

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

На правах рукописи



Рябов Павел Евгеньевич

**Топологический анализ неклассических
интегрируемых задач динамики твердого тела**

01.02.01 – Теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н.

Борисов Алексей Владимирович

Москва – 2016

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Топологический анализ	
гиростата Ковалевской – Яхья	18
1.1. Аналитические результаты	21
1.2. Критическое множество отображения момента	33
1.3. Относительные равновесия – критические точки ранга 0	40
1.4. Классификация критических точек ранга 1	72
1.5. Топология приведенных систем	147
1.6. Топологические инварианты	164
1.7. Заключение	185
Глава 2. Топологический анализ волчка Ковалевской в двойном поле сил	186
2.1. Уравнения и интегралы. Понятие критической подсистемы	190
2.2. Описание критических подсистем и классов особенностей	193
2.3. Классификация критических точек по типам	207
2.4. Изоэнергетический атлас	217
Глава 3. Топологический анализ одного частного случая интегрируемости Д. Н. Горячева в динамике твердого тела	233
3.1. Введение	233
3.2. Параметризация интегральных многообразий	234
3.3. Вещественное разделение переменных	238
3.4. Допустимая область и бифуркационная диаграмма	242
3.5. Фазовая топология	248
3.6. Аналитическая классификация особенностей и грубый инвариант А. Т. Фоменко	253

Глава 4. Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела	263
4.1. Введение	264
4.2. Как можно получить уравнения поверхностей $\Pi_{\mathcal{L}}$?	271
4.3. Новые инвариантные соотношения при отсутствии линейного потенциала и наличии гироскопических сил	274
4.4. Первая система – обобщение интегрируемого случая Боголюбенского в динамике твердого тела	281
4.5. Вторая система	288
4.6. Третья и четвертая системы	293
4.7. Атлас бифуркационных диаграмм и пример сетевой диаграммы	300
4.8. Заключение	302
Глава 5. Фазовая топология волчка Ковалевской –Соколова	308
5.1. Исходные соотношения и постановка задачи	308
5.2. Множество относительных равновесий	313
5.3. Диаграммы Смейла	316
5.4. Показатели Морса и изоэнергетические многообразия	322
5.5. Типы и устойчивость относительных равновесий	330
5.6. Разделение переменных и дискриминантные поверхности	334
5.7. Критическое множество и типы критических точек	338
5.8. Примеры изоэнергетических диаграмм и грубая топология	347
Заключение	352
Список литературы	356

Введение

Актуальность темы исследования.

Современные аналитические и качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений берут свое начало в работах А. Пуанкаре [1], [2], в которых Пуанкаре развил геометрическую теорию решений дифференциальных уравнений. Пуанкаре ввел понятия гомоклинических и гетероклинических орбит, связывающих неподвижные точки между собой, и показал, что возмущение этих орбит является причиной сложного поведения решения. В своем трехтомном трактате “Новые методы небесной механики” [1] А. Пуанкаре на примере ограниченной задачи трех тел обнаружил наличие гомоклинической структуры траекторий и указал препятствия к существованию аналитических интегралов для широкого класса динамических систем. Многие аспекты исследования Пуанкаре опередили свое время на несколько десятилетий. На самом деле, изучение сложного движения Пуанкаре основано на совершенно новом подходе: качественном анализе поведения решений. Он предложил изучать топологические свойства решений в фазовом пространстве совместно с аналитическими свойствами решений уравнений.

Дальнейшее развитие методы теории устойчивости и качественного анализа дифференциальных уравнений получили в работах Д. Биркгофа [3], А.А. Андропова [4], Н.Г. Четаева [5] и других ученых [6], [7], [8]. На базе идей Ляпунова [9] и Пуанкаре [1] были разработаны эффективные аналитические методы исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений, к которым относятся метод нормальных форм [10], [11], [12], метод малого параметра [13], [14], асимптотические методы [14], [15], [16].

Для классической и небесной механики особый интерес представ-

ляют гамильтоновы системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Существенный прогресс в качественном анализе поведения гамильтоновых систем был достигнут во второй половине двадцатого века после опубликования фундаментальных результатов А.Н. Колмогорова [17], В.И. Арнольда [18], [19], Ю. Мозера [20], впоследствии получивших название КАМ теории. На основании КАМ теории были получены важные выводы об устойчивости и общем характере движения близких к интегрируемым гамильтоновым системам.

Важное влияние на развитие аналитической динамики твердого тела и качественной теории динамических систем оказали работы В.В. Козлова, объединенные в монографию "Методы качественного анализа в динамике твердого тела" [21]. В частности, В.В. Козловым доказано несуществование аналитических интегралов уравнений Эйлера–Пуассона, а также указаны динамические эффекты, препятствующие интегрируемости этих уравнений – расщепление сепаратрис, рождение большого числа невырожденных периодических решений. Эти результаты дали сильный толчок исследованиям по проблеме точной интегрируемости уравнений движения. Результаты таких исследований систематизированы в монографиях В.В. Козлова "Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике" [22] и А.В.Борисова, И.С.Мамаева "Современные методы теории интегрируемых систем" [23]. В [23] интегрируемость многомерных аналогов классических интегрируемых задач динамики твердого тела как правило устанавливается при помощи представления Лакса со спектральным параметром $\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), A(\lambda)]$. Инварианты матрицы $L(\lambda)$ являются первыми интегралами системы.

Современному состоянию топологического анализа динамических систем мы обязаны работе С. Смейла (1972 г.) [24], в которой намечена программа топологического исследования классических механических систем и указаны пути ее реализации в натуральных системах с сим-

метрией. В качестве примера он рассматривал задачи небесной механики. Впоследствии, благодаря работам прежде всего российских ученых В.В. Козлова, Я.В. Татаринова, М.П. Харламова, А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, А.В. Борисова, И.С. Мамаева, А.А. Ошемкова и других исследованы бифуркации нелинейных по скоростям дополнительных интегралов и соответствующих интегральных многообразий, не укладывающиеся в схему Смейла.

Результаты, полученные в XX в., нашли отражение в монографиях [21] (методы качественного анализа в динамике твердого тела), [25] (фазовая топология классических интегрируемых задач) и [26] (теория топологических инвариантов, описание лиувиллевых инвариантов приводимых систем и др.). Главные достижения относились к задачам динамики твердого тела, в которых существует одномерная группа преобразований конфигурационного пространства $SO(3)$, касательные преобразования к которым сохраняют кинетическую энергию и момент внешних сил как функции на шестимерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$, в силу чего возможна редукция системы к гамильтоновой системе с четырехмерным фазовым пространством TS^2 . После этого изоэнергетический уровень оказывается трехмерным многообразием, на котором один оставшийся интеграл задает слоение Лиувилля на двумерные торы. Все базовые бифуркации в таком слоении были найдены М.П. Харламовым в его исследованиях [25] классических случаев Эйлера, Жуковского, Горячева-Чаплыгина, Сретенского, Ковалевской, Клебша. Случай Ковалевской, формально проинтегрированный еще в конце XIX в., получил полное решение лишь в наше время в работах В.В. Козлова (1980), М.П. Харламова (1983-1988), А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, П. Рихтера (2000) [27].

В течение этих лет был открыт и ряд математических обобщений в динамике твердого тела, среди которых физический смысл имеют обоб-

щения И.В.Комарова [28], [29], Х.М.Яхья [30] на задачу о движении гири, случай В.В.Соколова [31] для задачи о движении тела в жидкости и случай Борисова-Мамаева-Соколова [32], описывающий движение твердого тела с полостями, заполненными вихревой несжимаемой жидкостью. Все эти задачи также приводятся к системам с двумя степенями свободы. В то же время имеется ряд интегрируемых систем с тремя степенями свободы, не укладывающихся в имеющиеся схемы исследования и принципиально не сводимых к системам с двумя степенями свободы (О.И.Богоявленский, В.В.Соколов, А.Г.Рейман и М.А.Семенов-Тян-Шанский, А.И.Бобенко, А.В. Борисов и И.С. Мамаев [33]). Среди них в рамках теоретической механики центральное место занимает задача о движении тяжелого магнита в гравитационном и магнитном полях, сформулированная О.И.Богоявленским (1984) [34] при изучении уравнений Эйлера на алгебрах Ли. В 1987 г. А.Г.Рейман и М.А.Семенов-Тян-Шанский [35] указали в этой задаче третий интеграл, находящийся в инволюции с K . В результате открыто новое физически реализуемое обобщение случая Ковалевской, но уже несводимое в целом к системе с двумя степенями свободы.

Цели и задачи диссертационной работы. Основная цель и задача диссертационной работы – исследование фазовой топологии вполне интегрируемых гамильтоновых систем с двумя и тремя степенями свободы механического происхождения и их обобщений на системы с неклассическими полями.

Научная новизна. Научная новизна диссертационной работы состоит в анализе (орбитальной) устойчивости невырожденных (в смысле теории особенностей) периодических движений, использовании и дальнейшем развитии метода критических подсистем, практическом построении стратификаций фазового пространства, классификации слоений в окрестности особых точек отображения момента, эффективном констру-

ировании различных глобальных топологических инвариантов.

Теоретическая и практическая значимость применения к задачам динамики твердого тела. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для

- определения и анализа (орбитальной) устойчивости невырожденных (в смысле теории особенностей) траекторий;
- построения бифуркационных комплексов и с их помощью анализа устойчивости критических движений;
- практического построения стратификаций фазового пространства с использованием метода критических подсистем;
- описания глобальных топологических инвариантов в виде оснащенных изоэнергетических бифуркационных диаграмм;
- исследования фазовой топологии задач неголономной механики, связанных с качением твердых тел; задач о движении цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с вихревой нитью, которые относятся к некоммутативному интегрированию;
- применения методов топологического анализа к задачам квантовой теории сильнокоррелированных систем при экстремально низких температурах. В работе [36] показано, что при определенных значениях параметров уравнения движения, которые описывают бегущие волны в двухкомпонентном бозе-эйнштейновском конденсате, могут быть сведены к разделенным уравнениям типа Ковалевской в динамике твердого тела. Наличие разделенных уравнений дает возможность выделить дискриминантную поверхность, которая содержит бифуркационную диаграмму, и, таким образом, применить методы топологического анализа.

Методология и методы исследования.

В диссертационной работе в качестве основных методов исследования выступают: анализ устойчивости невырожденных (в смысле особенностей) траекторий на основе определения их типа (эллиптический/ гиперболический); метод критических подсистем исследования фазовой топологии; метод ключевых множеств, классифицирующий бифуркационные диаграммы. Остановимся на методологии исследования, используемой в диссертационной работе.

1) Анализ устойчивости невырожденных (в смысле особенностей) траекторий.

Общие методы теории устойчивости гамильтоновых систем позволяют получать строгие выводы об устойчивости движения для целого ряда задач классической динамики твердого тела. Так, в ряде работ рассматривалась задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В.Д. Иртегов [37] указал достаточные условия орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае С.В.Ковалевской, тот же результат другим способом был получен позже А.З. Брюмом [38]. В работе [39] была установлена нелокальная устойчивость быстрых плоских вращений твердого тела в указанном случае. Полное исследование орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений в случае С.В.Ковалевской было выполнено в [40], [41]. В работах А.П. Маркеева [42] и А.В.Карапепяна [43] в случае Горячева–Чаплыгина был также проведен анализ орбитальной устойчивости колебаний и вращений твердого тела относительно оси его динамической симметрии.

Очень часто при анализе устойчивости периодических реше-

ний и неподвижных точек не делают различия между интегрируемыми и неинтегрируемыми системами и пользуются общими методами, основанными на вычислении мультипликаторов, нормализующих преобразованиях Биркгофа, изучении областей резонансов и так называемых связок интегралов (см., например, [38, 40, 42, 44–48]).

Естественным образом используя интегрируемость системы, топологический анализ позволяет быстрым и наглядным образом определять устойчивость в тех случаях, когда использование общих стандартных методов является довольно затруднительным. При анализе устойчивости невырожденных (в смысле теории особенностей) траекторий никаких проблем не возникает. Если рассматриваемая система нерезонансна, то имеет место следующее утверждение: эллиптические невырожденные траектории устойчивы, гиперболические невырожденные траектории неустойчивы.

Невырожденные критические периодические траектории объединяются в однопараметрические семейства, которые интегральным отображением переводятся в бифуркационные кривые. Это позволяет эффективно использовать бифуркационную диаграмму интегрального отображения для анализа устойчивости. А именно, практически во всех выполненных в диссертации исследованиях, для которых проведен топологический анализ, справедливо следующее: гладкой ветви бифуркационной диаграммы соответствует однопараметрическое семейство (или несколько не связанных между собой семейств) невырожденных критических траекторий; тип траектории семейства (эллиптический/гиперболический) не может изменяться в неособых точках ветви (т. е. смена типа происходит в точках пересечения ветвей, излома, возврата и т. п.). Таким обра-

зом, грубо говоря, для анализа устойчивости критических траекторий определяется тип траектории для каждой кривой из бифуркационного множества. При этом достаточно определить тип траектории (эллиптический/гиперболический) в какой-нибудь одной из точек гладкой ветви бифуркационной диаграммы. Отметим также, что эллиптические критические траектории *орбитально устойчивы*, а гиперболические – *неустойчивы* [49].

Обобщая понятие бифуркационной диаграммы, в [49] вводится так называемый бифуркационный комплекс, который является простым, наглядным и естественным топологическим инвариантом интегрируемой системы. Его главное преимущество связано с упрощениями, которые достигаются при анализе и представлении результатов о существовании и устойчивости периодических решений интегрируемых систем. Построение этого инварианта дает возможность не только ответить на вопрос об устойчивости каких-то конкретных траекторий, но сразу описать все устойчивые траектории.

2) *Метод критических подсистем исследования фазовой топологии.*

Понятие критической подсистемы введено М.П. Харламовым в начале 2000-х гг. в связи с началом исследования фазовой топологии неприводимых систем с тремя степенями свободы. К настоящему моменту локальное и полулокальное исследование критических подсистем является основным методом аналитического и качественного анализа таких систем. Изучение систем алгебраической структуры позволило ввести инвариантные определения и разработать соответствующие методы анализа.

Пусть для простоты задана интегрируемая гамильтонова система с n степенями свободы с полиномиальными или рациональными

правыми частями и такими же интегралами. Тогда множество критических значений отображения момента F может быть записано в виде $P = 0$, где P – полином от фазовых переменных. Разложим его на неприводимые множители

$$P = \prod_j L_j$$

и определим критическую подсистему M_j как множество критических точек нулевого уровня функции L_j , а именно:

$$M_j = \{x : L_j(x) = 0, dL_j(x) = 0\}.$$

Оказывается, что при некоторых предположениях об общем положении верно следующее: во-первых, критическая точка x ранга k локально является точкой трансверсального пересечения $n - k$ подобластей критических подсистем; во-вторых, интегралы L_j этих подсистем являются теми функциями, симплектические операторы которых определяют тип критической точки. Собственные числа симплектических операторов не зависят от точки x , а выражаются через значения констант общих интегралов, а, фактически, что еще более важно, через значения параметров на поверхностях $F(M_j)$. Эти параметры, в свою очередь, являются частными интегралами критических подсистем, которые также легко находятся из компонент нормали к поверхности, играющих роль неопределенных множителей Лагранжа в критической точке. Это дает аналитическую классификацию критических точек системы исключительно в терминах первых интегралов.

3) *Метод ключевых множеств, классифицирующий бифуркационные диаграммы.*

Как правило, вполне интегрируемая гамильтонова система с n

степенями свободы зависит от набора параметров p . В основе классификации сложных геометрических объектов, таких, как бифуркационные диаграммы ограничений системы на семейства инвариантных многообразий, зависящих от набора физических и интегральных параметров p , лежит метод ключевых множеств.

Фиксируется критическая подсистема M_j . Ключевым множеством критической подсистемы называется совокупность точек, в окрестности которых меняется локальное слоение Лиувилля. Образ Σ_j множества ключевых точек под действием некоторого интегрального отображения критической подсистемы называется диаграммой критической подсистемы. Пусть K – некоторый выделенный первый интеграл, например, интеграл момента в системах с симметрией или интеграл энергии в неприводимых системах. Задача классификации бифуркационных диаграмм (в большинстве случаев) сводится к нахождению критических значений выделенного интеграла на ключевом множестве и, далее, к относительно простому определению особых точек набора кривых в арифметическом пространстве $\{(k, p)\}$. В диссертационной работе предложена детальная формализация метода ключевых множеств, а также обоснование его приложений к новым интегрируемым задачам динамики.

Положения, выносимые на защиту:

- Изложены строго обоснованные результаты по аналитическим решениям и топологическому анализу интегрируемого случая Ковалевской-Яхья: представлена полная аналитическая классификация бифуркаций гиростата Ковалевской-Яхья, возникающих в особых периодических движениях (критических точках ранга 1 отображения момента); найдены все разделяющие значения гиростатического момента при классификации диаграмм Смейла; исследована

топология приведенных систем; обоснованы результаты об устойчивости периодических решений, полученные при помощи бифуркационной диаграммы; приведено полное описание динамики системы в окрестности особых (критических) периодических траекторий.

- Приводится полное исследование неприводимой системы с тремя степенями свободы, которая описывает движение волчка Ковалевской в двойном поле: приводится описание критических подсистем и бифуркационных диаграмм; дана классификация всех невырожденных критических точек – положений равновесия (невырожденных особенностей ранга 0), особых периодических движений (невырожденных особенностей ранга 1), а также критических двухчастотных движений (невырожденных особенностей ранга 2); предъявлены явные формулы характеристических уравнений для собственных чисел соответствующих симплектических операторов, которые определяют тип невырожденной особенности.
- Исследована фазовая топология интегрируемых случаев уравнений Кирхгофа движения твердого тела в жидкости с дополнительным интегралом четвертой степени по импульсам (случаи интегрируемости Чаплыгина, Горячева, Яхья). Найдено явное вещественное разделение переменных в частном случае интегрируемости Горячева, основанное на геометрическом подходе к разделению переменных. Полученные аналитические формулы позволили исследовать бифуркации лиувиллевых торов, а также устойчивость невырожденных (в смысле особенностей) траекторий.
- Для обобщенного двухполевого гиростата (случай интегрируемости Соколова-Цыганова) удалось выделить аналитически четыре

инвариантных четырехмерных подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Система уравнений, задающая одно из инвариантных подмногообразий, является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая О.И. Боголюбенского вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном поле. Остальные три инвариантных подмногообразия являются новыми в динамике твердого тела. Для каждого из них указан дополнительный интеграл. Для описания фазовой топологии всей системы в целом используется метод критических подсистем. Для каждой подсистемы построены бифуркационные диаграммы и указаны бифуркации торов Лиувилля как внутри подсистем, так и во всей системе в целом.

- Исследована фазовая топология интегрируемой гамильтоновой системы на $e(3)$, найденной В.В. Соколовым (2001) и обобщающей случай Ковалевской. Обобщение состоит в том, что к однородному потенциальному силовому полю добавлены гироскопические силы, зависящие от конфигурационных переменных. Классифицированы относительные равновесия, вычислен их тип, определен характер устойчивости; установлены виды диаграмм Смейла и дана классификация изоэнергетических многообразий приведенных систем с двумя степенями свободы. Множество критических точек полного отображения момента представлено в виде объединения четырех критических подсистем, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является однопараметрическим семейством почти гамильтоновых систем с одной степенью свободы.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты, представленные в диссертации, были доложены автором на много-

численных международных и всероссийских конференциях, наиболее значимые из которых перечислены ниже.

1) “The 8th International Workshop on Computer Algebra Systems in Teaching and Research”, Siedlce, Poland, 2015; 2) International Conference “Nonlinear Methods in Physics and Mechanics”, Ярославль, 2015; 3) “Dynamics, Bifurcations, and Strange Attractors”, Нижний Новгород, 2015; 4) “International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics”, Суздаль, 2015, 2011; 5) “Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE’s”, Нижний Новгород, 2014; 6) “International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems”, Суздаль, 2014, 2012; 7) “Recent Advances in Quantum Integrable Systems”, Dijon, France, 2014; 8) “10th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Application”, Madrid, Spain, 2014; 9) “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна”, Воронеж, 2014; 10) “8th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics”, Siedlce, Poland, 2013; 11) “Finite Dimensional Integrable Systems”, Marseille, France, 2013; 12) Семинар “Современные геометрические методы” под руководством академика А. Т. Фоменко; 13) International Topological Conference “Alexandroff Readings”, Moscow, 2012; 14) Международная конференция “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (конференция Пятницкого), Москва, 2012; 15) “International Conference on stability, control and rigid body dynamics”, Донецк, 2011, 2009, 2008; 16) International Conference “Differential equations and related topics” dedicated Ivan G. Petrovskii, Moscow, 2011; 17) II Int. Conf. “Geometry, Dynamics, Integrable Systems”, Belgrad, Serbia, 2010; 18) Всероссийская конференция “Динамические системы, управление и наномеханика”, Ижевск, 2009.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 37 печатных работах, из них 21 статей в рецензируемых из перечня, рекомендован-

ных ВАК, журналах [50–70], среди которых 11 публикаций, индексируемых международными базами Scopus и Web of Science; 8 статей в сборниках трудов конференций и 8 тезисов докладов.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 374 страниц, из них 354 страниц текста, включая 83 рисунков. Библиография включает 189 наименований на 19 страницах.

Глава 1

Топологический анализ гиростата Ковалевской – Яхья

Светлой памяти моего учителя

М. П. Харламова посвящается

Сообщение о том, что случай С.В. Ковалевской в динамике твердого тела обобщается на гиростат, Х.М. Яхья сделал на семинарах В.Г. Демина и В.В. Козлова в МГУ в 1985 году. Тогда же была представлена заметка в “J. de Mécanique Theor. Appl.”, которая по каким-то причинам так и не была опубликована. В связи с этим официальной датой открытия этого случая интегрируемости следует считать 1986 год, когда вышла статья [30]. Статья на русском языке, представленная в апреле 1986 года и содержащая в том числе и этот результат, вышла значительно позже [71]. На самом деле в [30] интеграл Ковалевской был обобщен сразу в двух направлениях – на гиростат и на двойное поле, моделирующее действие суперпозиции поля силы тяжести и постоянного магнитного поля. Ранее аналог интеграла Ковалевской для двойного поля был найден О.И. Богоявленским [72], однако, обобщение Яхья¹ оказалось принципиальным – введение гиростатического момента нарушило классическую структуру интеграла (сумма квадратов), а также его однородность – новое слагаемое, пропорциональное гиростатическому моменту, имеет третью степень по угловым скоростям подобно интегралу Горячева–Чаплыгина. В 1987 году появились сразу две публикации [73, 74] с обобщением интеграла Ковалевской на гиростат в одном однородном поле, моделирующем силу тяжести, но в этом отношении их уже

¹ В соответствии с правилами русского языка арабская фамилия Яхья склоняется. Однако нам представляется более уважительным сохранить ее неизменной.

нельзя считать оригинальными.

Поскольку введение двойного поля в общем случае ликвидирует симметрию задачи, уничтожая интеграл площадей, Х.М. Яхья отмечает два случая полной интегрируемости – гиростат типа Ковалевской в поле силы тяжести и гиростат в двойном поле особой структуры, допускающей сингулярную симметрию. В данном разделе обсуждается первая задача. До настоящего времени она не сведена к квадратурам. Однако удивительным образом оказалось, что все движения на критических многообразиях интегрального отображения, играющие сегодня ключевую роль в топологическом анализе задачи, были выявлены и проинтегрированы задолго до публикации [30] и возникновения современного подхода к исследованию интегрируемых гамильтоновых систем. В 1991 г. начались систематические исследования фазовой топологии случая Ковалевской–Яхья. Первым этапом всегда является изучение особенностей интегрального отображения (обычно называемого в современной литературе отображением момента). Это такие траектории в фазовом пространстве, на которых первые интегралы оказываются зависимыми в смысле линейной зависимости дифференциалов. Соответствующие решения уравнений Эйлера–Пуассона являются либо неподвижными точками (физически они отвечают равномерным вращениям тела), либо периодическими траекториями особого характера, на которых падает ранг отображения момента. В совокупности это подмножество фазового пространства образует критическое множество отображения момента. В работе [75] была выписана система уравнений, задающая критическое множество, и, на основе рассмотрения некоторых его сечений, продиктованных очевидными симметриями множества, получены параметрические уравнения поверхностей, которым принадлежат критические значения отображения момента – бифуркационная диаграмма задачи. Была отмечена связь бифуркационной диаграммы с классами Аппельрота

[76] классического волчка Ковалевской. Оказалось, что поверхности в пространстве констант первых интегралов, отвечающие в случае Ковалевской четырем классам Аппельрота, в случае Яхья (при ненулевом гиростатическом моменте) перестраиваются в две поверхности, одна из которых, в свою очередь, состоит из двух связных компонент. Практически одновременно в работе [77] были сведены к квадратурам все решения уравнений Эйлера – Пуассона, лежащие в прообразе первой поверхности. В работе [78] отмечено, что те из них, которые отвечают особым периодическим решениям (то есть состоят из критических точек отображения момента согласно [75]), ранее получены и исследованы в [79] в составе класса движений тяжелого гиростата, обобщающего решение Бобылева – Стеклова. В последовавших затем работах [50, 80] даны исчерпывающие доказательства структуры бифуркационного множества и в [80] отмечено, что уравнения критических точек в прообразе второй из поверхностей совпадают с инвариантными соотношениями, описывающими частное решение, найденное и проинтегрированное в [81]. Более аккуратный анализ показывает, что для описания всех критических движений в прообразе второй бифуркационной поверхности нужно взять совокупность решений, найденных в двух работах [82] и [81]. Таким образом, вся совокупность критических движений волчка Ковалевской – Яхья оказалась открытой и сведенной к квадратурам в [79, 81, 82] без использования неизвестного в то время аналога интеграла Ковалевской.

Поскольку бифуркационная диаграмма отображения момента зависит от одного существенного физического параметра (гиростатического момента), и, соответственно, приведенные системы с двумя степенями свободы, полученные в результате понижения порядка, зависят от двух параметров (гиростатического момента и постоянной площадей), в работах [83, 84] был решен вопрос классификации бифуркационных

диаграмм приведенных систем и построено разделяющее множество в плоскости указанных параметров. Варианты классификации топологических инвариантов – графов Фоменко (пока еще без полной аналитической классификации) были предложены в работах [51, 85].

1.1. Аналитические результаты

1.1.1. Уравнения и интегралы

Уравнения Эйлера – Пуассона движения гиростата в поле силы тяжести в общем случае имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{c} \times \boldsymbol{\alpha}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.1.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\boldsymbol{\alpha}$ – единичный вектор направления силы тяжести (называемого вертикалью), \mathbf{c} – вектор, направленный из неподвижной точки O в центр масс, равный по длине произведению веса системы “тело–ротор” на расстояние от O до центра масс. Все объекты отнесены к подвижным осям. Вектор кинетического момента \mathbf{M} связан с угловой скоростью зависимостью

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}, \quad (1.1.2)$$

где \mathbf{I} , $\boldsymbol{\lambda}$ – тензор инерции в точке O и вектор гиростатического момента, постоянные в подвижной системе отсчета. Для краткости объекты, не изменяющиеся по отношению к подвижной системе отсчета, будем называть “постоянными в теле”. Система (1.1.1) получена из механической системы с конфигурационным пространством $SO(3)$ (гамильтоновой системы с тремя степенями свободы) факторизацией по действию группы вращений вокруг постоянного в инерциальном пространстве направления вертикали, и ее фазовым пространством является пятимерное многообразие $P^5 = \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times S^2(\boldsymbol{\alpha})$.

Здесь и далее через $\mathbb{R}^n(u_1, \dots, u_n)$ обозначаем пространство \mathbb{R}^n с выделенной системой координатных функций u_1, \dots, u_n . Обозначение $S^2(\alpha)$ относится к единичной сфере в $\mathbb{R}^3(\alpha) = \mathbb{R}^3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Вытекающее из определений соотношение

$$\Gamma = 1, \quad (1.1.3)$$

где

$$\Gamma = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

в механике называется геометрическим интегралом. Другими общими интегралами являются гамильтониан (полная энергия)

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (1.1.4)$$

и циклический интеграл (интеграл площадей)

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.1.5)$$

Коэффициент $1/2$ вводим, следуя С.В. Ковалевской. Скобка Пуассона рассматриваемой механической системы на пространстве $\{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})\}$ может быть представлена в виде своих значений на парах координатных функций (см., например, [72])

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk} \alpha_k, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0. \quad (1.1.6)$$

Функции Γ и L являются функциями Казимира скобки (1.1.6). Поэтому на любом фиксированном в P^5 уровне интеграла площадей

$$P_\ell^4 = \{L = \ell\} \subset P^5 \quad (1.1.7)$$

скобка индуцирует симплектическую структуру, а ограничение динамической системы уравнений Эйлера – Пуассона является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Такой переход отвечает понижению порядка по Раусу в системе с тремя степенями свободы на фазовом пространстве $TSO(3)$. Для полной интегрируемости необходимо

указать еще один общий интеграл, независимый с H, L почти всюду на P^5 . Под независимостью функций в точке понимается линейная независимость их дифференциалов. Независимость двух функций почти всюду иногда называют функциональной независимостью [26]. Случаи, когда можно указать подмногообразия в P^5 положительной коразмерности, отличные от P_ℓ^4 , инвариантные для системы (1.1.1), на которых эта система интегрируется в квадратурах, называются частными случаями интегрируемости.

Следующие предположения будем называть условиями Ковалевской – Яхья. В качестве подвижной системы отсчета выберем ортонормированный триэдр $Oe_1e_2e_3$ главных осей тензора инерции. Предположим, что соответствующие главные моменты инерции находятся в отношении 2:2:1, центр масс лежит в экваториальной плоскости $\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, а гиросtatический момент направлен по оси динамической симметрии

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda \mathbf{e}_3.$$

Тогда оставшимся произволом в выборе подвижных осей и введением подходящих единиц измерения можно добиться того, чтобы было

$$\mathbf{c} = \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{I} = \text{diag}\{2, 2, 1\}, \quad \lambda > 0, \quad (1.1.8)$$

и уравнения (1.1.1) примут вид

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2(\omega_3 - \lambda), & 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1(\omega_3 - \lambda) - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 &= \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\alpha}_2 &= \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, & \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Эта система обладает дополнительным интегралом Ковалевской – Яхья, обозначаемым далее через K . Таким образом, имеется полный инволютивный набор интегралов

$$\begin{aligned} H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1, & L &= \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \frac{1}{2}(\omega_3 + \lambda)\alpha_3, \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2)^2 + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3]. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Здесь следует отметить один важный аспект терминологии, иногда приводящий к ложному ощущению наличия и исследования более общих задач, чем описанная последними формулами. Поскольку центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, любой ортонормированный базис в ней является базисом главных осей инерции. Учитывая еще и произвол в выборе единиц измерения, запишем условия (1.1.8) в виде

$$\mathbf{c} = \{c_1, c_2, 0\}, \quad \mathbf{I} = \text{diag}\{2C, 2C, C\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В современной литературе по отношению к этим условиям появился термин “семейство систем типа Ковалевской – Яхья”. Подчеркнем, что любая такая система “типа” Ковалевской – Яхья полностью эквивалентна рассматриваемой здесь системе с условиями (1.1.8), то есть получена из нее *глобальной невырожденной линейной* заменой переменных, поэтому применение указанного термина нам представляется некорректным.

1.1.2. Точные решения

До работы [30] были известны три общих случая интегрируемости при $\lambda \neq 0$ – обобщение случая Эйлера, данное Н.Е. Жуковским ($\mathbf{c} = 0$), очевидное обобщение случая Лагранжа ($\lambda \times \mathbf{c} = 0$) и обобщение случая Горячева – Чаплыгина, данное Л.Н. Сретенским. Ряд частных случаев интегрируемости тяжелого гиростата ($\mathbf{c} \neq 0$) указан в работах П.В. Харламова и Е.И. Харламовой. Как отмечалось выше, два из них оказались принципиально важны для исследования системы (1.1.9). Остановимся на них подробнее.

Решение П.В. Харламова

Первое точное решение² опубликовано в [79]. Предположим, что в системе (1.1.1), (1.1.2)

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + r(t)\mathbf{e} \quad (r \neq \text{const}), \quad (1.1.11)$$

где $\boldsymbol{\omega}_0$ и \mathbf{e} постоянны в теле. Без ограничения общности полагаем $|\mathbf{e}| = 1$ и $\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = 0$. Представление (1.1.11) является наиболее общим для решений, допускающих два линейных по угловым скоростям частных интеграла. Хорошо известно, что все решения системы (1.1.1) определены для всех t и ограничены (например, в силу компактности любого уровня интеграла энергии). Отсюда следует, что если функция $r(t)$ удовлетворяет уравнению вида

$$b\dot{r} = \sum_{i=0}^k a_i r^i \quad (1.1.12)$$

с постоянными коэффициентами b, a_i , то все эти коэффициенты равны нулю.

Теорема 1 (П.В. Харламов [79]). *Для любого движения вида (1.1.11) выполнены следующие условия:*

- (1) *ось $O\mathbf{e}$ является главной осью инерции в закрепленной точке;*
- (2) *центр масс лежит в плоскости, проходящей через закрепленную точку перпендикулярно $O\mathbf{e}$, то есть*

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{e} = 0;$$

- (3) *полный кинетический момент системы компланарен векторам \mathbf{s}, \mathbf{e} .*

² Точным решением обычно называют общий или частный случай интегрируемости при наличии его явного сведения к квадратурам.

Доказательство. Домножим первое векторное уравнение (1.1.1) (уравнение Эйлера) скалярно на постоянный отличный от нуля вектор \mathbf{c} . Получим уравнение вида (1.1.12), в котором $k = 2$ и при этом $b = \mathbf{c} \cdot \mathbf{Ie}$, $a_2 = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{Ie} \times \mathbf{e})$. Таким образом,

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{Ie} = 0, \quad \mathbf{c} \cdot (\mathbf{Ie} \times \mathbf{e}) = 0. \quad (1.1.13)$$

Запишем геометрическое тождество

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{c^2}[(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\alpha})\mathbf{c} + (\mathbf{c} \times \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{c}]. \quad (1.1.14)$$

Обозначая через h постоянную интеграла (1.1.4), из (1.1.1), (1.1.4) найдем выражения

$$\mathbf{c} \times \boldsymbol{\alpha} = \dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\alpha} = h - \frac{1}{2}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Подставим их в правую часть (1.1.14), после чего соотношение $L = \ell$ с интегралом площадей (1.1.5) даст уравнение вида (1.1.12), в котором $k = 3$, $b = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\mathbf{Ie} \times \mathbf{c})$, $a_3 = 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{Ie} \cdot \mathbf{Ie}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{Ie})(\mathbf{Ie} \times \mathbf{e})$. Поэтому, с учетом (1.1.13), имеем

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{M} \cdot (\mathbf{Ie} \times \mathbf{c}) = 0. \quad (1.1.15)$$

При ненулевом \mathbf{c} первое из этих равенств вместе с (1.1.13) дает $\mathbf{Ie} \times \mathbf{e} = 0$, поэтому ось $O\mathbf{e}$ – главная ось тензора \mathbf{I} . Тогда равенства (1.1.15) выражают оставшиеся утверждения теоремы. \square

Отметим, что здесь не вводились требования на постоянный в теле вектор $\boldsymbol{\omega}_0$. В частности, при $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$ получаем, что теорема верна для всех маятниковых движений гири в поле силы тяжести.

В соответствии с доказанным, введем подвижную систему отсчета так, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ и обозначим компоненты постоянных векторов и тензора инерции

$$\boldsymbol{\omega}_0 = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{I} = \text{diag}\{A, B, C\}.$$

Пусть M_0 – проекция вектора M на плоскость Oe_1e_2 . По теореме 1

$$M_0 = mc, \quad m = \text{const}. \quad (1.1.16)$$

Проекция уравнения Эйлера на плоскость Oe_1e_2 примет вид

$$r(mc - C\omega_0) + \alpha_3c - \lambda_3\omega_0 = 0.$$

Так как по предположению $c \neq 0, r \neq \text{const}$, отсюда следует, что

$$\omega_0 = \varepsilon c, \quad (1.1.17)$$

$$(m - \varepsilon C)r + \alpha_3 - \lambda_3\varepsilon = 0. \quad (1.1.18)$$

Из (1.1.16), (1.1.17) получим $M_0 \times \omega_0 = 0$, поэтому уравнение Эйлера в проекции на ось Oe_3 имеет вид

$$C\dot{r} + c_2\alpha_1 - c_1\alpha_2 = 0. \quad (1.1.19)$$

В то же время, дифференцируя (1.1.18), с учетом (1.1.17) получим

$$(m - \varepsilon C)\dot{r} + \varepsilon(c_2\alpha_1 - c_1\alpha_2) = 0. \quad (1.1.20)$$

Условие совместности (1.1.19), (1.1.20) дает

$$m = 2C\varepsilon. \quad (1.1.21)$$

В результате, выбирая произвольно константы

$$A, B, C, c_1, c_2, \lambda_3, \varepsilon, h,$$

получим решение в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \varepsilon c_1, & \omega_2 &= \varepsilon c_2, & \omega_3 &= r, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{c_1^2 + c_2^2} \left[\left(\frac{1}{2}Cr^2 + h_* \right) c_1 - C\sqrt{R(r)}c_2 \right], \\ \alpha_2 &= \frac{1}{c_1^2 + c_2^2} \left[\left(\frac{1}{2}Cr^2 + h_* \right) c_2 + C\sqrt{R(r)}c_1 \right], \\ \alpha_3 &= \varepsilon(\lambda_3 - Cr), \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

где обозначено

$$h_* = \frac{\varepsilon^2}{2}(Ac_1^2 + Bc_2^2) - h,$$

$$R(r) = \frac{1}{C} \left\{ (c_1^2 + c_2^2) [1 - \varepsilon^2(\lambda_3 - Cr)^2] - \left(\frac{1}{2}Cr^2 + h_*\right)^2 \right\}.$$

При этом две компоненты гиростатического момента, согласно (1.1.16), (1.1.21), заданы равенствами

$$\lambda_1 = (2C - A)\varepsilon c_1, \quad \lambda_2 = (2C - B)\varepsilon c_2, \quad (1.1.23)$$

а изменение переменной r , выбранной в качестве основной, задается уравнением

$$\dot{r} = \sqrt{R(r)}. \quad (1.1.24)$$

В связи с произволом выбора единиц измерения, среди пяти физических параметров системы $A, B, C, c_1, c_2, \lambda_3$ существенны лишь три. Параметры ε, h , связанные с выбором начальной точки, произвольны. Поэтому формулы (1.1.22) и (1.1.24), при фиксированных физических параметрах, описывают трехмерное инвариантное подмногообразие фазового пространства, расслоенное на периодические траектории (с возможными бифуркациями). Это решение обобщает классический случай Бобылева – Стеклова.

Рассмотрим гиростат при условиях Ковалевской ($A = B = 2C$, центр масс в экваториальной плоскости) и запишем решения (1.1.22), где в качестве оси Oe , главной по теореме 1, выбрана ось динамической симметрии. Из (1.1.23) вытекает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Любая ось в экваториальной плоскости является главной, поэтому без ограничения общности считаем $c_2 = 0$, тогда $\omega_2 \equiv 0$. Выберем единицы измерения так, что $C = 1, c_1 = 1$, а за независимый параметр вместо ε выберем первую компоненту угловой скорости p . Опуская индекс у единственной ненулевой компоненты λ_3 , из (1.1.22) получим параметрические уравнения трех-

мерного многообразия, обозначаемого далее через \mathcal{M}_1 :

$$\mathcal{M}_1 : \begin{cases} \omega_1 = p, & \omega_2 = 0, & \omega_3 = r, \\ \alpha_1 = \frac{1}{2}r^2 + p^2 - h, & \alpha_2 = \sqrt{R(r)}, & \alpha_3 = -p(r - \lambda). \end{cases} \quad (1.1.25)$$

Здесь

$$R = -\frac{1}{4}r^4 - (2p^2 - h)r^2 + 2\lambda p^2 r + 1 - (p^2 - h)^2 - p^2 \lambda^2. \quad (1.1.26)$$

Динамика на \mathcal{M}_1 задана уравнением (1.1.24), задающем периодические решения и их возможные бифуркации при возникновении неподвижных точек. Точное решение (1.1.24), (1.1.25), (1.1.26) обобщает на гиростат семейство особо замечательных движений 4-го класса Аппельрота классического волчка Ковалевской. Отметим, что обобщение 4-го класса Аппельрота на волчок и гиростат в двойном потенциальном поле (в том числе и с гироскопическими добавками [86]) получены в [87–89].

Решение П.В. Харламова и Е.И. Харламовой

Второе точное решение для гиростата в поле силы тяжести, имеющее непосредственное отношение к рассматриваемой задаче, построено в работах [81, 82]. Исходными предположениями являются условие принадлежности центра масс и гиростатического момента одной из главных плоскостей тензора инерции и наличие частных алгебраических интегралов, гарантирующих возможность выражения всех фазовых переменных через одну вспомогательную. При условиях (1.1.8) наиболее общая форма соответствующих решений представлена в [81], где они объединены в одно семейство. Запишем его в удобных для дальнейшего обозначениях, как предложено в [90]. Фиксируем постоянную ℓ интеграла площадей и пусть s – некоторая отличная от нуля константа.

Положим

$$\begin{aligned} \varkappa^2 = \ell^2 + \lambda^2 s^2, \quad \rho^2 = 1 - \frac{2\varkappa^2}{s}, \quad \mathcal{G}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(X + \frac{\lambda}{\varkappa} \right)^2 + \left(\rho Y + \frac{\ell}{s\varkappa} \right)^2 - 1 \right], \\ (X, Y) = \begin{cases} (\cos \sigma, \sin \sigma), & \rho^2 \geq 0 \\ (\cosh \sigma, i \sinh \sigma), & \rho^2 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Здесь i – мнимая единица, σ – вспомогательная переменная. Инвариантные многообразия \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 определены соответственно при $s < 0$ и $s > 0$ следующей системой параметрических уравнений

$$\mathcal{M}_{2,3} : \begin{cases} \omega_1 = -\frac{\ell}{s} - \varkappa \rho Y, & \omega_2 = -\rho \sqrt{s} \mathcal{G}, & \omega_3 = \lambda + 2\varkappa X, \\ \alpha_1 = \frac{\lambda s X + \ell \rho Y}{\varkappa} - 2\varkappa^2 Y^2, & \alpha_2 = -2\varkappa Y \sqrt{s} \mathcal{G}, & \alpha_3 = \frac{\ell X - \lambda s \rho Y}{\varkappa}. \end{cases} \quad (1.1.28)$$

Динамика, индуцированная системой (1.1.9), описывается уравнением

$$\dot{\sigma}^2 = \operatorname{sgn}(\rho^2) s \mathcal{G}^2. \quad (1.1.29)$$

Поскольку ℓ и s – свободные параметры, то при заданных физических параметрах задачи вновь имеем трехмерное инвариантное подмногообразие в фазовом пространстве, расслоенное на периодические траектории (как и в первом решении на этом многообразии могут происходить и бифуркации периодических траекторий).

Непосредственно проверяется, что при $\lambda = 0$ на семействе траекторий (1.1.28), (1.1.29) имеется следующая связь между интегральными константами

$$(h - 2\ell^2)^2 - k = 0,$$

что соответствует особо замечательным движениям 2-го ($s < 0$) и 3-го ($s > 0$) классов Аппельрота, а константа s оказывается кратным корнем многочлена в дифференциальных уравнениях Ковалевской. Имеются и соответствующие обобщения на двойное поле [87–89], но в случае $\lambda \neq 0$ они не сведены к квадратурам.

Решение И.Н. Гашененко

Попытки построить явное разделение переменных в приведенной системе на P_ℓ^4 для гиростата Ковалевской – Яхья хотя бы при $\ell = 0$ успехом не увенчались. В работах [23, 91, 92] предложены замены переменных на P_0^4 , приводящие к уравнениям типа Абеля–Якоби с комплексными переменными. Их овеществление произвести пока не удалось, в связи с чем для исследования системы (в частности, для ответа на вопрос об условиях существования вещественных решений, который К. Якоби отмечал как основную цель перехода к уравнениям с радикалами [93]) они не пригодны.

Сведение к квадратурам решений системы (1.1.9) на четырехмерном подмногообразии в P^5 , отличном от уровня интеграла площадей, предложил И.Н. Гашененко в работах [77, 78]. Найденное семейство решений также полностью классифицировано по типу движений (периодическое, асимптотическое к периодическому, двоякопериодическое). Приведем основные результаты работ [77, 78]. Рассмотрим соотношения на постоянные h, ℓ, k первых интегралов (1.1.10), порожденные семейством решений (1.1.25):

$$\ell = -\frac{1}{2}p(2h - \lambda^2) + p^3, \quad k = 1 - p^2(2h - \lambda^2) + 3p^4. \quad (1.1.30)$$

Полным прообразом множества таких значений (p и h произвольны) в P^5 служит стратифицированное многообразие $G^4 = N^4 \cup \mathcal{M}_1$, где $\dim N^4 = 4$ и $\partial N^4 = \mathcal{M}_1$. Перейдем на N^4 от (ω, α) к новым координатам $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, полагая [77]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p - xM^{-1}, & \omega_2 &= -yM^{-1}, \\ \omega_3 &= 2z + \lambda + 4x\gamma M^{-1}, & M &= x^2 + y^2 \neq 0, \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -2\alpha + 4(x^2 - y^2)\gamma^2 M^{-2} + 2px(1 - 2px)M^{-1} + 4\lambda x\gamma M^{-1}, \\
\alpha_2 &= -2\beta + 8xy\gamma^2 M^{-2} + 2py(1 - 2px)M^{-1} + 4\lambda y\gamma M^{-1}, \\
\alpha_3 &= 2(1 - 2px)\gamma M^{-1} - 2pz.
\end{aligned}$$

В силу (1.1.30) из уравнений движения и первых интегралов выделяется замкнутая подсистема

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \sqrt{f(z)}, \quad \dot{\alpha} = (z - \frac{1}{2}\lambda)^2 + \frac{1}{2}(p^2 - h), \quad \beta = \sqrt{f(z)}, \\
f(z) &= \frac{1}{4} - p^2 z^2 - [(z - \frac{1}{2}\lambda)^2 + \frac{1}{2}(p^2 - h)]^2,
\end{aligned} \tag{1.1.32}$$

решение которой $z(t), \alpha(t), \beta(t)$ находится в эллиптических функциях времени. Вводя обозначения независимых параметров

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{16}(2h - 2p^2 - \lambda^2), \\
L_2 &= \frac{1}{4}(2h - 6p^2 - \lambda^2), \\
L_3 &= 4(p^2 + \lambda^2)L_1 - \frac{1}{4},
\end{aligned} \tag{1.1.33}$$

функцию Φ и вспомогательную переменную η

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= (z - \lambda)^2 - L_2, \\
\eta &= y \Phi^{-\frac{1}{2}}(z),
\end{aligned} \tag{1.1.34}$$

получим эллиптическую квадратуру для η и конечные выражения для оставшихся переменных

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\eta}{\sqrt{L_1 - L_2 L_3 \eta^2}} + \int \frac{dz}{\Phi(z) \sqrt{f(z)}} &= \text{const}, \\
y = \eta \Phi^{\frac{1}{2}}(z), \quad x &= - \left(\frac{1}{2} p L_2^{-1} + \eta \beta \Phi^{-\frac{1}{2}}(z) + \dot{\eta} \Phi^{\frac{1}{2}}(z) (z - \lambda) L_2^{-1} \right), \\
\gamma &= \frac{1}{2} p z L_2^{-1} + \lambda \eta \beta \Phi^{-\frac{1}{2}}(z) + \dot{\eta} \Phi^{\frac{1}{2}}(z) (\alpha + p^2) L_2^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.1.35}$$

Классификация движений в найденном решении проводится по параметрам (1.1.33). Выделяются следующие случаи [77]:

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & L_1 > 0, L_2 > 0, L_3 > 0; \\
\text{(II)} \quad & L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 < 0; \\
\text{(III)} \quad & L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 > 0; \\
\text{(IV)} \quad & L_1 > 0, L_2 > 0, L_3 < 0; \\
\text{(V)} \quad & L_1 < 0; \\
\text{(VI)} \quad & L_1 = 0; \\
\text{(VII)} \quad & L_2 = 0; \\
\text{(VIII)} \quad & L_3 = 0.
\end{aligned} \tag{1.1.36}$$

Как отмечает автор [77], в случаях I, II возможны двоякопериодические движения, в случаях III, IV, VII, VIII движения, отличные от (1.1.25), асимптотически стремятся к траекториям на \mathcal{M}_1 , а в случаях V, VI движения, отличные от (1.1.25), невозможны. Ниже мы будем возвращаться к обсуждению этих классов и укажем их связь с типами особых точек отображения момента.

1.2. Критическое множество отображения момента

1.2.1. Представление Лакса

Несмотря на то, что в работе [30] интеграл Ковалевской был обобщен и на двойное поле, такая задача не рассматривалась как интегрируемая, поскольку двойное поле препятствует существованию интеграла площадей. Однако позже в работе [94] было указано представление Лакса со спектральным параметром для гиростата типа Ковалевской в двойном поле, откуда следовало существование еще одного первого интеграла, который при исчезновении второго поля превращается в квадрат интеграла площадей. Приведем соответствующее представление Лакса и вытекающие из него результаты при условиях Ковалевской – Яхья.

Следуя С.В. Ковалевской введем комплексные переменные ($i^2 = -1$):

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_1 + i\alpha_2, & x_2 &= \alpha_1 - i\alpha_2, \\w_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & w_2 &= \omega_1 - i\omega_2, \\z &= \alpha_3, & w_3 &= \omega_3\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

(последняя строка переобозначений введена для удобства и единообразия). Обозначая штрихом дифференцирование $d/d(it)$, запишем систему (1.1.9) так:

$$\begin{aligned}2w'_1 &= -(w_1w_3 + z), & 2w'_2 &= w_2w_3 + z, & 2w'_3 &= x_1 - x_2, \\x'_1 &= -x_1w_3 + zw_1, & x'_2 &= x_2w_3 - zw_2, & 2z' &= x_1w_2 - x_2w_1.\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

Представление Лакса для этой системы, как частный случай результата работы [94], имеет вид

$$B' = BA - AB,\tag{1.2.3}$$

где

$$B = \left\| \begin{array}{cccc} 2\lambda & \frac{x_2}{\kappa} & -2w_1 & \frac{z}{\kappa} \\ -\frac{x_1}{\kappa} & -2\lambda & -\frac{z}{\kappa} & 2w_1 \\ -2w_1 & \frac{z}{\kappa} & -2w_3 & -\frac{x_1}{\kappa} - 4\kappa \\ -\frac{z}{\kappa} & 2w_2 & \frac{x_2}{\kappa} + 4\kappa & 2w_3 \end{array} \right\|, \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} -\frac{w_3}{2} & 0 & \frac{w_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{w_3}{2} & 0 & -\frac{w_1}{2} \\ \frac{w_1}{2} & 0 & \frac{w_2}{2} & \kappa \\ 0 & -\frac{w_2}{2} & -\kappa & -\frac{w_3}{2} \end{array} \right\|,\tag{1.2.4}$$

через κ обозначен спектральный параметр, производная в (1.2.3) вычисляется в силу (1.2.2). Уравнение для собственных значений μ матрицы B определяет ассоциированную с данным представлением алгебраическую кривую [95]. Положим $s = 2\kappa^2$. Уравнение алгебраической кривой примет вид

$$\begin{aligned}\mu^4 - 4 \left[\frac{1}{s} - (2h + \lambda^2) + 2s \right] \mu^2 + \\ + 4 \left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}(4\ell^2 - 2h - \lambda^2) + (4k + 8\lambda^2h) - 8\lambda^2s \right] = 0.\end{aligned}\tag{1.2.5}$$

Введем порожденное интегралами (1.1.10) интегральное отображение (отображение момента)

$$J = L \times H \times K : P^5 \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1.2.6)$$

Множество Σ его критических значений называется бифуркационной диаграммой и является классифицирующим множеством при исследовании фазовой топологии системы. Как показывает опыт такого исследования, при наличии представления Лакса бифуркационная диаграмма отображения J содержится в множестве тех значений (ℓ, h, k) , при которых кривая (1.2.5) перестает быть неособенной, то есть либо является приводимой – левая часть уравнения (1.2.5) распадается в произведение рациональных выражений, либо имеет особую точку в стандартном смысле. Таким путем можно предугадать результат следующего утверждения. Однако для его строгого доказательства необходимы непосредственные вычисления на множестве критических точек J . Это множество будет указано ниже.

