового и структурного превращений, исследовалась в работах [34], [98]. Подробное описание представленных моделей СПФ и подходов к их созданию можно найти в обзорных работах [65], [99].

Использование СПФ в медицине подтолкнуло ряд исследователей к созданию моделей, ограничивающихся описанием только эффекта сверхупругости, как наиболее распространённого в этой области. В [100], [101], [102], [103], [83] Ауриккио Ф. предложена трехмерная модель сверхупругого поведения СПФ на основе теории пластического течения [104]. Кинетическое выражение для параметра фазового состава (q) определяется через потенциал Друкера – Прагера. Вследствие относительной простоты численной реализации, модель получила широкое распространение в современных конечно - элементных комплексах [105], [106] и активно используется исследователями при решении практических задач [107], [108], [109]. Термодинамическая модель сверхупругого поведения СПФ была предложена Ранески В. и Лекселентом С. [110]. Отличительной особенностью модели является способность учета асимметричного поведения СПФ при растяжении\сжатии. Она была использована в работе [111] для исследования изгиба балки при реализации эффекта сверхупругости. Получено распределение объемной доли мартенсита по толщине балки при нагрузке и разгрузке без учета

асимметрии поведения СПФ при растяжении\сжатии. В [112] авторы приводят результаты расчета изгиба балки без учета и с учетом асимметрии поведения СПФ. Показано, что учет асимметрии поведения СПФ не оказывает существенного влияния на макроскопический отклик балки.

Большое внимание было уделено исследованию поведения СПФ под воздействием циклических нагрузок, при которых происходит накопление необратимых деформаций и изменяется контур петли гистерезиса с ростом числа циклов. Был предложен ряд одномерных моделей, учитывающих данные особенности [8], [113], [114], [115]. В [113], [114] предполагалось, что часть мартенсита не восстанавливается после каждого цикла нагружения, что приводит к неполному восстановлению деформации при обратном превращении. Определены критерии «насыщения» этого процесса после определенного количества циклов. В серии работ Лагудас Д. с соавторами исследует поведение нитиноловых стержней при циклическом нагружении [116], [117], [118], [119]. Помимо обратимой фазово – структурной деформации, определена возможность образования необратимой пластической деформации.

В работе [81] Соуза А. представил трехмерную модель, описывающую сверхупругое поведение и эффект памяти формы (ЭПФ). Для описания мартенситных превращений вводится неизвестный тензор фазово – структурных деформаций. Приводятся результаты численного моделирования для случая сверхупругого поведения и ЭПФ. Позже модель была исследована в [120], где предложен надежный алгоритм численного решения. В работах [121], [122] проведено расширение модели учетом несимметричного поведения СПФ при растяжении\сжатии.

Семейство моделей, описывающих поведение СПФ при различных режимах деформирования и учитывающих фазовые, структурные деформации и ряд других эффектов, было предложено А. А. Мовчаном с сотрудниками.

1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СПЛАВОВ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

В качестве одного из перспективных приложений сплавов с эффектом памяти формы изначально рассматривалось активное управление тонкостенными элементами конструкций из композиционных материалов с целью парирования выпучивания при потере устойчивости исходной формы равновесного состояния [123]. При этом предполагалось встраивать элементы с памятью непосредственно в состав слоистого композиционного пакета [124] либо применять пружины из СПФ, связанные со стержнями [125], пластинами либо оболочками [126].

В то же время устойчивость самих по себе тонкостенных элементов из СПФ почти не изучалась; предполагалось, что материалы с памятью подчиняются традиционным критериям устойчивости. В качестве основного случая, характерного для СПФ, изучалась потеря устойчивости стержнем при наложенных на его торцы однородных кинематических связях в процессе обратного мартенситного превращения. В такой ситуации в заневоленном стержне развиваются большие по амплитуде сжимающие напряжения, являющиеся причиной выпучивания. Аналогичные процессы рассматривались М. А. Хусаиновым для более сложных тонкостенных систем – криволинейных стержней-арок [127], круглых пластин [128] и сферических пологих оболочек [129]. Некоторыми зарубежными авторами исследовалась также потеря устойчивости тонкостенными элементами из СПФ в режиме сверхупругости.

Однако в ряде экспериментов было обнаружено аномальное поведение стержнем из никелида титана, находящегося в аустенитном состоянии, при действии сжимающей нагрузки и охлаждении через интервал прямого мартенситного превращения [130]. Было показано, что потеря устойчивости прямолинейной формы равновесного состояния происходит при величине сжимающей силы, в 3-4 раза низшей, чем критическая сила, определяемая формулой Эйлера при минимальном значении модуля упругости, соответствующем полностью мартенситному состоянию стержня при завершении фазового перехода [131]. Было сделано

предположение, что бифуркация происходит в процессе фазового перехода, причем причиной потери устойчивости является фазовое превращение в стержне.

Для объяснения описанного явления была предложена теория, основанная на феноменологической модели А. А. Мовчана термомеханического поведения сплавов с памятью формы при фазово-структурных переходах. А. А. Мовчаном и Л. Г. Сильченко была предложена система концепций, позволяющих получить аналитическое решение задачи об устойчивости систем с памятью [132], разработанная первоначально для модельных систем с конечным числом степеней свободы – стойки Шенли [133]. В частности, были сформулированы концепции фиксированного фазового состава, приводящая к тривиальной оценке критических сил по величине модуля упругости; концепция фиксированной нагрузки, аналогичная теории устойчивости при пластических деформациях, и концепция продолжающегося фазового перехода [134].

Было показано, что в случае достаточно длинного и гибкого стержня потеря устойчивости происходит так же, как и в случае изотермического нагружения сжатием упругого стержня, при этом значение критической силы определяется формулой Эйлера и соответствует «мартенситному» значению модуля Юнга [135]. Данной ситуации соответствует гипотеза фиксированного фазового состава, т. е. предположение об отсутствии дополнительного фазового превращения при переходе в смежное равновесное состояние.

Концепция фиксированного фазового состава в целом справедлива для элементов конструкций из сплава с памятью формы на базе системы Cu – Mn, в которой зависимость фазового состава от температурного поля существенна, а от действующих напряжений – пренебрежимо мала. В случае стержня из никелида титана относительно небольшой длины экспериментально определяемая величина критической силы существенно ниже эйлеровой, следовательно, гипотеза о постоянстве фазового состава при бифуркации уже не соответствует действительности [130]. В такой ситуации потеря устойчивости может описываться либо в соответствии с концепцией фиксированной нагрузки (аналог концепции фон Кармана в теории статической устойчивости упруго-пластических систем), при которой

изменение фазового состава в процессе бифуркации не приводит к изменению продольной силы [133], а положение границы раздела фаз находится из условия постоянства внешней нагрузки, либо в соответствии с концепцией продолжающегося фазового перехода [136] (аналог концепции Шенли [137]). В зоне дополнительного деформирования в последнем случае может оказаться все сечения рассматриваемого элемента, так как действующая нагрузка при выпучивании может испытывать малое приращение. Наименьшие теоретические значения критических сил следуют из концепции «продолжающегося нагружения». Экспериментальные значения располагаются, как правило, между результатами, получаемыми в рамках концепций фиксированной нагрузки и продолжающегося фазового перехода. Учет возможных приращений температуры при переходе в смежную форму равновесия приводит к необходимости решения задачи на базе дважды связанной модели термомеханического поведения СПФ.

Аналитическое решение задачи о потере устойчивости однородным стержнем из никелида титана при прямом мартенситном фазовом превращении под действием напряжений было предложено А. А. Мовчаном и Л. Г. Сильченко в работах [138], [139], [140], [141], [142]. Были получены аналитические выражения для критической силы потери устойчивости стержня в долях Эйлеровой силы, находящиеся в хорошем соответствии с экспериментальными данными [130], [131].

В аналогичной постановке задачи было получено и решение для случая обратного мартенситного превращения в стержне при действии температурного поля и наложенных на стержень кинематических связях [143], а также в их отсутствии. Было показано, что критические силы, значительно меньшие эйлерова значения полностью мартенситного стержня, наблюдаются не только при прямом превращении, в процессе которого модуль материала снижается, но и в случае обратного превращения, сопровождающегося увеличением модуля [144], [145], [146]. Данные результаты также оказались в соответствии с экспериментальными данными. Таким образом, было показано, что основной причиной потери устойчивости элементами с памятью формы является само по себе фазовое превраще-

ние, происходящее при нагреве или охлаждении и при действии сжимающих напряжений.

Помимо фазовых превращений, существенное влияние на устойчивость систем с памятью формы оказывают и структурные превращения в состоянии мартенситной неупругости. Аналитическое решение для сжимаемой стойки было получено Л. Г. Сильченко в [147], а впоследствии – для заземленного стержня в [148], [149]; теоретические результаты также показали хорошее соответствие экспериментальным данным [149], [150]. Учет влияния структурного превращения необходим, вообще говоря, и в случае потери устойчивости стержнем в режиме прямого термоупругого мартенситного превращения [151], [152].

Перечисленные концепции описания процесса потери устойчивости тонкостенными элементами из сплава с памятью формы были применены и к более сложным объектам – пластинам, претерпевающим прямое мартенситное превращение [153], [154], [152] либо обратное мартенситное превращение [145], [155], стержням при сложном напряженном состоянии – комбинации растяжения-сжатия и кручения [156], криволинейным панелям и оболочкам [157], [158]. Все решения, полученные в цитируемых работах, были основаны на бифуркационном подходе к исследованию статической устойчивости деформируемых систем, и на применении редуцированных моделей – нуль-мерных (стойка Шенли), одномерных (стержень) и двумерных (пластины, цилиндрическая оболочка). Решения задач о потере устойчивости и закритическом состоянии систем с памятью формы требуют, очевидно, применения численных методов нелинейной механики деформируемого твердого тела с учетом нелинейности как кинематики при перемене форм равновесного состояния, так и, естественно, физических соотношений. Такие решения единичны и посвящены либо устойчивости сверхупругих стержней [159], [160], [161], [162], либо устойчивости стержней в состоянии мартенситной неупругости [163]. Особый интерес представляет решение перечисленных задач в трехмерной постановке с исследованием движения границы раздела фаз в процессе выпучивания. Такая задача, очевидно, является актуальной.

2. МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ И ЕЕ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

2.1. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РАВНОАТОМНОГО НИКЕЛИДА ТИТАНА И ЕЕ АДАПТАЦИЯ К КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫМ ПРОГРАММНЫМ КОМПЛЕКСАМ

2.1.1. Модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы.

Рассматривается модель нелинейного деформирования материалов с памятью формы с возможностью прямого и обратного структурного перехода при аустенитном и мартенситном превращении [164]. Система определяющих соотношений состоит из нескольких групп уравнений.

Первая группа определяет процессы фазовых переходов и сводится к следующему соотношению для объемной доли q мартенситной фазы в материале в зависимости от температуры T и напряженно-деформированного состояния в заданной точке:

$$q = \frac{1 - \cos(\pi t)}{2}; \quad 0 < t < 1; \quad q = 0: \quad t \leq 0; \quad q = 1: \quad t \geq 1, \quad (2.1)$$

где t – безразмерный вспомогательный параметр, определяемый текущей температурой T , температурой начала M_s , окончания M_f прямого мартенситного превращения, температурой начала A_s , окончания A_f обратного мартенситного превращения, а также первым и вторым инвариантом тензора напряжений.

Для прямого превращения

$$t = \frac{M_s - T_\sigma}{M_s - M_f}, \quad (2.2)$$

для обратного превращения –

$$t = 1 - \frac{A_s - T_\sigma}{A_s - A_f}, \quad (2.3)$$

где T_σ обозначает параметр, имеющий смысл приведенной температуры с учетом напряженно-деформированного состояния в заданной точке:

$$T_\sigma = T - \frac{\omega_{ij} \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \theta \varepsilon_0}{\Delta S}. \quad (2.4)$$

Здесь

$$Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_i^2}{6} \left(\frac{1}{G_M} - \frac{1}{G_A} \right) + \frac{\theta^2}{6} \left(\frac{1}{3K_M} - \frac{1}{3K_A} \right); \quad \omega_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^{(2)'}}{q} \quad (2.5)$$

σ_i и θ – соответственно второй и первый инвариант тензора напряжений (интенсивность напряжений и давление в точке), σ'_{ij} – девиатор напряжений, $\varepsilon_{ij}^{(2)'}$ – девиатор структурно-фазовой деформации; G_M , G_A – модуль сдвига материала с памятью формы соответственно в мартенситном и аустенитном состоянии, K_M , K_A – модуль сдвига материала с памятью формы в мартенситном и аустенитном состоянии, ΔS – разница объемных плотностей энтропии аустенита и мартенсита при отсчетной температуре, ε_0 – линейная деформация объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения (см. [164]).

Вторая группа уравнений определяет процесс деформирования сплава с памятью формы:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)'} + \varepsilon_0 \delta_{ij}. \quad (2.6)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ – упругие деформации материала, определяемые жесткостью тела и температурными деформациями в рамках линейной теории упругости:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{3K - 2G}{9K} \theta \delta_{ij} \right) + \alpha T \delta_{ij}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}; \quad \frac{1}{K} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}; \quad \alpha = q\alpha_M + (1-q)\alpha_A, \quad (2.8)$$

где α_M , α_A – коэффициент температурного расширения материала с памятью формы в мартенситном и аустенитном состоянии.

Структурно-фазовые деформации:

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij}^{(2)'} + \varepsilon_0 \delta_{ij}$$

определяются в дифференциальной форме через элементарные приращения на каждом шаге прямого или обратного превращения:

$$d\varepsilon_{ij}^{(2)'} = \omega_{ij} dq + \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q \psi_2(\sigma_i) d\sigma_i; \quad \omega_{ij}|_{q=0} = \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \phi_1(\sigma_i), \quad (2.9)$$

где ρ_D – максимальная интенсивность деформаций прямого превращения (см. [164]), $\phi_1(\sigma_i)$ – функция распределения микронапряжений в представительном объеме сплава с памятью формы, $\psi_2 = \phi_1'$ – плотность распределения микронапряжений. При обратном превращении второе слагаемое в первом уравнении (2.9) полагается равным нулю, т.е. $d\varepsilon_{ij}^{(2)'} = \omega_{ij} dq$.

2.1.2. Инкрементальная форма записи уравнений модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы.

Система определяющих соотношений (1.1) – (1.9) в рассматриваемой модели нелинейного деформирования материалов с памятью формы записана частично (см. уравнение (1.9)) в дифференциальной форме.

Имеет смысл получить в такой же форме все остальные основные величины: объемную долю мартенсита q , тензор полных деформаций ε_{ij} и тензор структурно-фазовых трансформаций ω_{ij} . Тогда на основе этих соотношений можно будет численно реализовать конечно-элементную модель деформирования материалов с памятью формы, и, в частности, вычислить касательную матрицу жесткости элементов с памятью формы [164].

Дифференцируя (2.1) с учетом (2.2), (2.3), получаем:

$$dq = \pi \sqrt{q(1-q)} dt, \quad (2.10)$$

где для прямого превращения

$$dt = -\frac{dT_\sigma}{M_s - M_f}, \quad (2.11)$$

а для обратного превращения –

$$dt = \frac{dT_\sigma}{A_s - A_f}. \quad (2.12)$$

Дифференцируя (2.4) с учетом формулы (2.5) и соотношений для интенсивности девиатора напряжений:

$$\sigma_i^2 = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}; \quad d\sigma_i = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}}{\sigma_i},$$

получаем:

$$dT_\sigma = dT - \frac{d(\omega_{ij} \sigma'_{ij})}{\Delta S} - \frac{1}{\Delta S} \left[\frac{\sigma_i d\sigma_i}{3} \left(\frac{1}{G_M} - \frac{1}{G_A} \right) + \frac{\theta d\theta}{3} \left(\frac{1}{3K_M} - \frac{1}{3K_A} \right) + \varepsilon_0 d\theta \right].$$

Дифференцируем по частям второе слагаемое в правой части равенства, и при этом учитываем формулу (2.9) и соотношение $\omega_{ij} = q^{-1} \varepsilon_{ij}^{(2)}$:

$$d(\omega_{ij} \sigma'_{ij}) = \omega_{ij} d\sigma'_{ij} + \sigma'_{ij} d\omega_{ij} = \omega_{ij} d\sigma'_{ij} + \sigma'_{ij} \left(\frac{d\varepsilon_{ij}^{(2)}}{q} - \frac{\omega_{ij} dq}{q} \right) = \omega_{ij} d\sigma'_{ij} + \rho_D \psi_2(\sigma_i) \sigma_i d\sigma_i.$$

Таким образом, мы получили дифференциальную связь между приведенной температурой и напряжениями; для прямого превращения:

$$dT_\sigma = dT - \frac{\omega_{ij}}{\Delta S} d\sigma'_{ij} - \frac{1}{\Delta S} \left[\rho_D \psi_2(\sigma_i) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{G_M} - \frac{1}{G_A} \right) \right] \sigma_i d\sigma_i - \frac{1}{\Delta S} \left[\varepsilon_0 + \frac{\theta}{3} \left(\frac{1}{3K_M} - \frac{1}{3K_A} \right) \right] d\theta; \quad (2.13)$$

для обратного превращения слагаемое $\rho_D \psi_2(\sigma_i)$ в формуле (2.13) полагается равным нулю.

Аналогично получаем дифференциал структурно-фазовых трансформаций; для прямого превращения

$$d\omega_{ij} = \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \psi_2(\sigma_i) d\sigma_i, \quad (2.14)$$

а для обратного превращения $d\omega_{ij} = 0$. Т.е. в рассматриваемой модели происходит накопление структурно-фазовых деформаций по сложному нелинейному закону (2.14) с учетом напряженно-деформированного состояния материала на этапе прямого превращения, а затем на этапе обратного превращения эти деформации падают до нуля по простому закону – пропорционально объемной доле мартенсита q :

$$\varepsilon_{ij}^{(2)'} = q \omega_{ij}; \quad \omega_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(2)(\max)'} = \text{const}; \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (2.15)$$

В качестве начального условия для дифференциальных соотношений (2.14) рассматривается соотношение

$$\omega_{ij} \Big|_{q=0} = \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \phi_1(\sigma_i); \quad (2.16)$$

в качестве функции распределения микронапряжений в представительном объеме сплава с памятью формы рассматривается функция ошибок:

$$\phi_1(\sigma_i) = \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right); \quad \psi_2(\sigma_i) = \frac{2 \exp\left[-(\sigma_i/\sigma_0)^2\right]}{\sigma_0 \sqrt{\pi}}. \quad (2.17)$$

Собирая формулы (2.10) – (2.13) воедино и раскрывая $d\sigma_i$, получаем выражение для дифференциального приращения объемной доли мартенсита через приращение напряжений и температуры.

Для прямого превращения из аустенита в мартенсит:

$$dq = \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{(M_s - M_f) \Delta S} \left\{ \left[\omega_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2} \left(3\rho_D \psi_2(\sigma_i) + \frac{1}{G_M} - \frac{1}{G_A} \right) \right] d\sigma'_{ij} + \left[\varepsilon_0 + \frac{\theta}{3} \left(\frac{1}{3K_M} - \frac{1}{3K_A} \right) \right] d\theta \right\} - \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{M_s - M_f} dT; \quad (2.18)$$

для обратного превращения из мартенсита в аустенит:

$$dq = -\frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{(A_s - A_f) \Delta S} \left\{ \left[\omega_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2} \left(\frac{1}{G_M} - \frac{1}{G_A} \right) \right] d\sigma'_{ij} + \left[\varepsilon_0 + \frac{\theta}{3} \left(\frac{1}{3K_M} - \frac{1}{3K_A} \right) \right] d\theta \right\} + \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{A_s - A_f} dT. \quad (2.19)$$

Дифференциал общей деформации с учетом упругой составляющей и температурных деформаций имеет следующий вид:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{(1)} + d\varepsilon_{ij}^{(2)'} + \delta_{ij} \varepsilon_0 dq, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{\delta_{ij} \theta}{9K} + \alpha T.$$

Здесь механические модули и коэффициент температурного расширения зависят от объемной доли мартенсита:

$$\frac{1}{G} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}; \quad \frac{1}{K} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}; \quad \alpha = q\alpha_M + (1-q)\alpha_A.,$$

Выполняя дифференцирование с учетом зависимости от q и, учитывая формулу (2.9) для $d\varepsilon_{ij}^{(2)'}$, получаем следующий результат:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{\delta_{ij}d\theta}{9K} + \alpha dT + \frac{3}{2}\rho_D \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q\psi_2(\sigma_i) d\sigma_i + \left[\omega_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2} \left(\frac{1}{G_M} - \frac{1}{G_A} \right) + \delta_{ij} \left(\varepsilon_0 + \frac{\theta}{3} \left(\frac{1}{3K_M} - \frac{1}{3K_A} \right) + (\alpha_M - \alpha_A)T \right) \right] dq. \quad (2.20)$$

2.1.3. Вычисление касательной матрицы податливости.

На основе формул (2.18) – (2.20) можем вычислить касательную матрицу податливости, связывающую приращение деформаций и приращение напряжений, и тензор температурных расширений на этапе прямого и обратного превращений. Для этого подставим в (2.20) приращение dq , выраженное в (2.18), (2.19) через дифференциал температуры и тензора напряжений, получим для прямого превращения:

$$R_{ijkl} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\sigma_{kl}} = R_{ijkl}^{(0)} + \frac{\pi\sqrt{q(1-q)}}{(M_s - M_f)\Delta S} \left[\hat{\omega}_{ij} + \delta_{ij}(\alpha_M - \alpha_A)T \right] \left[\hat{\omega}_{kl} + \frac{3}{2}\rho_D\psi_2(q)\sigma'_{kl} \right] + \frac{9}{4}\rho_D q\psi_2(q) \frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{\sigma_i^2}; \quad (2.21)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dT} = \alpha\delta_{ij} - \frac{\pi\sqrt{q(1-q)}}{M_s - M_f} \left[\hat{\omega}_{ij} + \delta_{ij}(\alpha_M - \alpha_A)T \right], \quad (2.22)$$

где $R_{ijkl}^{(0)}$ – упругая часть матрицы податливости,

$$R_{ijkl}^{(0)} = \frac{1}{2G} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{3K-2G}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl} \right), \quad (2.23)$$

$$\hat{\omega}_{ij} = \omega_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2} \left(\frac{1}{G_M} - \frac{1}{G_A} \right) + \delta_{ij} \left(\varepsilon_0 + \frac{\theta}{3} \left(\frac{1}{3K_M} - \frac{1}{3K_A} \right) \right). \quad (2.24)$$

Для обратного превращения:

$$R_{ijkl} = R_{ijkl}^{(0)} - \frac{\pi\sqrt{q(1-q)}}{(A_s - A_f)\Delta S} \left[\hat{\omega}_{ij} + \delta_{ij}(\alpha_M - \alpha_A)T \right] \hat{\omega}_{kl}, \quad (2.25)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \frac{\pi\sqrt{q(1-q)}}{A_s - A_f} \left[\hat{\omega}_{ij} + \delta_{ij}(\alpha_M - \alpha_A)T \right]. \quad (2.26)$$

Общая формула приращений для деформаций:

$$d\varepsilon_{ij} = R_{ijkl} d\sigma_{kl} + \alpha_{ij} dT. \quad (2.27)$$

Обращая матрицу податливости, получаем касательную матрицу жесткости, необходимую для реализации конечно-элементной схемы нелинейного деформирования материалов с памятью формы:

$$C_{ijkl} = R_{ijkl}^{-1}. \quad (2.28)$$

Общая формула приращений для напряжений следует из (2.27):

$$d\sigma_{kl} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij} dT). \quad (2.29)$$

2.2. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ.

Явная конструкция касательной матрицы жесткости позволяет реализовать в программном комплексе Abaqus описанную выше модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы. Эта модель была реализована в виде пользовательского материала по технологии UMAT, что предполагает реализацию всех алгоритмов вычисления касательной матрицы на языке программирования Fortran-90.

Критерием фазовых превращений является условие $0 < t < 1$, где t вычисляется по формуле (2.2) для прямого превращения и по формуле (2.3) для обратного. После определения t объемная доля мартенсита вычисляется по прямой явной формуле (2.1). Предполагается, что переход к обратному превращению может происходить только после полного завершения прямого превращения (при условии $q=1$), соответственно переход к прямому превращению может происходить только после полного завершения обратного превращения (при условии $q=0$).

Структурно-фазовые деформации $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ на этапе прямого и обратного превращения вычисляются через тензор ω_{ij} структурно-фазовых трансформаций ω_{ij} по формуле

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = q(\omega_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_0). \quad (2.30)$$

В свою очередь тензор ω_{ij} вычисляется на этапе прямого превращения инкрементально по формуле (2.14) с начальным условием (2.16), а на этапе обратного превращения он постоянен ($d\omega_{ij} = 0$).

Приращение напряжений на каждом шаге итераций в программном комплексе Abaqus вычисляется по формуле (2.29), матрица жесткости C_{ijkl} и тензор температурных расширений α_{ij} вычисляются по формуле (2.21) – (2.26), (2.28). Алгоритм взаимодействия пользовательской процедуры UMAT с программным комплексом Abaqus представлен в виде блок-схемы на Рисунке 2.1.

Тело пользовательской подпрограммы представлено в приложении А. Проведена государственная регистрация программы в государственном Реестре программ для ЭВМ (Свидетельство №2015615302 от 15 мая 2015 г.).

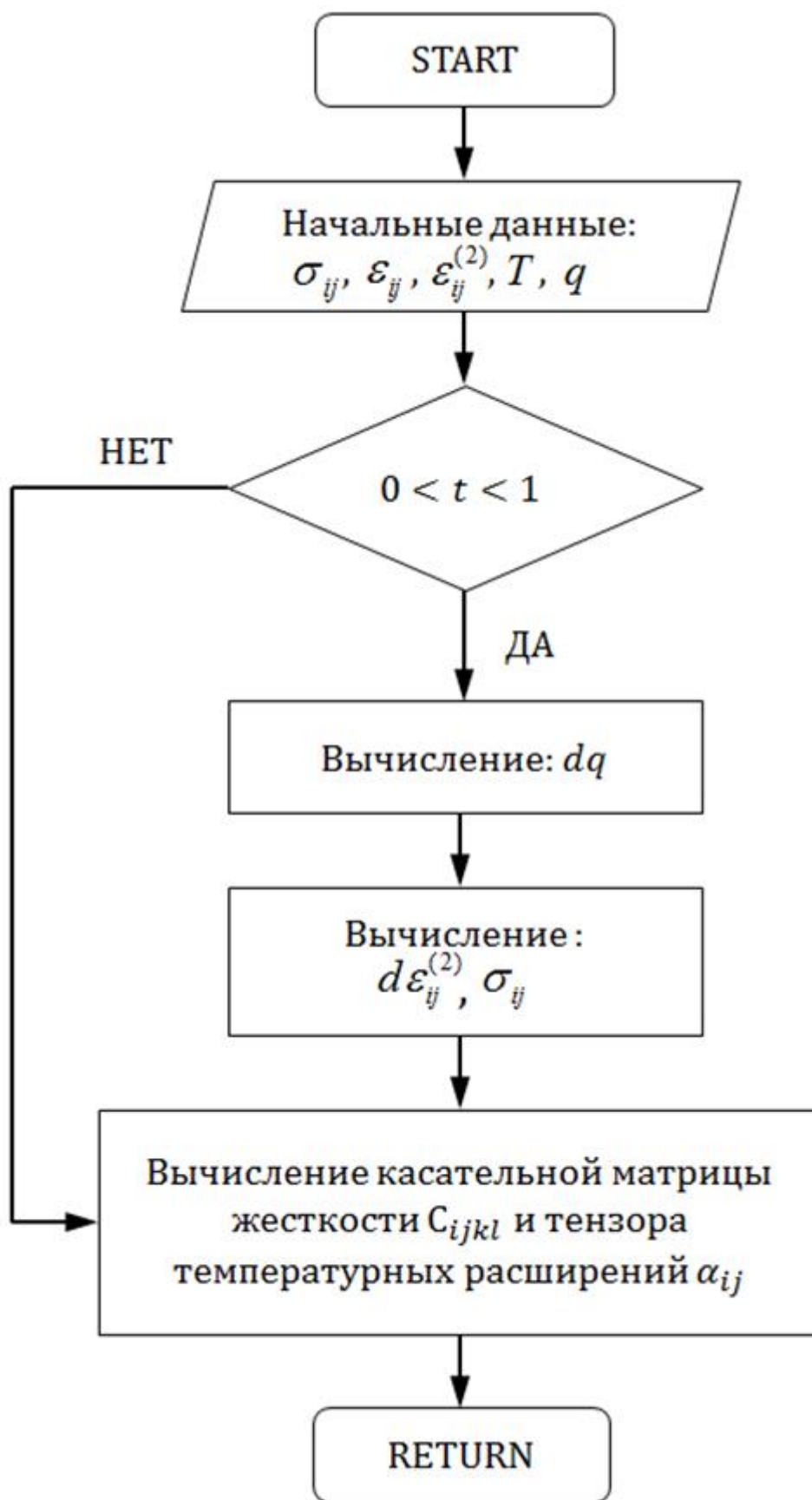


Рисунок 2.1 – Блок – схема программы

2.3. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ

Проведено тестирование работоспособности программной реализации термомеханической модели поведения СПФ [165]. Модельные задачи описывают основные режимы поведения СПФ при различных термосиловых воздействиях: сверхупругость (СУ), эффект пластичности превращения (ЭПП), эффект памяти формы (ЭПП). Рассмотрены три модельные задачи:

1. Реализация силового механизма мартенситных превращений ($T_0 > A_f$)
2. Смешанный механизм мартенситных превращений ($A_s < T_0 < A_f$);
3. Температурный механизм фазовых превращений

Модельные задачи отличаются друг от друга только величиной действующей механической нагрузки и видом температурного воздействия. Конечно-элементная модель, способ приложения механической нагрузки и граничные условия одинаковы для всех расчётных случаев.

Проведём описание схожих положений для всех модельных задач. Для возможности адекватной интерпретации полученных результатов расчёта, была выбрана максимально простая геометрия модели – куб со стороной 1 см (рис. 2.2).

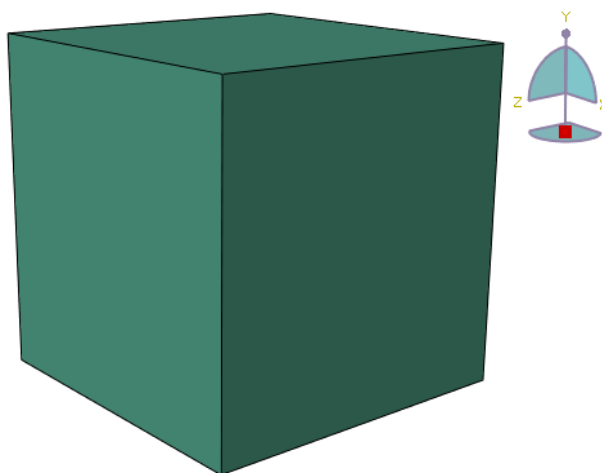


Рисунок 2.2 – Геометрическая модель

Конечно-элементная модель состоит из двух объемных восьмиузловых элементов с редуцированной схемой интегрирования (C3D8R).

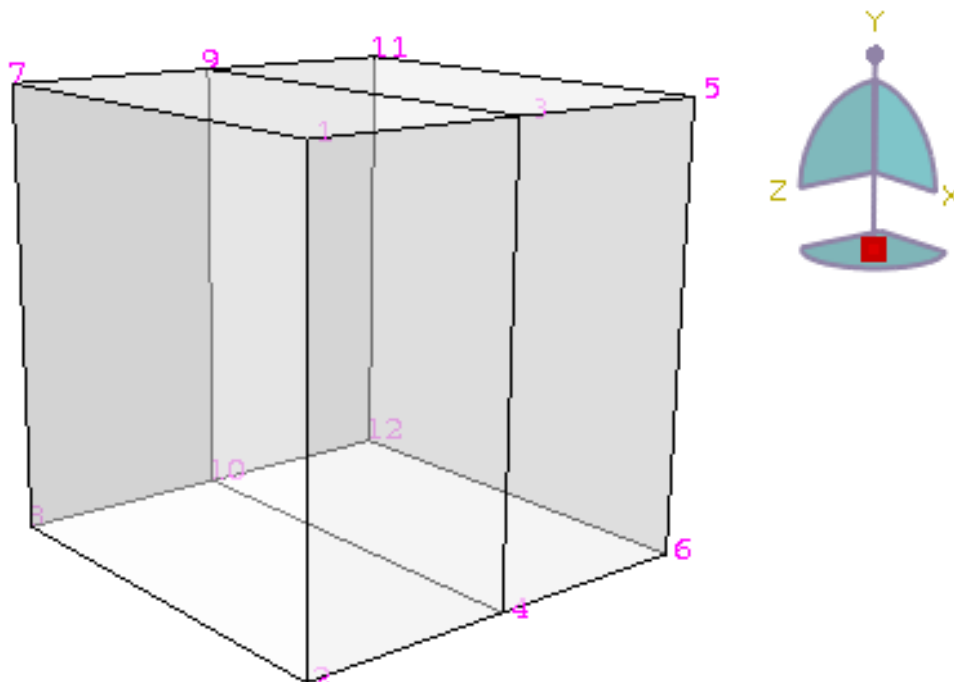


Рисунок 2.3 – Конечно-элементная модель

К узлам 1, 2, 7, 8 прикладываются сосредоточенная сила F_z . Её величина для каждой из модельных задач будет приведена отдельно.

Кинематические граничные условия:

1. На узлы 5, 6, 11, 12 накладываются ограничения по перемещениям в направлении оси Oz.
2. На узел 6 накладывается ограничение по перемещениям в направлении осей Ox и Oy.
3. Для исключения возможности вращения модели относительно оси Oz, на узел 5 накладывается ограничение в направлении оси Ox.

Материал модельных задач – равноатомный никелид титана ($Ni_{50}Ti_{50}$). Механические характеристики материала представлены в таблице 2.1.

Общий вид модели с приложенными граничными условиями и нагрузками представлен на рисунке 2.4.

Таблица 2.1 - Значения определяющих констант материала

№	Обозначение	Описание	Значение
1	E_A	Модуль Юнга аустенитной фазы	84 ГПа
2	ν	Коэффициент Пуассона	0.3
3	E_M	Модуль Юнга мартенситной фазы	28 ГПа
4	ε_{\max}	Максимальная фазово-структурная деформация	0.05
5	M_s^o	Температура начала прямого превращения	293 К
6	M_f^o	Температура окончания прямого превращения	273 К
7	A_s^o	Температура начала обратного превращения	320 К
8	A_f^o	Температура окончания обратного превращения	340 К

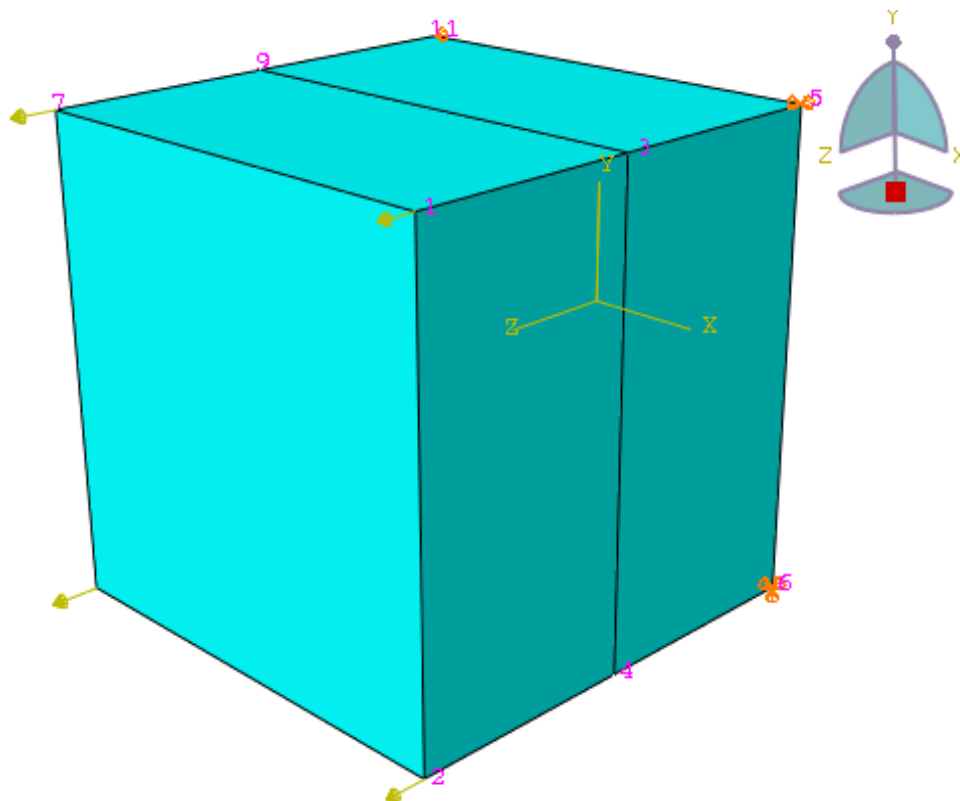


Рисунок 2.4 – Нагрузка и граничные условия

2.3.1. Тестирование силового механизма мартенситных превращений

Для реализации сверхупругого поведения СПФ необходимо выполнение следующих условий:

1. Начальная фаза сплава – высокотемпературный аустенит ($T_0 > A_f$);
2. Уровень механических напряжений в модели должен обеспечивать прохождение прямого и обратного мартенситного превращения.

Сплав находится в начальном аустенитном состоянии и подвергается одноосному растяжению до полной реализации прямого превращения. Далее происходит разгрузка модели, сопровождаемая обратным превращением. Температура модели постоянна: $T_0 = 350\text{ K}$. На начальном этапе происходит линейный рост нагрузки до максимального значения $F_z = 10\text{ кН}$, после чего происходит её падение до нуля. Вид амплитуды действия нагрузки представлен на рисунке 2.5:

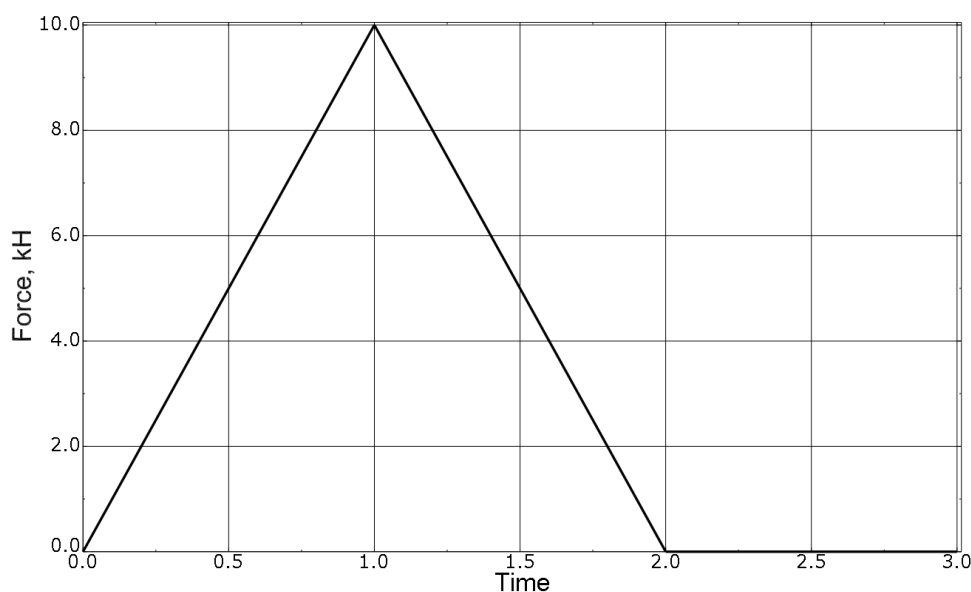


Рисунок 2.5 – Амплитуда действия нагрузки

На рисунке 2.6 представлена диаграмма деформирования СПФ в изотермическом режиме. На начальном этапе происходит упругое деформирование сплава с аустенитным модулем Юнга E_A . После достижения механических напряжений значения $\sigma \approx 220\text{ МПа}$, происходит нелинейный рост деформаций. Исходя из зависимости $q(\sigma)$ (рис. 2.7), эта точка является началом прямого мартенситного

превращения, обусловленного механическими напряжениями – реализация силового механизма. После завершения прямого превращения сплав полностью перешёл в мартенситную фазу и деформирование продолжается по линейному закону с мартенситным модулем Юнга E_M . При разгрузке, начиная с $\sigma \approx 115 \text{ МПа}$, происходит обратное мартенситное превращение с возвращением накопленной деформации.

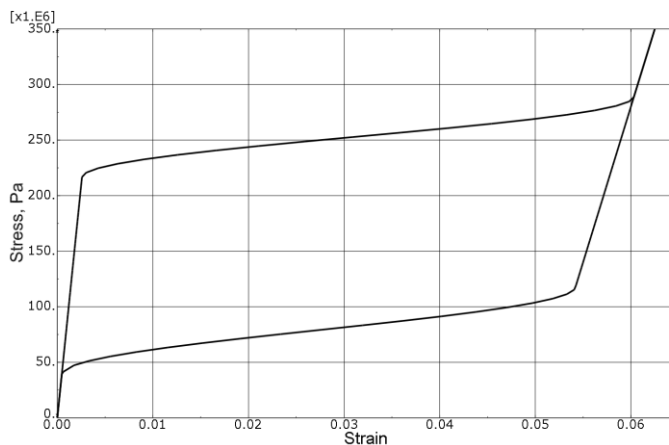


Рисунок 2.6 – Диаграмма $\sigma - \varepsilon$

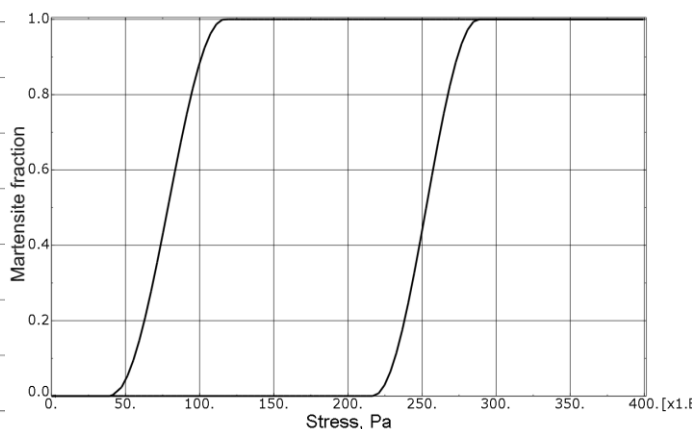


Рисунок 2.7 – Изменение объемной доли мартенсита

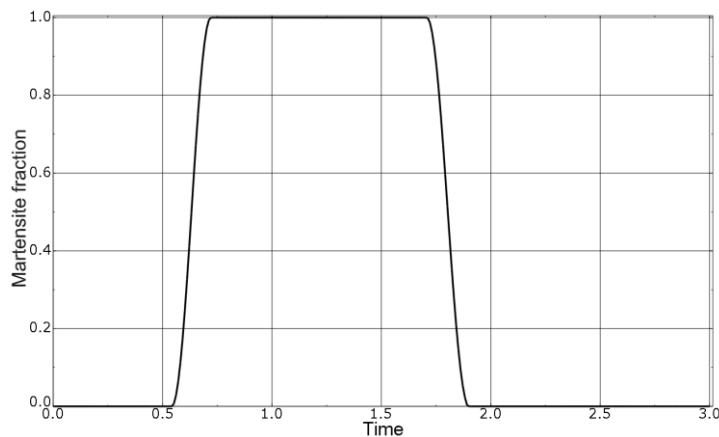


Рисунок 2.8 – Изменение объемной доли мартенсита

Принцип работы силового механизма мартенситных превращений можно объяснить на основе изучения фазовых диаграмм сплава. На начальном этапе расчета напряжения в модели равны нулю и фазовая диаграмма имеет следующий вид (рис. 2.9):

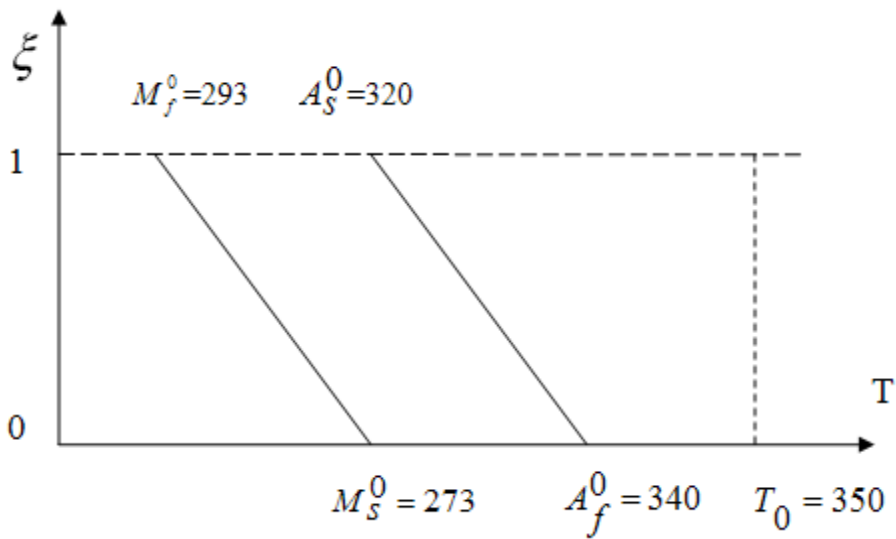


Рисунок 2.9 – Начальное состояние фазовой диаграммы

При росте напряжений диаграмма фазовых переходов начинает смещаться вправо. Диаграмма, изображенная на рисунке 2.10, соответствует началу прямого мартенситного превращения. С дальнейшим ростом напряжений, диаграмма ещё больше смещается вправо, тем самым в модели происходит увеличение доли мартенситной фазы. Под A_s^σ , M_s^σ , A_f^σ , M_f^σ здесь нужно понимать, температуры фазовых переходов с учетом действующих напряжений.

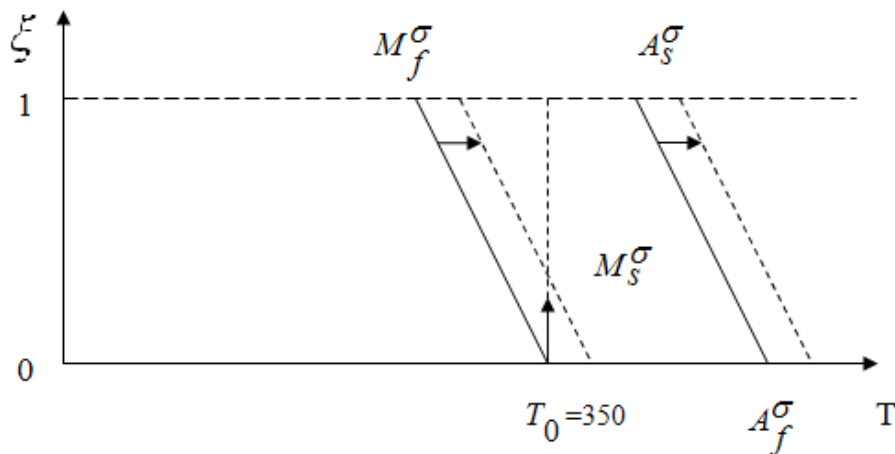


Рисунок 2.10 – Диаграмма фазовых переходов при росте напряжений

После окончания прямого превращения начинается спад механических напряжений, следовательно, диаграмма фазовых переходов будет смещаться влево.

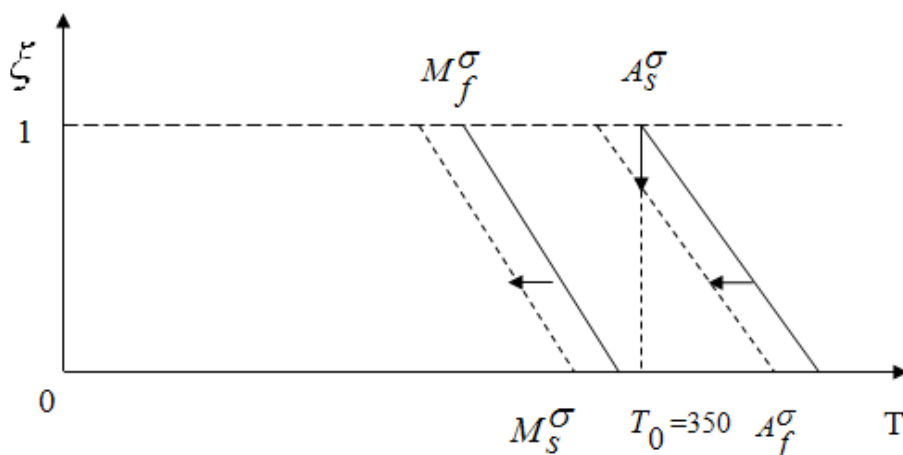


Рисунок 2.11 – Диаграмма фазовых переходов при падении напряжений

Диаграмма, изображенная на Рисунке 2.11, соответствует началу обратного превращения. С дальнейшим падением напряжений, диаграмма ещё больше смещается влево, тем самым уменьшается объемная доля мартенсита в модели. При падении напряжений до нуля диаграмма приходит в исходное состояние (Рисунок 2.9).