Теорема 2. *Бифуркационная диаграмма интегрального отображения $L \times H \times K$ содержится в объединении следующих (пересекающихся) поверхностей в $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$:*

$$\Pi_1 : \begin{cases} k = 1 + (h - \frac{\lambda^2}{2})^2 - 4(h - \frac{\lambda^2}{2})s + 3s^2, \\ \ell^2 = (h - \frac{\lambda^2}{2} - s)s^2, \quad s \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad (1.2.7)$$

$$\Pi_{2,3} : \begin{cases} k = -2\lambda^2(h - \frac{\lambda^2}{2} - 2s) - \lambda^4 + \frac{1}{4s^2}, \\ \ell^2 = \frac{1}{2}(h + \frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2 s^2 - \frac{1}{4s}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Здесь $s < 0$ для Π_2 и $s > 0$ для Π_3 .

Замечание 1. *В представленном виде уравнения бифуркационных диаграмм получены из (1.2.5). В качестве независимых параметров на поверхностях выбраны h, s . Поскольку h и ℓ^2 при этом связаны линейно,*

то можно выразить k, h через s, ℓ . На Π_2, Π_3 проблем не возникает. На Π_1 возникает искусственная особенность, связанная с возможностью $s = 0$. Геометрически это соответствует линии самопересечения поверхности Π_1 , которая в параметрической записи (1.2.7) особенностью не является. Однако при рассмотрении бифуркационных диаграмм приведенных систем на P_ℓ^4 важно иметь и выражение через s, ℓ , которое запишем в виде

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \left\{ h = \frac{\ell^2}{s^2} + \frac{\lambda^2}{2} + s, k = \frac{\ell^4}{s^4} - \frac{2\ell^2}{s} + 1, \ell s \neq 0 \right\} \cup \\ & \cup \{k = 1, \ell = 0\} \cup \left\{ k = 1 + \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2, \ell = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

1.2.2. Описание критического множества

Множество критических точек отображения момента впервые описано в работе [75], где приведены и параметрические уравнения особых поверхностей Π_j . Более детальное изложение представлено в [50]. Параллельно такие же результаты получены в [80]. Показано, что поверхности Π_j естественным образом возникают как дискриминантные множества некоторых многочленов. Уравнения поверхности Π_1 также следуют из результатов работы [77], но в ее контексте соответствующие условия на постоянные интегралов не связывались с понятием критических точек.

Множество \mathcal{C} критических точек отображения момента стратифицировано рангом этого отображения. В силу того, что интеграл L всюду регулярен и расслаивает P^5 на гладкие симплектические листы (1.1.7), естественно принять следующую терминологию.

Определение 1. Рангом точки $x \in P_\ell^4 \subset P^5$ будем называть ранг в этой точке отображения-ограничения

$$\mathcal{J}_\ell = H \times K|_{P_\ell^4} : P_\ell^4 \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (1.2.10)$$

Таким образом, ранг точки на единицу меньше, чем ранг в этой точке отображения (1.2.6). В соответствии с этим имеем

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1, \quad \mathcal{C}^i = \{x \in P_\ell^4 \mid \text{rank } \mathcal{J}_\ell(x) = i\}. \quad (1.2.11)$$

Определенная выше бифуркационная диаграмма есть J -образ множества \mathcal{C} .

Наличие особых поверхностей (1.2.7), (1.2.8) порождает другое разбиение критического множества.

Теорема 3 ([50, 75, 80]). *Множество критических точек отображения момента имеет вид*

$$\mathcal{C} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3, \quad (1.2.12)$$

где $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ заданы уравнениями (1.1.25), (1.1.28). При этом каждое \mathcal{M}_j есть замыкание соответствующего множества $J^{-1}(\Pi_j) \cap \mathcal{C}^1$ ($j = 1, 2, 3$).

Равенство (1.2.12) следует из аналитического описания множества \mathcal{C} , полученного в [50, 75] с помощью исследования миноров матрицы Якоби

$$\frac{\partial(L, H, K, \Gamma)}{\partial(\omega, \alpha)}.$$

Эlegantное доказательство с помощью преобразования уравнений, определяющих интегральное отображение, к симметричной системе комплексных уравнений на $\mathbb{R}^6(\omega, \alpha)$ имеется в [80]. Тот факт, что образ каждого из многообразий \mathcal{M}_j содержится в соответствующей поверхности Π_j , проверяется непосредственным вычислением. При этом на \mathcal{M}_1 нужно в формулах (1.1.30) положить

$$s = h - \frac{\lambda^2}{2} - p^2. \quad (1.2.13)$$

Определение 2. *Многообразия $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ с индуцированной на них динамикой будем называть, соответственно, первой, второй и третьей критическими подсистемами случая Ковалевской – Яхья.*

Замечание 2. Мы называем множества M_j многообразиями, имея в виду их инвариантность (“инвариантные многообразия”). В действительности может оказаться, что они являются гладкими многообразиями лишь почти всюду.

Представление C в виде множества решений систем инвариантных соотношений получим как частный случай соответствующего результата работы [88].

Теорема 4. Множество критических точек интегрального отображения J состоит из следующих подмножеств в P^5 :

1) множества, определяемого системой

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad (1.2.14)$$

где

$$R_1 = \omega_2, \quad R_2 = (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \alpha_3;$$

2) множества, определяемого системой

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad (1.2.15)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 = & [\alpha_2\omega_2 + \omega_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha_1)] [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \omega_3 - 2\alpha_3 (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2)] + \\ & + \{ -2\alpha_3^2\omega_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - \alpha_2\alpha_3\omega_2 (3\alpha_3 + 2\omega_1\omega_3) + \alpha_1 [-3\alpha_3^2\omega_1 + \\ & + 2\alpha_2\omega_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \alpha_3 (-\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega_3] + \\ & + \alpha_2^2 [\alpha_3\omega_3 - \omega_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2)] + \alpha_1^2 [\omega_1^3 + \alpha_3\omega_3 + \omega_1 (\omega_2^2 + \omega_3^2)] \} \lambda + \\ & + \{ -\alpha_3^3 - 2\alpha_3^2\omega_1\omega_3 + [(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \omega_1 + 2\alpha_1\alpha_2\omega_2] \omega_3 + \\ & + \alpha_1\alpha_3 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \} \lambda^2 + \alpha_1\alpha_3\omega_3\lambda^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & [\alpha_2 \omega_1 + \omega_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \alpha_1)] [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \omega_3 - 2\alpha_3 (\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2)] + \\
& + \{ \alpha_2 [\omega_1 (-\alpha_3^2 + 2\alpha_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2)) + \alpha_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_3] + \alpha_2^2 \omega_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - \\
& - \omega_2 [2\alpha_3^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_3 - 2\omega_1 \omega_3) + \alpha_1^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2)] \} \lambda + \\
& + \{ \alpha_2^2 \omega_2 \omega_3 - (\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2) \omega_2 \omega_3 + \alpha_2 [2\alpha_1 \omega_1 \omega_3 + \alpha_3 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)] \} \lambda^2 + \\
& + \alpha_2 \alpha_3 \omega_3 \lambda^3.
\end{aligned}$$

В инвариантности систем (1.2.14), (1.2.15) можно убедиться дифференцированием их в силу системы (1.1.9). Непосредственно проверяется, что точки (1.1.25) удовлетворяют системе (1.2.14), а точки (1.1.28) — системе (1.2.15), что в силу размерностей соответствующих подмножеств вновь доказывает равенство (1.2.12).

Из результатов работы [88] следует, как частный случай, что системы (1.2.14), (1.2.15) описывают множество критических точек ограничения на P^5 функции с неопределенными множителями Лагранжа

$$2L^2 + (\tau - 1)H + sK. \quad (1.2.16)$$

Дифференциал этой функции сохраняется фазовым потоком, поэтому s и τ , выраженные через фазовые переменные, становятся частными интегралами критических подсистем \mathcal{M}_j :

$$\mathcal{M}_1 : \quad s = -\frac{\ell}{\omega_1}, \quad \tau = 1 + 2\ell\omega_1, \quad (1.2.17)$$

$$\mathcal{M}_{2,3} : \quad s = \frac{\omega_3 - 2\ell\alpha_3}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \lambda\omega_3)\lambda}, \quad \tau = 2\lambda^2 s. \quad (1.2.18)$$

Естественно, именно эти значения s определяют соответствующие точки особых поверхностей Π_j в записи (1.2.7), (1.2.8). Заметим, что, как видно из (1.2.17), на множестве \mathcal{M}_1 функцию (1.2.16) можно “сократить” на L без потери критических точек. На $\mathcal{M}_{2,3}$ это уже не так, поскольку имеется множество точек глобальной зависимости на P^5 функций K, H , на котором L обращается в нуль, следовательно, неопределенный мно-

житель при dL в нулевой нетривиальной комбинации дифференциалов пропорционален L .

Отметим, что из результатов [88] следует также, что скобки Пуассона пар функций из соотношений (1.2.14), (1.2.15) имеют вид

$$\{R_1, R_2\} = \frac{3}{2}s - \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right), \quad (1.2.19)$$

$$\{F_1, F_2\} = \frac{\lambda F_0}{s\sqrt{2}}(1 - 8\lambda^2 s^3) \sqrt{2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + 1}, \quad (1.2.20)$$

где

$$F_0^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \lambda\omega_3)^3 [(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \lambda\alpha_3)^2 + (\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2)^2]. \quad (1.2.21)$$

Обращение в нуль скобок (1.2.19) и (1.2.20) соответствует случаям вырождения симплектической структуры, индуцированной на двумерных многообразиях $\mathcal{M}_j \cap P_\ell^4$, являющихся фазовыми пространствами гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Ниже будет ясна связь этого явления с типами критических точек. Забегая вперед, без строгих определений, можно сказать, что, поскольку невырожденные критические точки организованы в симплектические подмногообразия (см. соответствующее утверждение в [26]), точки вырождения индуцированной симплектической структуры на критическом множестве должны быть вырождены и как критические точки отображения момента.

1.3. Относительные равновесия – критические точки ранга 0

1.3.1. Зависимость интегралов энергии и площадей

Неподвижные точки уравнений Эйлера – Пуассона — это проекции на P^5 движений тела, при которых траектория в $SO(3)$ совпадает с орбитой группы симметрий, то есть вращений вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью. В теории понижения порядка по Раусу такие

неподвижные точки называют *относительными равновесиями*. В теории С.Смейла [24] эти точки являются критическими точками отображения *энергии – момента*, что в применении к динамике твердого тела означает зависимость интегралов энергии и площадей. Бифуркационные диаграммы отображения

$$L \times H : P^5 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1.3.1)$$

называют диаграммами Смейла.

В свою очередь, на симплектическом листе (1.1.7) критические точки отображения (1.3.1) являются критическими точками “приведенного” гамильтониана

$$H_\ell = H|_{P_\ell^4} : P_\ell^4 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.3.2)$$

При необходимости подчеркнуть зависимость от λ пишем $P_\ell^4(\lambda)$ и $H_{\ell,\lambda}$. Как следует из результатов [52], почти все такие точки невырождены в смысле Морса (ниже мы рассмотрим классификацию этих точек более подробно). Но невырожденная критическая точка гамильтониана будет критической для любого другого первого интеграла. Поэтому рассматриваемое множество совпадает с \mathcal{C}^0 . Итак, задача исследования критических точек отображения (1.3.1) совпадает с задачей исследования множества критических точек ранга 0 отображения (1.2.6) в смысле определения 1.

Здесь и в дальнейшем для нахождения критических точек функций на P^5 без введения дополнительного неопределенного множителя, отвечающего ограничению (1.1.3), удобно воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 1. Пусть f – гладкая функция на $\mathbb{R}^6(\omega, \alpha)$. Множество критических точек ограничения f на подмногообразии P^5 определяется системой уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0, \quad \alpha \times \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \quad (1.3.3)$$

В комплексных переменных (1.2.1) эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial w_1} = \frac{\partial f}{\partial w_2} = \frac{\partial f}{\partial w_3} = 0, \\ 2z \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad 2z \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Доказательство очевидно. Заметим, что три последних уравнения как в системе (1.3.3), так и в системе (1.3.4), линейно зависимы. Выбор независимой пары в случае общего положения диктуется соображениями удобства.

Запишем уравнения (1.3.3) для функции $f_H = H - 2\sigma L$. Получим

$$\begin{aligned} \omega_1 = \sigma\alpha_1, \quad \omega_2 = \sigma\alpha_2, \quad \omega_3 = \sigma\alpha_3, \\ \alpha_3 - [\alpha_1(\omega_3 + \lambda) - 2\alpha_3\omega_1]\sigma = 0, \quad \alpha_2 - 2(\alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1)\sigma = 0, \\ [2\alpha_3\omega_2 - \alpha_2(\omega_3 + \lambda)]\sigma = 0. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Эта система, имеющая ранг 5, вместе с уравнением (1.1.3), позволяет выразить фазовые переменные и неопределенный множитель σ через какую-либо одну переменную, выбранную в качестве независимой. В работе [96] представлена параметризация множества C^0 переменной α_1 .

Предложение 1 (П.Е. Рябов [96]). *Множество критических точек ранга 0 описывается следующей системой уравнений*

$$\begin{aligned} \omega_1 = \frac{x}{2d_1}(\lambda - d_2), \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(\lambda - d_2), \\ \alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = d_1, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

где

$$d_1 = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad d_2 = \pm\sqrt{\lambda^2 - \frac{4}{x}(1 - x^2)},$$

знаки d_1, d_2 произвольны, а параметр x удовлетворяет условиям

$$x \in \begin{cases} [-1, 0) \cup [c_\lambda, 1], & d_2 > 0 \\ (-1, 0) \cup [c_\lambda, 1), & d_2 < 0 \end{cases}, \quad c_\lambda = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\lambda^4 + 64} - \lambda^2 \right).$$

При этом значения первых интегралов таковы

$$\ell = \frac{1}{d_1}[(3 - x^2)\lambda - (1 + x^2)d_2], \quad h = \frac{\lambda(1 - x^2) - d_2(1 + 3x^2)}{2x(\lambda + d_2)}, \quad (1.3.7)$$

а неопределенный множитель

$$\sigma = \frac{1}{2d_1}(\lambda - d_2).$$

Заметим, что система (1.3.5) не имеет решений в P^5 с $\alpha_1 = 0$, поэтому особенность $x = 0$ неустранима.

Уравнения (1.3.7) – это параметрические уравнения диаграммы Смейла. При исследовании бифуркационных диаграмм отображений (1.2.10) первое уравнение (1.3.7) позволяет решить задачу нахождения всех критических точек ранга 0, попадающих на заданный уровень P_ℓ^4 .

Другую параметризацию множества \mathcal{C}^0 предложил И.Н. Гашененко [80], отметив, что такие точки принадлежат пересечению \mathcal{M}_1 с объединением множеств $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$. Следовательно, удобно выбрать в качестве независимого параметра величину $\omega_3 = r$ в равенствах (1.1.25). При этом многочлен (1.1.26) должен иметь кратный корень, что и позволяет легко выразить все неизвестные через r . Естественно, те же выражения дает и система (1.3.5). С учетом результатов [80, 97] приходим к следующему утверждению.

Предложение 2 (И.Н. Гашененко [80]). *Множество критических точек ранга 0 описывается следующей системой уравнений*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pm \sqrt{\frac{r}{2} \left[-r + \frac{1}{r - \lambda} d \right]}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = r, \\ \alpha_1 &= -\frac{r - \lambda}{2} \left[-r + \frac{1}{r - \lambda} d \right], \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \mp (r - \lambda) \sqrt{\frac{r}{2} \left[-r + \frac{1}{r - \lambda} d \right]}, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

где

$$d = \pm \sqrt{r^2(r - \lambda)^2 + 4}, \quad (1.3.9)$$

параметр r пробегает множество

$$r \in (-\infty, 0] \cup [0, \lambda) \cup (\lambda, +\infty), \quad (1.3.10)$$

знак d совпадает со знаком $r(r - \lambda)$ при $r \neq 0$ и произволен при $r = 0$. При этом значения первых интегралов таковы

$$\ell = \mp \frac{1}{2} [\lambda(r - \lambda) + d] \sqrt{\frac{r}{2} \left[-r + \frac{1}{r - \lambda} d \right]}, \quad h = -\frac{1}{2} r(r - \lambda) + \frac{2r - \lambda}{2(r - \lambda)} d, \quad (1.3.11)$$

а неопределенный множитель

$$\sigma = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r}{r - \lambda} [r(r - \lambda) + d]}.$$

Знаки $\omega_1, \alpha_3, \ell, \sigma$ согласованы (все верхние или все нижние).

Сравнивая с уравнениями (1.1.25) видим, что точки ранга 0 получаются в подсистеме \mathcal{M}_1 , если положить

$$p^2 = \frac{r}{2} \left[-r + \frac{1}{r - \lambda} d \right]. \quad (1.3.12)$$

Замечание 3. Убедиться в том, что во всех найденных точках равно нулю и дифференциал $d(K|_{P_\ell^4})$, можно записав уравнения (1.3.3) для функции

$$f_K = K - 4\gamma L, \quad \gamma = \mp \frac{\lambda}{r - \lambda} \sqrt{\frac{r}{2} \left[-r + \frac{1}{r - \lambda} d \right]}.$$

Для диаграмм Смейла значение интеграла K несущественно, однако ниже нам понадобится также и это значение в точках (1.3.8). Согласно [80] его можно представить в виде

$$k = \frac{\lambda}{4(r - \lambda)^2} [r(r - \lambda) - d] [r(r - \lambda)(4r - 3\lambda) - \lambda d]. \quad (1.3.13)$$

Вычислим также в точках (1.3.8) значения частных интегралов s в системах \mathcal{M}_j , то есть значения параметра s на поверхностях Π_j в точках ранга 0. Используя (1.2.17), (1.2.18), находим

$$\mathcal{M}_1 : \quad s = \frac{1}{2} [\lambda(r - \lambda) + d], \quad (1.3.14)$$

$$\mathcal{M}_{2,3} : \quad s = \frac{r - \lambda}{4\lambda} [r(r - \lambda) - d]. \quad (1.3.15)$$

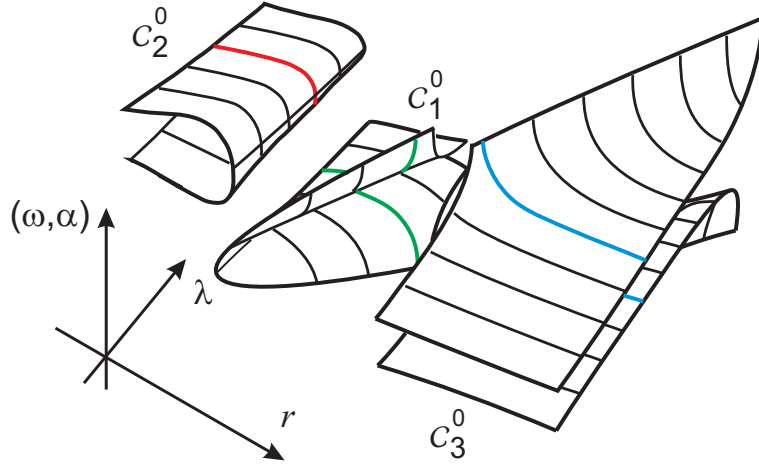


Рис. 1.1. Поверхности относительных равновесий.

Из (1.3.8), (1.3.10) сразу же следует, что множество \mathcal{C}^0 имеет ровно четыре связных компоненты, гомеоморфных \mathbb{R} . В соответствии с областью изменения r введем обозначения для подмножеств в \mathcal{C}^0 , определяемых формулами (1.3.8):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_1^0 : r \in [0, \lambda), \quad d < 0, \quad \lim_{r \rightarrow +0} d = -2, \\
 \mathcal{C}_2^0 : r \in (-\infty, 0], \quad d > 0, \quad \lim_{r \rightarrow -0} d = 2, \\
 \mathcal{C}_3^0 : r \in (\lambda, +\infty), \quad d > 0.
 \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Первые два множества связны, последнее состоит из двух компонент, отличающихся знаком ω_1 . В \mathcal{C}_1^0 и \mathcal{C}_2^0 каждому значению $r \neq 0$ отвечает ровно две точки, в \mathcal{C}_1^0 значению $r = 0$ отвечает точка $\omega = 0, \alpha = \{1, 0, 0\}$ нижнего положения равновесия тела (для дальнейшего обозначим ее в соответствии со стремлением r к нулю справа через c_+), а в \mathcal{C}_2^0 нулевое значение r приводит к точке $\omega = 0, \alpha = \{-1, 0, 0\}$ верхнего положения равновесия (обозначим ее через c_-). На множествах (1.3.16) определена очевидная симметрия

$$\text{symm} : (\omega_1, \alpha_3) \mapsto (-\omega_1, -\alpha_3), \tag{1.3.17}$$

которая меняет знак постоянной площадей ℓ , связные множества $\mathcal{C}_1^0, \mathcal{C}_2^0$ переводит в себя, а в множестве \mathcal{C}_3^0 меняет местами связные компоненты.

Устройство семейства множеств $C^0(\lambda)$ проиллюстрировано на рис. 1.1 [98].

1.3.2. Классификация критических точек ранга 0

В этом разделе мы приводим результаты, касающиеся аналитической классификации типов критических точек ранга 0 в соответствии с работами [52] и [98].

Напомним некоторые факты и определения, связанные с понятием типа критической точки в интегрируемой системе [26].

Пусть M — симплектическое многообразие. Любой гладкой функции $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ сопоставляется гамильтоново векторное поле на M , обозначаемое $\text{sgrad } F$. Скобки Пуассона, порожденные симплектической структурой, обозначаем через $\{\cdot, \cdot\}$, так что дифференциальные уравнения системы $\text{sgrad } F$ имеют вид

$$\dot{x} = \{F, x\}.$$

Заметим, что обычно аргументы скобки в правой части пишут в обратном порядке, однако, легко проверить, что именно выражение $\{F, x\}$ приводит к тому, что из определений (1.1.6), (1.1.4) следуют уравнения (1.1.1). Имеются и другие подходы к разрешению этого несоответствия. Так, в [99] предлагается изменить знаки в определении скобок (1.1.6), а в [100] в качестве импульсов берутся компоненты кинетического момента с обратным знаком.

Пусть $\dim M = 2n$ и гамильтонова система $\text{sgrad } H$ имеет n функционально независимых первых интегралов

$$F_1, \dots, F_n$$

в инволюции ($\{F_i, F_j\} \equiv 0$). Точка $\xi \in M$ называется критической ранга $k < n$, если ранг системы векторов $\text{sgrad } F_i$ в точке ξ равен k . Введем

понятие типа критической точки, следуя [26].

Рассмотрим критическую точку ξ ранга $n - m$ ($m > 0$). Пусть далее в этом разделе индекс i пробегает множество $1, \dots, m$. Линейной заменой с постоянными коэффициентами системы функций F_1, \dots, F_n можно добиться того, чтобы точка ξ была критической для каждой из функций F_i и регулярной для всех остальных. Тогда $\text{sgrad } F_i(\xi) = 0$ и линеаризация этого поля в точке ξ есть симплектический оператор $\alpha_i : T_\xi M \rightarrow T_\xi M$. Линейная оболочка $\mathfrak{A}(\xi)$ таких операторов есть подалгебра в алгебре всех симплектических операторов на $T_\xi M$.

Определение 3 ([26]). Точка ξ называется невырожденной критической точкой ранга $n - m$, если $\mathfrak{A}(\xi)$ есть подалгебра Картана, что равносильно следующим требованиям:

- 1°) симплектические операторы α_i линейно независимы ($\dim \mathfrak{A}(\xi) = m$);
- 2°) существует оператор $\alpha \in \mathfrak{A}(\xi)$, у которого все собственные числа различны.

Напомним, что собственные числа симплектического оператора разбиваются на группы: пары чисто мнимых $\pm i a$, пары вещественных $\pm b$ и четверки комплексных $\pm b \pm i a$ ($ab \neq 0$). Для оператора α_i в проекции на корневые подпространства таких групп поле $\text{sgrad } F_i$ имеет соответственно центр, седло или фокус. Оператор $\alpha \in \mathfrak{A}(\xi)$ с различными собственными числами называется регулярным элементом. Выбрав в невырожденной точке регулярный элемент, обозначим через m_1, m_2, m_3 соответственно количество центров, седел и фокусов ($m = m_1 + m_2 + 2m_3$). От выбора регулярного элемента эти целые неотрицательные числа не зависят.

Определение 4 ([26]). Четверка $(n - m, m_1, m_2, m_3)$ называется типом невырожденной критической точки ξ .

Для систем с двумя степенями свободы распространены более наглядные названия. Для точек ранга 0 тип $(0, 2, 0, 0)$ называется “центр-центр”, тип $(0, 1, 1, 0)$ называется “центр-седло”, тип $(0, 0, 2, 0)$ называется “седло-седло”. Для точек ранга 1 тип $(1, 1, 0, 0)$ называется “центр”, а тип $(1, 0, 1, 0)$ называется “седло”. Других типов (в частности, фокусов) мы в этой задаче не встретим.

Знание типа невырожденной критической точки в значительной мере (но не полностью) определяет слоение Лиувилля (слоение совместных уровней n первых интегралов в инволюции) в окрестности этой точки. Для построения грубого топологического описания слоения Лиувилля (например, в виде круговой молекулы без меток в системе с двумя степенями свободы) достаточно знать еще количество связных компонент регулярных и критических интегральных поверхностей. Для критических уровней малой сложности (то есть когда на одну связную компоненту попадает мало критических орбит), например, для критических точек ранга 0 с одной точкой на слое, этого оказывается достаточно и для нахождения тонкого топологического инварианта (меченой круговой молекулы) в силу наличия описания всех имеющихся возможностей [26]. Ниже мы представим такое описание в рассматриваемой задаче.

Заметим, что эта терминология не является общепринятой и используется здесь для удобства.

Для уравнений Эйлера – Пуассона 2-форма, индуцированная на P^5 симплектической структурой многообразия $TSO(3)$, вырождена. Введенные понятия необходимо рассматривать с точки зрения систем на P_ℓ^4 . Явный переход к этим системам делает вычисления необозримыми. Однако в этом нет необходимости. Скобка Пуассона (1.1.6), хотя и вырожденная, корректно сопоставляет функции F поле $\text{sgrad } F$, определенное уравнениями

$$\dot{M} = M \times \frac{\partial F}{\partial M} + \alpha \times \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = \alpha \times \frac{\partial F}{\partial M}. \quad (1.3.18)$$

Замечание 4. Если F есть функция Казимира, то есть тождественно зависима с L и $\Gamma = \alpha^2$, то правые части (1.3.18) — тождественный ноль. В связи с этим при вычислении линеаризации полей $\text{sgrad } F$ произвольных функций F и собственных чисел соответствующих операторов в \mathbb{R}^6 нет необходимости учитывать неопределенные множители Лагранжа для функций L и Γ — необходимо лишь учесть определение 1 и отбросить два нулевых собственных числа, которые здесь обязательно существуют.

Физическая модель гиростата — это система с четырьмя степенями свободы (тело плюс ротор), для которой λ есть константа циклического интеграла. Уравнения Эйлера — Пуассона получены понижением порядка в этой системе. Поэтому все рассуждения о постоянстве каких-либо свойств в пространстве интегральных или иных параметров естественно рассматривать в расширенном пространстве этих параметров, включающих ось $\mathbb{R} = \mathbb{R}(\lambda)$. В связи с этим будем использовать следующее обозначение. Пусть A — какое-либо множество, а $B(\lambda)$ — семейство его подмножеств, зависящих от параметра λ . Обозначим

$$\Lambda(A) = A \times \mathbb{R}, \quad \Lambda(B) = \bigcup_{\lambda} B(\lambda) \times \{\lambda\} \subset \Lambda(A). \quad (1.3.19)$$

В соответствии с этим рассмотрим расширенное множество $\Lambda(C^0) \subset \Lambda(P^5) = P^5 \times \mathbb{R}$. Напомним, что согласно (1.1.8) мы считаем $\lambda > 0$, а случай $\lambda = 0$ рассматриваем лишь как предельную возможность там, где это явно оговорено. По предложению 2 множество $\Lambda(C^0)$ непрерывно дважды покрывает область

$$D^0 = \{(r, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \lambda > 0, r \neq \lambda\}.$$

Замечание 5. Для дальнейшего условимся образы множеств $\Lambda(C_i^0)$ в различных пространствах параметров (постоянных общих и частных интегралов, физического параметра λ) обозначать через δ_i ($i = 1, 2, 3$). В частности, как подмножества в \mathcal{D}^0 они имеют вид

$$\begin{aligned}\delta_1 &: \{(r, \lambda) : 0 \leq r < \lambda, \lambda > 0\}, \\ \delta_2 &: \{(r, \lambda) : r \leq 0, \lambda > 0\}, \\ \delta_3 &: \{(r, \lambda) : r > \lambda, \lambda > 0\}.\end{aligned}\tag{1.3.20}$$

Подмножества этих множеств, полученные в результате дальнейшей детализации, будут снабжаться двойными индексами.

Напомним существование на C^0 симметрии (1.3.17).

Определение 5. Будем говорить, что точки $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda(C^0)$ принадлежат к одному классу, если существует непрерывный путь в $\Lambda(C^0)$, соединяющий эти точки или точку ξ_1 с точкой $\text{symm}(\xi_2)$, вдоль которого не меняется тип критических точек.

Пусть $(r, \lambda) \in \mathcal{D}^0$. Обозначим через $\xi_{\pm}(r, \lambda)$ точку (1.3.8) при $r \neq 0$ и, в соответствии с предложением 2, при выбранном знаке величины (1.3.9) $\text{sgn } d = \text{sgn}[r(r - \lambda)]$. Согласно принятым ранее обозначениям имеем

$$\lim_{r \rightarrow +0} \xi_{\pm}(r, \lambda) = c_+ \in C_1^0, \quad \lim_{r \rightarrow -0} \xi_{\pm}(r, \lambda) = c_- \in C_2^0.$$

Определение 6. Точку $(r, \lambda) \in \mathcal{D}^0$ назовем разделяющей, если в любой ее окрестности найдутся образы точек из $\Lambda(C^0)$ разных классов.

Разделяющим является луч запрещенных точек $r = \lambda, \lambda > 0$. Обозначим его через $\bar{\pi}$. Поскольку $\xi_1 \in C_1^0$ и $\xi_2 \in C_2^0$ не могут принадлежать одному классу, точки вида $(0, \lambda)$ всегда являются разделяющими. Обозначим полуось $r = 0, \lambda > 0$ через π_0 . При $r \neq 0$ типы критических точек $\xi_{\pm}(r, \lambda)$ всегда одинаковы, поэтому точка (r, λ) является разделяющей тогда и только тогда, когда обе критические точки $\xi_{\pm}(r, \lambda)$ вырож-

дены. Множество сильно вырожденных критических точек $\xi_{\pm}(r, \lambda)$ соответствует кривой в области δ_2 [98]

$$\pi_{21} : r = \lambda - \frac{1}{\lambda^{1/3}}, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (1.3.21)$$

При условии

$$(2r - \lambda)(r - \lambda) + d = 0 \quad (1.3.22)$$

все критические точки невырождены.

Предложение 3 ([52],[98]). Пусть точка $(r, \lambda) \in \mathcal{D}^0$ не лежит на кривой (1.3.21) и не удовлетворяет ни одному из уравнений

$$r + \lambda = 0, \quad (1.3.23)$$

$$(2r - \lambda)(r - \lambda) - d = 0, \quad (1.3.24)$$

$$(2r - \lambda)(r - \lambda)r + \lambda d = 0. \quad (1.3.25)$$

Тогда критические точки $\xi_{\pm}(r, \lambda)$ невырождены.

Доказательство. Характеристический многочлен оператора a_H в точке $\xi_{\pm}(r, \lambda)$, сокращенный на μ^2 в соответствии с замечанием 4, имеет вид

$$\chi_H(\mu) = \mu^4 - 2a\mu^2 + b, \quad (1.3.26)$$

где

$$a = \frac{1}{8(r - \lambda)} [-(3r - \lambda)(2r - \lambda)(r - \lambda) + (r - 3\lambda)d],$$

$$b = \frac{1}{8(r - \lambda)} [(r - \lambda)^3(4r - \lambda)r - 4\lambda - (2r - \lambda)(r - \lambda)^2d].$$

Дискриминант многочлена (1.3.26)

$$a^2 - b = \frac{(r + \lambda)^2}{64(r - \lambda)^2} [(2r - \lambda)(r - \lambda) + d]^2$$

обращается в нуль только при условии (1.3.23). Корни χ_H по μ^2 находятся явно

$$\mu_1^2 = -\frac{1}{4} [(2r - \lambda)(r - \lambda) - d], \quad (1.3.27)$$

$$\mu_2^2 = -\frac{1}{2(r - \lambda)} [(2r - \lambda)(r - \lambda)r + \lambda d]. \quad (1.3.28)$$

Эти величины, фактически и определяющие типы точек ранга 0, впервые вычислены в работе [52]. Таким образом, за пределами множества, определенного уравнениями (1.3.23)–(1.3.25), все корни χ_H различны. При этом вне кривой (1.3.21) алгебра, порожденная операторами a_H, a_K , двумерна. Предложение доказано. \square

Как показано в [98], на кривой

$$\pi_{22} : \quad r = -\lambda, \quad \lambda > 0, \quad (1.3.29)$$

то есть при условии (1.3.23), все критические точки вырождены. Условие (1.3.24) реализуется в области \mathcal{D}^0 на следующих кривых

$$\pi_{23} : \quad r = \frac{x^4 - 4}{2x^3}, \quad \lambda = \frac{3x^4 - 4}{2x^3}, \quad x \in (\sqrt[4]{4/3}, \sqrt{2}], \quad (1.3.30)$$

$$\pi_{31} : \quad r = \frac{x^4 - 4}{2x^3}, \quad \lambda = \frac{3x^4 - 4}{2x^3}, \quad x \in (-\sqrt[4]{4/3}, 0). \quad (1.3.31)$$

Все соответствующие критические точки также вырождены [98]. Условие (1.3.25) реализуется в области \mathcal{D}^0 на кривой

$$\pi_{24} : \quad r = \frac{1}{2} \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^{2/3}} \right), \quad \lambda > 0, \quad (1.3.32)$$

Все соответствующие критические точки вырождены [98].

Область \mathcal{D}^0 с разделяющими кривыми указана на рис. 1.2 [98]. Здесь же введены обозначения для классов невырожденных точек ранга 0. Как видим, в множестве $\Lambda(\mathcal{C}_1^0)$ всего один класс, и он обозначен, как и подобласть в \mathcal{D}^0 , через δ_1 . Он включает и подмножество со значением $r = 0$, через которое возможен переход к симметричным точкам, так что этот класс состоит из одной связной компоненты. В множестве $\Lambda(\mathcal{C}_3^0)$ два класса. Они обозначены через δ_{31}, δ_{32} и не включают точек с $r = 0$, поэтому каждый такой класс состоит из двух связных компонент. В множестве $\Lambda(\mathcal{C}_2^0)$ восемь классов $\delta_{21}, \dots, \delta_{28}$. Три из класса $\delta_{21}, \delta_{26}, \delta_{27}$ содержат точки с $r = 0$ и имеют поэтому одну связную компоненту, остальные состоят из двух связных компонент. На этом рисунке также введена кривая

ℓ_0 , порожденная возможностью, специфической только для гиростата, а именно, наличием равномерных вращений вокруг вертикали ($r \neq 0$), на которых постоянная площадей все же равна нулю. Это значит, что пара точек, связанных симметрией, попадает на один и тот же уровень всех первых интегралов (но не на одну компоненту связности). При пересечении кривой ℓ_0 тип критических точек не меняется, но, как будет показано ниже, она вызывает перестройку диаграммы Смейла, а также меняет топологию совместного уровня первых интегралов в целом, отражаясь и на топологических инвариантах. Из (1.3.11) найдем, что равенство $\ell = 0$ при $r \neq 0$ влечет $\lambda(r - \lambda) + d = 0$. В соответствии с определением знака d , это возможно лишь на δ_2 , поэтому кривая ℓ_0 определяется условиями

$$\ell_0 : (r - \lambda)^3(r + \lambda) + 4 = 0, \quad r \leq 0. \quad (1.3.33)$$

Здесь уместно еще раз напомнить, что по договоренности $\lambda \geq 0$. Как обозначено на рисунке, подобласти, на которые кривая ℓ_0 разбивает классы δ_{27}, δ_{28} , будем снабжать штрихами.

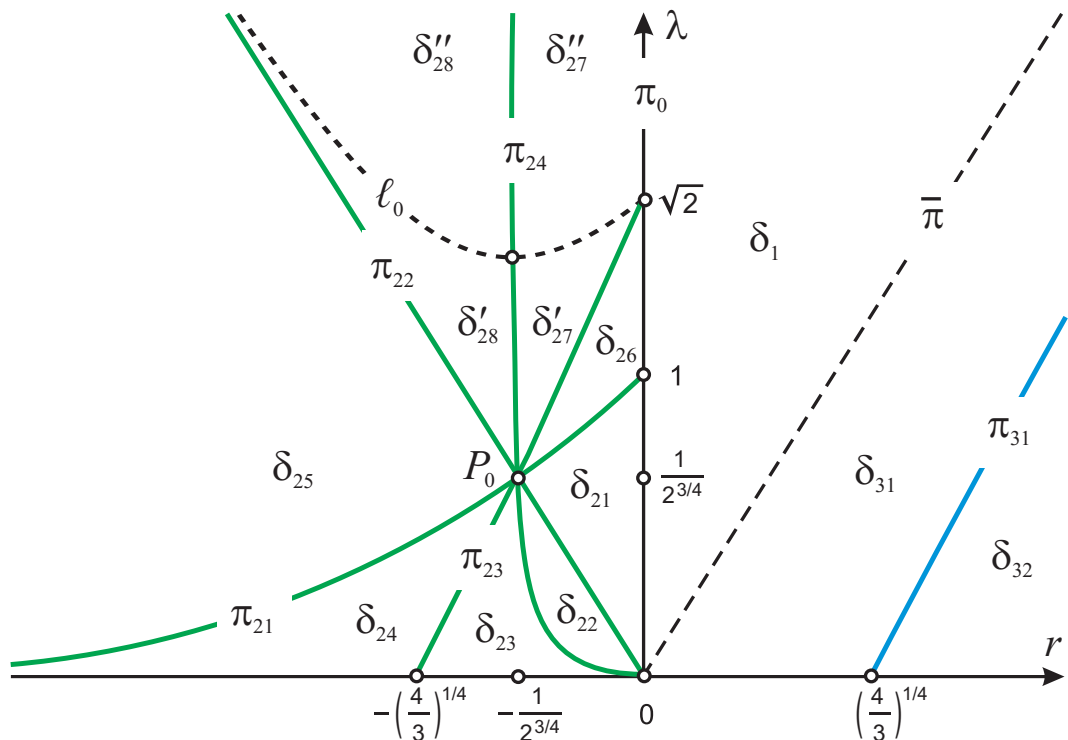


Рис. 1.2. Разделяющее множество и классы критических точек ранга 0

Поскольку все случаи обращения в ноль величин (1.3.27), (1.3.28) аналитически установлены, то их знаки в порожденных подобластях (r, λ) -плоскости приводят к следующей классификации точек ранга 0.

Теорема 5 ([52], [98]). *В расширенном фазовом пространстве $\Lambda(P^5)$ критические точки ранга 0 случая Ковалевской – Яхья имеют следующий тип (указывается в порядке следования пар корней μ_1^2, μ_2^2):*

$\delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{26}$ — “седло-седло”, $\mu_1^2 > 0, \mu_2^2 > 0$, соответствующие относительные равновесия неустойчивы по всем переменным;

δ_{23}, δ_{31} — “седло-центр”, $\mu_1^2 > 0, \mu_2^2 < 0$, относительные равновесия по двум переменным устойчивы, а по двум — неустойчивы;

δ_{27} — “центр-седло”, $\mu_1^2 < 0, \mu_2^2 > 0$, относительные равновесия по двум переменным устойчивы, а по двум — неустойчивы;

$\delta_{24}, \delta_{25}, \delta_{28}, \delta_1, \delta_{32}$ — “центр-центр”, $\mu_1^2 < 0, \mu_2^2 < 0$, соответствующие относительные равновесия устойчивы по всем переменным.

Проведем сравнение классификации относительных равновесий по типам и классификации их в решении И.Н. Гашененко (1.1.2), (1.1.32), (1.1.35) по параметрам (1.1.33). На рис. 1.3 нанесены знаки троек чисел (L_1, L_2, L_3) , а на разделяющих кривых указаны и нулевые значения параметров. Оказалось, что кривая π_{24} на знаки троек не влияет, на кривой π_{21} обращается в ноль L_3 , но в примыкающих к ней областях знаки троек одинаковы. На кривой π_{22} обращаются в ноль два параметра L_2 и

L_3 . В итоге имеем следующее соответствие классам (1.1.36):

- | | | |
|--------|-------------------------------------------|----------|
| (I) | $\delta_{24}, \delta_{25}, \delta_{32};$ | |
| (II) | $\delta'_{27}, \delta'_{28};$ | |
| (III) | $\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{31};$ | |
| (IV) | $\delta_{21}, \delta_{26};$ | |
| (V) | $\delta_1, \delta''_{27}, \delta''_{28};$ | (1.3.34) |
| (VI) | $\ell_0;$ | |
| (VII) | $\pi_{22}, \pi_{23}, \pi_{31};$ | |
| (VIII) | $\pi_{21}, \pi_{22}.$ | |

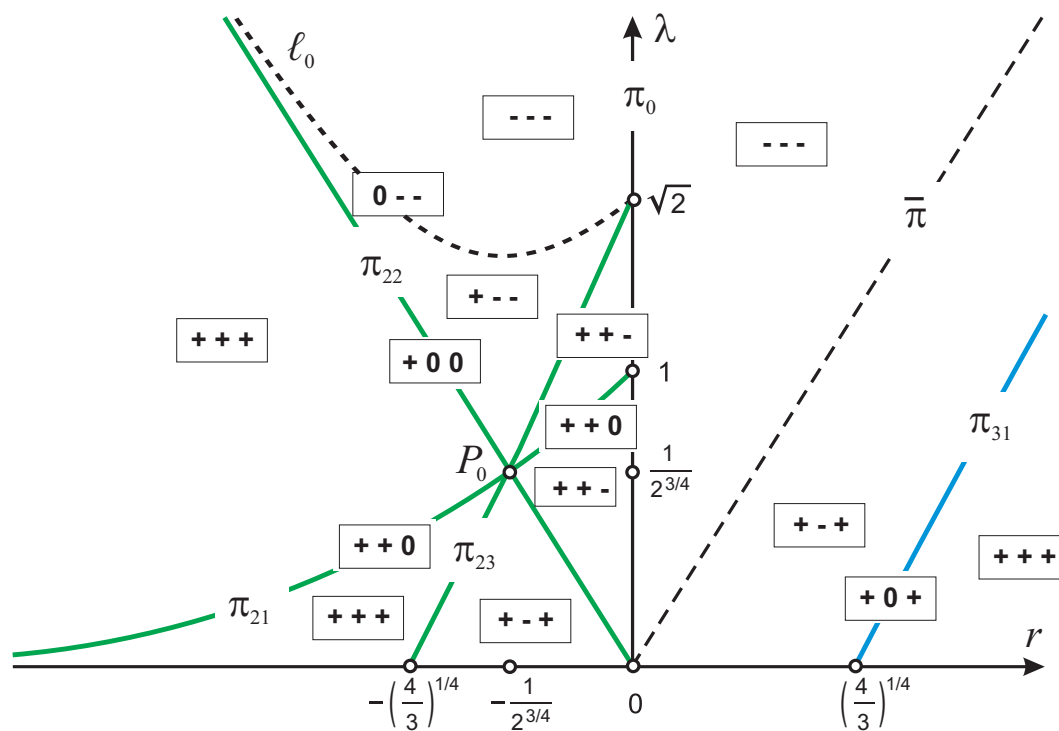


Рис. 1.3. Знаки троек (L_1, L_2, L_3) .

Сформулируем отдельными предложениями важное свойство, которое неявно использовалось в исследованиях автора диссертации и И.Н. Гашененко при классификации бифуркационных диаграмм и грубых инвариантов Фоменко (более подробно и с уточнениями эти вопросы будут обсуждаться ниже). Предложение 4 утверждает, что все особенности ранга 0 имеют сложность 1 (понятие сложности введено в [26]).

Предложение 5 утверждает, что, более того, даже на один уровень первых интегралов при ненулевой постоянной площадей две таких точки попасть не могут. Возможность совпадения в двух разных точках ранга 0 значений всех первых интегралов важна при изучении бифуркационных диаграмм различных отображений момента, возникающих в этой задаче. Удивительно то, что явного и четкого доказательства этих двух предложений так до сих пор нигде и не было предъявлено.

Предложение 4. *При всех значениях первых интегралов связная компонента интегрального многообразия не может содержать более одной критической точки ранга 0.*

Предложение 5. *На один совместный уровень первых интегралов (в разные компоненты) попадают две точки ранга 0, отвечающие кривой ℓ_0 на плоскости (r, λ) . На всех остальных совместных уровнях первых интегралов, содержащих точку ранга 0, такая точка единственна.*

Доказательство. Все точки ранга 0 принадлежат подсистеме M_1 . Фиксируем $\lambda \neq 0$. Согласно (1.1.25), точка ранга 0 однозначно определяется значениями h, p, r , где r – кратный корень многочлена (1.1.26). Если предположить, что кратных корней два, то есть, что $4R(r) = -(r - r_1)^2(r - r_2)^2$, где $r_1 \neq r_2$, то сразу же приходим к несовместной системе

$$r_2 = -r_1, \quad p = 0, \quad r_2^2 = 2h, \quad r_2^4 - 4h^2 + 4 = 0.$$

Итак, при заданных λ, h, p критическая точка ранга 0 единственна (если существует). Теперь фиксируем λ, h и допустим, что одна и та же пара (ℓ, k) определяется разными $p_1 \neq p_2$. Из (1.1.30) получим две возможности. Первая возможность $p_1 = -p_2$ и $h - \lambda^2/2 = p_1^2$ дает $\ell = 0$, и это фигурирующая в утверждении кривая ℓ_0 , в прообразе которой две точки

с одним r , но с противоположными p . Если же $p_1 + p_2 \neq 0$, то получаем систему

$$p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2 = h - \frac{\lambda^2}{2}, \quad p_1^2 + p_2^2 = \frac{1}{6} \left(h - \frac{\lambda^2}{2} \right),$$

которая, очевидно, несовместна. Итак, при наличии кратного корня у $R(r)$, этот корень значениями h, p определен однозначно, а, в свою очередь, эти же значения однозначно определены значениями ℓ, k . Предложение 5 полностью доказано. \square

Заметим, что при $\ell \neq 0$ из этого следует и утверждение предложения 4, а при $\ell = 0$ доказательство предложения 4 из формул приведенного выше решения И.Н. Гашененко получается совсем просто.

Таким образом, в случае Ковалевской – Яхья все точки ранга 0 имеют сложность один.

В работе [101] без доказательства сформулировано более слабое утверждение, в котором изначально отбрасываются случаи, разделяющие в плоскости (ℓ, λ) различные виды бифуркационных диаграмм отображения (1.2.10). Это разделяющее множество Θ_L найдено в работах автора [83, 84, 96]. В [101] неразделяющие значения пары (ℓ, λ) называются *небифуркационными*. Как видно из приведенного доказательства предложения 5, никакого отношения к вопросу о сложности точки ранга 0 бифуркационность пары (ℓ, λ) не имеет.

Уравнения кривых в составе упомянутого разделяющего множества Θ_L из работы автора можно найти, например, в [51]. Это множество классифицирует бифуркационные диаграммы отображений $\mathcal{J}_\ell(\lambda)$. Выясним, с чем оно действительно связано. Вычислим множество $\hat{\Theta}$ — образ в октанте $\{(\ell, \lambda) : \ell \geq 0, \lambda \geq 0\}$ кривых π_{ij} , служащих разделяющими при классификации точек ранга 0, вместе с их предельными точками при $\lambda = 0$. Сохраняя для кривых-образов те же обозначения, что и у кривых-

прообразов, получим:

$$\begin{aligned}
\pi_{21} : \ell &= \frac{1}{2\lambda^{1/3}} \sqrt{1 - \lambda^{4/3}}, & 0 \leq \lambda \leq 1; \\
\pi_{22} : \ell &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2)^{3/2}, & \lambda \geq 0; \\
\pi_{23} : \begin{cases} \ell = \frac{(4 - x^4)^{3/2}}{4x^3}, \\ \lambda = \frac{3x^4 - 4}{2x^3} \end{cases}, & x \in [\sqrt[4]{4/3}, \sqrt{2}]; \\
\pi_{24} : \ell &= \frac{|\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - 2\lambda^{2/3}|}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^{1/2}}, & \lambda \geq 0; \\
\pi_{31} : \begin{cases} \ell = \frac{(4 - x^4)^{3/2}}{4x^3}, \\ \lambda = \frac{3x^4 - 4}{2x^3} \end{cases}, & x \in [-\sqrt[4]{4/3}, 0).
\end{aligned} \tag{1.3.35}$$

Напомним, что кривая $\pi_0 = \{r = 0, \lambda \geq 0\}$ не является разделяющей внутри класса δ_2 в смысле введенного ранее отношения эквивалентности. Следовательно, целиком ее образ $\{\ell = 0, \lambda \geq 0\}$ в разделяющее множество не входит, а входят в Θ_L лишь точки, в которых заканчиваются кривые $\pi_{2j}: \lambda = 0, 1, \sqrt{2}$. Итак, мы видим, что $\Theta_L \setminus \widehat{\Theta}$ состоит из одной кривой $\ell = (4\lambda)^{-1}$, смысл которой будет выявлен ниже. В работе [53] показано, что эта кривая соответствует экстремальному значению интеграла L на семействе вырожденных критических точек ранга 1. Таким образом, подавляющее число перестроек бифуркационных диаграмм отображений $\mathcal{J}_\ell(\lambda)$ происходит в случаях, когда в приведенной системе имеется *вырожденная* критическая точка ранга 0, а множество Θ_L бифуркационных пар (ℓ, λ) — это, за исключением одной кривой, образ вырожденных точек ранга 0, и множество Θ_L никак не связано с возможностью попадания нескольких критических точек ранга 0 на один интегральный уровень.

1.3.3. Диаграммы Смейла и изоэнергетические поверхности

В задаче Ковалевской ($\lambda = 0$) бифуркационную диаграмму интегралов энергии и площадей построил А. Якоб [102]. Он же с помощью конструкции Смейла (приведенное расслоение единичных сфер над областью возможности движения) определил топологический тип изоэнергетических многообразий – трехмерных уровней “приведенного гамильтониана” (1.3.2)

$$Q_{\ell,h}^3 = \{\zeta \in P_\ell^4 : H_\ell(\zeta) = h\}. \quad (1.3.36)$$

Диаграмма отображения

$$L \times H : P^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

(обозначим ее S_{LH}) в этом случае состоит из двух парабол

$$\delta_1^0 : h = -1 + \ell^2, \quad \delta_2^0 : h = 1 + \ell^2$$

и пары симметричных относительно оси Oh кривых, которые удобно записать в параметрической форме

$$\delta_3^0 : \ell = \frac{x^2 + 4}{4\sqrt{2x}}, \quad h = \frac{3x}{4} + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 2]. \quad (1.3.37)$$

Эти значения достигаются на относительных равновесиях, фазовые координаты которых

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\sqrt{\frac{x}{2}}, & \omega_2 &= 0, & \omega_3 &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{x}} \\ \alpha_1 &= -\frac{x}{2}, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Здесь радикалы \sqrt{x} , $\sqrt{4-x^2}$ – алгебраические. Кривые (1.3.37) касаются верхней параболы в точках $(\pm 1, 2)$ и трансверсально ее пересекают в точках

$$\left(\pm \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}, 2\sqrt{2}-1 \right).$$

Точки возврата имеют координаты $(\pm 2/3^{3/4}, \sqrt{3})$, достигаются при $x^2 = 4/3$. Отметим, что при этом $\omega_3^4 = 4/3$.