2.3.2 Тестирование смешанного механизма мартенситных превращений

В данной модельной задаче проводится тестирование смешанного механизма мартенситных превращений. В начальном состоянии модель находится в аустенитной фазе и подвергается одноосному растяжению до полной реализации прямого превращения. Температура модели $T_0 = 330\text{ K}$. После полной механической разгрузки, проводится нагрев модели до температуры $T = 350\text{ K}$. При выбранном виде термосилового воздействия прямое превращение будет протекать за счёт действующих в модели напряжений, а обратное происходить в два этапа:

1. Начальный этап обратного превращения обусловлен снятием действующей на модель нагрузки. Так как текущая температура модели $A_s < T_0 < A_f$, материал не может только за счёт снятия напряжений пол-

ностью перейти в аустенитную фазу. В модели образуется устойчивая смешанная фаза мартенсит – аустенит;

2. Для завершения обратного фазового превращения, проводится нагрев модели $T_0 > A_f$ – температурный механизм мартенситных превращений.

Для подобного режима нагружения, характер диаграммы деформирования материала должен иметь вид, представленный на рисунке 2.12. Характер изменения внешней нагрузки и температуры модели показан на рисунке 2.13.

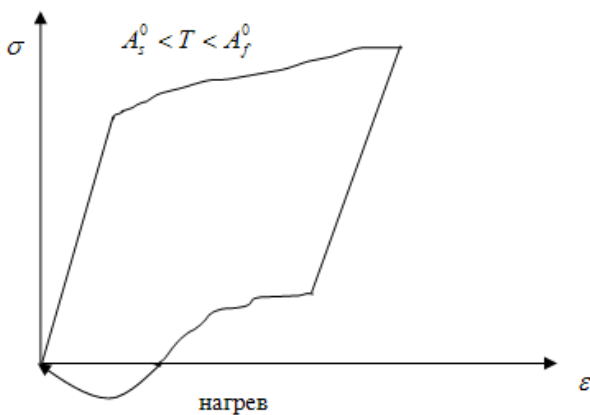


Рисунок 2.12 – Диаграмма $\sigma - \varepsilon$

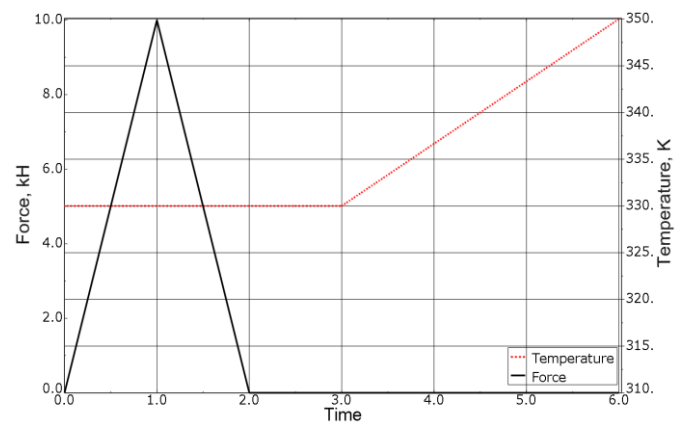


Рисунок 2.13 – Характер изменения действующих нагрузок

Прямое мартенситное превращение происходит по аналогии с первой модельной задачей – реализуется силовой механизм мартенситного превращения. Наибольший интерес представляет обратное мартенситное превращение. После полной механической разгрузки $\sigma = 0$, в модели наблюдаются остаточные деформации (рис. 2.14). Из анализа графиков (рис. 2.14, 2.16) следует, что падение напряжений не привело к завершению обратного превращения – модель находится в устойчивой смешанной фазе с $q = 0.5$. Возвращение накопленной деформации и полное завершение обратного превращения происходит при нагреве модели.

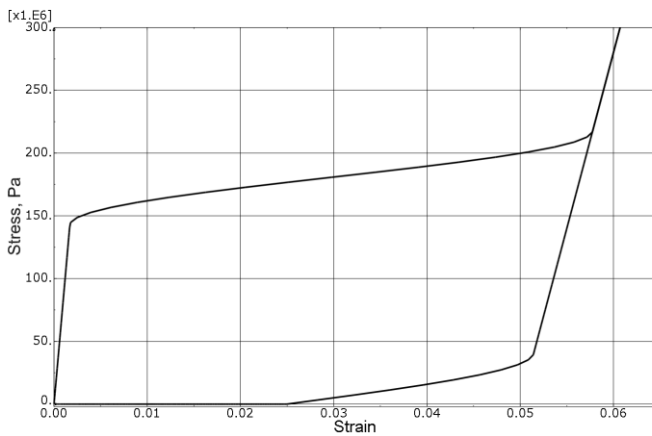


Рисунок 2.14 – Диаграмма $\sigma - \varepsilon$

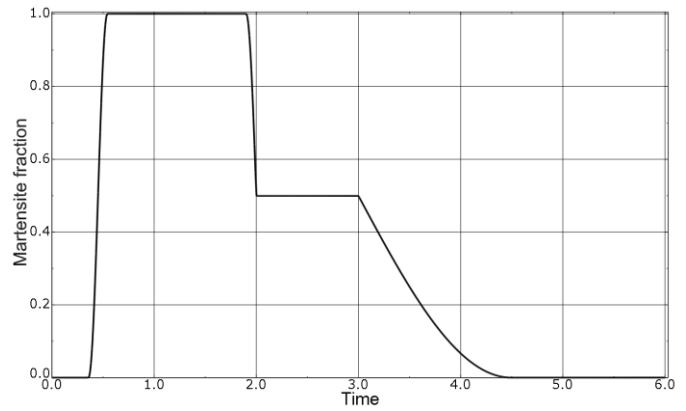


Рисунок 2.15 – Изменение объемной доли мартенсита

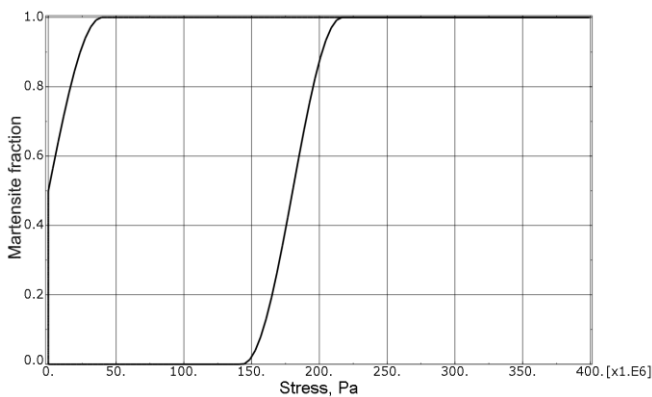


Рисунок 2.16 – Зависимость объемной доли мартенсита от напряжений

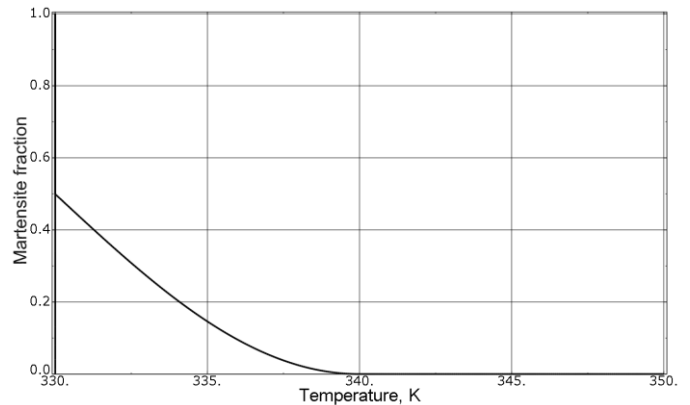


Рисунок 2.17 – Зависимость объемной доли мартенсита от температуры

Начальное состояние диаграммы фазовых переходов представлено на рисунке 2.18. Из анализа положения T_0 очевидно, что прямое фазовое превращение будет протекать по общим принципам сверхупругого поведения, т.е. только за счёт роста механических напряжений (смещение диаграммы вправо). Однако положение T_0 не обеспечит полное завершение обратного превращения только за счет падения механических напряжений (смещение диаграммы влево). Таким образом, для завершения обратного превращения необходимо провести нагрев модели до $T_0 > A_f$.

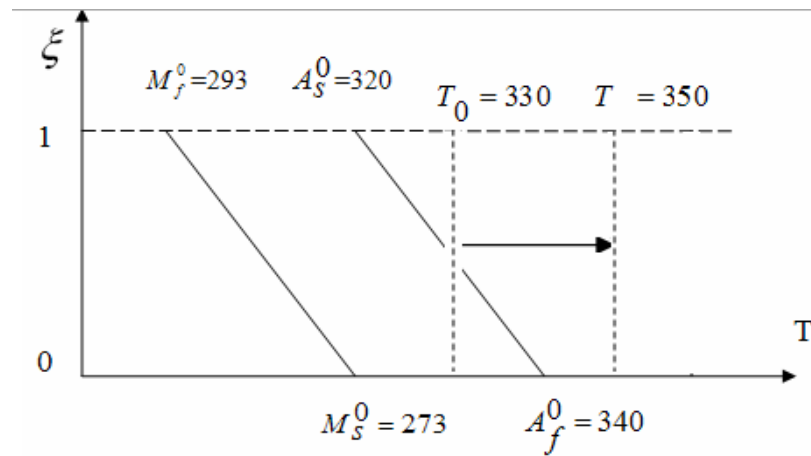


Рисунок 2.18 – Диаграмма фазовых переходов при нагреве

2.3.3. Тестирование температурного механизма мартенситных превращений

Рассматривается температурный механизм мартенситных превращений. В высокотемпературной ($T_0 > A_f$) аустенитной фазе проводится преднапряжение модели растягивающей силой $F_z = 2кН$. Уровень механических напряжений не приводит к прямому мартенситному превращению по режиму сверхупругости. Нагрузка сохраняется на всем протяжении расчета.

Характер изменения температуры модели представлен на рисунке 2.19. После преднапряжения проводится охлаждение модели до температуры $T = 270 K$ ($T < M_f^\sigma$), затем нагрев модели до температуры $T = 350 K$ ($T > A_f^\sigma$).

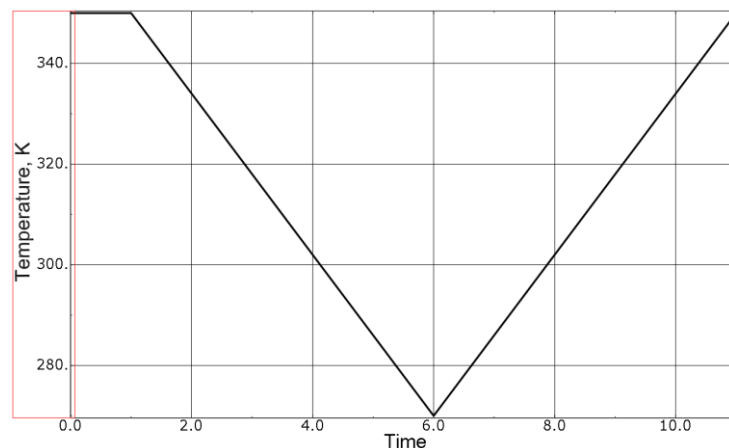


Рисунок 2.19 – Изменение температуры модели

Из графиков (рис. 2.20 – 2.23) видно, что прямое и обратное мартенситное превращение осуществляется только за счет изменения температуры модели – температурный механизм фазовых превращений. Началу прямого превращения соответствует температура $T \approx 302.9\text{ K}$. При этом происходит накопление фазово – структурной деформации вдоль линии действия напряжений – реализация эффекта пластичности превращения. Полное завершение прямого превращения происходит при $T \approx 283.6\text{ K}$.

При охлаждении, начиная с $T \approx 330.4\text{ K}$, происходит обратное превращение с возвращением ранее накопленной фазово – структурной деформации – реализация эффекта памяти формы.

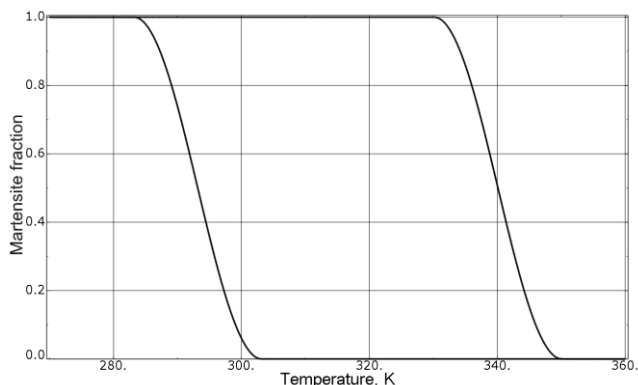


Рисунок 2.20 – Зависимость объемной доли мартенсита от температуры

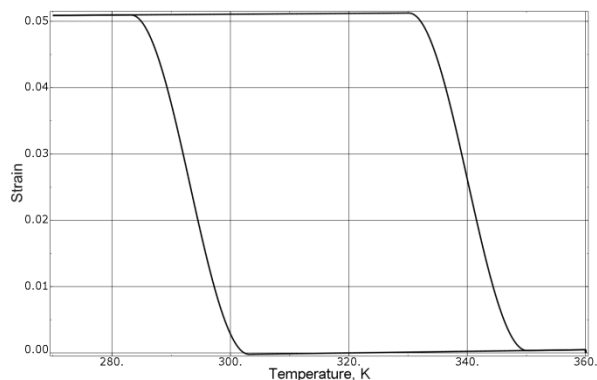


Рисунок 2.21 – Зависимость деформаций модели от температуры

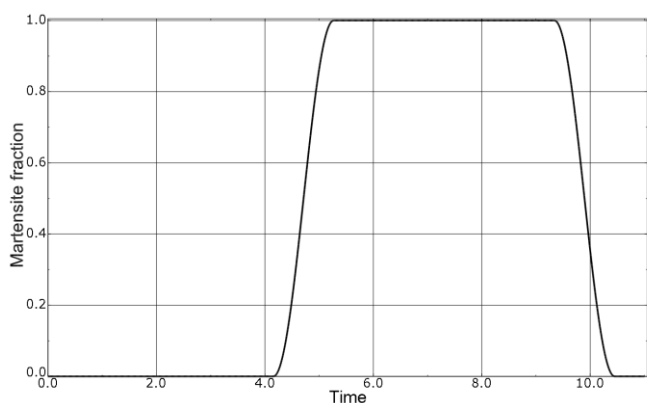


Рисунок 2.22 – Изменение объемной доли мартенсита

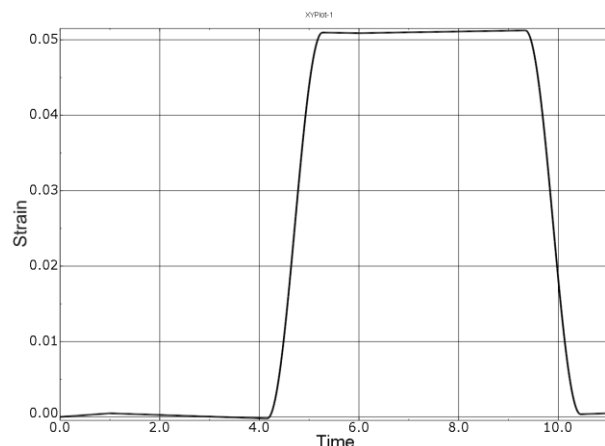


Рисунок 2.23 – Изменение полной деформации модели

Следует отметить, что несоответствие текущих температур начала\окончания мартенситных превращений табличным данным (табл. 2.1) объясняется наличием механических напряжений этапа преднагружения, которые оказывают влияние на критические температуры мартенситных превращений.

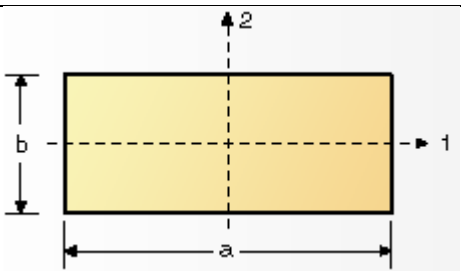
Характер графиков, полученных в рамках тестирования, полностью соответствует физическому представлению о поведении СПФ.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ИЗ СПЛАВОВ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ В РЕЖИМЕ ПРЯМОГО МАРТЕНСИТНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

В настоящей главе диссертации изложены результаты исследования выпучивания и закритического состояния стержня при осевом сжатии с начальным возмущением (погибь стержня) и прямом мартенситном превращении под действием равномерного температурного поля в процессе охлаждения. Решение в трехмерной постановке позволило описать распространение границы раздела фаз как по сечению, так и по длине стержня в процессе потери устойчивости прямолинейной формы равновесного состояния.

Рассматривается нитиноловый стержень прямоугольного сечения. Геометрические характеристики стержня представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Геометрические характеристики образца

Рабочая длина стержня L , мм	Сечение стержня	Осевые моменты инерции стержня, мм ⁴		
40		$J_1 = 1/6$	$J_2 = 2/3$	
15				
10				
7				
5				
	Размеры сечения, мм			
	$a = 2$	$b = 1$		

В таблице 3.2 представлены принятые физико – механические параметры материала стержня – равноатомный никелид титана типа ТН – 1.

Схема приложения внешней нагрузки и граничных условий представлена на рисунке 3.1. На нижнем торце стержня обеспечиваются условия шарнирного закрепления ($U_{x,y,z} = 0$), верхний торец также закреплен шарнирно с возможностью вертикального перемещения ($U_{x,z} = 0$). К верхнему торцу прикладывается фиксированная по величине и направлению сжимающая сила P .

Таблица 3.2 – Физико – механические характеристики материала ТН – 1

Обозначение	Описание	Значение
E_A	Модуль Юнга аустенитной фазы сплава	70 000 МПа
E_M	Модуль Юнга мартенситной фазы сплава	30 000 МПа
ν	Коэффициент Пуассона аустенитной и мартенситной фазы	0,3
ε_{max}	Максимальная фазово – структурная деформация	4 %
M_s^0	Температура начала прямого превращения в отсутствии механических напряжений	316.15 K
M_f^0	Температура окончания прямого превращения в отсутствии механических напряжений	295.15 K
K	Коэффициент, характеризующий вклад действующих механических напряжений в изменении температур начала/окончания прямого и обратного переходов	0,35 МПа/K

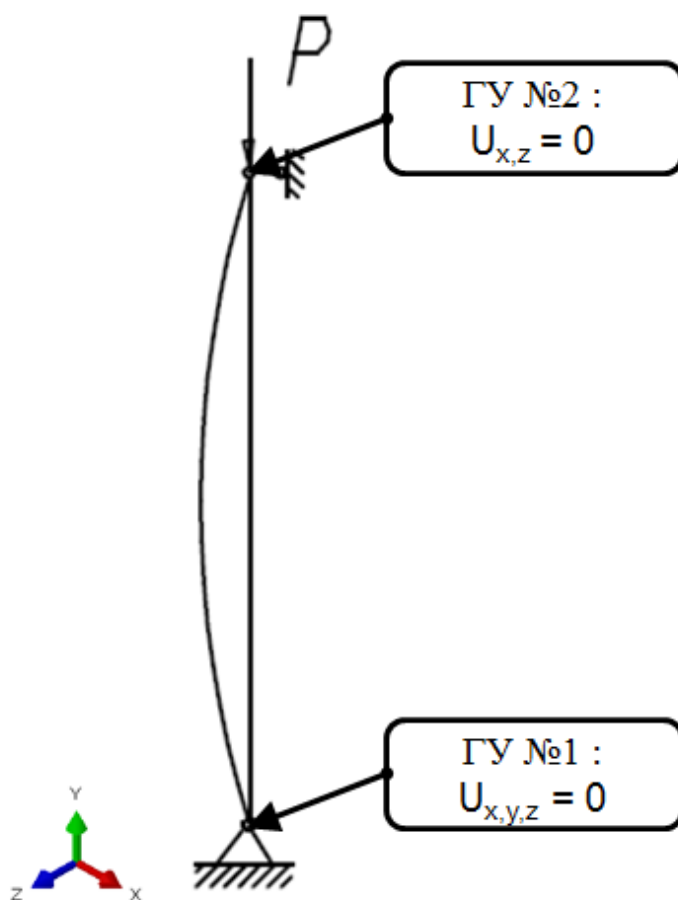


Рисунок 3.1 – Расчетная схема

3.1. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ПОЛНОСТЬЮ АУСТЕНИТНОМ И МАРТЕНСИТНОМ СОСТОЯНИЯХ

Отработка методики решения задач устойчивости в нелинейной, трехмерной постановке проводится на стержне ($L = 40 \text{ мм}$), находящемся в полностью аустенитной либо в полностью мартенситной фазе, то есть без учета мартенситных превращений.

Используя формулу Эйлера (3.1), были получены критические силы потери устойчивости для стержня, находящегося в полностью аустенитном и мартенситном состояниях.

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{мин}}}{L^2} \quad (3.1)$$

Таблица 3.3 – Аналитическое решение. Величина силы потери устойчивости

	Аустенитная фаза $P_A, \text{ Н}$	Мартенситная фаза сплава $P_M, \text{ Н}$
Критическая сила	71,97	30,84

3.1.1. Решение задачи в балочной постановке. Оценка уровня начальных геометрических несовершенств

Для верификации способов задания нагрузки и условий закрепления, проведено решение задачи устойчивости стержня в линеаризованной постановке на базе ПК SIMULIA Abaqus с использованием процедуры *Buckle.

Линеаризованная постановка используется для определения точки бифуркации и форм потери устойчивости с учетом выполнения предположения о линейном оклике системы. Таким образом, расчет проводится с использованием упругой модели материала в геометрически линейной постановке.

Область приложения и тип граничных условий, полностью совпадают с принятой расчетной схемой (рис. 3.1). Внешняя нагрузка представлена единичной сосредоточенной силой ($P = -1 \text{ Н}$), приложенной к верхнему узлу конечно – элементной (КЭ) модели стержня. Таким образом, критическая сила потери устойчи-

ности будет равна первому собственному значению системы, полученному в расчете.

Проведена аппроксимация геометрической модели стержня балочными конечными элементами типа B23. Плотность разбиения – 10 КЭ по длине стержня.

Результаты, полученные в рамках линеаризованной постановки, представлены на рисунке 3.2 и сведены в таблицу 3.4.

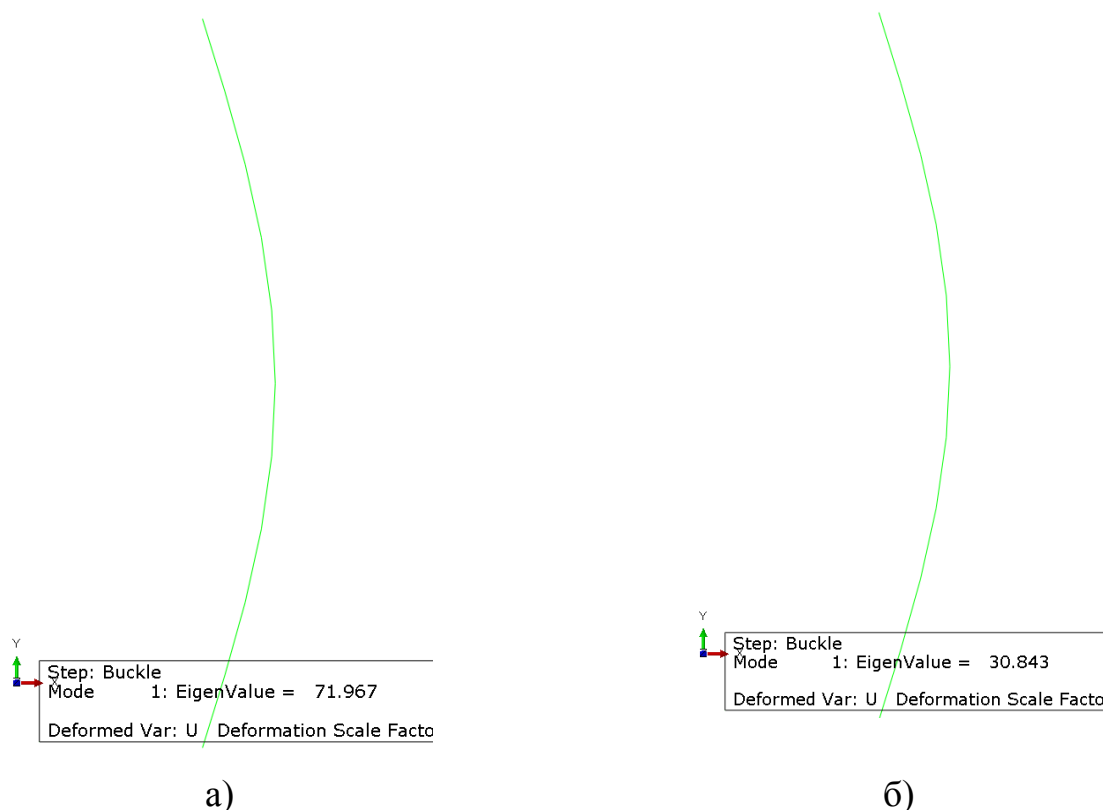


Рисунок 3.2 – Форма потери устойчивости и величина первого собственного значения системы.

а) Аустенитная фаза сплава; б) Мартенситная фаза сплава

Таблица 3.4 – Численное решение. Величина силы потери устойчивости

Тип решения	Аустенитная фаза P_A , Н	Мартенситная фаза P_M , Н
Аналитическое решение	71,97	30,84
Линеаризованная постановка (балка)	71,97	30,84

Полученное совпадение результатов численного и аналитического решений, говорит о верном выборе условий закрепления и способа приложения нагрузки в численной модели.

Фазово – структурные превращения в СПФ приводят к существенному изменению жесткости материала, то есть делают его поведение нелинейным. Для возможности учета физической и геометрической нелинейности, предлагается использовать инкрементально – итерационный метод Ньютона – Рафсона. Суть метода заключается в приложении полной внешней нагрузки к модели по частям – приращение (инкремент) нагрузки. Метод является безусловно устойчивым. Исходя из этого, решение, полученное на каждом приращении нагрузки, должно удовлетворять критериям сходимости. В самом общем случае к ним можно отнести проверку величины максимальной невязки по силе и максимального значения приращения перемещения узлов. Для удовлетворения критериям сходимости в рамках одного приращения по силе, совершаются несколько внутренних итераций. Общая схема итерационного процесса представлена на рисунке 3.3.

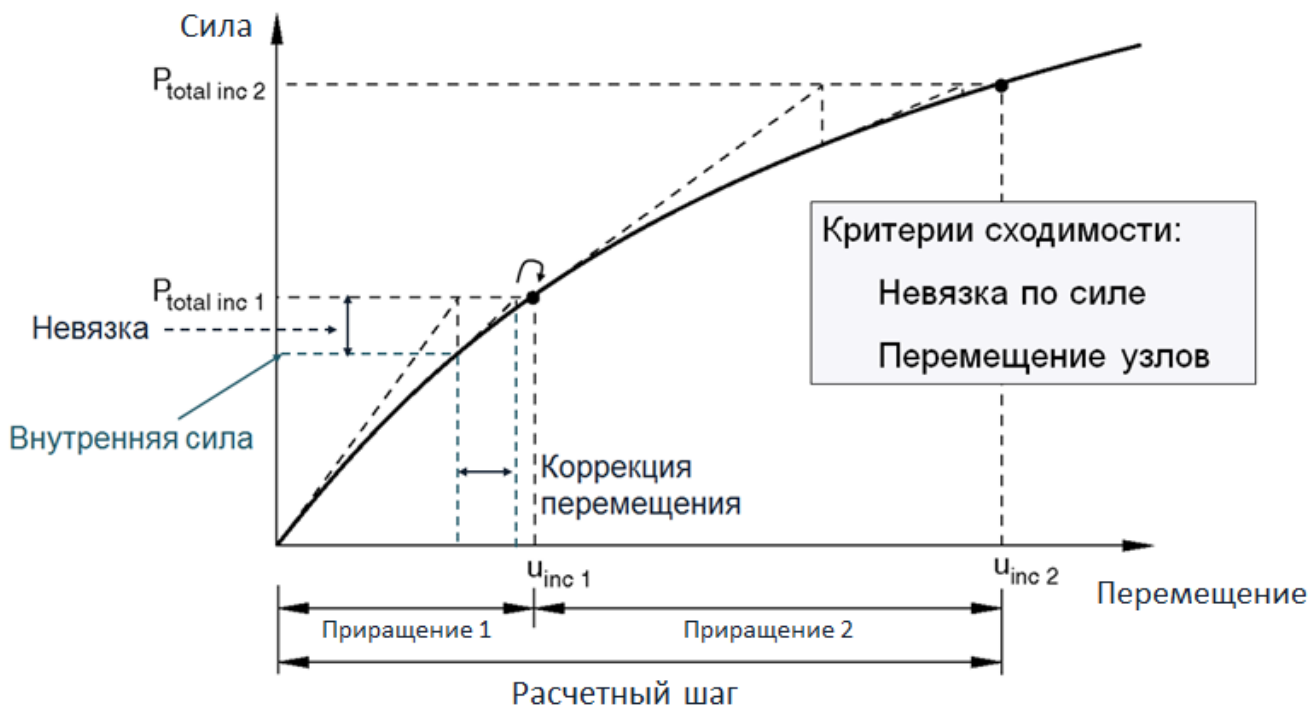


Рисунок 3.3 – Схема итерационного процесса при решении нелинейных задач

Была проведена серия вспомогательных расчетов для обоснования возможности применения метода Ньютона – Рафсона к решению задач устойчивости стержней. Суть тестирования заключалась в определении параметров численной модели, построенной на основе метода Ньютона – Рафсона без учета физической нелинейности, удовлетворяющей результатам, полученным в рамках линеаризованной постановки.

Граничные условия модели полностью совпадают с принятыми ранее – ГУ №1: $U_{x,y,z} = 0$, ГУ №2: $(U_{x,z} = 0)$. К верхнему узлу стержня прикладывается внешняя нагрузка $P = -100$ Н с линейным характером изменения. Проведена аппроксимация геометрической модели стержня балочными конечными элементами типа В23. Плотность разбиения – 50 КЭ по длине стержня.

Расчеты были проведены с использованием процедуры *Dynamic, Implicit (Quasi-static) в режиме квази – статика. В рамках выбранной процедуры, решаются уравнения динамического равновесия с введением значительной численной диссипации энергии для обеспечения более устойчивого решения (лучшей конвергенции решения). Таким образом, мы получаем, по существу, статическое решение с использованием инерционных сил в качестве стабилизирующего фактора в момент потери устойчивости и при оценке закритического состояния системы.

Значение критической силы потери устойчивости определяется на основе энергетического критерия (принцип Лагранжа - Дирихле) и оценке графика изменения горизонтальной компоненты ускорения центральной точки балки. Согласно принципу Лагранжа – Дирихле, если система находится в состоянии устойчивого равновесия, ее полная энергия обладает минимумом по сравнению со всеми соседними состояниями системы; если в состоянии неустойчивого равновесия - то максимумом. По графику полной энергии системы (рис. 3.4) определяется время, соответствующее неустойчивому состоянию равновесия, и по известному закону изменения внешней нагрузки, находится величина критической силы потери устойчивости ($P_{кр}$).

Помимо этого, проводится анализ изменения горизонтальной составляющей вектора ускорения центральной точки балки. На рисунке 3.5 представлены два

совмещенных графика: ускорение центральной точки и полная энергия системы. Видно, что максимуму полной энергии системы соответствует резкий скачок на графики ускорений.

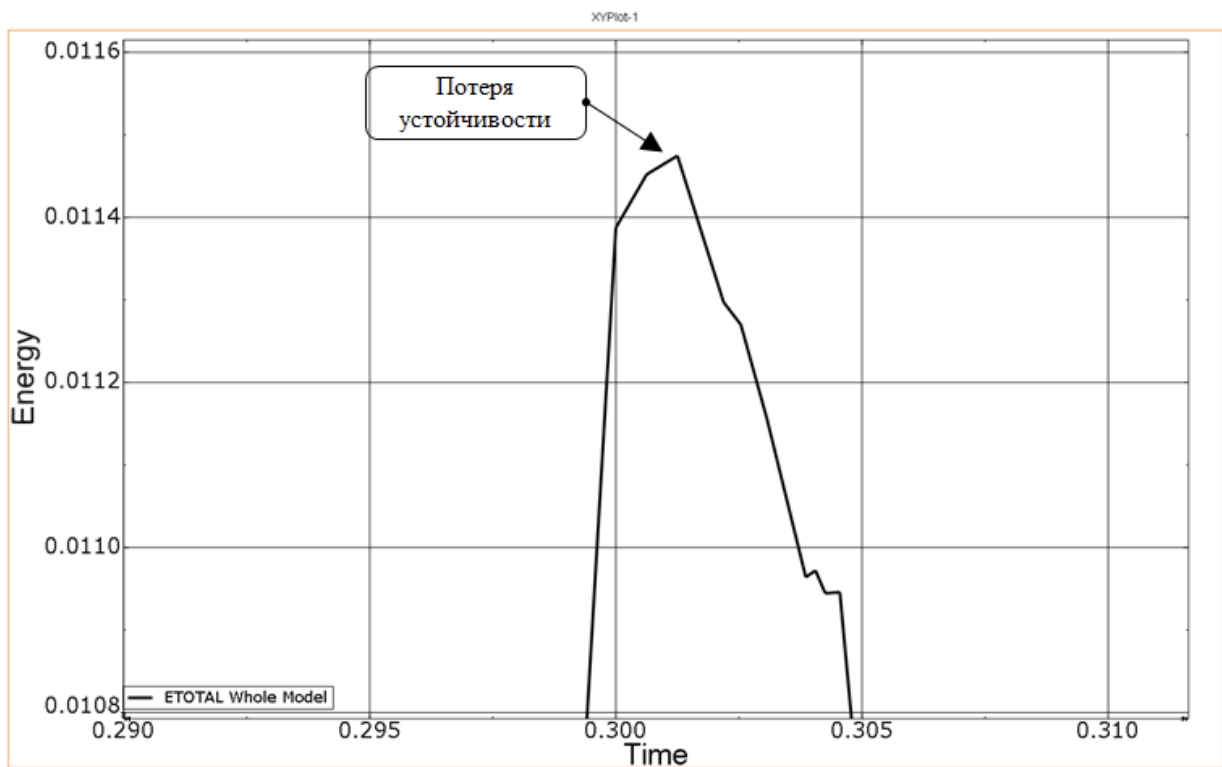
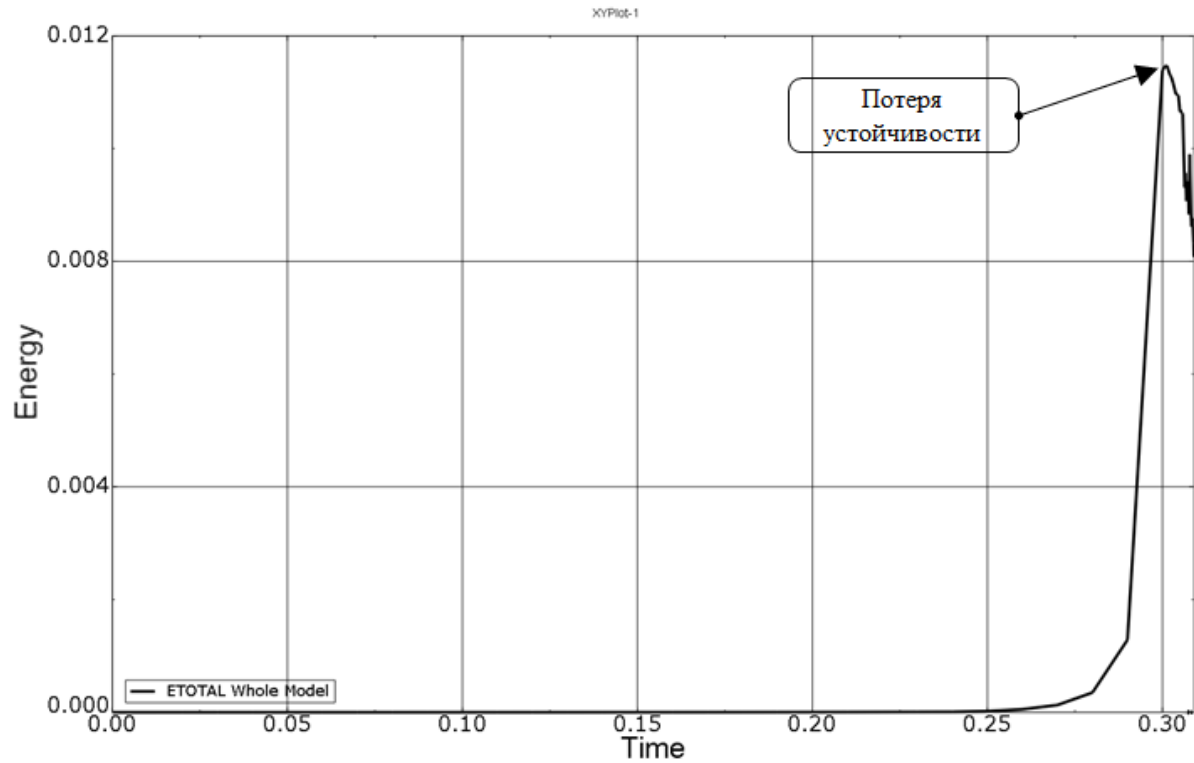


Рисунок 3.4 – Изменение полной энергии модели

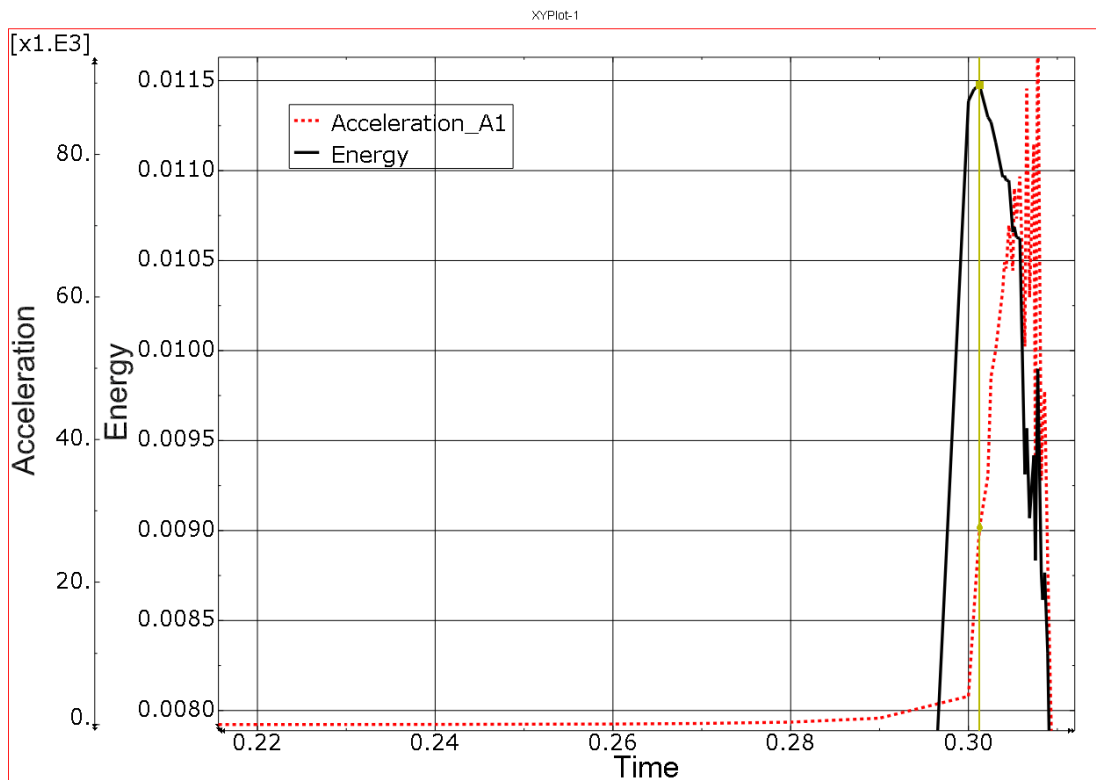
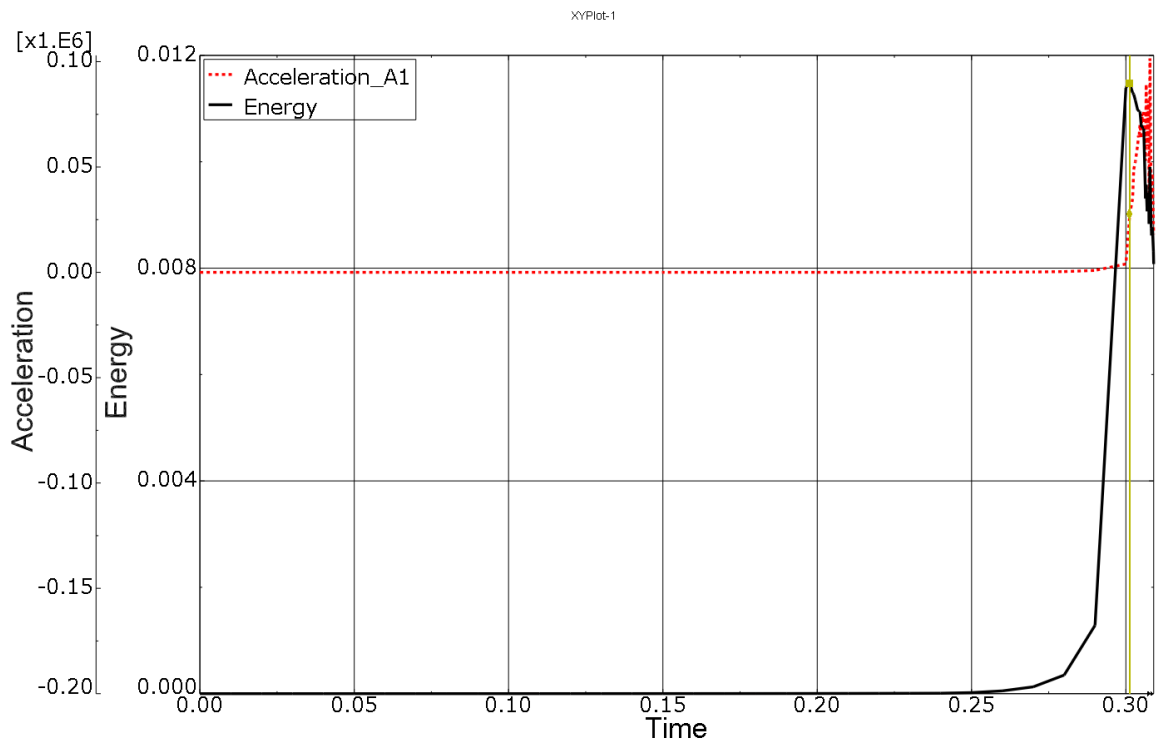


Рисунок 3.5 – Полная энергии модели (черный) и горизонтальная составляющая вектора ускорения центральной точки балки (красный)

Решение задачи устойчивости стержней методом Ньютона – Рафсона в «идеализованной» постановке (абсолютно прямолинейный стержень; отсутствие эксцентриситета нагрузки; «идеальные» условия закрепления) не представляется возможным. Необходимо определение начальных несовершенств системы, которые приведут к некоей неоднородности её напряженно – деформированного состояния до потери устойчивости. В противном случае, приложение сколь угодно большой внешней нагрузки, приведет только к продольному сжатию стержня без потери устойчивости. Начальные несовершенства могут быть определены на уровне геометрической модели изделия (технологические дефекты), задания граничных условий и нагрузок, а также неоднородности свойств материала по сечению. Основной проблемой данного подхода является выбор типа начального несовершенства и его размеров.

В настоящей работе был сделан выбор в пользу введения начальных геометрических дефектов – начальной погиби стержня (Δx_i). Процедура включает в себя проведение вспомогательного частотного анализа конструкции с учетом выбранных условий закрепления и построение «дефектной» геометрической модели на основе полученных форм колебаний (ϕ_i) с применением масштабного коэффициента, который регулирует размер несовершенства (ω_i). Использовалась первая изгибная собственная форма.

$$\Delta x_i = \sum_{i=1}^k \omega_i \phi_i \quad (3.2)$$

Для определения приемлемой величины начального несовершенства, была проведена серия расчетов с различными значениями масштабного коэффициента. Исходя из практического опыта, абсолютная величина геометрического несовершенства не должна превышать нескольких процентов (ограничение сверху) от минимального линейного размера ($b = 1$ мм).

Результаты тестирования представлены в таблице 3.5. Тестирование показало хорошее совпадение результатов нелинейного анализа с аналитическим решением. Максимальная погрешность (при несовершенстве 5%) не превышает 5%. Стоит отметить, что при величине начальной погиби меньше 0,01%, потери устойчи-

ности не происходит. На основе результатов тестирования была принята величина начальной погиби для всех последующих расчетов на уровне 1% от минимального линейного размера ($b = 1$ мм).

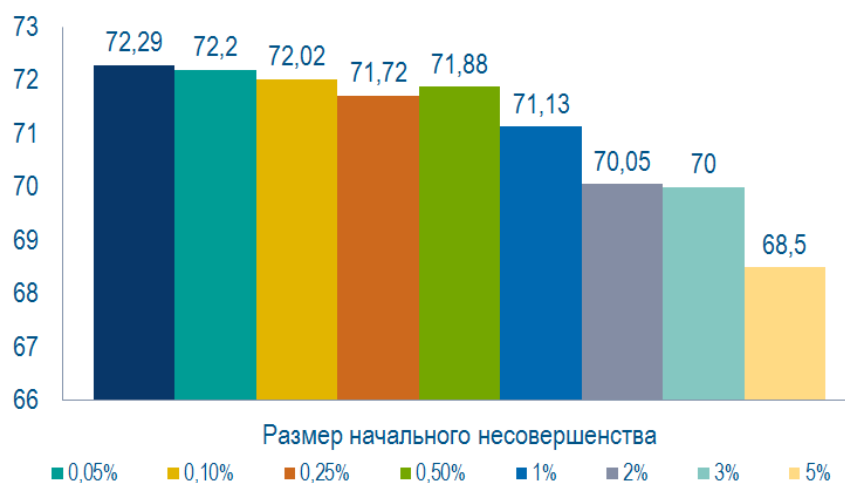


Рисунок 3.6 – Влияние размера начального несовершенства на силу потери устойчивости для стержня, находящегося в аустенитной фазе

Таблица 3.5 – Величина силы потери устойчивости при различной величине начального несовершенства

Размер начального несовершенства, % от величины $b = 1$ мм	Максимальное отклонение от прямолинейной формы, мм	Сила потери устойчивости, Н		Аналитическое решение, Н	
		Аустенит	Мартенсит	Аустенит	Мартенсит
5%	0,05	68,5	29,66	71,97	30,84
3%	0,03	70	30,13		
2%	0,02	70,05	30,25		
1%	0,01	71,13	30,34		
0,5%	0,005	71,88	30,82		
0,25%	0,0025	71,72	31,01		
0,1%	0,001	72,02	31,5		
0,05%	0,0005	72,2	31,47		
0,01%	0,0001	72,29	Нет		
0,001%	0,00001	Нет	Нет		

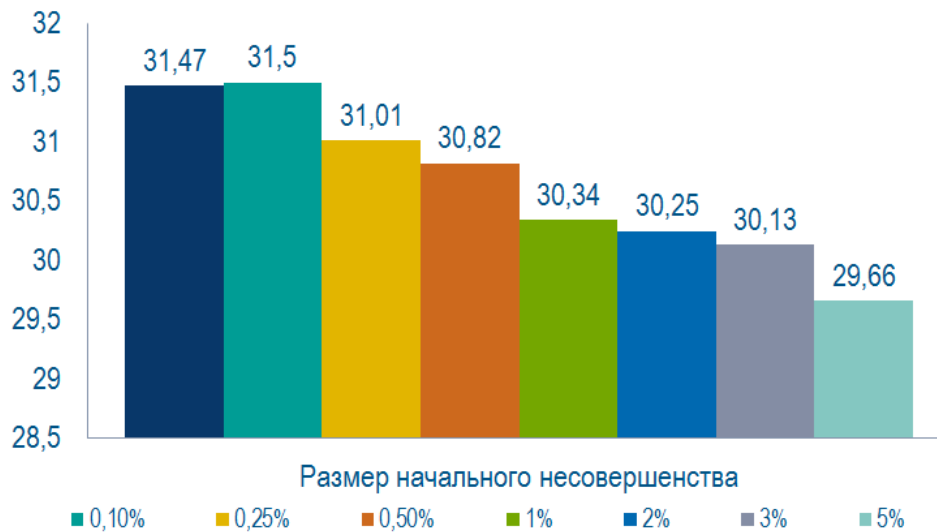


Рисунок 3.7 – Влияние размера начального несовершенства на силу потери устойчивости для стержня, находящегося в мартенситной фазе

3.1.2. Решение задачи в трехмерной постановке

Основной проблемой решения задачи устойчивости стержня в трехмерной постановке является корректное задание нагрузок и граничных условий (ГУ), удовлетворяющих ранее описанной балочной модели. Дело в том, что при сжатии стержня, за счет эффекта Пуассона, происходит «бочкообразование» вблизи торцевых сечений. Вызванное данным эффектом неоднородное напряженно – деформированное состояние может существенным образом повлиять на результат моделирования, что не позволит провести корректного сравнения результатов.