Изоэнергетические поверхности пусты в области $h < -1 + \ell^2$. Для остальных областей, на которые S_{LH} делит плоскость Olh , они диффеоморфны (см. рис. 1.4) следующим многообразиям

$$S^3, K^3 = (S^2 \times S^1) \# (S^2 \times S^1), S^2 \times S^1, \mathbb{R}P^3. \quad (1.3.38)$$

Гладкий тип $Q_{\ell,h}^3$ в любой точке (ℓ, h) можно определить, зная индекс Морса функции H_ℓ в ее критических точках, лежащих в прообразах бифуркационных кривых, и приходя в точку (ℓ, h) вдоль вертикальной прямой из достаточно низко лежащей точки с заведомо недопустимым значением h (то есть из такой точки, где $Q_{\ell,h}^3 = \emptyset$).

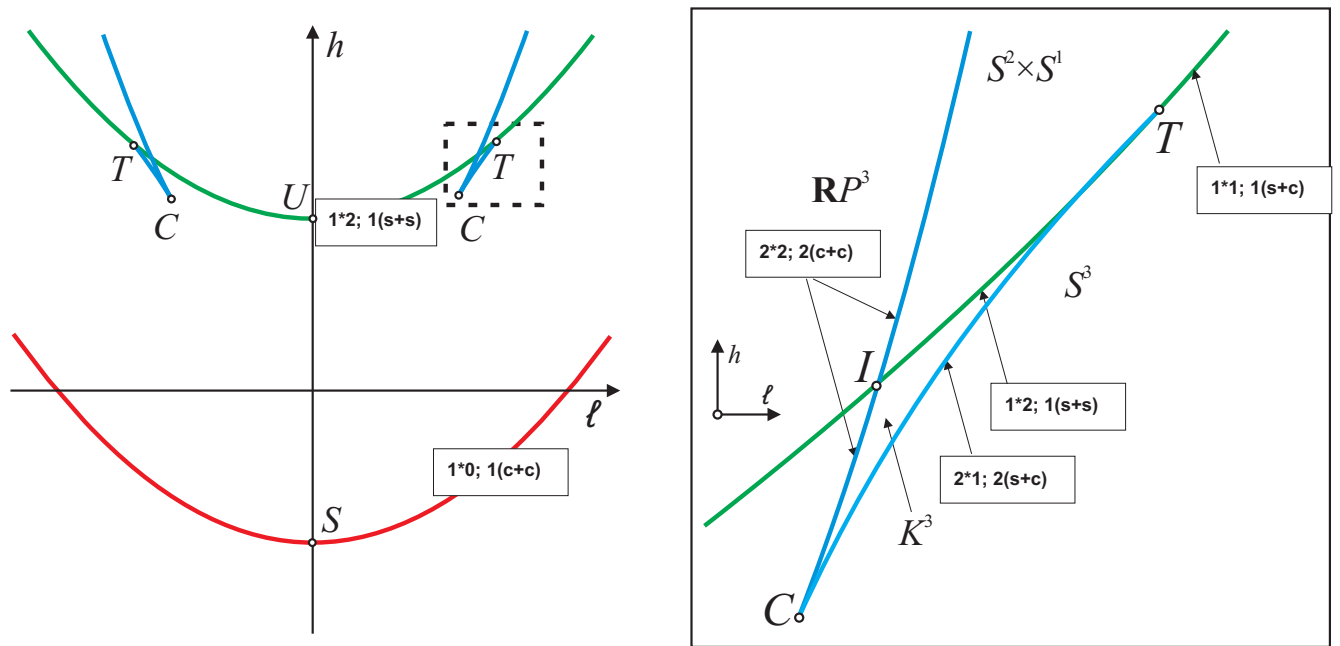


Рис. 1.4. Диаграмма Смейла классической задачи.

Рассмотрим, что получается в классической задаче (конечно, эти результаты известны [26, 103–105], но явные вычисления индексов никогда не предъявлялись). Характеристические многочлены оператора

\mathfrak{a}_H получим предельным переходом из (1.3.26)

$$\delta_1^0 : \chi_H(\mu) = \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \right) [\mu^2 + (1 + \ell^2)],$$

$$\delta_2^0 : \chi_H(\mu) = \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) [\mu^2 - (1 - \ell^2)],$$

$$\delta_3^0 : \chi_H(\mu) = (\mu^2 + r^2) \left[\mu^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{4 + r^4} - 2r^2) \right].$$

Поэтому на нижней параболе все критические точки ранга 0 в прообразе имеют тип “центр-центр”, на верхней параболе – тип “седло-седло” на ограниченном отрезке между двумя симметричными друг другу относительно оси Oh точками T касания с третьей кривой (в частности, вращения с центром масс в наивысшем положении при $|\ell| < 1$ неустойчивы по всем переменным) и тип “седло-центр” на неограниченных участках за пределами точек касания (вращения с центром масс в наивысшем положении при $|\ell| > 1$ по части переменных устойчивы). В прообразе каждой точки парабол такая критическая точка одна. На кривых (1.3.37) имеем в прообразе по две точки типа “седло-центр” при $r^4 < 4/3$ (на ограниченных участках между точками возврата C и касания T) и по две точки типа “центр-центр” при $r^4 > 4/3$ (на неограниченных участках от точек возврата в бесконечность). Проход по гладкой ветви через точку трансверсального пересечения I на тип не влияет.

В силу механического характера гамильтониана H_ℓ его индекс Морса равен индексу Морса “эффективного потенциала” – функции на сфере Пуассона, субуровни которой есть области возможности движения (ОВД). Эффективный потенциал для случая Ковалевской – Яхья, вычисленный по схеме Смейла, имеет вид

$$U_{\ell,\lambda} = -\alpha_1 + \frac{(2\ell - \lambda\alpha_3)^2}{2[2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_3^2]}.$$

Для вычисления индекса Морса ограничения функции трех переменных $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на сферу Пуассона (1.1.3) не вводя локальных координат, применим следующее утверждение.

Лемма 2. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\Xi = \alpha \times \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (1.3.39)$$

порождающий вторую группу уравнений (1.3.3). Пусть $\alpha_0 \in S^2 = \{\alpha : |\alpha| = 1\}$ – невырожденная в смысле Морса критическая точка ограничения функции $f(\alpha)$ на S^2 . Индекс Морса функции f в точке α_0 равен количеству отрицательных корней многочлена

$$\xi_f(\mu) = \frac{1}{\mu} \det[(\Xi^2 f)(\alpha_0) - \mu E].$$

Применяя к функции $U_{\ell,0}$, получим

$$\delta_1^0 : \xi_H(\mu) = (\mu - 1)[\mu - (\ell^2 + 1)],$$

$$\delta_2^0 : \xi_H(\mu) = (\mu + 1)[\mu - (\ell^2 - 1)],$$

$$\delta_3^0 : \xi_H(\mu) = \left[\mu + \frac{1}{2}(\sqrt{4 + r^4} + r^2) \right] \left[\mu - \frac{r}{\sqrt{4 + r^4}}(\sqrt{4 + r^4} - 2r^2) \right].$$

Расстановку индексов Морса и типов вдоль бифуркационных кривых получим как показано на рис. 1.4. Здесь обозначение $n * m$ означает, что в прообразе лежит n точек индекса m , обозначения $c + c, s + c, s + s$ указывают тип точки (“центр-центр”, “седло-центр”, “седло-седло”).

Известно, что при пересечении значением h критического значения происходят следующие перестройки ОВД (проекция уровня энергии на конфигурационное пространство): индекс 0 – добавление диска D^2 , индекс 1 – приклейка ручки (из одного диска делает диск с дыркой, то есть кольцо, а из двух дисков может сделать один), индекс 2 – заклейка дырки диском.

Проведем на плоскости $\mathbb{R}^2(\ell, h)$ вертикальную прямую $\ell = \text{const}$ между точками I и T . Вдоль нее гамильтониан и эффективный потенциал имеют критические значения

$$h_1 = -1 + \ell^2 < h_2 < h_3 = 1 + \ell^2 < h_4$$

с количеством критических точек в прообразе соответственно 1, 2, 1, 2 с индексами 0, 1, 2, 2. В соответствии с этим ОВД на сфере таковы: диск, диск с двумя дырками (сфера с тремя дырками), кольцо (сфера с двумя дырками), сфера. Приведенные расслоения единичных окружностей над ними дают соответственно многообразия (1.3.38).

В общем случае вычисления при $\lambda > 0$ дают следующие показатели Морса.

Теорема 6. *Корни характеристического многочлена $\xi_H(\mu)$ в критических точках (1.3.8) в обозначениях предложения 2 таковы*

$$\mu_1 = -\frac{1}{2} [r(r - \lambda) + d],$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2(r - \lambda)d} [(2r - \lambda)(r - \lambda) - d] [(2r - \lambda)(r - \lambda)r + \lambda d].$$

В частности, знак μ_1 всегда противоположен знаку d , поэтому μ_1 положительно в области δ_1 и отрицательно в областях δ_2, δ_3 . Знак μ_2 определяется расположением точки (r, λ) относительно разделяющих кривых $\bar{\pi}, \pi_0, \pi_{23}, \pi_{24}, \pi_{31}$. В итоге, индекс Морса эффективного потенциала $U_{\ell, \lambda}$ и гамильтониана $H_{\ell, \lambda}$ равен

0 в области δ_1 ,

1 в областях $\delta_{23}, \delta_{27}, \delta_{31}$,

2 в областях $\delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{24}, \delta_{25}, \delta_{26}, \delta_{28}, \delta_{32}$.

На рис. 1.5 приведены пары показателей Морса, а также показана некоторая информация (о которой будет сказано ниже), необходимая для анализа видоизменений диаграммы Смейла при ненулевых λ .

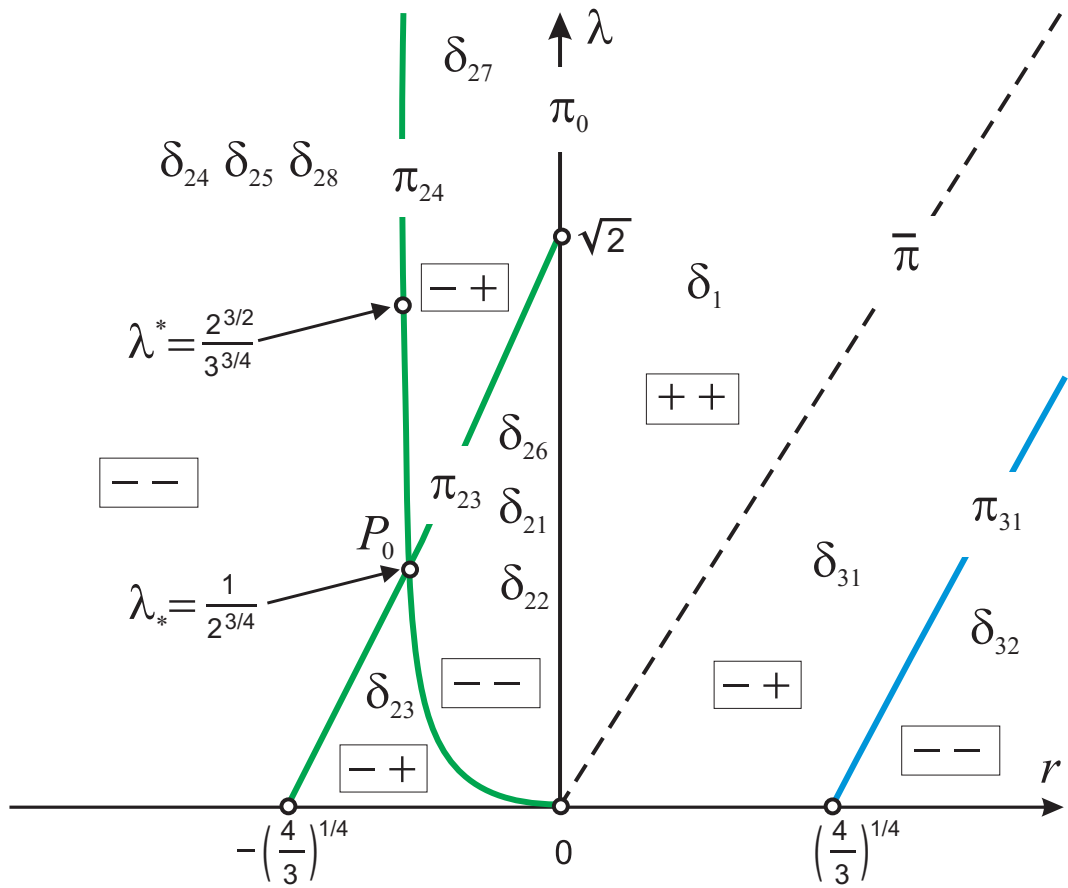


Рис. 1.5. Показатели Морса эффективного потенциала.

Замечание 6. На рисунке впервые появились обозначения двух ключевых значений параметра λ :

$$\lambda_* = 1/2^{3/4}, \quad \lambda^* = (4/3)^{3/4}. \quad (1.3.40)$$

Первое из них есть ордината узловой точки P_0 , где собирается несколько разделяющих кривых. Второе значение – это минимум λ на кривой ℓ_0 , заданной уравнением (1.3.33). Эти важные величины будут постоянно встречаться в дальнейшем, о чем мы будем иногда напоминать.

Эволюция диаграмм Смейла такова. При возмущении λ от нулевого значения кривая δ_1^0 трансформируется в δ_1 , перестает быть параболой, но никаких особых точек на ней не возникает. Каждая связная часть кривой δ_3^0 , за точками которой стоит по две критических точки, расщепляется, а один из отрезков, полученных из ограниченного участка, объединяется с ветвью кривой δ_2^0 выше точки T . Возникает δ_3 , у которой

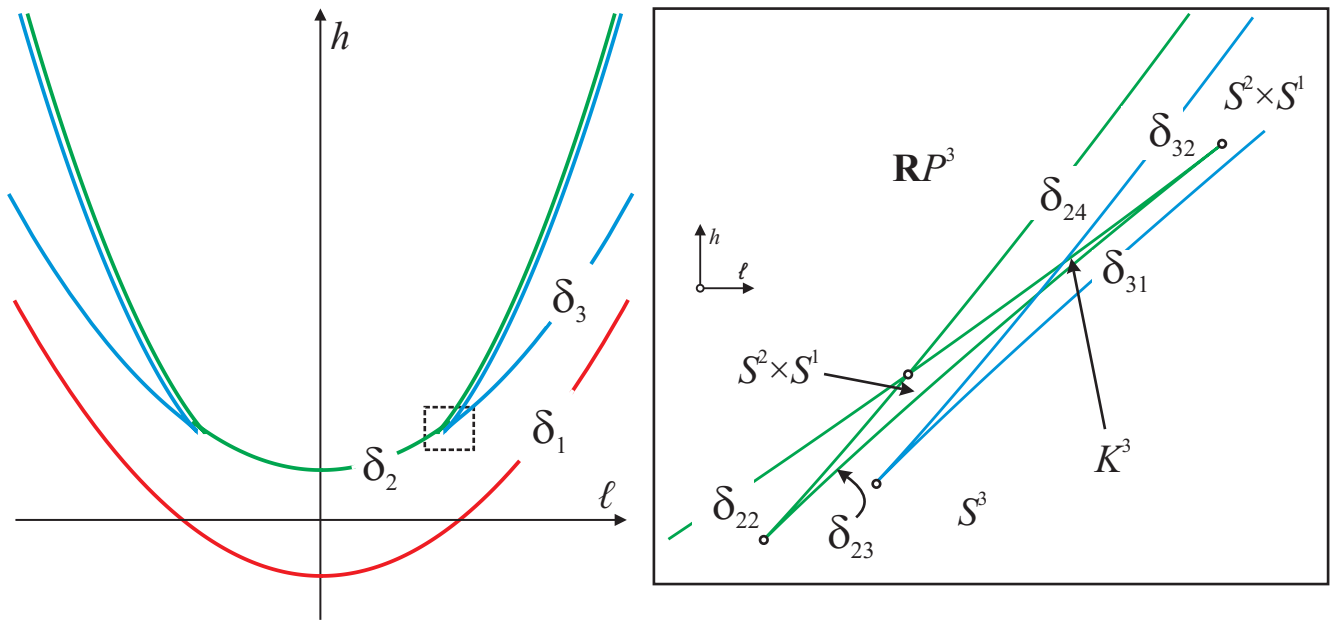


Рис. 1.6. Диаграмма \mathcal{S}_{LH} при малых λ .

каждая из симметричных относительно Oh компонент состоит из двух бесконечных ветвей, сходящихся в точке возврата, возмущенной из C . Из второй части δ_3^0 и кривой δ_2^0 склеивается кривая δ_2 , треугольник CTI порождает на ней ласточкин хвост. С учетом уже известных индексов Морса получаем картину, показанную на рис. 1.6. Этот тип диаграммы сохраняется при всех $\lambda \in (0, \lambda_1)$, где λ_1 такое значение параметра, при котором самая правая точка возврата на кривой δ_2 (отвечающая разделяющей кривой π_{24}) попадает на кривую δ_3 . Ранее существование такого значения было предсказано на основе численного моделирования [83, 84, 96], но вычислить его аналитически не удавалось. Современные системы аналитических вычислений (САВ) позволяют это сделать. Запишем систему уравнений, исходя из (1.3.11), (1.3.32) (необходимо выбрать знак $d > 0$):

$$\ell(r, \lambda) = \ell(r_0, \lambda), \quad h(r, \lambda) = h(r_0, \lambda), \quad r_0 = \frac{1}{2} \left(\lambda - \lambda^{1/3} \sqrt{4 + \lambda^{4/3}} \right). \quad (1.3.41)$$

Заметим, что она описывает не только все возможные случаи попадания точки π_{24} на кривую δ_3 , но и гипотетическую возможность ее попадания на другую ветвь кривой δ_2 . Исключим из этой системы r_0, r , пола-

гая $r_0 \neq r$. Последовательность действий такова. Избавляемся в первых двух уравнениях от радикала d , подставляем r_0 и делаем замену $U = \lambda^{1/3}$. Два полученных уравнения сокращаются на $(2r - U^3 + U\sqrt{4 + U^4})^2$ (что соответствует $r = r_0$). Приходим к системе

$$\begin{aligned} p_{13}(U, r) + (U^3 - r)p_8(U, r)\sqrt{4 + U^4} &= 0, \\ p_{25}(U, r) + (U^3 - r)p_{20}(U, r)\sqrt{4 + U^4} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.42)$$

где $p_i(U, r)$ — многочлен степени i по U . Вычисляем результат левых частей по r в подстановке $X = (U^2 + \sqrt{4 + U^4})^2$, что соответствует замене

$$X = (\lambda^{2/3} + \sqrt{4 + \lambda^{4/3}})^2. \quad (1.3.43)$$

Получим уравнение

$$(X - 8)^2(X^2 - 16)^4(X + 4)^2P_1(X)P_2(X) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= X^4 - 24X^3 + 720X^2 - 2048X - 3072, \\ P_2 &= 4X^{15} - 293X^{14} + 7864X^{13} - 70320X^{12} \\ &\quad - 831232X^{11} + 26316032X^{10} - 263235584X^9 + 1223192576X^8 \\ &\quad - 2241200128X^7 + 323747840X^6 + 1465909248X^5 - 16521363456X^4 \\ &\quad - 25736249344X^3 - 74155294720X^2 - 75161927680X - 17179869184. \end{aligned}$$

При вытекающем из (1.3.43) очевидном условии $X \geq 4$ уравнение $P_2(X) = 0$ имеет единственный вещественный корень $X \approx 11.2707$, при котором $\lambda \approx 1.1268$ и единственный общий вещественный корень уравнений (1.3.42) $r \approx 0.002089 \in (0, \lambda)$, то есть не дает точек из $\delta_{2,3}$. Если же предположить, что получена точка на δ_1 , то необходимо выбрать в уравнениях (1.3.41) знак $d < 0$, но тогда найденные значения (r, λ) этим уравнениям не удовлетворяют. Итак, все корни $P_2(X)$ — посторонние.

Условие $X = 8$ приводит к разделяющему значению $\lambda_* = 1/2^{3/4}$, при котором происходит слияние обеих точек возврата и точки самопересечения кривой δ_2 . Уравнение $P_1(X) = 0$ имеет единственный допустимый корень $X \approx 4.3418$, при котором $\lambda \approx 0,02349$ и единственный общий вещественный корень уравнений (1.3.42) $r \approx 1.47328 \in (\lambda, +\infty)$. Поэтому такое значение λ отвечает искомому случаю $\pi_{24} \in \delta_3$. Попутно доказано, что точка возврата π_{24} не может попасть на другую ветвь δ_3 . Найденное разделяющее значение λ обозначим через $\lambda_1 \approx 0.0235$ и выпишем точно

$$\lambda_1 = \left(-\frac{7}{6} - \frac{1}{12}p_2 + \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{205}{9} + \frac{3823}{4}p_1^{-1/3} - \frac{1}{4}p_1^{1/3} + \frac{16393}{9p_2}} \right)^{3/4}, \quad (1.3.44)$$

$$p_1 = 1045767 + 183872\sqrt{34}, \quad p_2 = \sqrt{-410 - 34407p_1^{-1/3} + 9p_1^{1/3}}.$$

При $\lambda > \lambda_1$ кривые δ_2, δ_3 более общих точек не имеют (фрагмент показан на рис. 1.7). В частности, исчезает область (суперпозиция “угла” δ_3 и “хвоста” кривой δ_2), в которой $Q_{\ell,h}^3 = K^3$.

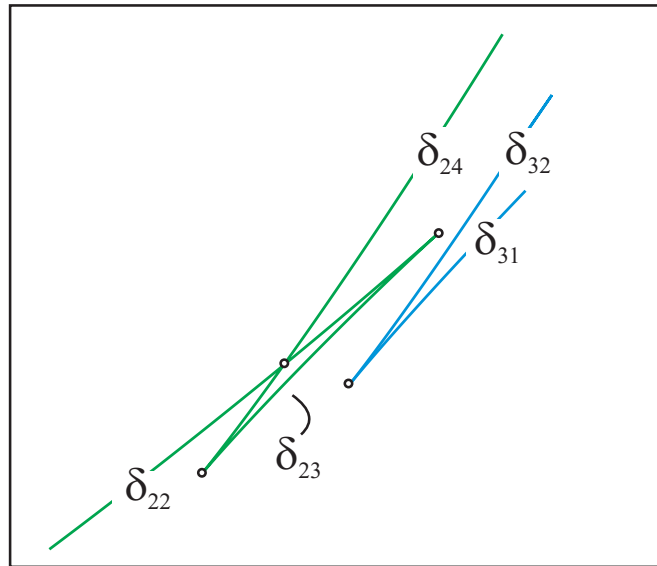


Рис. 1.7. Фрагмент диаграммы \mathcal{S}_{LH} при $\lambda > \lambda_1$

Дальнейшие перестройки диаграммы Смейла связаны только с эволюцией кривой δ_2 . При этом вырожденные критические точки ранга 0, порождающие разделяющие кривые π_{21}, π_{22} , собственно на диаграмму не влияют, так как лежат на ее гладких участках. При переходе через λ_*

меняются местами “кончики хвоста” (см. рис. 1.8), что легко заметить, если провести на рис. 1.5 горизонтальную прямую ($\lambda = \text{const}$) и двигать ее вверх.

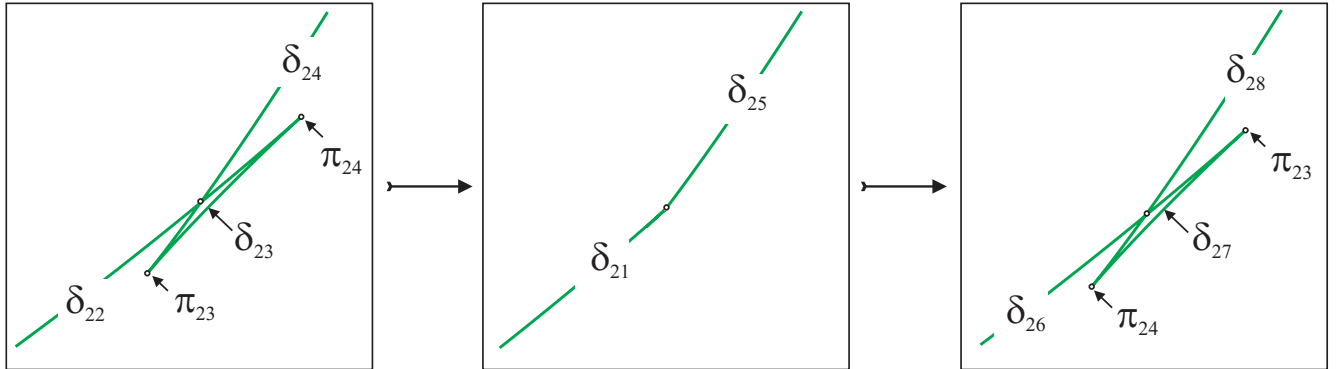


Рис. 1.8. Переход через λ_*

Изучим возможность попадания точки возврата π_{23} на другую ветвь кривой δ_2 . Для этого случая из (1.3.30) запишем систему

$$\begin{aligned} \ell(r, \lambda) &= \ell(r_0, \lambda), & h(r, \lambda) &= h(r_0, \lambda), \\ r_0 &= \frac{x^4 - 4}{2x^3}, & \lambda &= \frac{3x^4 - 4}{2x^3}, & x^4 - 2rx^3 - 4 &\neq 0, & x &\in \left(\sqrt[4]{4/3}, \sqrt{2} \right]. \end{aligned}$$

Исключая из нее r_0, r, λ , придем к уравнению для $X = x^4$

$$(X - 2)^2 Q_1(X) Q_2(X) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= 3X^4 + 32X^3 - 180X^2 + 96X - 64, \\ Q_2 &= 6903X^{11} - 153216X^{10} + 1489200X^9 - 9324352X^8 \\ &\quad + 44169408X^7 - 160186880X^6 + 425104384X^5 - 806682624X^4 \\ &\quad + 1108361216X^3 - 1120534528X^2 + 784072704X - 285212672. \end{aligned}$$

Уравнение $Q_2(X) = 0$ в промежутке $X \in (4/3, 4]$ корней не имеет, а уравнение $Q_1(X) = 0$ имеет в этом промежутке ровно один корень:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{308 + \frac{435}{q_1} + 3q_1 + \frac{3400}{q_2}} - q_2 - 8 \right), \\ q_1 &= (2951 - 408\sqrt{34})^{1/3}, & q_2 &= \left(154 - \frac{435}{q_1} - 3q_1 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Соответственно, в терминах λ имеем уравнение

$$64\lambda^{16} + 2784\lambda^{12} - 274803\lambda^8 + 15476896\lambda^4 - 45349632 = 0$$

с единственным вещественным решением $\lambda_2 \approx 1.3263$. Его точное значение в радикалах

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \left(-\frac{87}{8} - \frac{1}{16}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \right)^{1/4}, \\ p_1 &= 10467417865895 + 1809781698048\sqrt{34}, \\ p_2 &= \sqrt{213478 - 1093516839p_1^{-1/3} + 9p_1^{1/3}}, \\ p_3 &= \sqrt{\frac{106739}{16} + \frac{1093516839}{64}p_1^{-1/3} - \frac{9}{64}p_1^{1/3} + \frac{88449457}{16p_2}}. \end{aligned} \tag{1.3.45}$$

Остальные изменения связаны с осью Oh [96]. Константа ℓ обращается в нуль не только в положениях равновесия тела ($r = 0$), но и при вытекающем из (1.3.11) условии (1.3.33). Соответствующая кривая, ранее обозначенная через ℓ_0 , показана на рис. 1.2. Минимум λ на этой кривой равен $\lambda^* = (4/3)^{3/4}$. Поэтому кроме всегда существующих точек $h = \pm 1, \ell = 0$ диаграмма имеет еще две точки пересечения с осью Oh при $\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$ и одну точку при $\lambda > \sqrt{2}$. Весь этот набор точек на оси Oh перестраивается в момент совпадения двух из них. Легко посчитать, что это происходит при $\lambda = 2\sqrt{\sqrt{2} - 1} \approx 1.2872 \in (\lambda^*, \sqrt{2})$. Таким образом, имеем типы диаграмм, существенные фрагменты которых показаны на рис. 1.9: a) $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$; b) $\lambda^* < \lambda < 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}$; c) $2\sqrt{\sqrt{2} - 1} < \lambda < \lambda_2$; d) $\lambda_2 < \lambda < \sqrt{2}$; e) $\lambda > \sqrt{2}$. С учетом вычисленных выше индексов Морса имеем указанную на этом же рисунке расстановку изоэнергетических многообразий.

Распространим на все фазовое пространство симметрию (1.3.17)

$$\text{symm} : (\omega_1, \omega_2, \alpha_3) \mapsto (-\omega_1, -\omega_2, -\alpha_3). \tag{1.3.46}$$

Она устанавливает изоморфизм фазовых потоков на $Q_{\ell,h}^3$ и $Q_{-\ell,h}^3$. Напомним, что в соответствии с договоренностью (1.3.19), в пространстве

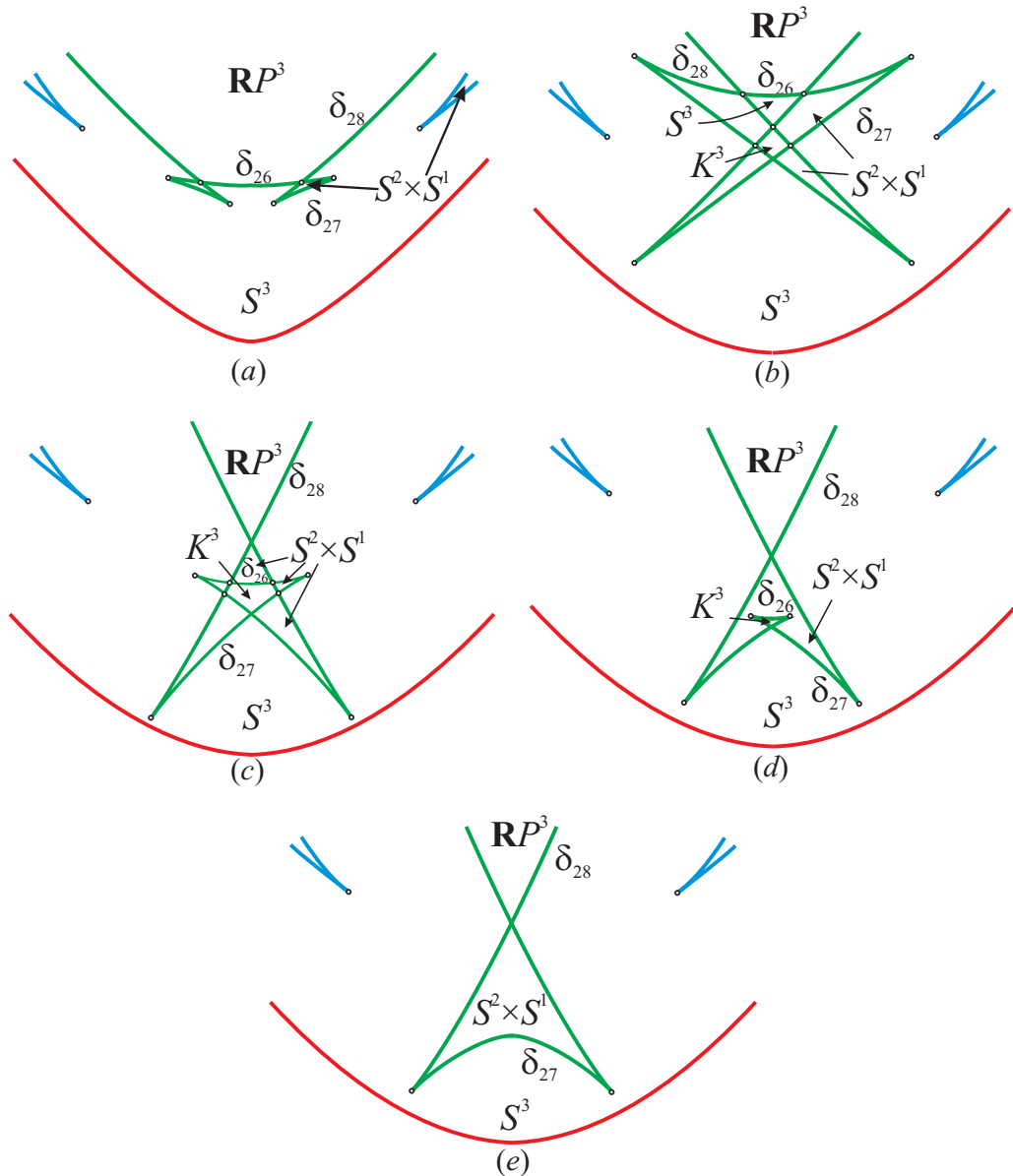


Рис. 1.9. Перестройки \mathcal{S}_{LH} на оси Oh .

$\Lambda(\mathbb{R}^2(\ell, h)) = \mathbb{R}^3(\ell, h, \lambda)$ возникает расширенная диаграмма Смейла

$$\Lambda(\mathcal{S}_{LH}) = \bigcup_{\lambda} \mathcal{S}_{LH}(\lambda) \times \{\lambda\}.$$

Она делит $\mathbb{R}^3(\ell, h, \lambda)$ на открытые связные компоненты, которые принято называть *камерами*. В силу симметрии sum объявим одной камерой также и объединение двух компонент, симметричных относительно плоскости $\ell = 0$. Получим следующее утверждение.

Теорема 7. *В случае Ковалевской–Яхья имеется семь структурно устойчивых по параметру λ диаграмм Смейла $\mathcal{S}_{LH}(\lambda)$. Разделяющими*

значениями параметра λ служат

$$0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_* = 1/2^{3/4}, \quad \lambda^* = (4/3)^{3/4}, \quad 2\sqrt{\sqrt{2}-1}, \quad \lambda_2, \quad \sqrt{2},$$

где λ_1, λ_2 определены равенствами (1.3.44), (1.3.45). Расширенная диаграмма $\Lambda(\mathcal{S}_{LH})$ делит пространство $\mathbb{R}^3(\ell, h, \lambda)$ на восемь камер $\mathbb{A}, \dots, \mathbb{H}$ с непустыми многообразиями $Q_{\ell, h}^3(\lambda)$. Соответствующая информация представлена на рис. 1.10) и в табл. 1.3.1.

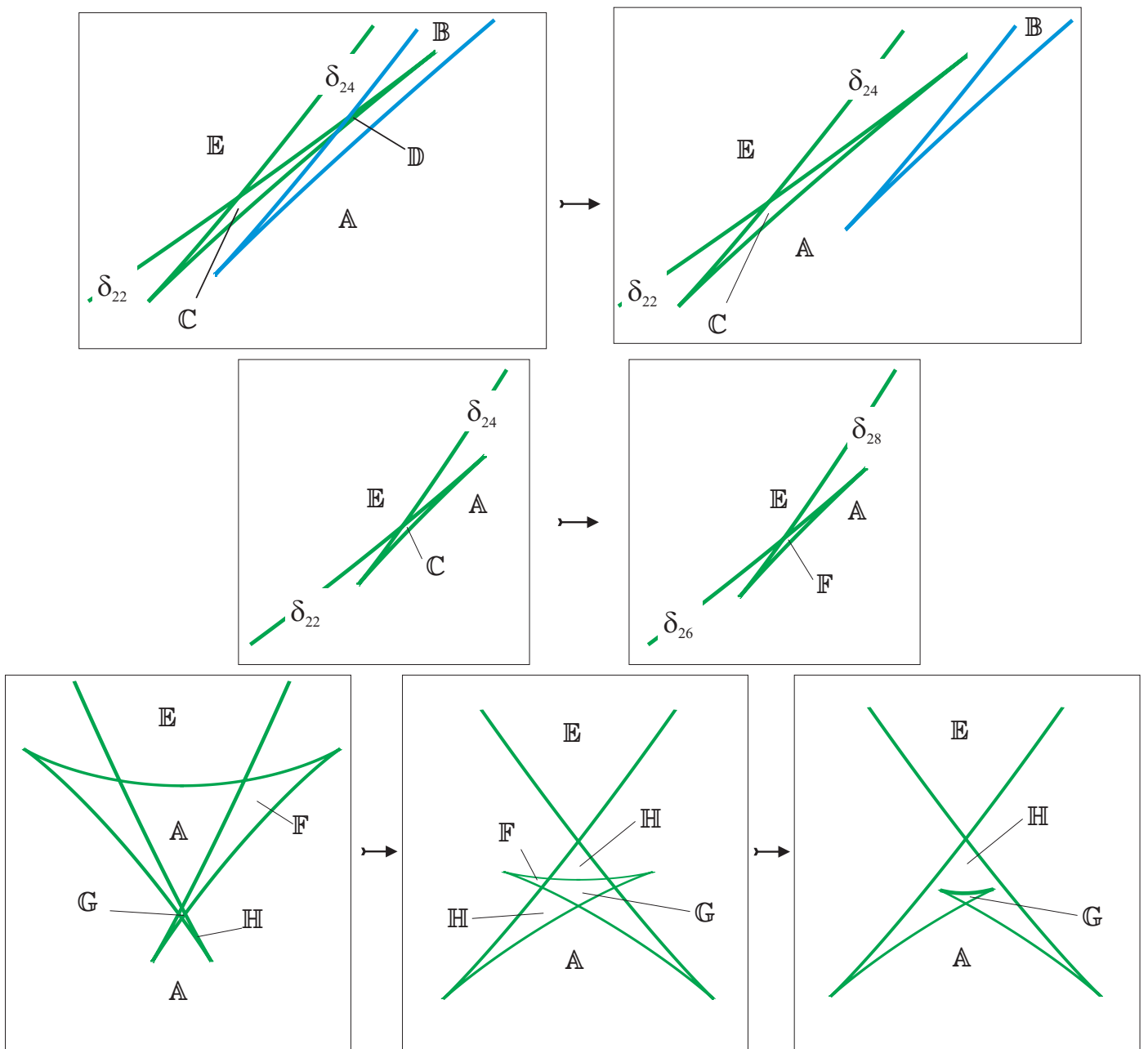


Рис. 1.10. Камеры диаграмм Смейла

Таблица 1.3.1

Код камеры	Время жизни по λ	Компонент в камере	$Q_{\ell,h}^3$
A	$\lambda \in [0, +\infty)$	1	S^3
B	$\lambda \in [0, +\infty)$	2	$S^2 \times S^1$
C	$\lambda \in (0, \lambda_*)$	2	$S^2 \times S^1$
D	$\lambda \in [0, \lambda_1)$	2	K^3
E	$\lambda \in [0, +\infty)$	1	$\mathbb{R}P^3$
F	$\lambda \in (\lambda_*, \lambda_2)$	2	$S^2 \times S^1$
G	$\lambda \in (\lambda^*, \sqrt{2})$	1	K^3
H	$\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$	2	$S^2 \times S^1$

Перейдем к изучению критических точек общего положения, имеющих в системе с двумя степенями свободы ранг 1.

1.4. Классификация критических точек ранга 1

1.4.1. Формулы для вычисления типа

Изучим тип критических точек ранга 1 в первой критической подсистеме, то есть точек множества $\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{C}^0$.

Предложение 6 (П.Е. Рябов [52]). *Тип критических точек ранга 1 в первой критической подсистеме полностью определен собственными числами симплектического оператора \mathfrak{a}_{F_1} , где*

$$F_1 = K - 2\nu H, \quad (1.4.1)$$

а неопределенный множитель в соответствующей точке равен $\nu = p^2$.

Характеристический многочлен оператора \mathfrak{a}_F имеет вид

$$\chi_{F_1}(\mu) = \mu^2 - 4C_1, \quad C_1 = \left[\frac{3}{2}s - \left(h - \frac{\lambda^2}{2} \right) \right] \left[2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2} \right)s + 1 \right].$$

Точки ранга 1 вырождены тогда и только тогда, когда

$$\left[\frac{3}{2}s - \left(h - \frac{\lambda^2}{2} \right) \right] \left[2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2} \right)s + 1 \right] = 0, \quad (1.4.2)$$

и имеют тип “центр” при $C_1 < 0$ и тип “седло” при $C_1 > 0$.

Доказательство. В координатах (ω, α) порожденное функцией F_1 гамильтоново поле в точках (1.1.25) имеет вид

$$\text{sgrad } F_1 = 2(p^2 - \nu) \left\{ 0, 0, \sqrt{R(r)}, r\sqrt{R(r)}, -\frac{1}{2}R'(r), -p \right\}$$

и обращается в нуль при $\nu = p^2$. Отметим, что при других значениях ν условие $\text{sgrad } F_1 = 0$ влечет одновременное обращение в нуль $R(r), R'(r)$, что приводит к неподвижным точкам – критическим точкам ранга 0.

Напомним, что согласно (1.2.13)

$$s = h - \frac{\lambda^2}{2} - p^2.$$

Вычисление многочлена $\chi_{F_1}(\mu)$ в силу уравнений (1.1.25) многообразия \mathcal{M}_1 труда не составляет. Таким образом, если $C_1 \neq 0$, то критические точки ранга 1 невырождены. Пусть $C_1 = 0$. Допустим, что в такой точке существует другая комбинация $G = \nu_1 K - 2\nu_2 H$, удовлетворяющая равенству $\text{sgrad } G = 0$. В силу предположения $\text{rank}\{K, H\}|_{P_\ell^4} = 1$ имеем пропорциональность неопределенных множителей в комбинациях

$$dF = dK - 2\nu dH|_{P_\ell^4} = 0, \quad dG = \nu_1 dK - 2\nu_2 dH|_{P_\ell^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \nu_1 \nu.$$

Отсюда следует, что $\nu_1 \neq 0$, то есть характеристические числа оператора α_G пропорциональны (нулевым) характеристическим числам оператора α_{F_1} и потому также равны нулю. Следовательно, в точках (1.4.2) не существует интеграла, порождающего регулярный элемент в алгебре симплектических операторов. \square

Отметим, что доказательство предложено потому, что здесь нельзя было воспользоваться непосредственно результатами работы [88], где

для построения системы \mathcal{M}_1 использовалась функция (1.2.16). Для нее корни характеристического многочлена обращаются в нуль также и на множестве $s = 0$, что влечет равенство $\ell = 0$. Появление такой “посторонней” особенности связано с тем, что в [88] фигурировал интеграл Реймана – Семенова-Тян-Шанского, вырождающийся в нашем случае в L^2 .

Предложение 7 (П.Е. Рябов [52]). *Тип критических точек ранга 1 во второй и третьей критических подсистемах полностью определен собственными числами симплектического оператора α_{F_2} , где*

$$F_2 = K + (2\lambda^2 - \frac{1}{s})H, \quad (1.4.3)$$

а s – значение, определяющее точку (1.1.28). Характеристический многочлен оператора α_{F_2} имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_{F_2}(\mu) &= \mu^2 - C_2, \\ C_2 &= -\frac{1}{s^3} (8\lambda^2 s^3 - 1) \left[2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + 1 \right] = \\ &= \frac{2}{s^2} (8\lambda^2 s^3 - 1)(2\lambda^2 s^2 - s + 2\ell^2). \end{aligned}$$

Точки ранга 1 в \mathcal{M}_2 все невырождены и имеют тип “центр”. Точки ранга 1 в \mathcal{M}_3 вырождены тогда и только тогда, когда

$$(8\lambda^2 s^3 - 1) \left[2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + 1 \right] = 0,$$

и имеют тип “центр” при $C_2 < 0$ и тип “седло” при $C_2 > 0$.

Доказательство. Полагая $F_2 = K + \nu H$, найдем из (1.1.27), (1.1.28):

$$\text{sgrad } F_2 = (2\lambda^2 s - 1 - \nu s) \left\{ \frac{\mathcal{G}\kappa\rho X}{\sqrt{s}}, -\frac{\rho n_1}{2\kappa s}, \frac{2\mathcal{G}\kappa Y}{\sqrt{s}}, \frac{\mathcal{G}(n_1 + 2\kappa^3 XY)}{\kappa\sqrt{s}}, \frac{n_2}{s^2}, \frac{\mathcal{G}(\lambda\rho s X + \ell Y)}{\sqrt{s}\kappa} \right\},$$

где

$$n_1 = -\ell\rho X + \lambda s Y + 2\kappa^3 XY, \quad n_2 = \kappa X + sXY(3\ell\rho - 4\kappa^3 Y) + \lambda s^2(2 - 3Y^2).$$

В предположении $2\lambda^2 s - 1 - \nu s \neq 0$ этот вектор обращается в нуль лишь при условии

$$\begin{aligned} &64\ell^6\lambda^2s^4 + 4\ell^4s^2(-1 + 20\lambda^2s - 4\lambda^4s^2 + 48\lambda^4s^4) \\ &-4\ell^2s(1 - 8\lambda^2s + 4\lambda^4s^2 + 20\lambda^2s^3 - 4\lambda^4s^4 + 8\lambda^6s^5 - 48\lambda^6s^7) \\ &-(1 - 4s^2)(1 - 2\lambda^2s + 4\lambda^4s^4)^2 = 0. \end{aligned}$$

Его можно получить следующим образом. Заметим, что возможность $X = 0, Y = \pm 1$ не приводит к нулевому вектору $\text{sgrad } F_2$ даже в предположении $\rho = 0$. Поэтому должно быть $\mathcal{G} = 0$. Выразим отсюда X , подставим в выражения n_1, n_2 и найдем результат по Y . Получим искомое соотношение на ℓ, s . Поскольку найденное условие не обращается в тождество на поверхностях $\Pi_{2,3}$, то оно определяет одномерное подмножество. С другой стороны, оно тождественно удовлетворено соответствующими выражениями ℓ и s через r, λ из (1.3.11), (1.3.15) и, следовательно, соответствует кривым δ_i ($i = 1, 2, 3$), то есть выполняется в критических точках ранга 0. Таким образом, в критических точках ранга 1 должно быть $2\lambda^2 s - 1 - \nu s = 0$ и функция (1.4.3) является искомым интегралом, определяющим тип этих точек.

Прямое вычисление характеристического многочлена приводит к требуемому выражению $\chi_{F_2}(\mu)$. Очевидно, при $s < 0$ величина C_2 всегда отрицательна, а при $s > 0$ может иметь разные знаки, что и определяет соответствующий тип особой точки. Тот факт, что при $C_2 = 0$ критические точки вырождены (то есть нельзя найти другого элемента в алгебре симплектических операторов, имеющего ненулевые собственные значения), доказывается так же, как в предложении 6 (фактически следует из того, что коэффициент при K удалось выбрать равным 1). \square

Мы видим, что для всех критических точек (как ранга 0, так и ранга 1) характеристический многочлен определяющего симплектического оператора зависит только от постоянных первых интегралов. Поэтому

имеет место следующее важное свойство.

Теорема 8. *Все критические точки одного ранга, лежащие на одном совместном уровне первых интегралов L, H, K , имеют один и тот же тип.*

Отсюда, в частности, сразу же следует, что молекула, обозначенная в работах [85, 97] как W_7 , в данной задаче невозможна. Ниже мы покажем, что, даже сделав скидку на погрешности изображения (атомы разных уровней интегралов на одной высоте на рисунке), такая молекула не реализуется по другой, уже существенной, причине.

Введем некоторую терминологию, связанную с детальным исследованием критических подсистем.

Известно [26], что геометрическим особенностям бифуркационных диаграмм интегрируемых систем с n степенями свободы отвечают критические точки ранга $m < n - 1$ и вырожденные критические точки ранга $n - 1$. Наличие полного взаимно однозначного соответствия здесь в общем случае не доказано. Дополнительные особенности возникают в семействах гамильтоновых систем, полученных процедурой факторизации из одной системы с симметрией. Примером этого является и рассматриваемая здесь задача. Поверхность Π_1 имеет особенность типа самопересечения, проявляющуюся в любых плоских ее сечениях, кроме сечений $\ell = \text{const}$ (кривая $s = 0$ в представлении (1.2.7) и особая парабола в представлении (1.2.10)). В самих сечениях фиксированной постоянной площадей оказывается особым сечение $\ell = 0$ опять же в силу наличия особой “кратной” параболы.

Определение 7. *Невырожденную критическую точку ранга 1 назовем кратной, если в окрестности ее образа при отображении момента $J = L \times H \times K$ бифуркационная диаграмма Σ этого отображения не является гладкой двумерной поверхностью.*

Здесь уместно напомнить, что рангом критической точки мы называем ее ранг в приведенной системе с двумя степенями свободы, что на единицу меньше ее ранга по отношению к отображению J .

Поскольку окрестность невырожденной критической точки ранга 1 в $Q_{\ell,h}^3$ устроена как один из стандартных атомов и может структурно не изменяться при малых изменениях h , то никаким локальным анализом особенности в приведенной системе с двумя степенями свободы на P_ℓ^4 такую кратную точку выявить нельзя. Можно лишь констатировать, что некоторым точкам на дугах бифуркационной диаграммы системы на P_ℓ^4 отвечает несколько критических окружностей. В этом случае распад кратной точки может произойти при возмущении ℓ , то есть при переходе к другой системе с двумя степенями свободы. В общих случаях интегрируемости задач динамики твердого тела особым в этом смысле всегда является нулевой уровень циклического интеграла L . Есть и другие причины того, что точка становится кратной. Например, как в рассматриваемой здесь задаче, на один уровень с точками ранга 1 могут попадать точки ранга 0. Тогда такая “кратность” оказывается неважна, так как на перестройки диаграмм влияние окажут точки ранга 0. Наконец, в системе могут существовать и “распадающиеся” топологически неустойчивые атомы. Такое явление описано в [26]. Оно также не выявляется локальным анализом. Интересно отметить, что топологически неустойчивые атомы ранее встречались в конкретных механических системах классической динамики твердого тела [25], но самого распада при этом не было. Численно распадение топологически неустойчивого атома выявлено в работе [106] для одной системы на сфере (называемой случаем Дуллина – Матвеева [107], но являющейся частным случаем интегрируемой системы, обнаруженной Х.М. Яхья [108]). Варианты такого рода перестроек слоений на трехмерных изоэнергетических уровнях описаны в [109]. Недавно распадающиеся атомы обнаружены в

подсистемах неприводимой задачи о движении твердого тела в двойном поле, однако, это явление на практике оказалось связано с вырождением индуцированной симплектической структуры [110].

Определение 8. Назовем *ключевым множеством* в P^5 объединение всех критических точек ранга 0, вырожденных и кратных критических точек ранга 1. Обозначим ключевое множество через \mathcal{K} . Пересечение $\mathcal{K}_j = \mathcal{K} \cap M_j$ назовем *ключевым множеством критической подсистемы* M_j .

Определение 9. Пусть Φ, Ψ – первые интегралы (возможно, частные) критической подсистемы M_j , независимые почти всюду. Назовем (Φ, Ψ) -диаграммой подсистемы M_j образ ключевого множества \mathcal{K}_j при отображении $\Phi \times \Psi : M_j \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Определение 10. При наличии некоторого интегрального отображения $M_j \rightarrow \mathbb{R}^k$ его образ назовем *допустимой областью* и обозначим через \mathcal{D}_j . Точки допустимого множества будем называть *допустимыми*.

Иначе говоря, значения интегралов допустимы, если им соответствуют некоторые движения (интегральное многообразие не пусто). Из контекста всегда будет ясно, о каком отображении идет речь и в каком пространстве рассматриваются допустимые точки.

В работах [53, 90] изучались (S, H) - и (S, L) -диаграммы критических подсистем. Здесь S – частный интеграл, возникающий из представления Лакса, постоянная которого является параметром на поверхностях в уравнениях (1.2.7), (1.2.8). Он же естественным образом возникает при введении функции с неопределенными множителями Лагранжа для описания критических подсистем как коэффициент при интеграле K – по формулам (1.2.16), (1.2.17), (1.2.18). Для классификации бифуркаций, происходящих при пересечении точкой (ℓ, h, k) поверхностей Π_j

в $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$, удобно выбрать такую плоскость констант функционально независимых интегралов критических подсистем, при котором допустимые точки этой плоскости находятся во взаимно однозначном соответствии с точками соответствующей бифуркационной поверхности (тогда, например, становится однозначной информация о количестве точек ранга 0 или окружностей ранга 1 в прообразе).