Стандартных (встроенных) возможностей определения требуемого типа ГУ в программном комплексе найдено не было.

На рисунке 3.8 представлено позиционирование трехмерной модели балки относительно глобальной декартовой системы координат. Продольная ось балки совпадает с ось Ox . Центр сечения (нижний торец) находится в начале системы координат $(0;0;0)$.



Рисунок 3.8 – Трехмерная модель балки. Позиционирование относительно глобальной системы координат

Исходя из формы профиля сечения балки, потеря устойчивости будет происходить в плоскости XU (минимальный осевой момент инерции). Условия геометрической симметрии (плоскость XU), можно заменить кинематическими ограничениями и не рассматривать часть конструкции. Применяя условия симметрии, получаем балку с прямоугольным профилем ($1 \times 1 \text{ мм}$) и кинематическими ограничениями на одной из сторон – симметрия относительно оси Z : $U_z = 0$; $UR_{x,y} = 0$ (рис. 3.9).

У центральным узлам нижнего и верхнего торцов применяем следующее граничное условие: $U_x = 0$, $UR_{x,y} = 0$ (рис. 3.10). Тем самым обеспечивается возможность вращения сечения балки относительно оси Oz .

Для ограничения вертикального перемещения балки и приложения внешней нагрузки, в расчетную область введены две абсолютно жесткие пластины. Пластины размещаются на торцах балки с нулевым зазором (рис. 3.11). Поведение жестких пластин полностью регулируется поведением связанных с ними опорных точек (по 1 – ой точке на каждую пластину). На нижней опорной точке определено условие шарнирного опирания ($U_{x,y,z} = 0$), на верхней – каток $U_{x,z} = 0$. Нагрузка прикладывается к верхней опорной точке $P = -50 \text{ Н}$.

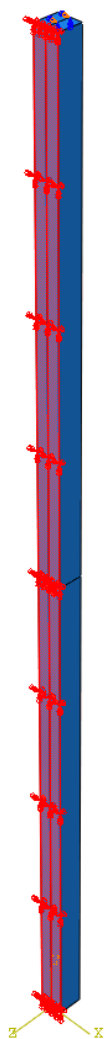


Рисунок 3.9 – Условия симметрии

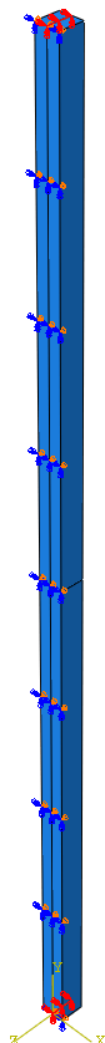


Рисунок 3.10 – Условия на торцах

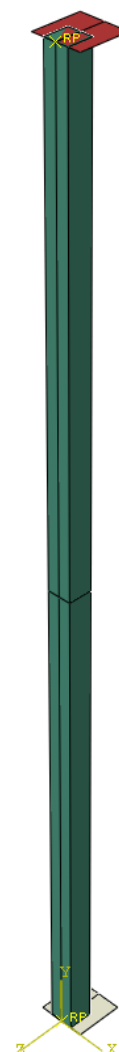


Рисунок 3.11 – Введение фиктивных пластин

Между торцами балки и жесткими поверхностями определено контактное взаимодействие, не допускающее взаимных проникновений поверхностей, то есть требующее «жесткого» выполнения условий контакта (кривая контактное давление – зазор\проникновение). Для узлов находящихся в начальном контакте, отключена возможность выхода из него с возникновением зазора (поведение по нормали). Для предотвращения возникновения касательных напряжений, использовалась бесфрикционная модель трения.

На рисунке 3.12 приведены результаты расчета модели без введения начальной погрешности. Получено однородное поле напряжений, что свидетельствует о верности выбранного подхода. Стоит отметить, что при заданной внешней нагрузке сжимающие напряжения в балке должны составлять 50 МПа, численное решение немного ниже аналитического: 49,98 МПа.

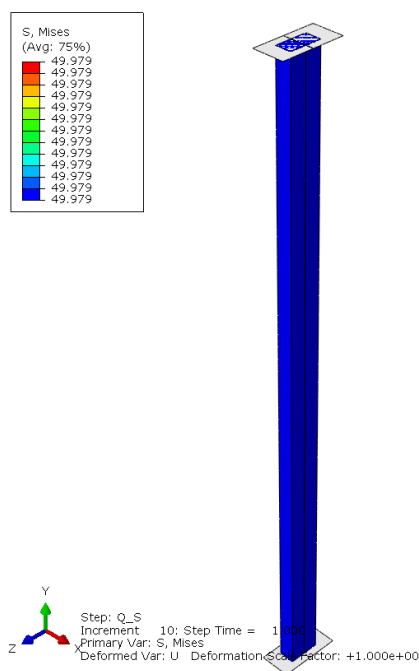


Рисунок 3.12 – Распределение напряжений при отсутствии начальных несовершенств, МПа

Процедура определения начальных несовершенств ничем не отличается от балочной модели: проводится частный анализ; на основе первой собственной формы с применением масштабного коэффициента (1% от минимального линейного размера) строится дефектная расчетная модель. На рисунках 3.13 (а, б) для сравнения приведены результаты частотного анализа в балочной и трехмерной постановке для полностью аустенитной фазы. Разница в полученных значениях первой собственной частоты составляет менее 1 % (балочная постановка – 933,64 Гц; трехмерная – 925,5 Гц).

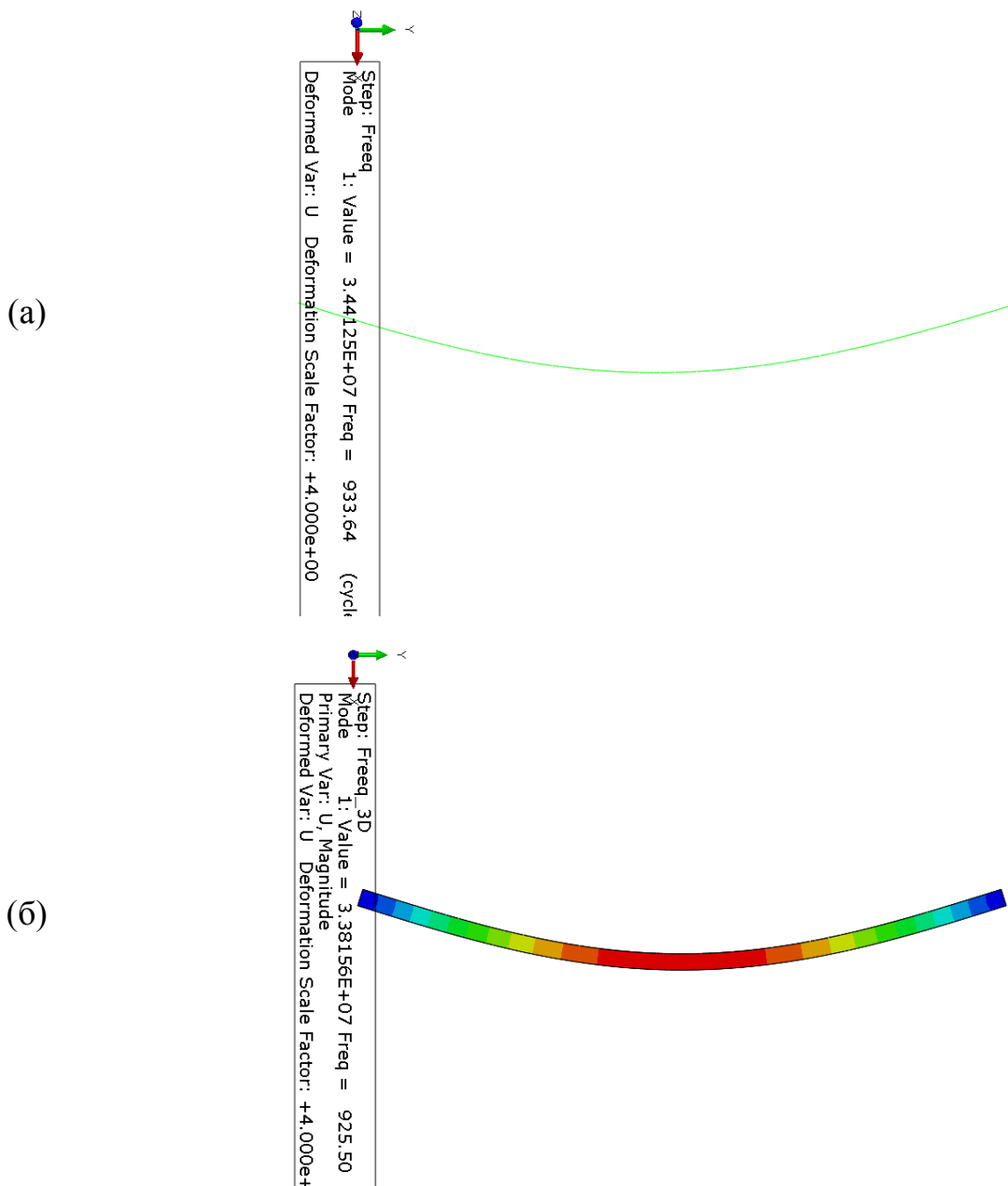


Рисунок 3.13 – Первая форма собственных колебаний.

а) Балочная постановка; б) Трехмерная постановка

После использования первой формы собственных колебаний в качестве основы для введения начального геометрического несовершенства, происходит образование начальных зазоров и перекрытий в обеих контактных парах (сечение поворачивается, а жесткие пластины нет). Величина максимального зазора\перекрытия составила 0,38 микрон (рис. 3.14). Для их устранения применялась

процедура «выравнивания» контактных пар по «главным» поверхностям – жестким пластинам (рис. 3.15).

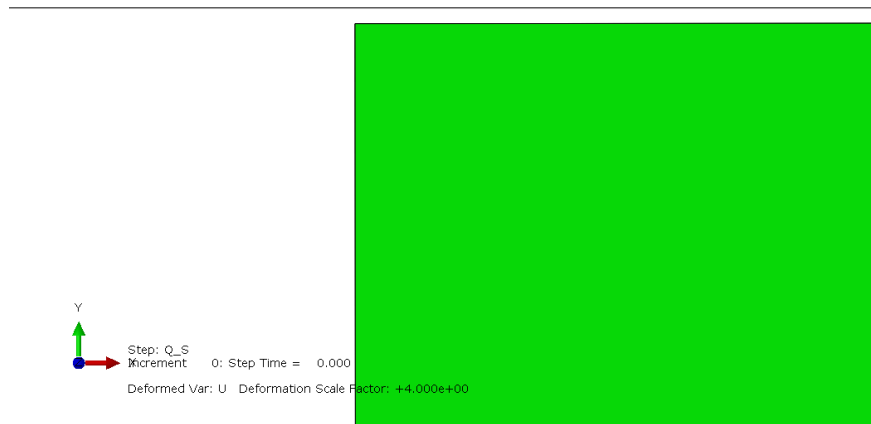


Рисунок 3.14 – Зазор в верхней контактной паре, слева. Большое увеличение.

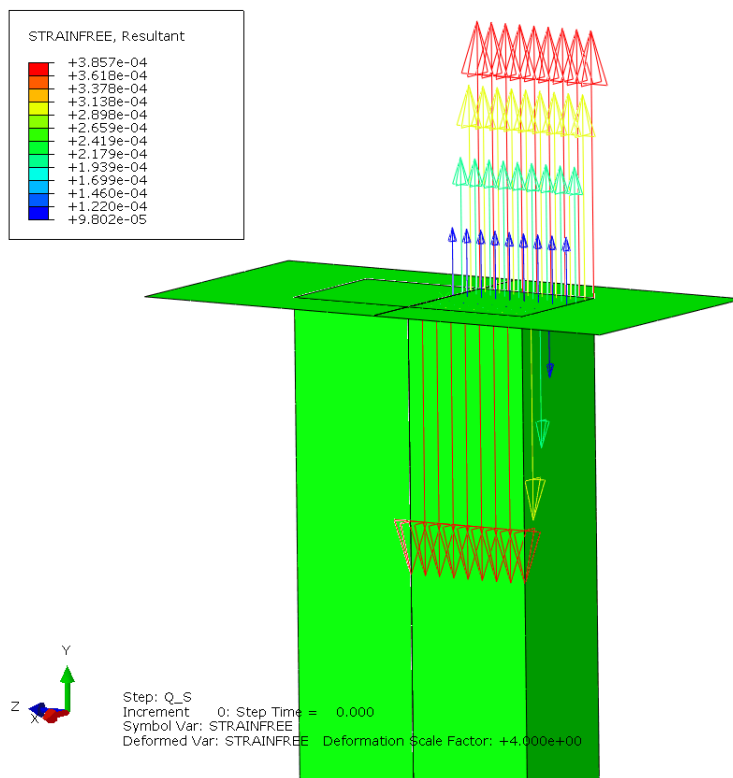


Рисунок 3.15 – Процедура «выравнивания» контактных поверхностей. Инициализация начального контакта, мм

На рисунке 3.16 приведены результаты расчета модели с начальной погибью при 50% нагрузки (50 Н).

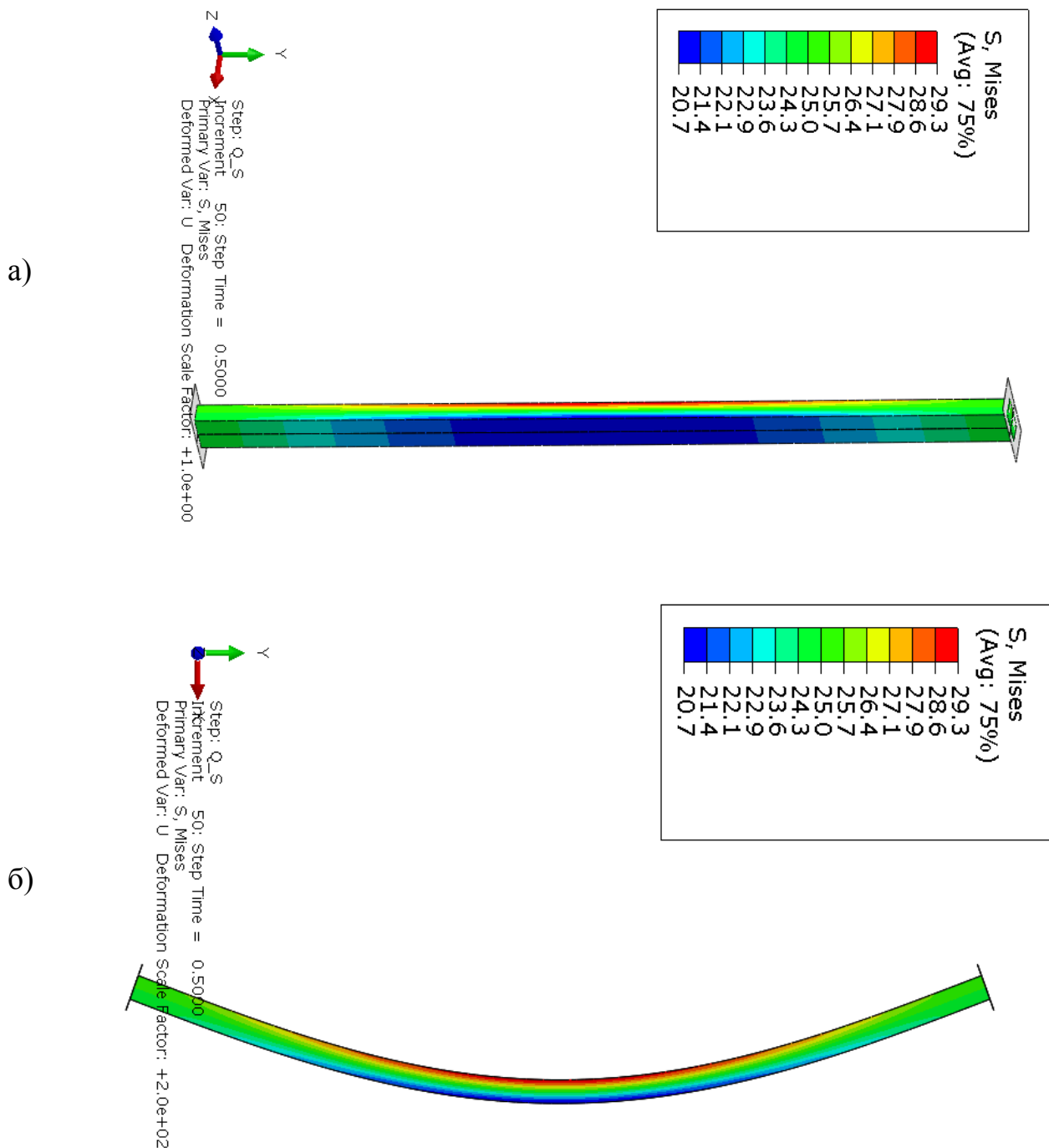


Рисунок 3.16 – Распределение эквивалентных напряжений с введением начально-геометрического несовершенства при 50% нагрузки, МПа

а) Изометрия, без масштабного фактора; б) Вид сбоку, масштабный фактор - 200

Влияния краевых эффектов на характер напряженно – деформированного состояния не наблюдается. Отсутствуют локальные концентраторы напряжений вблизи торцов стержня – областей приложения кинематических ограничений. Все сечения поворачиваются относительно упругой линии балки.

Полученная неоднородность НДС вызвана введением начальной погиби на основе первой собственной формы колебаний стержня. Левая сторона стержня (рис. 3.16 (а)) подвержена более высоким сжимающим напряжениям, правая – более разгружена.

Методика определения критической силы потери устойчивости аналогична балочной модели. Использовался энергетический критерий с оценкой графиков изменения полной энергии системы и горизонтальной составляющей вектора ускорений центрального узла балки. Итоговые результаты тестирования расчетных моделей приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Результаты тестирования расчетных моделей

Тип анализа	Аустенитная фаза сплава P_A , Н	Мартенситная фаза сплава P_M , Н
Аналитическое решение	71,97	30,84
Линеаризованная постановка (балка)	71,97	30,84
Нелинейный анализ (балочная постановка). Размер начального несовершенства 1%	71,13	30,34
Нелинейный анализ (трехмерная постановка) Размер начального несовершенства 1%	71,25	30,95

Стоит отметить, что величина шага интегрирования для нелинейного анализа была определена на уровне 0,01 сек., что соответствует приращению силы в 1Н. В момент начала потери устойчивости шаг падает в 4 раза до 0,0025, следовательно,

максимальная погрешность изменения нагрузки для нелинейного анализа составляет 0,25 Н.

3.2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ В РЕЖИМЕ ПРЯМОГО МАРТЕНСИТНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ПРИ ШАРНИРНОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ

Ранее отработанная и верифицированная методика решения задачи устойчивости стержня в трехмерной постановке, была применена для оценки устойчивости стержня при прямом мартенситном превращении. Геометрическая модель, способы приложения нагрузки и граничных условий остались прежними. Изменение коснулось только модели поведения материала. Вместо упругой модели с аустенитным или мартенситным модулем Юнга, используется предложенная в Главе 2 программная реализация модели нелинейного деформирования СПФ. Принятые физико – механические параметры материала стержня представлены в таблице 3.2.

На начальном этапе моделирования проводится преднагружение стержня в аустенитном состоянии фиксированной по величине и направлению сжимающей нагрузкой $P < P_{кр}^э$. Механическое нагружение проводится в изотермическом режиме $T_n = 323,15$ К. Докритические сжимающие напряжения в стержне, вызванные внешней нагрузкой P , не должны приводить к возникновению неупругих деформаций и исключить прохождение прямого превращения по режиму сверхупругого поведения. При сохранении величины и направления действующей сжимающей нагрузки P проводится охлаждение стержня от $T_n = 323,15$ К до $T_n = 283,15$ К. Принимается линейный закон изменения температуры. Согласно принятому интервалу температур начала\окончания прямого превращения, охлаждение стержня должно сопровождаться прямым превращением с изменением фазы сплава.

Для стержня длиной 40 мм (таблица 3.1) была проведена серия расчетов с различными величинами внешней нагрузки $P = 1Н, 2Н, 3Н, 4Н$. На рисунке 3.17 приведено распределение эквивалентных напряжений в стержне по окончанию

первого этапа моделирования – механического нагружения в изотермическом режиме.

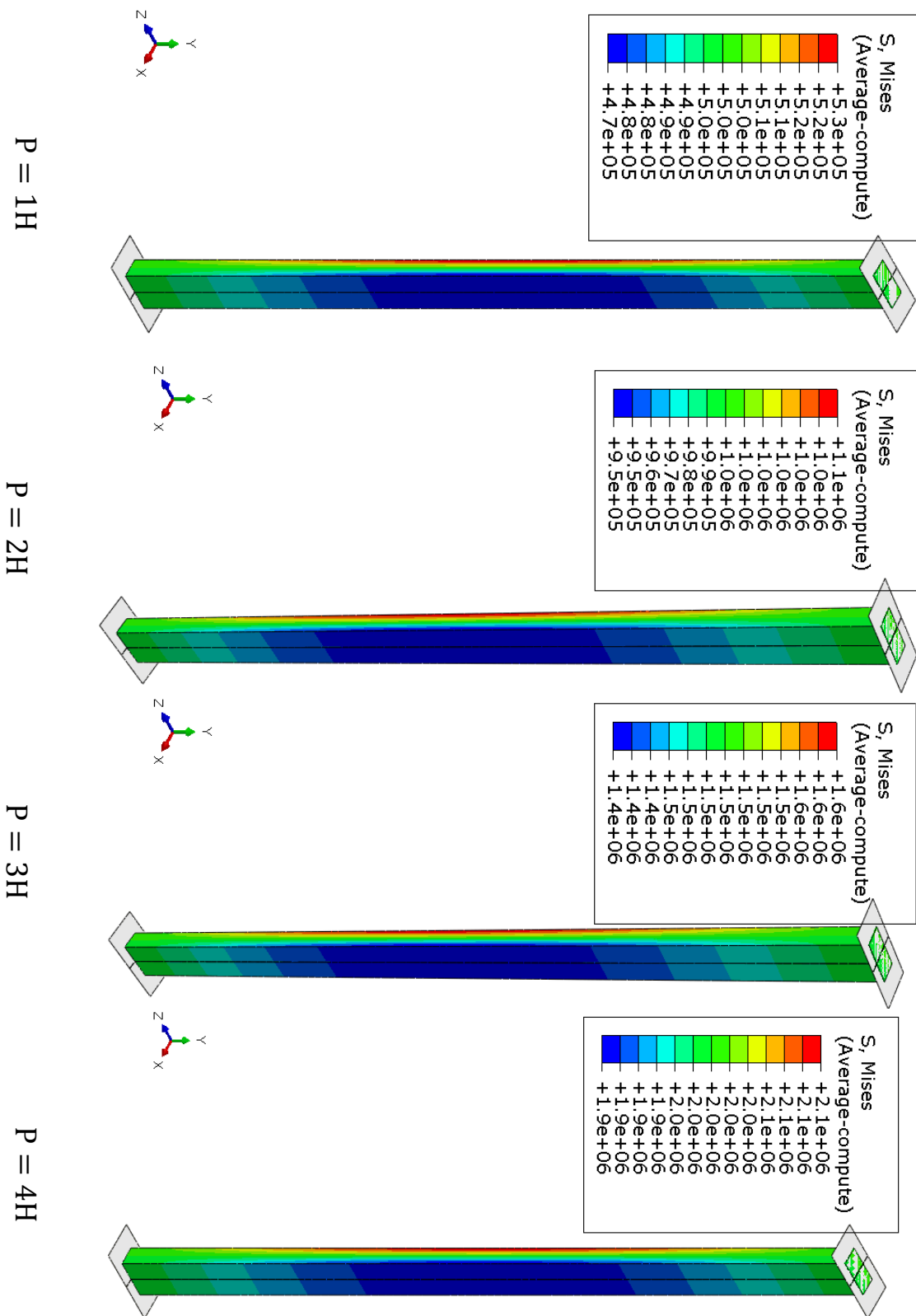


Рисунок 3.17 – Распределение эквивалентных напряжений в стержне по завершению этапа преднагружения, Па

Для всех значений внешних нагрузок ($P = 1Н, 2Н, 3Н, 4Н$) уровень механических напряжений достаточно низок ($\sigma < 2.5МПа$) и не приводит образованию неупругой деформации и прохождению прямого превращения по режиму сверхупругости. При этом, вследствие введения начального геометрического несовершенства (начальной погиби), распределение напряжений имеет неоднородный характер. Форма начальной погиби соответствует первой собственной форме колебаний стержня при принятых условиях закрепления. Исходя из этого, более высокий уровень напряжений наблюдается на «внутренней» (относительно формы начальной погиби) стороне стержня.

Ввиду небольшой разницы в уровне механических напряжений, началу прямого превращения для всех моделей соответствует температура $T = 315,8 К$ (разница, разумеется, есть, но она находится *между контрольными шагами по времени*). Разница между фактической (M_s^σ) и табличной температурой (M_s^0) начала прямого превращения, объясняется наличием механических напряжений в балке – преднапряженным состоянием.

Неоднородное поле напряжений, полученной после этапа преднагружения, является причиной формирования начального неоднородного поля параметра мартенситной фазы q . Это объясняется влиянием механических напряжений на фактическую температура начала прямого превращения M_s^σ – чем выше уровень механических напряжений, тем выше значение M_s^σ . Таким образом, при условии постоянства изменения температуры по всей модели, прямое превращение началось раньше в областях максимальных напряжений. Для нагрузок $P < 4Н$ по мере окончания прямого превращения наблюдается уменьшение степени неоднородности параметра мартенситной фазы q – стержень полностью переходит в мартенситную фазу. На рисунке 3.18 показано распределение объемной доли мартенсита в модели при различных температурах для внешней на нагрузки $P = 2Н$. Схожие результаты наблюдаются и для остальных расчетных случаев нагружения.

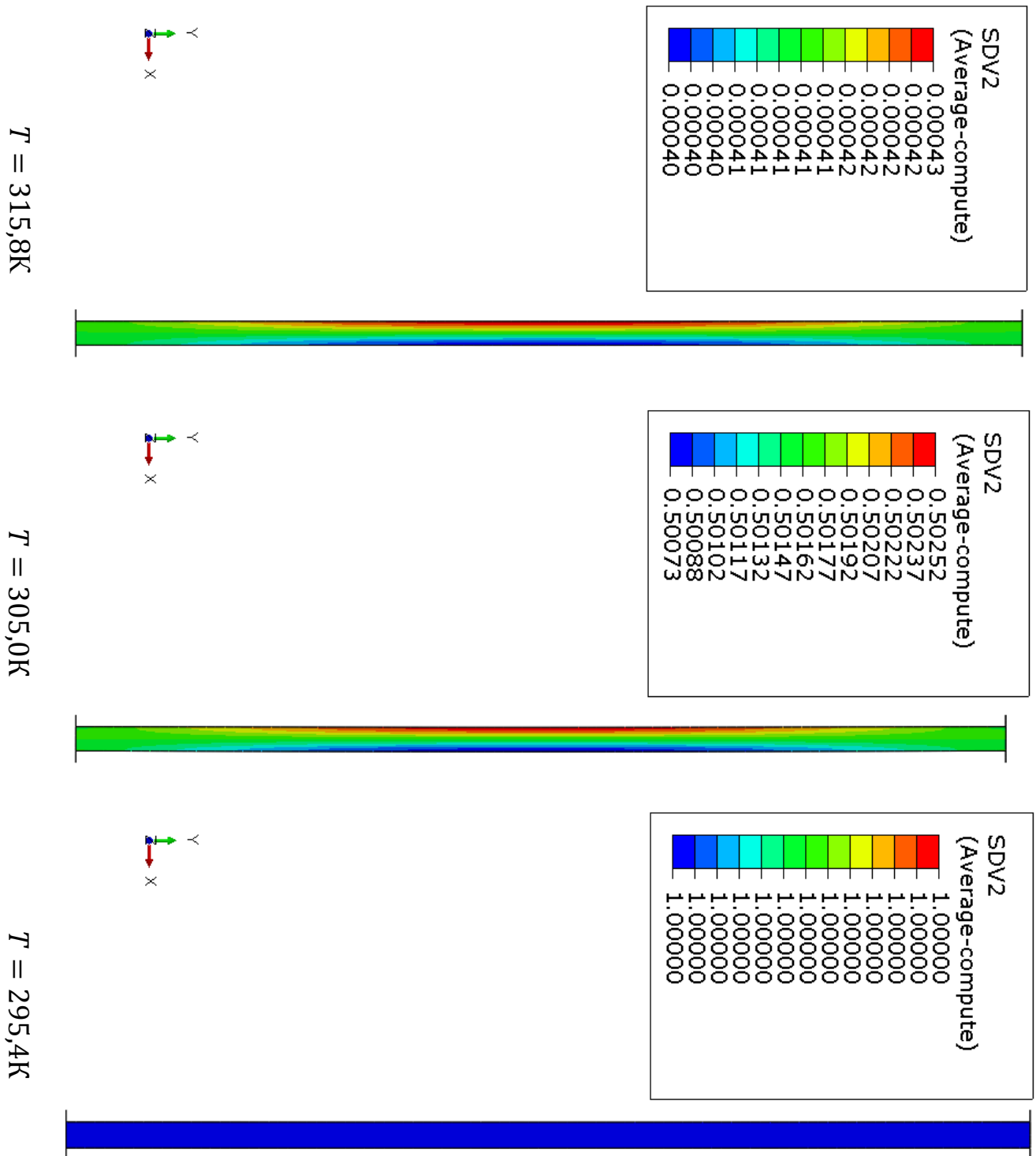


Рисунок 3.18 – Распределение объемной доли мартенсита в модели при различных температурах. Внешняя нагрузка $P = 2\text{H}$

Неоднородное распределение объемной доли мартенсита q приводит к локальному уменьшению жесткости за счет существенной разницы модуля Юнга аустенитной и мартенситной фаз. Помимо этого, от величины объемной доли мартенсита напрямую зависит величина накопленной фазово – структурной деформации – чем больше параметр мартенситной фазы, тем выше уровень деформации (рис. 3.19). Стоит отметить, что в использованной модели поведения материала отсутствует связь максимальной фазовой деформации от действующих напряжений. Исходя из этого, в области фазовых превращений при изменении температуры, материал имеет нулевую касательную жесткость (аналог идеальной пластичности на графике $\sigma - \epsilon$). Совокупность этих факторов приводит к дополнительному прогибу стержня на этапе прямого превращения.

На рисунке 3.20 представлены графики горизонтального перемещения центрального узла балки для всех уровней нагрузок. После начала прямого превращения наблюдается значительный прогиб стержня в сторону начальной погиби. Для нагрузок $P < 3$ Н рост перемещений прекращается и стержень вновь принимает исходную форму с небольшим упругим отклонением уже в мартенситной фазе. Начало возвращения стержня ($P < 3$ Н) к исходной форме соответствует середине фазово – структурного превращения ($q = 0.5 \pm 0.05$).

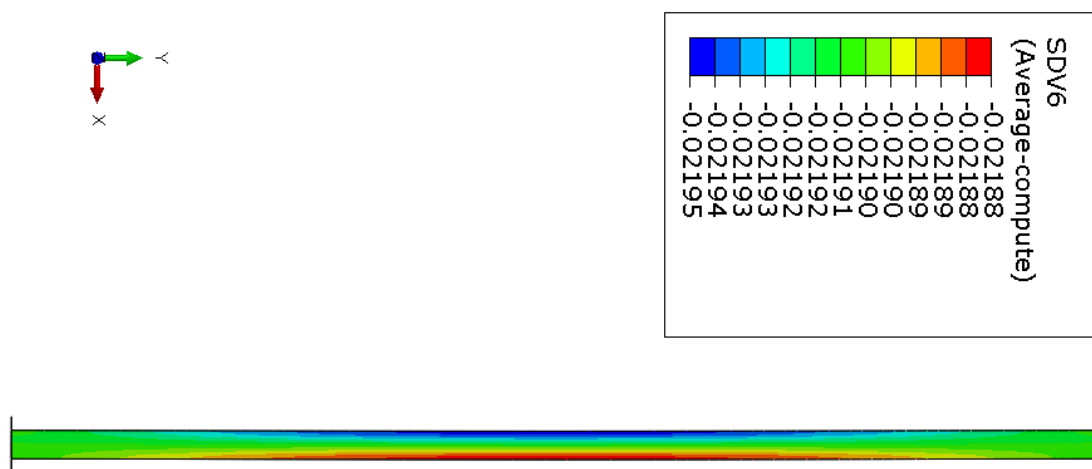


Рисунок 3.19 – Распределение фазово – структурных деформаций.
Внешняя нагрузка $P = 2$ Н, $T = 305$

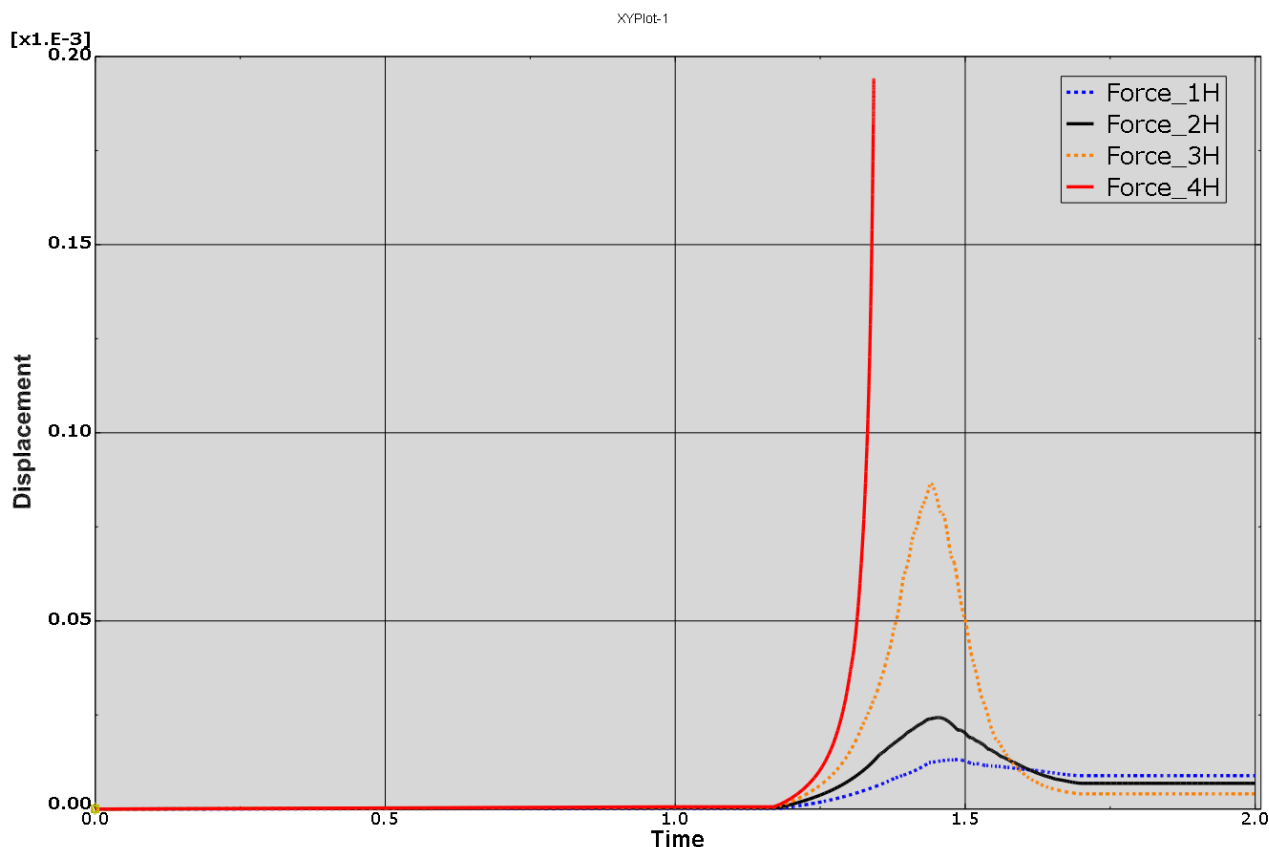


Рисунок 3.20 – Горизонтальное перемещение центральной точки балки, м

При нагрузке $P = 4 \text{ Н}$ стержень теряет устойчивость на этапе прямого мартенситного превращения. Наблюдается резкое увеличение прогиба с выходом на вертикальную асимптоту (рис. 3.20). Потеря устойчивости происходит температуре $T = 309,86 \text{ К}$. Об этом свидетельствуют графики ускорения центрального узла в горизонтальном направлении (Рисунок 3.21) и изменения кинетической энергии модели (Рисунок 3.22). Процесс сопровождается ростом ускорения центрального узла и кинетической энергии всей модели. В качестве сравнения на рисунке 3.23 показан график изменения ускорения центрального узла для $P = 2 \text{ Н}$, при которой потери устойчивости стержня не происходит. Видно, что на этапе прямого превращения происходит осцилляция значений ускорения относительно нулевого уровня. По мере завершения прямого превращения амплитуда осцилляций снижается.

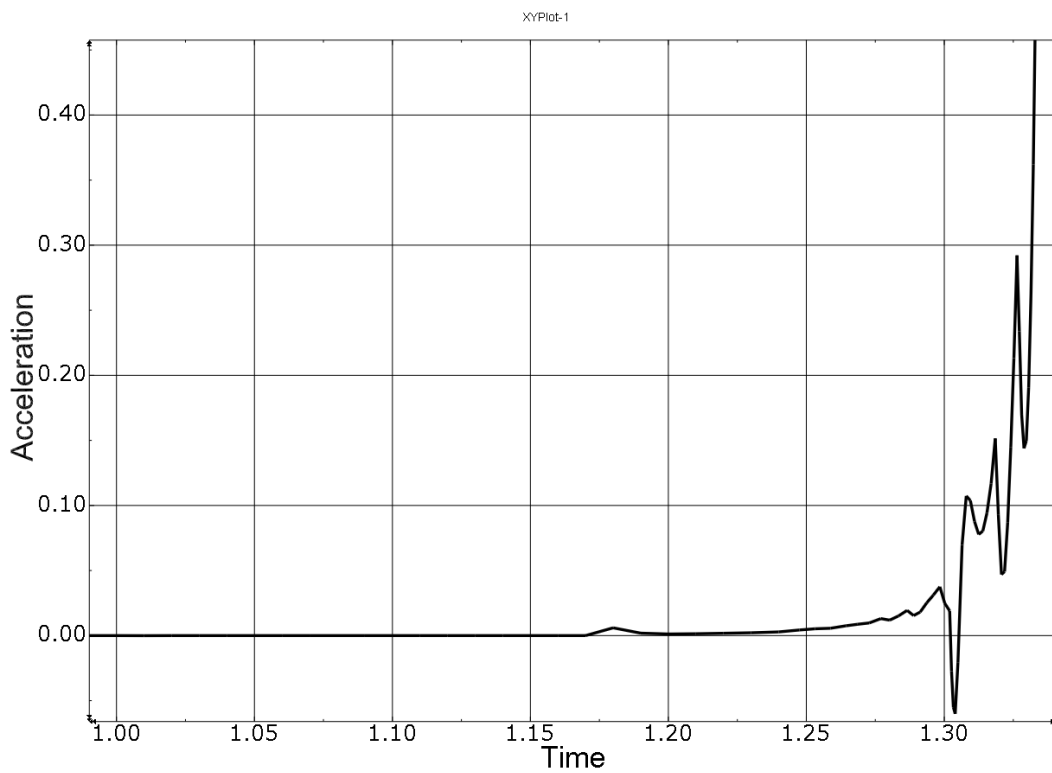
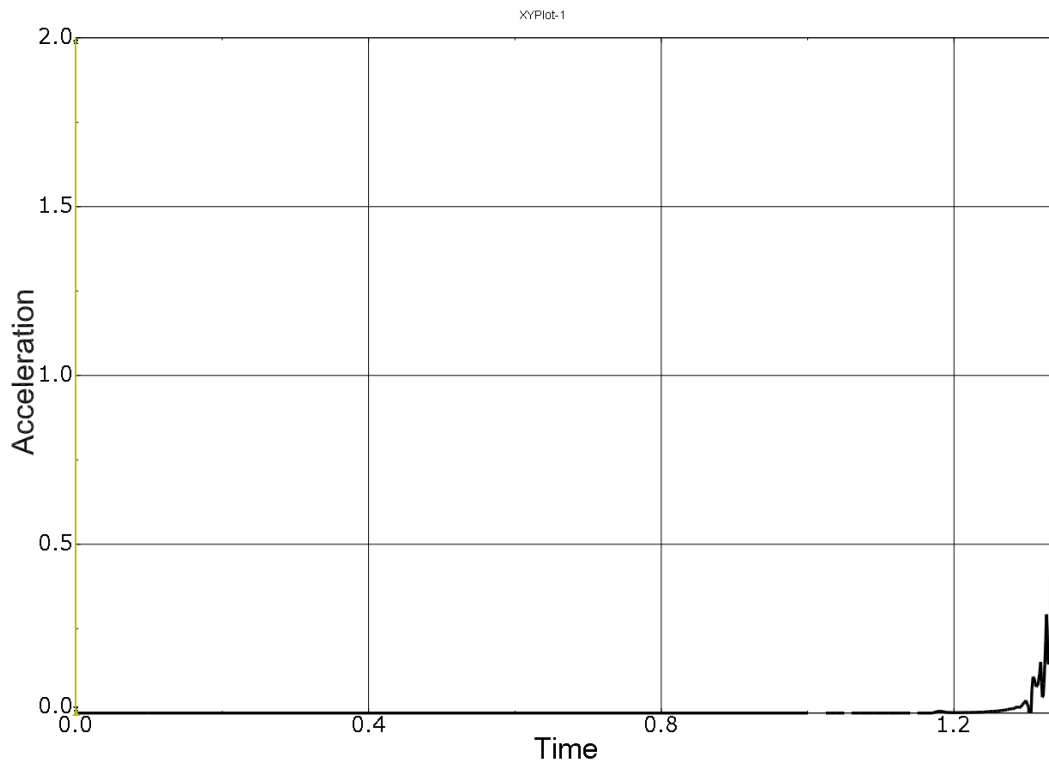


Рисунок 3.21 – Ускорение центрального узла балки в горизонтальном направлении. Внешняя нагрузка $P = 4\text{H}$

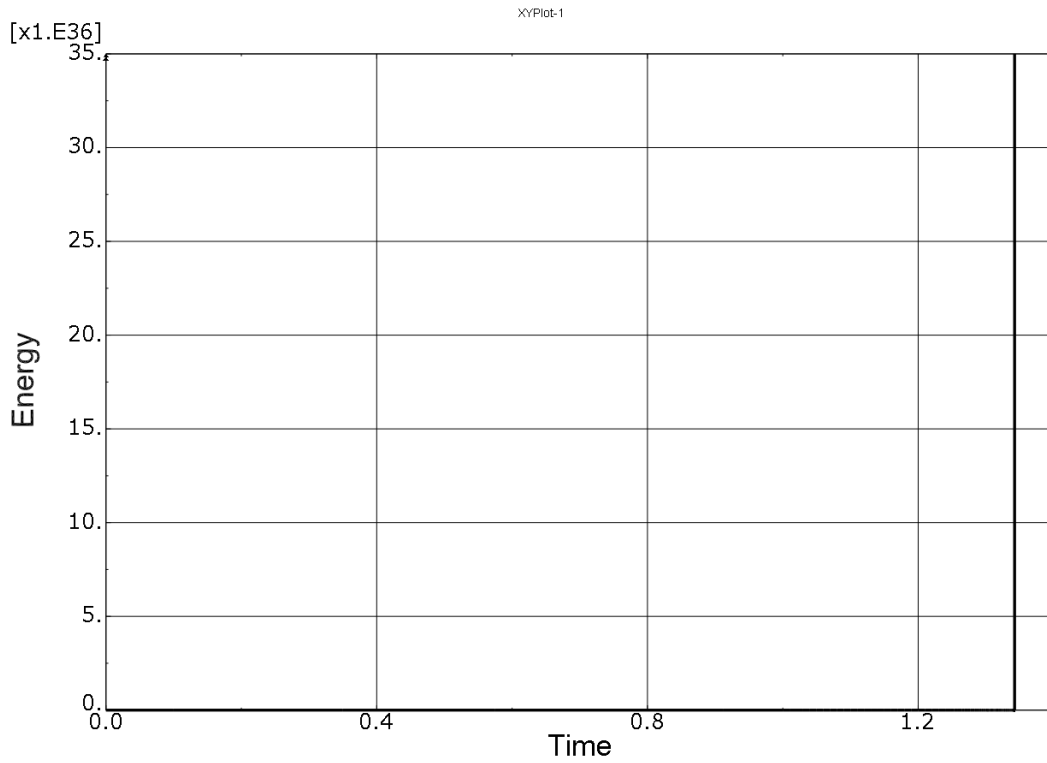


Рисунок 3.22 – Изменение кинетической энергии системы. $P = 4H$

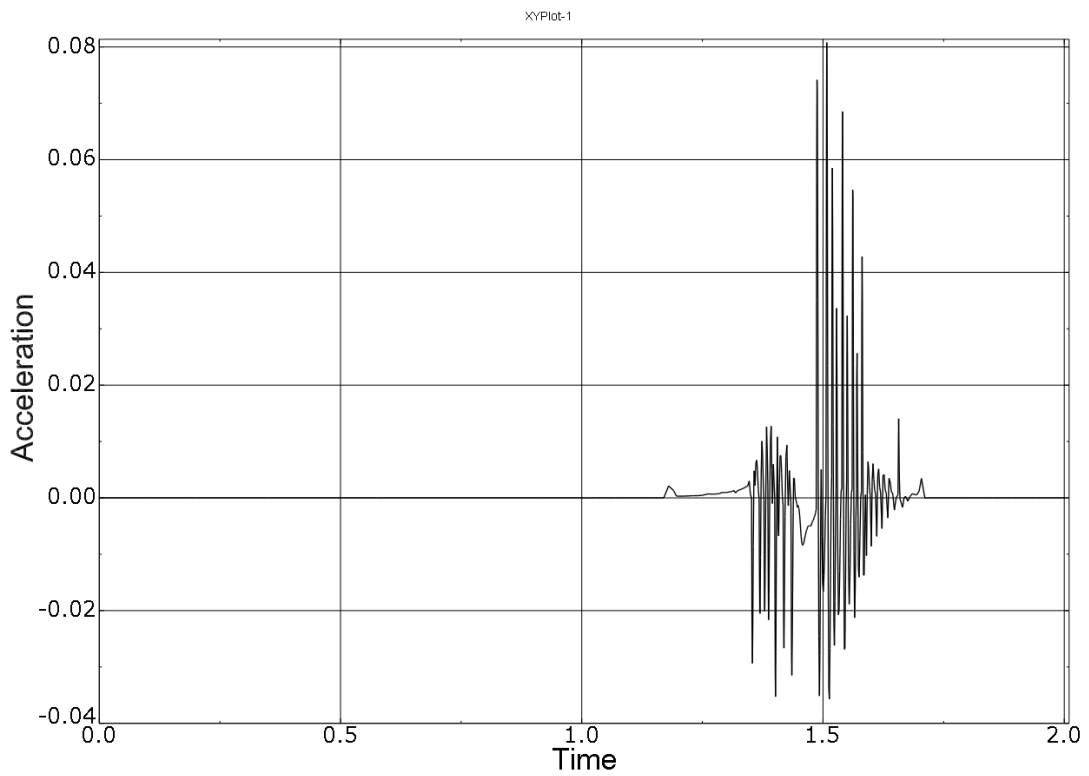


Рисунок 3.23 – Ускорение центрального узла балки. $P = 2H$

Наличие дополнительного прогиба, полученного вследствие неоднородного прохождения прямого превращения, приводит к увеличению степени неоднородности поля напряжений. На рисунке 3.24 показано распределение главных напряжений в балке. Видно, что внутренняя сторона балки теперь существенно более нагружена, чем была ранее по окончанию первого этапа. Противоположная сторона практически разгружена, причем напряжения поменяли знак (небольшие растягивающие напряжения). Увеличение степени неоднородности НДС привело к ещё большей локализации объемной доли мартенсита за счет увеличения температуры M_s^σ . Таким образом, процесс стал «самоподпитывающимся» - неоднородное поле напряжений приводит к неоднородному прохождению прямого превращения, которое обеспечивает дополнительный прогиб балки, что в конечном итоге приводит к более ранней потере устойчивости. На рисунке 3.25 приведены результаты расчета в момент потери устойчивости: распределение напряжений, параметра мартенситной фазы и перемещений.