Рассмотрим также задачу классификации бифуркационных диаграмм $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ отображений $H \times K$ приведенных систем на P_ℓ^4 [51, 53] и бифуркационных диаграмм $\Sigma_{LK}(h, \lambda)$ отображений $L \times K$, ограниченных на четырехмерные изоэнергетические уровни $Q_h^4 = H^{-1}(h)$ в P^5 [90]. Эти диаграммы представляют собой сечения плоскостями $\ell = \text{const}$ и, соответственно, $h = \text{const}$ бифуркационной диаграммы $\Sigma(\lambda)$ общего интегрального отображения $J = L \times H \times K$. В силу наличия свободного физического параметра λ в цитированных работах решается вопрос о нахождении так называемого *разделяющего множества* в соответствующей плоскости (λ, ℓ) или (λ, h) , при пересечении которого меняется строение таких сечений. Сформулируем общее утверждение, позволяющее в определенном смысле алгоритмизировать построение разделяющих множеств.

Пусть $F : P^5 \rightarrow \mathbb{R}$ некоторый общий интеграл системы. Фиксируем $f \in \mathbb{R}$ и рассмотрим отображение

$$J_{(F,f)} = J|_{F^{-1}(f)} : F^{-1}(f) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

где \mathbb{R}^2 — плоскость значений пары интегралов, дополняющих F до полной инволютивной тройки почти всюду независимых интегралов. Пусть $\sigma_{(F,f)}(\lambda)$ — бифуркационная диаграмма отображения $J_{(F,f)}$. Ясно, что если пара интегралов U, V дополняет F до инволютивной тройки функционально независимых интегралов, то можно естественным образом отождествить $\sigma_{(F,f)}(\lambda)$ с бифуркационной диаграммой $\Sigma_{UV}(f, \lambda)$ ограничения

отображения $U \times V$ на подмногообразии $F^{-1}(f)$. В частности, ниже будут рассмотрены варианты $F = L$, и тогда $\sigma_{(L,\ell)}(\lambda) = \Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$, и $F = H$, и в этом случае $\sigma_{(H,h)}(\lambda) = \Sigma_{LK}(h, \lambda)$.

Предложение 8 (М.П. Харламов [111, 112]). *Множество Θ_F в плоскости (λ, f) , при переходе через которое меняется тип диаграммы $\sigma_{(F,f)}(\lambda)$ (в гладком смысле), состоит из пар (λ, f) , где f — критическое значение ограничения функции F на ключевое множество \mathcal{K} при заданном λ .*

При желании этому утверждению можно придать достаточную строгость, уточняя понятия однотипных диаграмм и критических значений функции на стратифицированном многообразии. В частности, заведомо предполагается, что интеграл F выбран “разумно” и не имеет критических точек на регулярных уровнях отображения момента. Один из возможных подходов к системе соответствующих определений, использующий понятие оснащенных допустимых промежутков, приведен в работе [53]. Практически же оно означает следующее. Для каждой критической подсистемы \mathcal{M}_j нужно рассмотреть ее (G, F) -диаграмму, где G — некоторый функционально независимый с F , возможно, частный, интеграл на \mathcal{M}_j . Критические значения F на \mathcal{K} соответствуют узловым точкам этой диаграммы (образам вырожденных критических точек ранга 0), экстремальным значениям координаты f на гладких участках — образах множества вырожденных или кратных критических точек ранга 1, а также всевозможным самопересечениям гладких участков диаграммы.

Множество Θ_F называют разделяющим множеством при классификации бифуркационных диаграмм $\sigma_{(F,f)}(\lambda)$. Будем для краткости называть его F -атласом.

1.4.2. Детализация. Первая критическая подсистема

Для первой критической подсистемы ни одна из пар функционально независимых интегралов (S, H) или (S, L) не решает задачи обеспечения взаимно однозначного соответствия выбранной плоскости и поверхности Π_1 . Действительно, на (s, h) -плоскости в *любую допустимую точку* с условием

$$h - \frac{\lambda^2}{2} - s > 0$$

отображаются *две* точки поверхности Π_1 , а в (s, ℓ) -представлении *весь допустимый сегмент* параболы

$$k = 1 + \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2, \quad \ell = 0, \quad h \geq \frac{\lambda^2}{2}, \quad (1.4.4)$$

отвечающей на поверхности Π_1 значению $s = 0$, отображается в *одну* точку. Таким образом, соответствие либо двузначно на множестве полной меры, либо имеется “плохая” особенность – точка, в которую отображается бесконечно много точек поверхности. Заметим, что в силу наличия на поверхности Π_1 линии самопересечения задача взаимно однозначной параметризации и не может быть решена. Однако можно обеспечить параметризацию, в которой лишь каждой точке на линии самопересечения отвечала бы естественным образом пара точек на плоскости параметров. Для этого выберем на \mathcal{M}_1 вместо S частный интеграл

$$P = \omega_1.$$

Тогда формулы (1.1.30) дают взаимно однозначное соответствие допустимых областей на (p, h) -плоскости и поверхности Π_1 , за одним лишь очевидным исключением – во внутреннюю точку сегмента параболы (1.4.4), то есть при $h > \lambda^2/2$, отображаются две точки с противоположными знаками p . Далее мы рассмотрим диаграммы и ключевые множества подсистемы \mathcal{M}_1 в терминах (p, h) , но, имея в виду сформулирован-

ную выше задачу классификации бифуркационных диаграмм $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ и $\Sigma_{LK}(h, \lambda)$, мы также представим и описание (S, H) - и (S, L) -диаграмм для \mathcal{M}_1 .

Для нахождения топологических инвариантов, таких, как графы Фоменко, нужно знать еще один показатель, а именно, индекс Морса – Ботта интеграла K в невырожденных критических точках ранга 1 (то есть индекс Морса ограничения K на малую площадку, трансверсальную к траектории, состоящей из точек ранга 1). Он дает информацию о том, что происходит с критическими окружностями на изоэнергетической поверхности $Q_{\ell, h}^3(\lambda)$ при изменении значения дополнительного интеграла в сторону возрастания. В пространстве постоянных всех трех интегралов мы тем самым отслеживаем, какие явления происходят, когда прямая, параллельная Ok , протыкает соответствующую бифуркационную поверхность Π_i . Вид функций (1.4.1), (1.4.3) позволяет явно провести соответствующие вычисления.

В точках \mathcal{M}_1 найдем пару векторов, определяющих трансверсальную площадку к критической окружности (в критической точке ранга 1). Такая площадка может быть выбрана как ортогональная векторам $\text{grad } \Gamma, \text{grad } L, \text{grad } H, \text{sgrad } H$. Замечая, что на любой траектории (1.1.24), (1.1.25) переменная r осциллирует между корнями многочлена (1.1.25), выберем на траектории точку x_0 , в которой $R(r) = 0$. Тогда касательная плоскость к трансверсальной площадке окажется натянутой на векторы

$$v_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad v_2 = \left(\lambda + r, 0, -4p, 2p(\lambda - r), 0, 2\left(h - p^2 - \frac{r^2}{2}\right) \right).$$

Эти векторы получены из системы уравнений для $u = (u_1, \dots, u_6)$

$$u \cdot \text{grad } \Gamma = 0, \quad u \cdot \text{grad } L = 0, \quad u \cdot \text{grad } H = 0, \quad u \cdot \text{sgrad } H = 0$$

при условиях $(u_2, u_3) = (1, 0)$ и $(u_1, u_2) = (0, \lambda + r)$.

В точке x_0 достигается условный экстремум функции K на совместном уровне $Q_{\ell, h}^3$ функций Γ, L, H в P^6 . В частности, x_0 есть критическая

точка функции с неопределенными множителями Лагранжа

$$K_1 = K - 2\nu H - \varkappa_1 L - \varkappa_2 \Gamma.$$

Очевидно, часть этой функции, не содержащая функций Казимира L, Γ , совпадает с (1.4.1), то есть $\nu = p^2$. Непосредственно вычисляется, что $\varkappa_1 = 4p, \varkappa_2 = 1$.

Тип условного экстремума определяется ограничением второго дифференциала функции с множителями Лагранжа на касательное пространство к многообразию ограничений [113]. Применительно к исследованию фазовой топологии гамильтоновых систем этот факт отметил и использовал А.А. Ошемков [100].

Ограничение $d^2 K_1$ на линейную оболочку векторов v_1, v_2 в силу выбора $R = 0$ оказывается диагональной матрицей с элементами (собственными числами)

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 4\left[h - (\lambda^2 + p^2) + \lambda r - \frac{1}{2}r^2\right] = 2[2s - (\lambda - r)^2], \\ \mu_2 &= -8\left(h - \frac{\lambda^2}{2} - 3p^2\right)\left[h - \frac{\lambda^2}{2} - 3p^2 - \frac{1}{2}(\lambda + r)^2\right] = \\ &= -32\left(h - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{2}s\right)\left[h - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{2}s - (\lambda + r)^2\right]. \end{aligned}$$

В частности, произведение

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 &= 16(-2h + \lambda^2 + 6p^2)[1 - (2h - \lambda^2 - 2p^2)(\lambda^2 + p^2)] = \\ &= -32(2h - \lambda^2 - 3s)[(2h + \lambda^2 - 2s)s - 1] = \\ &= -64 \left[\frac{3}{2}s - \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right) \right] \left[2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + 1 \right] \end{aligned}$$

от r не зависит и определяется расположением точки (s, h) относительно кривых вырождения критических точек ранга 1, заданных уравнением (1.4.2). В силу этого, на невырожденных траекториях величины μ_1, μ_2 , которые будем называть показателями Морса – Ботта, в ноль не обращаются, а значит, не меняют знака.

Предложение 9. При возрастании интеграла K на изоэнергетическом уровне $Q_{\ell,h}^3$ имеем следующие бифуркации в точках критической подсистемы M_1 на невырожденных критических окружностях:

1) для эллиптических траекторий (тип “центр”) — рождение тора при $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ (атом A с ребром вверх), исчезновение тора при $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ (атом A с ребром вниз);

2) для одной гиперболической траектории на критическом уровне K при $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$ — атом B с “внешним” ребром (“головой”) вверх и парой “внутренних” ребер (“ног”) вниз, при $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ — атом B с “внешним” ребром (“головой”) вниз и парой “внутренних” ребер (“ног”) вверх;

3) для двух гиперболических траекторий на критическом уровне K при совпадении знаков двух пар (μ_1, μ_2) — два атома B , у которых направление “внешнего” ребра определяется по тому же правилу (обе “головы” вверх при $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$, обе “головы” вниз при $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$);

4) для двух гиперболических траекторий на критическом уровне K при разных сочетаниях знаков в парах (μ_1, μ_2) — два атома A^* .

Доказательство. Для эллиптических траекторий утверждение очевидно (функция K имеет локальный минимум или максимум на трансверсальной площадке).

Можно показать, что для гиперболических траекторий вектор v_1 направлен во внешнюю часть “восьмерки”: направление оси $O\omega_2$ отвечает за переход с критической поверхности к объемлющему ее тору. Такое понимание легко получить, анализируя, например, проекции интегральных многообразий на плоскость $O\omega_1\omega_2$ (частично такое исследование выполнено в [97]). Видно, что, как и в классической задаче [76, 114], разрывов проекции никогда не происходит в направлении оси $O\omega_2$. Если теперь $\mu_1 > 0$, то это означает, что на трансверсальной площадке функ-

ция K растет к “внешней” окружности и убывает к паре “внутренних”.

Если на двух гиперболических окружностях наборы знаков в парах (μ_1, μ_2) различны, то, предполагая наличие двух атомов B с противоположными направлениями “голов”, получим бифуркацию трех торов в три. Как отмечено в [85, 115], количество торов на регулярном уровне может быть равным лишь 1, 2 или 4 (для всех камер в $\mathbb{R}^3(\ell, h, k) \setminus \Sigma$ количество регулярных торов будет строго установлено ниже с применением только очевидных атомов типа A). Поэтому в данном случае мы имели бы бифуркацию четырех торов в четыре. Однако, как мы увидим ниже, таких примыкающих друг к другу камер в данной задаче нет. Если предположить, что в рассматриваемой точке имеется атом C_2 , то в аналитическом решении (1.1.34) – (1.1.35) существовала бы гетероклиническая траектория, которой также здесь нет. Значит, в такой точке имеется два атома A^* . \square

Критерий существования движений в системе \mathcal{M}_1 очевиден (предложение 1 работы [53]). Поскольку в (p, h) -плоскости нет “двойных” точек, мы легко дополним его информацией о количестве критических окружностей на соответствующем уровне интегралов.

Предложение 10. *При заданных p, h вещественные решения (1.1.25) существуют тогда и только тогда, когда $R(r) \geq 0$ для некоторого $r \in \mathbb{R}$. Если при этом все корни $R(r)$ простые (то есть на заданном интегральном уровне нет критических точек ранга 0), то количество периодических решений равно количеству промежутков неотрицательности $R(r)$.*

Замечание 7. *Напомним еще раз, что при переходе в пространство $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$ в силу формул (1.1.30) пара точек из прообраза параболы (1.4.4) с противоположными знаками p переходит в одну точку. В работе [85] этот факт отмечен как особый случай.*

Замечание 8. Предложение 10 допускает очевидное обобщение. Если $R(r)$ имеет кратный корень (а тогда, как показано выше, он единственный), то количество периодических решений равно количеству промежутков неотрицательности $R(r)$ между простыми корнями. Теперь, учитывая и предложение 5, мы получаем всю информацию о полном составе критических движений на совместном уровне общих интегралов, содержащих критическую точку ранга 0 соответствующего класса, так как количество и расположение корней многочлена $R(r)$ легко устанавливается для всех классов, исходя из зависимостей $h(r, \lambda)$ и $p(r, \lambda)$, данных формулами (1.3.11), (1.3.12).

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_{\pm}(r) = \frac{1}{2} \left[r(\lambda - r) \pm \frac{2r - \lambda}{r - \lambda} D \right], \quad \psi_{\pm}(r) = \frac{r}{2} \left[-r \pm \frac{1}{r - \lambda} D \right], \quad (1.4.5)$$

$$D = |d| = \sqrt{4 + r^2(r - \lambda)^2} > 0.$$

Обозначим через $h_C(\lambda)$ значение энергии в вырожденной критической точке π_{31} , заданной формулой (1.3.31). Индекс C введен в силу того, что в дальнейшем через C будет обозначен образ этой вырожденной точки в диаграммах критических подсистем. При заданном $\lambda > 0$ значение h_C определяется согласно (1.3.31), (1.3.11) так:

$$\begin{cases} 3x^4 - 2x^3\lambda - 4 = 0 \\ x \in (-\sqrt[4]{4/3}, 0) \end{cases} \Rightarrow h_C = \frac{3}{8}x^2 + \frac{2}{x^6}. \quad (1.4.6)$$

Теорема 9. (P, H) -диаграмма критической подсистемы \mathcal{M}_1 состоит из следующих множеств

$$\begin{aligned} \delta_1 : p^2 &= \psi_-(r), \quad h = \varphi_-(r), \quad r \in [0, \lambda); \\ \delta_2 : p^2 &= \psi_+(r), \quad h = \varphi_+(r), \quad r \in (-\infty, 0]; \\ \delta_3 : p^2 &= \psi_+(r), \quad h = \varphi_+(r), \quad r \in (\lambda, +\infty); \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 : h - \left(3p^2 + \frac{\lambda^2}{2}\right) &= 0, & \frac{\lambda^2}{2} \leq h \leq h_C(\lambda); \\ \Delta_0 : h - \left(p^2 + \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{1}{2(\lambda^2 + p^2)} &= 0, & p \in \mathbb{R}, \\ \ell_0 : h - \left(p^2 + \frac{\lambda^2}{2}\right) &= 0, & p \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

При этом границами допустимой области \mathcal{D}_1 служат связная кривая δ_1 и две компоненты связности кривой δ_3 . Кривая δ_2 связна и разбивает допустимую область на две подобласти. Точкам области, лежащей ниже кривой δ_2 , соответствует одна критическая окружность, а точкам области, лежащей выше кривой δ_2 , соответствуют две критических окружности.

Доказательство. Поскольку все критические точки ранга 1 принадлежат \mathcal{M}_1 , а значения на них функций P, H даны в формулах (1.3.8), (1.3.11), то с учетом обозначений (1.3.20) образы этих точек – это кривые δ_i ($i = 1, 2, 3$). Кривые Δ_1, Δ_0 получим из предложения 6 с учетом (1.2.13). Кривая ℓ_0 соответствует особой параболе (1.4.4), которая, как отмечалось, есть образ множества кратных точек. Остается уточнить условия существования движений в системе \mathcal{M}_1 . Они существуют тогда и только тогда, когда многочлен $R(r)$, заданный выражением (1.1.26), имеет промежутки неотрицательности. Поскольку его дискриминантным множеством являются в точности кривые δ_i , получаем, что такие промежутки существуют между кривыми δ_1, δ_3 , а ниже δ_1 (по направлению оси Oh) и выше δ_3 движений нет. При этом ниже кривой δ_2 многочлен R имеет два вещественных корня, поэтому такой промежуток один (одна критическая окружность), а выше этой кривой корней четыре, поэтому промежутков два (две критические окружности). Часть кривой Δ_1 вырождения критических точек ранга 1, попадающая в допустимую область, ограничена снизу естественной границей $h = \lambda^2/2$, а сверху – точкой пересечения с кривой δ_3 , ордината которой – это описанное выше

значение $h_C(\lambda)$. □

Теорема 10. При неотрицательных λ перестройки (P, H) -диаграммы критической подсистемы \mathcal{M}_1 происходят при следующих значениях параметра:

$$0, \lambda_* = 1/2^{3/4}, 1, \lambda^* = (4/3)^{3/4}, \sqrt{2}.$$

Доказательство. В силу выбора частных интегралов, обеспечивающих взаимно однозначное соответствие точек ключевого множества и их образов (за указанными выше очевидными исключениями), перестройки диаграмм происходят одновременно с перестройками множества вырожденных точек ранга 0 и кратных точек при изменении λ . Поскольку все кривые вырожденных и кратных точек известны (см. рис. 1.2), то эти перестройки таковы: при $\lambda = 0$ исчезает точка π_{21} (соответствующая кривая уходит в бесконечность) и сливаются точки π_{22}, π_{24} ; при $\lambda = \lambda_*$ в узловой точке P_0 сливаются все кривые вырожденных точек класса δ_2 ; при $\lambda = 1$ исчезает точка π_{21} (заканчивается соответствующая кривая); при $\lambda = \lambda^*$ (минимум λ на ℓ_0 , см. замечание 6) возникают кратные точки; при $\lambda = \sqrt{2}$ исчезает точка π_{23} (заканчивается соответствующая кривая). Других перестроек нет. □

На рис. 1.11, 1.12, (a) – (e) показаны (P, H) -диаграммы подсистемы \mathcal{M}_1 , устойчивые по параметру λ : (a) $0 < \lambda < \lambda_*$; (b) $\lambda_* < \lambda < 1$; (c) $1 < \lambda < \lambda^*$; (d) $\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$; (e) $\lambda > \sqrt{2}$.

Символами $a_1 - a_{12}$ обозначены связные компоненты в пространстве $\{(p, h, \lambda)\}$, на которые допустимая область делится расширенной (P, H) -диаграммой. Напомним наличие симметрии (1.3.46). Области, переходящие друг в друга при таком отображении, обозначены одинаково.

С точки зрения типов критических точек переход через значение $\lambda = \lambda^*$ никаких качественных изменений не влечет, точки областей a_{10} ,

a_{12} и их общей границы на ℓ_0 одинаковы. При $\lambda = \lambda^*$ возникает пересечение кривых δ_2 и ℓ_0 , что демонстрирует момент выхода объединенной области $a_{10} \cup a_{12}$ на многообразии $L = 0$ и позволяет сравнить бифуркации и атомы с более подробными исследованиями случая $L = 0$, выполненными автором и П.В. Морозовым. Также с локальной точки зрения одинаковы критические точки областей a_1, a_2 и их общей границы ℓ_0 . Однако точки на бифуркационной диаграмме Σ в $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$, порожденные этими областями, имеют нелокальное отличие, которое в терминах параметров (1.1.33) установлено в работе [77], а именно, наличие или отсутствие на полном совместном уровне общих интегралов регулярных торов (двухчастотных движений). Об этом будет сказано ниже.

На плоских сечениях $h = \text{const}$ или $\ell = \text{const}$ (изоэнергетических бифуркационных диаграммах или бифуркационных диаграммах приведенных систем с двумя степенями свободы на P_ℓ^4) поверхностей Π_i областям a_j отвечают гладкие дуги, на которых полностью сохраняется как тип и количество особых точек, так и характер бифуркации, то есть атом, возникающий вдоль малого отрезка, трансверсально пересекающего Π_i в соответствующей точке.

Для дополнительной информации на рис. 1.12,(f) показана диаграмма первой критической подсистемы в классической задаче ($\lambda = 0$), отвечающая особо замечательным движениям четвертого класса Аппельрота. Она состоит из двух парабол

$$h = \pm 1 + p^2,$$

кривой, полученной из δ_3 и части δ_2

$$p = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{4 + r^4} - r^2)}, \quad h = \frac{1}{2}(2\sqrt{4 + r^4} + r^2),$$

и предельных кривых

$$\Delta_0 : h = \frac{1}{2}\left(2p^2 + \frac{1}{p^2}\right), \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \Delta_1 : h = 3p^2, \quad p \in \left[0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right].$$

Анализируя все признаки, вычисленные для областей a_j , сведем информацию в табл. 1.4.1. Здесь введены следующие обозначения для атомов A, B : индекс “+” означает увеличение числа торов при увеличении K , а индекс “-”, соответственно, означает уменьшение. Иначе говоря, A_- – ребро заканчивается вверху, A_+ – ребро заканчивается внизу, B_- – “внешняя” окружность “восьмерки” (“голова”) вверху, B_+ – “внешняя” окружность “восьмерки” (“голова”) внизу. Как видно, все области, кроме одной (a_4), имеют выход в классическую задачу Ковалевской ($\lambda = 0$) и в задачу с гиростатическим моментом при нулевой постоянной площадей ($\ell = 0$). Для этих случаев бифуркации установлены в работах [51, 104] (подробное изложение для случая Ковалевской имеется также в [25, 103]), метки на соответствующих молекулах вычислены в [27, 116]. Поэтому в столбце “Аналоги” даны ссылки на обозначения участков [25, 27, 116] или путей, пересекающих соответствующие участки [51, 104], используемые в этих работах. При наличии аналога все атомы описаны в [51, 103, 104]. В двух первых работах был создан и язык для описания атомов, включая учет направленности для несимметричных атомов (само понятие атома тогда, естественно, еще не существовало). Сопоставляя с аналогами, рассмотренными в [27, 116], можно указать и большинство меченых молекул.

Таблица 1.4.1

Область (время жизни)	К-во окр-стей	Показатели Морса–Ботта	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Атом	Аналоги
a_1 ($0 \leq \lambda < +\infty$)	1	(– –)	Да/Да	A_-	2, 3 [25, Рис. 6.3] a_1, a_2 [51, Рис. 2] γ_1, γ_4 [27, Рис. 11] α_2, α_3 [116, Рис. 1]

Таблица 1.4.1 (продолжение)

Область (время жизни)	К-во окр-стей	Показатели Морса–Ботта	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Атом	Аналоги
a_2 $(0 \leq \lambda < +\infty)$	1	(– –)	Да/Да	A_-	3, 3' [25, Рис. 6.3] a_2 [51, Рис. 2] γ_1, γ_4 [27, Рис. 11] α_2, α_3 [116, Рис. 1]
a_3 $(0 \leq \lambda < +\infty)$	1	(+ –)	Да/Нет	B_-	9 [25, Рис. 6.3] γ_5 [27, Рис. 11]
a_4 $(0 < \lambda < +\infty)$	1	(+ +)	Нет/Нет	A_+	Отсутств.
a_5 $(0 \leq \lambda < 1)$	2	(+ –), (– +)	Да/Да	$2A^*$	6 [25, Рис. 6.3] a_4 [51, Рис. 2] γ_2 [27, Рис. 11] δ_1, δ_2 [116, Рис. 1]
a_6 $(0 \leq \lambda < \sqrt{2})$	1	(– +)	Да/Да	B_+	5 [25, Рис. 6.3] b_2 [51, Рис. 3] γ_3 [27, Рис. 11] β_1 [116, Рис. 1]
a_7 $(0 \leq \lambda < \lambda_*)$	2	(+ –), (+ –)	Да/Нет	$2B_-$	Д [104, Рис. 2] γ_6 [27, Рис. 11]
a_8 $(0 \leq \lambda < \lambda_*)$	2	(+ +), (+ +)	Да/Нет	$2A_+$	Е [104, Рис. 2] γ_7 [27, Рис. 11]
a_9 $(0 < \lambda < +\infty)$	2	(+ +), (– –)	Нет/Да	A_+, A_-	a_5 [51, Рис. 2] α_5, α_6 [116, Рис. 1]
a_{10} $(\lambda_* < \lambda < +\infty)$	2	(– –), (– –)	Нет/Да	$2A_-$	c_3, c_4 [51, Рис. 4] α_3, α_8 [116, Рис. 1]
a_{11} $(\lambda_* < \lambda < +\infty)$	2	(– +), (– +)	Нет/Да	$2B_+$	b_4 [51, Рис. 3] β_5, β_6 [116, Рис. 1]
a_{12} $(\lambda^* < \lambda < +\infty)$	2	(– –), (– –)	Нет/Да	$2A_-$	d_2, d_3 [51, Рис. 5] $\alpha_3, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$ [116, Рис. 1]

Также теперь имеется возможность прояснить связь между параметрами (1.1.33), условиями (1.1.36) и приведенной здесь классификацией точек первой критической подсистемы. Для экономии обозначений будем под $\ell_0, \Delta_1, \Delta_0$ понимать значение левых частей уравнений соответствующих кривых в записи (1.4.7) (в дальнейшем это не приведет к путанице). Тогда в обозначениях (1.1.33)

$$L_1 = \ell_0/8, \quad L_2 = \Delta_1/2, \quad L_3 = \Delta_0/2. \quad (1.4.8)$$

Из (1.4.5), (1.4.7) находим, что на кривой δ_1 имеется однозначная зависимость

$$h = H_1(p), \quad p \in \mathbb{R},$$

а на кривой δ_3 однозначная зависимость определена при ненулевых p :

$$h = H_3(p), \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

причем для всех $p \neq 0$ имеем $H_3(p) > H_1(p)$. Кривые δ_i в целом образуют дискриминантное множество многочлена (1.1.26). При

$$h \in (-\infty, H_1(p)) \cup (H_3(p), +\infty) \quad (1.4.9)$$

он вещественных корней не имеет, поэтому и невозможны движения на \mathcal{M}_1 . Покажем, что при соотношениях (1.1.30) в областях (1.4.9) движения невозможны и на всем многообразии G^4 (напомним, что так обозначен полный прообраз поверхности Π_1 в P^5 при отображении момента J). Для этого достаточно заметить, что в точке зависимости ограничений функций $H, P = \omega_1$ на многообразии G^4 ранг J не превышает двух, поэтому такая точка является критической ранга 0 или 1 и обязательно принадлежит \mathcal{M}_1 . Следовательно наибольшее и наименьшее значения H при фиксированном P на G^4 совпадают с аналогичными значениями на \mathcal{M}_1 :

$$\max_{G^4 \cap \{P=p\}} H = \max_{\mathcal{M}_1 \cap \{P=p\}} H = H_3(p), \quad \min_{G^4 \cap \{P=p\}} H = \min_{\mathcal{M}_1 \cap \{P=p\}} H = H_1(p).$$

В связи с этим введем два дополнительных параметра

$$L_4 = h - H_1(p), \quad L_5 = h - H_3(p)$$

и обозначим области на плоскости (p, h)

$$\bar{a}_1 = \{(p, h) : L_4 < 0\}, \quad \bar{a}_2 = \{(p, h) : L_5 > 0\}.$$

Из доказанного, в частности, вытекает следующее утверждение о существовании вырожденных критических движений ранга 1 в первой подсистеме.

Предложение 11. *В допустимую область на бифуркационной диаграмме Σ отображения момента J входят следующие сегменты особых точек на поверхности Π_1 – образы вырожденных критических движений ранга 1:*

1) *кривая касания поверхностей Π_1, Π_3 полностью*

$$\Delta_0 : \begin{cases} \ell = \pm \sqrt{\frac{s}{2}(1 - 2\lambda^2 s)} \\ h = \frac{1 - \lambda^2 s + 2s^2}{2s} \end{cases}, \quad 0 < s \leq \frac{1}{2\lambda^2};$$

2) *ребро возврата поверхности Π_1 между его пересечениями с кривой δ_3*

$$\Delta_1 : \ell = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^{3/2}, \quad \begin{cases} \frac{\lambda^2}{2} \leq h \leq h_C(\lambda) \\ |\ell| \leq \ell_C(\lambda) \end{cases},$$

или в терминах параметра s

$$\Delta_1 : \begin{cases} \ell = \pm \sqrt{\frac{s^3}{2}} \\ h = \frac{3}{2}s + \frac{\lambda^2}{2} \end{cases}, \quad s \in [0, s_C(\lambda)], \quad (1.4.10)$$

где зависимости $h_C(\lambda), \ell_C(\lambda)$, определяющие экстремумы соответствующих координат на δ_3 при $\lambda \geq 0$, и значение в точке экстремума s -коор-

динаты $s_C(\lambda)$ находятся из уравнений (1.3.11), (1.4.6) с использованием вспомогательного параметра

$$\begin{cases} 3x^4 - 2\lambda x^3 - 4 = 0 \\ x \in [-\sqrt[4]{4/3}, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_C = \frac{3}{8}x^2 + \frac{2}{x^6} \\ \ell_C = \left| \frac{(4 - x^4)^{3/2}}{4x^3} \right| \\ s_C = \frac{4 - x^4}{2x^2} \end{cases}.$$

Информация в табл. 1.4.2 дополняет результаты работ [85, 97] в отношении классификации движений на G^4 .

Таблица 1.4.2

Область по [85]	Условия	Области в \mathcal{M}_1	Периодические движения	Асимптотические движения	Регулярные торы
I	$L_1 > 0, L_2 > 0,$ $L_3 > 0, L_5 > 0$	\bar{a}_2	Нет	Нет	Нет
I	$L_1 > 0, L_2 > 0,$ $L_3 > 0, L_5 < 0$	$a_8 (0 \leq \lambda < \lambda_*),$ $a_4, a_9 (0 < \lambda < +\infty)$	“центр”	Нет	Да
II, VI	$L_1 \geq 0, L_2 < 0,$ $L_3 < 0$	$a_2 (0 \leq \lambda < +\infty),$ $a_{10} (\lambda > \lambda_*)$	“центр”	Нет	Да
III	$L_1 > 0, L_2 < 0,$ $L_3 > 0, L_5 > 0$	\bar{a}_2	Нет	Нет	Нет
III	$L_1 > 0, L_2 < 0,$ $L_3 > 0, L_5 < 0$	a_3	“седло”	Да	Нет
IV	$L_1 > 0, L_2 > 0,$ $L_3 < 0$	$a_5 (0 \leq \lambda < 1),$ $a_6 (0 \leq \lambda < \sqrt{2}),$ $a_{11} (\lambda_* < \lambda < +\infty)$	“седло”	Да	Нет
V	$L_1 < 0, L_2 < 0,$ $L_3 < 0, L_4 > 0$	$a_1 (0 \leq \lambda < +\infty),$ $a_{12} (\lambda > \lambda^*)$	“центр”	Нет	Нет
V	$L_1 < 0, L_2 < 0,$ $L_3 < 0, L_4 < 0$	\bar{a}_1	Нет	Нет	Нет
VII	$L_2 = 0$	Δ_1	вырожд.	Да	Нет

Таблица 1.4.2 (продолжение)

Область по [85]	Условия	Области в \mathcal{M}_1	Периодические движения	Асимптотические движения	Регулярные торы
VIII	$L_3 = 0$	Δ_0	вырожд.	Да	Нет

Наличие асимптотических движений или регулярных торов установлено в [85], исходя из анализа явных квадратур (1.1.34) – (1.1.35). Таким образом, видно, что регулярные торы могут находиться на критическом уровне первых интегралов лишь в соседстве с атомами типа A , а асимптотические движения, конечно, являются неотъемлемой частью гиперболических атомов. Нелокальное отличие точек в парах областей, разделенных кривой ℓ_0 , то есть точек областей a_{10} и a_{12} и точек областей a_2 и a_1 состоит в том, что на уровне общих первых интегралов для области a_2, a_{11} есть регулярные торы, а для областей a_1, a_{12} таких торов нет. Это отличие в терминах параметров аналитического решения установлено в [77].

В силу соотношений (1.2.13) и (1.1.30)

$$\ell = -p\left(h - \frac{\lambda^2}{2} - p^2\right), \quad s = h - \frac{\lambda^2}{2} - p^2$$

легко классифицировать (S, H) -диаграммы и (S, L) -диаграммы первой критической подсистемы. Разделяющие значения λ остаются теми же самыми (определяются по перестройкам сечений ключевого множества). На рис. 1.13, 1.14 приведены (S, H) -диаграммы для случаев: (a) $0 < \lambda < \lambda_*$; (b) $\lambda_* < \lambda < 1$; (c) $1 < \lambda < \lambda^*$; (d) $\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$; (e) $\lambda > \sqrt{2}$; (f) $\lambda = 0$.

Укажем все точки на плоскостях (p, h) и (s, h) , имеющие значение для построения H -атласов бифуркационных диаграмм систем на Q_h^4 (точ-

ки экстремальных значений h -координаты на ключевых множествах). Соответствующие обозначения приведены на рис. 1.15, 1.16. Точки, связанные с кривыми $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, обозначены соответственно буквами A, B, C , снабженными индексами там, где это необходимо. Буква D использована для точек на Δ_j (здесь $j = 0, 1$, в третьей системе появляется Δ_3). Для того чтобы увидеть все особые точки, достаточно привести на рисунках случаи (a) $0 < \lambda < \lambda_*$ и (b) $\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$.

На рис. 1.17, 1.18 и приведены (S, L) -диаграммы подсистемы M_1 для неразделяющих случаев: (a) $0 < \lambda < \lambda_*$; (b) $\lambda_* < \lambda < 1$; (c) $1 < \lambda < \lambda^*$; (d) $\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$; (e) $\lambda > \sqrt{2}$; (f) $\lambda = 0$. Здесь сразу отмечены особые точки, имеющие значение для построения L -атласа бифуркационных диаграмм систем на P_ℓ^4 . Отметим, что по сравнению с диаграммами, включающими H , появилась дополнительная точка D_4 – экстремум ℓ -координаты на образе вырожденных точек Δ_0 .

Перечислим явно все значения параметров и интегралов (общих и частных) в отмеченных особых точках. Образ вырожденных критических точек ранга 0 получим, рассекая разделяющее множество на рис. 1.2 на заданном уровне λ . При этом точки выхода на ось $r = 0$ учитываются только на δ_2 . На δ_1 вырожденных точек нет, но есть экстремум h — глобальное наименьшее значение энергии, достигаемое в точке

$$A: \quad r = 0, \quad p = 0, \quad s = -1 - \frac{\lambda^2}{2}, \quad h = -1, \quad \ell = 0. \quad (1.4.11)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Q_0 &= \lambda(r - \lambda) + D, & Q_1 &= (r - \lambda)(2r - \lambda) - D, \\ Q_2 &= r(r - \lambda)(2r - \lambda) + \lambda D, & Q_3 &= r(\lambda - r) + D. \end{aligned}$$

На кривой δ_2 ($r < 0$) найдем

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dr} &= \frac{1}{2(\lambda - r)^2 D} Q_1 Q_2, & \frac{ds}{dr} &= \frac{1}{2D} Q_3, \\ \frac{dp^2}{dr} &= -\frac{1}{2(r - \lambda)^2 D} Q_2 Q_3, & \frac{d\ell^2}{dr} &= \frac{1}{8(r - \lambda)^2 D} Q_0 Q_1 Q_2 Q_3. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности,

$$\frac{dh}{dp} = -\sqrt{\frac{2r}{r-\lambda}} \frac{Q_1}{\sqrt{Q_3}}, \quad \frac{d\ell}{ds} = -\frac{1}{2\sqrt{2r}(r-\lambda)^{3/2}} Q_1 \sqrt{Q_3}. \quad (1.4.12)$$

Поэтому экстремумы $h(r)$ на δ_2 – это точка B_1 ($r = 0$), вырожденная точка B_4 (кривая π_{23})

$$(\lambda - r)(\lambda - 2r) - D = 0, \quad (1.4.13)$$

точка возврата B_3 (кривая π_{24})

$$r(\lambda - r)(\lambda - 2r) + \lambda D = 0. \quad (1.4.14)$$

Касание кривых δ_2 и Δ_0 дает точку B_5 (кривая вырожденных точек π_{21} , уравнение (1.3.21)), а пересечение всех трех кривых δ_2 , Δ_0 и Δ_1 происходит в точке B_4 (кривая вырожденных точек π_{22} , $r = -\lambda$). Пересечения δ_2 с кривой кратных точек ℓ_0 определяются, согласно (1.3.11) уравнением

$$\lambda(r - \lambda) + D = 0. \quad (1.4.15)$$

Решения уравнения (1.4.13) записаны в параметрическом виде (1.3.30) с помощью подстановки $x = \lambda - r$, решения (1.4.14) находятся явно. Уравнение (1.4.15) сводится к уравнению $(r - \lambda)^3(r + \lambda) + 4 = 0$ с условием $r < 0$. Из него той же подстановкой $x = \lambda - r$ получим необходимое параметрическое представление координат точек B_6, B_7 при $\lambda \geq \lambda^*$. Согласно (1.4.12), особые точки кривой δ_2 на плоскости (s, ℓ) дополнительно порождаются условием $Q_3 = 0$, откуда следует $p = 0, \ell = 0$, то есть это снова точка A . Напомним попутно, что в силу тождества $\ell = -sp$, вся кривая ℓ_0 , отвечающая значению $s = 0$, на плоскости (s, ℓ) “схлопывается” в начало координат, в частности, ось $O\ell$ состоит из недопустимых точек, кроме $(0, 0)$. Поэтому на рис. 1.17 и 1.18 она изображена пунктиром. Таким образом, кривая δ_2 порождает следующий набор точек и

значений первых интегралов:

$$B_1 : \quad r = 0, \quad p = 0, \quad s_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2}, \quad h = 1, \quad \ell = 0; \quad (1.4.16)$$

$$B_2 = \pi_{22} : \quad \begin{cases} r = -\lambda, & p = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2}{2}} \\ s_1 = \sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2, & s_2 = s_1 \\ h = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2, & \ell = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2)^{3/2} \end{cases} \quad (1.4.17)$$

$$B_3 = \pi_{24} : \quad \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \sqrt{U} (\sqrt{4 + U^2} - U) \\ p = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{4 + U^2} - U)^{3/2} \\ s_1 = 2 \frac{\sqrt{4 + U^2} - 2U}{(\sqrt{4 + U^2} - U)^2}, & s_2 = \frac{1}{2U}, \quad (U = \lambda^{2/3}) \\ h = \frac{1}{4} [(4 + U^2)^{3/2} - U(6 + U^2)] \\ \ell = \mp \frac{\sqrt{4 + U^2} - 2U}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + U^2} - U)^{1/2}} \end{cases} ; \quad (1.4.18)$$

$$B_4 = \pi_{23} : \quad \begin{cases} r = \frac{x^4 - 4}{2x^3}, & \lambda = \frac{3x^4 - 4}{2x^3} \\ p = \pm \frac{\sqrt{4 - x^4}}{2x}, & s_1 = \frac{4 - x^4}{2x^2}, \quad s_2 = \frac{x^6}{2(3x^4 - 4)} \\ h = \frac{3}{8}x^2 + \frac{2}{x^6}, & \ell = \mp \frac{(4 - x^4)^{3/2}}{4x^3}, \quad x \in (\sqrt[4]{4/3}, \sqrt{2}] \end{cases} \quad (1.4.19)$$

$$B_5 = \pi_{21} : \quad \begin{cases} r = \lambda - \lambda^{-1/3}, & p = \pm \lambda^{1/3} \sqrt{1 - \lambda^{4/3}} \\ s_1 = \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, & s_2 = s_1, \quad \lambda \in (0, 1] \\ h = -\frac{\lambda^2}{2} + \lambda^{2/3} + \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, & \ell = \mp \frac{\sqrt{1 - \lambda^{4/3}}}{2\lambda^{1/3}} \end{cases} ; \quad (1.4.20)$$

$$B_{6,7} : \quad \begin{cases} r = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{x^3}, & \lambda = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x^3} \geq \lambda^* \\ p = \pm \frac{\sqrt{x^4 - 4}}{x^3}, & s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{2x^2}{4 + x^4} \\ h = \frac{1}{8}x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^6}, & \ell = 0 \\ B_6 : x \in [\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{3}}], & B_7 : x \in [\sqrt{2\sqrt{3}}, +\infty) \end{cases} . \quad (1.4.21)$$

Здесь s_1, s_2 — значения параметров s на поверхностях Π_1 и $\Pi_{2,3}$ соответственно. Формулы (1.4.18) в точке возврата B_3 упрощаются введением

параметра z :

$$B_3 = \pi_{24} : \begin{cases} \lambda = \left(\frac{1}{z} - z\right)^{3/2}, & 0 < z < 1 \\ r = -\sqrt{z(1-z^2)}, & p = \pm z^{3/2} \\ s_1 = \frac{3z^2 - 1}{2z^3}, & s_2 = \frac{z}{2(1-z^2)} \\ h = \frac{1}{2}z(3+z^2), & \ell = \mp \frac{3z^2 - 1}{2z^{3/2}} \end{cases}. \quad (1.4.22)$$

На кривой δ_3 точка минимума h , соответствующая кривой вырождения π_{31} определяется тем же уравнением (1.4.13), и параметризация этой точки дана уравнениями (1.3.31). Имеем

$$C = \pi_{31} : \begin{cases} r = \frac{x^4 - 4}{2x^3}, & \lambda = \frac{3x^4 - 4}{2x^3} \\ p = \mp \frac{\sqrt{4-x^4}}{2x}, & s_1 = \frac{4-x^4}{2x^2}, & s_2 = \frac{x^6}{2(3x^4-4)} \\ h = \frac{3}{8}x^2 + \frac{2}{x^6}, & \ell = \pm \frac{(4-x^4)^{3/2}}{4x^3}, & x \in [-\sqrt[4]{4/3}, 0) \end{cases}. \quad (1.4.23)$$

Наконец, на кривых Δ_0, Δ_1 экстремальные значения h достигаются в точках

$$D_1 : \begin{cases} p = 0, & s_1 = \frac{1}{2\lambda^2}, & s_2 = s_1 \\ h = \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2}, & \ell = 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0; \quad (1.4.24)$$

$$D_2 : \begin{cases} p = 0, & s_1 = 0 \\ h = \frac{\lambda^2}{2}, & \ell = 0 \end{cases}, \quad \lambda \geq 0; \quad (1.4.25)$$

$$D_3 : \begin{cases} p = \pm \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}\lambda^2}}{\sqrt{2}}}, & s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ h = \sqrt{2} - \frac{\lambda^2}{2}, & \ell = \mp \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}\lambda^2}}{2\sqrt{2}}} \end{cases}, \quad \lambda^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.4.26)$$

Дополнительно, из (1.4.10) видим, что, как было отмечено ранее, экстремальное значение ℓ имеется на Δ_0 в точке (см. рис. 1.17, 1.18)

$$D_4 : \begin{cases} h = \frac{1+6\lambda^4}{4\lambda^2}, & \ell = \pm \frac{1}{4\lambda}, & s_1 = \frac{1}{4\lambda^2} \\ s_2 = s_1, & p = \mp \lambda \end{cases}, \quad \lambda > 0. \quad (1.4.27)$$

1.4.3. Детализация. Вторая и третья критические подсистемы

Для второй и третьей критических подсистем перепишем уравнения поверхностей (1.2.8) в виде

$$\Pi_2 \cup \Pi_3 = \left\{ h = 2\ell^2 + \frac{1}{2s} - \frac{\lambda^2}{2}(1 - 4s^2), k = -4\ell^2\lambda^2 + \frac{1}{4s^2} - \frac{\lambda^2}{s}(1 - \lambda^2s)(1 - 4s^2) \right\}.$$

По прежнему $s < 0$ для Π_2 и $s > 0$ для Π_3 . Отсюда следует, что пара (s, ℓ) определяет единственную точку на соответствующей поверхности и это соответствие взаимно однозначно. Поэтому удобно говорить об (S, L) -диаграммах подсистем \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 .

Чтобы получить простой критерий существования решений (1.1.27) – (1.1.29), представим их в алгебраическом виде. Выполним замену

$$X = \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2}, \quad Y = \frac{2\zeta}{1 + \zeta^2}.$$

Имеем однозначные зависимости

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\ell}{s} - \frac{2\kappa\rho\zeta}{1 + \zeta^2}, & \omega_3 &= \lambda + 2\kappa\frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2}, \\ \alpha_1 &= \frac{\lambda s(1 - \zeta^4) + 2\ell\rho\zeta(1 + \zeta^2) - 8\kappa^3\zeta^2}{\kappa(1 + \zeta^2)^2}, & \alpha_3 &= \frac{\ell(1 - \zeta^2) - 2\lambda\rho s\zeta}{\kappa(1 + \zeta^2)} \end{aligned}$$

и выражения с радикалами

$$\omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}(1 + \zeta^2)} \sqrt{\frac{\rho^2}{\kappa s} Z(\zeta)}, \quad \alpha_2 = -\frac{2\sqrt{2}\kappa\zeta}{(1 + \zeta^2)^2} \sqrt{\frac{1}{\kappa s} Z(\zeta)}.$$

где

$$Z(\zeta) = (\kappa - 2\lambda s^2)\zeta^4 + 4\ell\rho s\zeta(1 + \zeta^2) + 2\kappa(1 - 4\kappa^2 s)\zeta^2 + (\kappa + 2\lambda s^2).$$

Динамика определяется уравнением

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\kappa s} Z(\zeta)}.$$

Далее в силу (1.1.27) следует полагать

$$\begin{aligned} \zeta &= z \quad (z \in \mathbb{R}), \quad \rho = \rho_+, \quad \rho^2 \geq 0; \\ \zeta &= iz \quad (z \in \mathbb{R}), \quad \rho = i\rho_-, \quad \rho^2 < 0 \end{aligned}$$

(ρ_+ и ρ_- считаем неотрицательными). Получим решения в следующем виде. Для $\rho^2 \geq 0$ имеем однозначные зависимости

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{\ell}{s} - \frac{2\kappa\rho_+z}{1+z^2}, & \omega_3 &= \lambda + 2\kappa\frac{1-z^2}{1+z^2}, \\ \alpha_1 &= \frac{\lambda s(1-z^4) + 2\ell\rho_+z(1+z^2) - 8\kappa^3z^2}{\kappa(1+z^2)^2}, & \alpha_3 &= \frac{\ell(1-z^2) - 2\lambda\rho_+sz}{\kappa(1+z^2)}\end{aligned}$$

и выражения с радикалами

$$\omega_2 = -\frac{\rho_+}{\sqrt{2}(1+z^2)} \sqrt{\frac{1}{\kappa s} Z_+(z)}, \quad \alpha_2 = -\frac{2\sqrt{2}\kappa z}{(1+z^2)^2} \sqrt{\frac{1}{\kappa s} Z_+(z)}.$$

Аналогично для $\rho^2 < 0$ получим

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{\ell}{s} + \frac{2\kappa\rho_-z}{1-z^2}, & \omega_3 &= \lambda + 2\kappa\frac{1+z^2}{1-z^2}, \\ \alpha_1 &= \frac{\lambda s(1-z^4) - 2\ell\rho_-z(1-z^2) + 8\kappa^3z^2}{\kappa(1-z^2)^2}, & \alpha_3 &= \frac{\ell(1+z^2) + 2\lambda\rho_-sz}{\kappa(1-z^2)}\end{aligned}$$

и выражения с радикалами

$$\omega_2 = -\frac{\rho_-}{\sqrt{2}(1-z^2)} \sqrt{\frac{1}{\kappa s} Z_-(z)}, \quad \alpha_2 = -\frac{2\sqrt{2}\kappa z}{(1-z^2)^2} \sqrt{\frac{1}{\kappa s} Z_-(z)}.$$

Здесь

$$Z_+(z) = (\kappa - 2\lambda s^2)z^4 + 4\ell\rho_+sz(1+z^2) + 2\kappa(1 - 4\kappa^2s)z^2 + (\kappa + 2\lambda s^2),$$

$$Z_-(z) = -(\kappa - 2\lambda s^2)z^4 + 4\ell\rho_-sz(1+z^2) + 2\kappa(1 - 4\kappa^2s)z^2 - (\kappa + 2\lambda s^2).$$

Динамика определяется соответствующим уравнением (верхний знак для $\rho^2 \geq 0$, нижний – для $\rho^2 < 0$):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\kappa s} Z_{\pm}(z)}. \quad (1.4.28)$$

Из полученных выражений вытекает следующий критерий.

Предложение 12. При заданных значениях s, ℓ , отвечающих уровню в $\mathcal{M}_{2,3}$, не содержащему критических точек ранга 0, количество критических окружностей в системах $\mathcal{M}_{2,3}$ равно количеству траекторий в фазовом пространстве $\overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ соответствующего уравнения (1.4.28),

где $\overline{\mathbb{R}} \approx S^1$ — прямая, дополненная точкой $z = \infty$. Таким образом, если соответствующий многочлен Z_{\pm} имеет $2m$ вещественных корней ($m = 0, 1, 2$), то на критическом уровне s, ℓ лежит m критических окружностей, за исключением случая, когда $m = 0$ и старший коэффициент многочлена положительный. В этом случае имеется две критических окружности (z пробегает все $\overline{\mathbb{R}}$), на каждой из которых сохраняет свой знак переменная ω_2 .

Отметим последний случай ($m = 0$) как особый:

$$\rho^2 > 0, \quad \varkappa - 2\lambda s^2 > 0, \quad Z_+(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (1.4.29)$$

Выписать оба показателя Морса – Ботта в явном виде для систем $\mathcal{M}_{2,3}$ не удастся. Однако оказалось возможным получить несложные выражения для их вычисления и, что самое важное, явно выделить вектор на трансверсальной площадке на траектории в гиперболических точках, по которому, за исключением особого случая (1.4.29), разрыв “восьмерки” не происходит, что позволяет определить направление атомов типа B при возрастании интеграла K .

Как и ранее, в качестве трансверсальной площадки к критической окружности (в критической точке ранга 1) выбираем ортогональное дополнение к векторам $\text{grad } \Gamma, \text{grad } L, \text{grad } H, \text{sgrad } H$.

Рассмотрим случай, не удовлетворяющий (1.4.29). На любой траектории переменная z осциллирует между корнями соответствующего многочлена $Z(z)$, включая, конечно, и возможность прохода через бесконечно удаленную точку. Возьмем на траектории точку x_0 , в которой $Z(z) = 0$. Тогда векторы $\text{grad } \Gamma, \text{grad } L, \text{grad } H$ ортогональны плоскости $O\omega_2\alpha_2$, а вектор $\text{sgrad } H$ лежит в этой плоскости и имеет вид

$$\text{sgrad } H = (0, b_2, 0, 0, b_5, 0).$$

Условный экстремум функции K на совместном уровне функций Γ, L, H

в P^6 есть критическая точка функции с неопределенными множителями Лагранжа

$$K_2 = K + (2\lambda^2 - \frac{1}{s})H + 2sL^2 - \frac{2\kappa^2}{s}\Gamma.$$

Очевидно, часть этой функции, не содержащая функций Казимира L, Γ , совпадает с (1.4.3). Пусть $\mathcal{L} = d^2K_2(x_0)$ — матрица с элементами \mathcal{L}_{ij} . Так как вектор $\text{sgrad } H$ лежит в ядре \mathcal{L} , то

$$\mathcal{L}_{22}b_2 + \mathcal{L}_{25}b_5 = 0, \quad \mathcal{L}_{25}b_2 + \mathcal{L}_{55}b_5 = 0.$$

В частности, поскольку $b_2b_5 \neq 0$ и коэффициенты $\mathcal{L}_{25}, \mathcal{L}_{55}$ имеют простые выражения

$$\mathcal{L}_{25} = -\frac{8\kappa\rho\zeta}{1 + \zeta^2}, \quad \mathcal{L}_{55} = 2\rho^2,$$

найдем упрощение для достаточно громоздкого элемента

$$\mathcal{L}_{22} = \frac{\mathcal{L}_{25}^2}{\mathcal{L}_{55}} = \frac{32\kappa^2\zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2}$$

и выражение

$$b_5 = -\frac{\mathcal{L}_{25}b_2}{\mathcal{L}_{55}} = \frac{4\kappa\zeta b_2}{\rho(1 + \zeta^2)}.$$

Возьмем в качестве первого вектора трансверсальной площадки вектор, лежащий в той же плоскости $O\omega_2\alpha_2$ и ортогональный $\text{sgrad } H$:

$$v_1 = (0, -b_5, 0, 0, b_2, 0).$$

Тогда для компьютерных расчетов вектор v_2 легко находится как нуль-пространство матрицы из пяти векторов $\text{grad } \Gamma, \text{grad } L, \text{grad } H, \text{sgrad } H, v_1$. Хотя его аналитическое выражение и достаточно сложно, все необходимые расчеты легко выполняются в динамическом режиме. Кроме того, матрица ограничения квадратичной формы \mathcal{L} на трансверсальную площадку в базисе (v_1, v_2) оказывается диагональной, так что показатели Морса – Ботта имеют вид

$$\mu_1 = \mathcal{L}v_1 \cdot v_1, \quad \mu_2 = \mathcal{L}v_2 \cdot v_2.$$

В данный момент нам важно, что, как показывает анализ проекций интегральных многообразий на плоскость $O\omega_1\omega_2$, в окрестности систем $\mathcal{M}_{2,3}$ так же, как и в случае с системой \mathcal{M}_1 , критическая поверхность гиперболической окружности никогда не рвется в направлении оси $O\omega_2$. В частности, это означает, что для атомов типа B вектор v_1 всегда указывает во “внешность восьмерки”. Следовательно, если $\mu_1 > 0$, то в направлении “головы” атома функция K возрастает (“голова” вверх), а если $\mu_1 < 0$, то в направлении “головы” атома функция K убывает (“голова” вниз). Из найденных выражений для различных элементов получаем

$$\mu_1 = \mathcal{L}_{22}b_5^2 - 2\mathcal{L}_{25}b_2b_5 + \mathcal{L}_{55}b_2^2 = 2 \frac{[16\kappa^2\zeta^2 + \rho^2(1 + \zeta^2)^2]^2}{\rho^2(1 + \zeta^2)^4} b_2^2.$$

Итак, направление ребер у несимметричных атомов определяется знаком величины ρ^2 . Поскольку в \mathcal{M}_2 все точки ранга 1 имеют по доказанному эллиптический тип и $\rho^2 > 0$, получим следующее утверждение.

Предложение 13. *При возрастании интеграла K на изоэнергетическом уровне $Q_{\ell,h}^3$ в точках критической подсистемы \mathcal{M}_2 на любой невырожденной критической окружности происходит бифуркация A_+ рождения тора.*

В системе \mathcal{M}_3 ситуация несколько сложнее, так как известно из классической задачи, что здесь возможно присутствие атомов C_2 [103]. Для неособого случая выше доказано, что при наличии двух траекторий на одном и том же уровне интегралов распределение знаков в парах показателей Морса – Ботта одинаково. Рассмотрим особый случай (1.4.29). На плоскости (s, ℓ) условиям положительности указанных констант отвечает область

$$\lambda^2 s^2 (2s^2 - 1) < \ell^2 < \frac{s}{2} (1 - 2\lambda^2 s).$$

На рис. 1.19 этим условиям удовлетворяют области 1–3. Здесь кривая κ_0 отвечает граничному случаю обращения в ноль старшего коэффици-

ента многочлена Z_+ , а кривая δ_2 , обозначающая согласно договоренности во всех пространствах интегральных постоянных образ соответствующего множества критических точек ранга 0, является, конечно, дискриминантным множеством многочлена Z_+ . Обозначения Δ_0, Δ_3 также отвечают введенным ранее. В областях 2 и 3 многочлен Z_+ имеет вещественные корни, соответственно, четыре и два. Лишь в области 1 таких корней нет, поэтому здесь и реализуется случай (1.4.29). Очевидно, эта область имеет пересечение с осью $\ell = 0$ при

$$s \in (0, \min\{1/2, 1/2\lambda^2\}), \quad (1.4.30)$$

а так как $Z_+ > 0$ на всей прямой, то удобно взять для упрощения вычислений $z = 0$. Тогда векторы, задающие трансверсальную площадку к периодическому решению, легко находятся

$$v_1 = \left(-(1 + 2\lambda^2 s), 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2s(1-2\lambda^2 s)}}{\sqrt{1+2s}} [(1+s)\lambda^2 s - 1], \lambda s(3 - 2\lambda^2 s) \right),$$

$$v_2 = \left(0, \frac{\lambda\sqrt{s(1+2s)}}{\sqrt{2(1-2\lambda^2 s)}}, 1, 0, 0, 0 \right).$$

Квадратичная форма с матрицей \mathcal{K} на этой паре векторов записывается диагональной матрицей, а собственные числа таковы:

$$\mu_1 = \frac{4s}{1+2s} [1 + \lambda^2 s^2 (5 - 2\lambda^2 s)]^2, \quad \mu_2 = \frac{1}{s} (8\lambda^2 s^3 - 1).$$

Ясно, что $\mu_1 > 0$. Обращение в нуль выражения для μ_2 отвечает множеству Δ_3 вырождения точек ранга 1 (вертикальная прямая на рис. 1.19). На промежутке (1.4.30) всегда $\mu_2 < 0$. Итак, в особом случае показатели Морса – Ботта разного знака (этот факт был очевиден, так как траектории гиперболические) и, по доказанному, распределение знаков одинаково на обеих траекториях этого уровня, а именно, при рассмотренном выборе базиса это $(+, -)$. Следует констатировать, что вычисление показателей Морса – Ботта не дает возможности различить с помощью локального анализа атомы $2B$ и C_2 .

Получаем следующее утверждение.

Предложение 14. При возрастании интеграла K на изоэнергетическом уровне $Q_{\ell,h}^3$ в точках критической подсистемы \mathcal{M}_3 на невырожденных критических окружностях имеем следующие бифуркации:

1) для эллиптических траекторий (тип “центр”) — рождение тора при $\rho^2 > 0$ (атом A_+), исчезновение тора при $\rho^2 < 0$ (атом A_-);

2) для одной гиперболической траектории на критическом уровне K при $\rho^2 > 0$ — атом B_- (“внешнее” ребро вверх и пара “внутренних” ребер вниз), при $\rho^2 < 0$ — атом B_+ (“внешнее” ребро вниз и пара “внутренних” ребер вверх);

3) для двух гиперболических траекторий на критическом уровне K — два атома B , у которых направление “внешнего” ребра определяется по тому же правилу (обе “головы” вверх при $\rho^2 > 0$, обе “головы” вниз при $\rho^2 < 0$), или атом C_2 .

Пункт 4 предложения 9 — для двух гиперболических траекторий на критическом уровне K имеются разные сочетания знаков в парах (μ_1, μ_2) — в подсистеме \mathcal{M}_3 невозможен именно в силу того, что знак μ_1 совпадает со знаком ρ^2 , то есть одинаков для всех критических окружностей на одном уровне интегралов.

Условия существования движений в подсистемах $\mathcal{M}_{2,3}$ получены в [53, 90] в терминах интегральных констант s, h и s, ℓ соответственно. Из уравнений (1.1.28), (1.1.29) следует, что $\text{sgn}(\rho^2) = \text{sgn}(Y^2)$ и $\text{sgn}(\rho^2) = \text{sgn}(s \mathcal{G}^2)$. Пусть $Y_* = Y$, если ρ вещественно, и $Y_* = iY$, если ρ чисто мнимое. Тогда в плоскости (X, Y_*) кривая Γ_0 , заданная уравнением $X^2 + Y^2 = 1$, необходимость которого вытекает из (1.1.27), представляет собой окружность или гиперболу, а кривая Γ_1 , заданная уравнением $\mathcal{G}^2(X, Y) = 0$, при всех $\rho^2 \neq 0$ есть эллипс. Получаем следующее утверждение [90].

Предложение 15. Для существования вещественных решений (1.1.27) при заданных s, h, ℓ , связанных уравнениями поверхностей $\Pi_{2,3}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) при $s < 0$ окружность Γ_0 и эллипс Γ_1 имеют общую точку;
- 2) при $s > 0$ и $\rho^2 \geq 0$ окружность Γ_0 не лежит целиком строго внутри области, ограниченной эллипсом Γ_1 ;
- 3) при $s > 0$ и $\rho^2 < 0$ гипербола Γ_0 и эллипс Γ_1 имеют общую точку.

Действительно, непосредственно проверяется, что при $s < 0$ точка $X = 1, Y = 0$ лежит вне эллипса. Движение на Γ_0 происходит по такому сегменту, где $\mathcal{G}^2 < 0$, то есть внутри эллипса. Поэтому для наличия сегментов окружности внутри эллипса необходимо и достаточно наличие точки пересечения $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$. При $s > 0, \rho^2 < 0$ в действительном движении $\mathcal{G}^2 < 0$, то есть хотя бы одна точка гиперболы лежит внутри эллипса, что снова означает $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$. Наконец, при $s > 0, \rho^2 > 0$ на окружности должна существовать точка, в которой $\mathcal{G}^2 > 0$, то есть точка вне эллипса. Это не выполняется лишь в том случае, когда окружность Γ_0 лежит целиком внутри эллипса Γ_1 .

Очевидно соответствие этого утверждения и предложения 12. При этом количество критических окружностей на фиксированном уровне первых интегралов равно количеству лежащих внутри эллипса Γ_1 сегментов окружности Γ_0 при $s < 0$ и сегментов гиперболы Γ_0 при $s > 0, \rho^2 < 0$. При $s > 0$ и $\rho^2 > 0$ количество критических окружностей равно количеству сегментов окружности вне эллипса, за исключением особого случая (1.4.29). В этом случае вся окружность лежит вне эллипса, то есть точек пресечения нет, сегмент один, но траекторий две в силу возможности выбора двух знаков перед не обращающимся в нуль радикалом \mathcal{G} .

Напомним обозначение $D = \sqrt{4 + r^2(r - \lambda)^2} > 0$ и в дополнение

к (1.4.5) положим

$$\begin{aligned}\theta_{\pm}(r) &= \frac{r - \lambda}{4\lambda} [r(r - \lambda) \mp D], \\ \eta_{\pm}(r) &= \frac{1}{2} [\lambda(r - \lambda) \pm D] \sqrt{\psi_{\pm}(r)},\end{aligned}$$

Как следует из (1.3.11), (1.3.15) функции $\varphi_{\pm}(r)$, $\theta_{\pm}(r)$, $\eta_{\pm}(r)$ являются выражениями интегралов H, S, L в критических точках ранга 0, принадлежащих подсистемам $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$.

Следующая теорема соответствует предложению 4 работы [53].

Теорема 11. *(S, L)-диаграмма критической системы \mathcal{M}_2 состоит из следующих множеств:*

$$\begin{aligned}\delta_1 : \quad & s = \theta_-(r), \quad \ell = \pm\eta_-(r), \quad r \in [0, \lambda); \\ \delta_3 : \quad & s = \theta_+(r), \quad \ell = \pm\eta_+(r), \quad r \in (\lambda, +\infty).\end{aligned}$$

Внешней границей допустимой области \mathcal{D}_2 служит связная кривая δ_1 . Кривая δ_3 состоит из двух компонент и разбивает \mathcal{D}_2 на три подобласти. Точкам подобласти, содержащей значения $\ell = 0$, отвечает одна критическая окружность, точкам двух других подобластей, ограниченных кривой δ_3 , отвечают две критических окружности. Качественных перестроек диаграммы по параметру λ не происходит, кроме предельного случая $\lambda = 0$.

На рис. 1.20 вместе с (S, L)-диаграммой второй критической подсистемы (для общего случая (a) $\lambda > 0$ и для предельного случая (b) $\lambda = 0$) показаны область b_1 с одной критической окружностью и две симметричных относительно $\ell = 0$ области b_2 с двумя критическими окружностями. В области, помеченной звездочкой, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$, поэтому движений нет. Согласно предложению 7 все точки ранга 1 имеют тип “центр”. Ключевое множество здесь — только критические точки ранга 0. Как обычно, образы особых точек, порожденных экстремальными значениями первых интегралов на ключевом множестве, для одних и тех же то-

чек в прообразе на \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 обозначены одинаково (здесь это точки A и C). Свойства соответствующих атомов собраны в табл. 1.4.3.

Таблица 1.4.3

Область (время жизни)	К-во окр-стей	Показатели Морса–Ботта	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Атом	Аналоги
b_1 $(0 \leq \lambda < +\infty)$	1	(+ +)	Да/Да	A_+	1 [25, Рис. 6.3] a_1 [51, Рис. 2] α_1 [27, Рис. 11] α_1 [116, Рис. 1]
b_2 $(0 \leq \lambda < +\infty)$	2	(+ +),(+ +)	Да/Нет	$2A_+$	Переход III→VI [25, Рис. 6.1θ] α_2 [27, Рис. 11]

Из полученных результатов по критическим подсистемам $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ вытекает следующее простое описание допустимой области \mathcal{D} в пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$ констант общих интегралов – образа фазового пространства P^5 под действием отображения момента (1.2.6). Считаем λ заданным.

Теорема 12. *Допустимая область $\mathcal{D} = J(P^5)$ есть односвязное множество, внешней границей которого служат образы областей a_1, a_{12} первой критической подсистемы и областей b_1, b_2 второй критической подсистемы.*

Доказательство. Фиксируем точку (ℓ, h) , для которой $Q_{\ell, h}^3 \neq \emptyset$. Множество таких точек — односвязная область на плоскости Olh , ограниченная снизу кривой δ_1 (см. рис. 1.6), гомеоморфная замкнутой полуплоскости. Все $Q_{\ell, h}^3$ — компактны и связны, поэтому $K(Q_{\ell, h}^3)$ — отрезок, стягивающийся в точку над δ_1 . В частности, \mathcal{D} — приведенное расслоение отрезков над замкнутой полуплоскостью, гомеоморфное (но не диффеоморфное) замкнутому полупространству.

Фиксируем h , рассмотрим компактное инвариантное подмножество $Q_h^4 = H^{-1}(h)$ в P^5 и бифуркационную диаграмму $\Sigma_{LK}(h)$ отображения

$$L \times K|_{Q_h^4} : Q_h^4 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, что $\Sigma_{LK}(h)$ есть образ при отображении момента пересечений Q_h^4 с критическими подсистемами \mathcal{M}_i . Рассмотрим замкнутую область, ограниченную образом полосы между δ_1 и ℓ_0 плоскости (p, h) на поверхности Π_1 (то есть образом областей a_1, a_{12}) и образом всей подсистемы \mathcal{M}_2 на Π_2 (то есть образом областей b_1, b_2). Образ подсистемы \mathcal{M}_3 заведомо имеет точки внутри этой области (например, при $\ell = 0$). В пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$ образ \mathcal{M}_3 связан, поэтому если бы существовали точки в $J(\mathcal{M}_3)$ за пределами указанной области, то имелось бы трансверсальное пересечение образа $J(\mathcal{M}_3 \cap Q_h^4)$ и замыкания объединения кривых $a_1 \cup a_{12}$ (легко понять просто из геометрии Π_1, Π_3 , что общая часть, служащая кривой касания, за пределы этой области поверхность Π_3 не выводит). Такое пересечение происходит по части кривой δ_2 на границе между a_1, a_{12} , однако, по доказанному, на площадке, трансверсальной к \mathcal{M}_1 в прообразе соответствующих точек диаграммы системы \mathcal{M}_1 , все критические точки ранга 0 и 1 имеют эллиптический тип, поэтому выход за пределы указанной ограниченной области невозможен. \square

Различные типы оболочки сечений множества $\Sigma \subset \mathbb{R}^3(\ell, h, k)$ плоскостями постоянной координаты h приведены на рис. 1.21: (a) $-1 < h < \lambda^2/2$; (b) $\lambda^2/2 < h < h_C(\lambda)$; (c) $h > h_C(\lambda)$ (без сечений поверхности Π_3 , целиком лежащей внутри). При $h = -1$ сечение допустимой области стягивается в точку. В случае (c) пунктиром показан образ области $\overline{a_2}$, для точек которой, как показано выше, не существует вещественных движений. Таким образом, допустимая область имеет форму “носа ладьи”, причем вначале “палуба” гладкая, а затем в середине возникает “ребро”.

Перейдем к классификации областей в образе подсистемы \mathcal{M}_3 . Полное описание допустимой области на плоскостях констант интегралов S, H и S, L дано в работах [53, 90]. Следующая теорема соответствует предложению 5 работы [53].

Теорема 13. *(S, L) -диаграмма критической системы \mathcal{M}_3 состоит из следующих множеств:*

$$\begin{aligned} \delta_2 : \quad & s = \theta_+(r), \quad \ell = \pm \eta_+(r), \quad r \in (-\infty, 0]; \\ \Delta_0 : \quad & \ell = \pm \sqrt{\frac{s}{2}(1 - 2\lambda^2 s)}, \quad 0 < s \leq \frac{1}{2\lambda^2}; \\ \Delta_3 : \quad & s = \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, \quad \begin{cases} \ell \in \mathbb{R}, & \lambda \leq \lambda^* \\ |\ell| \geq \frac{2\lambda^{2/3} - \sqrt{4 + \lambda^{4/3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^{1/2}}, & \lambda > \lambda^* \end{cases} \end{aligned}$$

В допустимую область \mathcal{D}_3 не входят следующие компоненты дополнения к диаграмме, в которых не существует критических движений: при всех λ — область, прилегающая к оси $s = 0$ и ограниченная ветвями кривых Δ_0, δ_2 ; при $\lambda > \lambda^$ — область, ограниченная кривой δ_2 между двумя ее точками пересечения с осью $\ell = 0$ при $r \neq 0$.*

Перестройки типов диаграмм в области $\lambda \geq 0$ происходят при следующих значениях параметра: $0, \lambda_, 1, \lambda^*, \sqrt{2}$.*

Неравенства для r, s, ℓ , определяющие допустимую область для точек ключевого множества, мгновенно следуют из критерия, данного в предложении 12.

Для критических точек подсистем $\mathcal{M}_{2,3}$ отдельно сформулируем утверждение о существовании вырожденных периодических решений, аналогичное предложению 11.

Предложение 16. *В допустимую область на бифуркационной диаграмме Σ отображения момента J входит следующий сегмент ребра возвра-*

та Π_3 – образ вырожденных критических движений ранга 1:

$$\Delta_3 : \quad \ell = \pm \sqrt{\frac{h - h^*}{2}}, \quad h \in \begin{cases} [h^*, +\infty), & \text{при } \lambda \leq \lambda^* \\ [h^{**}, +\infty), & \text{при } \lambda > \lambda^* \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{\lambda^{2/3}}{2}(3 - \lambda^{4/3}), \\ h^{**} &= \frac{1}{4} \left[(4 + \lambda^{4/3})^{3/2} - \lambda^{2/3}(6 + \lambda^{4/3}) \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3} \right)^2 \left(2\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} + \lambda^{2/3} \right). \end{aligned}$$

или, в терминах констант s, ℓ

$$\Delta_3 : \quad s = \frac{1}{2\lambda^{1/3}}, \quad \begin{cases} \ell \in \mathbb{R}, & \lambda \leq \lambda^* \\ |\ell| \geq \frac{2\lambda^{2/3} - \sqrt{4 + \lambda^{4/3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^{1/2}}, & \lambda > \lambda^* \end{cases}. \quad (1.4.31)$$

Утверждение в координатах (s, ℓ) — часть теоремы **13**. Пересчет на плоскость (ℓ, h) выполнен по формулам **(1.2.8)**. Из них следует, что на Π_3

$$h = 2\ell^2 + h_0(s), \quad h_0(s) = \frac{1}{2s} - \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda^2 s^2. \quad (1.4.32)$$

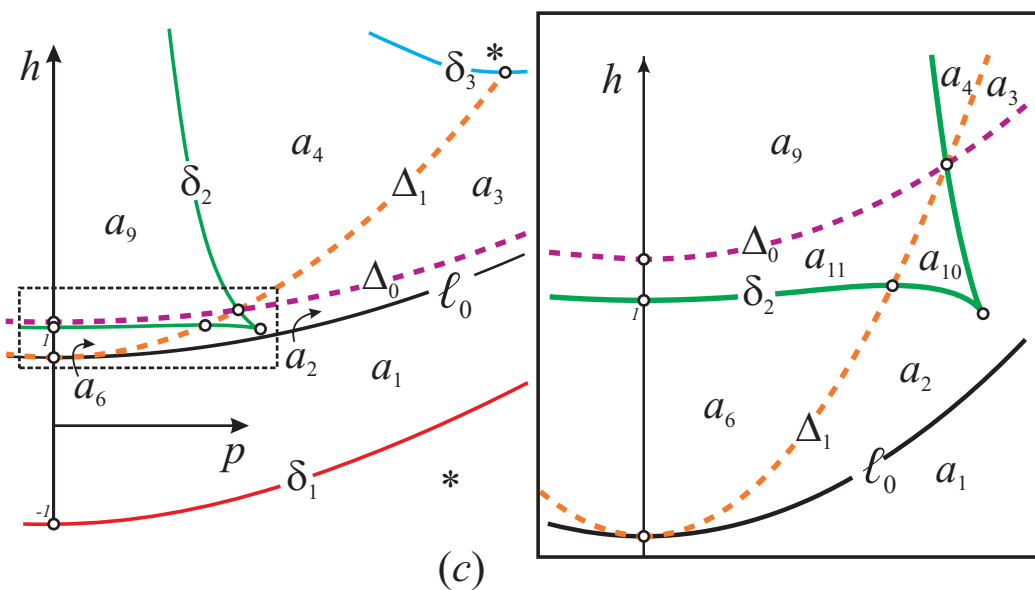
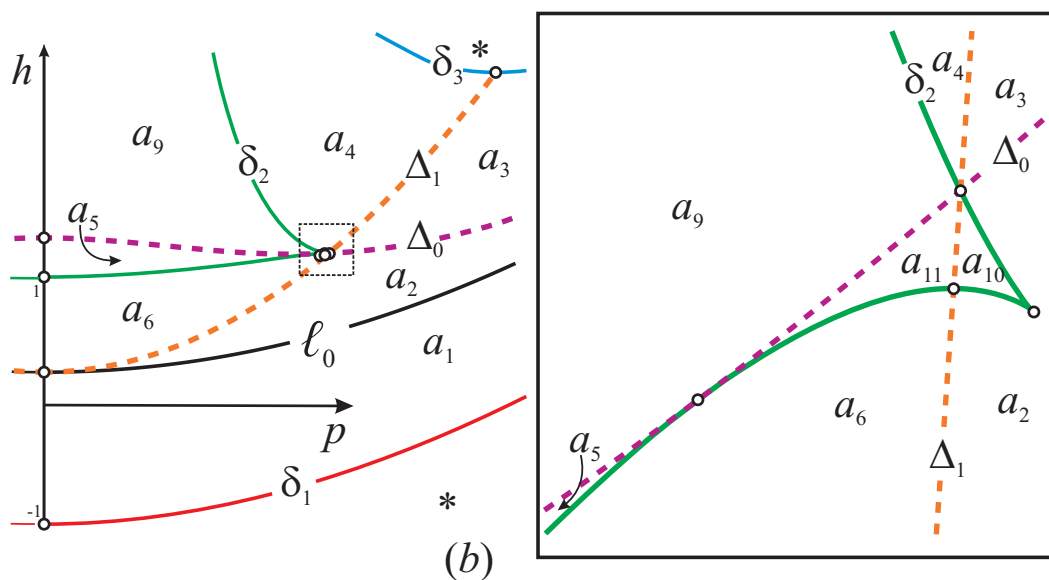
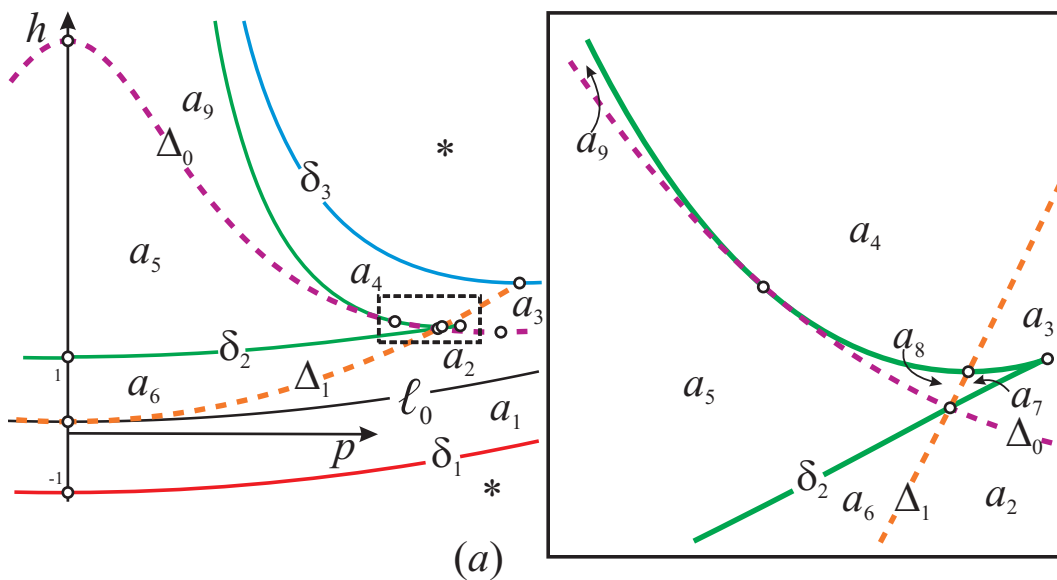


Рис. 1.11. (P, H) -диаграммы системы \mathcal{M}_1 и увеличенные фрагменты.

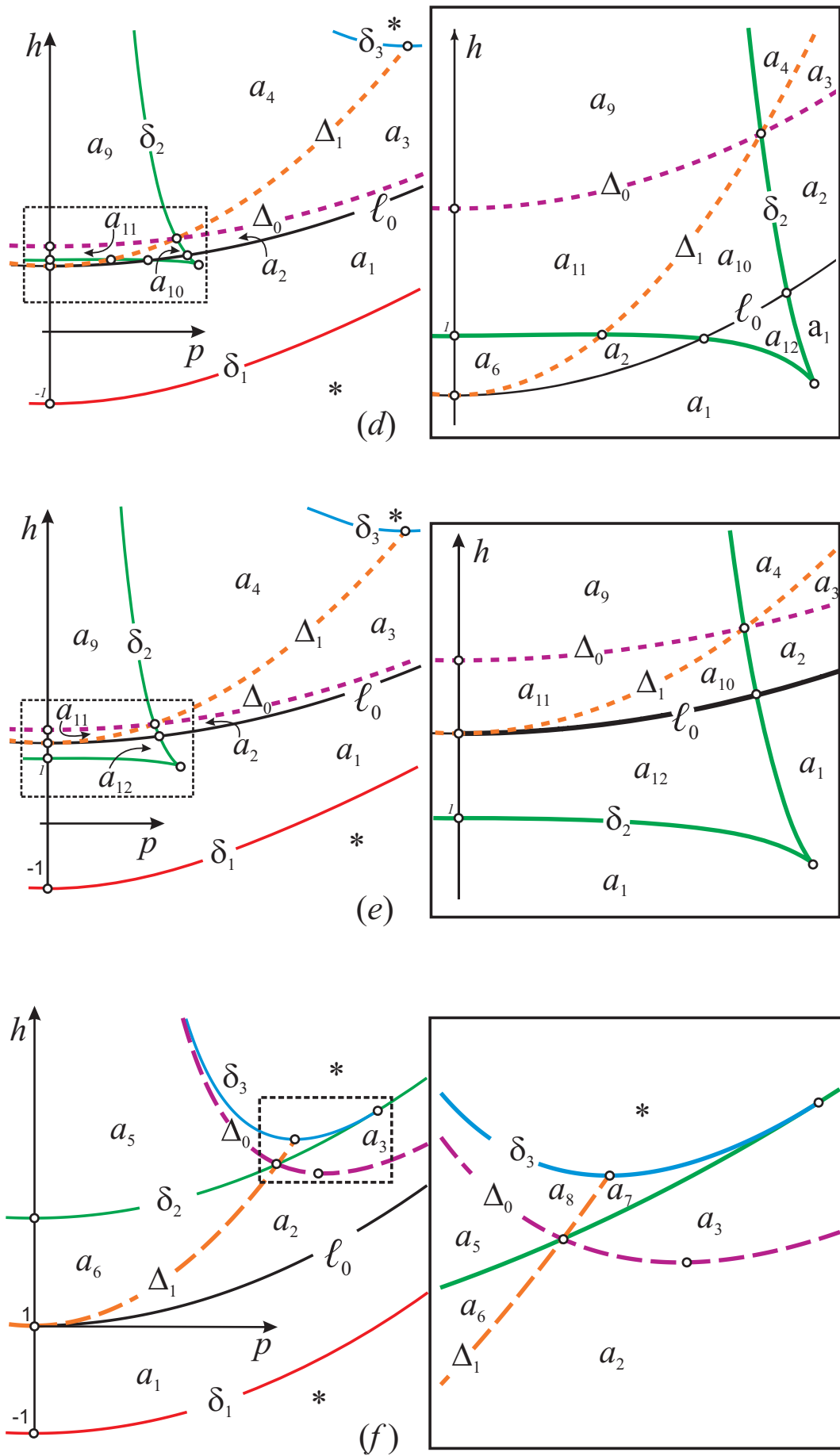


Рис. 1.12. (P, H) -диаграммы системы \mathcal{M}_1 и увеличенные фрагменты.

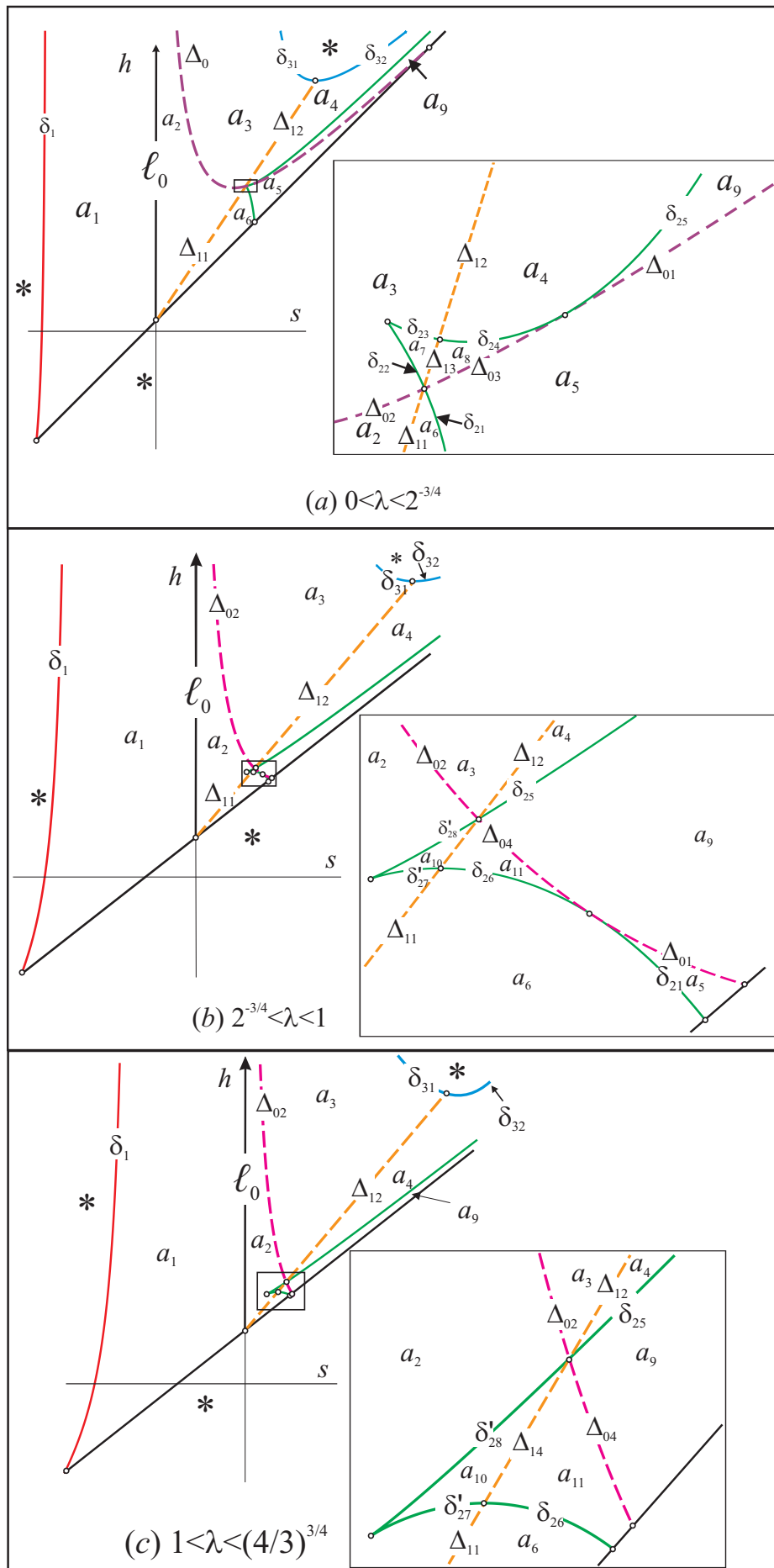


Рис. 1.13. (S, H) -диаграммы системы \mathcal{M}_1 и увеличенные фрагменты.

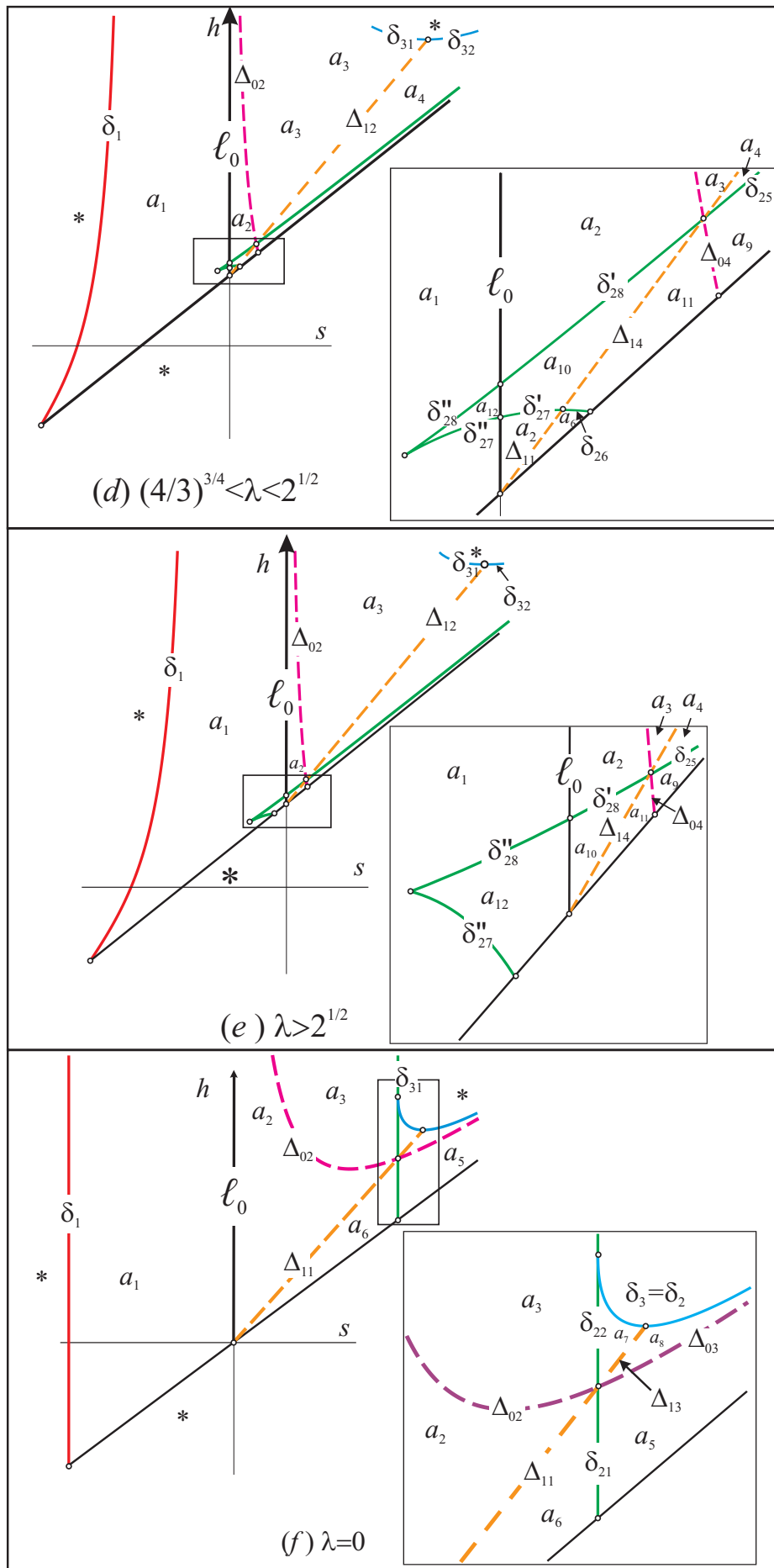


Рис. 1.14. (S, H) -диаграммы системы \mathcal{M}_1 и увеличенные фрагменты (продолжение).

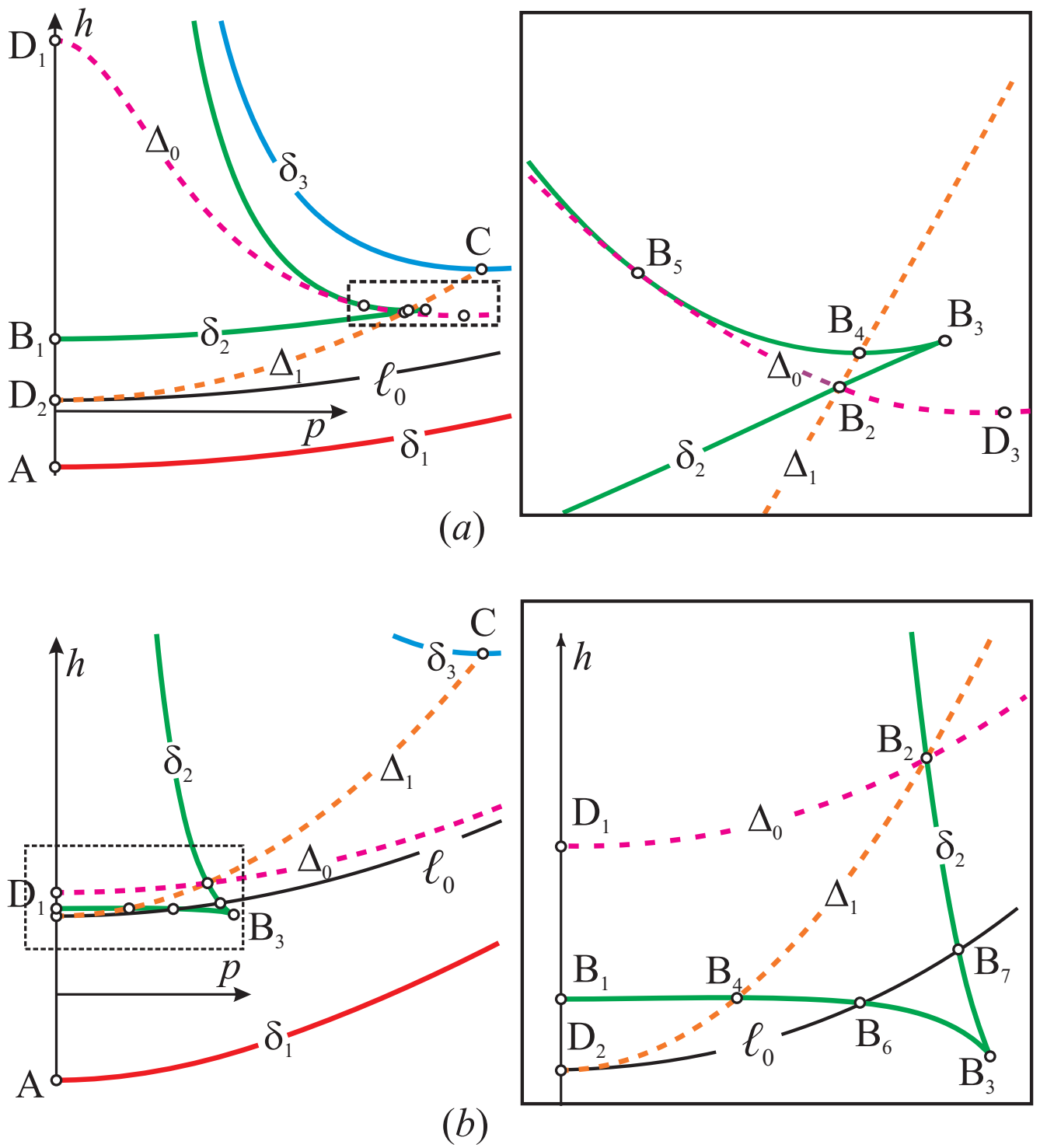
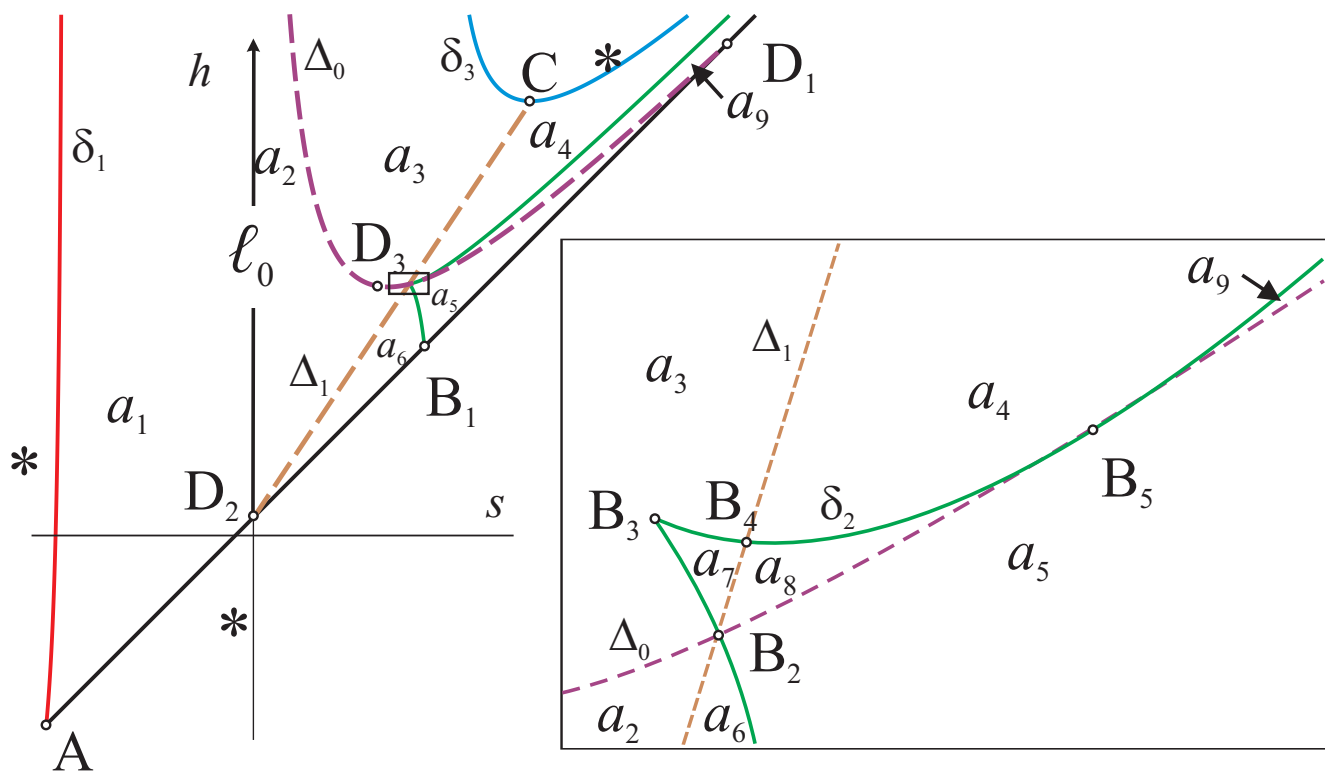
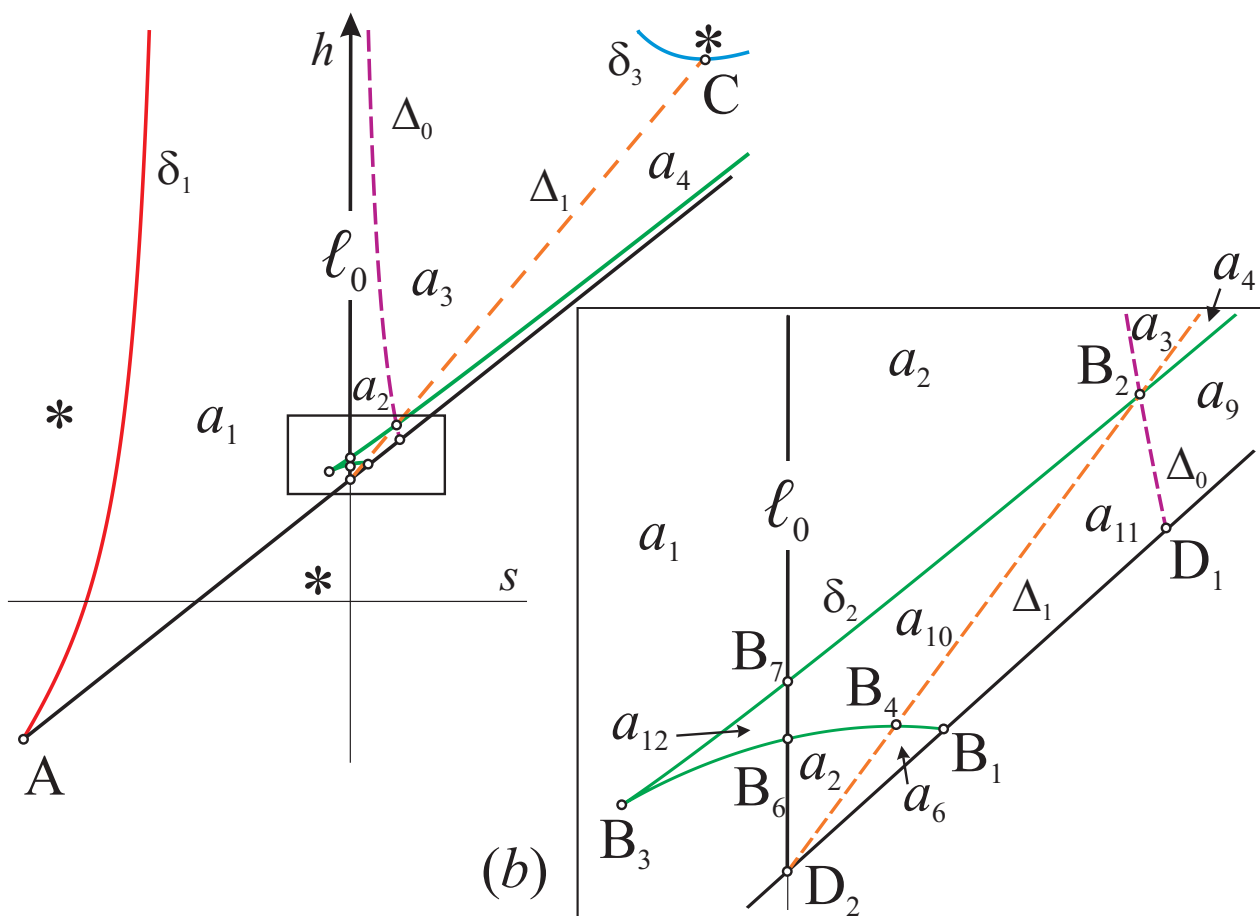


Рис. 1.15. Особые точки (P, H) -диаграммы системы \mathcal{M}_1 .



(a)



(b)

Рис. 1.16. Особые точки (S, H) -диаграммы системы \mathcal{M}_1 .