Таким образом, величина силы потери устойчивости стержня при прохождении прямого мартенситного превращения находится в интервале $3Н < P_{кр} < 4Н$, что существенно меньше силы потери устойчивости в полностью аустенитном или полностью мартенситном состоянии.

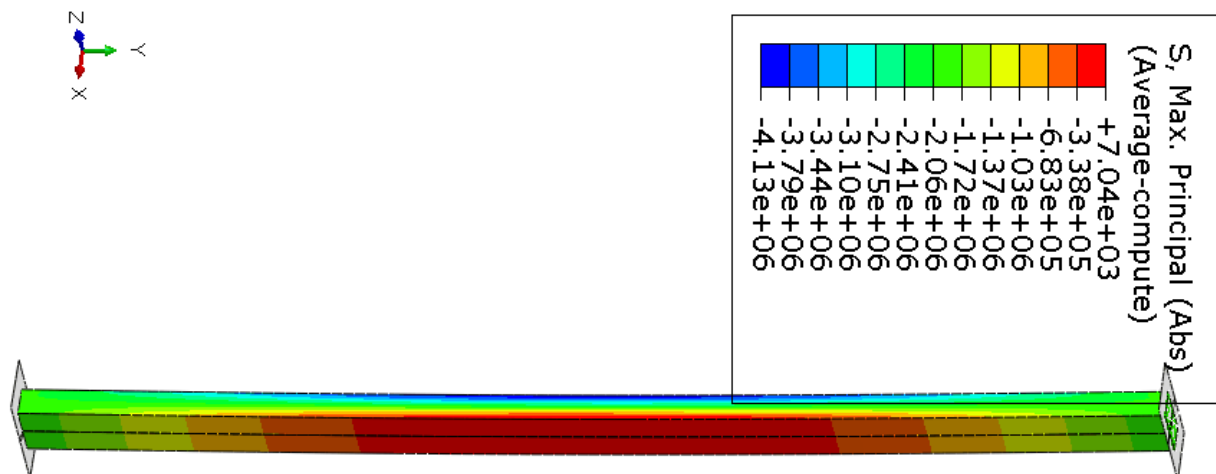


Рисунок 3.24 – Распределение главных напряжений, Па
Внешняя нагрузка $P = 4Н$, $T = 309,86 K$

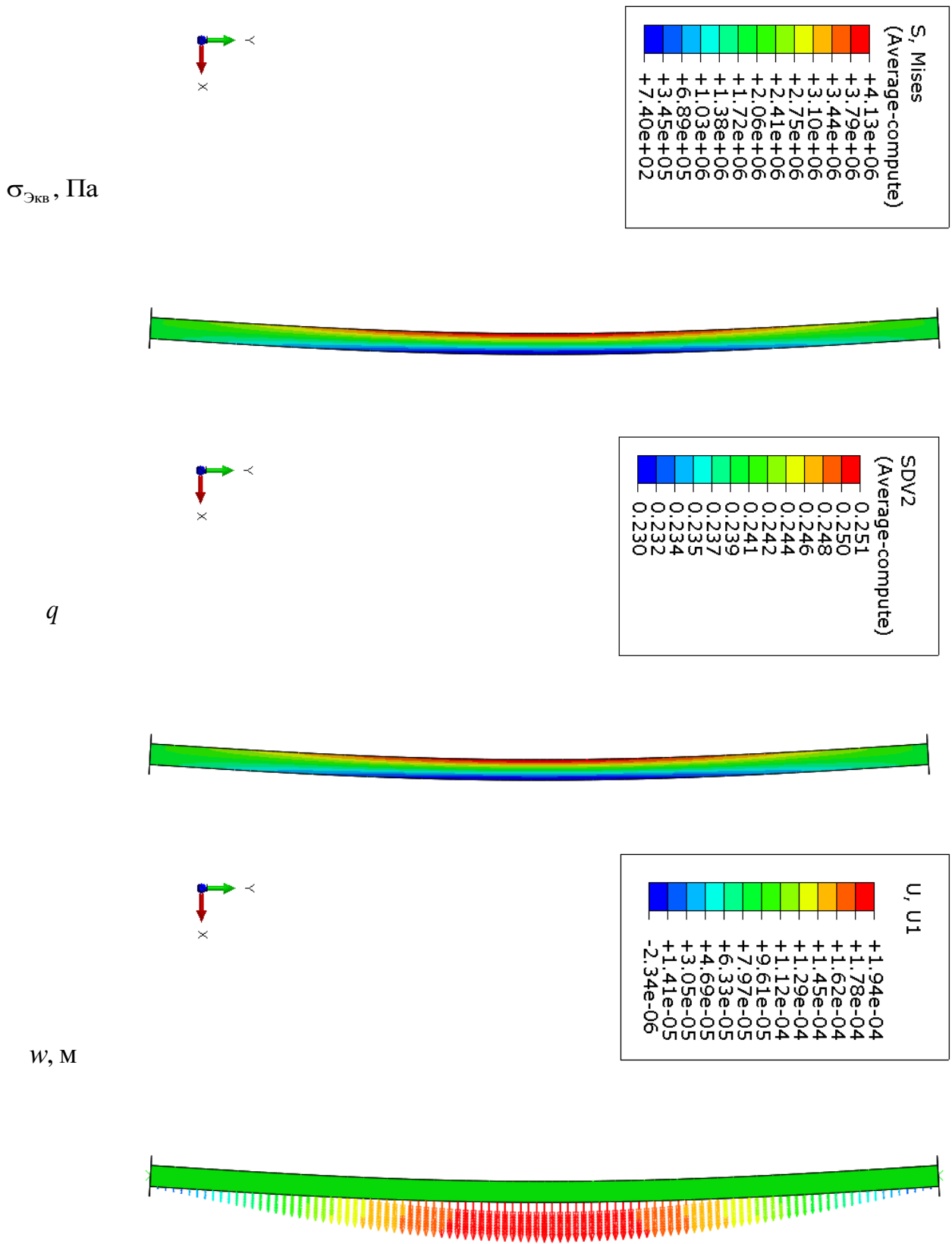


Рисунок 3.25 – Результаты расчета для стержня длиной 40 мм
 Внешняя нагрузка $P = 4\text{H}$, $T = 309,86\text{ K}$

Для стержня $L=15\text{мм}$ проведена серия независимых расчетов с $P=22; 25; 26\text{Н}$ ($P < P_{\text{кр}}^{\text{э}} = 219.3\text{Н}$). За счет начальной погиби, после завершения этапа преднагружения в стержне наблюдается неоднородное НДС (рис. 3.26). Степень неоднородности распределения эквивалентных напряжений оценивается величиной: $\Delta\sigma = (\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}) / \sigma$. Безразмерная величина $\Delta\sigma$ не зависит от приложенной нагрузки P .

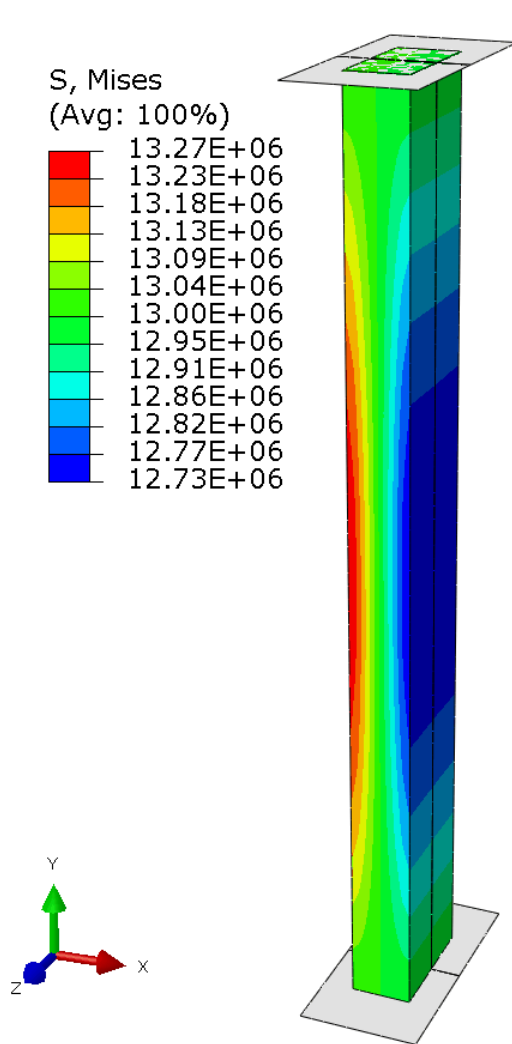


Рисунок 3.26 – Поле напряжений после этапа преднагружения ($P=26\text{Н}$), Па

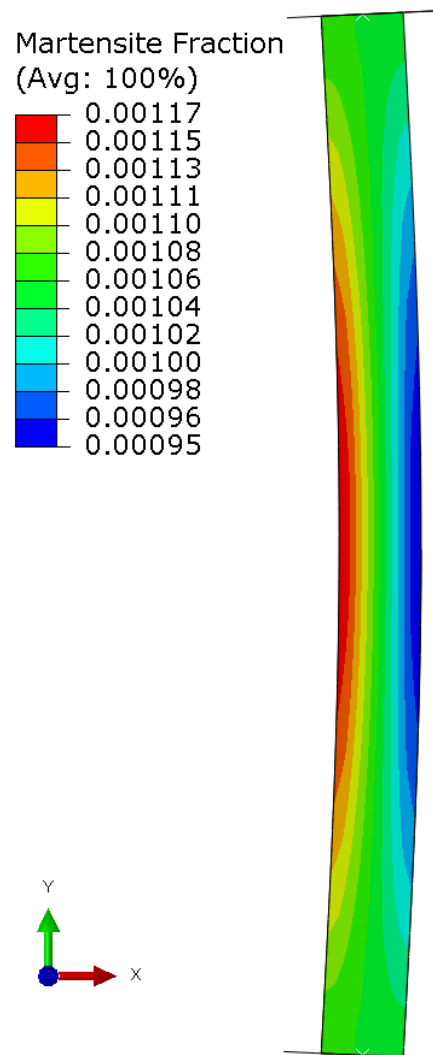


Рисунок 3.27 – Распределение мартенситной фазы ($P=26\text{Н}, T=316.5\text{K}$)
Масштабный фактор – 500

При охлаждении, вследствие зависимости $M_s(\sigma)$, формируется неоднородное распределение мартенситной фазы q (рис. 3.27), которое качественно соот-

ветствует текущему распределению механических напряжений. В каждом сечении стержня вдоль оси X q линейно падает от максимального (q_{\max}) до минимального (q_{\min}) значения (рис. 3.28), а вдоль Z : $q = \text{const}$. Изменение q по длине стержня для двух крайних положений ($x = -0.5; 0.5 \text{ мм}$) представлено на рисунке 3.29.

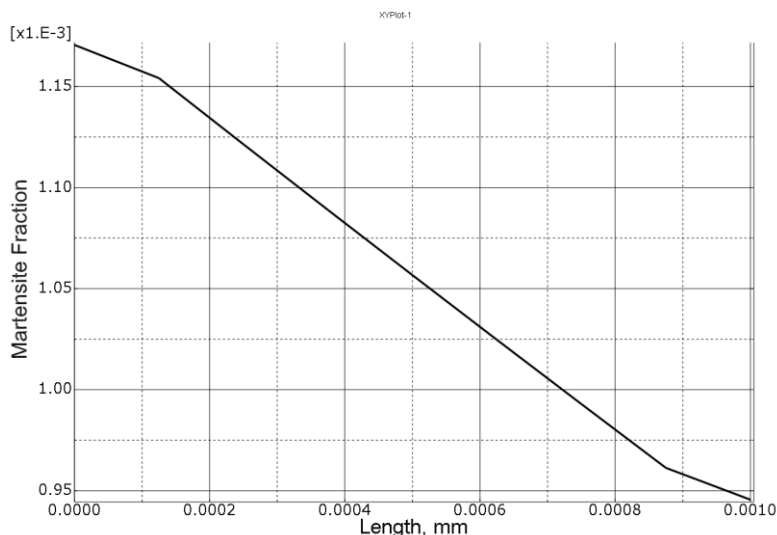


Рисунок 3.28 – Изменение q вдоль оси x центрального сечения стержня ($l = 7.5 \text{ мм}$), ($P = 26 \text{ Н}$, $T = 316.5 \text{ К}$)

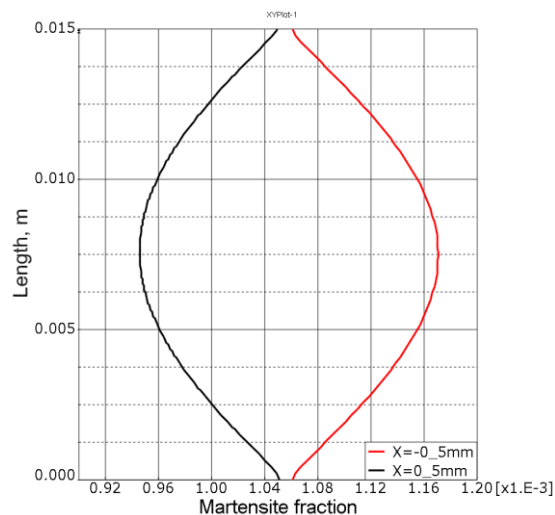


Рисунок 3.29 – Изменение q по длине стержня ($x = -0.5; 0.5 \text{ мм}$), ($P = 26 \text{ Н}$, $T = 316.5 \text{ К}$)

С учетом того, что $E_A \neq E_M$ (вставить правило смеси) неоднородное распределение мартенситной фазы приводит к неравномерному изменению приведенной жесткости стержня. Помимо этого, от текущего значения q напрямую зависит уровень накопленной фазово – структурной деформации. Совокупность этих факторов обеспечивает дополнительный прогиб стержня в процессе прямого превращения. За счет полученного прогиба растет степень неоднородности поля напряжений $\Delta\sigma$ (рис. 3.30), что в свою очередь приводит к увеличению величины $\Delta q = q_{\max} - q_{\min}$ (рис. 3.31), обеспечивающей очередной дополнительный прогиб.

Для $P < 25 \text{ Н}$ после охлаждения до температуры $T < 306 \text{ К}$ наблюдается уменьшение параметров $\Delta\sigma$ и Δq с возвращением стержня к исходной прямолинейной форме. При $P = 26 \text{ Н}$ наблюдается резкий рост $\Delta\sigma$ и Δq с выходом на

вертикальную асимптоту, что приводит к увеличению прогиба стержня и характеризуется резким скачком кинетической энергии модели (рис. 3.30).

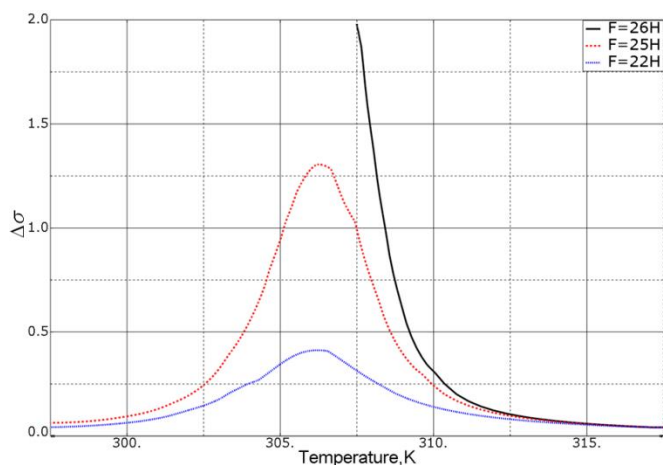


Рисунок 3.30 – Зависимость $\Delta\sigma(T)$

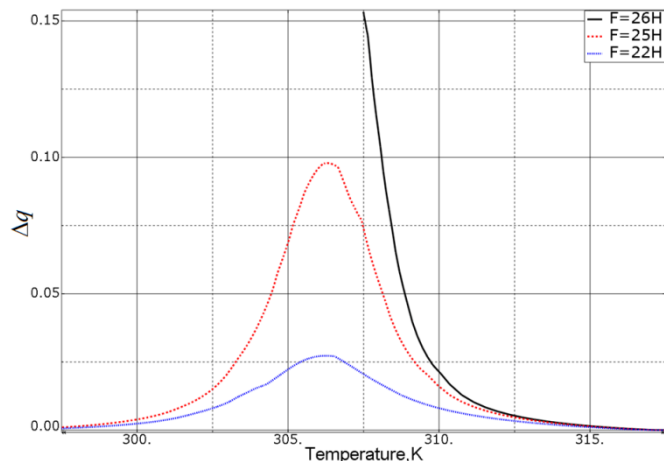


Рисунок 3.31 – Зависимость $\Delta q(T)$

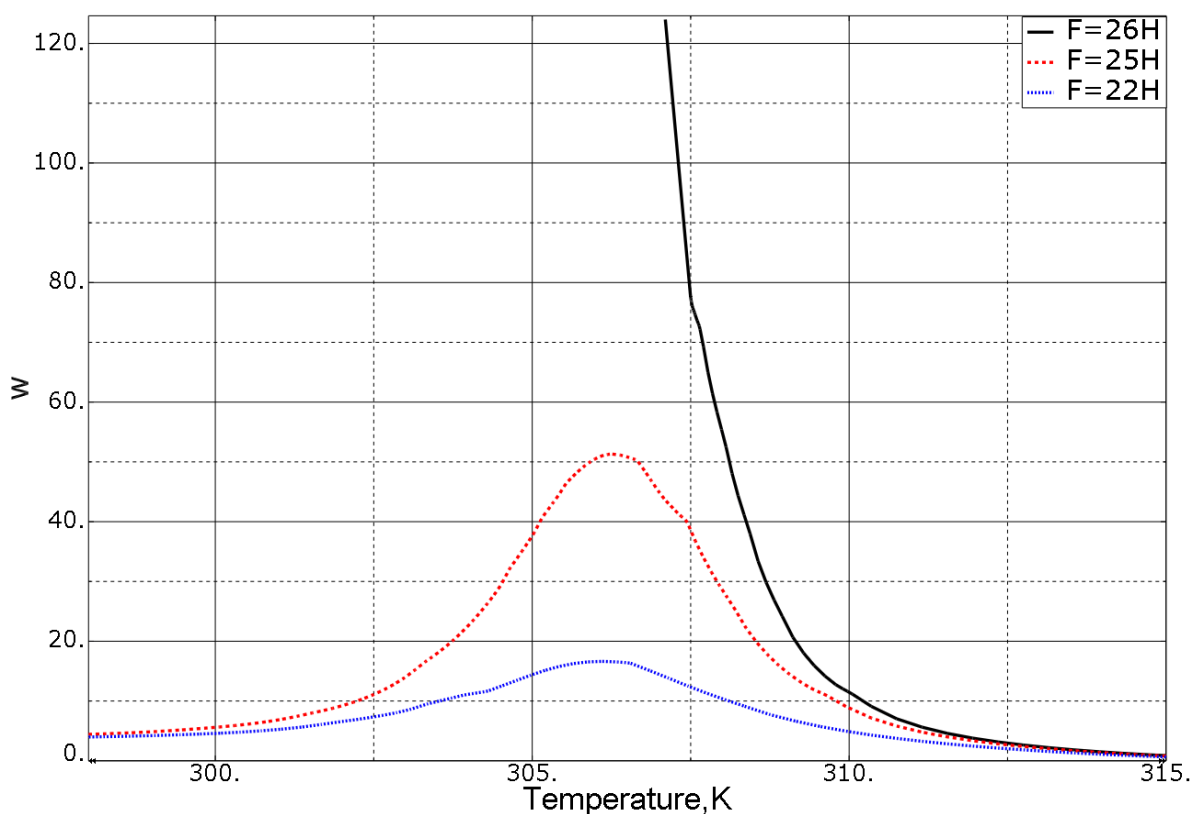


Рисунок 3.30 – Изменение безразмерного прогиба центрального узла стержня

На рисунке 3.31 приведены результаты расчета в момент потери устойчивости стержня $L = 15\text{мм}$: распределение напряжений, объемной доли мартенситной фазы и перемещений.

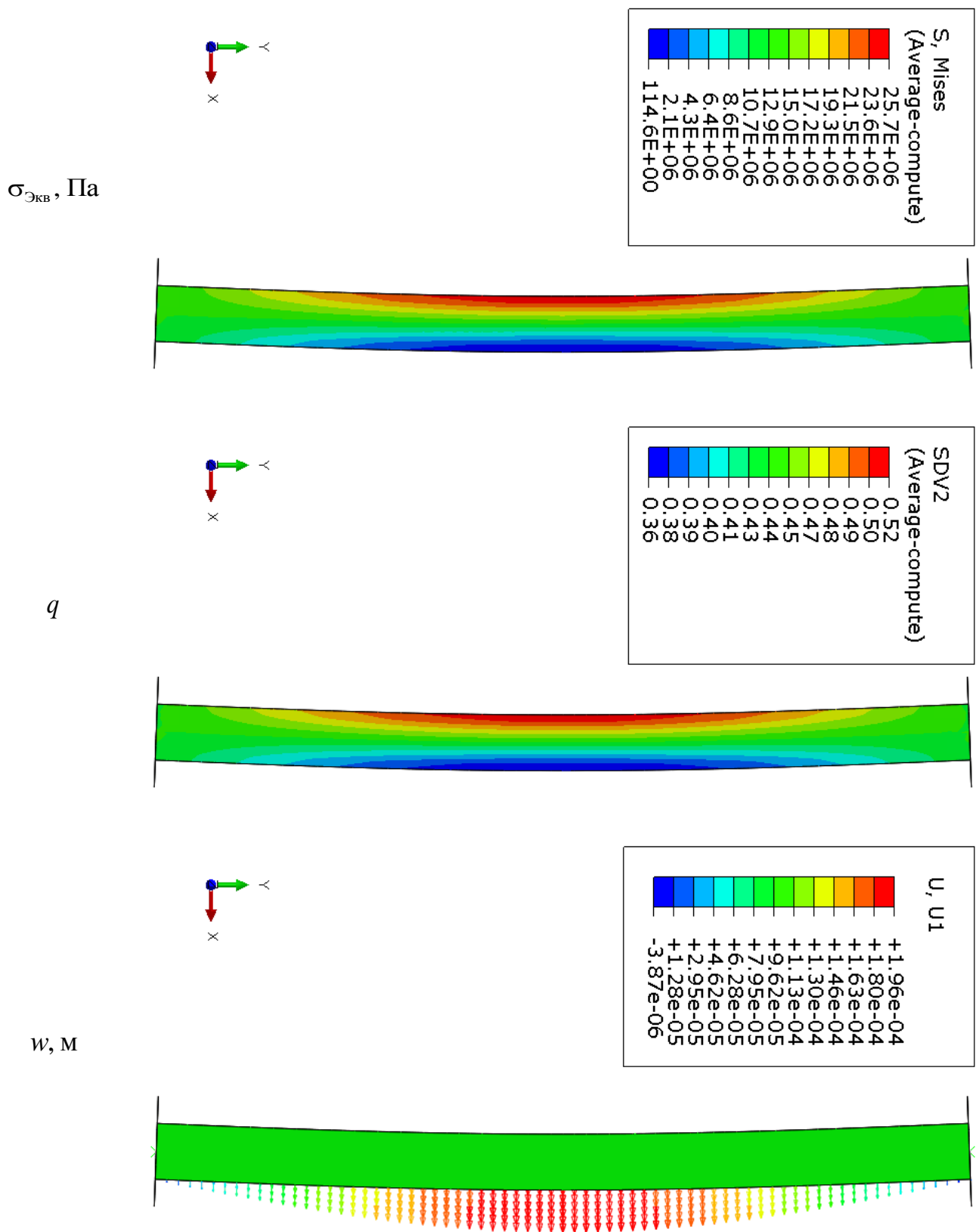


Рисунок 3.31 – Результаты расчета для стержня длиной 15 мм
Внешняя нагрузка $P = 26\text{Н}$

Используя вышеописанную методику, проведена серия расчетов на устойчивость при прямом фазовом превращении для стержней длиной 5 мм, 7 мм и 10 мм. Для предотвращения начала прямого превращения по режиму сверхупругости на этапе механического нагружения в изотермическом режиме, для стержней длиной 5 и 7 мм начальная температура была увеличена с $T_n = 323,15$ К до $T_n = 333,15$ К. Помимо этого, по мере уменьшения длины стержня, пропорционально уменьшалась величина начального дефекта для получения схожих условий по отклонению продольной оси балки от вертикального состояния. На рисунках 3.32 – 3.34 представлены НДС и распределение фазового состава в стержнях на последних успешных итерациях после потери устойчивости.

Полученные значения критической силы потери устойчивости представлены в таблице 3.7. Показано, что при принятых условиях закрепления, вне зависимости от длины стержня, сила потери устойчивости при прямом превращении составляет 11 – 13 % от соответствующей силы Эйлера при мартенситом значении модуля Юнга. Таким образом, подтверждается вывод, сделанный А. А. Мовчаном и Л. Г. Сильченко на базе исследования одномерной модели в бифуркационной постановке задачи: потеря устойчивости стержня происходит в процессе прямого фазового превращения вследствие движения границы раздела фаз по сечению стержня.

Таблица 3.7 – Критическая сила для стержней различных длин

Длина балки, мм	Размер начального дефекта, %	Сила потери устойчивости по мартенситу (Эйлер), Н	Сила потери устойчивости при прямом превращении, Н	Отношение расчетной силы к силе Эйлера
5	0,125 %	1974	265-270	0,136
7	0,175 %	1007	120-125	0,122
10	0,25 %	493,48	58-59	0,119
15	0,375 %	219,33	25-26	0,121
40	1 %	30,84	3-4	0,113

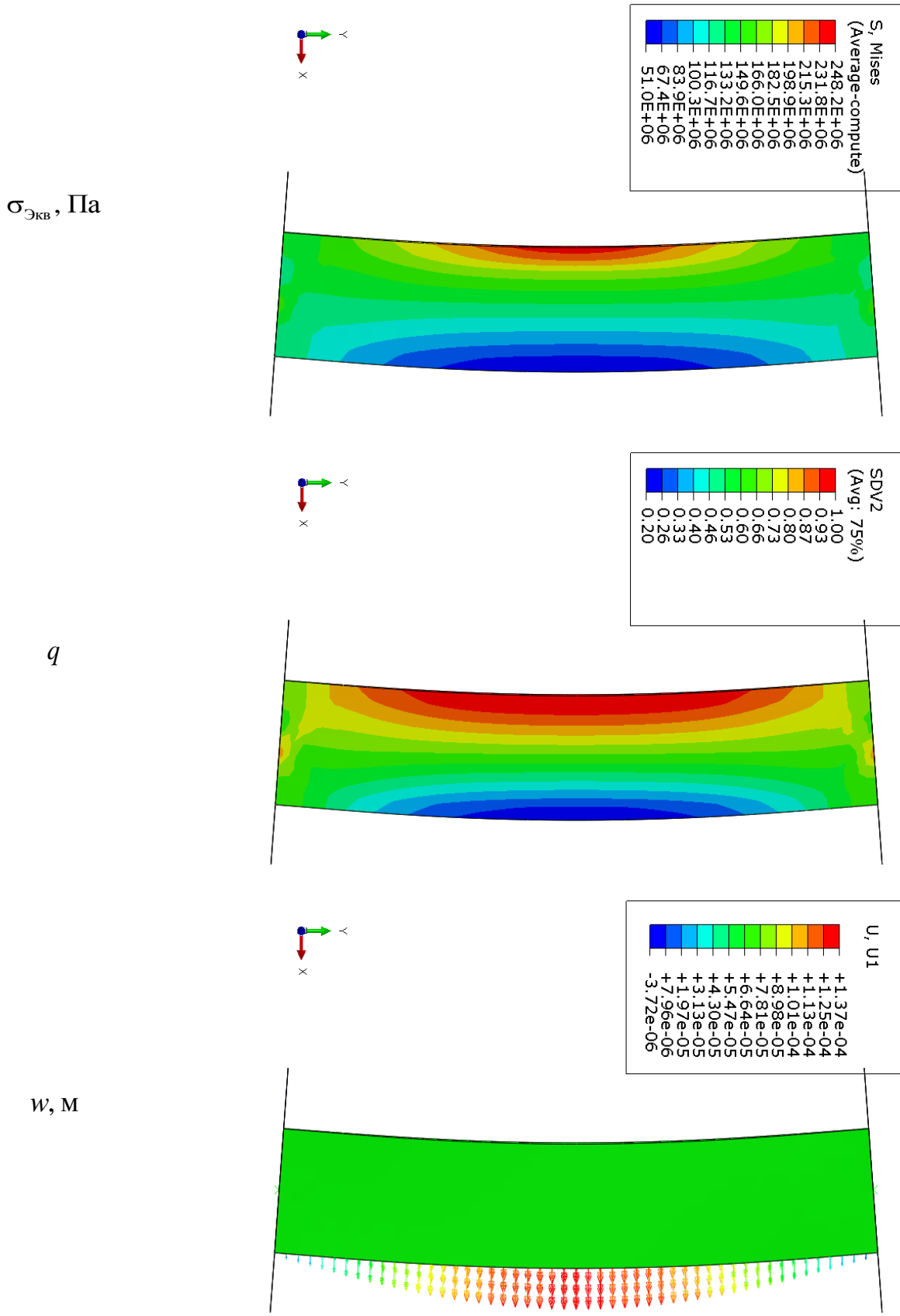


Рисунок 3.32 – Результаты расчета для стержня длиной 5 мм

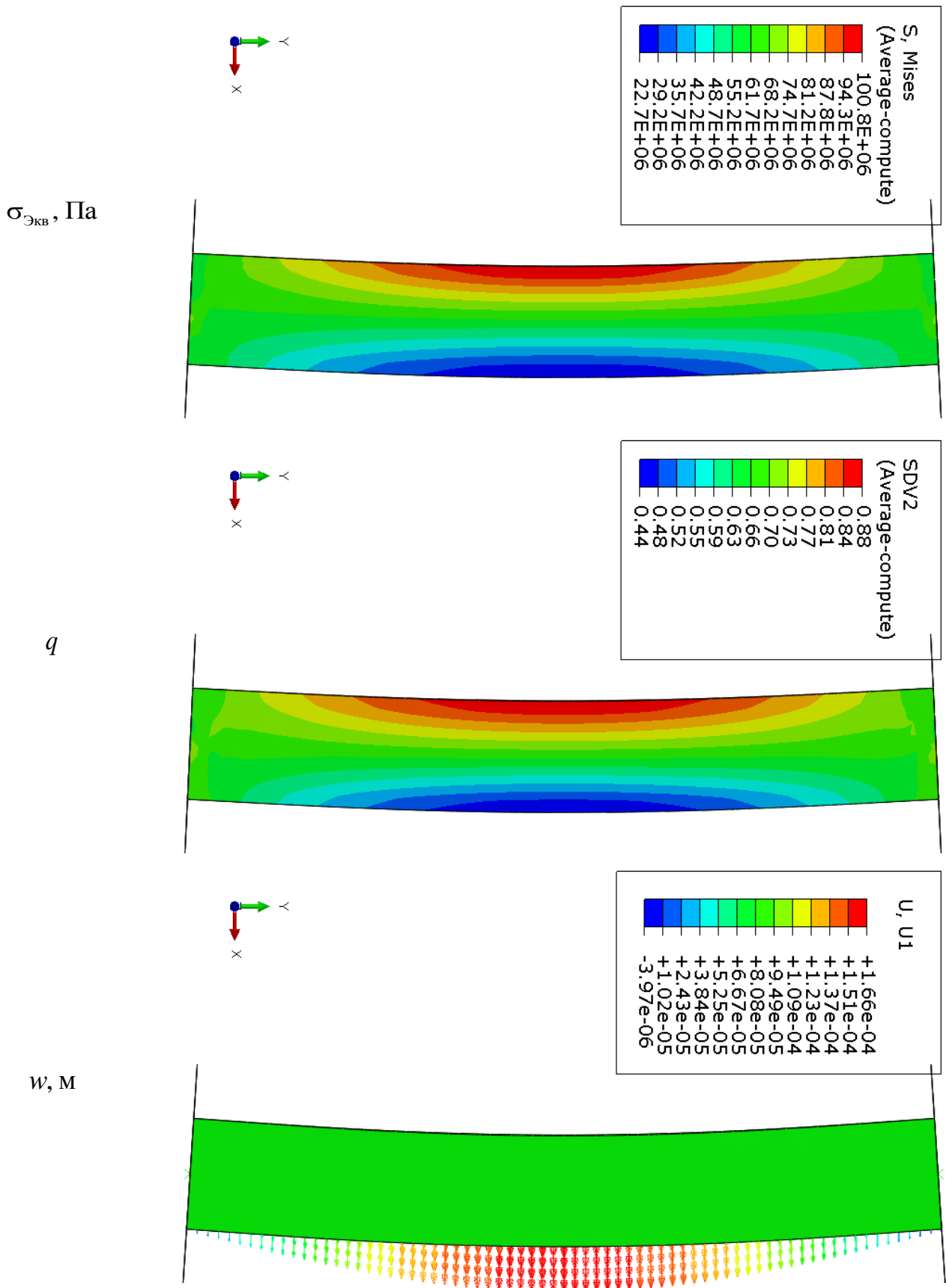


Рисунок 3.33 – Результаты расчета для стержня длиной 7 мм

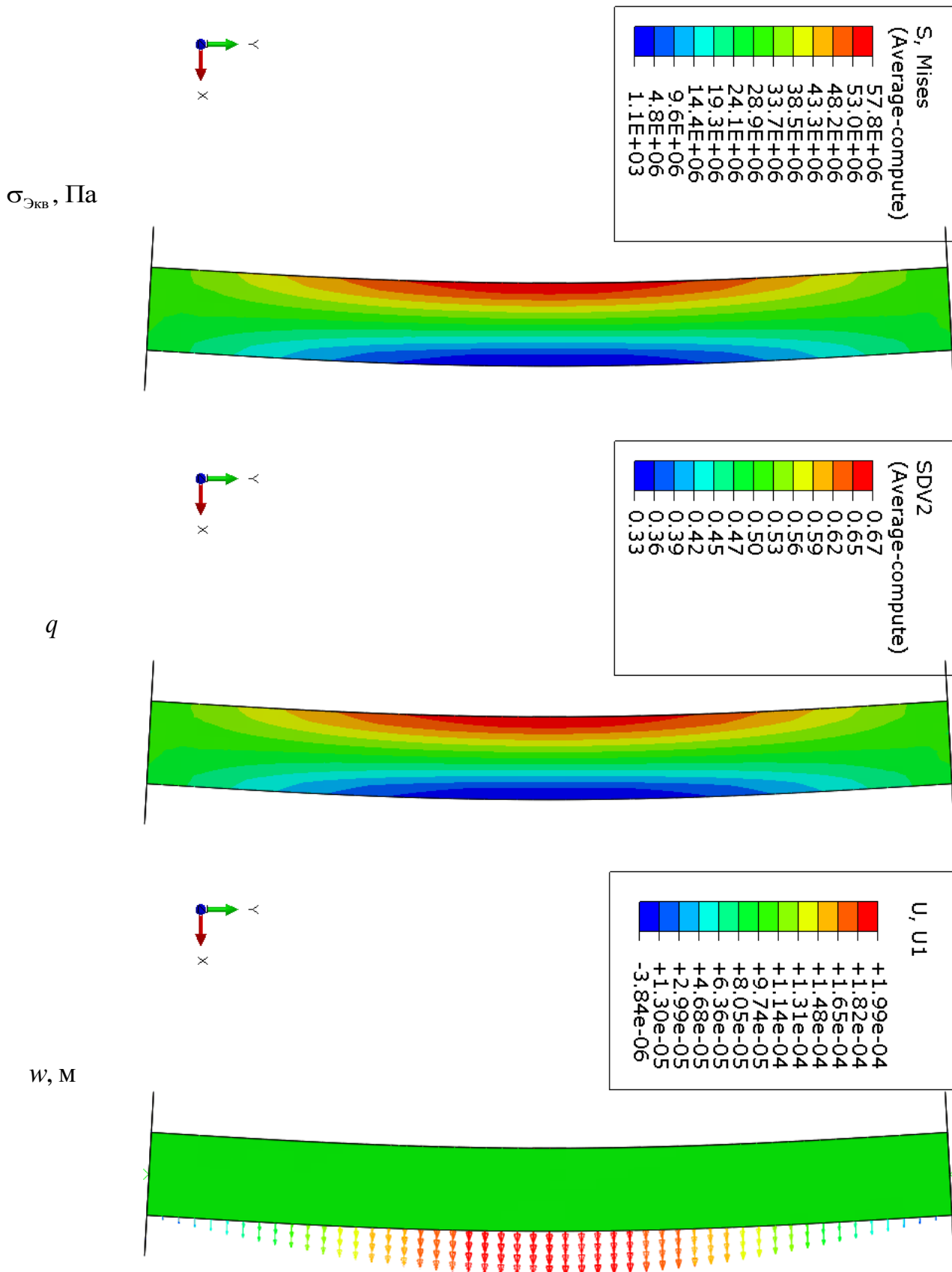


Рисунок 3.34 – Результаты расчета для стержня длиной 10 мм

3.3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ В РЕЖИМЕ ПРЯМОГО МАРТЕНСИТНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКИ

Ранее было проведено решение задачи устойчивости стержней при идеализированных граничных условиях: нижний торец стержня – шарнир; верхний – каток. Ниже рассматривается поведение стержней в режиме прямого мартенситного превращения при жесткой заделке обоих торцов. Свободным от закрепления остается только вертикальное перемещение верхнего торца, остальные степени свободы фиксируются.

Данный тип граничных условий реализуется путем следующей модификации исходных расчетных моделей:

- в контакте между торцами стержня и жесткими поверхностями используется модель сухого трения с коэффициентом, стремящемся к бесконечности;
- удаляются граничные условия, ранее применяемые непосредственно к торцам стержня;
- фиксируются степени свободы опорных точек жестких поверхностей (кроме вертикального перемещения верхней опорной точки).

Помимо этого, был проведен дополнительный частотный анализ для получения соответствующей данному типу граничных условий первой собственной формы колебаний, которая использовалась для формирования начального геометрического несовершенства – начальной погиби стержня. Как и для случая шарнирного закрепления, максимальная погибь стержня составляет 1% от ширины сечения ($b=1\text{мм}$).

В таблице 3.8 приведены критические силы потери устойчивости, полученные с использованием формулы Эйлера при мартенситном модуле Юнга. Для случая жесткой заделки уровень критических сил существенно выше, чем для случая шарнирного закрепления. Исходя из этого, на этапе преднагружения в изотермическом режиме при $T_n = 323,15\text{ К}$ в коротких стержнях ($L = 5; 7; 10\text{ мм}$)

прямое мартенситное превращение происходит по силовому механизму - реализуется сверхупругое поведение СПФ. Для обеспечения реализации температурного механизма мартенситного превращения была увеличена начальная температура этих моделей ($L = 5; 7; 10$ мм).

Таблица 3.8 – Сила Эйлера при мартенситном модуле Юнга для жесткой заделки

Длина балки, мм	Мартенситная фаза сплава $P_M, \text{Н}$
5	7896
6	5483
7	4028
10	1974
15	877
40	123

Уровень механических напряжений этапа преднагружения стержней $L = 15; 40$ мм при начальной температуре $T_n = 323,15$ К не приводит возникновению нелинейных эффектов и началу прямого мартенситного превращения. Изменение типа граничных условий привело к изменению характера неоднородности поля напряжений. В отличие от шарнирного закрепления, при котором формировался один концентратор напряжений, для случая жесткой заделки характерно образование двух дополнительных концентраторов вблизи заделок, что повлекло за собой увеличение степени неоднородности распределения мартенситной фазы как по высоте, так и по сечению стержня. Однако, как и для ранее рассмотренных граничных условий, расчетная сила потери устойчивости при прямом мартенситном превращении для случая жесткого закрепления составляет 11 – 13 % от силы Эйлера. Для $L = 40$ мм сила потери устойчивости составляет 17 Н, для $L = 15$ мм – 110 Н.

На рисунках 3.35 – 3.36 представлены результаты НДС и распределения фазового состава для стержней $L = 15; 40$ мм.

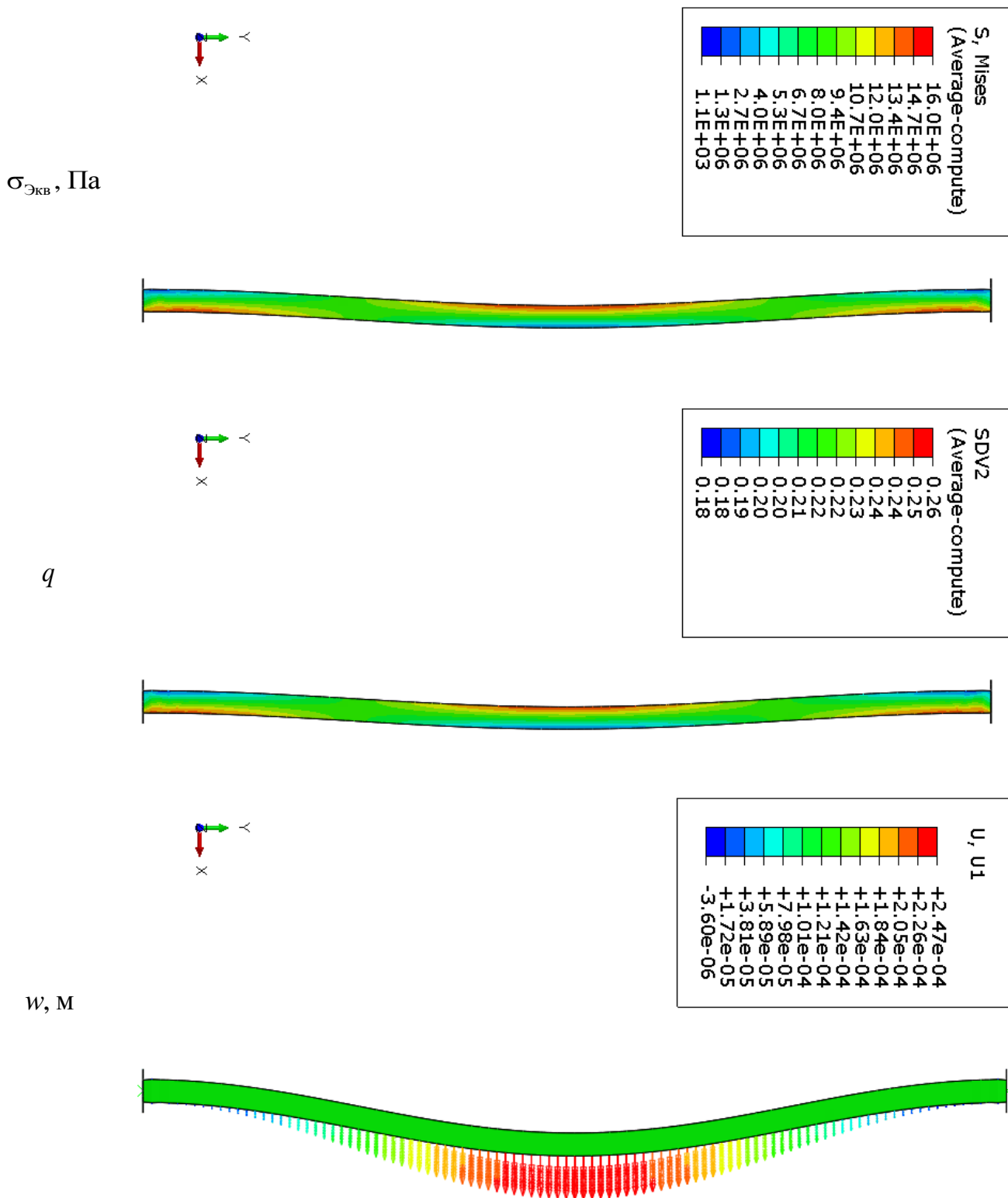


Рисунок 3.35 – Результаты расчета для стержня длиной 40 мм
Жесткая заделка

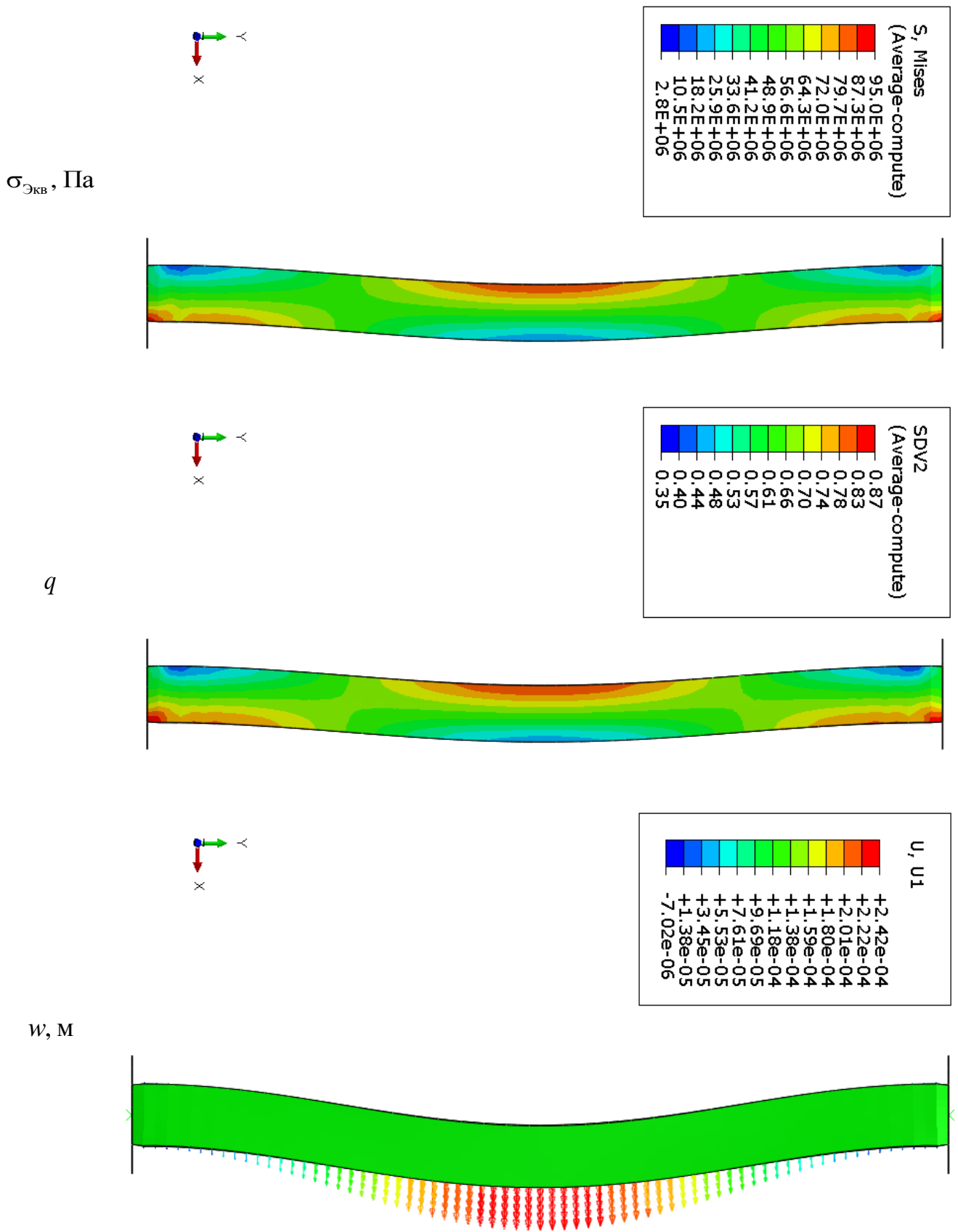


Рисунок 3.36 – Результаты расчета для стержня длиной 15 мм
Жесткая заделка

Для более коротких стержней ($L = 5; 7; 10$ мм) приложение сил, сопоставимых с силой Эйлера, приводит к прохождению прямого превращения по каналу сверхупругости, вследствие высокого уровня механических напряжений. Для этих стержней задача потери устойчивости рассматривалась в двух постановках:

- *Потеря устойчивости при прямом фазовом превращении по каналу сверхупругости.* При начальной температуре $T_n = 323,15$ К в изотермическом режиме к балке прикладывалась сила Эйлера по мартенситному модулю Юнга и оценивалась сила потери устойчивости;
- *Потеря устойчивости при прямом превращении, вызванном охлаждением стержня.* Начальная температура подбиралась таким образом, чтобы на этапе начального преднагружения не происходило прямого фазового превращения, обусловленного механическими напряжениями.

На этапе преднагружения стержня $L = 10$ мм в изотермическом режиме при температуре $T_n = 323,15$ К происходит прямое мартенситное превращение по каналу сверхупругости. Явление потери устойчивости наблюдается при нагрузке $P = 375$ Н. Стоит отметить, что для этого случая нагружения на величину критической силы потери устойчивости существенное влияние будет оказывать текущая температура. Результаты моделирования потери устойчивости стержня $L = 10$ мм при прямом превращении в режиме сверхупругости представлены на рисунке 3.37.

Для предотвращения прохождения прямого мартенситного превращения на этапе преднагружения, было проведено увеличение начальной температуры до $T_n = 343,15$ К. На этапе преднагружения было получено характерное распределение поля напряжений с формированием трех локальных концентраторов: вблизи торцов стержня и в центральной области. Сила потери устойчивости составила $P = 220$ Н. Результаты моделирования представлены на рисунке 3.38.

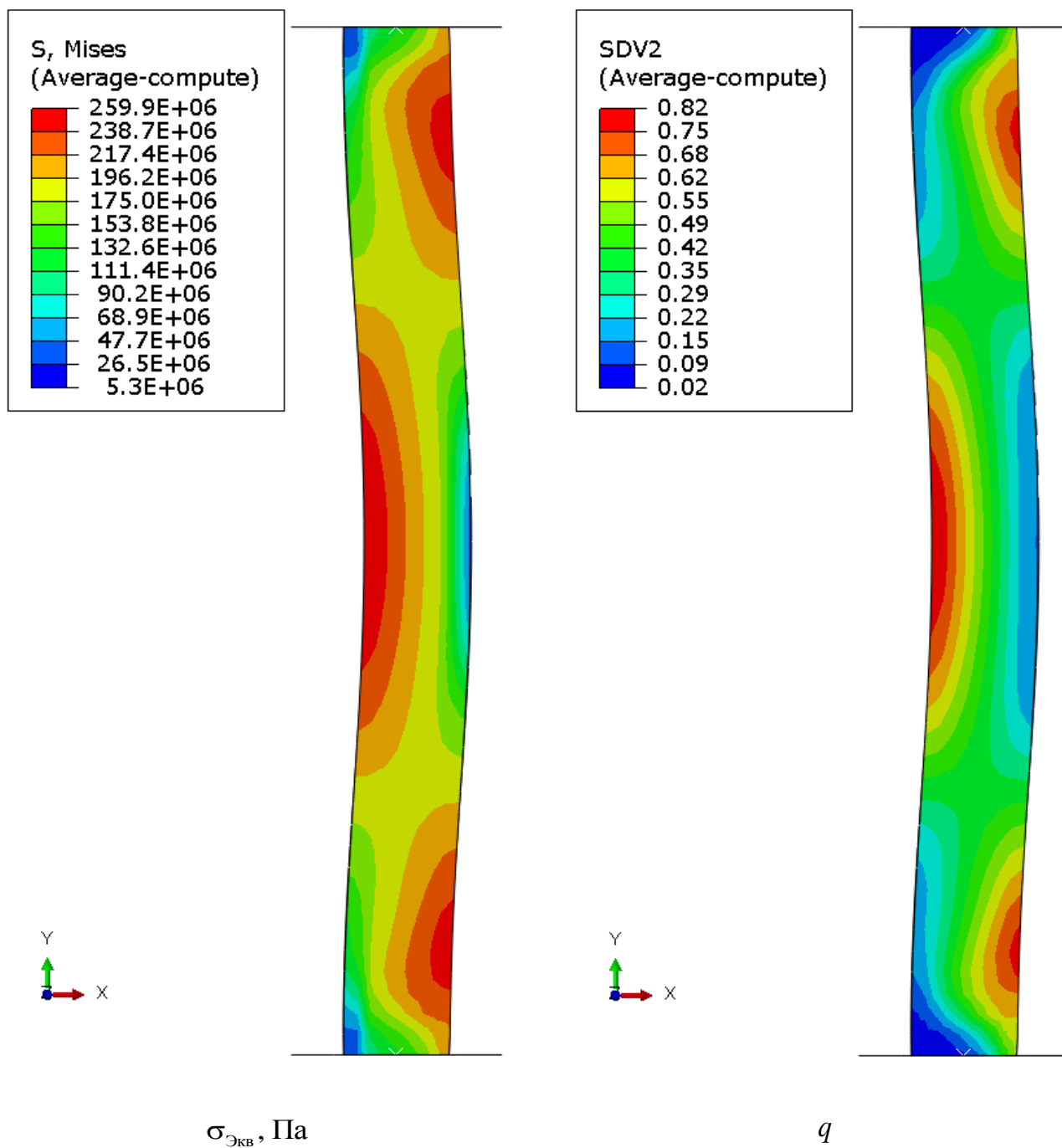


Рисунок 3.37 – Результаты расчета для стержня длиной 10 мм
 Жесткая заделка. Сверхупругое поведение. Сила потери устойчивости: 375 Н

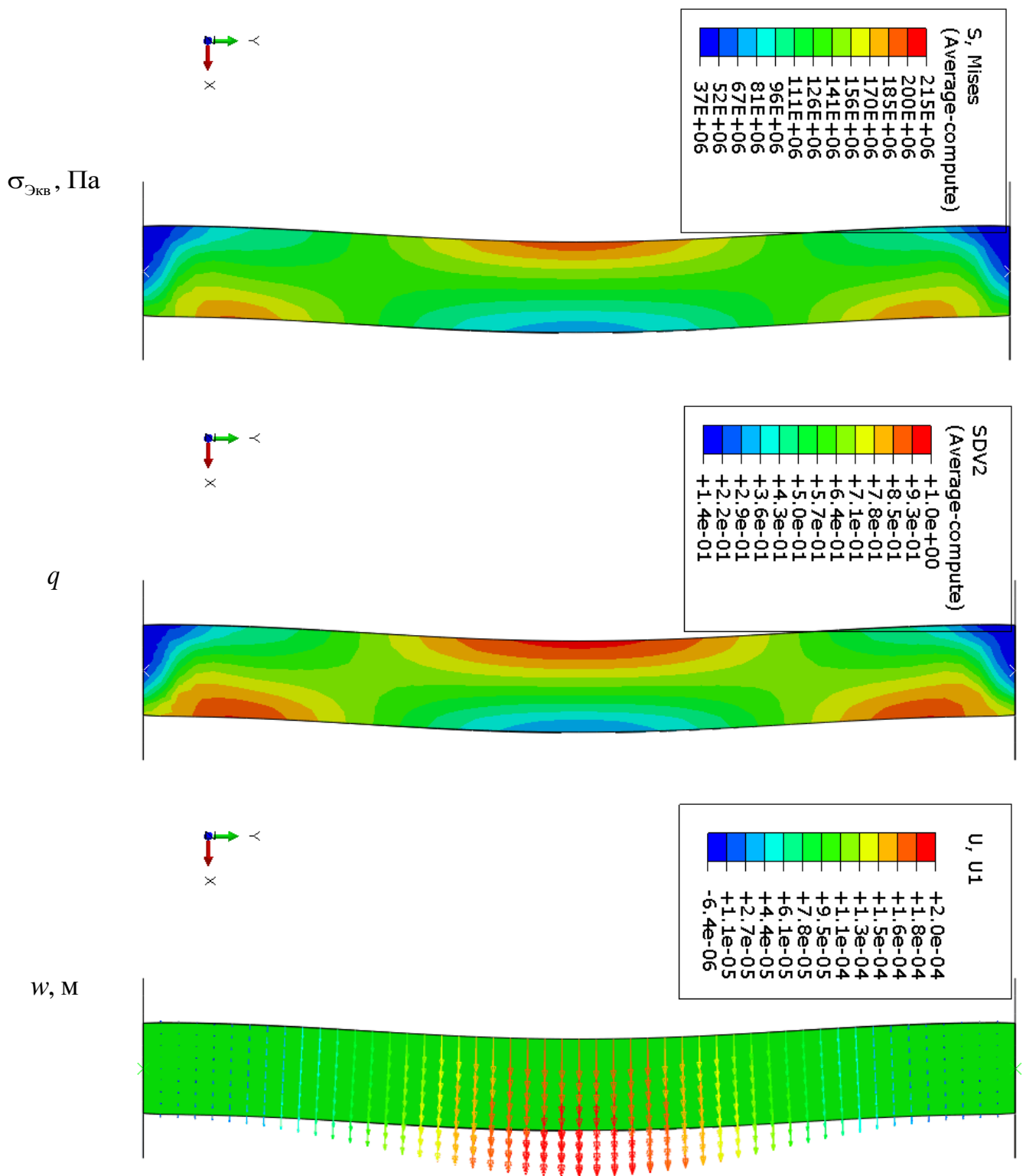


Рисунок 3.38 – Результаты расчета для стержня длиной 10 мм
Жесткая заделка. Охлаждение – ЭПП. Сила потери устойчивости: 260 Н

Для коротких стержней $L = 5; 7$ в случае жесткой заделки потери устойчивости при прямом мартенситном превращении не наблюдается.

Практическая реализация случая потери устойчивости для стержней $L = 5; 7$ при температурном фазовом превращении не представляется возможным. Это вызвано большими механическими напряжениями на этапе преднагружения и необходимостью существенного увеличения начальной температуры образца (до порядка $T_n = 1000$ К) для предотвращения реализации сверхупругого поведения. Ниже представлены результаты абстрактной постановки задачи для стержня $L = 5$.

Начальная температура стержня была увеличена до $T_n = 1083,15$ К, внешняя нагрузка равна 50% от силы Эйлера. Механические напряжения в модели составляют несколько ГПа. На начальном этапе прямого превращения наблюдается отклонение стержня от прямолинейной формы с образованием трех локальных максимумов объемной доли мартенсита (рис. 3.40). По мере прохождения прямого превращения стержень возвращается к исходной форме (рис. 3.39).

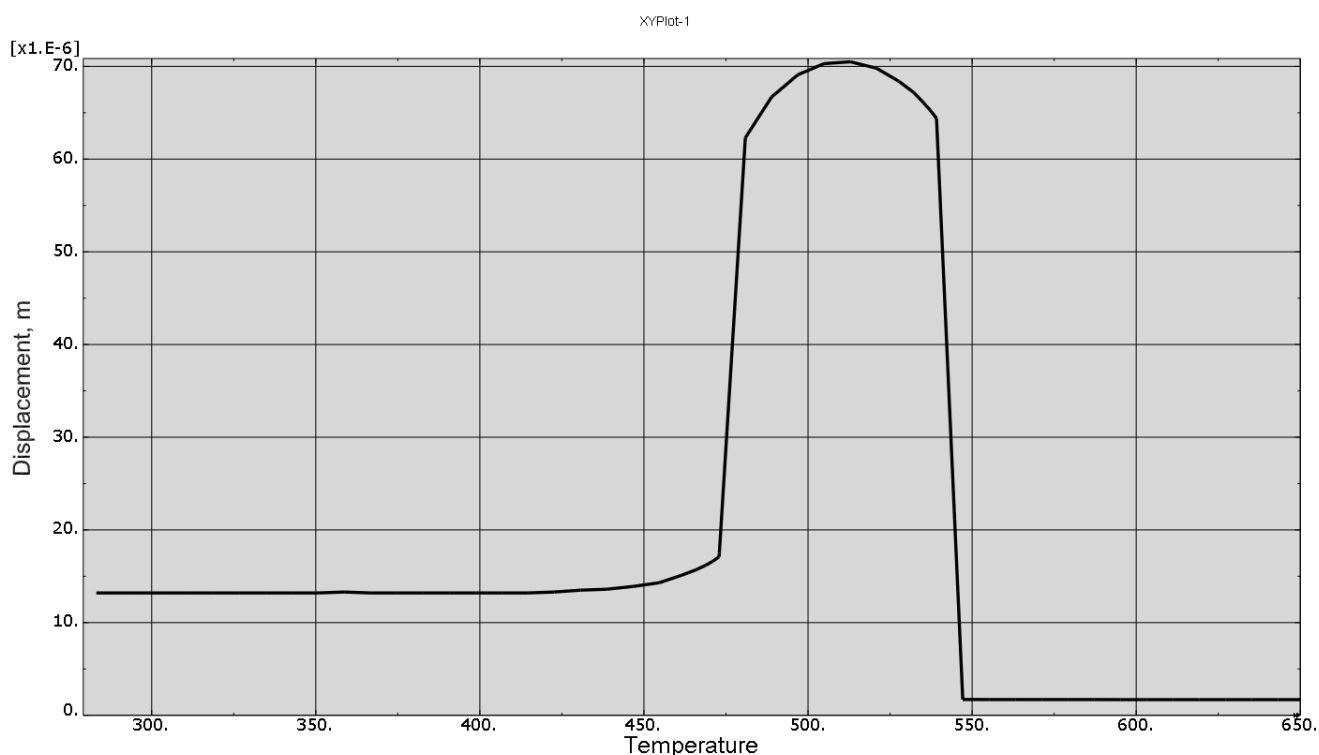


Рисунок 3.39 – Горизонтальное перемещения центрального узла стержня, $L = 5$

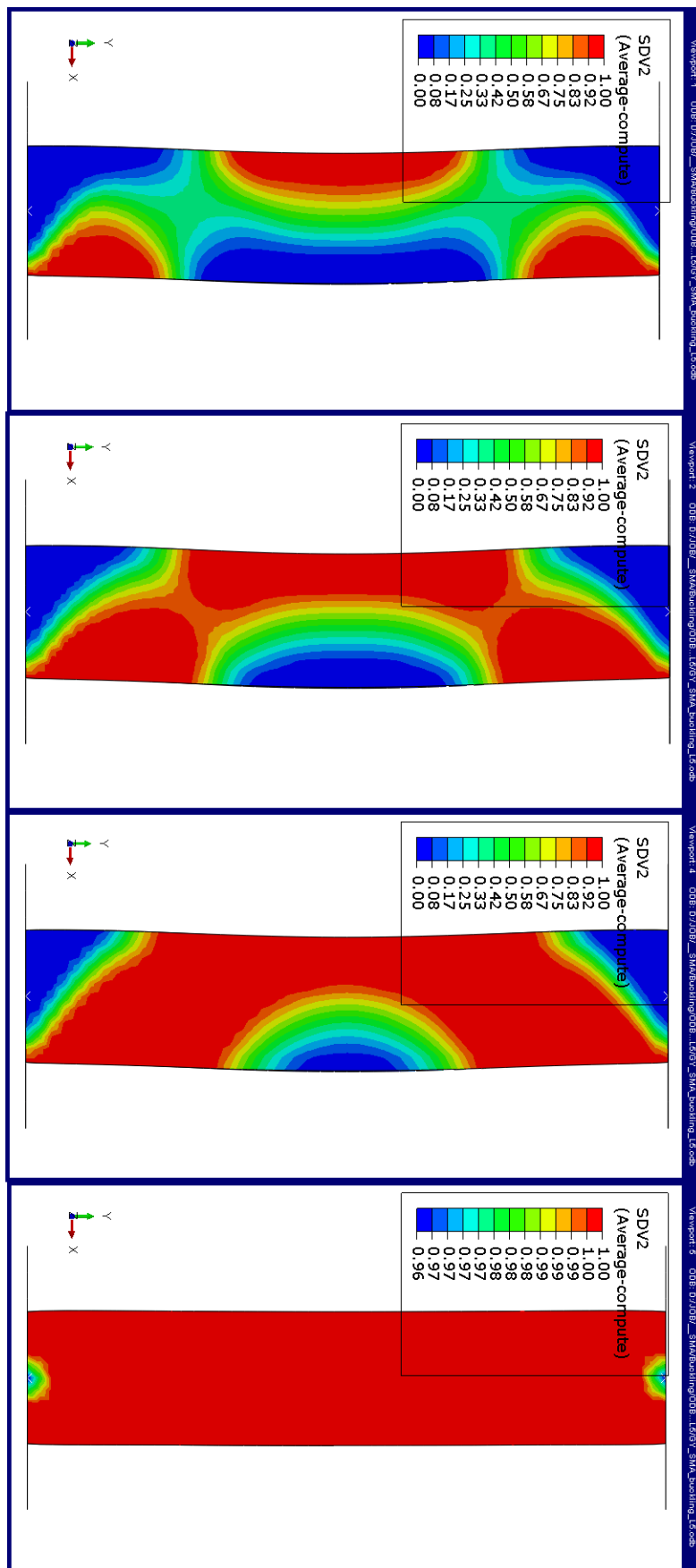


Рисунок 3.40 – Эволюция объемной доли мартенсита при охлаждении
Показана центральная плоскость стержня $L = 5$

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ К РЕШЕНИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

В настоящей главе диссертации изложены результаты численного решения ряда прикладных задач механики конструкций из СПФ на примере коронарного стента. Получены решения задач об изотермическом радиальном обжатии стента и раскрытии в рабочее положение, проведен анализ развития и локализации фазовых деформаций в данных процессах. Рассмотрено решение задачи об осевом сжатии тонкостенной цилиндрической оболочки ячеистой структуры. На примере упруго-пластической оболочки построено численное решение тестовой задачи о потере устойчивости прямолинейного равновесного состояния и о закритическом состоянии. Адекватность численного решения подтверждена экспериментальными данными. Получено решение аналогичной задачи для ячеистой оболочки из СПФ в режиме сверхупругости, приведено сравнение поведения сверхупругой и упруго-пластической оболочек при кинематическом сжатии с потерей устойчивости.

Тонкостенные каркасные периодические структуры на уровне элементарной ячейки представляют собой стержневые системы. Классические сетчатые оболочки образованы жесткими ячейками, однако в некоторых случаях стержневая система может быть статически определима, и при образовании пластического шарнира в ячейке конструкция становится механизмом. Данное свойство позволяет создавать конвертируемые конструкции с широким диапазоном изменения размеров, а в случае изготовления из материалов, обладающих эффектом памяти формы либо сверхупругости – и системы с обратимой деформацией, обладающие гистерезисной характеристикой. Практический расчет подобных механических систем в случае простого деформирования (например, однородное радиальное расширение – обжатие ячеистой цилиндрической оболочки) допускает аналитические решения [166], однако при сложном нагружении и неоднородной глобальной деформации конструкции, существенно нелинейное поведение системы (пласти-

ческое деформирование либо фазово-структурные переходы в материале, большие перемещения) приводит к необходимости применения численных методов. В некоторых случаях возникновение контактного взаимодействия с сухим трением смежных ячеек, входящих в соприкосновение в процессе деформирования, дополнительно усложняет поведение системы настолько, что использование стандартных алгоритмов решения задачи, входящих в состав программных комплексов на базе метода конечных элементов, может быть связано с неудовлетворительной сходимостью решения. Ситуация такого рода может возникнуть, в частности, при глобальной потере устойчивости тонкостенной ячеистой структуры. При необходимости учета взаимодействия структуры с внешней средой численное решение задачи еще более усложняется.

Одним из примеров применения каркасированных цилиндрических оболочек малой жесткости являются коронарные и сосудистые стенты, армирующие стенки сосуда. Основной причиной применения ячеистой структуры в данном случае является необходимость раскрытия стента в сосуде с увеличением диаметра от транспортного до рабочего; применяются различные механизмы раскрытия – баллонный [167], где оболочка расширяется давлением наддува, приложенным ко внутренней поверхности со стороны специального баллона, при этом необратимая деформация развивается за счет пластичности, или безбаллонный [168] – развертывание за счет эффекта сверхупругости при применении в качестве конструкционного материала никелида титана.

Эффективность и безопасность практического применения различных типов медицинских стентов в современной и перспективной кардиохирургии определяется точным выдерживанием заданных рабочих параметров стентов при их транспортировании и раскрытии в сосуде, в первую очередь – геометрических размеров: диаметра внешней поверхности стента в транспортном и рабочем состоянии, изменения длины стента вдоль образующей цилиндра при раскрытии и ряда других. Для поддержания нормального физиологического просвета сосудов дизайн ячеек стентов должен обеспечивать нахождение величины радиальной жесткости в требуемом диапазоне. Недостаточная радиальная жесткость может привести к

неполному раскрытию и фиксации стента на стенке сосуда; чрезмерная величина радиальной жесткости может быть причиной травмирования и разрыва сосуда. В рабочем состоянии стент нагружен главным образом внешним контактным давлением со стороны сосуда. При движении человека происходит деформирование сосуда, что создаёт дополнительную нагрузку, в том числе и осевую. Известно, что осевая жесткость сосудов достаточно невелика и возрастает локально в месте установки стента, что, в свою очередь, увеличивает нагрузку и может привести к большим изгибным деформациям, потере устойчивости и разрушению стента [169].

Ниже приводится описание решения задачи начального этапа проектирования самораскрывающихся стентов с оценкой НДС конструкции на различных стадиях раскрытия. Рассматриваются вопросы деформирования и устойчивости стентов при осевом сжатии в режиме дислокационной пластичности и сверхупругости.

4.1. ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЕТЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА СОСУДИСТОГО СТЕНТА В РЕЖИМЕ СВЕРУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ

В большинстве случаев самораскрывающиеся стенты изготавливают из цилиндрических трубок никелида титана методом лазерной резки. В работе данного типа стентов используется свойство сверхупругости СПФ, то есть способности к прямому\обратному превращению с накоплением\возвращением фазово – структурной деформации при росте\падении механических напряжений. Перед проведением операции проводится обжатие стентов и их установка в систему доставки. Обжатие сопровождается прямым фазовым превращением в областях максимальных напряжений. На этом этапе важно не допустить образования локальных очагов пластической деформации, что впоследствии может привести к неполному обратному фазово – структурному превращению, то есть к неполному раскрытию стента. В конструкцию системы доставки входит жесткая цилиндрическая оболочка, которая не допускает преждевременного раскрытия стента.

После подведения стента к месту патологического сужения сосуда проводится снятие удерживающей оболочки системы доставки. Процесс снятия удерживающей оболочки сопровождается постепенным раскрытием стента с восстановлением исходного диаметра и обратным фазово – структурным превращением.

К основным задачам начального этапа проектирования можно отнести выбор первоначального дизайна элементарных ячеек и их количества в окружном направлении. Перечисленные параметры оказывают первостепенное влияние на главную рабочую характеристику стента – радиальную жесткость. К возможным и желательным на начальном этапе проектирования упрощениям физической модели процесса деформирования стента следует отнести, во-первых, пренебрежение влиянием деформирующегося сосуда на процесс раскрытия стента. Пренебрежение влиянием сосуда представляется вполне допустимым при выборе структуры стента, так как представление всех возможных вариантов сосуда с дефектом некоторой усредненной моделью не представляет практического интереса. В то же время исключение контактного взаимодействия стента с сосудом из физической модели позволяет резко упростить математическую модель и сократить потребный объем вычислений, а также время работ на данном этапе проектирования. Кроме того, представляется целесообразным пренебречь точным описанием поведения удерживающей цилиндрической оболочки и считать её абсолютно жесткой. Отработка подобного метода исследования основных рабочих характеристик и НДС конструкции в упрощенной постановке задачи позволит создать теоретическую базу для проектирования стентов различного типа и назначения в сокращенные сроки [170].

Для проведения численного моделирования был выбран стент, имеющий открытый тип дизайна ячеек с несимметричным расположением перемычек. Стент состоит из двух типов элементарных ячеек, представленных на рисунке 4.1.

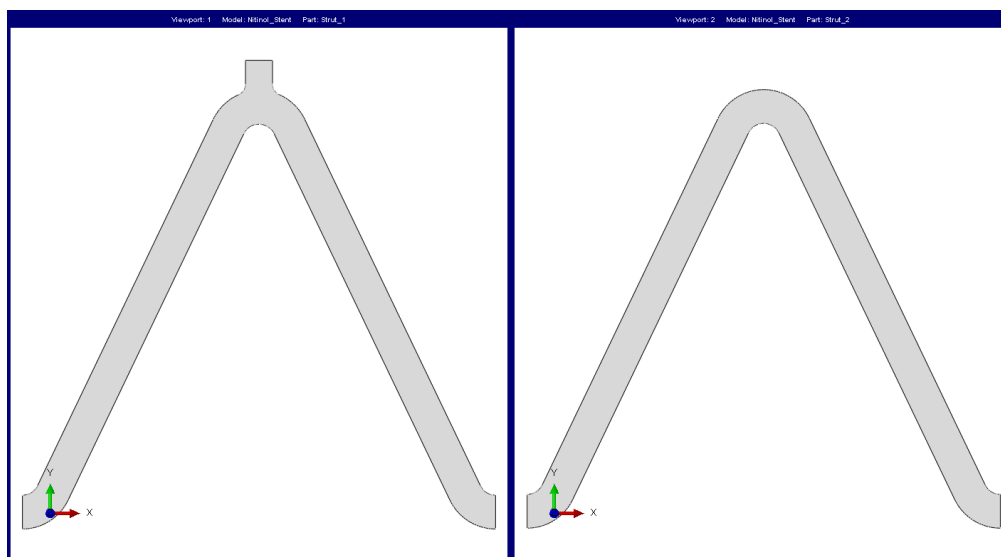


Рисунок 4.1 – Геометрическая форма элементарных ячеек стента

На основе плоской развертки стента была построена трехмерная конечно – элементная модель с использованием 8-ми узловых элементов первого порядка интерполяции и редуцированной схемой интегрирования C3D8R. Стент длиной 14,5 мм имеет 10 секций в продольном направлении и 9 в окружном. Внутренний радиус $R_1 = 1,92$ мм, внешний радиус $R_2 = 2$ мм.

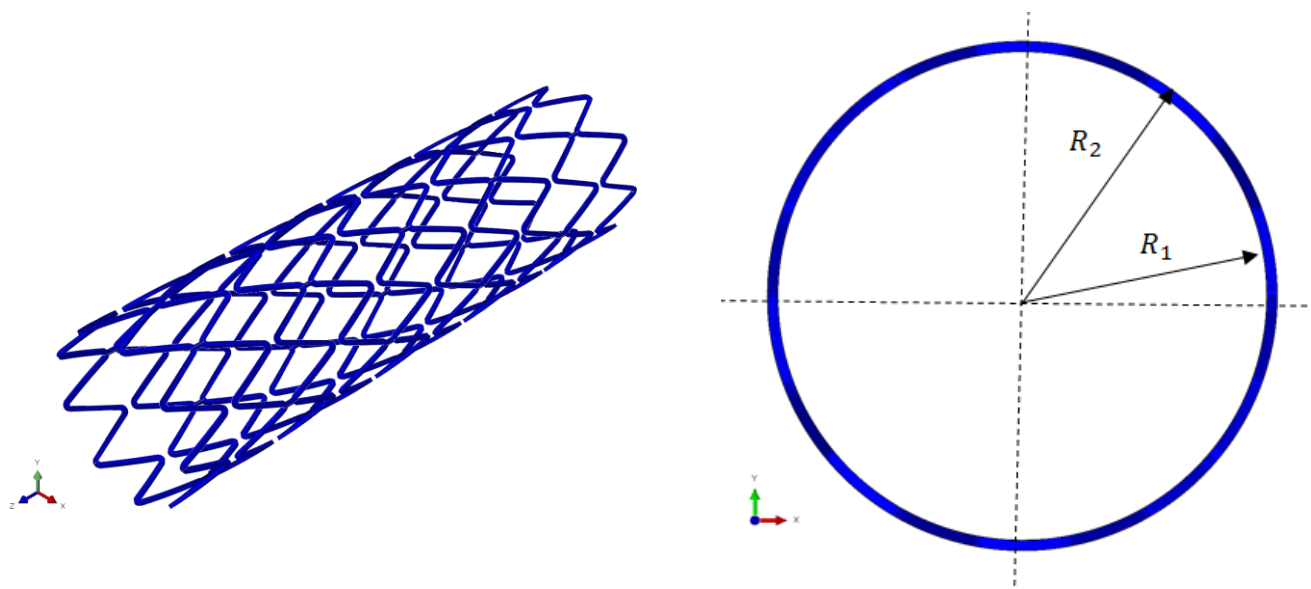


Рисунок 4.2 – Твeрдотельная модель стента

Полученная модель обладает круговой геометрической симметрией с углом в 60 градусов. В дальнейших расчетах будет использована часть конструкции с определением условий симметрии по границам выреза (Рисунок 4.3).

Удерживающий элемент системы доставки представлен цилиндрической поверхностью радиусом 2 мм. Конечно – элементная аппроксимация геометрической модели проводится с использованием поверхностных четырех узловых элементов SFM3D4R. Данный тип конечных элементов абсолютно податлив и не способен к восприятию нагрузки.

Для обеспечения передачи нагрузки от внутренней поверхности обжимающего инструмента к внешней поверхности стента, введено контактное взаимодействие с коэффициентом трения 0,2.

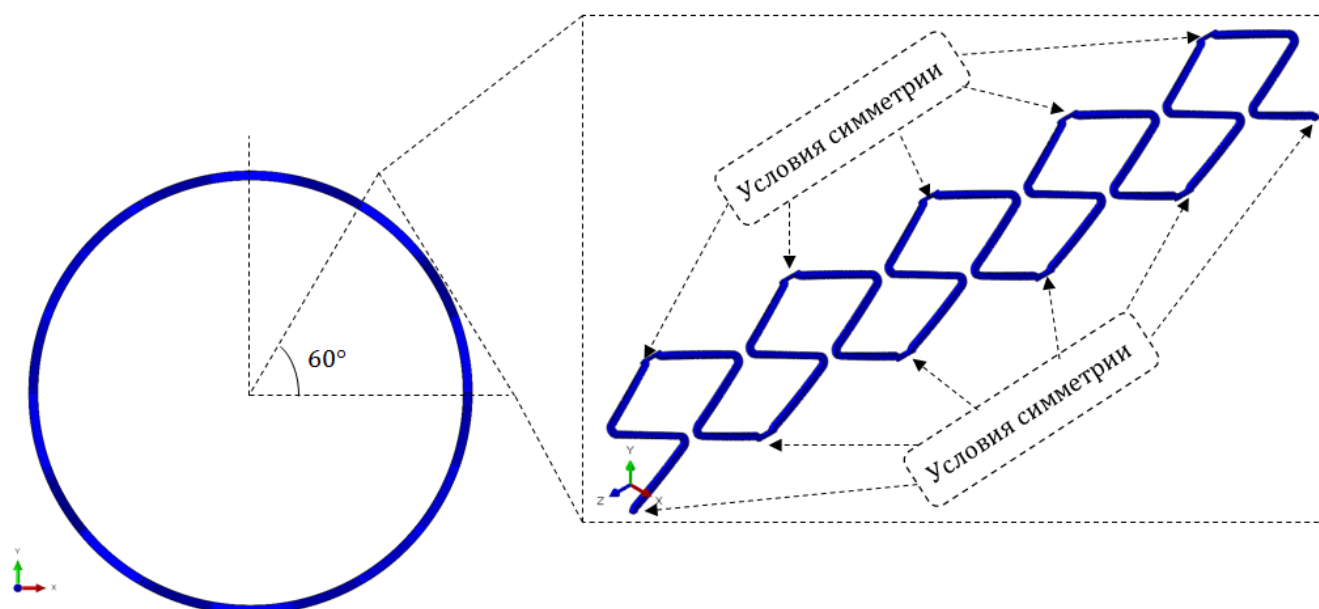


Рисунок 4.3 – Учет условия геометрической симметрии

Сверхупругое поведение материала под механической нагрузкой описывается представленной в Главе 2 термомеханической моделью поведения материала. Параметры модели были подобраны таким образом, чтобы обеспечить требуемые значения критических напряжений начала\окончания прямого и обратного фазово – структурного превращения. Активация прямого фазового превращения происходит при достижении действующих пороговых напряжений – σ_s^1 . Полный пере-

ход аустенита в мартенсит завершится при величине напряжений – σ_f^1 . При разгрузке, падение напряжений до σ_s^2 вызывает обратное фазовое превращение, которое заканчивается при σ_f^2 .

Характер поведения сплавов с памятью формы при изотермическом нагружении схематично показан на рисунке 4.4, а параметры модели представлены в таблице 4.1.

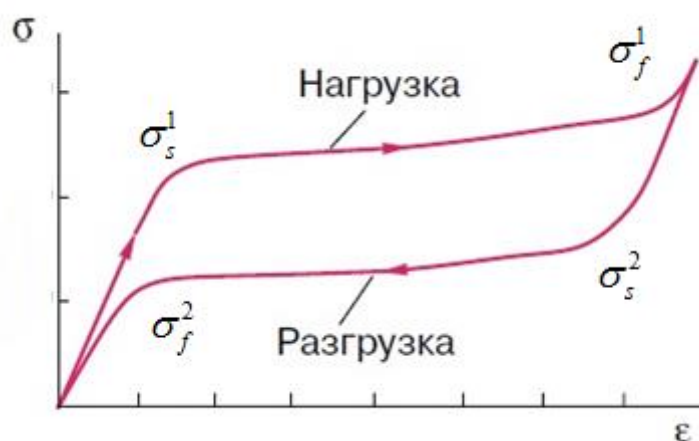


Рисунок 4.4 – Характер поведения сплавов с памятью формы при изотермическом нагружении

Таблица 4.1 – Свойства материала

Обозначение	Описание	Значение
E_A	Модуль Юнга аустенита	70 000 МПа
E_M	Модуль Юнга мартенсита	30 000 МПа
ν	Коэффициента Пуассона	0,33
σ_s^1	Напряжение начала прямого превращения	489 МПа
σ_f^1	Напряжение окончания прямого превращения	572 МПа
σ_s^2	Напряжение начала обратного превращения	230 МПа
σ_f^2	Напряжение окончания обратного превращения	147 МПа

Весь процесс численного моделирования разделен на два этапа. На первом этапе проводится радиальное обжатие стента цилиндрической поверхностью,

имитирующее установку стента в систему доставки. Для этого всем узлам обжимающего инструмента определялось отрицательное радиальное перемещение $U_1 = 0,8$ мм (Рисунок 4.5). На втором этапе удерживающая оболочка перемещается вдоль оси стента ($U_3 = 15$ мм), тем самым освобождая его – происходит раскрытие стента. Связь между этапами осуществлена таким образом, что результаты моделирования первого этапа являются начальными условиями для второго.

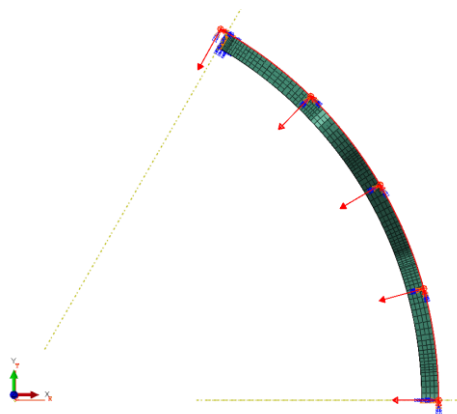


Рисунок 4.5 – Первый этап моделирования: Радиальное обжатие стента ($U_1 = 0,8$ мм)



Рисунок 4.6 – Второй этап моделирования: Продольное перемещение ($U_3 = 15$ мм) удерживающей оболочки. Раскрытие стента

На этапе обжатия происходит прямое фазово – структурное превращение, локализованное в области вершин ячеек стента (Рисунок 4.7). Началу превращения соответствует радиус $R = 1.72$ мм. На конечной стадии обжатия вершины ячеек находятся в смешанной фазе аустенит – мартенсит. Прямолинейные участки ячеек работают в упругой области и не претерпевают фазовых превращений, как и предполагает концепция оболочек ячеисто-периодической структуры. Прохождение прямого превращения сопровождается накоплением обратимой фазово – структурной деформации (Рисунок 4.8).

Распределение объемной доли мартенсита в вершинах ячеек носит достаточно неоднородный характер. Завершение прямого превращения с полным пере-

ходом материала в мартенситную фазу наблюдается только в приповерхностных областях, в которых развиваются максимальные механические напряжения (Рисунок 4.9, 4.10). Остальной объем материала находится в смешанной фазе, параметр объемной доли мартенсита уменьшается по мере приближения к внешней цилиндрической поверхности ячейки.

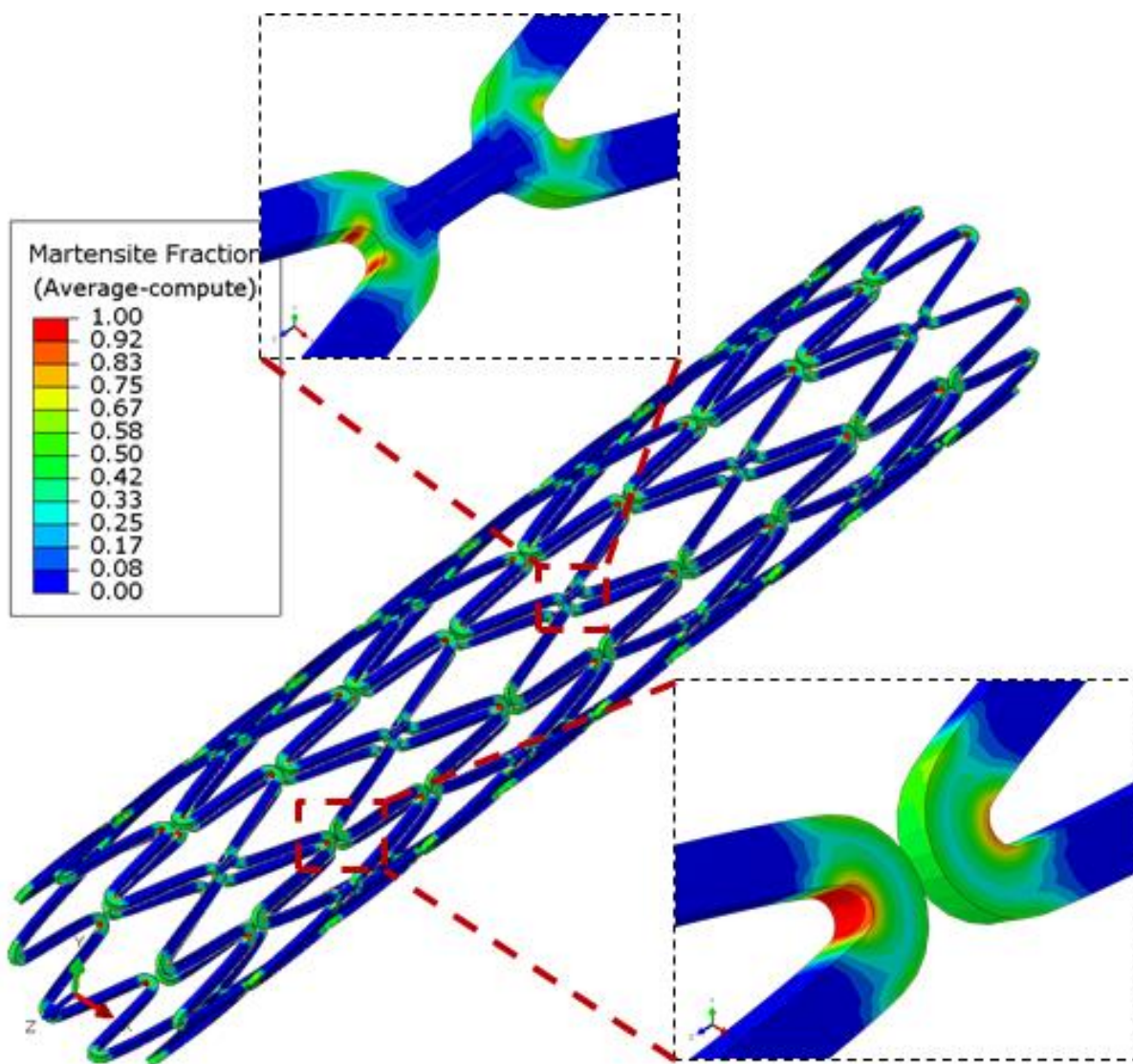


Рисунок 4.7 – Распределение объемной доли мартенсита на конечной стадии этапа обжатия

В перемычках, связывающих секции стента, фазового превращения не происходит, они работают в полностью аустенитной фазе на всех этапах нагружения.

При обжатию наблюдается определенная неравномерность деформирования стента в радиальном направлении (Рисунок 4.11). Минимальные радиальные пе-

ремещения составляют 0,794 мм, максимальные – 0,831 мм. Абсолютная погрешность радиуса лежит в пределах 0,037 мм.

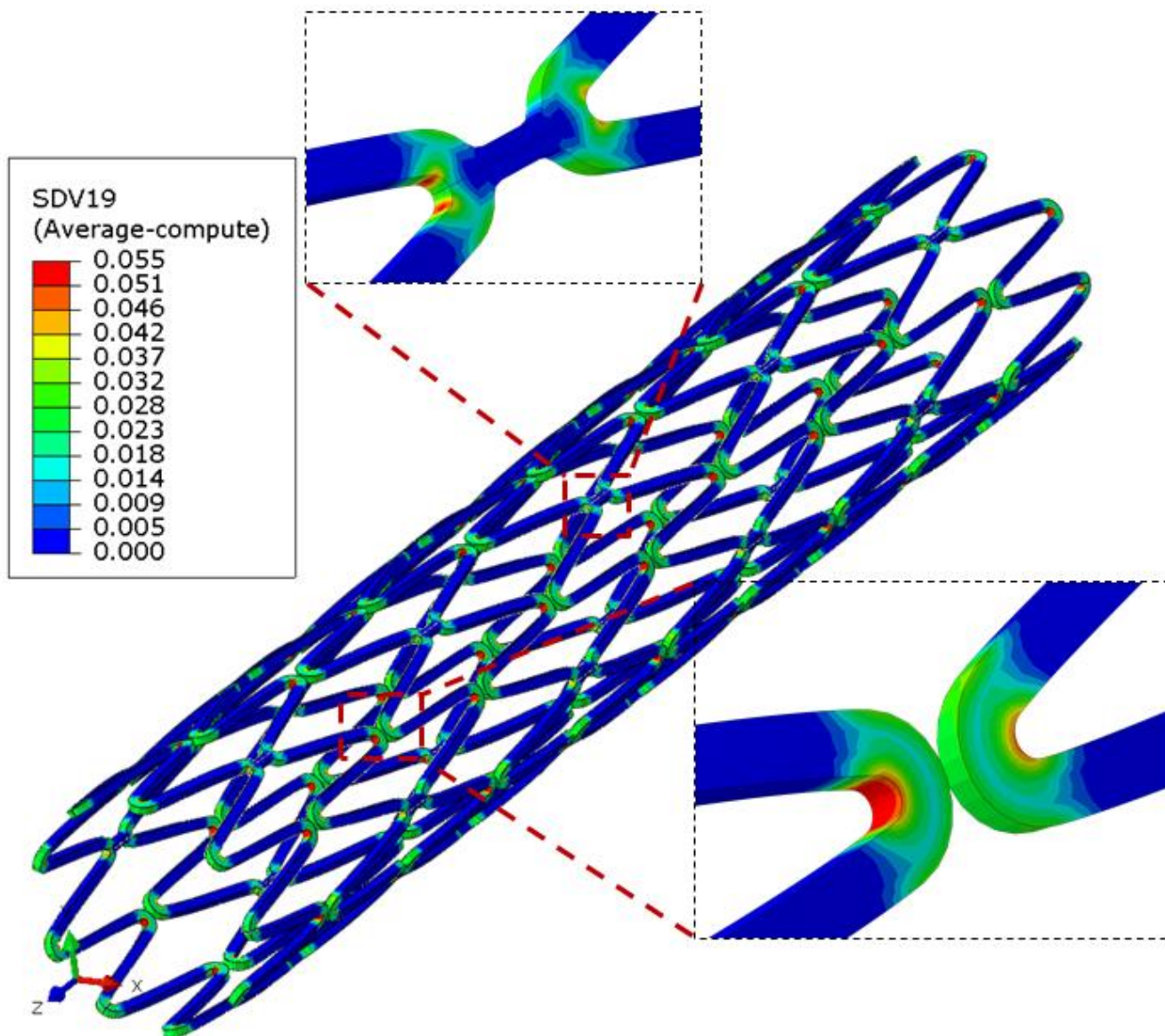


Рисунок 4.8 – Распределение эквивалентных фазово – структурных деформаций на конечной стадии этапа обжатия

Следует заметить, что при максимальном радиусе обжатия стента удерживающей оболочкой величина эквивалентных напряжений в вершинах ячеек достигает 569 МПа (Рисунок 4.12). При изотермическом режиме нагружения ($T = 36\text{ }^{\circ}\text{C}$) предел текучести мартенситной фазы сплава составляет 950 МПа. Сравнивая значения максимальных напряжений с пределом текучести, можно сделать

вывод о том, что в конструкции отсутствуют пластические деформации, а следовательно, обратное превращение должно быть полностью обратимым.