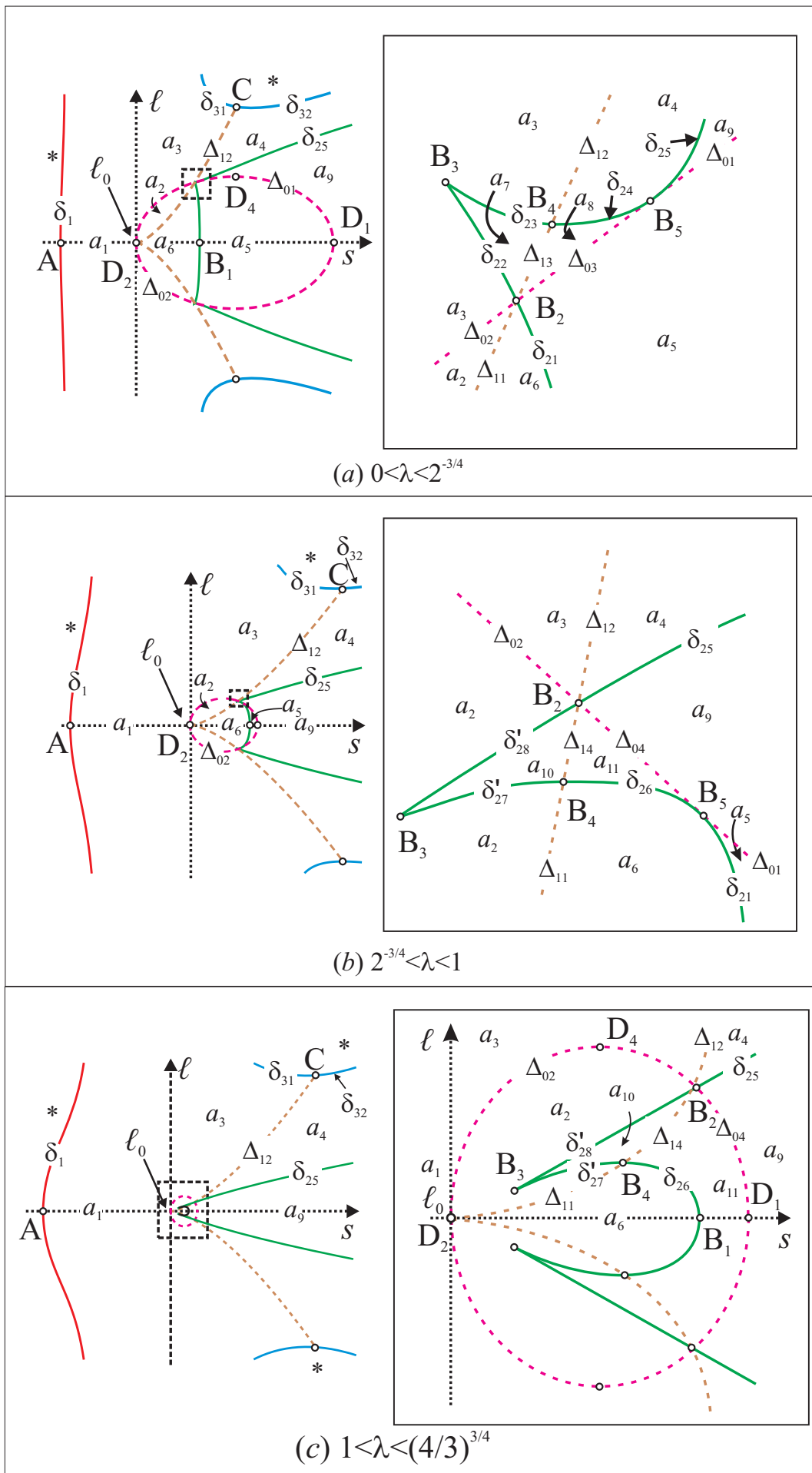
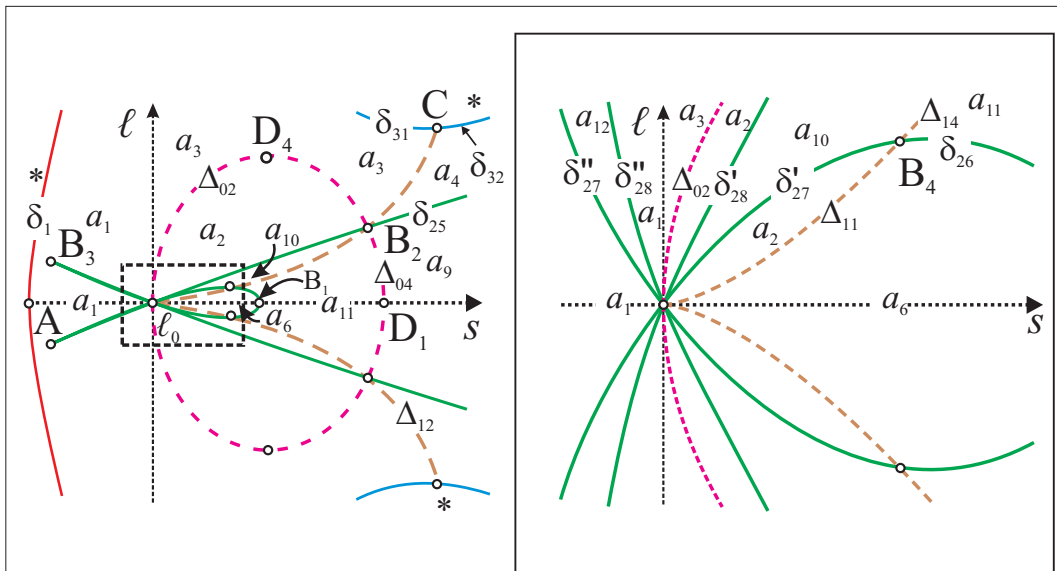
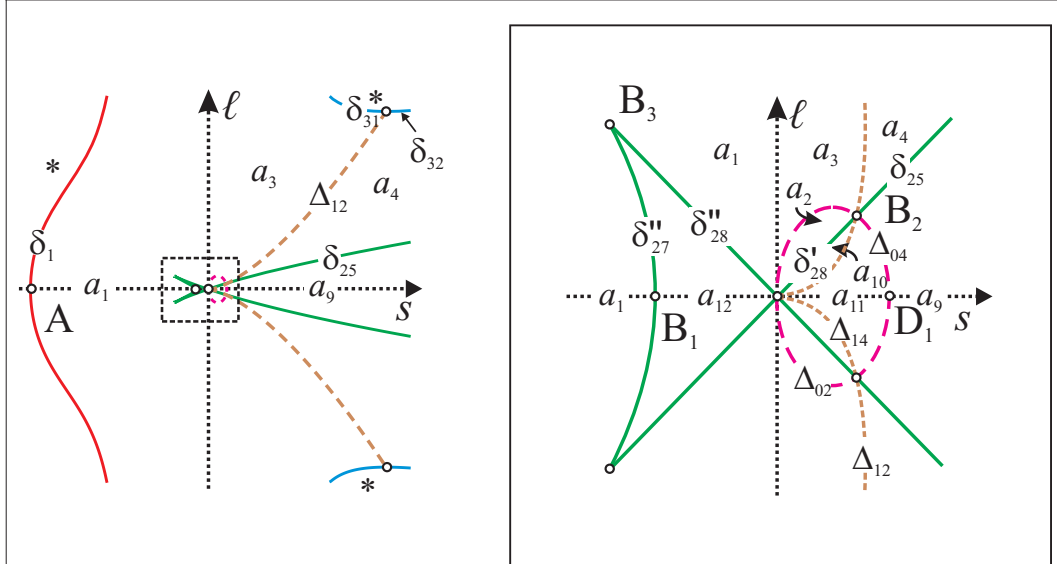


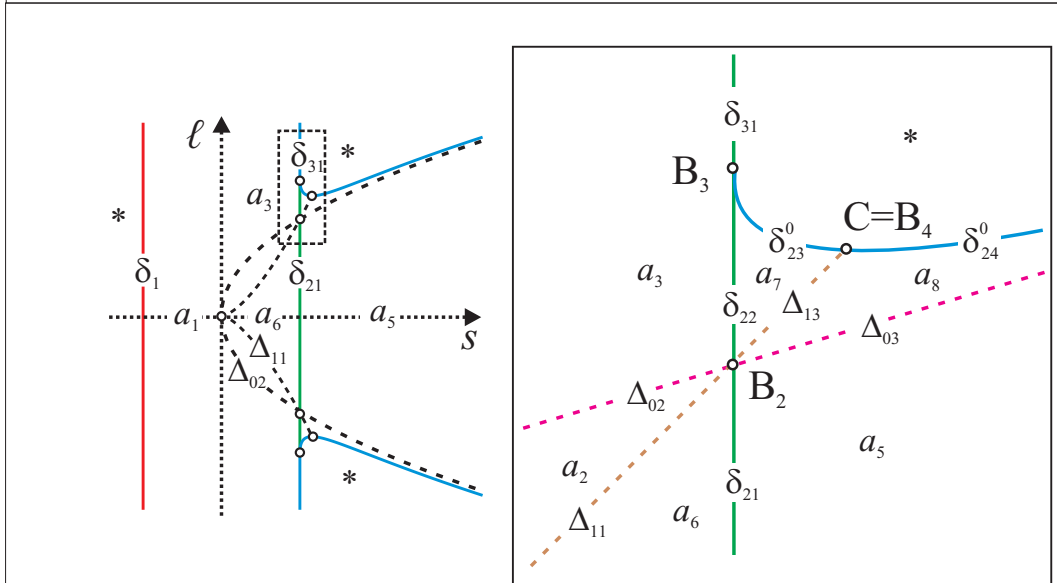
Рис. 1.17. (S, L) -диаграммы подсистемы \mathcal{M}_1 : детализация.



(d) $(4/3)^{3/4} < \lambda < 2^{1/2}$



(e) $\lambda > 2^{1/2}$



(f) $\lambda = 0$

Рис. 1.18. (S, L) -диаграммы подсистемы M_1 : детализация (продолжение).

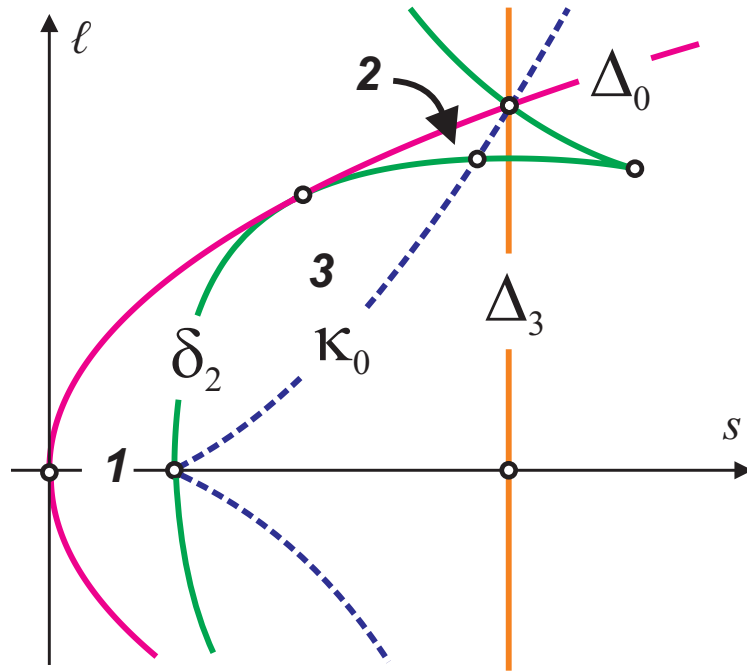


Рис. 1.19. Особый случай.

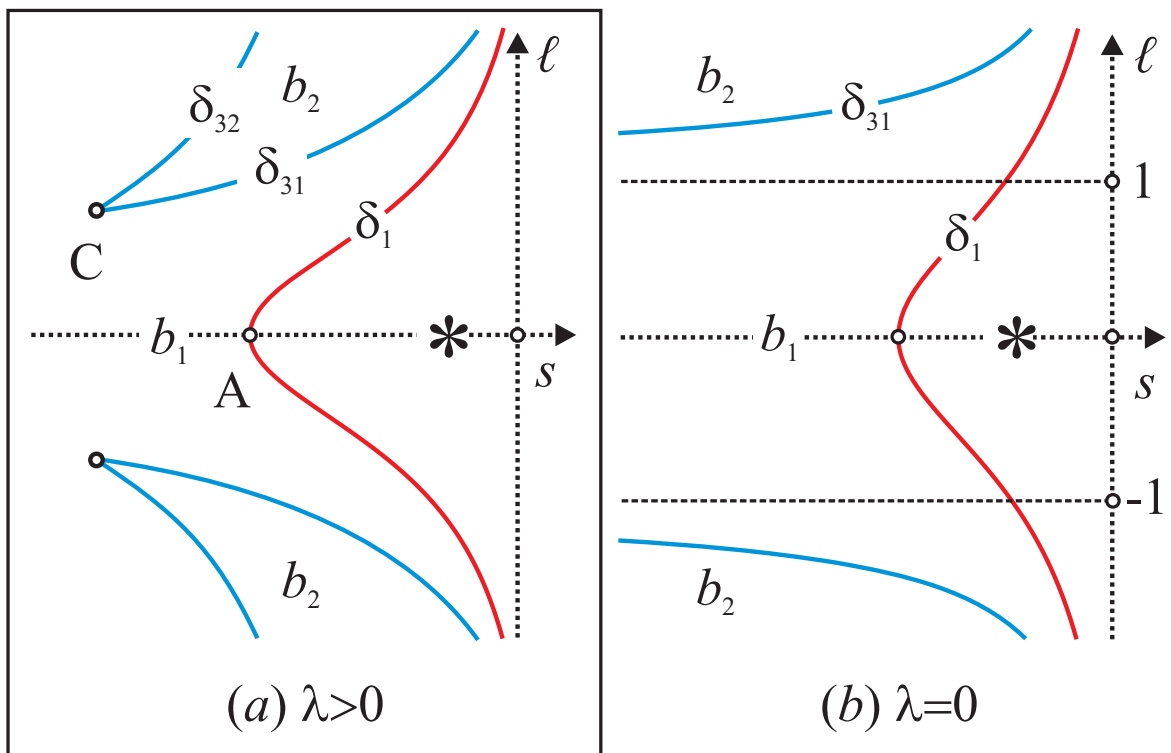
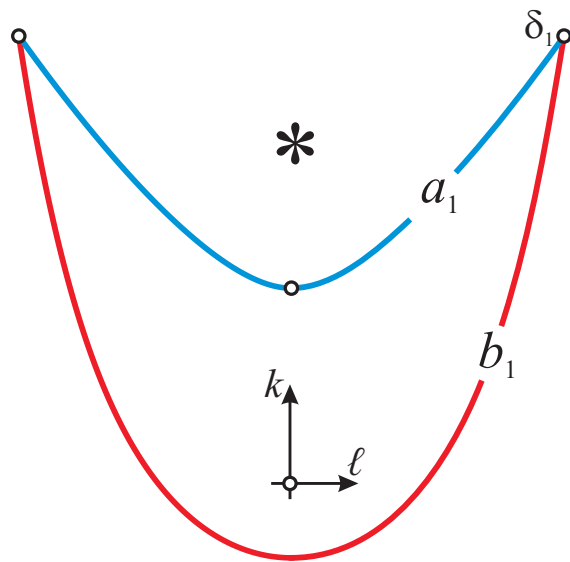
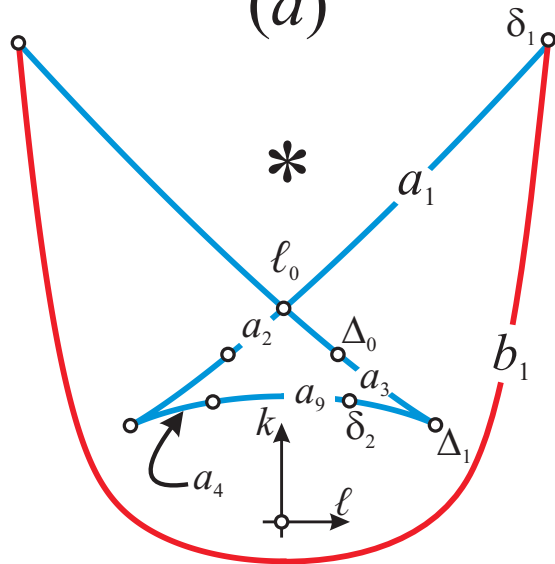


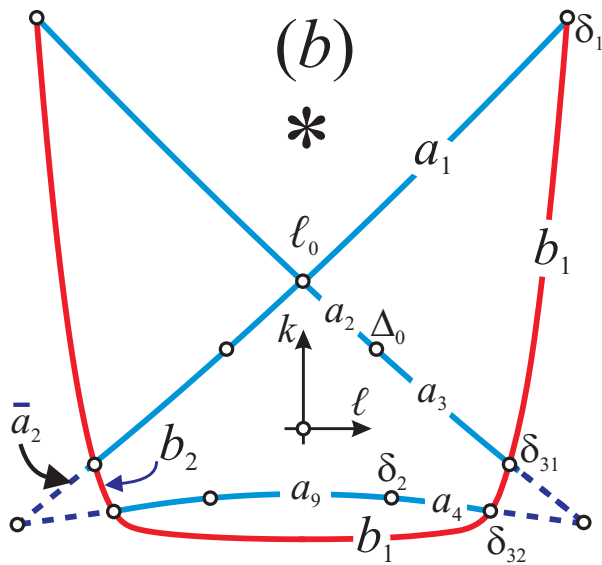
Рис. 1.20. (S, L) -диаграмма системы M_2 с полной детализацией.



(a)



(b)



(c)

Рис. 1.21. Сечения допустимой области плоскостями $h = \text{const.}$

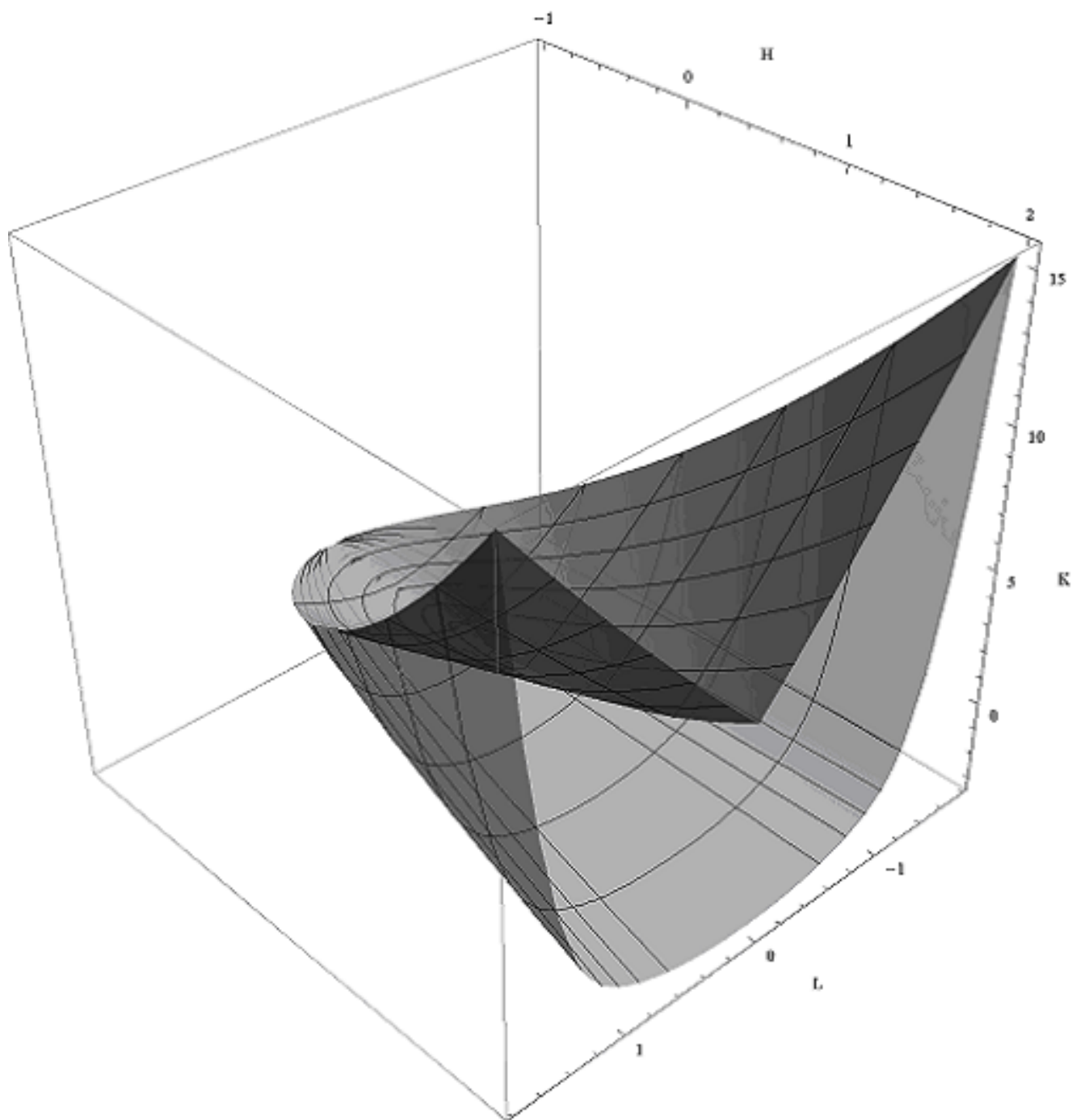


Рис. 1.22. Носовая часть допустимой области.

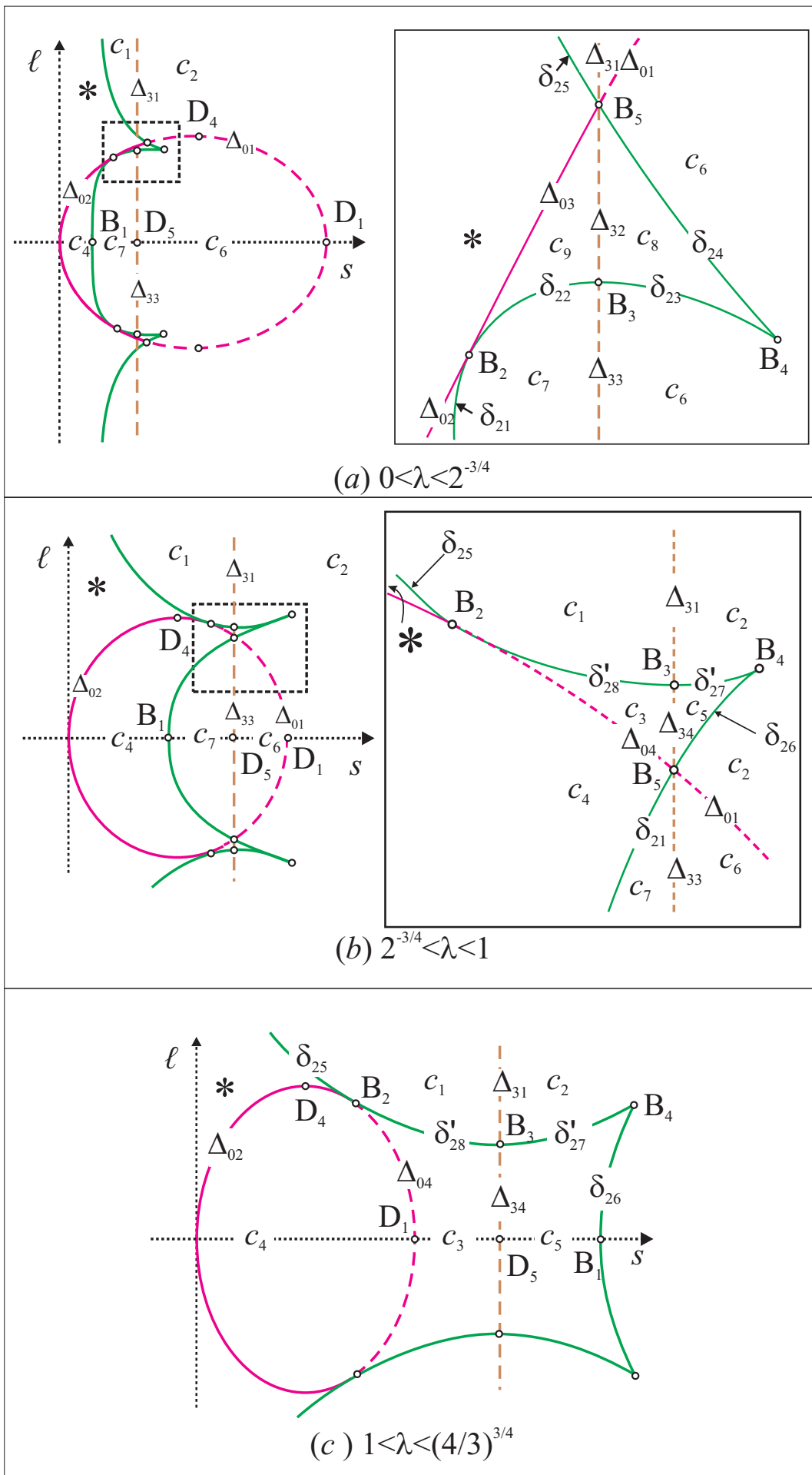


Рис. 1.23. (S, L) -диаграммы подсистемы \mathcal{M}_3 : детализация.

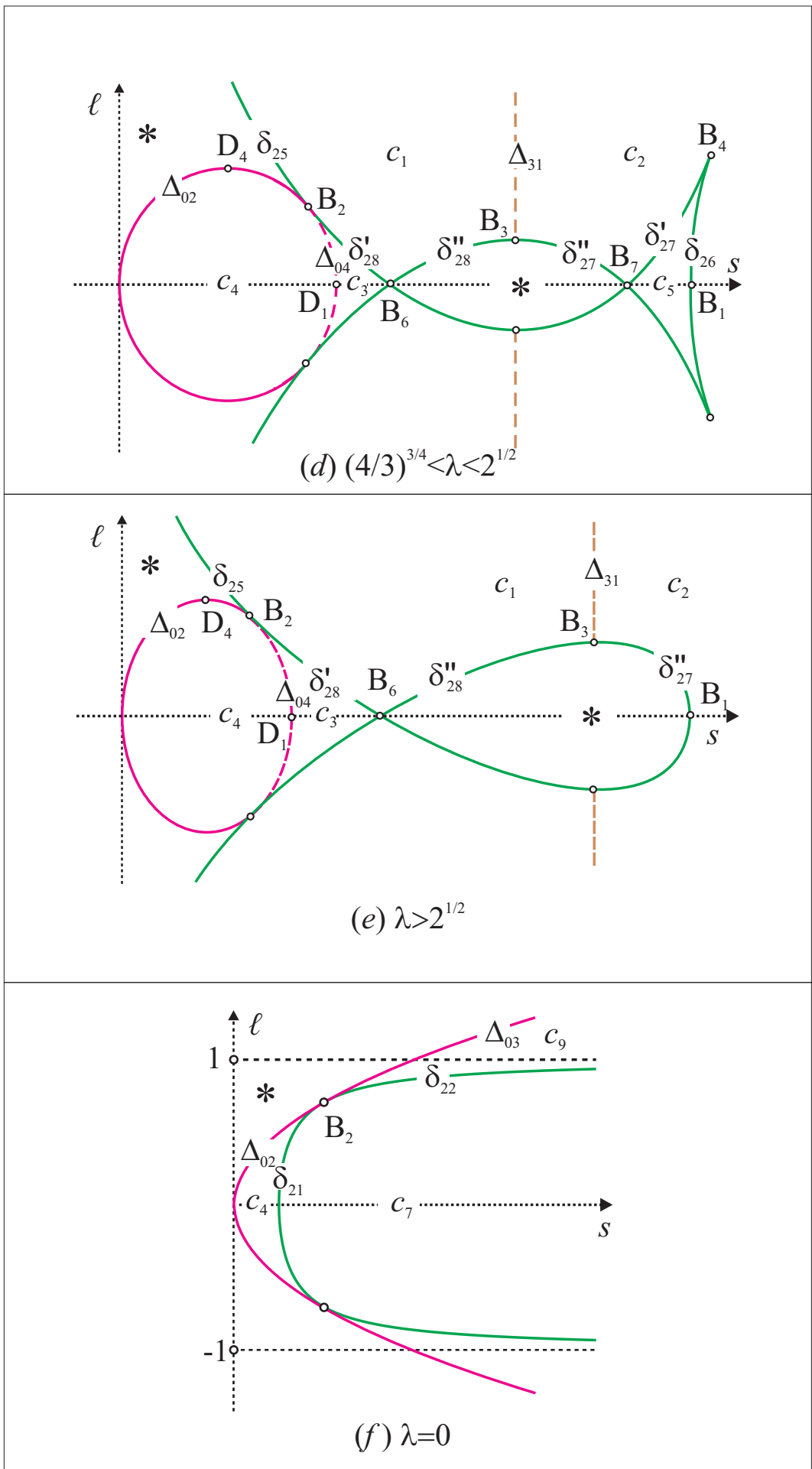


Рис. 1.24. (S, L) -диаграммы подсистемы M_3 : детализация (продолжение).
125

Нетрудно видеть, что наименьшее значение $h_0(s)$ достигается при $s = 1/(2\lambda^{1/3})$, то есть в точке пересечения кривой минимума h на \mathcal{M}_3 с образом ребра возврата Δ_3 , и это значение есть

$$\min_{s>0} h_0(s) = h^*.$$

Тогда при $\lambda \leq \lambda^*$ и $\ell \in \mathbb{R}$ имеем $h \in [h^*, +\infty)$. Граничная точка – новая особая точка на ключевых множествах, имеющая значение при рассмотрении H -атласов, так как она является точкой экстремума h -координаты на образе Δ_3 семейства вырожденных точек ранга 1:

$$D_5 : \ell = 0, \quad s_2 = \frac{1}{2\lambda^{1/3}}, \quad h = \frac{\lambda^{2/3}}{2}(3 - \lambda^{4/3}), \quad \lambda \in [0, \lambda^*]. \quad (1.4.33)$$

В случае же $\lambda > \lambda^*$, вычисляя значение (1.4.32) на Δ_3 при наименьшем допустимом значении $|\ell|$ из (1.4.31), приходим к величине h^{**} . Эти значения отвечают ранее полученной особой точке B_3 в составе ключевых множеств.

На рисунках 1.23 и 1.24 представлены (S, L) -диаграммы критической подсистемы \mathcal{M}_3 : (a) $0 < \lambda < \lambda_*$; (b) $\lambda_* < \lambda < 1$; (c) $1 < \lambda < \lambda^*$; (d) $\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$; (e) $\lambda > \sqrt{2}$; (f) предельный случай $\lambda = 0$. Здесь уместно напомнить обозначения (1.3.40). Пунктиром показаны кривые вырождения Δ_0, Δ_3 за исключением той части кривой Δ_0 , которая является внешней границей допустимой области \mathcal{D}_3 — она показана сплошной линией. Как и ранее, звездочкой отмечены области (здесь это $\overline{c_1}, \overline{c_2}$), в которых критические движения отсутствуют. На диаграммах нанесена детализация ключевых множеств в соответствии с данной выше классификацией критических точек ранга 0, а также очевидным разбиением на гладкие участки кривых Δ_0 (разбиение уже получено ранее в подсистеме \mathcal{M}_1) и Δ_3 . Напомним, что это разбиение порождено общими точками этих кривых с образом точек ранга 0 и точками взаимного пересечения. Соответствующая аналитика будет предъявлена в следующем разделе.

Теорема 13 в утверждениях относительно кривых в составе диаграммы является следствием определения диаграммы. Перестройки диаграммы по λ вычисляются непосредственно (детали см. в [53]) или же по общему свойству: это разделяющие значения λ для сечений $\lambda = \text{const}$ семейства разделяющих кривых для точек ранга 0 в плоскости (r, λ) и множества экстремумов ℓ на образах вырожденных точек ранга 1. Для доказательства теоремы в части существования движений достаточно проанализировать распределение корней и знаков старших коэффициентов соответствующих многочленов Z_{\pm} и воспользоваться предложением 12. Наглядное доказательство дает компьютерная визуализация кривых Γ_0, Γ_1 в соответствии с предложением 15. Тот факт, что в области \bar{c}_1 (см. рис. 1.23, (a)), примыкающей к оси $O\ell$, движения отсутствуют, практически очевиден, поскольку $s \neq 0$. Отсутствие критических движений в области \bar{c}_2 (рис. 1.24, (d), (e)) ранее было доказано в [96] путем исследования точек оси $\ell = 0$.

На рис. 1.23, 1.24 также приведены и особые точки, возникающие на (S, L) -диаграммах подсистемы \mathcal{M}_3 . Непосредственно проверяем, что все они уже встречались в подсистеме \mathcal{M}_1 , за исключением введенной для использования в H -атласе точки D_5 , описанной выше и заданной уравнениями (1.4.33).

Переформулируем теорему 13 в терминах интегралов S, H [90].

Теорема 14. *(S, H) -диаграмма критической системы \mathcal{M}_3 состоит из кривых*

$$\begin{aligned} \Delta_0 : \quad & h = h_{\tan}(s), \quad 0 < s \leq \frac{1}{2\lambda^2}; \\ \delta_2 : \quad & h = \varphi_+(r), \quad s = \theta_+(r), \quad r \in (-\infty, 0]; \\ \Delta_3 : \quad & s = \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, \quad \begin{cases} h \geq h^*, & \lambda \leq \lambda^* \\ h \geq h^{**}, & \lambda > \lambda^* \end{cases}; \\ h_{\min} : \quad & h = h_0(s), \quad s \in I(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$h_{\tan}(s) = \frac{1 - \lambda^2 s + 2s^2}{2s},$$

а область изменения s на кривой h_{\min} определяется так:

$$I(\lambda) = \begin{cases} (0, +\infty), & \lambda \leq \lambda^* \\ (0, s_0] \cup [s^0, +\infty), & \lambda^* \leq \lambda \leq \sqrt{2} \\ (0, s_0] \cup [1/2, +\infty), & \lambda \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

Здесь $s_0(\lambda), s^0(\lambda)$ – абсциссы точек касания кривых δ_2 и h_{\min} , существующих при $\lambda \geq \lambda^*$. Они удовлетворяют неравенствам $s_0(\lambda) < s^0(\lambda)$ при $\lambda > \lambda^*$ и $s^0(\lambda) < 1/2$ при $\lambda^* \leq \lambda < \sqrt{2}$.

Внешними границами допустимой области служат:

1) кривая h_{\min} в пределах $s \in I(\lambda)$;

2) кривая Δ_0 в пределах

$$s \in \begin{cases} (0, 1/(2\lambda^{2/3})], & \lambda \leq \lambda_* \\ (0, \sqrt{1 + \lambda^4 - \lambda^2}], & \lambda \geq \lambda_* \end{cases};$$

3) кривая δ_2 в пределах

$$s \in \begin{cases} [s_0, s^0], & \lambda^* \leq \lambda \leq \sqrt{2} \\ [s_0, 1/2], & \lambda \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

Перестройки типов диаграмм в области $\lambda \geq 0$ происходят при значениях параметра $0, \lambda_*, 1, \lambda^*, \sqrt{2}$.

Кривая h_{\min} отвечает значению $\ell = 0$ и ее появление естественно связано со складкой при накрытии поверхностью Π_3 плоскости (s, h) , поскольку h выражается через ℓ^2 . Полное исследование (S, H) -диаграмм подсистемы \mathcal{M}_3 и их компьютерная визуализация выполнены в работах [90, 117]. Значения s_0, s^0 соответствуют особым точкам B_6, B_7 , отмеченных на (S, L) -диаграммах на рис. 1.24, (d), (e). Эти точки существуют при $\lambda \geq \lambda^*$ (совпадая при $\lambda = \lambda^*$), причем в момент $\lambda = \sqrt{2}$ точка B_7 сливается

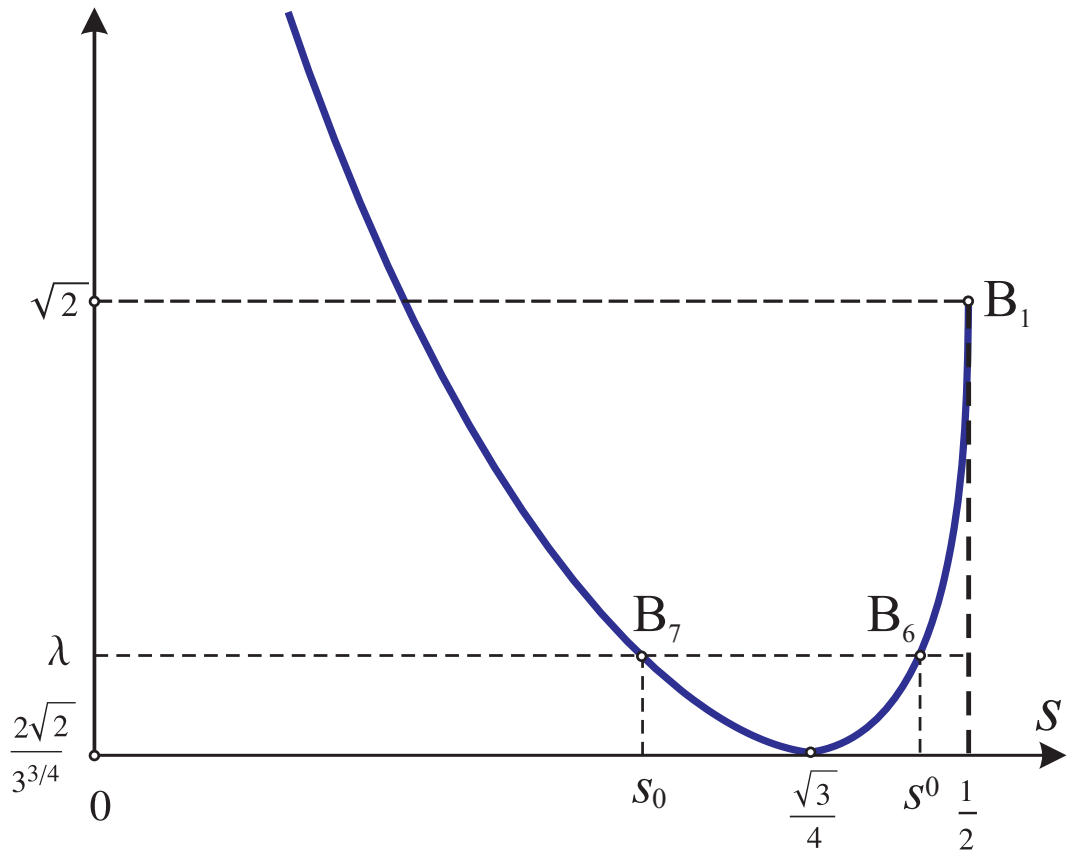


Рис. 1.25. Связь s и λ в точках $B_{6,7}$.

с B_1 и затем переходит в недопустимую область (на δ_2 соответствующее значение r было бы положительным, что не так). Доказательства и пояснения имеются в работе [90]. Они легко следуют из уравнения связи s и λ в этих точках, полученных исключением вспомогательного параметра x из соответствующего параметрического представления (1.4.21) значений s_2, λ в этих точках (см. рис. 1.25):

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+2s} - \sqrt{1-2s}}{(2s)^{3/2}}, \quad s \in (0, \frac{1}{2}].$$

Применение полученных результатов к точкам областей $c_1 - c_9$ в (s, ℓ) -образе подсистемы \mathcal{M}_3 приводит к описанию характеристик и атомов, собранных в табл. 1.4.4. Как видим, все области, кроме c_1, c_8 , при рассмотрении расширенных диаграмм в пространстве (s, ℓ, λ) имеют выход на соответствующие области исследованных ранее задач ($\lambda = 0$ или $\ell = 0$), поэтому для атомов здесь добавлена лишь их направленность. В частности, наличие атома C_2 в области c_4 и двух атомов B в области c_9

обосновано в работах [25, 103, 104] (в других обозначениях). Наличие двух атомов B в области c_5 следует из результатов [51]. В новых областях c_1, c_8 по доказанному выше критические окружности имеют эллиптический тип, их количество вычисляется по приведенным критериям, а направленность определяется показателями Морса – Ботта.

Таблица 1.4.4

Область (время жизни)	К-во окр-стей	Показатели Морса–Ботта	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Атом	Аналоги
c_1 ($0 < \lambda < +\infty$)	1	(– –)	Нет/Нет	A_-	Отсутств.
c_2 ($0 < \lambda < +\infty$)	1	(– +)	Нет/Да	B_+	a_5 [51, Рис. 2] β_3 [116, Рис. 1]
c_3 ($\lambda_* < \lambda < +\infty$)	2	(– –),(– –)	Нет/Да	$2A_-$	b_4 [51, Рис. 3] α_7 [116, Рис. 1]
c_4 ($0 \leq \lambda < +\infty$)	2	(+ –),(+ –)	Да/Да	C_2	8 [25, Рис. 6.3] a_4, b_5 [51, Рис. 2,3] β_2 [27, Рис. 11] γ [116, Рис. 1]
c_5 ($\lambda_* < \lambda < \sqrt{2}$)	2	(– +),(– +)	Нет/Да	$2B_+$	b_3 [51, Рис. 3] β_4 [116, Рис. 1]
c_6 ($0 < \lambda < 1$)	1	(+ +)	Нет/Да	A_+	a_3, a_4 [51, Рис. 2] α_4 [116, Рис. 1]
c_7 ($0 \leq \lambda < 1$)	1	(+ –)	Да/Да	B_-	7 [25, Рис. 6.3] a_3 [51, Рис. 2] β_1 [27, Рис. 11] β_2 [116, Рис. 1]
c_8 ($0 < \lambda < \lambda_*$)	2	(+ +),(+ +)	Нет/Нет	$2A_+$	Отсутств.
c_9 ($0 \leq \lambda < \lambda_*$)	2	(+ –),(+ –)	Да/Нет	$2B_-$	E [104, Рис. 2] β_3 [27, Рис. 11]

1.4.4. Классы вырожденных точек ранга 1

Множество Δ_0

Первый класс вырожденных точек ранга 1 – это точки, лежащие в прообразе линии касания бифуркационных поверхностей. Образ этого множества в пространстве интегральных констант обозначается через Δ_0 . Это – линия касания поверхностей Π_1 и Π_3 . Ее уравнение в параметрах s, h имеет вид

$$2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + 1 = 0, \quad (1.4.34)$$

а в параметрах s, ℓ таково:

$$2\lambda^2 s^2 - s + 2\ell^2 = 0. \quad (1.4.35)$$

В совокупности с условиями вещественности получаем следующее представление Δ_0 :

$$\ell = \pm \sqrt{\frac{s}{2}(1 - 2\lambda^2 s)}, \quad h = s + \frac{1}{2s} - \frac{\lambda^2}{2}, \quad s \in \left(0, \frac{1}{2\lambda^2}\right].$$

Это множество делится на качественно различные части его пересечением с образом множества критических точек ранга 0, то есть с подмножествами δ_i ($i = 1, 2, 3$) пространства интегральных констант. Действительно, вне таких пересечений окрестность точки множества Δ_0 подвергается диффеоморфизму (как стратифицированное многообразие) и топология соответствующего прообраза сохраняется.

Напомним уравнения множеств δ_i :

$$\begin{aligned} \ell &= \mp \frac{1}{2} [\lambda(r - \lambda) + d] \sqrt{\frac{r}{2} \left[-r + \frac{1}{r - \lambda} d \right]}, \quad h = -\frac{1}{2} r(r - \lambda) + \frac{2r - \lambda}{2(r - \lambda)} d, \\ d^2 &= 4 + r^2(r - \lambda)^2, \quad r \in (-\infty, 0] \cup [0, \lambda) \cup (\lambda, +\infty), \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

при этом соответствие номеров подмножеств, промежутков изменения константы r , определяющей относительное равновесие, и знаков вели-

чины d таково:

$$\delta_1 : r \in [0, \lambda), \quad d < 0;$$

$$\delta_2 : r \in (-\infty, 0], \quad d > 0;$$

$$\delta_3 : r \in (\lambda, +\infty), \quad d > 0.$$

Параметр s поверхностей Π_i , служащий частным интегралом для критических подсистем \mathcal{M}_i , в точках (1.4.36) принимает следующие значения: в подсистеме \mathcal{M}_1 (все три кривые δ_i)

$$s = \frac{1}{2} [\lambda(r - \lambda) + d], \quad (1.4.37)$$

в подсистемах \mathcal{M}_2 (кривые δ_1, δ_3) и \mathcal{M}_3 (кривая δ_2)

$$s = \frac{r - \lambda}{4\lambda} [r(r - \lambda) - d]. \quad (1.4.38)$$

Воспользуемся выражением на \mathcal{M}_1 , тогда в точках перестройки Δ_0 уравнения (1.4.36) должны быть совместны, например, с (1.4.34). Получим

$$r^2 - 2\lambda^2 + \frac{2}{\lambda(r - \lambda) + d} - \frac{r}{r - \lambda}d = 0.$$

Отсюда либо

$$r = -\lambda, \quad (1.4.39)$$

либо

$$2 + (r - \lambda)^2(r^2 - 2\lambda r + 2\lambda^2) - (r - \lambda)(r - 2\lambda)d = 0.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{2} [(r - \lambda)(r - 2\lambda) - d]^2 = 0, \quad (1.4.40)$$

что, в частности, означает, что оно отвечает за точку касания Δ_0 с одним из δ_i . Выясним, каким δ_i соответствуют значения (1.4.39), (1.4.40). Для (1.4.39) очевидно, что $r < 0$, поэтому это – точка пересечения Δ_0 с δ_2 . Следствием уравнения (1.4.40) является $\lambda(r - \lambda)^3 + 1 = 0$, откуда

$$r = \lambda - \frac{1}{\lambda^{1/3}}. \quad (1.4.41)$$

Но при этом, согласно (1.4.40), должно быть $\operatorname{sgn} d = \operatorname{sgn}(r - \lambda)(r - 2\lambda)$, что при очевидном неравенстве $r < \lambda$ имеет место лишь при $r \leq 0$, то есть на кривой δ_2 . Итак, точка (1.4.41) касания Δ_0 и δ_2 существует тогда и только тогда, когда $\lambda \leq 1$.

Таким образом, принимая на Δ_0 в качестве независимых параметров s и λ (если заменить s на h или ℓ , то соответствие в области существования не будет взаимно однозначным), получим в квадранте $\{(\lambda, s) : \lambda \geq 0, s > 0\}$ следующие разделяющие кривые:

1) верхняя граница допустимых значений, отвечающая точке D_1 в ключевых множествах,

$$\varphi_0 : s = \frac{1}{2\lambda^2}, \quad \lambda > 0;$$

2) кривая, полученная из (1.4.37), (1.4.39) и отвечающая точке B_2 в ключевых множествах,

$$\varphi_1 : s = \sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2, \quad \lambda \geq 0;$$

3) кривая, полученная из (1.4.37), (1.4.41) и отвечающая точке B_5 в ключевых множествах,

$$\varphi_2 : s = \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, \quad \lambda \in (0, 1].$$

Соответствующая область показана на рис. 1.26, где нанесены обозначения возникающих подобластей в соответствии с рисунками 1.17, 1.18, 1.23, 1.24, на которых каждая такая подобласть порождает сегмент ключевого множества. Далее в бифуркационных диаграммах $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ эти подобласти выступают как узловые точки. Отметим, что разделяющие кривые для Δ_0 отвечают структурно неустойчивым диаграммам $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$: на плоскости (λ, ℓ) вычисление $\ell(\lambda)$ из формулы (1.4.35) переводит кривую φ_0 в ось $\ell = 0$, кривую φ_1 — в кривую π_{22} разделяющего множества Θ_L , кривую φ_3 — в кривую π_{21} в соответствии с формулами (1.3.35).

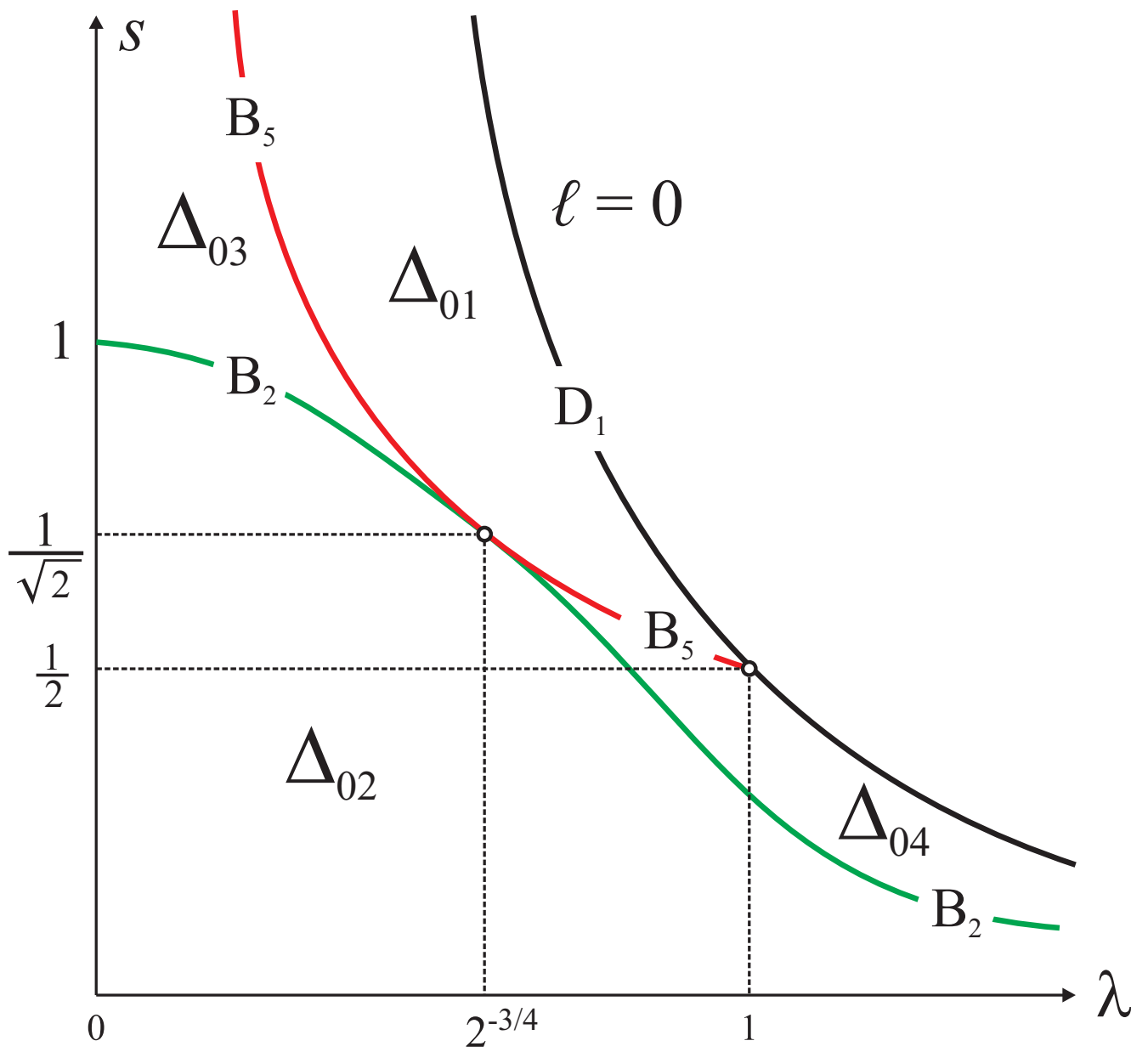


Рис. 1.26. Разделяющие кривые для точек Δ_0 .

Как видно из рис. 1.26, точки Δ_{02}, Δ_{03} имеют выход на классическую задачу Ковалевской ($\lambda = 0$), а точки Δ_{01}, Δ_{04} продолжают существовать и в случае, когда $\ell = 0$. Поэтому на первый взгляд может показаться, что для описания соответствующих круговых молекул можно воспользоваться результатами работ [27, 116]. Однако это не совсем так. Топология всех уровней первых интегралов в проколотых окрестностях этих точек была установлена еще в работах [51, 103]. Но это не дает ответа на вопрос о том, как соединить семейства при обходе исследуемых точек. В зависимости от этого, многообразие в прообразе малой окружности с центром в точке может иметь разное количество компонент связности. Обозначим через J_{0i} объединение тех связных компонент прообраза точки Δ_{0i} , которые содержат критические точки отображения момента (то есть критические окружности, составленные из вырожденных точек ранга 1).

Заметим, что сегменты Δ_{0i} *внутри* критической подсистемы \mathcal{M}_1 бифуркационными не являются – они отвечают лишь вырождению критических движений по отношению к полной системе. В частности, количество критических окружностей в прообразе Δ_{0i} такое же, как и в прообразе прилегающих с обеих сторон областей a_j . По диаграммам подсистемы \mathcal{M}_1 и данным из табл. 1.4.1 устанавливаем, что Δ_{01} разделяет a_5 и a_9 (две критических окружности в J_{01}), Δ_{02} разделяет a_2 и a_3 (одна критическая окружность), Δ_{03} разделяет a_5 и a_8 (две критические окружности), Δ_{04} разделяет a_9 и a_{11} (две критические окружности). Таким образом, поверхность J_{02} связна. Для остальных же точек на уровне J_{0i} имеется по две критические окружности, поэтому круговые молекулы по имеющимся данным однозначно не восстанавливаются. В работах [27, 116] неявно используется гипотеза о том, что круговые молекулы этих точек имеют по две связных компоненты, но не представлено никаких мотивировок для этой гипотезы и никакого аппарата для соответствующей

щих доказательств. Фактически использован некоторый принцип “максимального правдоподобия”, согласно которому молекулы следует искать среди уже известных. Как мы сейчас докажем, ответ получился правильным.

Теорема 15. *Поверхности J_{01}, J_{03}, J_{04} состоят из двух связных компонент.*

Доказательство. При $\lambda \neq 0$ воспользуемся квадратурами, найденными в работе [77]. В обозначениях настоящей работы множество Δ_0 отвечает следующим значениям параметров

$$L_3 = 0, \quad L_1 = \frac{s}{8} > 0. \quad (1.4.42)$$

Поэтому система сводится к двум уравнениям

$$\dot{\eta}^2 = \frac{L_1}{F^2(z)}, \quad \dot{z} = \sqrt{f(z)}, \quad (1.4.43)$$

где

$$F(z) = z(z - 2\lambda) - \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right), \quad f(z) = \left(\frac{s}{2} - z^2 \right) F(z),$$

переменная z вещественна, а вспомогательная переменная η , не равная бесконечности лишь на асимптотических движениях, введена равенством

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{F(z)}},$$

где переменная y – вещественна. Из (1.4.42), (1.4.43) следует, что $\dot{\eta}^2 > 0$, поэтому вещественна и переменная η , и к условию $f(z) \geq 0$ существования вещественного промежутка осцилляции переменной z добавляется условие существования асимптотических движений $F(z) \geq 0$. Полагая

$$\ell = 0, \quad s = \frac{1}{2\lambda^2},$$

получим

$$F(z) = \left[z - \left(\lambda + \frac{1}{2\lambda} \right) \right] \left[z - \left(\lambda - \frac{1}{2\lambda} \right) \right], \quad f(z) = \left(\frac{1}{4\lambda^2} - z^2 \right) F(z).$$

Переменная z осциллирует на отрезках

$$\left[-\frac{1}{2\lambda}, \lambda - \frac{1}{2\lambda}\right], \quad \left[\frac{1}{2\lambda}, \lambda + \frac{1}{2\lambda}\right]$$

при условии $\lambda < 1$ и на отрезках

$$\left[-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}\right], \quad \left[\lambda - \frac{1}{2\lambda}, \lambda + \frac{1}{2\lambda}\right]$$

при условии $\lambda > 1$. В обоих случаях $F(z) \geq 0$ на первом отрезке и $F(z) \leq 0$ – на втором. Следовательно, для первой критической окружности существуют асимптотические к ней движения, а для второй – таких движений нет. Следовательно, вторая критическая окружность исчерпывает свою компоненту связности критической интегральной поверхности. Таким образом, для точек Δ_{01}, Δ_{04} в прообразе имеется две связных компоненты с критическими окружностями.