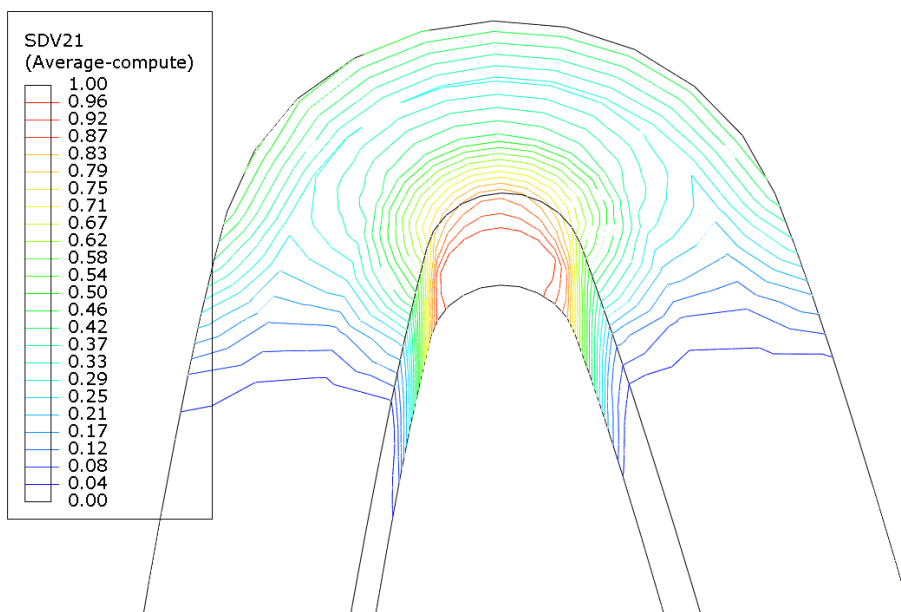


Рисунок 4.9 – Распределение объемной доли мартенсита в вершине элементарной ячейки

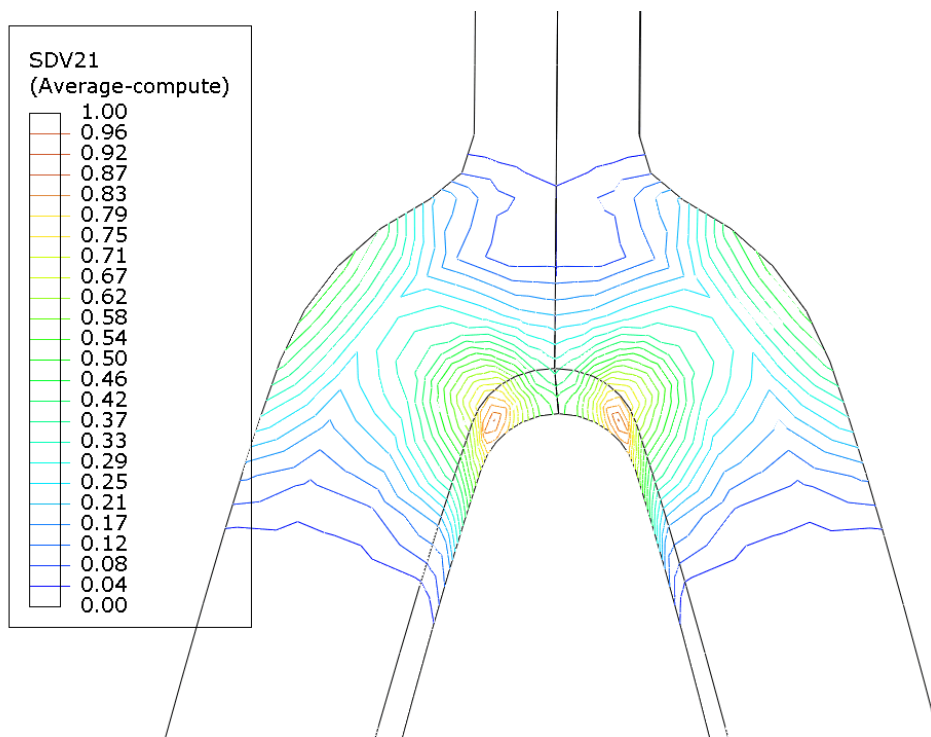


Рисунок 4.10 – Распределение объемной доли мартенсита в вершине элементарной ячейки с перемычкой

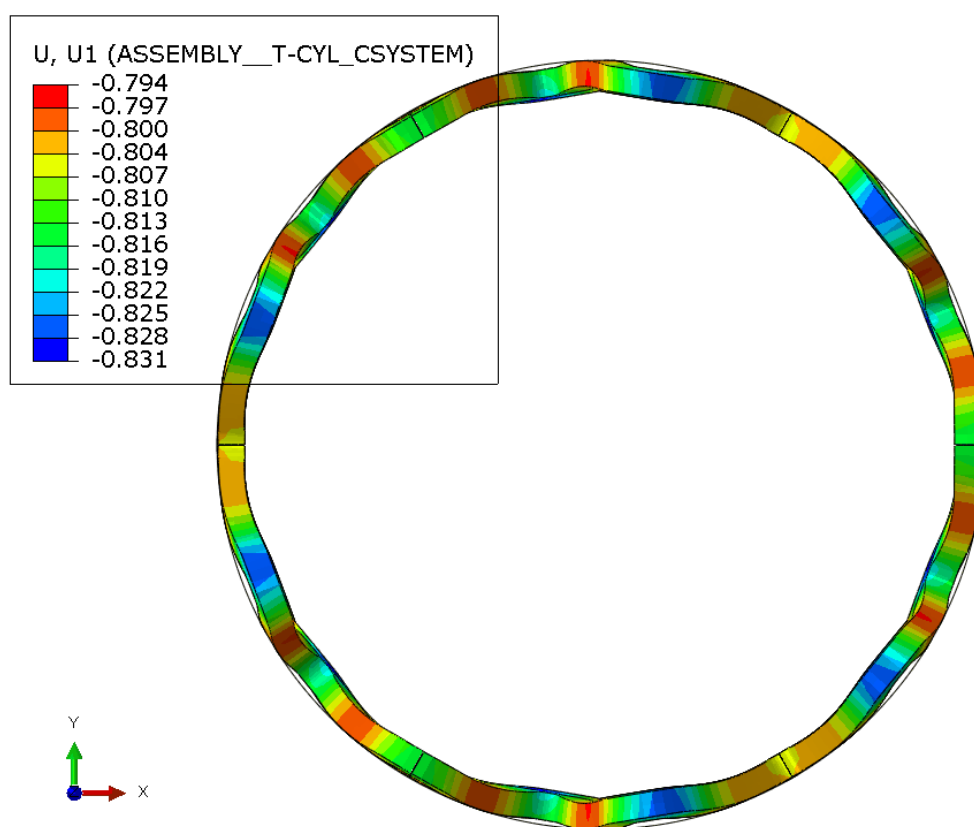
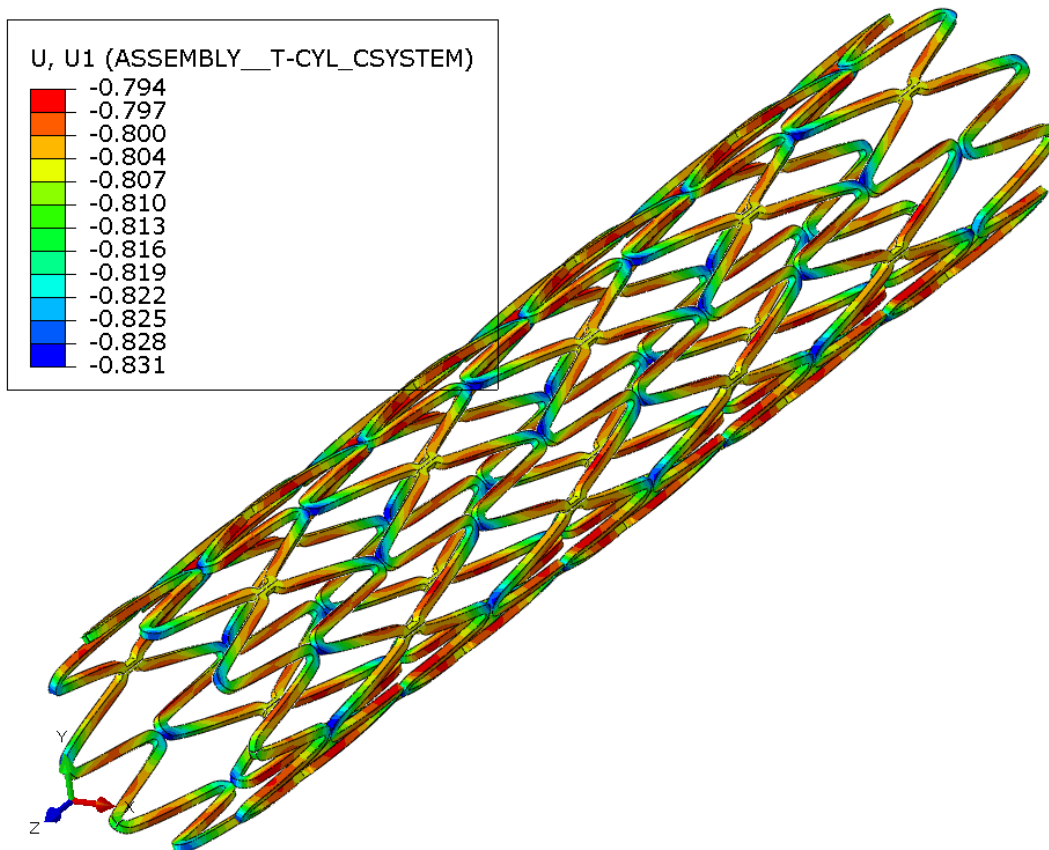


Рисунок 4.11 – Распределение радиальных перемещений стента на конечной стадии этапа обжатия, мм.

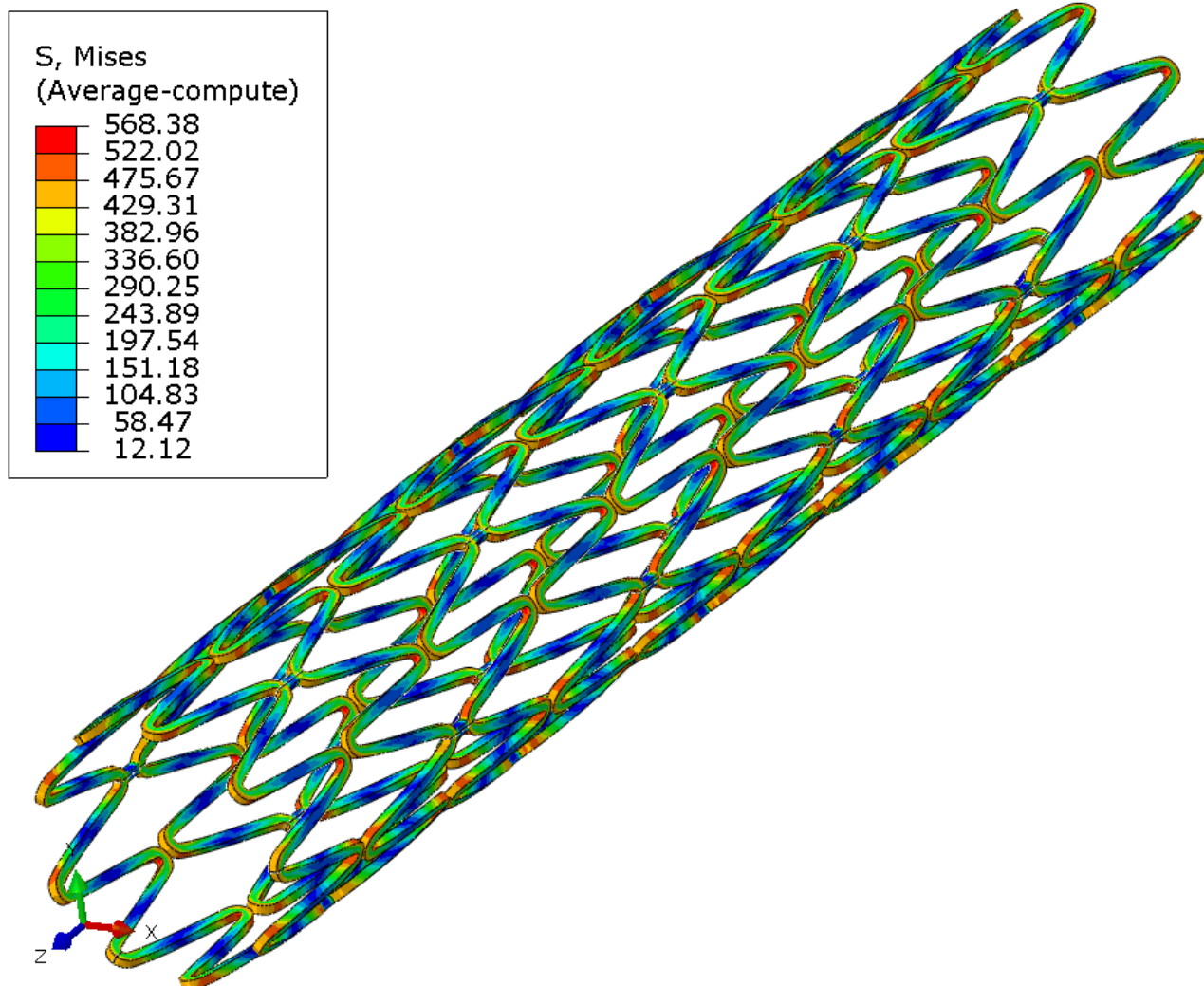


Рисунок 4.12 – Распределение эквивалентных напряжений по Мизесу на конечной стадии этапа обжата, МПа

После завершения обжата начинается процедура «стягивания» ($U_3 = 15$ мм) удерживающей оболочки с поверхности стента. При поступательном движении оболочки происходит постепенное освобождение секций стента. Отсутствие внешних ограничений приводит к падению механических напряжений в вершинах ячеек освобожденных секций, что запускает процесс обратного превращения (Рисунок 4.13). По его окончанию, то есть полному переходу материала от смешанной фазы к аустенитной, стент полностью восстанавливает свою исходную форму

с возвращением накопленной фазово – структурной деформации. Этапы раскрытия стента изображены на Рисунках 4.14, 4.15 с нанесением палитры радиальных перемещений.

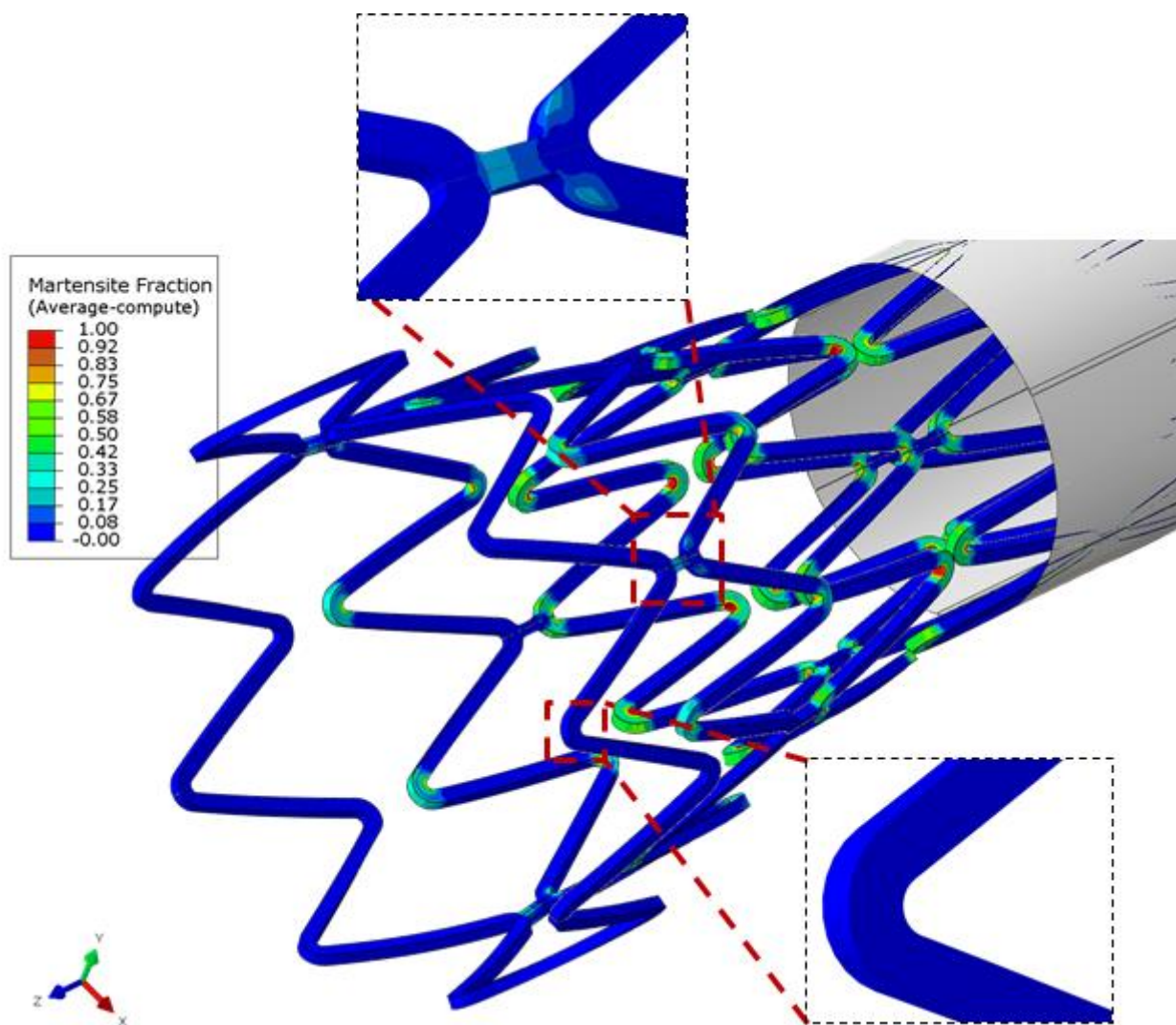


Рисунок 4.13 – Распределение объемной доли мартенсита на начальной стадии раскрытия стента

Отдельные секции стента раскрываются в последовательно – параллельном режиме по мере поступательного движения удерживающей оболочки. На Рисунке 4.16 представлены графики радиального перемещения контрольных точек каждой из секций стента. Полное раскрытие секции происходит за $\approx 0,25$ сек. На начальном этапе раскрытия секций 2, 4, 6, 8, 10 наблюдается небольшие отрицательные радиальные перемещения. Это объясняется несимметричным расположением перемычек по отношению к выбранным контрольным точкам.

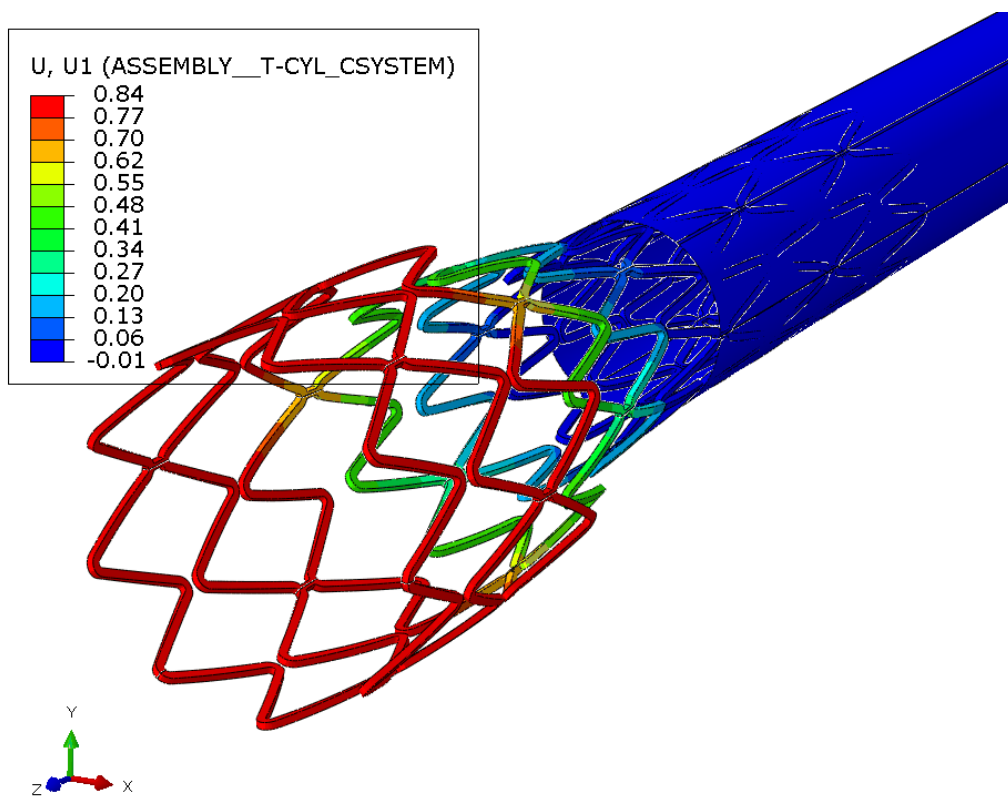
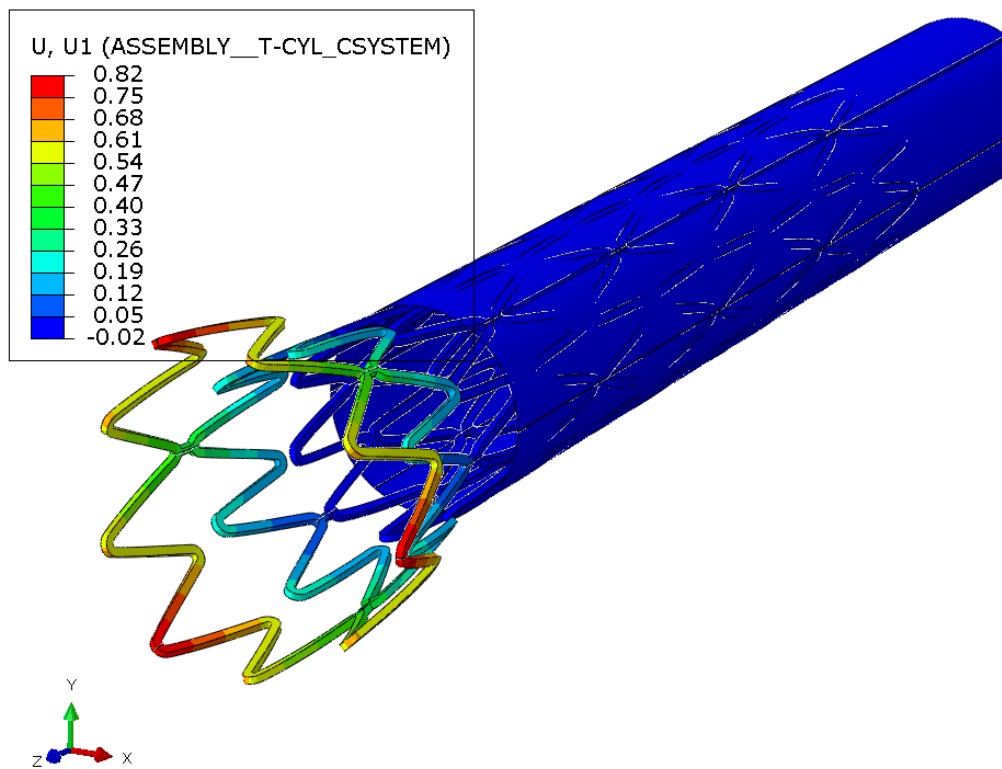


Рисунок 4.14 – Этапы раскрытия стента.
 Распределение радиальных перемещений, мм

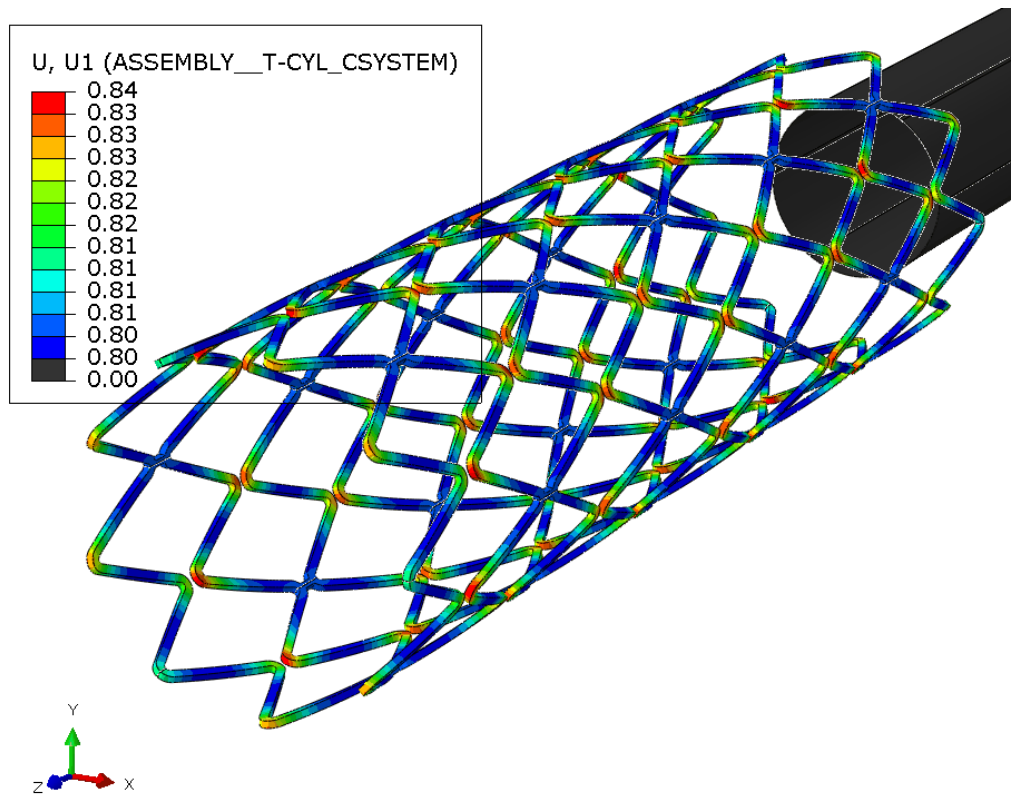


Рисунок 4.15 – Этапы раскрытия стента.
Распределение радиальных перемещений, мм

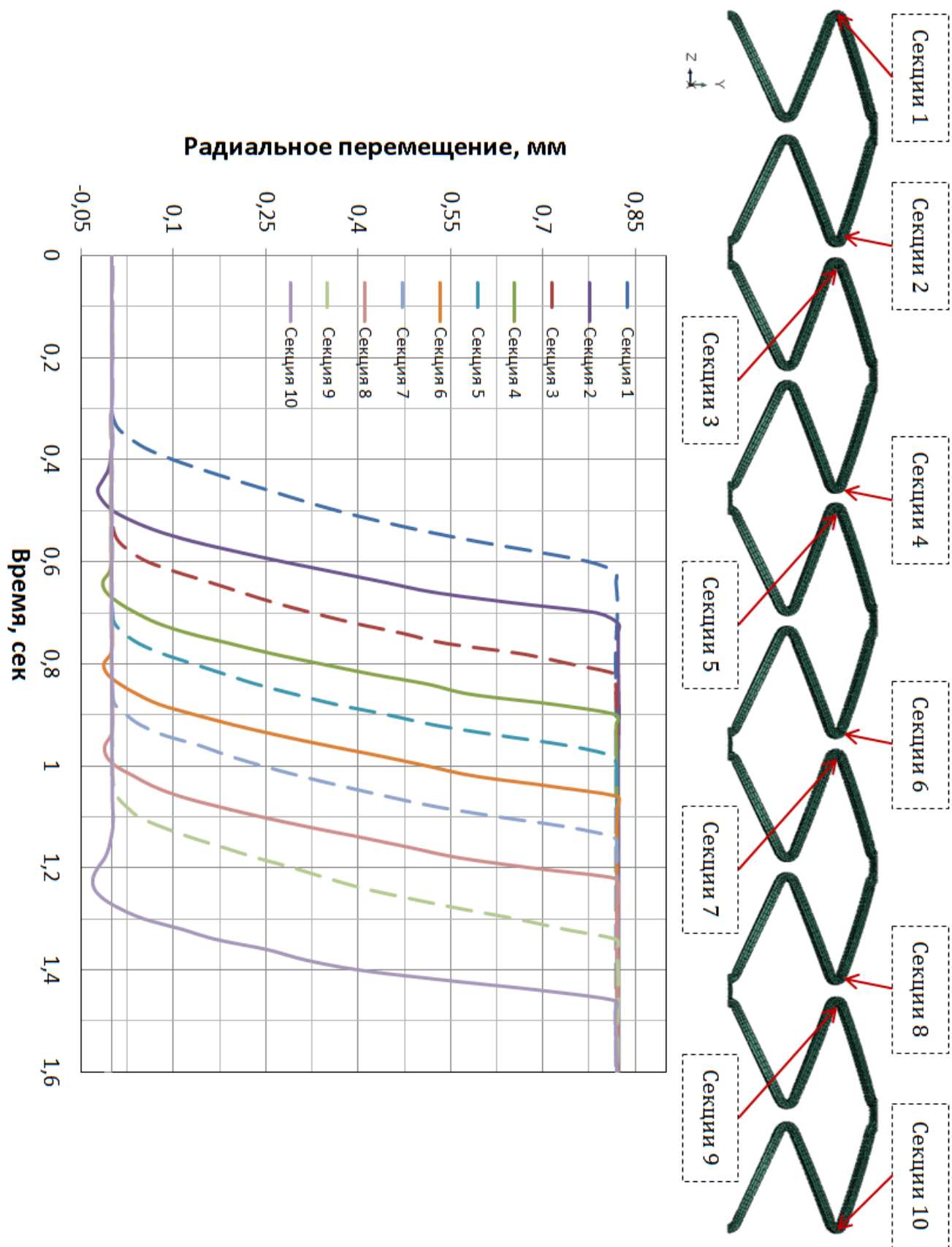


Рисунок 4.16 – Радиальное перемещение контрольных точек различных секций стента во время раскрытия

Основной рабочей характеристикой стента является его радиальная жесткость. Для её определения была проведена серия расчетов моделирующих несвободное раскрытие стента. Сосуд моделировался жесткой, полностью зафиксированной поверхностью, которая препятствует дальнейшему раскрытию стента.

В общем случае давление ячеек стента на внутреннюю поверхность сосуда является неравномерным в силу особенностей контактного взаимодействия. На начальном этапе исследования характеристик стента можно ограничиться величиной среднего давления, определяемой следующим соотношением:

$$\bar{p} = S^{-1} \sum_{i=1}^N p_i \quad (4.1)$$

где S - площадь плоской развертки стента, p_i - контактное давление на i - м элементе, входящем с область контакта. Диаграмма зависимости осредненного давления стента на сосуд от радиуса раскрытия приведена на Рисунке 4.17.

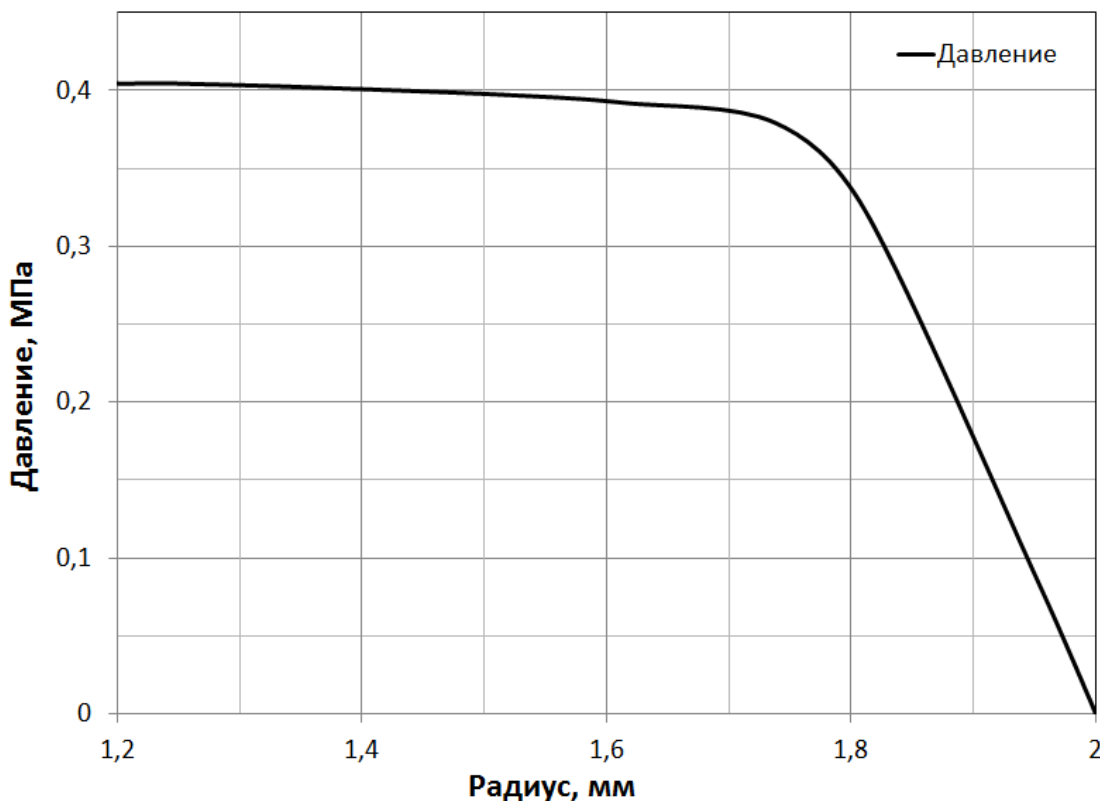


Рисунок 4.17 – Диаграмма зависимости осредненного давления стента на сосуд от радиуса раскрытия

Диаграмма имеет два ярко выраженных участка, близких к линейным зависимостям. При несвободном раскрытии стента в сосуде радиусом $1.2 < R < 1.75$ осредненное контактное давление практически не меняется и составляет порядка 0,4 МПа. Данный участок кривой соответствует работе материала в смешанной фазе с наличием реактивных напряжений. Участок диаграммы $R \geq 1.75$ соответствует преимущественно упругой работе материала. Небольшому изменению радиуса сосуда соответствует существенное падение развиваемого стентом давления.

Продемонстрированная способность конструкций из СПФ сохранять постоянный уровень нагрузки при большом диапазоне изменения формы, является одной из основных причин их широкого распространения в медицинской отрасли.

4.2. ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЯЧЕИСТОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ В РЕЖИМАХ ДИСЛОКАЦИОННОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И СВЕРХУПРУГОСТИ

Проводится решение задачи о деформированном состоянии цилиндрической ячеистой оболочки стента при осевом сжатии с развивающейся потерей устойчивости прямолинейного равновесного состояния, локальными пластическими либо фазовыми деформациями и нестационарным контактным взаимодействием между ячейками при наличии сил сухого трения [4], [171]. Выбор схемы нагружения продиктован простотой его реализации в лабораторных условиях и возможностью оценки влияния нескольких факторов на характер деформирования исследуемой структуры. Точность модели, положенной в основу численного решения, и выбор параметров алгоритма обоснованы сравнением численных результатов с экспериментальными данными. Предложена методика решения практических задач об осевом сжатии конструкций такого типа в программном комплексе SIMULIA Abaqus. Основные результаты могут быть использованы для моделирования более сложных способов нагружения, включая контактное взаимодействие структуры с внешней средой.

4.2.1. Экспериментальная оценка осевой жесткости ячеистой оболочки

Для проведения экспериментальных исследований была создана опытная партия баллоно-расширяемых стентов. Исходный материал цилиндрических трубок – кобальт-хромовый сплав марки L-605. Механические характеристики сплава представлены в таблице 4.2. Образцы образованы системой открытых ячеек с несимметричным расположением перемычек. Общий вид изготовленных образцов показан на рисунке 4.18, а их основные геометрические характеристики приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.2 – Свойства материала L-605

Модуль Юнга, <i>МПа</i>	243 000
Коэффициента Пуассона	0,33
Предел текучести, <i>МПа</i>	500
Предел прочности, <i>МПа</i>	900
Плотность, <i>кг / м³</i>	9230

Таблица 4.3 – Геометрические характеристики стента

Длина стента, мм	12,55
Внешний диаметр, мм	1,12
Внутренний диаметр, мм	0,94
Количество секций в окружном направлении	10
Количество секций в продольном направлении	12

Натурные испытания проводились на одноколонной испытательной машине Instron 3345. Для фиксации образцов созданы две оправки цилиндрической формы. Оправка №1, имеющая посадочное отверстие для установки образца, жестко

связана с неактивной траверсой испытательной машины, оправка №2 – с активной траверсой (скоростью вертикального смещения активной траверсы – 0,2 мм\мин.).

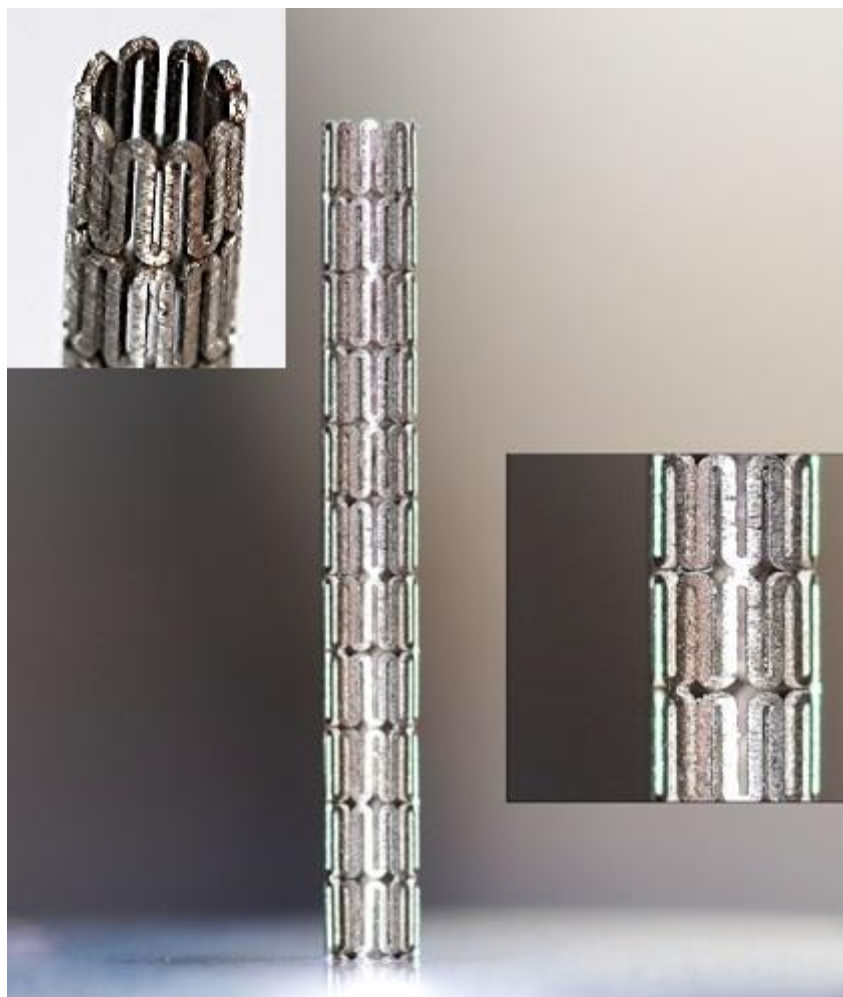


Рисунок 4.18 – Общий вид образцов стентов

Испытываемый образец устанавливается в вертикальном положении в посадочное отверстие оправки №1 на глубину одной ячейки (рис. 4.20). Установка проводилась с натягом, вследствие чего радиальные и осевые перемещения точек внешней поверхности торцевой секции ограничены. На другом торце обеспечивается условие свободного опирания (рис. 4.19). Передача усилий осуществляется за счет контактного взаимодействия верхнего торца с горизонтальной плоскостью оправки №2. Общая схема эксперимента представлена на рисунке 4.21.

По результатам эксперимента построены диаграммы деформирования образцов в системе координат «Сила – Перемещение активной траверсы». Проведена статистическая обработка экспериментальных данных. Определено среднее

арифметическое экспериментальных данных и найдены границы доверительного интервала эксперимента с принятой доверительной вероятностью 95% (рис. 4.22).



Рисунок 4.19 – Позиционирование верхнего торца образца относительно оправки №2

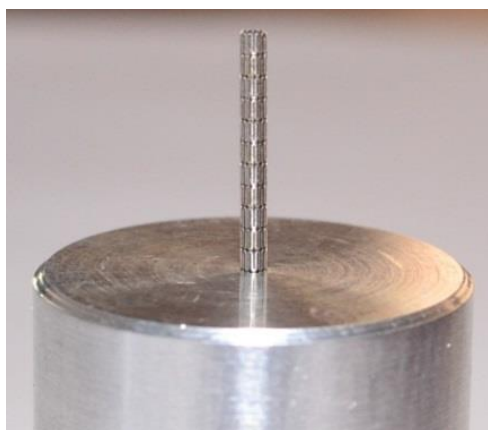


Рисунок 4.20 – Установка нижней секции образца в посадочное отверстие оправки №1

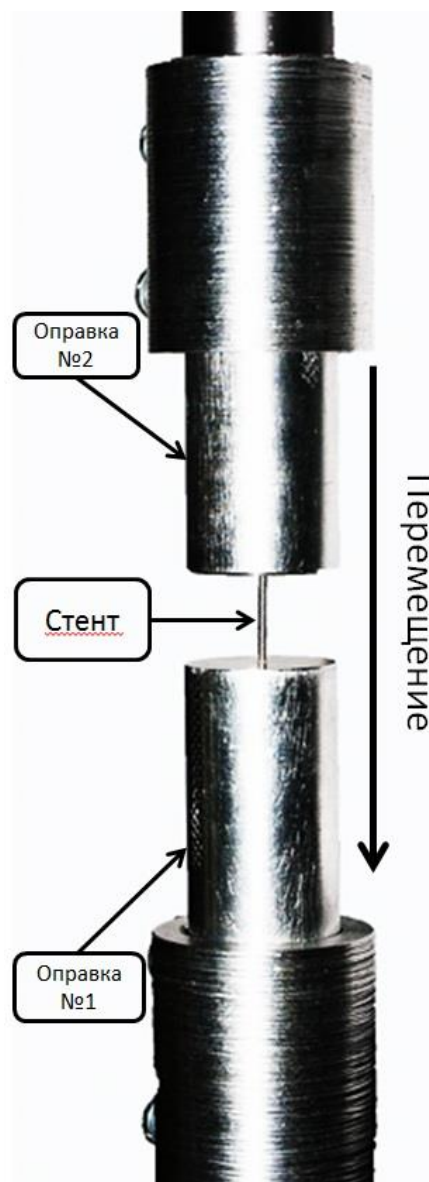


Рисунок 4.21 – Схема эксперимента

Среднее арифметическое значение предельной несущей способности конструкции составило 25,9 Н с доверительным интервалом 3,17 Н.

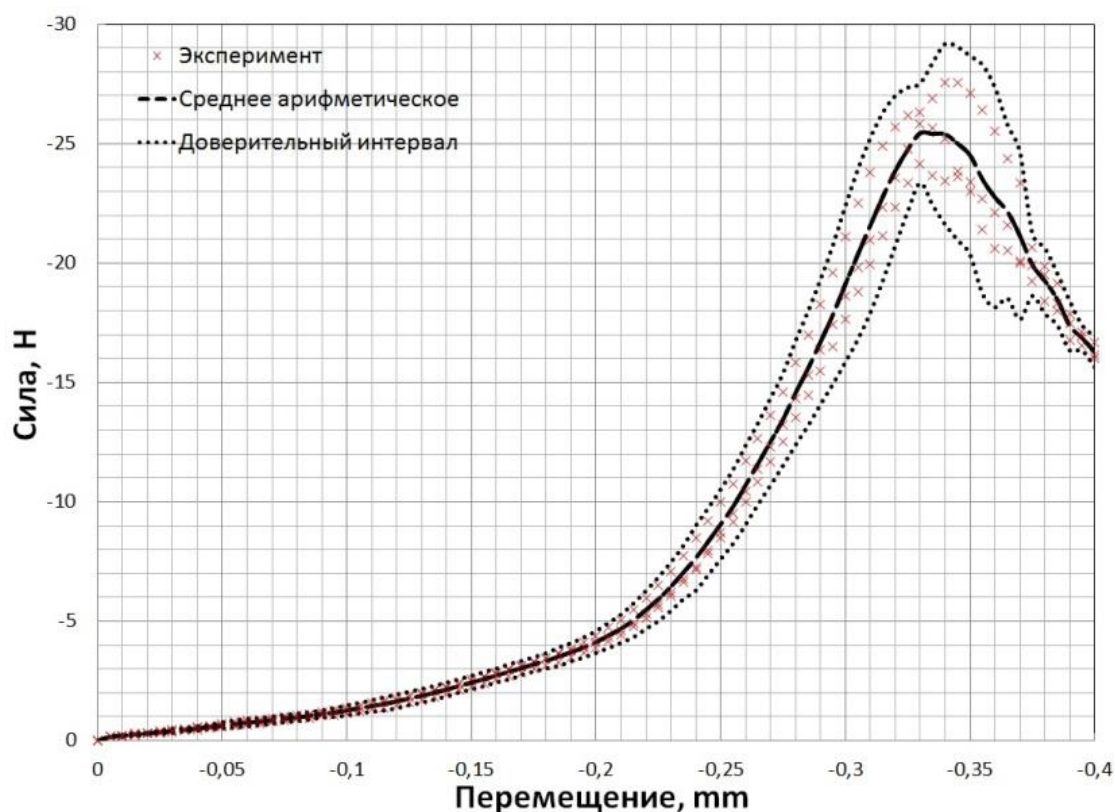


Рисунок 4.22 – Экспериментальные кривые равновесных состояний. Представлены экспериментальные данные, среднее арифметическое значений и границы доверительного интервала

4.2.2. Решение задачи о закритическом деформировании ячеистой оболочки в нелинейной постановке

Современные программные комплексы позволяют получать решение задач об устойчивости и закритическом состоянии в нелинейной постановке на базе метода Ньютона – Рафсона, модифицированного метода Рикса, либо на основе явных методов динамики. Применительно к данной задаче, при задании возможных контактных взаимодействий между ячейками оболочки, использование метода Ньютона-Рафсона и модифицированного метода Рикса неэффективно, а в некоторых расчетных случаях – невозможно. Это объясняется существенными проблемами численного характера, возникающими при проведении анализа закритического поведения конструкции с использованием данных подходов.

Конечно-элементная модель цилиндрической ячеистой оболочки в трехмерной постановке создана на базе 8-ми узловых призматических элементов с первым порядком интерполяции и редуцированной схемой интегрирования – C3D8R. Представленная на рисунке 4.23 конечно-элементная модель использована без изменений на всех этапах решения поставленной задачи.

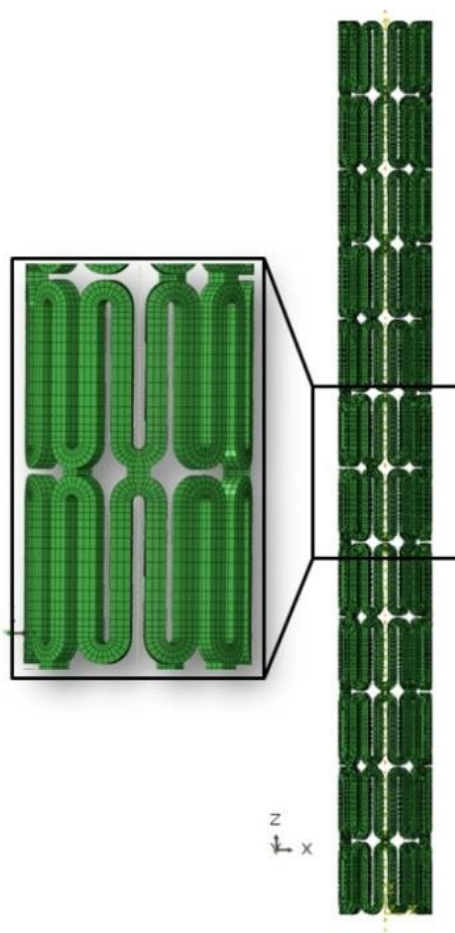


Рисунок 4.23 – Конечно-элементная модель
Общее количество конечных элементов – 60300

Для построения нелинейного решения был выбран метод явной динамики. Выбранный метод решения основан на явной схеме интегрирования уравнений движения во времени. Проводится решение уравнения динамики с диагональной матрицей масс элементов:

$$\ddot{u} = M^{-1}(P - I) \quad (4.2)$$

Здесь \ddot{u} – ускорения узлов модели; M – диагональная матрица масс элементов; P – внешние силы; I – внутренние силы.

Метод является условно устойчивым. Предел устойчивости ограничен размером приращения временной переменной, которое равно времени прохождения волны упругой деформации через один конечный элемент:

$$\Delta t = L^e \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4.3)$$

Здесь L^e – текущий характерный размер элемента; ρ – плотность материала; E – модуль Юнга.

На рисунке 4.24 представлена общая расчетная схема задачи. Для полного удовлетворения экспериментальным условиям нагружения в расчетную область введены геометрические модели оправок, моделируемые как абсолютно жесткие трехмерные тела. Передача нагрузок и наложение кинематических связей осуществляется через контакт в системе «оправка-образец», что соответствует условиям нагружения при экспериментальном исследовании.

Оправка №1 жестко зафиксирована по всем степеням свободы:

$$U_i = 0, \quad i = 1 \dots 6. \quad (4.4)$$

Движение оправки №2 ограничено по всем степеням свободы, кроме вертикального перемещения вдоль оси $Oz-U_3$. Задается кинематическое нагружение – вертикальное перемещение оправки №2:

$$U_i = 0, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6; \quad U_3 = -0,5 \text{ мм} \quad (4.5)$$

Поведение материала описывается упруго – пластической моделью с изотропным упрочнением с условием текучести Мизеса.

Моделирование квазистатических задач с использованием метода явной динамики в реальных временных рамках не представляется возможным ввиду небольшого размера приращения по времени и, как следствие, больших временных затрат на проведение анализа. В рассматриваемом нашем случае размер явного шага по времени составляет – $\Delta t \approx 10^{-9}$.

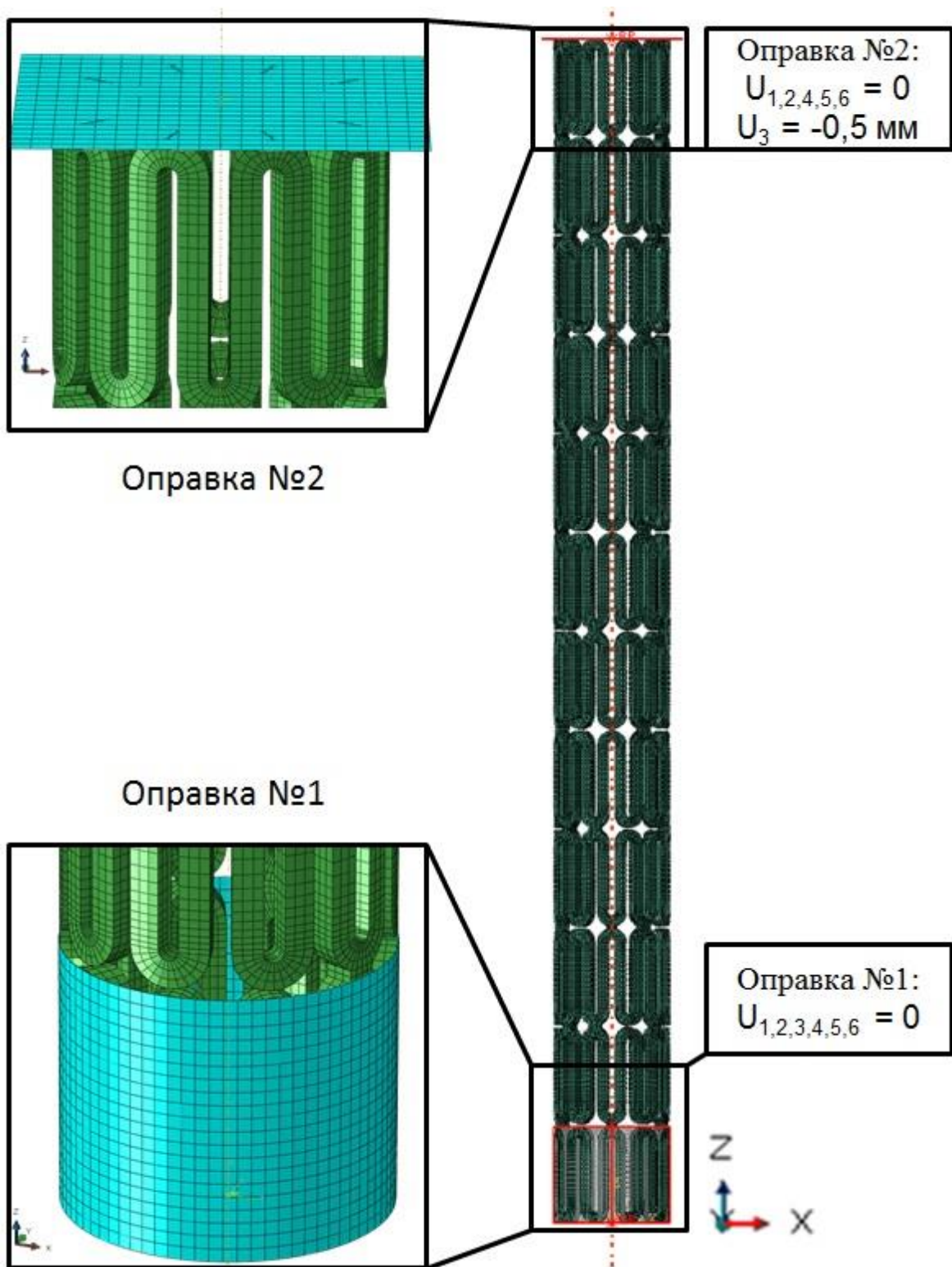


Рисунок 4.24 – Расчетная схема задачи в нелинейной постановке. Установка нижней торцевой секции образца в абсолютно жесткую оправку №1 с нулевым зазором. Контактрование верхней торцевой секции образца с абсолютно жесткой поверхностью оправки №2

Для получения экономичного численного решения проводилось искусственное увеличение скорости нагружения за счёт уменьшения общего времени моделирования. Однако, при больших скоростях нагружения инерционная составляющая нагрузки становится доминирующей. Для получения квазистатического отклика системы необходимо обеспечение выполнения следующего соотношения на всём протяжении расчета:

$$\frac{T}{W} \leq 0,05 \quad (4.6)$$

Здесь W - потенциальная энергия модели; T - кинетическая энергия модели.

Для определения скорости нагружения, удовлетворяющей условию квазистатического отклика (4.6), был проведен частотный анализ. На основе первой собственной частоты ($f = 2587.6$ Гц) вычислен период колебаний конструкции ($t = 3,86 \times 10^{-4}$ сек) по первой собственной форме. Исходя из размера максимального вертикального перемещения оправки №2 и найденного периода колебаний, величина скорости нагружения составила 1,3 м\с. Полученная скорость нагружения обеспечивает решение задачи в квазистатической постановке с минимальными временными затратами на проведение анализа.

В модели определены возможные контактные взаимодействия между всеми ячейками образца с использованием технологии автоматического поиска контактных пар. Для обеспечения реализации условий контактных взаимодействий был использован метод штрафа с формированием контактной жесткости на основе жесткости контактирующих элементов. Учтено фрикционное взаимодействие контактирующих поверхностей в рамках модели трения Кулона с наличием начального «упругого» сдвига. Проскальзывание контактирующих поверхностей друг относительно друга возможно при превышении величины эквивалентных касательных напряжений τ_{eq} критического значения τ_{crit} , определяемого формулой (4.7) :

$$\tau_{crit} = \mu p \quad (4.7)$$

где μ – коэффициент трения, p – контактное давление.

Для окончательной постановки задачи была проведена серия тестовых расчетов. Оценивалась степень влияния на результаты моделирования учета геометрической нелинейности, упруго-пластической модели материала, контактных взаимодействий с различными коэффициентами трения. В таблице 4.4 приведено описание расчетных случаев и полученная на их основе величина критической нагрузки. В доверительный интервал экспериментальных данных попали результаты, полученные в РС № 5, 6, 7.

На основе результатов проведенного исследования были сформированы окончательные требования к расчетной модели: учет геометрической нелинейности; учет нелинейного поведения материала; учет фрикционного контактного взаимодействия ячеек образца с коэффициентом трения - $\mu = 0,2...0,3$.

Таблица 4.4 – Результаты тестирования расчетной модели

РС		1	2	3	4	5	6	7	8
Учет геометрической нелинейности		-	-	+	+	+	+	+	+
Учет упруго-пластических свойств материала		-	+	-	+	+	+	+	+
Контакт, Коэффициент трения	0								
	0,2					+			
	0,25		+	+			+		
	0,3							+	
	0,5								+
Сила потери устойчивости, Н		6,14	83,51	54,60	6,71	25,63	26,46	27,46	30,61
Эксперимент		25,9 ± 3,17 Н							
Линеаризованная постановка		5,52 Н							

В результате проведения нелинейного анализа осевого сжатия стентов проведена оценка напряженно-деформированного состояния конструкции, построены

кривые равновесных состояний и получены значения предельных нагрузок в закритическом состоянии.

Кривая равновесных состояний, полученная с использованием коэффициента трения $\mu = 0,2$, представлена на рисунке 4.25. На начальном этапе наблюдается упругое деформирование стента с линейным увеличением осевой жесткости. Точка А соответствует началу образования необратимых пластических деформаций. Происходит локализация пластических деформаций в перемычках стента с образованием пластических шарниров (рис. 4.26). После точки В наблюдается резкое увеличение осевой жесткости стента. Это объясняется полной выработкой начального осевого зазора между ячейками и началом их контактирования. Из анализа характера контактных взаимодействий следует, что на данном этапе стент работает, как замкнутая оболочка. В точке С происходит потеря устойчивости с выходом ячеек стента из контакта и последующим падением несущей способности конструкции. При этом наблюдается значительный рост кинетической энергии модели.

Выявлено значительное влияние коэффициента трения на величину предельной несущей способности стента (рис. 4.27). Использование бесфрикционной модели контакта или задание небольших значений коэффициента трения ($\mu < 0,15$) приводит к более раннему выходу ячеек стента из контакта и, как следствие, к заниженному значению предельной нагрузки по сравнению с наблюдаемой в эксперименте.

Полученная в рамках расчета кривая равновесных состояний хорошо согласуется с экспериментальными данными вплоть до потери устойчивости конструкции. В закритической области наблюдается выход расчетной кривой из доверительного интервала экспериментальных данных (рис. 4.28).

На рисунке 4.29 приведено сравнение форм потери устойчивости образца, полученных в рамках численного анализа и эксперимента. Получено хорошее совпадение результатов моделирования с экспериментальными данными. При увеличении коэффициента трения ($\mu = 0,25$) реализуется более высокоэнергетическая форма потери устойчивости с образованием двух полуволн.

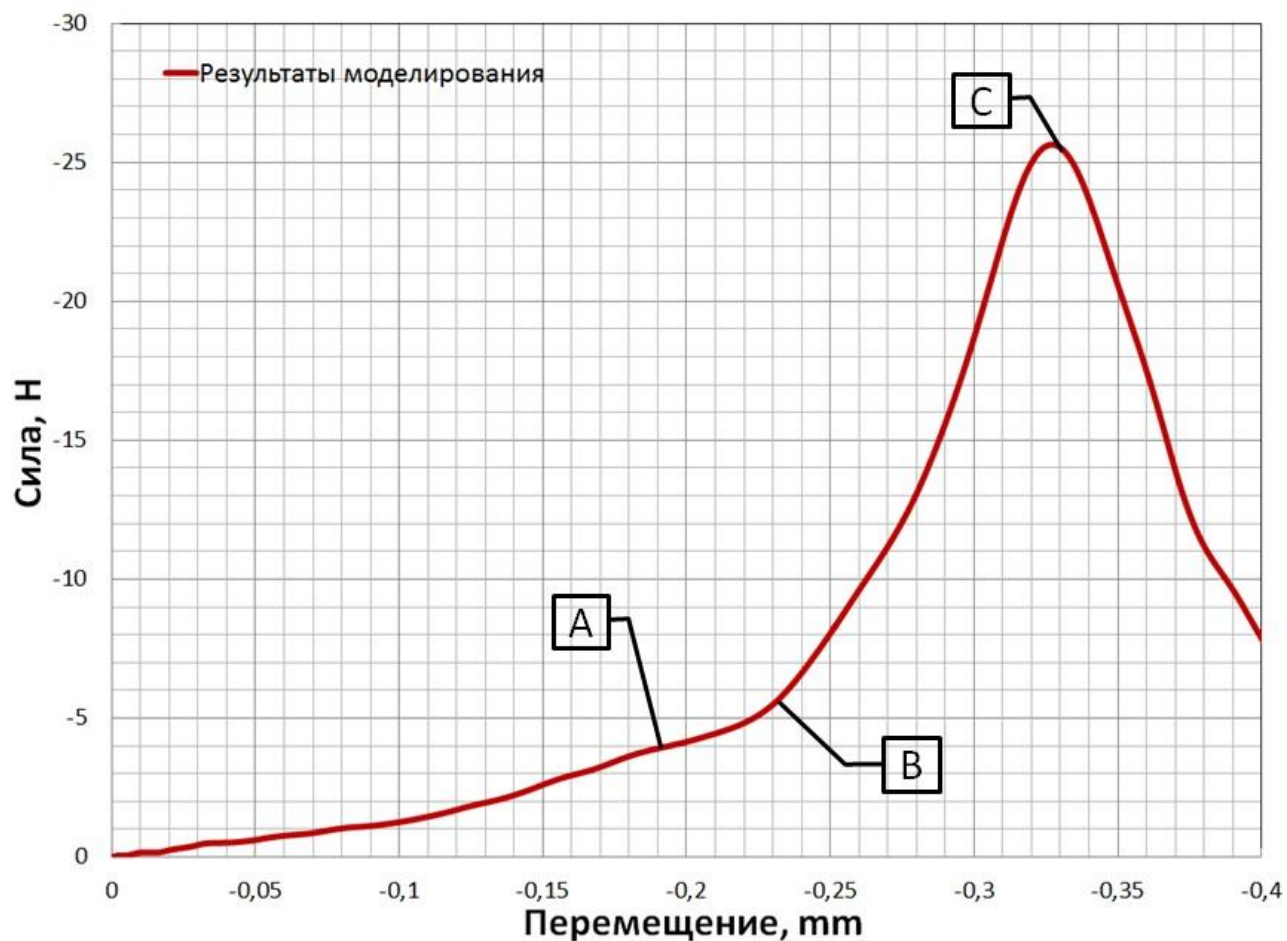


Рисунок 4.25 – Кривая равновесных состояний ($\mu = 0,2$)

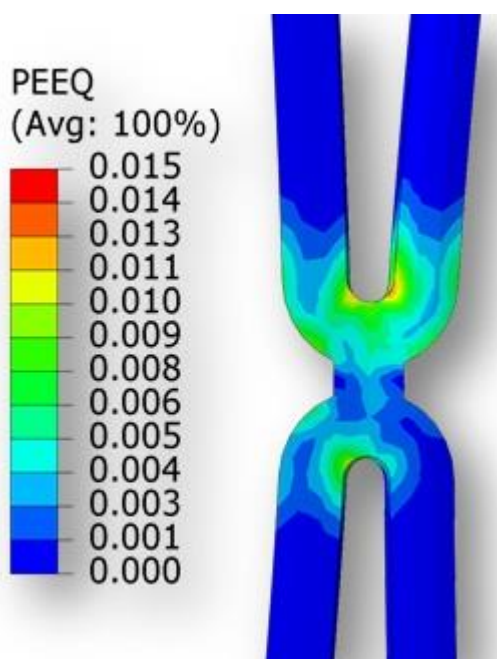


Рисунок 4.26 – Локализация пластических деформаций в перемычках стента.

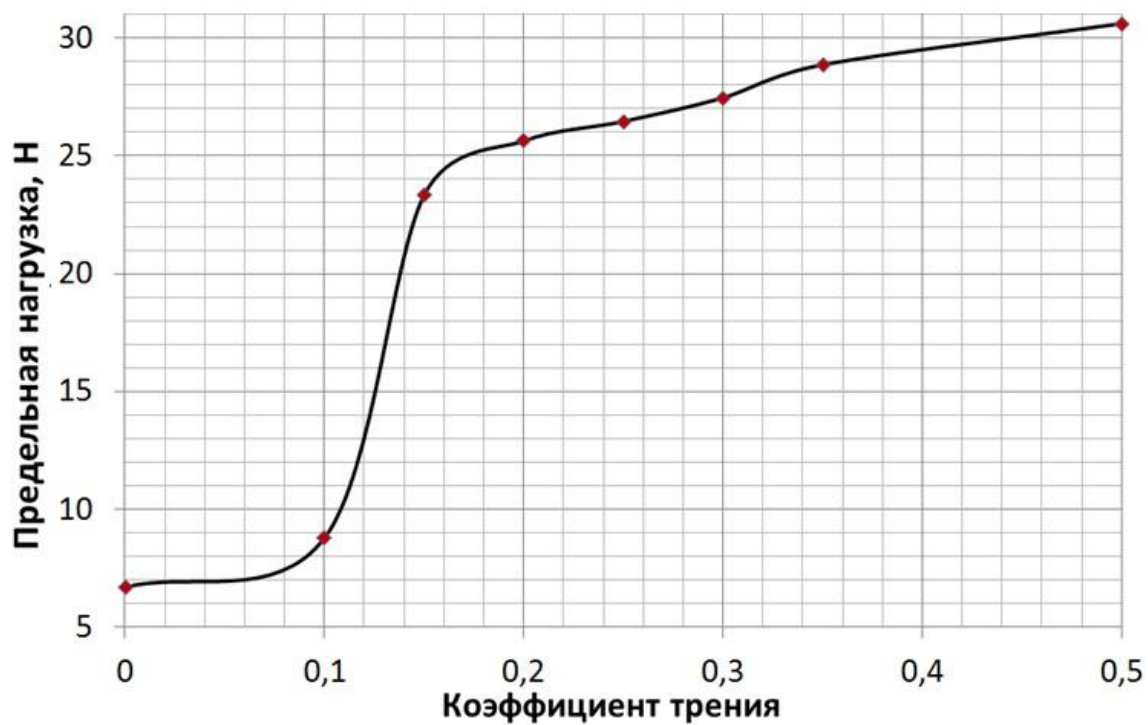


Рисунок 4.27 – Зависимость предельной нагрузки от величины коэффициента трения между ячейками стента

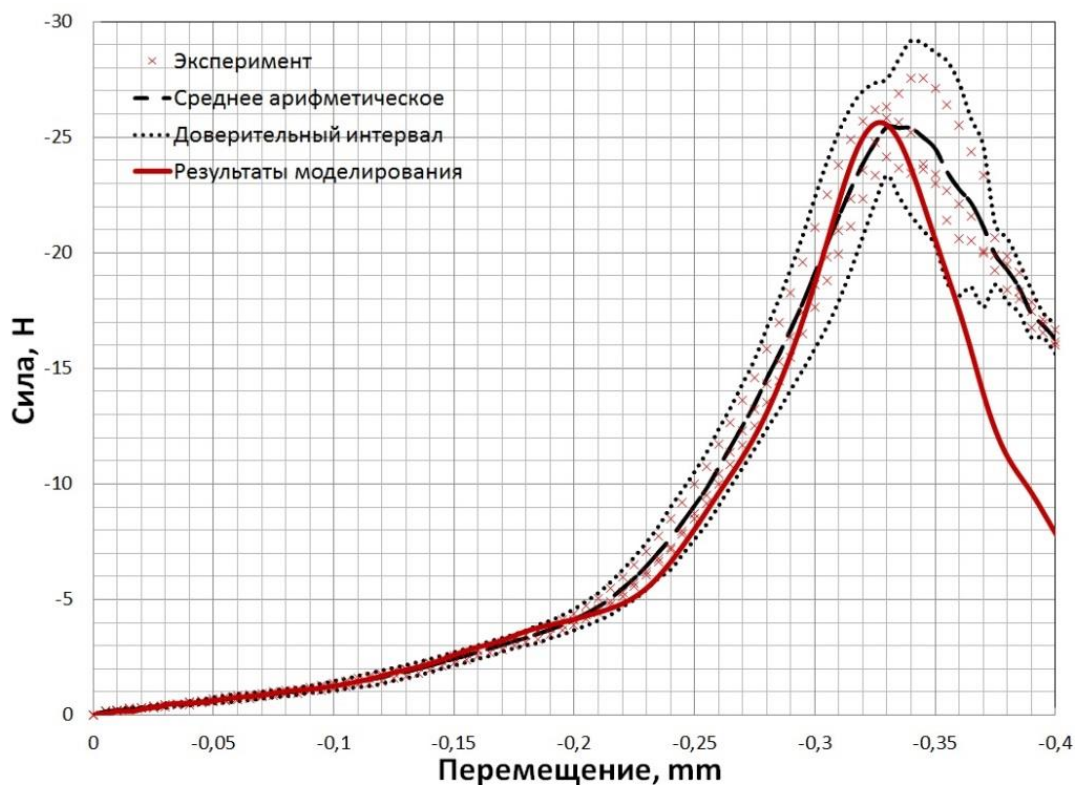


Рисунок 4.28 – Кривые равновесных состояний. Приведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными

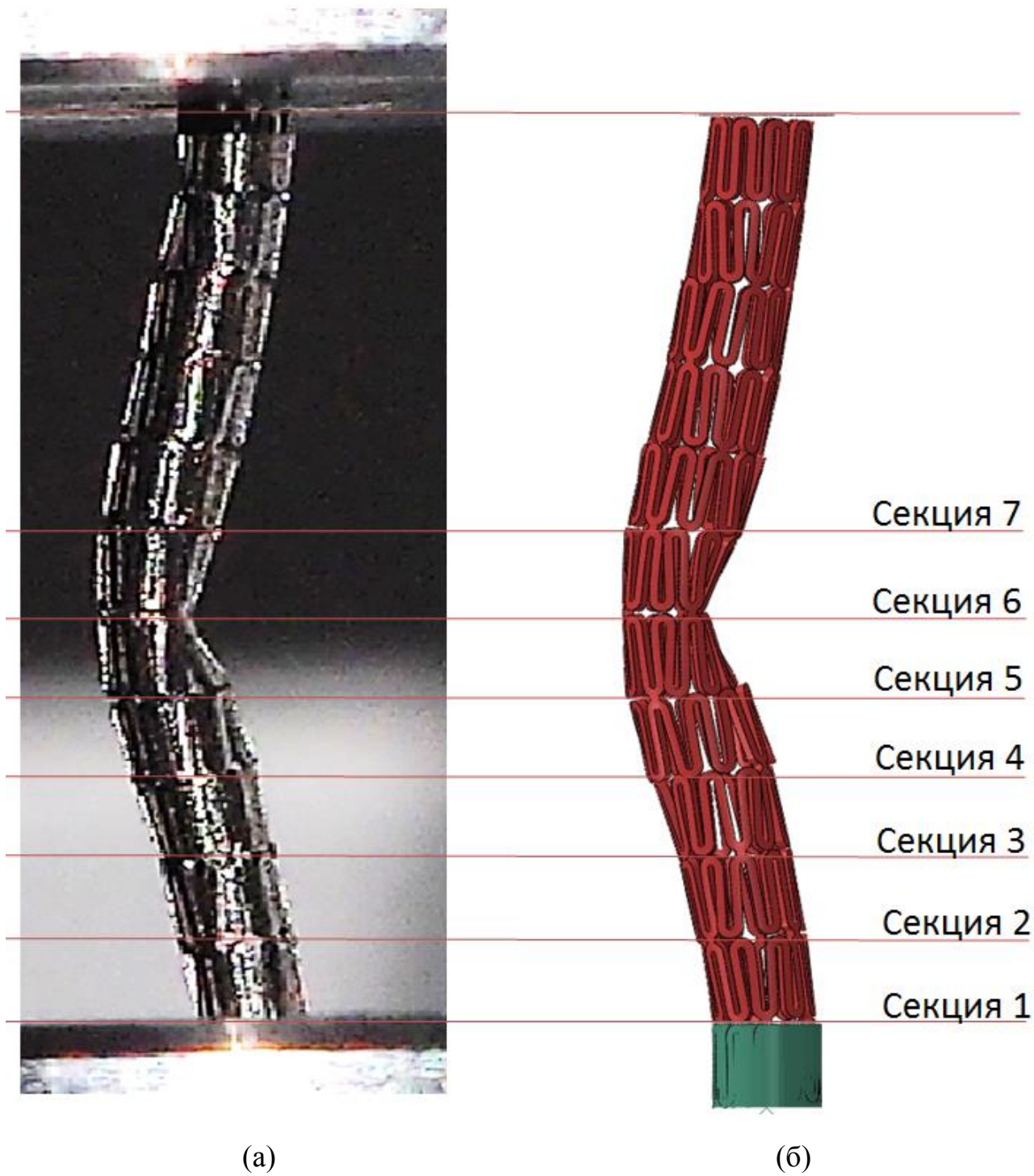


Рисунок 4.29 – Сравнение форм потери устойчивости стента:
(а) – эксперимент, (б) – численное решение

4.2.3. Моделирование потери устойчивости и закритического состояния ячеистой оболочки в режиме сверхупругости

На основе разработанной и верифицированной расчетной методики была проведена серия тестов по оценке осевой жесткости самораскрывающихся стентов, выполненных из СПФ. Как и для случая расчета раскрытия стентов, проводится моделирование сверхупругого поведения СПФ. Характер поведения материала (рис. 4.4) и используемые параметры термомеханической модели (таблица 4.1) представлены в предыдущем параграфе.

При схожем дизайне ячеек для стентов на основе СПФ была получена аналогичная форма кривых равновесных состояний, как и для случая упруго – пластической модели поведения материала (рис. 4.30). Найдена предельная несущая способность конструкции – 12,8 Н.

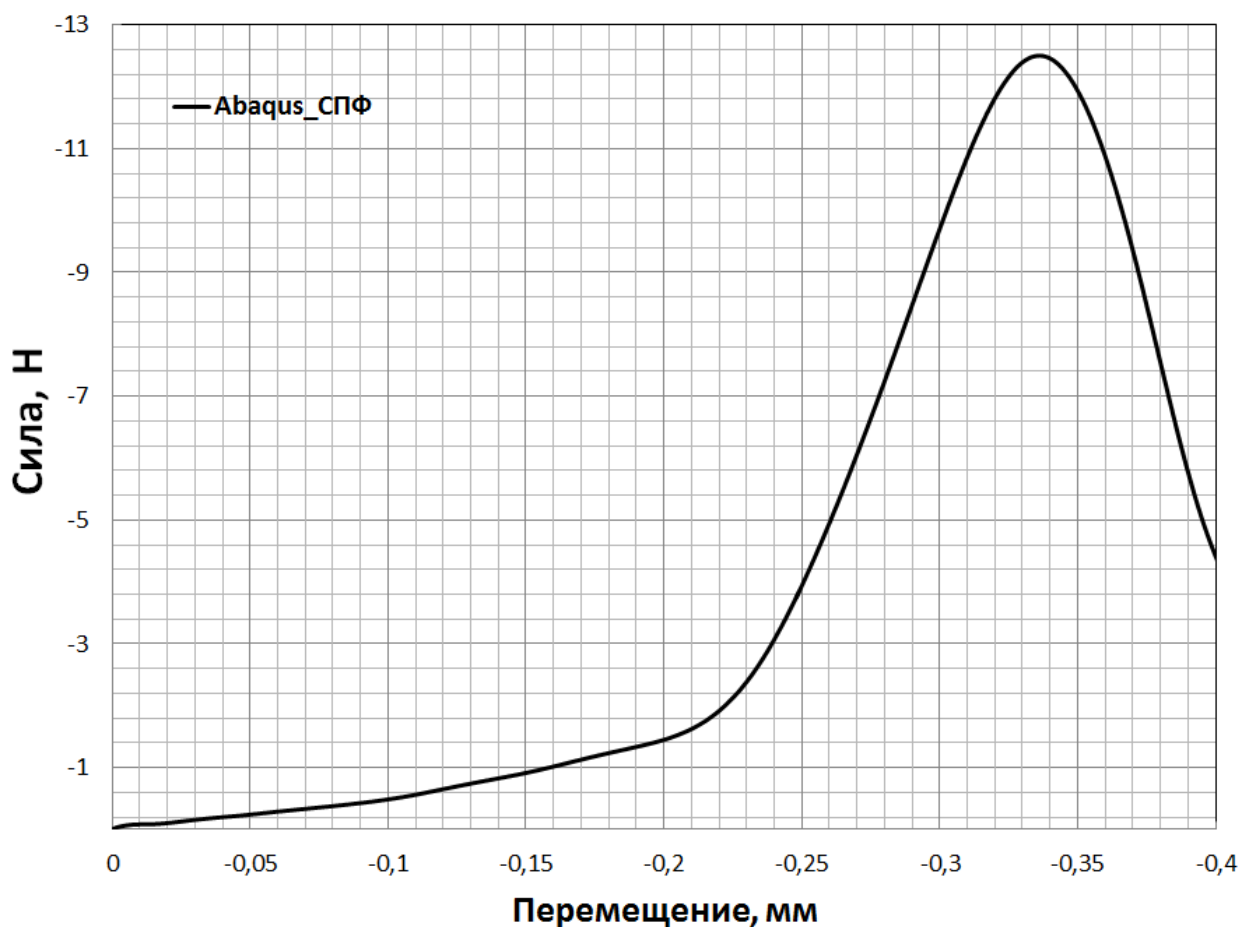


Рисунок 4.30 – Кривая равновесных состояний для стента на основе СПФ

В докритическом состоянии выявлены небольшие области прохождения прямого мартенситного превращения, находящиеся на внутренних поверхностях центральных перемычек (рис. 4.31). В момент начала потери несущей способности максимальная величина фазово – структурной деформации равна 0,7% (рис. 4.32).

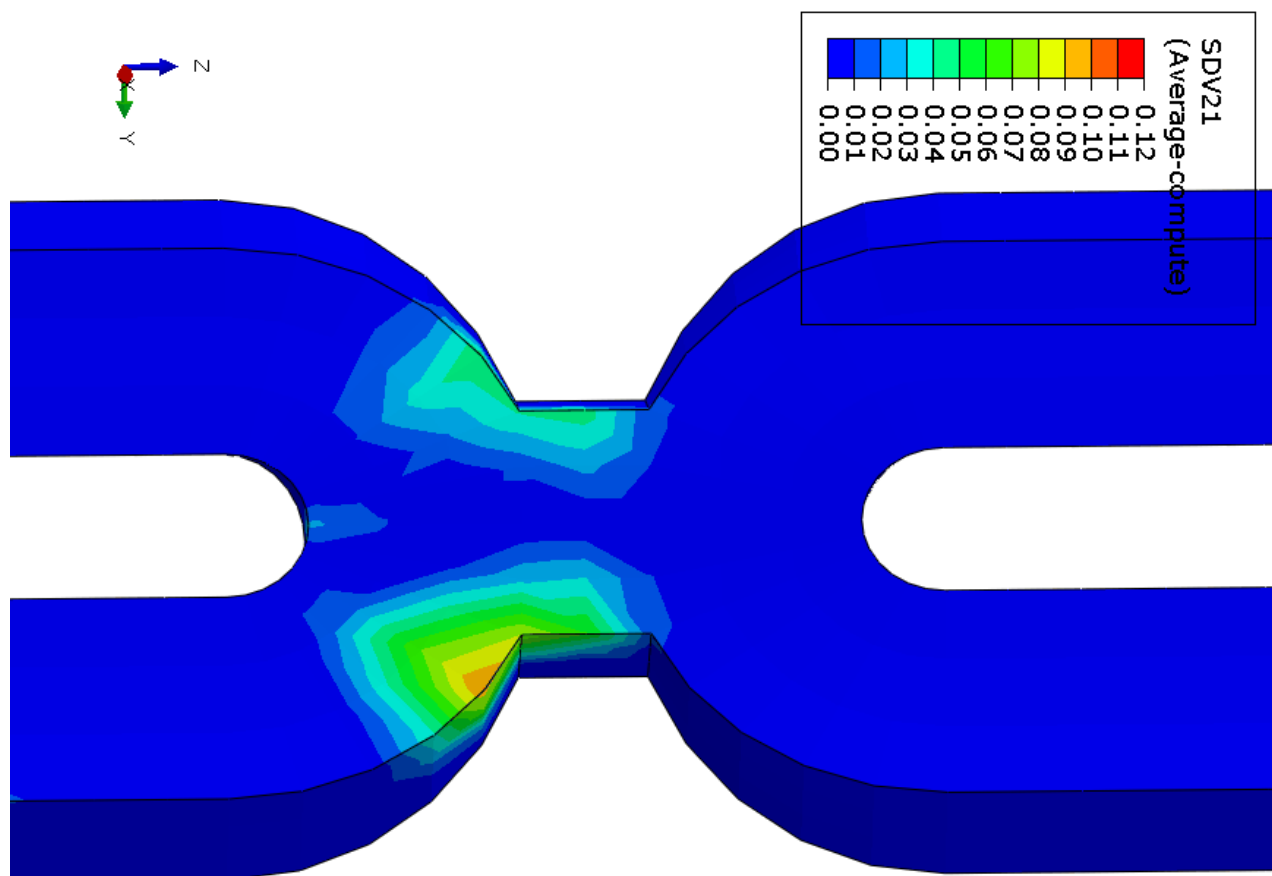


Рисунок 4.31 – Распределение объемной доли мартенсита в момент начала потери несущей способности

После потери несущей способности область прохождения и интенсивность фазового превращения существенно увеличивается. Наблюдается существенное изгибное деформирование центральных перемычек практически полностью перешедших в мартенситную фазу. К новым типовым очагам прохождения прямого фазового превращения можно отнести область контакта вершин элементарных ячеек (рис. 4.33).

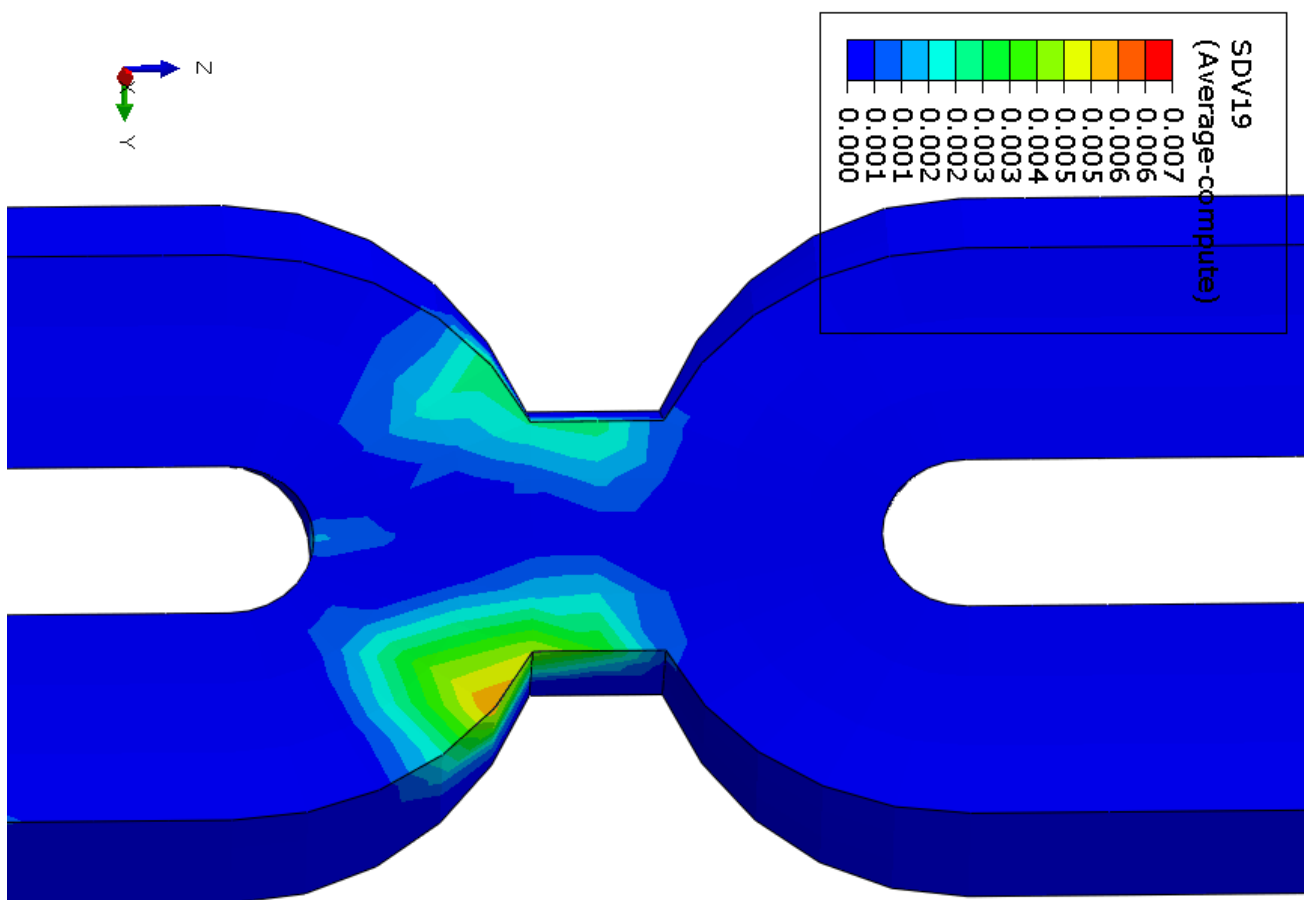


Рисунок 4.32 – Распределение фазово - структурной деформации в момент начала потери несущей способности

Сравнение результатов моделирования показывает качественно схожую картину деформирования конструкции при использовании упруго – пластической модели поведения «классических» материалов и термомеханической модели СПФ для случая изотермического нагружения. Таким образом, в расчетах конструкций при схожих условиях нагружения применение термомеханической модели поведения СПФ является достаточно затратным с точки зрения машинного времени и представляется нерациональным.

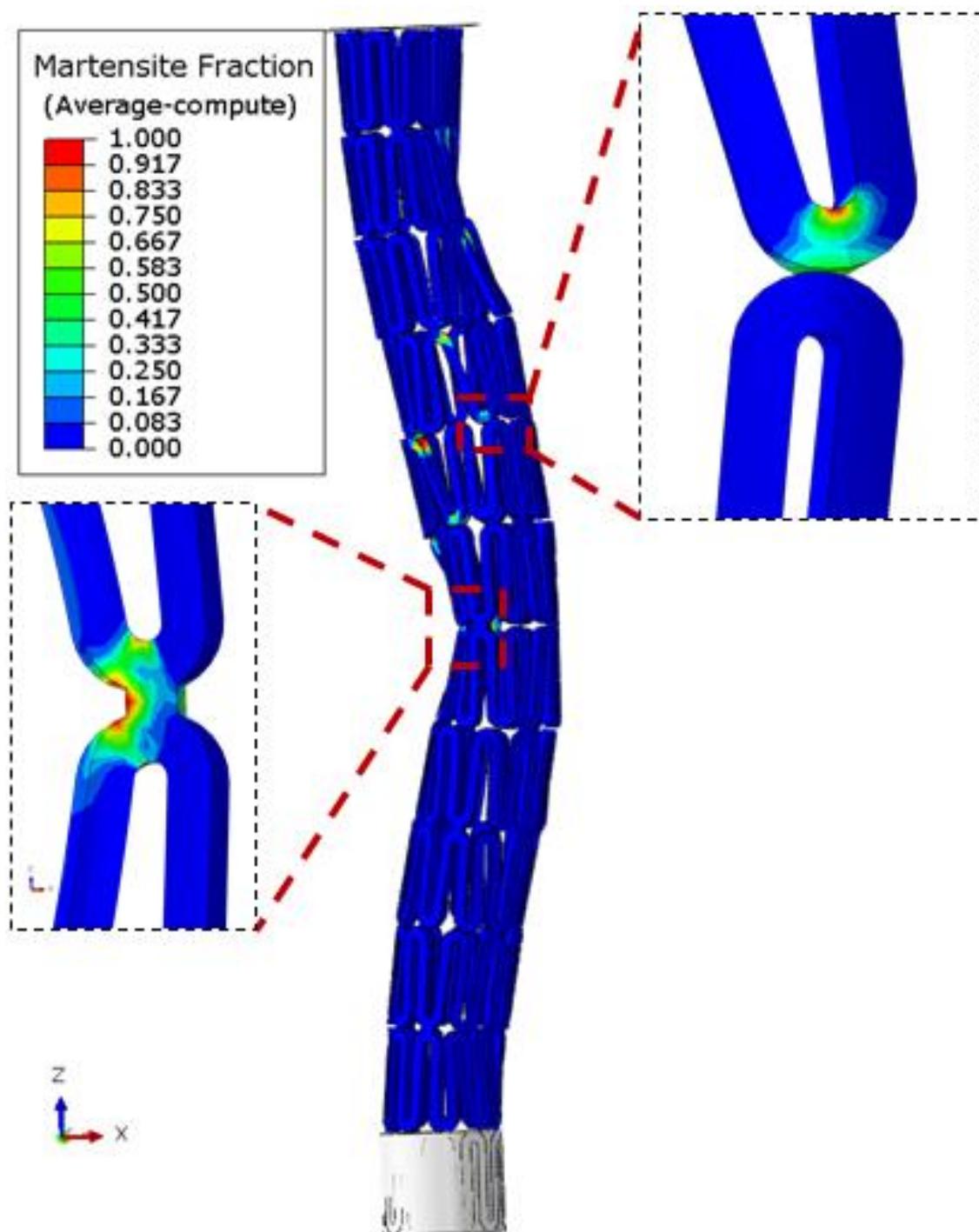


Рисунок 4.33 – Форма потери устойчивости нитинолового стента
Визуализация параметра мартенситной фазы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы, полученные автором и выносимые на защиту, следующие.

1. Построен алгоритм численной реализации однократно связной модели А. А. Мовчана термомеханического поведения равноатомного никелида титана, разработан и протестирован на системе модельных задач программный модуль, адаптированный к использованию к составу программного комплекса конечно-элементного моделирования SUMULIA Abaqus.
2. Получены численные решения задач о потере устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня из равноатомного никелида титана при прямом мартенситном превращении и его закритическом состоянии в трехмерной нелинейной постановке задачи, проведено сравнение результатов с аналитическими решениями в одномерной бифуркационной постановке.
3. Получены распределения мартенситной фазы по длине и сечению стержней различного удлинения при разных краевых условиях в процессе потери устойчивости прямолинейной формы равновесия в режиме прямого мартенситного превращения.
4. Получены результаты экспериментального исследования осевого сжатия упруго-пластических ячеистых оболочек с потерей устойчивости, сопровождающейся контактным взаимодействием ячеек, и на их основе разработана схема численного решения задачи.
5. Получены численные решения задач о термомеханическом поведении цилиндрических ячеистых оболочек в процессе потери устойчивости прямолинейной формы равновесия при изотермическом осевом сжатии с учетом взаимодействия с сухим трением входящих в контакт ячеек, вычислены значения критических сил и предельной несущей способности.
6. Получена оценка влияния сил трения в области контакта на предельную несущую способность цилиндрических ячеистых оболочек при осевом изотермическом сжатии с потерей устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клышников М.Ю., Овчаренко Е.А., Нуштаев Д.В., "Способы оптимизации геометрии ячейки каркаса самораскрывающегося протеза клапана аорты," // Технология живых систем, № 3, 2014. С. 39-45.
2. Овчаренко Е.А., Клышников К.Ю., Саврасов Г.В., Нуштаев Д.В., Глушкова Т.В., "Выбор оптимальных геометрических параметров ячейки опорного каркаса транскатетерного клапана," // Компьютерные исследования и моделирование, № 6, 2014. С. 943-956.
3. Ovcharenko E.A., Klyshnikov K.Y., Vlad A.R., Sizova I.N., Kokov A.N., Nushtaev D.V., Yuzhalin A.E., and Zhuravleva I.U., "Computer-aided design of the human aortic root ," // Computers in Biology and Medicine, Vol. 54, 2014. pp. 109-115.
4. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А., "Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии," // Труды Московского авиационного института, Т. 82, 2015.
5. Нуштаев Д.В., Курдюмов Н.Н. Программа по реализации термомеханической модели сплавов с памятью формы. РОСПАТЕНТ. Свидетельство №2015615302 от 15.05.2015. 2015.
6. Wei Z.G., Sandstroem R., "Review. Shape-memory materials and hybrid composites for smart systems. Part I. Shape-memory materials," // Journal of Materials Sci., Vol. 33, 1998. pp. 3743-3762.
7. Muddle B.C., Trail R.M. Beijing: International Academic, 1994. P. 556.
8. Abeyaratne R., Kim S., "Cyclic effects in shape-memory alloys: A one dimensional continuum model," // Int. J. Solids Struct., Vol. 34, No. 25, 1997. pp. 3273 - 3289.
9. Пушин В.Г., Юрченко Л.И., and Куранова Н.Н., "Сплавы с памятью формы. Структура, фазовые превращения, свойства, применение," // Фазовые и

структурные превращения в сталях, No. 1, 2012. pp. 135-191.

10. Хачин В.Н., Пушин В.Г., and Кондратьев В.В. Никелид титата: Структура и свойства. Москва: Наука, 1992. 160 pp.
11. Otsuka K., Wayman C.M. Shape Memory Materials. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 300 pp.
12. Nishiyama Z. Martensitic Transformations. New York: Academic Press, 1978.
13. Jackson CM, "55-nitinol—The alloy with a memory: Its physical metallurgy, properties and applications," NASA, Washington, Technical Reports SP-5110, 1972.
14. De Vos J., Aernoudt E., and Delaey L., "The crystallography of the martensitic transformation of BCC into 9R: A generalized mathematical model," // Zeitschrift für Metallkunde, Vol. 69, 1978. pp. 438–444.
15. Cross WB et al., "Nitinol characterization study," NASA, Langley, Technical Reports CR-1433, 1969.
16. Delaey L., Cahn R., Haasen P., and Kramen E., "Diffusionless transformations. Phase Transformations in Materials," // Material Science and Technologies, Vol. 5, 1990. pp. 339–404.
17. Лихачев В.А., "Эффект памяти формы," // Физика, 1997. pp. 107-114.
18. MacQueron J.L., Morin M., Guenin G., Planes A., Elgueta J., and Castan T., "Atomic ordering and martensitic transition in a Cu-Zn-Al shape memory alloy," // Journal de Physique, Vol. 9, No. 1, 1991. pp. 259–263.
19. Bekker A., Victory J.C., Popov P., and Lagoudas D.C., "Impact induced propagation of phase transformation in a shape memory alloy rod," // International Journal of Plasticity, Vol. 18, No. 11, 2002. pp. 1425-1647.
20. Пушин В.Г., Кондратьев В.В., and Хачин В.Н. Предпереходные явления и мартенситные превращения. Екатеринбург: УрО РАН, 1998.
21. Birman V. Review of mechanics of shape memory alloy structures. Appl. Mech. Reviews 50, 1997. 629-645 pp.

22. Bernatdini D., Pence T.J., "Shape memory alloys: modeling," // Encyclopedia of Smart Materials, Vol. 2, 2002. pp. 964–980.
23. Smith R.C. Smart Material Systems- Model development. SIAM, Frontiers in Applied Mathematics, 2005. 488 pp.
24. Paiva A., Savi M.A., "An overview of constitutive model for shape memory alloys," // Mathematical Problems in Engineering, 2006. pp. 1-30.
25. Lagoudas D.C. Shape Memory Alloys- Modeling and engineering applications. Springer, 2008. 436 pp.
26. Khandelwal A., Buravalla V., "Models for Shape Memory Alloy Behavior: An overview of modeling approaches," // International Journal of Structural Changes in Solids, Vol. 1, No. 1, 2009. pp. 111-148.
27. Achenbach M., Muller I.A., "A model for shape memory," // Journal de Physique, Vol. 12, No. 43, 1982. pp. 163 – 167.
28. Patoor E., Eberhardt A., and Berveiller M., "Potentiel pseudoelastique et plasticite de transformation martensitique dans les mono et polycristaux metalliques," // Acta Metallurgica, No. 35, 1987. pp. 2779–2789.
29. Patoor E., Eberhardt A., and Berveiller M., "Thermomechanical behavior of shape memory alloys," // Archives of Mechanics, No. 40, 1988. pp. 775-794.
30. Falk F., "Pseudoelastic stress-strain curves of polycrystalline shape memory alloys calculated from single crystal data," // International Journal of Engineering Science, Vol. 3, No. 27, 1990. pp. 277–284.
31. Falk F., "One-dimensional model of shape memory alloys," // Archives of Mechanics, Vol. 35, No. 1, 1983. pp. 63-84.
32. Ball J.M., James R.D., "Fine phase mixtures as minimizers of energy," // Archive for Rational Mechanics and Analysis, No. 100, 1987. pp. 13-52.
33. Fischer F.D., Tanaka K., "A micromechanical model for the kinetics of martensitic transformation," // International Journal of Solids and Structures, Vol. 14, No. 29, 1992. pp. 1723 – 1728.

34. Sun Q.P., Hwang K.C., "Micromechanics modeling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys—part I. Derivation of general relations," // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993. pp. 1-17.
35. Patoor E., Eberhardt A., and Berveiller M., "Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys," // *Journal de Physique*, 1996. pp. 277-292.
36. Lagoudas, D.C., Bhattacharya , "On the correspondence between micromechanical models for isothermal pseudoelastic response of shape memory alloys and Preisach model for hysteresis," // *Mathematics and Mechanics of Solids* , Vol. 2 , No. 4, 1997. pp. 405-440.
37. Gao X., Brinson L.C., "A simplified multivariant SMA model based on invariant plane nature of martensitic transformation," // *Journal of Intelligent Material Systems*, Vol. 13, No. 12, 2002. pp. 795-810.
38. Huang M., Brinson L.C., "A multivariant model for single crystal shape memory alloy behavior," // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, No. 46, 1998. pp. 1379 - 1409.
39. Marketz F., Fischer F.D., "Modelling the mechanical behavior of shape memory alloys under variant coalescence," // *Computational Materials Science*, Vol. 5, No. 3, 1996. pp. 210-226.
40. Thamburaja P., "Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys," // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 53, No. 4, 2005. pp. 825-856.
41. Esguerra M. Modelling Hysteresis Loops of Soft Ferrite Materials // *International Conference on Ferrites ICF8*. Kyoto. 2000. pp. 220-222.
42. Jinung A., Dong – Soo K., "Modeling of a Magnetorheological Actuator Including Magnetic Hysteresis," // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 14, No. 9, 2003. pp. 541-550.
43. Falk F., "Model free energy, mechanics and thermodynamics of shape memory alloys," // *Acta Metall*, Vol. 28, 1980. pp. 1773-1780.