Для точки Δ_{03} можно положить $\lambda = 0$. Тогда

$$F(z) = z^2 - \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s}\right), \quad f(z) = \left(\frac{s}{2} - z^2\right) F(z), \quad s > 1.$$

Таким образом, z осциллирует в симметричных промежутках

$$\left[-\sqrt{\frac{s}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)}\right], \quad \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)}, \sqrt{\frac{s}{2}}\right],$$

и для обеих критических окружностей имеются асимптотические движения. Достаточно ясно, что при стремлении к предельным критическим окружностям разные промежутки осцилляции z не могут дать общий предел. Однако и это все же необходимо строго доказывать, исходя из приведенных в [77] квадратур, что требует определенных технических выкладок. В результате получим, что на связной компоненте интегральной поверхности переменная z не может сменить промежутков осцилляции, поэтому таких компонент две (столько же, сколько и критических окружностей). Дадим и другое доказательство наличия двух

связных компонент. Отметим, что, несмотря на сильную степень вырождения, выражения, полученные из уравнений первых интегралов, не дают какого-либо обозримого решения данного вопроса. Воспользуемся уравнениями, полученными С.В. Ковалевской, и результатами работы [118]. Напомним, что в переменных разделения Ковалевской s_1, s_2 уравнения движения имеют вид

$$(s_2 - s_1) \frac{ds_1}{dt} = i \sqrt{2S(s_1)}, \quad (s_2 - s_1) \frac{ds_2}{dt} = -i \sqrt{2S(s_2)},$$

где

$$S(x) = (x - h + \sqrt{k})(x - h - \sqrt{k})\varphi(x), \quad \varphi(x) = x(x - h)^2 + (1 - k)x - 2\ell^2$$

и $s_1 \geq s_2$. С.В. Ковалевская также указала выражения всех фазовых переменных через переменные разделения в виде однозначных функций от s_1, s_2 и набора алгебраических радикалов

$$R_{i\gamma} = \sqrt{s_i - e_\gamma} \quad (i = 1, 2, \quad \gamma = 1, \dots, 5), \quad (1.4.44)$$

где e_γ – корни многочлена $S(x)$. Принято обозначать через e_1, e_2, e_3 корни $\varphi(x)$ в порядке возрастания, если все они вещественны, и полагать $e_{4,5} = h \mp \sqrt{k}$. Известно [76, 114], что в случае трех вещественных корней у $\varphi(x)$ переменные разделения изменяются в областях

$$s_1 \in [\max\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, e_5], \quad s_2 \in [-\infty, \min\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}],$$

и, как показано в [118] методом булевых функций, выражения для фазовых переменных в общем случае сводятся к однозначным зависимостям от следующих произведений алгебраических радикалов, приведенных к вещественной форме:

$$\begin{aligned} & \sqrt{s_1 - e_1} \sqrt{\frac{e_2 - s_2}{e_5 - s_2}} \sqrt{\frac{e_3 - s_2}{e_5 - s_2}} \sqrt{\frac{e_4 - s_2}{e_5 - s_2}}, \\ & \sqrt{s_1 - e_2} \sqrt{\frac{e_1 - s_2}{e_5 - s_2}} \sqrt{\frac{e_3 - s_2}{e_5 - s_2}} \sqrt{\frac{e_4 - s_2}{e_5 - s_2}}, \\ & \sqrt{s_1 - e_3} \sqrt{\frac{e_2 - s_2}{e_5 - s_2}} \sqrt{\frac{e_2 - s_2}{e_5 - s_2}} \sqrt{\frac{e_4 - s_2}{e_5 - s_2}} \end{aligned} \quad (1.4.45)$$

(радикалы, содержащие отношения разностей, не меняют знак при $s_2 = -\infty$). В случае, когда переменная разделения отражается от границы своей осцилляции, соответствующий радикал следует считать меняющим знак (радикал, отвечающий значению $s_2 = -\infty$, уже исключен процедурой редукции к выражениям (1.4.45)). Если какое-либо из граничных значений является кратным корнем, то соответствующий радикал тоже считается меняющим знак, так как асимптотическая траектория вместе со своими предельными точками есть связное множество.

Обратимся к рассматриваемой точке Δ_{03} при $\lambda = 0$. В этом случае

$$e_1 = \frac{1}{s} < e_2 = e_3 = e_4 = s < e_5 = s + \frac{1}{s}$$

(напомним, что $s > 1$). Тогда, обозначая трехкратный корень через e_* , получим

$$s_1 \in [e_*, e_5], \quad s_2 \in [-\infty, e_1].$$

В выражениях (1.4.45) второе и третье совпадают, произведение пары одинаковых радикалов становится однозначной функцией и на знаки алгебраических выражений не влияет. Остаются следующие алгебраические выражения

$$\sqrt{s_1 - e_1} \sqrt{\frac{e_* - s_2}{e_5 - s_2}}, \quad \sqrt{s_1 - e_*} \sqrt{\frac{e_1 - s_2}{e_5 - s_2}},$$

в которых второе меняет знак на связной компоненте интегральной поверхности и, следовательно, на количество связных компонент не влияет, а первое вдоль замыкания любой траектории сохраняет фиксированный знак, выбранный в начальный момент. Вследствие этого, поверхность J_{03} имеет две связные компоненты. Теорема доказана. \square

Множество Δ_1

Следующий класс вырожденных точек ранга 1 – это точки, лежащие в прообразе ребра возврата поверхности Π_1 . Для интегральных па-

раметров на этом множестве, обозначаемом через Δ_1 , с учетом условий существования движений имеем

$$\ell = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} s^{3/2}, \quad h = \frac{3}{2} s + \frac{\lambda^2}{2}, \quad s \in [0, s_*], \quad (1.4.46)$$

где $s_* = s_*(\lambda)$ – наибольший (вещественный) корень уравнения

$$9s^4 + 2\lambda^2 s^3 - 24s^2 - 24\lambda^2 s + 4(4 - \lambda^4) = 0, \quad (1.4.47)$$

существующий и положительный для всех $\lambda \geq 0$. Множество Δ_1 делится на качественно различные части его пересечением с образом множества критических точек ранга 0, то есть с подмножествами δ_i пространства интегральных констант, а также пересечениями с исследованным выше множеством Δ_0 . Очевидно, что кривая δ_1 в этих пересечениях не участвует. Непосредственно проверяется, что все точки пересечения $\Delta_1 \cap \Delta_0$ содержатся в $\Delta_1 \cap \delta_2$. Условие пересечения $\Delta_1 \cap (\delta_2 \cup \delta_3)$ представляется либо уравнением (1.4.47), либо уравнением

$$s^2 + 2\lambda^2 s - 1 = 0. \quad (1.4.48)$$

На плоскости (λ, s) получаем разделяющие кривые

$$\psi_1 : \lambda = \left| \frac{\sqrt{s^2 + 4} - 2s}{(\sqrt{s^2 + 4} - s)^{1/2}} \right|, \quad s > 0; \quad (1.4.49)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 : \lambda &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - s \right)}, \quad s \in (0, 1] \Leftrightarrow \\ &s = \sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (1.4.50)$$

С учетом (1.4.46) образ кривой ψ_1 на плоскости (ℓ, λ) – это объединение кривых π_{23} и π_{31} , которые вместе могут быть представлены графиком однозначной функции

$$\lambda = \left| \frac{\sqrt{s^2 + 4} - 2s}{(\sqrt{s^2 + 4} - s)^{1/2}} \right|, \quad s = (\sqrt{2}\ell)^{2/3}, \quad \ell \geq 0,$$

а образ кривой ψ_2 – это кривая π_{22} в представлении (1.3.35).

Верхняя граница s_* значений s – это ветвь кривой (1.4.49) при $s \geq 2/\sqrt{3}$, полученная в результате пересечения Δ_1 с δ_3 (точка C на ключевых множествах). Другая ветвь кривой (1.4.49) для значений $s \in (0, 2/\sqrt{3}]$ и кривая (1.4.51) – это пересечения Δ_1 с δ_2 (соответственно точки B_4 и B_2 на ключевых множествах, причем B_4 сливается с C при $\lambda = 0$). Разделяющее множество и обозначения соответствующих точек на диаграммах подсистемы \mathcal{M}_1 и на бифуркационных диаграммах приведены на рис. 1.27. Точки Δ_{11}, Δ_{13} имеют выход на частный случай $\lambda = 0$, точка Δ_{14} существует в частном случае $\ell = 0$, точка Δ_{12} таких аналогов не имеет.

Как и ранее, количество критических окружностей в прообразе Δ_{1i} устанавливается по диаграммам подсистемы \mathcal{M}_1 и данным для примыкающих областей из табл. 1.4.1. Видим, что Δ_{11} разделяет a_2 и a_6 (одна критическая окружность в прообразе), Δ_{12} разделяет a_3 и a_4 (одна критическая окружность), Δ_{13} разделяет a_7 и a_8 (две критические окружности), Δ_{14} разделяет a_{10} и a_{11} (две критические окружности). В случае, когда в прообразе точки Δ_{1i} имеется лишь одна вырожденная окружность, то есть соответствующая критическая интегральная поверхность и круговая молекула связны, для точного описания топологии окрестности точек ниже устанавливаются номера семейств, участвующих в бифуркациях. Это легко следует из результатов о прилегающих камерах и о номерах семейств в этих камерах. Если же окружностей две, то для обоснования структуры круговых молекул нужно доказательно установить число компонент связности критической поверхности-прообраза Δ_{1i} . По умолчанию в [27] предполагалось, что при $\lambda = 0$ круговая молекула точки Δ_{13} состоит из двух связных компонент, и также в [116] считалось, что из двух компонент состоит круговая молекула точки Δ_{14} при $\ell = 0$. Докажем общее утверждение, воспользовавшись квадратурами И.Н. Гашененко. Аналогично предыдущему случаю, обозначим через J_{1i}

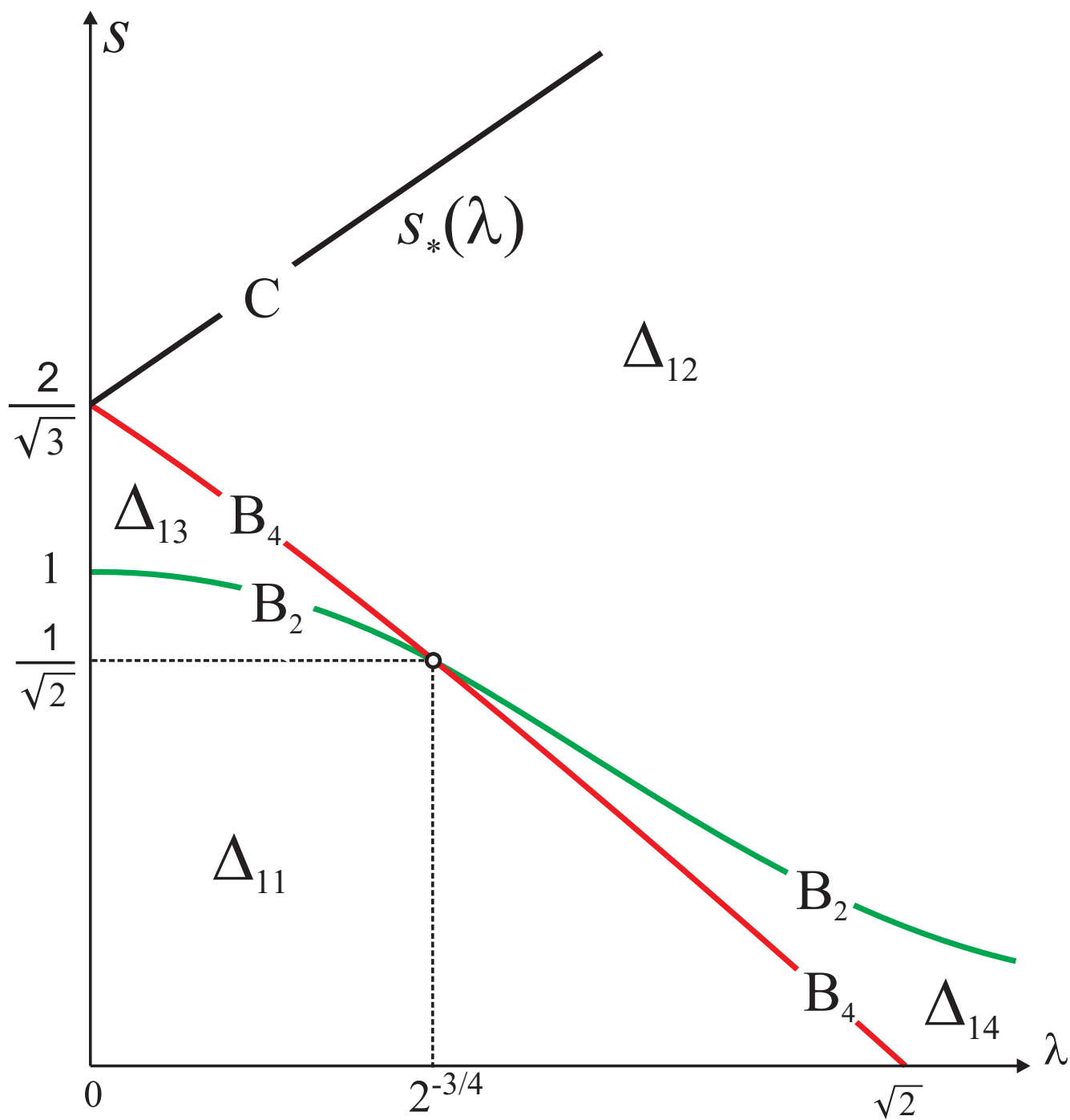


Рис. 1.27. Разделяющие кривые для точек Δ_1 .

объединение тех связных компонент прообраза точки Δ_{1i} , которые содержат критические точки отображения момента.

Теорема 16. *Поверхности J_{13}, J_{14} состоят из двух компонент связности.*

Доказательство. По определению классов точек считаем, что (λ, s) принадлежит соответствующей открытой подобласти на рис. 1.27. В терминах (λ, s) многочлен $f(z)$ из (1.1.32) примет вид

$$f(z) = -z^2(z - \lambda)^2 + \frac{1}{2}sz(z - 2\lambda) - \frac{1}{4}(s^2 - 1),$$

а его дискриминант, очевидно, есть произведение многочленов в левых частях (1.4.47), (1.4.48). Многочлен $f(z)$ имеет четыре вещественных корня в областях Δ_{13}, Δ_{14} (достаточно рассмотреть выходы на оси координат, когда соответствующее уравнение явно решается). Как отмечалось выше, на связной компоненте интегрального многообразия переменная z не может сменить промежутков осцилляции, поэтому таких компонент в этих случаях две. □

В целом, согласно (1.4.8), точки Δ_1 отвечают случаю $L_2 = 0$ в решении Гашененко, тогда из (1.1.33), (1.1.34) получаем

$$L_1 > 0, \quad F(z) = (z - \lambda)^2 \geq 0,$$

поэтому для обеих критических окружностей существуют асимптотические движения.

Множество Δ_3

Последний класс вырожденных точек ранга 1 – это точки, лежащие в прообразе ребра возврата поверхности Π_3 . Для интегральных параметров на этом множестве, обозначаемом через Δ_3 , с учетом условий суще-

ствования движений имеем

$$h = h^* + 2\ell^2, \quad \begin{cases} \ell \in \mathbb{R}, & \lambda \leq \lambda^* \\ |\ell| \geq \ell^*, & \lambda > \lambda^* \end{cases}, \quad s = \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, \quad k = -4\lambda^2\ell^2 + k^*,$$

где

$$\lambda^* = \frac{2\sqrt{2}}{3^{3/4}}, \quad \ell^* = \frac{2\lambda^{2/3} - \sqrt{4 + \lambda^{4/3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^{1/2}} > 0 \quad (\lambda > \lambda^*),$$

$$h^* = \frac{1}{2}\lambda^{2/3} \left(3 - \lambda^{4/3}\right), \quad k^* = (\lambda^{4/3} - 1)^3 + 1.$$

Множество Δ_3 делится на качественно различные части его пересечением с образом множества критических точек ранга 0, то есть с подмножествами δ_i пространства интегральных констант, а также пересечениями с исследованными выше множествами Δ_0, Δ_1 . Очевидно, что кривые δ_1, δ_3 в этих пересечениях не участвуют, как не имеющие общих точек с Π_3 . Непосредственно проверяется, что все точки пересечений $\Delta_3 \cap \Delta_0$ и $\Delta_3 \cap \Delta_1$ содержатся в $\Delta_3 \cap \delta_2$. Поскольку на Δ_3 при фиксированном λ постоянно и s , то в качестве параметров, определяющих точку Δ_3 удобно взять λ и ℓ . Тогда условия пресечения $\Delta_3 \cap \delta_2$ (точка B_3 ключевых множеств для всех λ и точка B_5 для $\lambda \in [0, 1]$) сводятся к уравнениям двух разделяющих кривых θ_1, θ_2 для определения областей классификации диаграмм $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$:

$$\theta_1 : \ell = \frac{1}{2\lambda^{1/3}} \sqrt{1 - \lambda^{4/3}}, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

$$\theta_2 : \ell = \frac{|2\lambda^{2/3} - \sqrt{4 + \lambda^{4/3}}|}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^{1/2}}, \quad \lambda \geq 0.$$

Ясно, что на θ_2 выполнено равенство $\ell(\lambda^*) = 0$, а при $\lambda > \lambda^*$

$$\ell(\lambda) = \frac{2\lambda^{2/3} - \sqrt{4 + \lambda^{4/3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^{1/2}} = \ell^*,$$

поэтому ветвь кривой θ_2 для $\lambda \geq \lambda^*$ является границей области существования точек множества Δ_3 . Разделяющие кривые и обозначения точек Δ_{3i} в соответствии с рис. 1.23, 1.24 показаны на рис. 1.28. Сопоставляя с (1.3.35), видим, что кривая θ_1 — это π_{21} , а кривая θ_2 — это π_{24} .

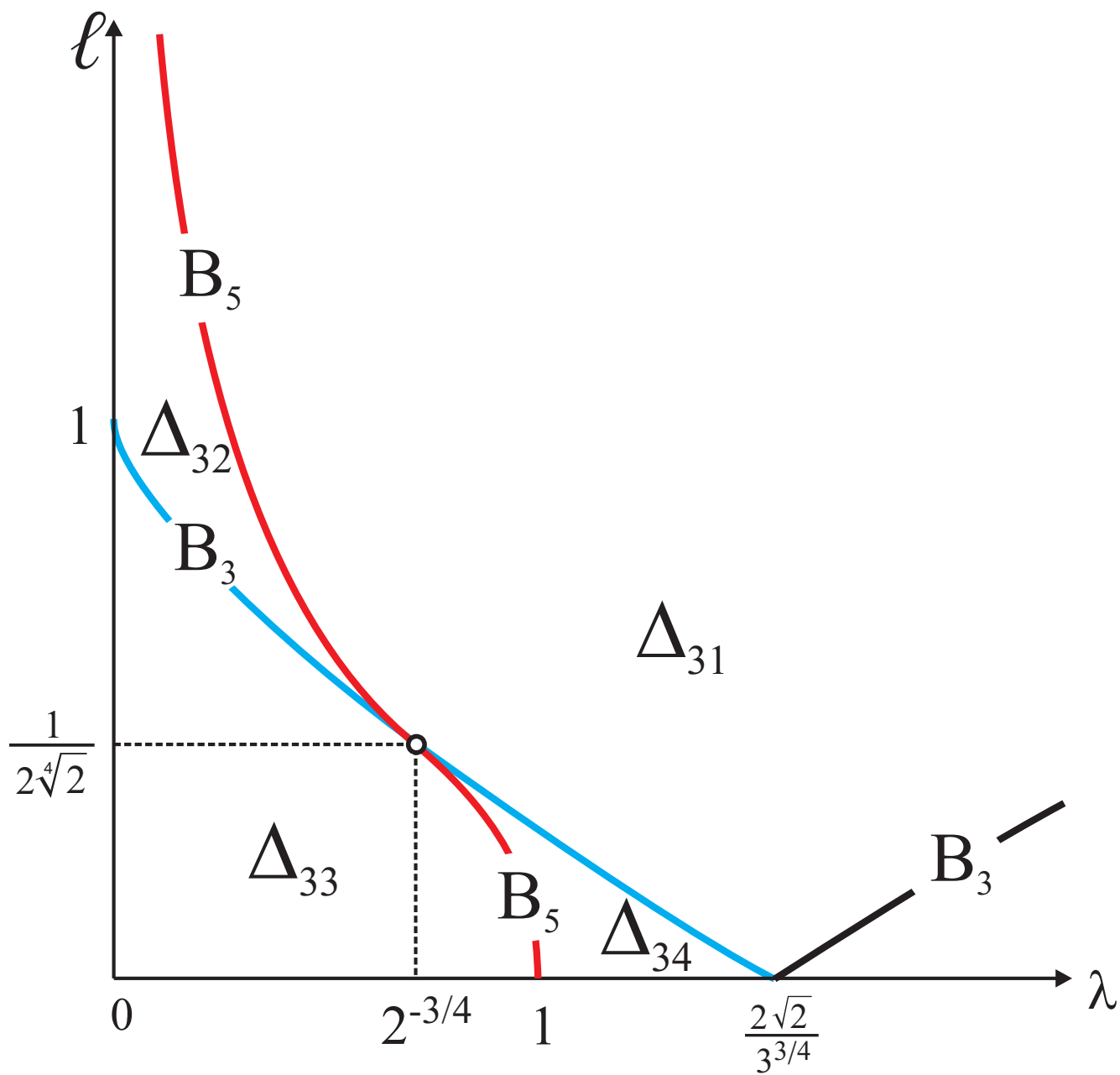


Рис. 1.28. Разделяющие кривые для точек Δ_3 .

Количество критических окружностей в прообразе Δ_{3i} устанавливается по диаграммам подсистемы \mathcal{M}_3 и данным для примыкающих областей из табл. 1.4.4. Видим, что Δ_{31} разделяет c_1 и c_2 (одна критическая окружность в прообразе), Δ_{32} разделяет c_8 и c_9 (две критических окружности), Δ_{33} разделяет c_6 и c_7 (одна критическая окружность), Δ_{34} разделяет c_3 и c_5 (две критические окружности).

Как и для множеств Δ_0, Δ_1 , если в прообразе точки Δ_{3i} имеется лишь одна вырожденная окружность, то соответствующая критическая интегральная поверхность J_{3i} связна. Приведем легко доказываемое утверждение, важное для дальнейшего.

Теорема 17. *Критическое многообразие J_{32} состоит из двух связных компонент.*

Доказательство. Как видно из рис. 1.28, точки класса Δ_{32} имеют выход на классическую задачу Ковалевской $\lambda = 0$. Предельный переход в образе получим из параметрических уравнений Π_3 , полагая $s = 1/(2\lambda^{2/3}) \rightarrow \infty$. В результате $h = 2\ell^2, k = 0$, и точки Δ_{32} отвечают значениям $\ell > 1$. Предельное критическое многообразие известно (см. [25]), а именно, $J_{32}(0) = 2S^1$. Поэтому и при малых λ это многообразие несвязно, а так как критических окружностей в прообразе две, то и компонент связности две. \square

Отметим, что точки класса Δ_{34} имеют выход на случай $\ell = 0$, для которого в работах [116, 119] были изучены круговые молекулы, но при этом наличие двух компонент связности в молекулах для этих точек принималось без доказательства. Ниже мы это докажем, откуда будет следовать, что и критическое многообразие J_{34} состоит из двух связных компонент.

Для точки Δ_{34} (диаграмма $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для области $2'$) вопрос о количестве компонент решается на ребре c_5 , где имеется два атома B . Это реб-

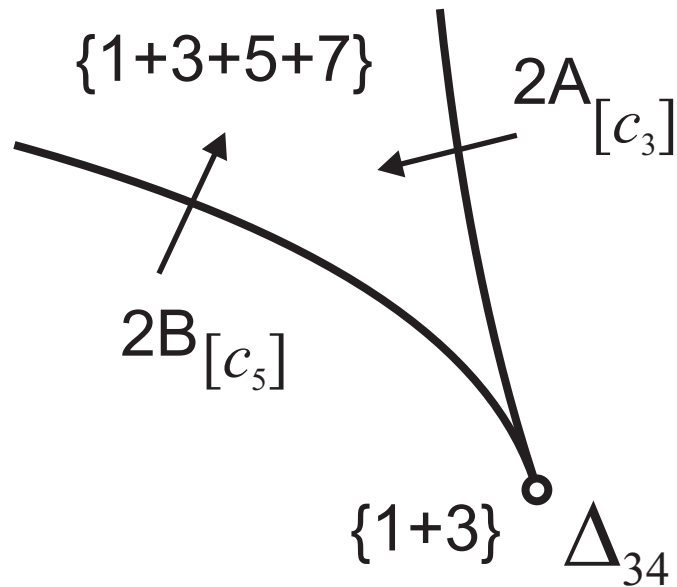


Рис. 1.29. Диаграмма и круговая молекула для Δ_{34} .

ро с одной стороны заканчивается точкой δ_{26} – образом невырожденной критической точки ранга 0. В то же время, если рассмотреть диаграмму $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для области $3'$, то видно, что ребро c_5 также имеет выход к точке δ'_{27} , образу другой невырожденной критической точки ранга 0, откуда, как показано ранее, при бифуркации семейств в двух атомах $B_{[c_5]}$ тор из семейства $\{1\}$ перестраивается в два тора из семейств $\{1\}$, $\{5\}$, а тор из семейства $\{3\}$ перестраивается в два тора из семейств $\{3\}$, $\{7\}$. А поскольку на ребре c_3 рождаются торы семейств $\{5\}$, $\{7\}$ и эти торы приходят в разные атомы B ребра c_5 , то молекула точки Δ_{34} имеет две связанных компоненты. Результат показан на рис. 1.29.

1.5. Топология приведенных систем

1.5.1. Разделяющее множество и бифуркационные диаграммы

В соответствии с предложением 8 множество Θ_L в плоскости параметров (λ, ℓ) , классифицирующее бифуркационные диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ приведенных систем на P_ℓ^4 , состоит из пар (λ, ℓ) , где ℓ — критическое значение ограничения функции L на одно из ключевых множеств \mathcal{K}_i крити-

ческих подсистем \mathcal{M}_i ($i = 1, 2, 3$) при фиксированном λ . Очевидно, это значения ℓ в точках (1.4.11), (1.4.16) – (1.4.21), (1.4.23) – (1.4.27). Как отмечалось ранее, при $\lambda\ell \neq 0$ из них только последняя не соответствует вырожденным критическим точкам ранга 0. Напомним, что в силу имеющихся очевидных симметрий по параметрам λ, ℓ , это множество Θ_L рассматривается в первом квадранте

$$\lambda \geq 0, \quad \ell \geq 0,$$

при этом полуоси $\lambda = 0$ и $\ell = 0$ включаются в разделяющее множество по умолчанию. Действительно, точки A, B_1, D_1, D_2 дают значения $\ell = 0, \lambda \in \mathbb{R}$, а при $\lambda = 0$ и любом ℓ имеются кратные критические точки ранга 1, отвечающие, например, слиянию подобластей c_2, c_6, c_8 с b_1 (в подсистеме \mathcal{M}_3 надо рассмотреть возможность $s = \infty$). Кратные участки, очевидно, возникают и в подсистеме \mathcal{M}_1 . Полный анализ соответствующих диаграмм для $\lambda = 0$ имеется в [25].

Теорема 18 (П.Е. Рябов). *Разделяющее множество Θ_L при классификации бифуркационных диаграмм $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ состоит из координатных осей $\{\lambda = 0\} \cup \{\ell = 0\}$ и пяти кривых, заданных явными однозначными функциями:*

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \lambda = \lambda_1(\ell) &= \frac{|\sqrt{s^2 + 4} - 2s|}{(\sqrt{s^2 + 4} - s)^{1/2}}, \quad s = (2\ell^2)^{1/3}, \quad \ell \geq 0; \\ \gamma_2 : \ell = \ell_2(\lambda) &= \frac{|2\lambda^{2/3} - \sqrt{4 + \lambda^{4/3}}|}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^{1/2}}, \quad \lambda \geq 0; \\ \gamma_3 : \ell = \ell_3(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2)^{3/2}, \quad \lambda \geq 0; \\ \gamma_4 : \ell = \ell_4(\lambda) &= \frac{1}{2\lambda^{1/3}}\sqrt{1 - \lambda^{4/3}}, \quad 0 < \lambda \leq 1; \\ \gamma_5 : \ell = \ell_5(\lambda) &= \frac{1}{4\lambda}, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Подчеркнем снова, что, кроме новой кривой γ_5 , все остальные отвечают кривым (1.3.35): $\gamma_1 = \pi_{23} \cup \pi_{31}$, $\gamma_2 = \pi_{24}$, $\gamma_3 = \pi_{22}$, $\gamma_4 = \pi_{21}$. Первый

квадрант разбивается на 18 областей, в которых диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$, рассматриваемые как стратифицированное одномерное многообразие, одинаковы. Разделяющее множество и нумерация возникающих областей представлены на рис. 1.30. Всюду ниже слово “область” применяется именно к связной компоненте дополнения к разделяющему множеству на плоскости параметров, а связные компоненты дополнений к диаграммам называются *камерами*.

На рисунках 1.31 – 1.36 диаграмма $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для каждой из 18 областей плоскости (λ, ℓ) построена в двух представлениях. На первом нанесены обозначения гладких участков и особых точек в соответствии с диаграммами критических подсистем. На втором – на гладких участках диаграммы указаны атомы бифуркаций, происходящих в системе с двумя степенями свободы на P_ℓ^4 . Стрелки на несимметричных атомах указывают в сторону возрастания количества связных компонент регулярных интегральных многообразий.

Объединяя диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ в расширенном пространстве

$$\Lambda(\mathbb{R}^3(\ell, h, k)) = \mathbb{R}^4(\lambda, \ell, k, h)$$

(см. обозначение (1.3.19)), проследим эволюцию камер – открытых областей, на которые $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ делит плоскость (k, h) . Для этого введем расширенную диаграмму

$$\Lambda(\Sigma) = \bigcup_{(\lambda, \ell)} \{(\lambda, \ell, k, h) : (k, h) \in \Sigma_{HK}(\ell, \lambda)\}$$

и назовем расширенной камерой открытую связную компоненту дополнения $\Lambda(\Sigma)$ в \mathbb{R}^4 . Расширенные камеры, отличающиеся лишь знаками λ, ℓ , не различаем. Интегральные многообразия, отвечающие двум точкам одной расширенной камеры, естественным образом диффеоморфны и могут быть получены одно из другого гладкой изотопией, возможно, дополненной симметрией, меняющей знаки λ, ℓ . В дальнейшем огово-

рок о знаках λ, ℓ делать более не будем. Из сказанного вытекает, что две камеры при заданных λ, ℓ следует считать одинаковыми, если они получены сечением одной и той же расширенной камеры. В силу этого легко проследить по рисункам, что различных камер имеется всего восемь, причем одна из них, содержащая сколь угодно большие по модулю отрицательные значения h , недопустима, то есть в прообразе ее точек интегральные многообразия пусты. Таким образом, интересующих нас допустимых камер семь. Они занумерованы на рисунках римскими цифрами *I – VII*.

Суммируя представленную выше информацию, строим 18 устойчивых по параметрам бифуркационных диаграмм $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ систем на P_ℓ^4 . Эти диаграммы впервые представлены в работе [96]. При их построении принципиальной становится проблема визуализации малых областей. В связи с этим диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ на рисунках сильно искажены, причем мы не стремились здесь сохранить структуру уровней $h = \text{const}$, по которым, в принципе, впоследствии можно было бы увидеть грубый изоэнергетический инвариант Фоменко. Здесь главное – видеть все дуги диаграмм, которые отвечают областям на плоскостях диаграмм критических подсистем, а также все узловые точки.

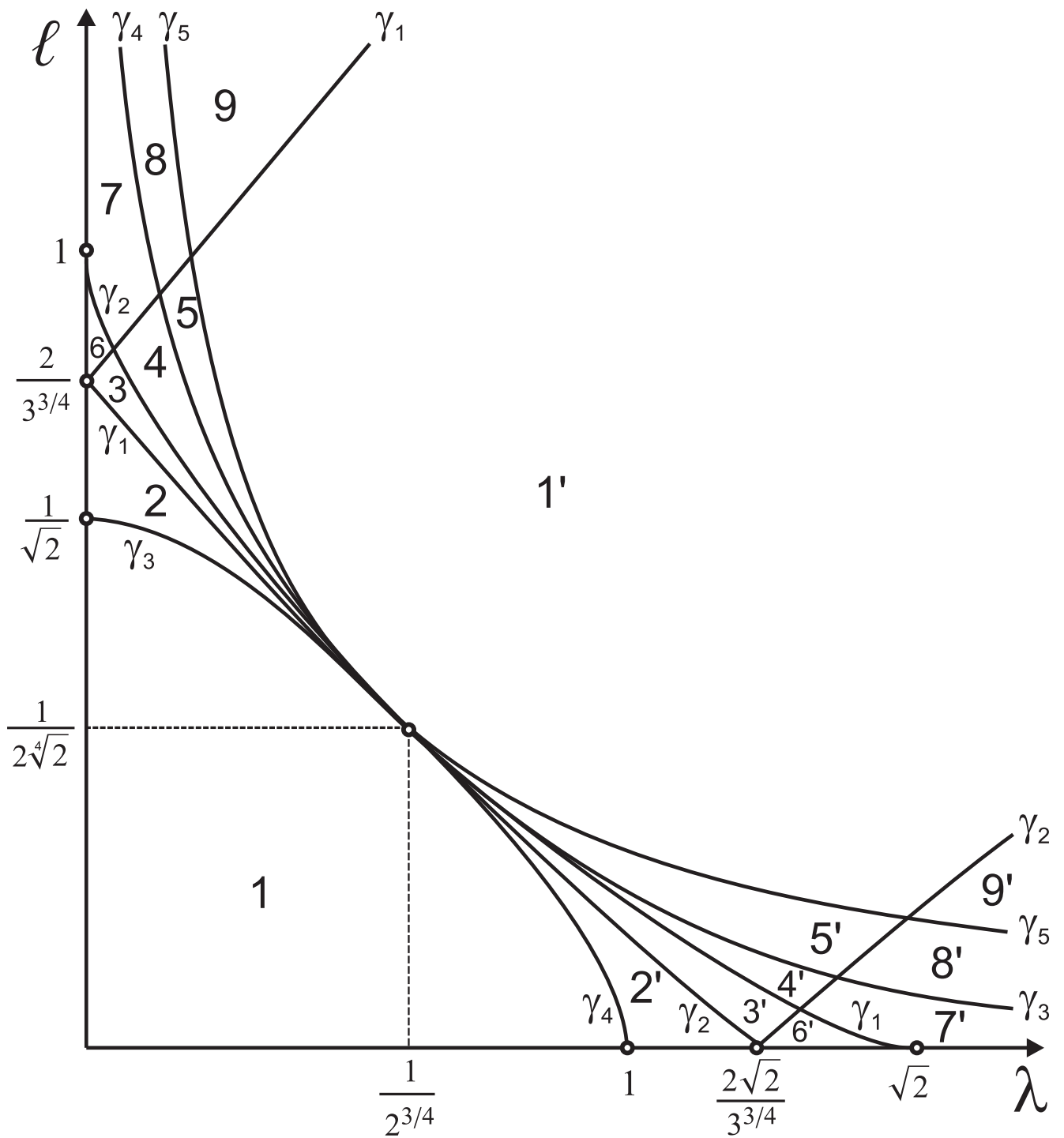


Рис. 1.30. Разделяющее множество и области параметров.

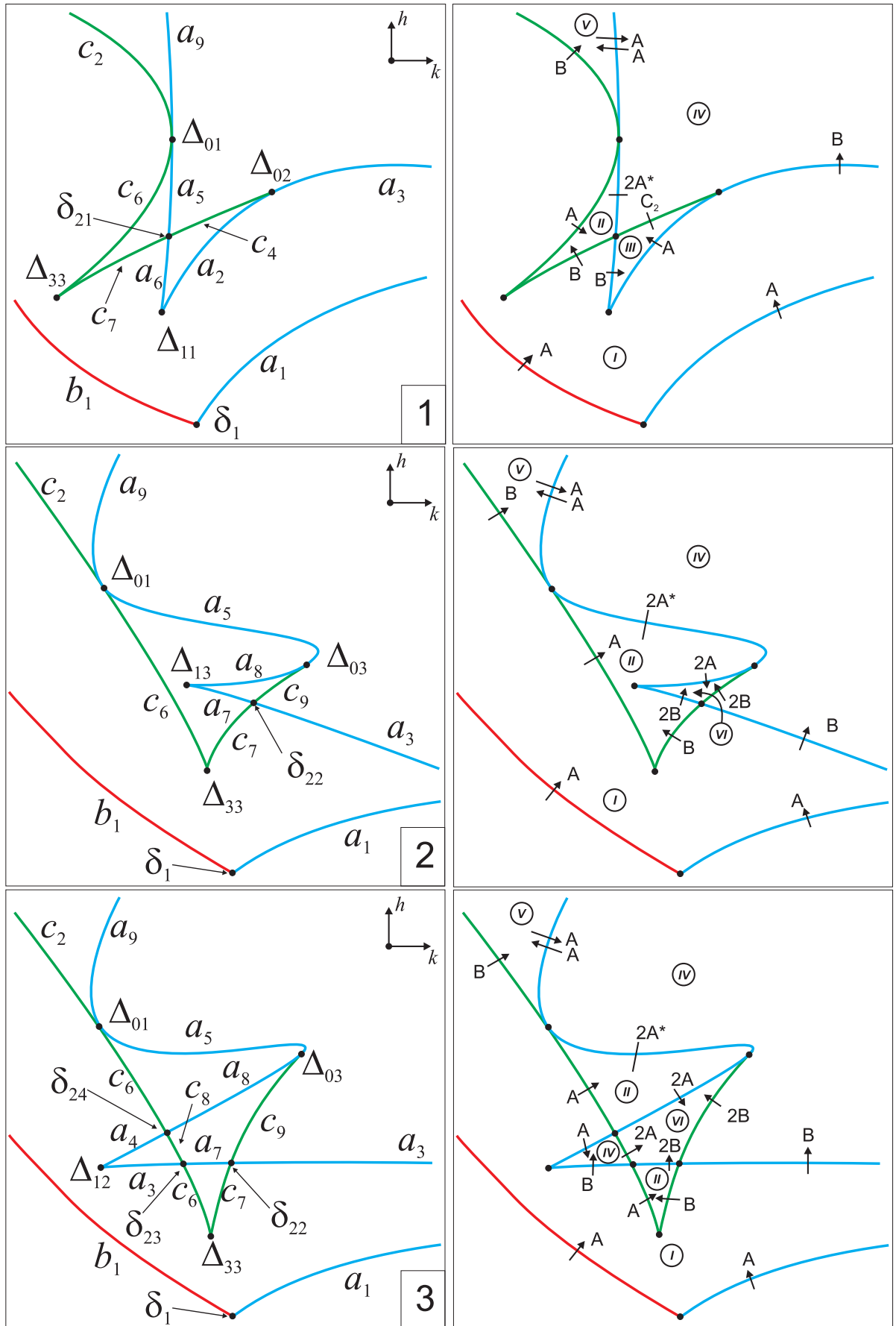


Рис. 1.31. Диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для областей 1 – 3.

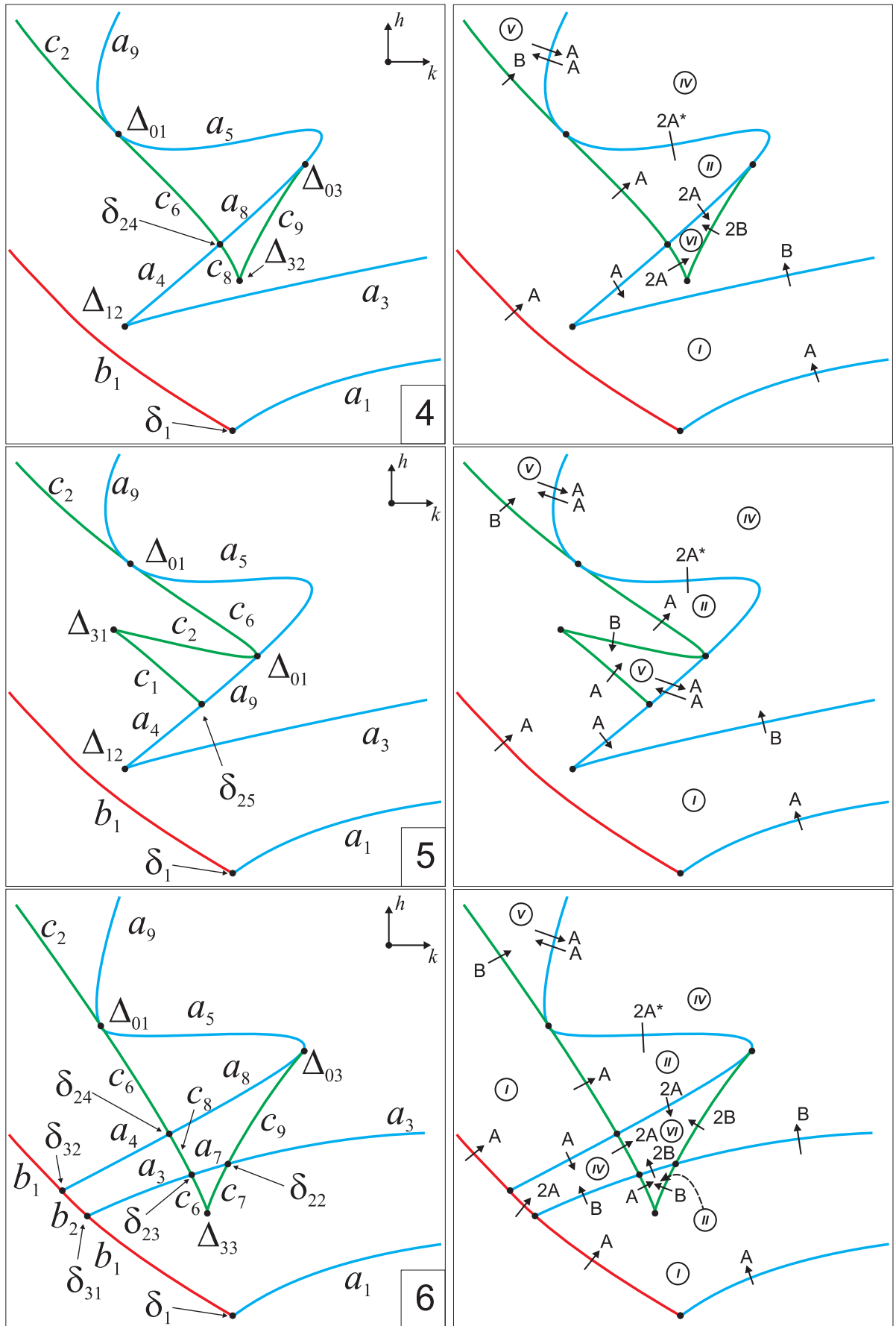


Рис. 1.32. Диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для областей 4 – 6.

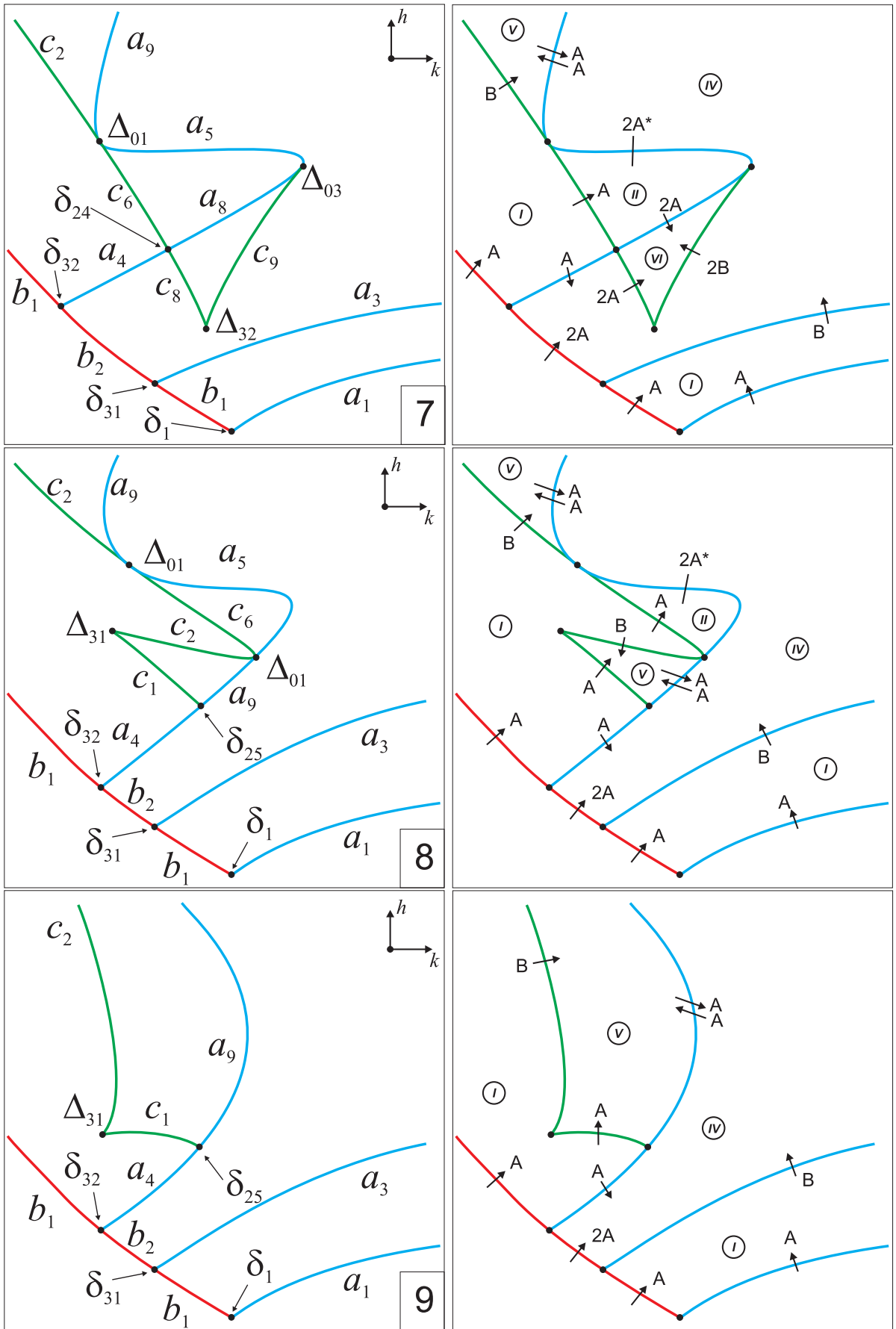


Рис. 1.33. Диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для областей 7 – 9.

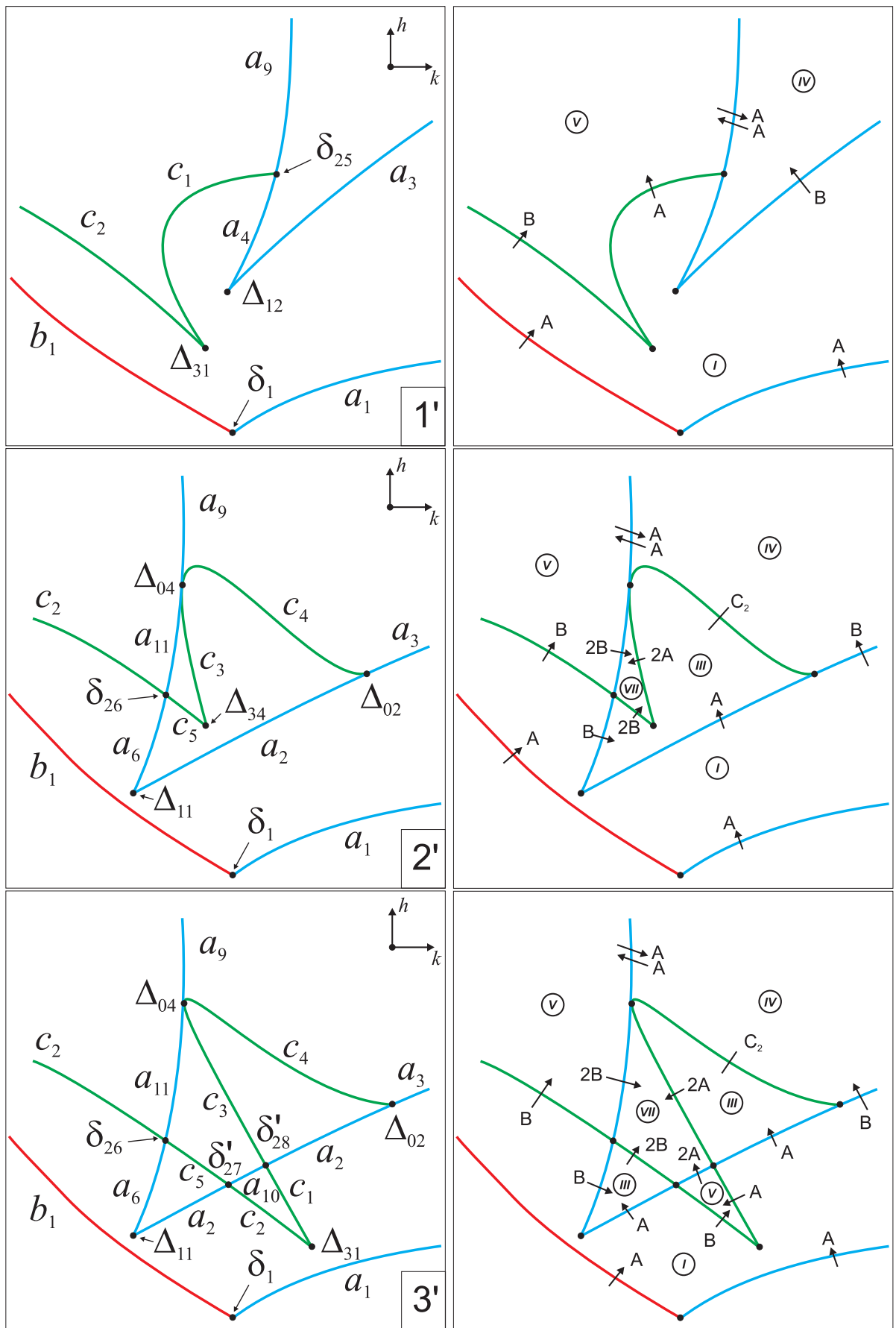


Рис. 1.34. Диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для областей 1' – 3'.

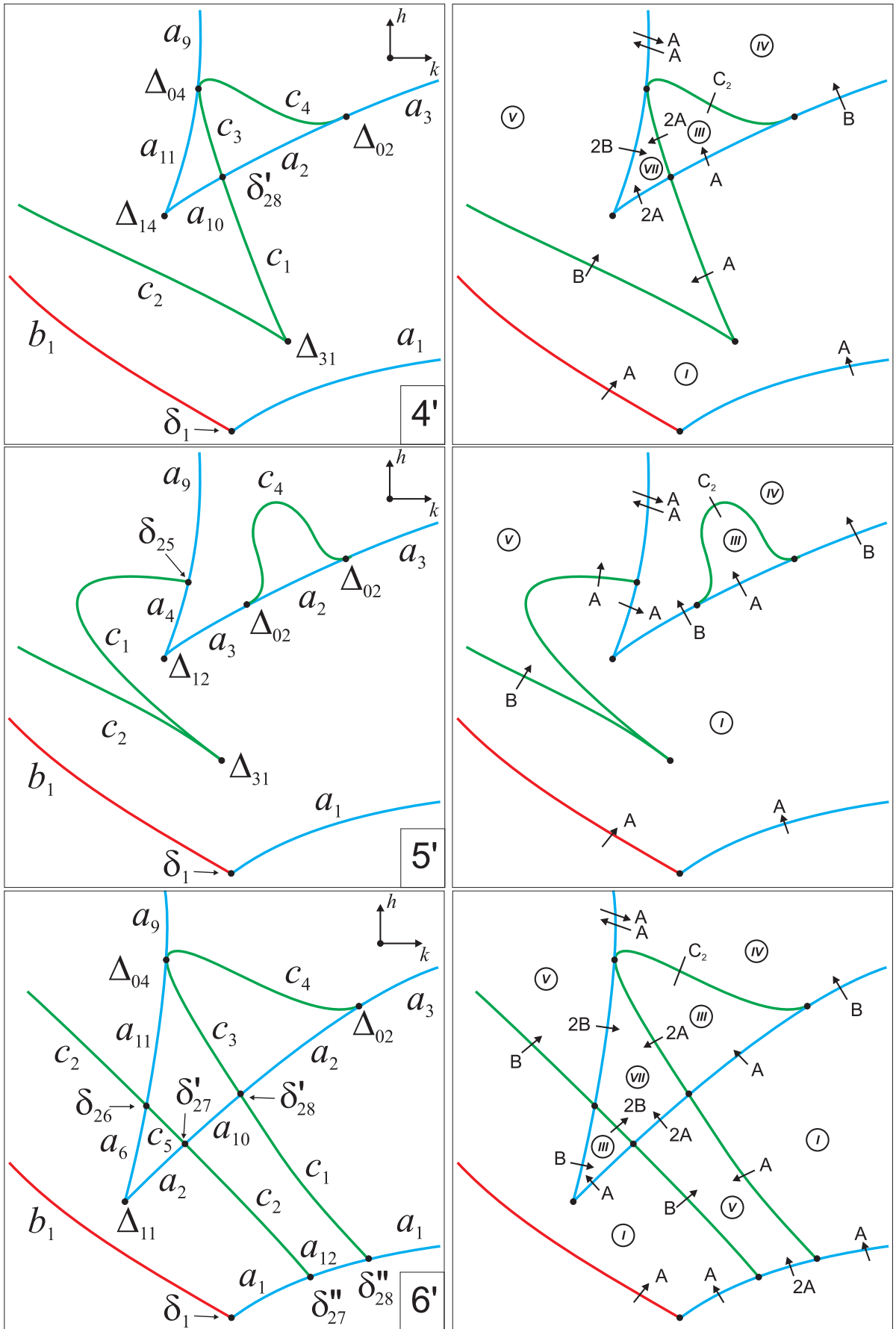


Рис. 1.35. Диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для областей 4' – 6'.