44. Гинзбург В.Л., "Несколько замечаний о фазовых переходах второго рода и макроскопической теории сегнетоэлектриков," // Физика твердого тела, Vol. 2, No. 9, 1960. pp. 2031 - 2043.
45. Falk F., "Ginzburg-Landau theory and solitary waves in shape memory alloys," // Zeitschrift für Physik, No. 54, 1984. pp. 159-167.
46. Burns J.A., Spies R.D., "A numerical study of parameter sensitivities in Landau-Ginzburg models of phase transitions in shape memory alloys," // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, No. 5, 1994. pp. 321-332.
47. Falk F., Konopka P., "Three-dimensional Landau theory describing the martensite phase transformation of shape memory alloys," // Journal de Physique, No. 2, 1990. pp. 61-77.
48. Preisach F., "Über die Magnetische Nachwirkung," // Zeitschrift für Physik, Vol. 94, 1935. pp. 277-302.
49. Macki J.W., Nistri P., and Zecca P., "Mathematical models for hysteresis," // SIAM Review, Vol. 1, No. 35, 1993. pp. 94-123.
50. Nascimento A, "Contribution to the Study of Hysteresis in Shape Memory Alloys," Universidade Federal de Campina Grande, Brazil, Master of Science Report 2002. 79 pp.
51. Ortin J., "Partial hysteresis cycles in shape memory alloys: experiments and modelling," // Journal of Physics, Vol. 1, No. 4, 1991. pp. 65-70.
52. Ortin J., "Preisach modeling of hysteresis for a pseudoelastic cu-zn-al single crystal," // Journal of Applied Physics, Vol. 71, 1992. pp. 1454 - 1461.
53. Ortin J., Delaey L., "Hysteresis in shape-memory alloys," // International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 37, 2002. pp. 1275-1281.
54. Ktena A., Fotiadis D.I., Spanos P.D., and Massalas C.V., "A Preisach model identification procedure and simulation of hysteresis in ferromagnets and shape-memory alloys," // Physica B, Vol. 306, 2001. pp. 84-90.
55. Ktena A., Fotiadis D.I., Spanos P.D., Berger A., and Massalas C.V., "Identification

- of 1D and 2D Preisach models for ferromagnets and shape memory alloys," // International Journal of Engineering Science, Vol. 40, 2002. pp. 2235-2247.
56. Ivshin Y., Pence T., "A constitutive model for hysteretic phase transition behavior," // Int. J. Eng. Sci., No. 32, 1994. pp. 681-704.
57. Nascimento S.F., José S., and Luis A.L. A model for strain-temperature loops in shape memory alloy actuators // ABCM Symposium Series in Mechatronics. 2004. Vol. 1. pp. 264 - 271.
58. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Москва: Наука, 1970. 492 pp.
59. Luig P., Bruhns O.T., "On the modeling of shape memory alloys using tensorial internal variables," // Materials Science and Engineering, Vol. 481, 2008. pp. 379 - 383.
60. Frémond M. Non-Smooth Thermomechanics Frémond. Berlin: Springer Science & Business Media, 2002. 480 pp.
61. Sittner P., Hara Y., and Tokuda M., "Experimental study on the thermoelastic martensitic transformation in shape memory alloy polycrystal induced by combined external forces," // Metallurgical and Materials Transactions, No. 25, 1995. pp. 123-149.
62. Lim T., McDowell D., "Mechanical behavior of an Ni–Ti shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading," // Journal of Engineering Materials and Technology, No. 121, 1999. pp. 9-18.
63. Souza A., Mamiya E., and Zouain N., "Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations," // European Journal of Mechanics A/Solids, No. 17, 1998. pp. 789 - 806.
64. Leclercq S., Lexcellent C., "A general macroscopic description of the thermomechanical of shape memory allows," // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 44, No. 6, 1996. pp. 953 - 980.
65. Boyd J.G., Lagoudas D.C., "A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy," // International

Journal of Plasticity, Vol. 12, No. 6, 1996. pp. 805 - 842.

66. Мовчан А.А., Ньюнт С., "Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса," // Журнал прикладной механики и технической физики, Vol. 47, No. 4, 2006. pp. 98 - 103.
67. Мовчан А.А., Мишустин И.В., "Анализ неаддитивных добавок к потенциалу Гиббса сплава с памятью формы," // Известия РАН. Серия физическая, Vol. 70, No. 9, 2006. pp. 1388 - 1395.
68. Мовчан А.А., Ньюнт С., and Казарина С.А., "Термодинамическое описание механического поведения сплавов с памятью формы," // Деформация и разрушение материалов, No. 8, 2005. pp. 14 - 19.
69. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Термодинамический анализ механического поведения сплавов с памятью формы // Упругость и неупругость: Сб. трудов Межд. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 95-летней годовщине со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва. 2006. pp. 195 - 203.
70. Мовчан А.А., Мишустин И.В., "Термодинамическое описание нелинейного деформирования сплавов с памятью формы," // Журнал функциональных материалов, Vol. 1, No. 6, 2007. pp. 221 - 226.
71. Tanaka K., Nagaki S., "A thermomechanical description of materials with internal variables in the process of phase transitions," // Archive of Applied Mechanics, Vol. 5, No. 61, 1982. pp. 287-299.
72. Liang C., Rogers C.A., "One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials," // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, No. 1, 1990. pp. 207-234.
73. Brinson L.C., "One dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable," // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, No. 4, 1993. pp. 229-242.

74. Ivshin Y., Pence T.J., "A thermomechanical model for a one variant shape memory material," // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, No. 5, 1994. pp. 455-473.
75. Bekker A., Brinson L.C., "Temperature-induced phase transformation in a shape memory alloy: Phase diagram based kinetics approach," // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 6, No. 45, 1997. pp. 949 - 988.
76. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие соотношения для сплавов с памятью формы. Проблемы машиностроения и надежности машин №6, 1994. 47-53 pp.
77. Brinson L.C., Lammering R., "Finite element analysis of the behavior of shape memory alloys and their applications," // International Journal of Solids and Structures, Vol. 30, No. 23, 1993. pp. 3261 - 3280.
78. Chung J.H., Heo J.S., and Lee J.J., "Implementation strategy for the dual transformation region in the Brinson SMA constitutive model," // Smart Materials and Structures, Vol. 1, No. 16, 2007. pp. 1-5.
79. Gao X., Qiao R., and Brinson L.C., "Phase diagram kinetics for shape memory alloys: a robust finite element implementation," // Smart Materials and Structures, No. 16, 2007. pp. 2102 - 2115.
80. Bertran A., "Thermo-Mechanical Constitutive Equations for the Description of Shape Memory Effects in Alloys," // Nuclear Engineering and Design, No. 74, 1982. pp. 173 - 182.
81. Souza A.C., Mamiya E.N., and Zouain N., "Three-Dimensional Model for Solids Undergoing Stress-Induced Phase Transformations," // European Journal of Mechanics Solids, No. 17, 1998. pp. 789 - 806.
82. Motta L.B., Guillen L.L., Mamiya E.N., and Vianna D.M., "A study on the hardening in particular model for pseudoelastic materials," // In: Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 1999. pp. 15-28.
83. Auricchio F., Lubliner J., "A Uniaxial Model for Shape Memory Alloys," //

- International Journal of Solids and Structures, Vol. 27, No. 34, 1997. pp. 3601 - 3618.
84. Govindjee S., Kasper E., "A Shape Memory Alloy Model for Uranium-Niobium Accounting for Plasticity," // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, No. 8, 1997. pp. 815 - 826.
 85. Leclerq S., Bourbon G., and Lexcellent C., "Plasticity Like Model of Martensite Phase Transition in Shape Memory Alloys," // Journal de Physique, Vol. 4, No. 5, 1995. pp. 513 - 518.
 86. Tanaka K., Iwasaki R., "A Phenomenological Theory of Transformation Superplasticity," // Engineering Fracture Mechanics Impact Factor, Vol. 4, No. 21, 1985. pp. 709 - 720.
 87. Tanaka K., "A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys," // ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 2, No. 112, 1990. pp. 158 - 163.
 88. Tanaka K., "A thermomechanical sketch of shape memory effect: one-dimensional tensile behavior," // Materials Science Research International, No. 18, 1986. pp. 251 - 260.
 89. Muller I. Pseudoelasticity in shape memory alloys - an extreme case of thermoelasticity // Accademia Nazionale dei Lincei Proceedings of the Meeting of Finite Thermoelasticity. Roma. 1986. Vol. 76. pp. 123 - 150.
 90. Muller I., "On the size of the hysteresis in pseudoelasticity," // Continuum Mechanics and Thermodynamics, No. 1, 1989. pp. 125 - 142.
 91. Muller I., Xu H., "On the pseudo-elastic hysteresis," // Acta Metallurgica et Materialia, Vol. 3, No. 39, 1991. pp. 263 - 271.
 92. Hu Y., Muller I., "Nonequilibrium thermodynamics of pseudoelasticity," // Continuum Mechanics and Thermodynamics, No. 5, 1993. pp. 163 - 204.
 93. Boyd J.G., Lagoudas D.C. A Thermodynamically Based Constitutive Model for the SME Due to Transformation and Reorientation // Plasticity 93: Proc. 4th Int.

Symp. on Plasticity and Its Current Applications. Baltimore. 1993.

94. Boyd J.G., Lagoudas D.C., "Thermomechanical response of shape memory composites," // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 5, No. 3, 1994. pp. 333 - 346.
95. Boyd J.G., Lagoudas D.C., "A constitutive model for simultaneous transformation and reorientation in shape memory materials," // *Mechanics of Phase Transformations and Shape Memory Alloys*, 1994. pp. 159 - 172.
96. Raniecki B., Lexcellent C., and Tanaka K., "Thermodynamic model of pseudoelastic behaviour of shape memory alloys," // *Archives of Mechanics*, Vol. 3, No. 44, 1992. pp. 261 - 284.
97. Raniecke B., Lexcellent C., "RL-Models of Pseudoelasticity and Their Specification for Some Shape Memory Solids," // *European Journal of Mechanics A-solids*, Vol. 13, No. 21, 1994. pp. 96-119.
98. Sun Q.P., Hwang K.C., "Micromechanics Modeling for the Constitutive Behavior of Polycrystalline Shape Memory Alloys-II. Study of the Individual Phenomena," // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993. pp. 20-26.
99. Boyd J.G., Lagoudas D.C., "A Thermodynamical Constitutive Model for Shape Memory Materials. Part 2. The SMA Composite Material," // *International journal of plasticity*, Vol. 12, No. 6, 1996. pp. 843 - 873.
100. Lubliner J., Taylor R.L., and Auricchio F., "A new model of generalized plasticity and its numerical implementation," // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 22, 1993. pp. 3171 - 3184.
101. Lubliner J., Auricchio F., "Generalized Plasticity and Shape Memory Alloys," // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No. 7, 1996. pp. 991 - 1003.
102. Auricchio F., Taylor R.L., and Lubliner J., "Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior," // *Computer methods in applied mechanics and engineering*, No. 146, 1997. pp. 281 - 312.

103. Auricchio F., Taylor R.L., "Shape-memory alloys: modelling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behavior," // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 43, 1997. pp. 175 - 194.
104. Lubliner J., "A simple model of generalized plasticity," // *International Journal of Solids and Structures* , Vol. 28, No. 6, 1991. pp. 769 - 778.
105. Auricchio F., "A robust integration-algorithm for a finite strain shape-memory-alloy superelastic model," // *International Journal of Plasticity*, Vol. 17, 2001. pp. 971 - 990.
106. Rebelo N., Hsu M., and Foadian H. Simulation of superelastic alloys behavior with abaqus // *Proceedings of the International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies (SMST-2000)*. USA. 2001. pp. 457 - 469.
107. Migliavacca F., Petrini L., Massarotti P., Schievano S., Auricchio F., and Dubini G., "Stainless and Shape Memory Alloy Coronary Stents: A Computational Study on the Interaction With the Vascular Wall," // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, Vol. 2, No. 4, 2004. pp. 205 - 217.
108. Shijia Z., Linxia G., and Froemming S.R., "Finite Element Analysis of the Implantation of a Self-Expanding Stent: Impact of Lesion Calcification," // *Journal of Medical Devices*, Vol. 6, 2012. pp. 1 - 6.
109. Кучумов АГ, "Биомеханическое моделирование фиксаторов из сплавов с памятью формы, применяющихся в челюстно - лицевой хирургии," СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Диссертация 01.02.08, 2009.
110. Raniecki B., Lexcellent C., "Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys," // *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 17, No. 2, 1998. pp. 185 - 205.
111. Raniecki B., Rejzner J., and Lexcellent C., "Anatomization of hysteresis loops in pure bending of ideal pseudoelastic sma beams," // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, 2001. pp. 1339 - 1368.
112. Rejzner J., Lexcellent C., and Raniecki B., "Pseudoelastic behaviour of shape

- memory alloy beams under pure bending: Experiments and modelling," // International Journal of Mechanical, Vol. 44, 2002. pp. 665 - 686.
113. Tanaka K., Nishimura F., Hayashi T., and Tobushi H.L., "Phenomenological analysis on subloops and cyclic behavior in shape memory alloys under mechanical and/or thermal loads," // Mechanics of Advanced Materials and Structures, No. 19, 1995. pp. 281 - 292.
114. Lexcellent C., Bourbon G., "Thermodynamical model for cyclic behaviour of Ti-Ni and Cu-Zn-Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile tests," // Mechanics of Advanced Materials and Structures, No. 24, 1996. pp. 59 - 73.
115. Lexcellent C., Leclerq S., Gabry B., and Bourbon G., "The two way shape memory effect of shape memory alloys: An experimental study and a phenomenological model," // International Journal of Plasticity, Vol. 16, 2000. pp. 1155 - 1168.
116. Bo Z., Lagoudas D.C., "Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part I: Theoretical derivations," // International Journal of Engineering Science, Vol. 37, 1999. pp. 1089 - 1140.
117. Bo Z., Lagoudas D.C., "Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part III: Evolution of plastic strains and two-way memory effect," // International Journal of Engineering Science, Vol. 37, 1999. pp. 1175 - 1204.
118. Bo Z., Lagoudas D.C., "Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part IV: Modeling of minor hysteresis loops," // International Journal of Engineering Science, Vol. 37, 1999. pp. 1205 - 1249.
119. Lagoudas D.C., Bo Z., "Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part II: Material characterization and experimental results for a stable transformation cycle," // International Journal of Engineering Science, Vol. 37, 1999. pp. 1205 - 1249.
120. Auricchio F., Petrini L., "Improvements and algorithmical considerations on a recent three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformations," // International Journal for Numerical Methods in Engineering,

Vol. 55, No. 11, 2002. pp. 1255 - 1284.

121. Auricchio F., Petrini , "A three-dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems," // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 61, No. 6, 2004. pp. 807 - 836.
122. Auricchio F., Petrini L., "A three-dimensional model describing stress - temperature induced solid phase transformations: thermomechanical coupling and hybrid composite applications," // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, No. 61, 2004. pp. 716 - 737.
123. Thomson D.M., Griffin O.H., "Finite element predictions of active buckling control of stiffened panels," // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 4, No. 2, 1993. pp. 243-247.
124. Lee J.J., Choi S., "Thermal buckling and postbuckling analysis of a laminated composite beam with embedded SMA actuators," // Composite Structures, Vol. 47, 1999. pp. 695-703.
125. Choi S., Lee J.J., Seo D.C., and Choi S.W., "The active buckling control of laminate composite beams with embedded shape memory alloy wires," // Composite Structures, Vol. 47, 1999. pp. 679-686.
126. Lee H.J., Lee J.J., and Huh J.S., "A simulation study on the thermal buckling behavior of laminate composite shells with embedded shape memory alloy (SMA) wires," // Composite Structures, Vol. 47, 1999. pp. 463-469.
127. Хусаинов М.А., Беляков В.Н. Исследование силовых характеристик при прощелкивании арки-полоски из никелида титана // Научные труды 1 Международного семинара "Современные проблемы прочности" им. В. А. Лихачева и 33 семинара "Актуальные проблемы прочности". 1997. Т. 2. С. 139-142.
128. Хусаинов М.А., "Исследование осесимметричного выпучивания круглых пластин," // Журнал технической физики, Т. 67, № 6, 1997. С. 118-120.

129. Хусаинов М.А., Малухина О.А. Анализ устойчивости сферических сегментов с памятью формы // Научные труды 3 Международного семинара "Современные проблемы прочности" им. В. А. Лихачева. Новгород. 1999. Vol. 2. pp. 185-189.
130. Мовчан А.А., Казарина С.А., Серов В.В. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Материалы 13-х Петербургских чтений по проблемам прочности. Санкт-Петербург. 2002.
131. Мовчан А.А., Казарина С.А., "Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений," // Проблемы машиностроения и надежности машин, Т. 6, 2002. С. 82-89.
132. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. К проблеме устойчивости равновесия при термоупругих мартенситных фазовых превращениях // Научные труды 3 Международного семинара "Современные проблемы прочности" им. В. А. Лихачева. Новгород. 1999. Т. 2. С. 307-311.
133. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., "Устойчивость "Стойки Шенли" при ползучести или при прямом термоупругом мартенситном превращении," // Механика композиционных материалов и конструкций, Т. 6, № 1, 2000. С. 89-102.
134. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Концепция "Продолжающегося фазового перехода" для анализа устойчивости при термоупругих фазовых превращениях // Материалы 8 Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". Ярополец. 2002. Т. 1. С. 28-29.
135. Сильченко Л.Г. К проблеме устойчивости равновесия для сжатых элементов из сплава с памятью формы // Материалы Юбилейной школы-семинара "Композиционные материалы" к 80-летию академика И. Ф. Образцова. Москва. 2000. С. 22.

136. Movchan A.A., Kazarina S.A., Silchenko L.G., and Danilin A.N. Phenomenon of Stability Loss due to Thermoelastic Phase Transition under a Compressive Loading // Contemporary Research in Theoretical and Applied Mechanics. Proc. of 14th U. S. National Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Blacksburg. 2002. P. 424.
137. Шенли Ф., "Теория колонны за пределом упругости," // Механика, № 2, 1951. С. 88-98.
138. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. К проблеме устойчивости равновесия для сжатых элементов из сплава с памятью формы // Юбилейная школа-семинар "Композиционные материалы". Москва. 2000. С. 22.
139. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., "Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием напряжений," // Известия РАН. Механика твердого тела, № 2, 2004. С. 132-144.
140. Сильченко Л.Г. Устойчивость сжатого стержня из сплава с памятью формы при прямом термоупругом превращении // Материалы 6 Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". Ярополец. 2000. С. 45.
141. Сильченко Л.Г. Устойчивость сжатого стержня из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Труды 36 Семинара "Актуальные проблемы прочности". Витебск. 2000. Т. 1. С. 359-364.
142. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., "Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситные превращения под действием сжимающих напряжений," // Прикладная механика и техническая физика, Т. 44, № 3, 2003. С. 169-178.
143. Сильченко Л.Г., "О потере устойчивости стержня из сплава с памятью формы, вызванной реактивными сжимающими напряжениями при обратном мартенситном фазовом превращении," // Механика композиционных материалов и конструкций, Т. 10, № 3, 2004. С. 393-406.
144. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость элементов из сплавов с памятью

- формы при обратных мартенситных превращениях // Материалы 10 Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". Ярополец. 2004. Т. 1. С. 91-93.
145. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., "Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении," // Изв. РАН. Механика твердого тела, №5, 2004.
146. Сильченко Л.Г. Об устойчивости стержня из сплава с памятью формы при обратном мартенситном фазовом превращении // Труды 43 Семинара "Актуальные проблемы прочности". Витебск. 2004.
147. Сильченко Л.Г., "Явление потери устойчивости при мартенситной неупругости," // Механика композиционных материалов и конструкций, Т. 8, № 2, 2002. С. 161-171.
148. Movchan A.A., Silchenko L.G., Kazarina S.A., Zhavoronok S.I., and Silchenko T.L., "Stability of titanium nickelide rods loaded in the mode of martensite inelasticity," // J. Machinery Manufact. Reliab., Vol. 41, No. 3, 2012. pp. 245-251.
149. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Казарина С.А., Жаворонок С.И., Сильченко Т.Л., "Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости," // Проблемы машиностроения и надежности машин, № 3, 2012. С. 72-80.
150. Мовчан АА и др., "Способ испытания на статическую устойчивость тонких пластин," Патент на изобретение 2511224, Jul 10, 2012.
151. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г., "Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы," // Изв. РАН. Механика твердого тела, № 6, 2010. С. 137-147.
152. Сильченко Л.Г., Мовчан А.А., Мовчан И.А., "Учет структурного превращения при анализе устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы," // Проблемы машиностроения и надежности машин, № 5, 2010. С. 57-65.

153. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., "Об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении," // Прикладная математика и механика, Т. 68, № 1, 2004. С. 60-72.
154. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., "Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении," // Прикладная математика и механика, Т. 70, № 5, 2006. С. 871-883.
155. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., "Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим превращением," // Изв. РАН. Механика твердого тела, № 1, 2008. С. 117-130.
156. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., "Устойчивость вала из сплава с памятью формы, находящегося под воздействием кручения и растяжения-сжатия при термоупругих фазовых превращениях," // Проблемы машиностроения и надежности машин, № 2, 2009. С. 52-59.
157. Сильченко Л.Г., Мовчан И.А., "Устойчивость цилиндрической пластины из сплава с памятью формы при термоупругих мартенситных превращениях в условиях сжатия и сдвига," // Механика композиционных материалов и конструкций, Т. 15, № 2, 2009. С. 221-241.
158. Сильченко Л.Г., Мовчан И.А., "Устойчивость цилиндрической оболочки из сплава с памятью формы при сжатии и кручении," // Механика композиционных материалов и конструкций, Т. 15, № 4, 2009. С. 486-496.
159. Rahman M.A., Qui J., and Tani J., "Buckling and postbuckling characteristics of the superelastic SMA columns," // Int. J. Solids and Struct., V. 38, 2001. pp. 9253-9265.
160. Rahman M.A., Qui J., and Tani J., "Buckling and postbuckling characteristics of the superelastic SMA columns - numerical simulation," // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 16, 2005. pp. 691-702.
161. Rahman M.A., Tani J., "Postbuckling characteristics of the short superelastic shape memory alloy columns - experiment and quantitative analysis," // International Journal of Applied Mechanics and Engineering, Vol. 11, No. 4, 2006. pp. 941-955.

162. Rahman M.A., Akanda S.R., and Hossian M.A., "Effect of cross section geometry on the response of an SMA column," // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 19, 2008. pp. 243-252.
163. Richter F., Kastner O., and Eggeler G., "Finite element simulation of the anti-buckling effect of a shape memory alloy bar," // *Journal of Materials Engineering and Performance*, Vol. 20, 2011. pp. 719-730.
164. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л., "Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы," // *Известия РАН. Механика твердого тела*, № 2, 2011. С. 44-56.
165. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И. Расширение возможностей моделирования процессов деформирования сплавов с эффектом памяти формы // *Труды международного форума «Инженерные системы»*. Москва. 2011.
166. Craig L.B. *Open Stent Design: Design and analysis of self expanding cardiovascular stents*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012. 94 pp.
167. Dumoulin C., Cochelin B., "Mechanical behavior modelling of balloon-expandable stents," // *Journal of Biomechanics*, No. 33, 2000. pp. 1461–1470.
168. Kim J.H., Kang T.J., and Yu W.R., "Mechanical Modeling of Self-Expandable Stent Fabricated Using Braiding Technology," // *Journal of Biomechanics*, Vol. 41, No. 15, 2008. pp. 3202–3212.
169. Duda S.H., Wiskirchen J., and Tepe G., "Physical properties of endovascular stents: an experimental comparison," // *Journal of Vascular & Interventional Radiology*, No. 11, 2000. pp. 645-654.
170. Нуштаев Д.В., "Использование программного комплекса SIMULIA Abaqus для решения задач биомеханики," // *САПР и графика*, N. 9, 2014. pp. 114-117.
171. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование стентов при осевом сжатии // *Тезисы докладов 2 Всероссийской научной конференции "Механика наноструктурированных материалов и систем"*. Москва. 2013. С. 53.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программный модуль, реализующий модель термомеханического поведения

СПФ

```
SUBROUTINE UMAT (STRESS, STATEV, DDSDD, SSE, SPD, SCD,  
1RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,  
2STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,  
3NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,  
4CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KPST, KSTEP, KINC)  
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'  
CHARACTER*80 CMNAME  
DIMENSION STRESS (NTENS), STATEV (NSTATV),  
1 DDSDD (NTENS, NTENS), DDSDDT (NTENS), DRPLDE (NTENS),  
2 STRAN (NTENS), DSTRAN (NTENS), TIME (2), PREDEF (1), DPRED (1),  
3 PROPS (NPROPS), COORDS (3), DROT (3, 3), DFGRD0 (3, 3), DFGRD1 (3, 3)  
  
double precision phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s,  
1 M0_f, A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0  
COMMON/SMA_TM/phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s, M0_f,  
1 A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0  
  
double precision FA, FM, GA, GM, FK, GG, GK, alpha, CC, AC, toler,  
1 omega, domega, stressD, stress0, dstress, dstran0, sigma_p, coef,  
2 dtemp0, dtime0, t_prev, tA_prev, tM_prev, T_sigma, sigma_i,  
3 t, tA, tM, dq, tA_cur, tM_cur, toler_eps, coef_dop, temp0, M_PI  
dimension stress0 (ntens), omega (ntens), domega (ntens),  
1 dstran0 (ntens), CC (ntens, ntens), AC (ntens)  
M_PI = 3.14159265358979323846D0
```

Блок начальных данных:

PROPS (1) = phase - направление фазовых превращений (1 - от аустенита к мартенситу, 2 - наоборот);
PROPS (2) = q - объемная доля мартенсита в начальный момент времени;
PROPS (3) = EA - модуль Юнга аустенита;
PROPS (4) = EM - модуль Юнга мартенсита;
PROPS (5) = nju - общий коэффициент Пуассона;
PROPS (6) = alphaA - коэффициент температурного расширения аустенита;
PROPS (7) = alphaM - коэффициент температурного расширения мартенсита;
PROPS (8) = M0_s - температура начала прямого фазового перехода (A->M);
PROPS (9) = M0_f - температура окончания прямого фазового перехода (A->M);
PROPS (10) = A0_s - температура начала обратного фазового перехода (M->A);
PROPS (11) = A0_f - температура окончания обратного фазового перехода (M->A);
PROPS (12) = deltaS - разница объемных плотностей энтропии аустенита и мартенсита;
PROPS (13) = eps0_p - объемная линейная деформация для прямого мартенситного превращения;
PROPS (14) = RoD - максимальная интенсивность деформации для прямого превращения;
PROPS (15) = sigma0 - пороговое напряжение для плотности распределения микронапряжений в представительном объеме;
PROPS (16) = toler - шаг по времени на фазовых итерациях;
PROPS (17) = toler_eps - точность отлаивания точки входа или выхода из структурно-фазовых превращений;
PROPS (18) = max_iter - максимальное число итераций для достижения точки входа или выхода;

Назначение механических характеристик:

```

EA    = props(3)
EM    = props(4)
fnju  = props(5)
alphaA = props(6)
alphaM = props(7)
M0_s  = props(8)
M0_f  = props(9)
A0_s  = props(10)
A0_f  = props(11)
deltaS    = props(12)
eps0_p    = props(13)
RoD       = props(14)
sigma0    = props(15)
toler     = props(16)
toler_eps = props(17)
max_iter  = int(props(18))

```

Таблица дополнительных переменных :

```

STATEV(1) = phase    - текущее направление фазовых превращений (1 - от аустенита
к мартенситу, (-1) - наоборот);
STATEV(2) = q        - текущая объемная доля мартенсита в сплаве;
STATEV(3) = omega(1) - текущий тензор структурно-фазовых трансформаций omega_11;
STATEV(4) = omega(2) - текущий тензор структурно-фазовых трансформаций omega_22;
STATEV(5) = omega(3) - текущий тензор структурно-фазовых трансформаций omega_33;
STATEV(6) = omega(4) - текущий тензор структурно-фазовых трансформаций omega_12;
STATEV(7) = omega(5) - текущий тензор структурно-фазовых трансформаций omega_13;
STATEV(8) = omega(6) - текущий тензор структурно-фазовых трансформаций omega_23;
STATEV(9) = T_sigma  - текущая приведенная температура с учетом внутренних
напряжений;
STATEV(10) = tA      - текущий параметр аустенитного превращения;
STATEV(11) = tM      - текущий параметр мартенситного превращения;
STATEV(12) = dtime   - начальный шаг по времени, заданный пользователем;
STATEV(13) = dq_diff - дифференциальное приращение на шаге;
STATEV(14) = dq_algbr - алгебраическое приращение на шаге;
STATEV(15) ...      - технические переменные

```

Состояние мартенситных превращений:

```

if (STATEV(1).EQ.0.D0) then
  phase = props(1)
  q     = props(2)
else
  phase = STATEV(1)
  q     = STATEV(2)
endif

do k1 = 1, ntens
  stress0(k1) = STRESS(k1)
end do

call sigma_p_inv(stress0, sigma_p, ntens, ndi)
call sigma_i_inv(stress0, sigma_i, ntens, ndi)

if (sigma_i.EQ.0.D0) then
  betta = 0.D0
else
  betta = 1.5D0*RoD/sigma_i
endif

if (STATEV(1).EQ.0.D0) then
  STATEV(12) = DTIME
do k1 = 1, ndi

```

```

STATEV(2+k1) = betta*(STRESS(k1)-sigma_p)
end do
do k1 = ndi+1,ntens
STATEV(2+k1) = betta*STRESS(k1)
end do
endif
temp0 = TEMP
dtemp0 = DTEMP
dtime0 = DTIME
do k1 = 1,ntens
omega (k1) = STATEV(2+k1)
domega (k1) = 0.D0
dstran0(k1) = DSTRAN(k1)
end do

call SMA_t(stress0, omega, temp0, tA_prev, tM_prev, T_sigma,
1ntens, ndi)
dq = 0.0D0

```

Прямое мартенситное превращение:

```

if (phase.GT.0.D0) then
if (tM_prev.LE.0.D0.OR.tM_prev.GE.1.D0) then
call SMA_elastic(CC, AC, stress0, omega, dstran0, domega, dtemp0,
1ntens, ndi)
else
call SMA_front(CC, AC, stress0, omega, temp0, dstran0, domega,
1dtemp0, dq, ntens, ndi)
q = 0.5D0*(1.D0-dcos(M_PI*tM_prev))
endif
endif

```

Обратное мартенситное превращение:

```

if (phase.LT.0.D0) then
if (tA_prev.LE.0.D0.OR.tA_prev.GE.1.D0) then
call SMA_elastic(CC, AC, stress0, omega, dstran0, domega, dtemp0,
1ntens, ndi)
else
call SMA_back(CC, AC, stress0, omega, temp0, dstran0, dtemp0,
1dq, ntens, ndi)
q = 0.5D0*(1.D0-dcos(M_PI*tA_prev))
endif
endif

STATEV(13) = dq

do k1 = 1,ntens
omega(k1) = omega(k1)+domega(k1)
end do
call SMA_t(stress0, omega, temp0+dtemp0, tA, tM, T_sigma,
1ntens, ndi)

if (phase.GT.0.D0) then
if (tM.LE.0.D0) then
dq = 0.D0-q
else if (tM.GE.1.D0) then
dq = 1.D0-q
else
dq = 0.5D0*(1.D0-dcos(M_PI*tM))-q
endif
endif

```

```

if (phase.LT.0.D0) then
if (tA.LE.0.D0) then
dq = 0.D0-q
else if (tA.GE.1.D0) then
dq = 1.D0-q
else
dq = 0.5D0*(1.D0-dcos(M_PI*tA))-q
endif
endif

STATEV(14) = dq

do k1 = 1,ntens
ddsddt(k1) = 0.D0
STRESS(k1) = stress0(k1)
do k2 = 1,ntens
ddsddt(k1) = ddsddt(k1)-CC(k1,k2)*AC(k2)
ddsdde(k1,k2) = CC(k1,k2)
end do
end do

```

Точка входа в область мартенситных переходов из упругой области на фазе аустенита:

```

if (phase.LT.0.D0.AND.tA.LT.1.D0.AND.tA_prev.GT.1.D0) then
if (dtime0.GT.toler) then
STATEV(12) = dtime0
pnewdt = 0.1
else
200 continue
endif
endif

```

Точка выхода из области мартенситных переходов на фазе мартенсита:

```

if (phase.GT.0.D0.AND.tM.GT.1.D0.AND.tM_prev.LT.1.D0) then
endif

if (phase.LT.0.D0.AND.tA.LT.0.D0.AND.tA_prev.GT.0.D0) then
endif

if (phase.GT.0.D0) then
if (tM.GE.1.D0.AND.tM_prev.GE.1.D0.AND.tM.LT.tM_prev) phase = -1.D0
endif
if (phase.LT.0.D0) then
if (tA.LE.0.D0.AND.tA_prev.LE.0.D0.AND.tA.GT.tA_prev) phase = 1.D0
endif

```

Обновление структурно-фазовых параметров в массиве STATEV;

```

STATEV(1) = phase
STATEV(2) = STATEV(2)+dq
do k1 = 1,ntens
STATEV(2+k1) = STATEV(2+k1)+domega(k1)
end do
STATEV(9) = T_sigma
STATEV(10) = tA
STATEV(11) = tM

RETURN
END

```

```

subroutine SMA_t(stress, omega, temp, tA, tM, T_sigma, ntens, ndi)
double precision phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s,
1 M0_f, A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0
COMMON/SMA_TM/phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s, M0_f,
1 A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0

double precision FA, FM, GA, GM, stress, omega, temp, sigma_p,
1 tA, tM, T_sigma, Z_sigma, stressD, sigma_i
dimension stress(ntens), stressD(ntens), omega(ntens)

call sigma_p_inv(stress, sigma_p, ntens, ndi)
call sigma_i_inv(stress, sigma_i, ntens, ndi)

do k1 = 1,ndi
stressD(k1) = stress(k1)-sigma_p
end do
do k1 = ndi+1,ntens
stressD(k1) = stress(k1)
end do
FA = EA/(1.D0-2.D0*fnju)
FM = EM/(1.D0-2.D0*fnju)
GA = EA/(2.D0+2.D0*fnju)
GM = EM/(2.D0+2.D0*fnju)
Z_sigma = (sigma_p*sigma_p*(1.D0/FM-1.D0/FA)+
1 sigma_i*sigma_i*(1.D0/GM-1.D0/GA))/6.0D0
do k1 = 1,ntens
Z_sigma = Z_sigma+omega(k1)*stressD(k1)
end do

T_sigma = temp-(Z_sigma+sigma_p*eps0_p)/deltaS
tA = 1.D0-(A0_s-T_sigma)/(A0_s-A0_f)
tM = (M0_s-T_sigma)/(M0_s-M0_f)

RETURN
END

```

Вычисление тензора жесткости и температурных расширений в упругой области:

```

subroutine SMA_elastic(CC, AC, stress, omega, dstran, domega,
1 dtemp, ntens, ndi)
double precision phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s,
1 M0_f, A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0
COMMON/SMA_TM/phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s, M0_f,
1 A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0

double precision FA, FM, GA, GM, FK, GK, stressD, omega, dstran,
1 stress, domega, sigma_i, sigma_p, dtemp, CC, AC, tt
dimension stressD(ntens), omega(ntens), dstran(ntens),
1 domega(ntens), stress(ntens), CC(ntens, ntens), AC(ntens)

```

Определение модулей материала и его фаз в зависимости от концентрации мартенсита:

```

FA = EA/(1.D0-2.D0*fnju)
FM = EM/(1.D0-2.D0*fnju)
GA = EA/(2.D0+2.D0*fnju)
GM = EM/(2.D0+2.D0*fnju)
FK = 1.D0/(q/FM+(1.D0-q)/FA)
GK = 1.D0/(q/GM+(1.D0-q)/GA)
alpha = q*alphaM+(1.D0-q)*alphaA

```


Заполнение упругой части тензора жесткости и температурных расширений:

```
do k1 = 1, ntens
AC(k1) = 0.0D0
do k2 = 1, ntens
CC(k2, k1) = 0.0D0
end do
end do

do k1 = 1, ndi
AC(k1) = alpha
do k2 = 1, ndi
CC(k1, k2) = FK-2.D0/3.D0*GK
end do
CC(k1, k1) = FK+4.D0/3.D0*GK
end do
do k1 = ndi+1, ntens
CC(k1, k1) = GK
end do
```

Обновление напряжений:

```
do k1 = 1, ntens
dstran(k1) = dstran(k1) - AC(k1) * dtemp
end do

do k1 = 1, ntens
do k2 = 1, ntens
stress(k1) = stress(k1) + CC(k1, k2) * dstran(k2)
end do
end do
```

Инварианты напряжений и девиатор:

```
call sigma_p_inv(stress, sigma_p, ntens, ndi)
call sigma_i_inv(stress, sigma_i, ntens, ndi)

do k1 = 1, ndi
stressD(k1) = stress(k1) - sigma_p
end do
do k1 = ndi+1, ntens
stressD(k1) = stress(k1)
end do
```

Вычисление приращение структурно-фазовых трансформаций в упругой области:

```
if (sigma_i.EQ.0.D0) then
tt = 0.D0
else
tt = 1.5D0*RoD/sigma_i
endif

do k1 = 1, ntens
domega(k1) = tt*stressD(k1) - omega(k1)
end do

RETURN
END
```

Вычисление тензора жесткости и температурных расширений при прямом фазовом переходе;

```
subroutine SMA_front(CC, AC, stress, omega, temp, dstran, domega,
```

```

1 dtemp, dq, ntens, ndi)
double precision phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s,
1 M0_f, A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0
COMMON/SMA_TM/phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s, M0_f,
1 A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0
double precision FA, FM, GA, GM, GK, stressD, omega, omega_s,
1 sigma_i, sigma_p, eps0_pp, fN, FK, GG, betta, delta, stress,
2 CC, AC, dq, ds, dstress, domega, dtemp, temp, dstran,
3 fT, dF, alpha, tt, M_PI, M_1_SQRTPI
dimension stressD(ntens), omega(ntens), omega_s(ntens),
1 stress(ntens), dstress(ntens), domega(ntens), dstran(ntens),
2 CC(ntens, ntens), AC(ntens)
M_PI = 3.14159265358979323846D0
M_1_SQRTPI = 0.564189583547756286948D0

FA = EA/(1.D0-2.D0*fnju)
FM = EM/(1.D0-2.D0*fnju)
GA = EA/(2.D0+2.D0*fnju)
GM = EM/(2.D0+2.D0*fnju)
FK = 1.D0/(q/FM+(1.D0-q)/FA)
GK = 1.D0/(q/GM+(1.D0-q)/GA)
alpha = q*alphaM+(1.D0-q)*alphaA

```

Заполнение упругой части тензора податливости и температурных расширений:

```

do k1 = 1,ntens
AC(k1) = 0.0D0
do k2 = 1,ntens
CC(k2,k1) = 0.0D0
end do
end do

do k1 = 1,ndi
AC(k1) = alpha
do k2 = 1,ndi
CC(k1,k2) = (GK/(3.D0*FK)-0.5D0)/3.D0
end do
CC(k1,k1) = (GK/(3.D0*FK)+1.0D0)/3.D0
end do
do k1 = ndi+1,ntens
CC(k1,k1) = 1.D0
end do
call sigma_p_inv(stress, sigma_p, ntens, ndi)
call sigma_i_inv(stress, sigma_i, ntens, ndi)

do k1 = 1,ndi
stressD(k1) = stress(k1)-sigma_p
end do
do k1 = ndi+1,ntens
stressD(k1) = stress(k1)
end do
do k1 = 1,ntens
domega(k1) = omega(k1)
end do
GG = (1.D0+fnju)*(1.D0/EM-1.D0/EA)
eps0_pp = eps0_p+(1.D0-2.D0*fnju)*(1.D0/EM-1.D0/EA)*sigma_p

do k1 = 1,ntens
omega(k1) = omega(k1)+stressD(k1)*GG
end do
do k1 = 1,ndi
omega(k1) = omega(k1)+eps0_pp
end do

```

Вычисляем функцию плотности распределения микронапряжений;

```
dF = dexp(-sigma_i**2)*2.D0*M_1_SQRTPI
dF = 0.D0
```

Сопряженный тензор структурно-фазовых трансформаций и вспомогательные коэффициенты:

```
tt = (alphaM-alphaA)*temp
do k1 = 1,ntens
omega_s(k1) = omega(k1)
end do
do k1 = 1,ndi
omega_s(k1) = omega_s(k1)+tt
end do

fT = dsqrt(dabs(q*(1.D0-q)))*M_PI
fT = fT/(MO_s-MO_f)
fN = fT/deltaS

beta = 1.5D0*RoD*dF
if (sigma_i.EQ.0.D0) then
delta = 0.D0
else
delta = 1.5D0*q*beta/sigma_i**2
endif

do k1 = 1,ntens
do k2 = 1,ntens
CC(k1,k2) = CC(k1,k2)+(delta*stressD(k1)*stressD(k2)+
fN*omega_s(k1)*(omega(k2)+beta*stressD(k2)))*GK
end do
end do

do k1 = 1,ntens
AC(k1) = AC(k1)-omega_s(k1)*fT
end do

call InverseRigidity(CC)
do k1 = 1,ntens
do k2 = 1,ntens
CC(k1,k2) = CC(k1,k2)*GK
end do
end do

do k1 = 1, ntens
dstran(k1) = dstran(k1)-AC(k1)*dtemp
end do

do k1 = 1,ntens
dstress(k1) = 0.D0
do k2 = 1,ntens
dstress(k1) = dstress(k1)+CC(k1,k2)*dstran(k2)
end do
end do

do k1 = 1,ntens
stress(k1) = stress(k1)+dstress(k1)
end do

ds = sigma_i
call sigma_i_inv(stress, sigma_i, ntens, ndi)
ds = sigma_i-ds
sigma_i = sigma_i-ds
```

```

dq = 2.D0/3.D0*beta*sigma_i*ds-dtemp*deltaS
do k1 = 1, ntens
dq = dq+omega(k1)*dstress(k1)
end do
dq = dq*fN

if (sigma_i.EQ.0.D0) then
tt = 0.D0
else
tt = 1.5D0*RoD/sigma_i
endif

do k1 = 1,ntens
omega(k1) = domega(k1)
domega(k1) = tt*dF*stressD(k1)*ds
domega(k1) = tt*stressD(k1)-omega(k1)
end do

RETURN
END

```

Вычисление тензора жесткости и температурных расширений при обратном фазовом переходе:

```

subroutine SMA_back(CC, AC, stress, omega, temp, dstran, dtemp,
1 dq, ntens, ndi)
double precision phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s,
1 M0_f, A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0
COMMON/SMA_TM/phase, q, EA, EM, fnju, alphaA, alphaM, M0_s, M0_f,
1 A0_s, A0_f, deltaS, eps0_p, RoD, sigma0

double precision FA, FM, GA, GM, GK, stressD, omega, omega_s, dq,
1 sigma_i, sigma_p, eps0_pp, fN, FK, GG, stress, dstress, dstran,
2 CC, AC, temp, dtemp, alpha, fT, M_PI
dimension stressD(ntens), omega(ntens), omega_s(ntens),
1 stress(ntens), dstress(ntens), domega(ntens), dstran(ntens),
2 CC(ntens, ntens), AC(ntens)
M_PI = 3.14159265358979323846D0

FA = EA/(1.D0-2.D0*fnju)
FM = EM/(1.D0-2.D0*fnju)
GA = EA/(2.D0+2.D0*fnju)
GM = EM/(2.D0+2.D0*fnju)
FK = 1.D0/(q/FM+(1.D0-q)/FA)
GK = 1.D0/(q/GM+(1.D0-q)/GA)
alpha = q*alphaM+(1.D0-q)*alphaA

do k1 = 1,ntens
AC(k1) = 0.0D0
do k2 = 1,ntens
CC(k2,k1) = 0.0D0
end do
end do

do k1 = 1,ndi
AC(k1) = alpha
do k2 = 1,ndi
CC(k1,k2) = (GK/(3.D0*FK)-0.5D0)/3.D0
end do
CC(k1,k1) = (GK/(3.D0*FK)+1.0D0)/3.D0
end do
do k1 = ndi+1,ntens
CC(k1,k1) = 1.D0
end do

```

```

call sigma_p_inv(stress, sigma_p, ntens, ndi)
call sigma_i_inv(stress, sigma_i, ntens, ndi)

do k1 = 1,ndi
stressD(k1) = stress(k1)-sigma_p
end do
do k1 = ndi+1,ntens
stressD(k1) = stress(k1)
end do

GG = (1.D0+fnju)*(1.D0/EM-1.D0/EA)
eps0_pp = eps0_p+(1.D0-2.D0*fnju)*(1.D0/EM-1.D0/EA)*sigma_p

do k1 = 1,ntens
omega(k1) = omega(k1)+stressD(k1)*GG
end do
do k1 = 1,ndi
omega(k1) = omega(k1)+eps0_pp
end do

tt = (alphaM-alphaA)*temp
do k1 = 1,ntens
omega_s(k1) = omega(k1)
end do
do k1 = 1,ndi
omega_s(k1) = omega_s(k1)+tt
end do

fT = dsqrt(dabs(q*(1.D0-q)))*M_PI
fT = fT/(A0_f-A0_s)
fN = fT/deltaS

do k1 = 1,ntens
do k2 = 1,ntens
CC(k1,k2) = CC(k1,k2)+fN*omega_s(k1)*omega(k2)*GK
end do
end do

do k1 = 1,ntens
AC(k1) = AC(k1)-omega_s(k1)*fT
end do

300 call InverseRigidity(CC)
do k1 = 1,ntens
do k2 = 1,ntens
CC(k1,k2) = CC(k1,k2)*GK
end do
end do

do k1 = 1, ntens
dstran(k1) = dstran(k1)-AC(k1)*dtemp
end do

do k1 = 1,ntens
dstress(k1) = 0.D0
do k2 = 1,ntens
dstress(k1) = dstress(k1)+CC(k1,k2)*dstran(k2)
end do
end do

do k1 = 1,ntens
stress(k1) = stress(k1)+dstress(k1)
end do

```

```

dq = -dtemp*deltaS
do k1 = 1, ntens
dq = dq+omega(k1)*dstress(k1)
end do
dq = dq*fT/deltaS

RETURN
END

subroutine sigma_p_inv(stress, sigma_p, ntens, ndi)
double precision stress, sigma_p
dimension stress(ntens)
sigma_p = 0.D0
do k1 = 1, ndi
sigma_p = sigma_p+stress(k1)
end do
sigma_p = sigma_p/3.D0
return
end

subroutine sigma_i_inv(stress, sigma_i, ntens, ndi)
double precision stress, sigma_i
dimension stress(ntens)
sigma_i = 0.D0
do k1 = 1, ndi-1
sigma_i = sigma_i+stress(k1)*(stress(k1)-stress(k1+1))
end do
sigma_i = sigma_i+stress(ndi)*(stress(ndi)-stress(1))
do k1 = ndi+1, ntens
sigma_i = sigma_i+3.D0*stress(k1)*stress(k1)
end do
sigma_i = dsqrt(sigma_i)
return
end

subroutine InverseRigidity(matrix)
integer dim_N, ii(6), kk(6), ll(6)
double precision matrix(6, 6), f, finv

dim_N = 6
do 10 i = 1, dim_N
10 ii(i) = 0

do 500 i = 1, dim_N
f = 0.0D0

do 200 k = 1, dim_N
if (ii(k).NE.1) then
do 100 l = 1, dim_N
if (ii(l).EQ.0) then
if (abs(matrix(k, l)).GE.f) then
k0 = k
l0 = l
f = abs(matrix(k0, l0))
endif
else if (ii(l).GT.1) then
return
endif
100 continue
endif
200 continue
ii(l0) = ii(l0)+1

if (k0.NE.l0) then

```

```

do 300 l = 1, dim_N
f = matrix(k0, l)
matrix(k0, l) = matrix(l0, l)
matrix(l0, l) = f
300 continue
endif

kk(i) = k0;
ll(i) = l0;
if (matrix(l0, l0).EQ.0.0D0) return

finv = 1.0D0/matrix(l0, l0)
matrix(l0, l0) = 1.0D0
do 400 l = 1, dim_N
400 matrix(l0, l) = matrix(l0, l)*finv

do 500 k = 1, dim_N
if (k.NE.l0) then
finv = matrix(k, l0)
matrix(k, l0) = 0.0D0
do 510 l = 1, dim_N
510 matrix(k, l) = matrix(k, l)-matrix(l0, l)*finv
endif
500 continue

do 700 l = dim_N, 1, -1
if (kk(l).NE.ll(l)) then
do 600 k = 1, dim_N
f = matrix(k, kk(l))
matrix(k, kk(l)) = matrix(k, ll(l))
matrix(k, ll(l)) = f
600 continue
endif
700 continue

return
end

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Федеральное агентство научных
организаций



Федеральное государственное
бюджетное научное учреждение
«Научно-исследовательский институт
комплексных проблем
сердечно-сосудистых заболеваний»
(НИИ КПССЗ)

Сосновый бульвар, д. 6, г. Кемерово, 650002
тел. 8 (3842) 643-308, факс 8 (3842) 643-410
e-mail: reception@kemcardio.ru
www.kemcardio.ru

№ _____

На _____

№ _____

от _____

УТВЕРЖДАЮ

Директор ФГБНУ "НИИ КПССЗ"

Профессор, д.м.н., О.Л. Барбараш



_____ 2015 г.

АКТ

об использовании результатов, полученных в диссертации на соискание
ученой степени кандидата технических наук Д.В. Нуштаева «Численное
моделирование процессов деформирования сплавов с памятью формы» в ФГБНУ
"НИИ КПССЗ"

Предложенные в диссертационной работе подходы и методы моделирования деформационных процессов в сплавах с памятью формы (СПФ), успешно внедрены в расчетную практику ФГБНУ "НИИ КПССЗ". Численная реализация модели нелинейного деформирования СПФ используется при проведении компьютерного моделирования поведения медицинских изделий на основе данных сплавов.

В частности, с использованием численной реализации модели СПФ, проведено моделирование работы самораскрывающегося протеза клапана аорты. Решена задача о выборе оптимальной формы ячеек каркаса клапана.

Н.с. лаборатории новых биоматериалов

Клышников К.Ю.

Заведующая отделом экспериментальной
и клинической кардиологии, д.б.н.

Кудрявцева Ю.А.