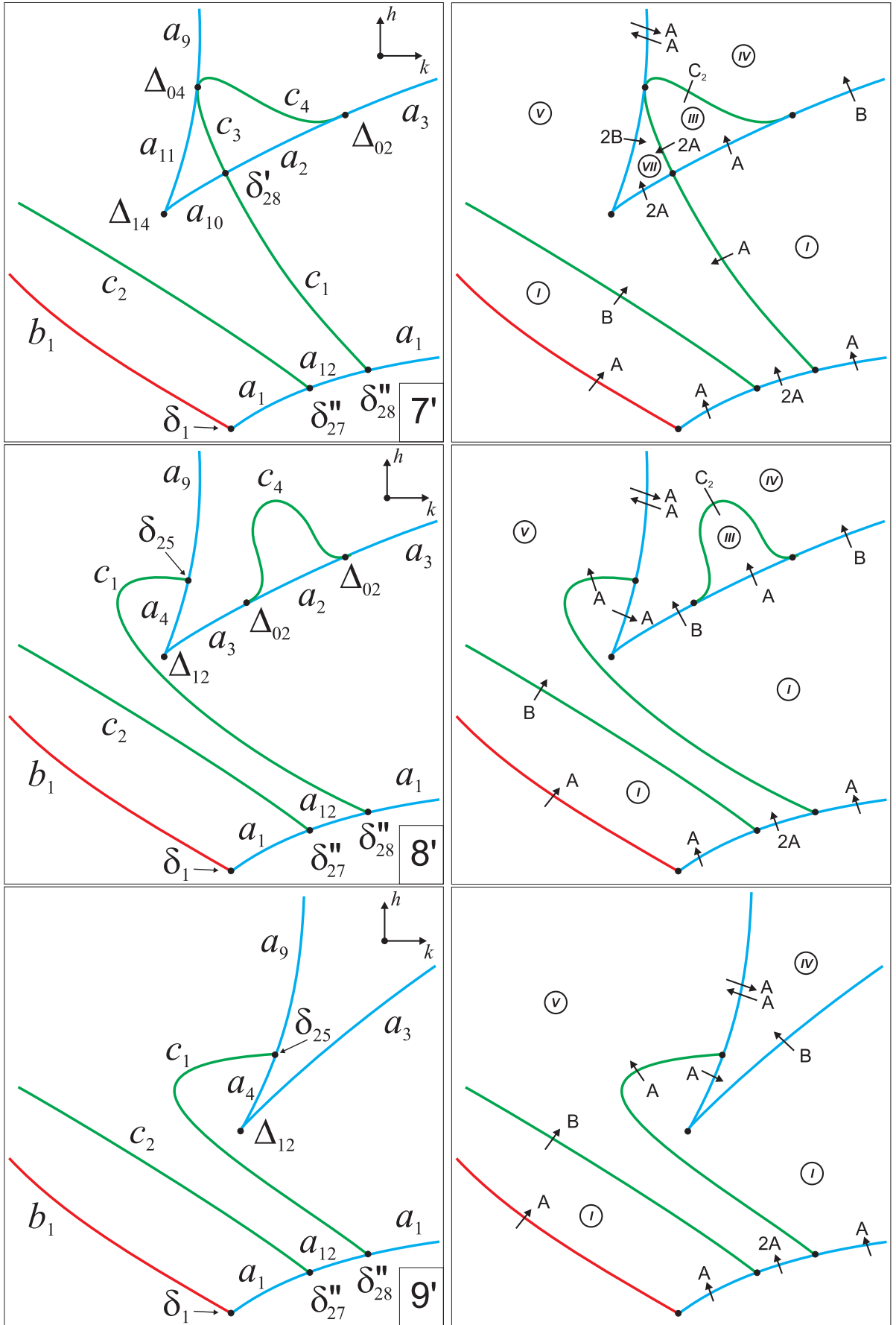


Рис. 1.36. Диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ для областей 7' – 9'.

1.5.2. Топологический анализ

Первый вопрос топологического анализа – сколько торов Лиувилля содержит в себе интегральное многообразие в прообразе регулярной точки? Не зная точно топологический тип критического интегрального многообразия с гиперболическими особенностями, ответить на этот вопрос в одной отдельно взятой системе на P_ℓ^4 достаточно сложно. В системе с двумя степенями свободы характер бифуркации, происходящей при пересечении критических точек ранга 1, однозначно определен типом точки лишь в случае эллиптических особенностей – атомов A . В данной задаче доказательно исследованы лишь два частных случая $\lambda = 0$ [25, 103, 104] и $\ell = 0$ [51, 96]. В общем случае утверждение [85, 115] о встречающемся в этой задаче количестве торов в составе регулярных многообразий основано на численном исследовании их проекций на плоскость первых двух компонент угловой скорости (аналог областей Жуковского). Рассматривая, однако, всю картину в четырехмерном пространстве интегральных параметров $\mathbb{R}^4(\lambda, \ell, k, h)$ (расширенном пространстве), получим ответ сразу же, не прибегая ни к каким дополнительным исследованиям. Действительно, отбросим все гиперболические атомы, считая их точный вид пока неизвестным. Для расширенной камеры гладкое ребро диаграммы $\Sigma_{HK}(\ell, \lambda)$ с фиксированным обозначением порождает (трехмерную) стенку. Для выбранной камеры атом A на ребре или стенке назовем *входом*, если его стрелка направлена внутрь камеры (то есть тор Лиувилля рождается при входе в камеру) и *выходом* – в противоположном случае. Рассмотрим три сечения в расширенном пространстве, отвечающие областям 1, 2 и 2' (рис. 1.37). Самая нижняя (относительно направления оси h) точка диаграммы отвечает одной невырожденной критической точке ранга 0 типа “центр-центр” – самому нижнему относительно равновесию при заданных (λ, ℓ) , поэтому, как от-

мечено выше, в незанумерованной камере ниже диаграммы движений нет. Следовательно, в камере I имеем ровно один тор (на стенках a_1, b_1 по одному входу). Из диаграммы для области 1 видно, что из камеры I имеется ровно по одному входу в камеры II и III (соответственно через стенки c_6 и c_4). Аналогично, из диаграммы для области $1'$ видно, что из камеры I имеется ровно по одному входу и в камеры IV и V (соответственно через стенки a_4 и c_1). Следовательно, в камерах $II - V$ каждой точке отвечают два тора Лиувилля. Диаграмма для области 2 демонстрирует ровно два входа из камеры II в камеру VI (стенка a_8), а диаграмма для области $2'$ дает ровно два входа из камеры III в камеру VII (стенка c_3). Следовательно, в камерах $VI - VII$ имеем четыре тора Лиувилля. Следующая теорема уточняет результаты работ [85, 97, 115], в которых ошибочно утверждается наличие шести, а не семи различных камер. В частности, при малых отличных от нуля значениях λ констатируется наличие лишь пяти камер, хотя, как видно уже из диаграмм для областей 1, 2 на рис. 1.31, для сколь угодно малых λ камера III области 1 меняется на камеру VI области 2. Это означает, что в пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$ при сколь угодно малых фиксированных λ диаграмма полного отображения момента делит это пространство не на пять, а на шесть связных компонент с непустыми интегральными многообразиями. При увеличении λ после прохождения этим параметром особого значения $2^{-3/4}$ шестая камера исчезает, а появляется седьмая.

Теорема 19. *Интегральные многообразия в прообразах точек камер пространства интегральных постоянных таковы: T^2 для камеры I ; $2T^2$ для камер $II - V$; $4T^2$ для камер $VI - VII$.*

Для изучения тонкой топологии системы одним из основных объектов исследования, наряду с камерами и количеством торов в них, являются так называемые семейства торов Лиувилля. Обозначим для крат-

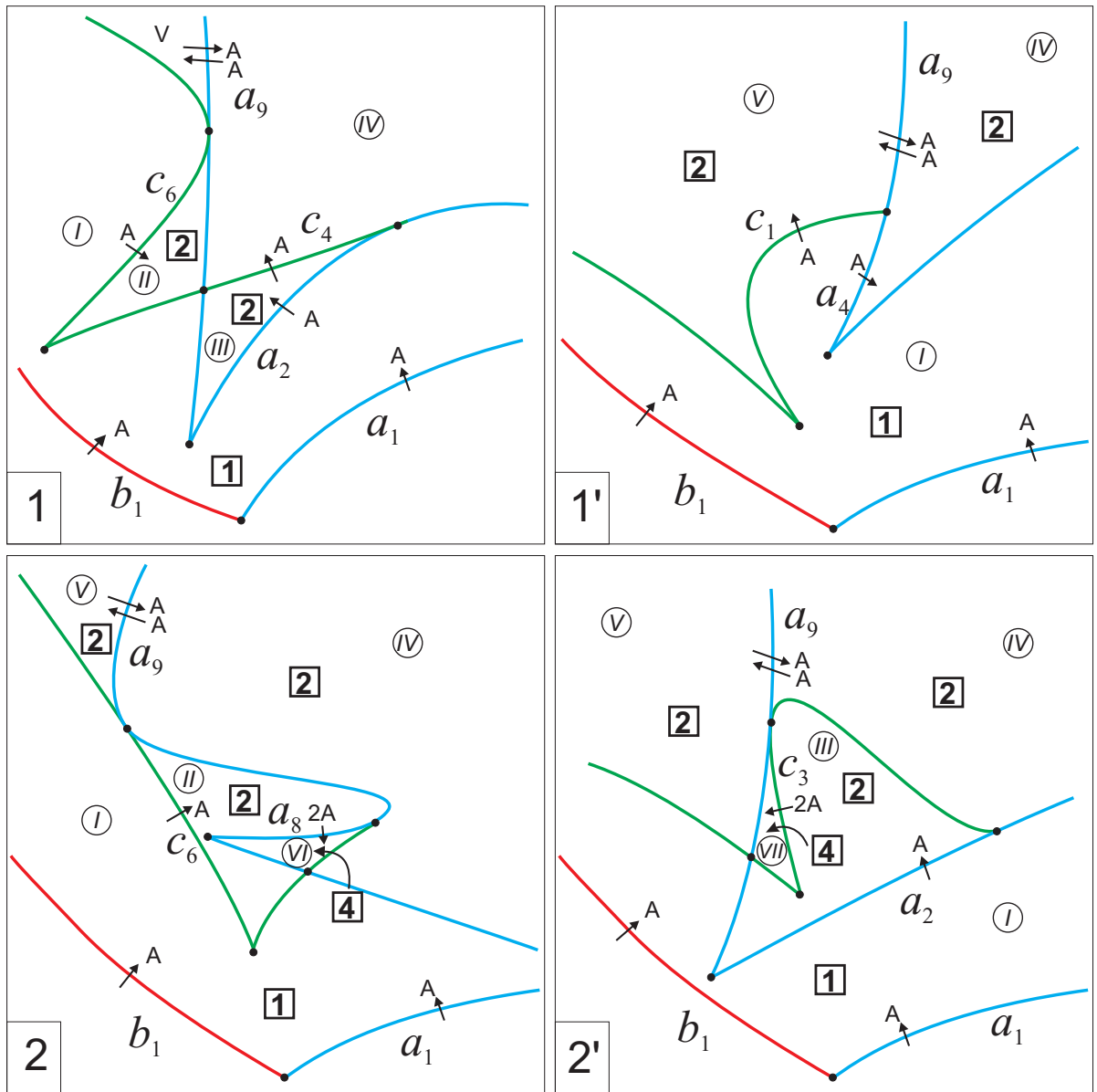


Рис. 1.37. Количество торов в камерах.

кости через \tilde{P} расширенное фазовое пространство:

$$\tilde{P} = \Lambda(P^5) = \bigcup_{(\lambda, \ell)} P_\ell^4 \times \{(\lambda, \ell)\} = \bigcup_{\lambda} S^2(\alpha) \times \mathbb{R}^3(\omega) \times \{\lambda\} = S^2(\alpha) \times \mathbb{R}^3(\omega) \times \mathbb{R}(\lambda).$$

Все интегральные многообразия $J_{\ell, h, k}(\lambda)$ вкладываются в \tilde{P} как $J_{\ell, h, k}(\lambda) \times \{\lambda\}$. Естественно возникает следующее определение.

Определение 11. *Исключим из \tilde{P} все связанные компоненты критических уровней, содержащие критические точки отображения момента. Связная компонента оставшегося множества называется семейством торов Лиувилля.*

Если в системе нет минимальных (максимальных) регулярных торов (а в рассматриваемой задаче их нет, что видно из классификации диаграмм, оснащенных атомами), то пересечение прообраза точки любой камеры с любым семейством может состоять не более чем из одного тора. В некоторых задачах говорят о нескольких торах одного семейства в прообразе точек камеры [27] или, что то же самое, о семействах, состоящих из нескольких торов [116]. В этом случае определение семейства принимается таким: в одно семейство относятся торы, которые испытывают одинаковые бифуркации на границах камеры [116]. Подобные семейства встречаются в классическом случае Ковалевской $\lambda = 0$ [27] и в частном случае $\ell = 0$ [116], однако, как легко видеть, в общем случае $\lambda\ell \neq 0$ таких семейств просто нет. Действительно, в камерах *II*, *III* имеется два тора и стенка с одним входом, на которой, следовательно, подвергается бифуркации только один тор. Между камерами *IV*, *V* имеется стенка, содержащая один вход и один выход, поэтому два тора этих камер испытывают заведомо различные бифуркации. У камер *VI*, *VII*, точкам которых отвечают четыре тора, не только в расширенном пространстве, но и при любых фиксированных λ, ℓ , при которых эти камеры существуют, имеются одна либо две стенки с двумя входами из соседних камер, причем, если стенок две, то на них испытывают бифуркации разные пары торов. Поэтому и здесь нет сразу четырех или даже двух торов, испытывающих одинаковые бифуркации. Еще раз подчеркнем, что при любых фиксированных λ, ℓ , таких что $\lambda\ell \neq 0$, не существует камер, на границах которых все торы этих камер испытывали бы одинаковые бифуркации.

Установим количество семейств и их распределение по камерам. Отметим одно свойство случая Ковалевской – Яхья: в прообразе точки бифуркационной диаграммы регулярные торы не могут присутствовать одновременно с гиперболическими атомами. Иначе говоря, если ребру

диаграммы отвечают гиперболические атомы, то в бифуркациях участвуют все торы прилегающих камер³. Поэтому для того, чтобы в двух камерах присутствовало одно и то же семейство, необходимо (но, конечно, не достаточно), чтобы из одной из них существовал путь в другую, состоящий из входов или выходов. Если в некоторой камере семейство только одно, то наличие из нее выхода в любую камеру является и достаточным условием того, что данное семейство сохранится во второй камере. Рассмотрим диаграммы для областей 1, 1', 3 и 3' (рис. 1.38). Семейства нумеруем арабскими цифрами и, как множества, помещаем в фигурные скобки (в отличие от номеров областей на (λ, ℓ) -плоскости). Обозначим через $\{1\}$ семейство, начинающееся в камере I . Из диаграммы для области 1 видно, что из камеры I имеется ровно по одному входу в камеры II, III . Поэтому семейство $\{1\}$ продолжает жить и в этих камерах. Могут ли торы, рождающиеся на входах в эти камеры, принадлежать одному семейству? На диаграммах с нанесенными атомами только типа A прослеживаем, что между камерами II, III не существует пути только с атомами A , не заходящего в камеру I (при таком заходе новые семейства умирают). Поэтому вторые семейства в этих камерах различны. Обозначим их через $\{2\}$ и $\{3\}$. Из диаграммы для области 1' также вытекает, что семейство $\{1\}$ продолжает жить и в камерах IV, V . Могут ли торы, рождающиеся на входах в эти камеры, принадлежать одному семейству? Очевидно, нет, поскольку общая стенка имеет вход и выход, поэтому при ее пересечении сохраняется лишь семейство $\{1\}$, а другого пути только с атомами A между камерами IV, V , не заходящего в камеру I , не существует. Аналогично устанавливаем, что семейства, рождающиеся на общей стенке камер IV, V , не могут совпадать ни с одним из уже введенных. Поэтому обозначим эти новые семейства через $\{4\}, \{5\}$. Из диаграммы для области 3 видно, что в камеру VI с четырьмя торами

³ Это свойство не имеет места, например, в случае Горячева – Чаплыгина.

имеется по два входа из камер II, IV . Поэтому там сохраняются семейства $\{1\}, \{2\}, \{4\}$, а рождается лишь одно новое семейство, которое обозначим $\{6\}$. Аналогично, из диаграммы для области $3'$ видно, что в камеру VII с четырьмя торами имеется по два входа из камер III, V . Поэтому там сохраняются семейства $\{1\}, \{3\}, \{5\}$, а рождается лишь одно новое семейство, которое обозначим $\{7\}$. Номера семейств, присутствующих одновременно в камере, соединяем знаком “плюс”.

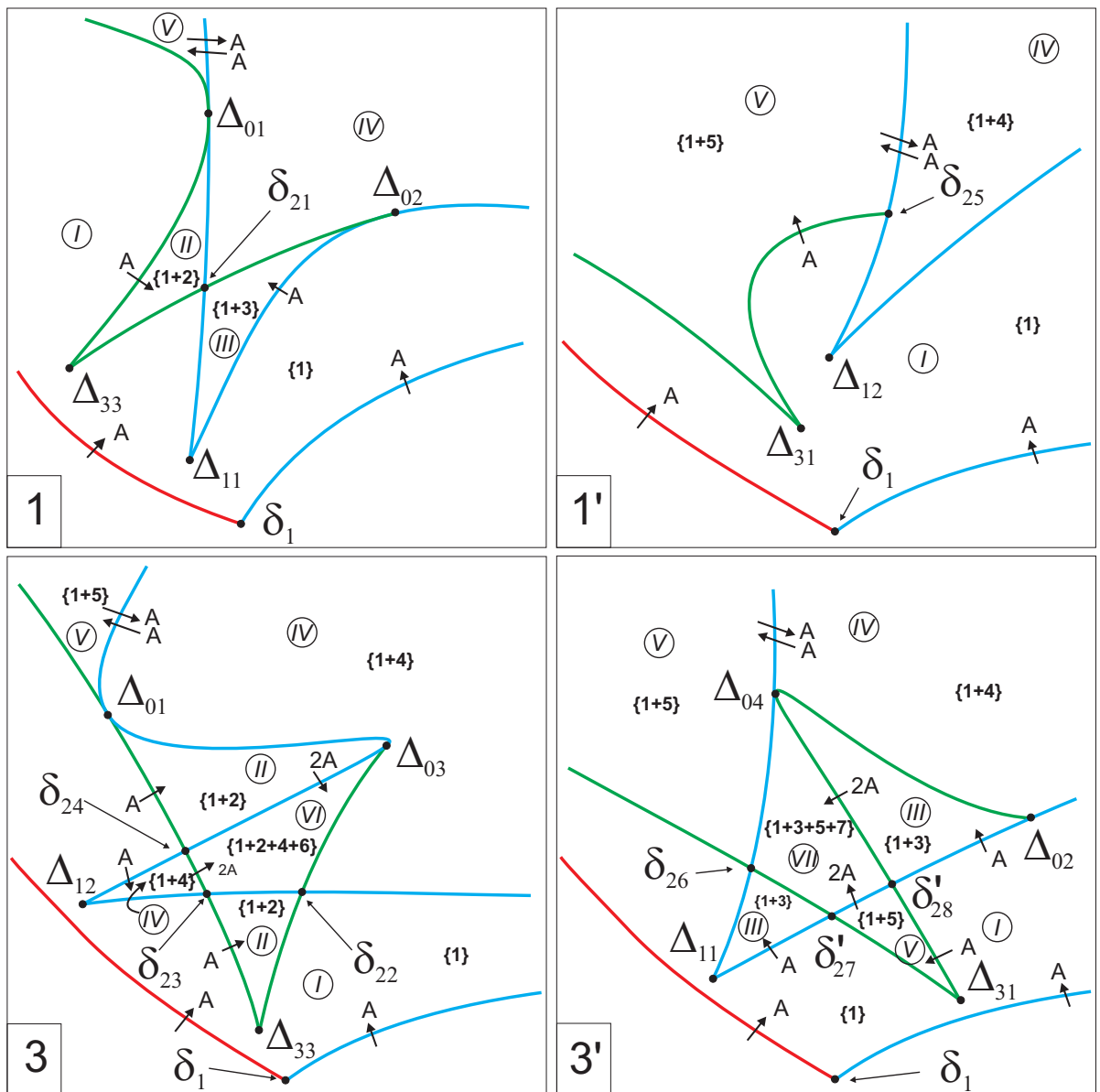


Рис. 1.38. Семейства торов в камерах.

Теорема 20. В случае Ковалевской – Яхья существует ровно семь семейств регулярных торов и их распределение по камерам указано в

таблице 1.5.1.

Таблица 1.5.1

Камера	Семейства
<i>I</i>	{1}
<i>II</i>	{1 + 2}
<i>III</i>	{1 + 3}
<i>IV</i>	{1 + 4}
<i>V</i>	{1 + 5}
<i>VI</i>	{1 + 2 + 4 + 6}
<i>VII</i>	{1 + 3 + 5 + 7}

1.6. Топологические инварианты

1.6.1. Диаграммы Смейла – Фоменко

Для того чтобы классифицировать графы Фоменко на $Q_{\ell,h}^3(\lambda)$, нужно на плоскость с диаграммой Смейла наложить проекцию образа множества вырожденных критических точек ранга 1, так как именно переход через такие точки определяет перестройки в графах, не связанные с изменением топологии $Q_{\ell,h}^3(\lambda)$. Теоретически также возможно явление расщепления некоторых типов атомов без возникновения вырожденных точек (см. [26]), но, как показано выше путем перечисления всех возникающих в этой задаче атомов, здесь мы с этим явлением не встречаемся. Выпишем уравнения образа множества вырожденных критических точек ранга 1 с учетом условий существования движений нужного типа в соответствии с предложениями 11 и 16.

Напомним обозначения (1.3.40) и еще раз соберем вместе информацию по образам вырожденных точек ранга 1. В состав кривых, классифицирующих графы Фоменко, входят следующие (см. теорему 13 и предложение 16):

1) кривая касания поверхностей Π_1, Π_3 полностью

$$\Delta_0 : \begin{cases} \ell = \pm \sqrt{\frac{s}{2}(1 - 2\lambda^2 s)} \\ h = \frac{1 - \lambda^2 s + 2s^2}{2s} \end{cases}, \quad 0 < s \leq \frac{1}{2\lambda^2}; \quad (1.6.1)$$

2) ребро возврата поверхности Π_1 между его пересечениями с кривой δ_3 (то есть между точками – образами класса π_{31} вырожденных точек ранга 0, переходящими в точки B_3 на ключевых множествах)

$$\Delta_1 : \quad \ell = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}(h - \frac{\lambda^2}{2})^{3/2}, \quad \frac{\lambda^2}{2} \leq h \leq h_C(\lambda) \quad (1.6.2)$$

где зависимость $h_C(\lambda)$ находится согласно (1.4.6);

3) ребро возврата поверхности Π_3 в следующих пределах

$$\Delta_3 : \quad \ell = \pm \sqrt{\frac{h - h^*}{2}}, \quad h \in \begin{cases} [h^*, +\infty), & \text{при } \lambda \leq \lambda^* \\ [h^{**}, +\infty), & \text{при } \lambda > \lambda^* \end{cases}, \quad (1.6.3)$$

где

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{\lambda^{2/3}}{2}(3 - \lambda^{4/3}), \\ h^{**} &= \frac{1}{4} \left[(4 + \lambda^{4/3})^{3/2} - \lambda^{2/3}(6 + \lambda^{4/3}) \right] = \\ &= \frac{1}{16} (\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3}) \left[(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^2 + 12 \right]. \end{aligned}$$

Определение 12. Назовем диаграммой Смейла – Фоменко S'_{LH} объединение S_{LH} с образом множества вырожденных точек ранга 1 под действием отображения $L \times H$.

Такие диаграммы впервые строил А.А. Ошемков [100] для классических задач динамики твердого тела.

Поскольку множество точек пересечения кривых Δ_i с основной диаграммой состоит из вырожденных точек ранга 0, то его трансформации по λ уже учтены. Для классификации расширенных диаграмм нужно добавить значения λ , при которых перестраивается множество

$\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_3$. Рассмотрим эволюцию самопересечений и двойных пересечений этих кривых (тройных пересечений нет, $\Delta_0 \cap \Delta_1 \cap \Delta_3 = \emptyset$). Кривые Δ_1 и Δ_3 определяются однозначными зависимостями $h(\ell)$ и поэтому самопересечений не имеют. Кривая Δ_0 имеет самопересечение, отвечающее значениям

$$s_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\lambda^4}}{4\lambda^2}, \quad h = \frac{1 - \lambda^4}{2\lambda^2}, \quad \ell = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \quad (1.6.4)$$

где s_{\pm} , при условии их существования $\lambda \leq \lambda_* = 1/2^{3/4}$, всегда лежат в интервале $(0, 1/2\lambda^2)$.

Условие пересечения $\Delta_0 \cap \Delta_3$ представим в виде $2s(h - h^* - 2\ell^2) = 0$, где h, ℓ — значения (1.6.1). В подстановке $Z = \lambda^{2/3}s$ получим уравнение $(Z + 1)(2Z - 1)^2 = 0$, имеющее единственный положительный корень $Z = 1/2$, причем этот корень кратный, поэтому имеем точку касания с координатами

$$h = \frac{1}{2} \left[\lambda^{-2/3} + 2\lambda^{2/3} - \lambda^2 \right], \quad \ell = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^{-2/3} - \lambda^{2/3}}, \quad (1.6.5)$$

существующую при $\lambda \leq 1$. Так как $1 < \lambda^*$, то нужно еще убедиться, что в найденной точке $h \geq h^*$. При $\lambda \leq 1$ для значения h из (1.6.5) имеем

$$h - h^* = \frac{1 - \lambda^{4/3}}{2\lambda^{2/3}} \geq 0.$$

Непосредственно проверяется, что точки (1.6.5) — это образ вырожденных точек ранга 0, отвечающих кривой π_{21} [98].

Условие пересечения $\Delta_0 \cap \Delta_1$ представим в виде $2s^3[4(h - \frac{\lambda^2}{2})^3 - 27\ell^2] = 0$, где h, ℓ — значения (1.6.1). Отсюда имеем

$$(8s^2 - 2\lambda^2s + 1)(s^2 - 2\lambda^2s + 1)^2 = 0. \quad (1.6.6)$$

Первый сомножитель имеет корни

$$s = \frac{1}{8} \left[\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 8} \right],$$

но тогда

$$\lambda^2 = -\frac{1}{128} \left[\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 8} \right]^3 < 0,$$

то есть эти решения — посторонние. Второй сомножитель в (1.6.6) отвечает за точку касания и дает положительный корень

$$s = \sqrt{\lambda^4 + 1} - \lambda^2,$$

для которого точки

$$h = \frac{3}{2} \sqrt{\lambda^4 + 1} - \lambda^2, \quad \ell = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\lambda^4 + 1} - \lambda^2)^3}$$

существуют при всех λ и являются образом вырожденных точек ранга 0, отвечающих кривой π_{22} [98].

Рассмотрим пересечения $\Delta_1 \cap \Delta_3$. Система (1.6.2), (1.6.3) без учета ограничений имеет три решения

$$h = \frac{1}{2} (3\lambda^{2/3} + \lambda^2), \quad \ell^2 = \frac{\lambda^2}{2}; \quad (1.6.7)$$

$$\begin{cases} h = \frac{1}{4} (-3\lambda^{2/3} + 2\lambda^2 + 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})}) \\ \ell^2 = \frac{1}{8} (-9\lambda^{2/3} + 4\lambda^2 + 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})}) \end{cases}; \quad (1.6.8)$$

$$\begin{cases} h = \frac{1}{4} (-3\lambda^{2/3} + 2\lambda^2 - 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})}) \\ \ell^2 = \frac{1}{8} (-9\lambda^{2/3} + 4\lambda^2 - 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})}) \end{cases}. \quad (1.6.9)$$

Пара точек (1.6.7) существует всегда. Очевидно, в этих точках

$$h - h^* = \lambda^2 > 0, \quad h - h^{**} = \frac{1}{4} (4 + \lambda^{4/3}) \left[3\lambda^{2/3} - \sqrt{4 + \lambda^{4/3}} \right].$$

Последняя разность должна быть положительна при $\lambda > \lambda^*$, но она отрицательна лишь при $\lambda < 1/2^{3/4} = \lambda_* < \lambda^*$, поэтому эти точки удовлетворяют всем ограничениям. Интересно отметить, что эти точки лежат на тех же уровнях ℓ , что и точки самопересечения кривой Δ_0 в соответствии с (1.6.4) (если последние существуют).

В точках (1.6.9) при условии вещественности $\lambda < 2^{4/3}$ значение ℓ^2 оказывается отрицательным, поэтому такое решение — постороннее.

Рассмотрим решение (1.6.8), вещественное при всех $\lambda < 2^{4/3}$. Проверим выполнение условий по h на кривой Δ_1 . Исключая x из (1.4.6) и полагая в (1.6.8) $h = h_C$, придем к уравнению

$$1 + 48\lambda^{4/3} + 12\lambda^{8/3} - 8\lambda^4 - 6\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})(\lambda^{2/3} + 4\lambda^2)} = 0. \quad (1.6.10)$$

Подстановка $X = \lambda^{4/3}$ сводит его к уравнению

$$(2X - 1)^3(2X - 1 - 3 \cdot 2^{1/3} + 3 \cdot 2^{2/3}) \times \\ \times \left[\left(2X + \frac{3}{2^{2/3}} - \frac{3}{2^{1/3}} - 1 \right)^2 + \frac{27}{2^{2/3}} \left(1 + \frac{1}{2^{2/3}} + 2^{2/3} \right) \right] = 0.$$

Отсюда видно, что (1.6.10) имеет ровно два положительных решения: трехкратный корень $\lambda = \lambda_*$ и простой корень

$$\lambda_3 = \left(\frac{45}{2^{1/3}} - \frac{99}{4 \cdot 2^{2/3}} - \frac{161}{8} \right)^{1/4} \approx 0.0287, \quad \lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_*. \quad (1.6.11)$$

Условие $h < h_C$ выполнено при $\lambda > \lambda_3$. Корень $\lambda = \lambda_*$ на это неравенство не влияет, его появление связано с особой точкой (1.3.30), определенной теми же уравнениями (1.4.6), но с положительным x . Проверим выполнение в точках (1.6.8) условий по h на кривой Δ_3 . Имеем

$$h - h^* = \frac{1}{4} \left[\lambda^2 - 9\lambda^{2/3} + 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})} \right].$$

Эта величина неотрицательна при $\lambda < (3/2)^{3/4} \approx 1.3554$, и тем более это имеет место при $\lambda < \lambda^* \approx 1.2408$. Пусть $\lambda > \lambda^*$. Тогда должна быть неотрицательна величина

$$h - h^{**} = \frac{1}{4} \left[3\lambda^2 + 3\lambda^{2/3} + 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})} - (4 + \lambda^{4/3})^{3/2} \right].$$

Подстановка $X = (\lambda^{2/3} + \sqrt{4 + \lambda^{4/3}})^2$ сводит условие $h \geq h^{**}$ к неравенству

$$(X - 8)^3(X^3 - 12X^2 - 32) \leq 0,$$

решением которого является промежуток $X \in [8, 2(2 + 2^{2/3} + 2^{4/3})]$, тогда $\lambda \in [\lambda_*, \lambda_4]$, где обозначено

$$\lambda_4 = \left[\frac{1}{2}(25 - 27 \cdot 2^{1/3} + 9 \cdot 2^{2/3}) \right]^{1/4} \approx 1.2740. \quad (1.6.12)$$

Итак, пара точек пересечения кривых Δ_1 и Δ_3 , определяемых уравнениями (1.6.8), существует при $\lambda_3 < \lambda \leq \lambda_4$.

В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 21. *В случае Ковалевской – Яхья имеется десять структурно устойчивых диаграмм Смейла–Фоменко $S'_{LH}(\lambda)$. Разделяющими значениями параметра λ служат*

$$0, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_*, 1, \lambda^*, \lambda_4, \lambda_5 = 2\sqrt{\sqrt{2}-1}, \lambda_2, \sqrt{2}, \quad (1.6.13)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ определены равенствами (1.3.44), (1.3.45), (1.6.11), (1.6.12).

В расширенном пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, \lambda)$ расширенная диаграмма

$$\Lambda(S'_{LH}) = \bigcup_{\lambda} (S'_{LH}(\lambda) \times \{\lambda\})$$

порождает 29 камер. При этом камеры Смейла $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ не испытывают дополнительного разбиения, а из камер Смейла $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{E}, \mathbb{H}$ возникают камеры Смейла – Фоменко $\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_{13}, \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_3, \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_6$ и $\mathbb{H}_1 - \mathbb{H}_3$.

На рис. 1.39 показана диаграмма Смейла – Фоменко при малых λ ($0 < \lambda < \lambda_1$). Допущены в целом небольшие гладкие искажения общей картины. Напомним, что, как это видно из диаграмм третьей критической подсистемы (см., например, рис. 1.23), множества Δ_3 и δ_2 имеют две общих точки в области $\ell > 0$ при малых λ – это точки B_3, B_5 . В диаграмме Смейла – Фоменко кривая Δ_3 проходит через точку возврата δ_2 . Это образ особой точки B_3 и он имеет конечный предел при $\lambda \rightarrow 0$. Образ

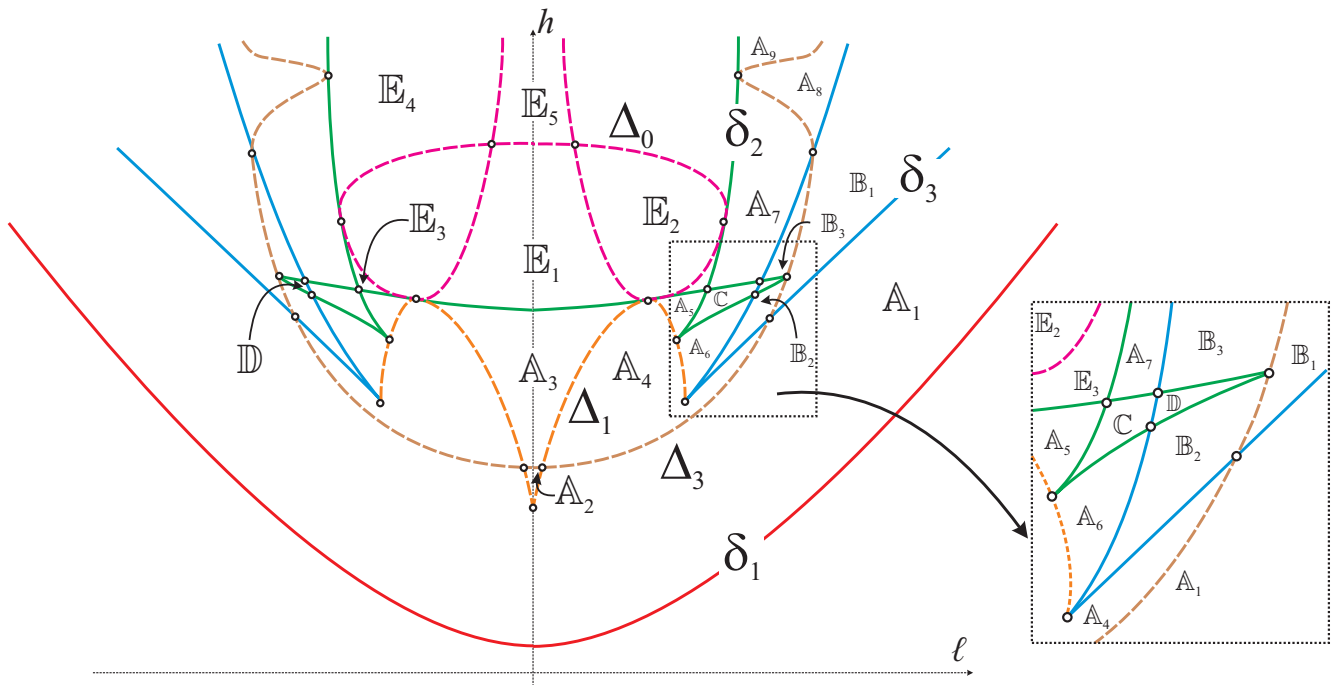


Рис. 1.39. Диаграмма Смейла–Фоменко при $\lambda < \lambda_1$.

же второй точки B_5 имеет, согласно (1.4.20), h -координату, стремящуюся к ∞ . Поэтому значительное искажение сделано на кривой Δ_3 при больших h с тем, чтобы показать “далекую” общую точку Δ_3 с δ_2 (точку касания) и границу между камерами A_8 и A_9 .

Далее на рис. 1.40 и 1.41 показаны изменения, связанные с переходами через $\lambda = \lambda_1$ (исчезают камеры B_3, D) и через $\lambda = \lambda_3$ (исчезает камера B_2). Новых камер здесь не появляется.

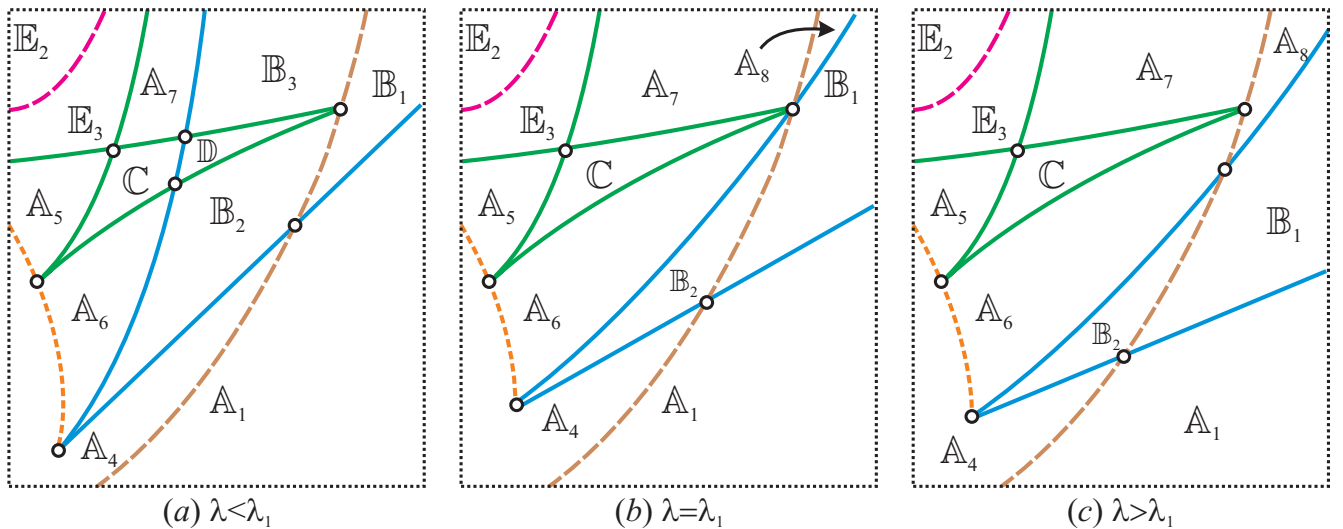


Рис. 1.40. Переход через λ_1 .

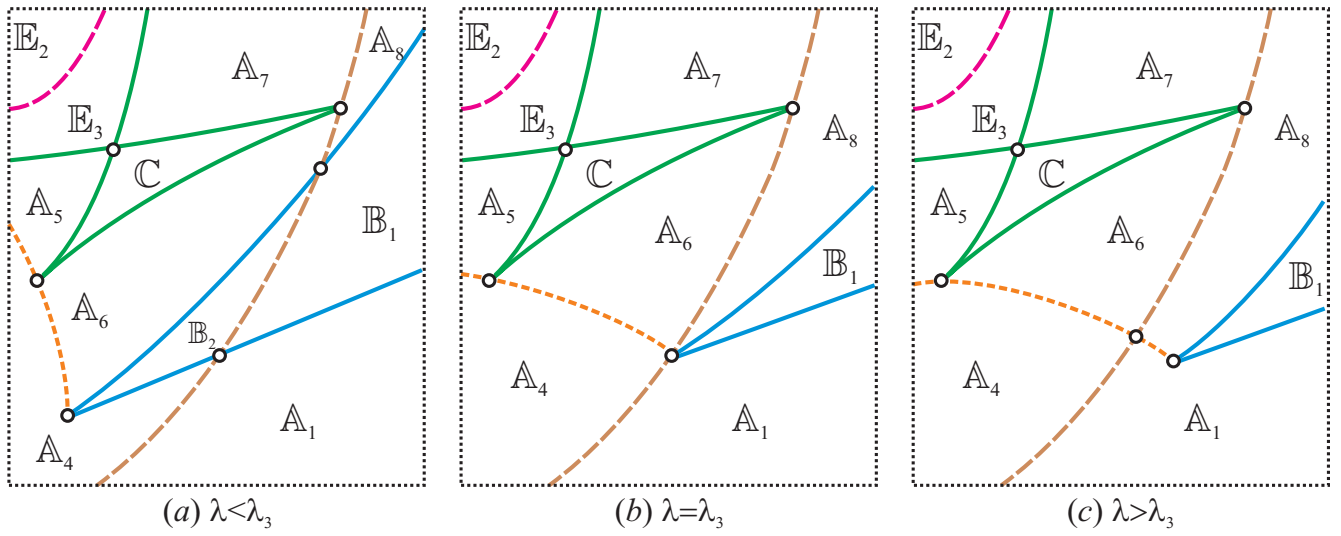


Рис. 1.41. Переход через λ_3 .

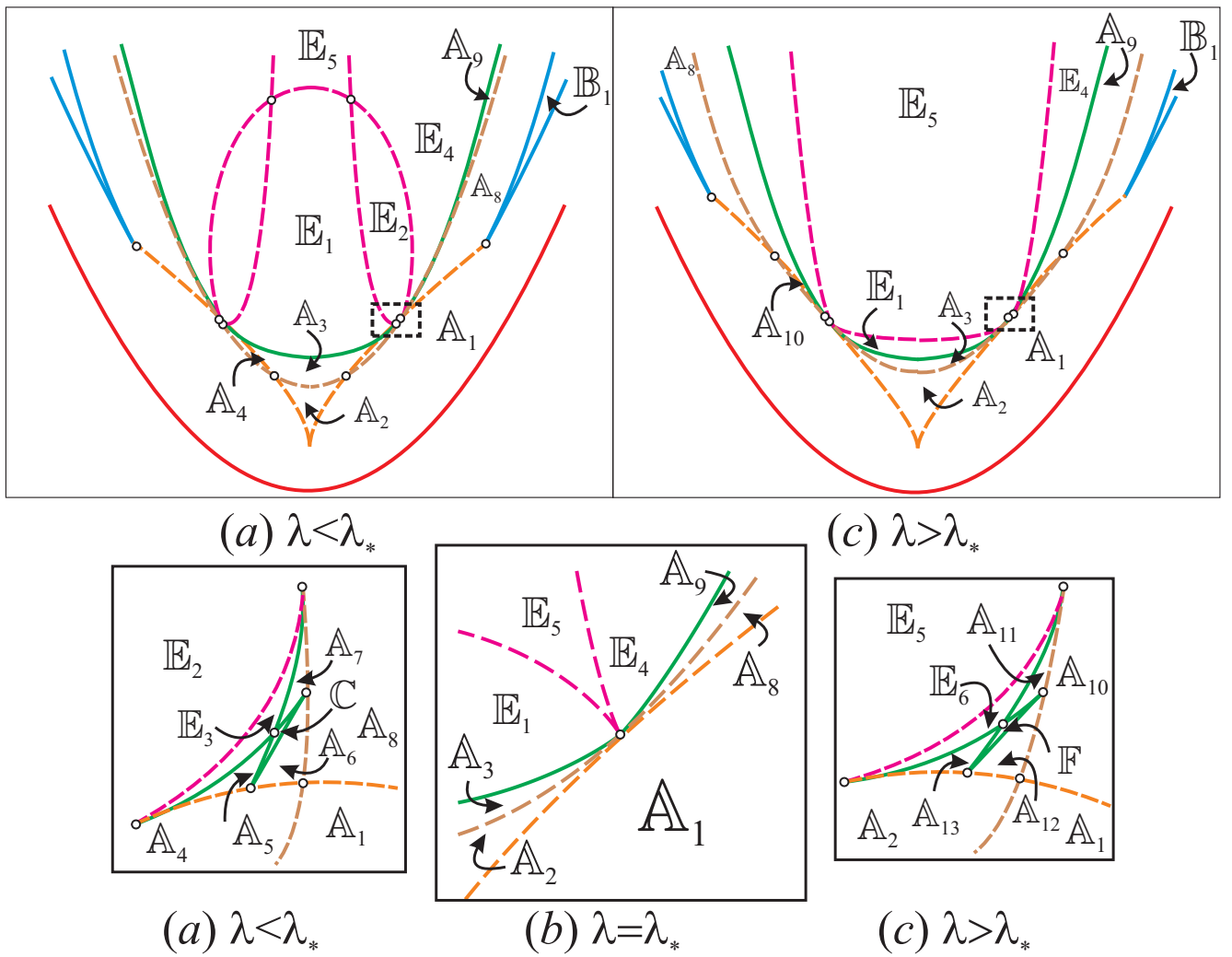
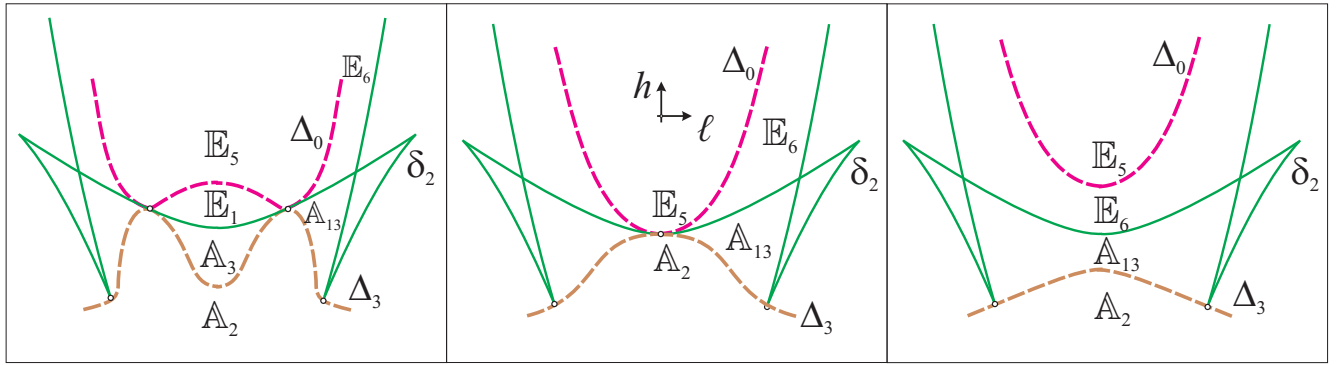


Рис. 1.42. Переход через λ_* .

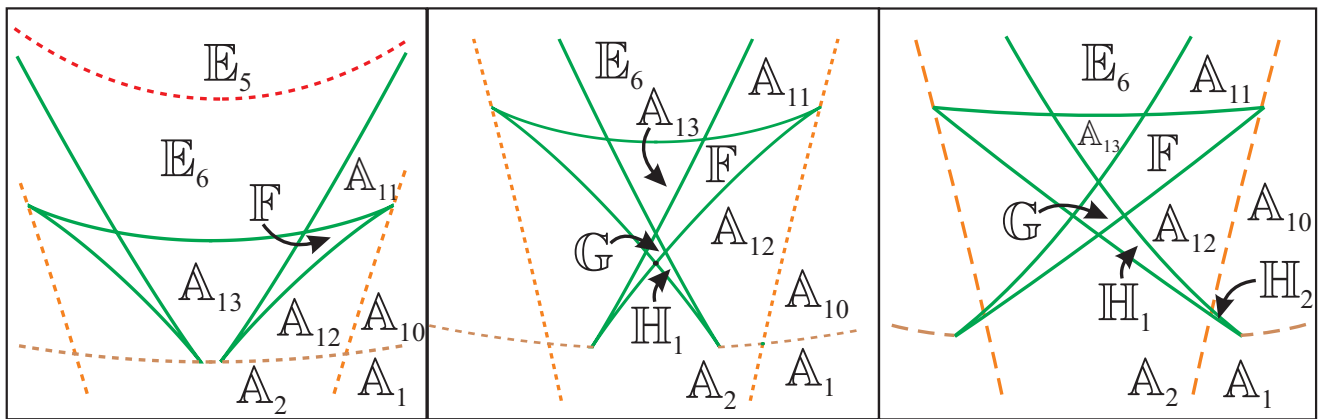


(a) $\lambda < 1$

(b) $\lambda = 1$

(c) $\lambda > 1$

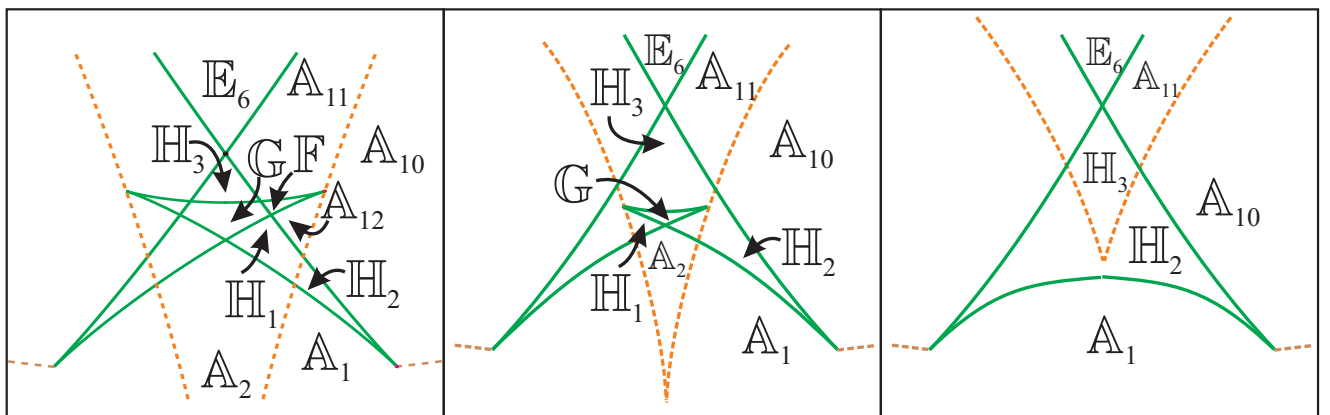
Рис. 1.43. Переход через $\lambda = 1$.



(a) $1 < \lambda < \lambda^*$

(b) $\lambda^* < \lambda < \lambda_4$

(c) $\lambda_4 < \lambda < \lambda_5$



(d) $\lambda_5 < \lambda < \lambda_2$

(e) $\lambda_2 < \lambda < 2^{1/2}$

(f) $\lambda > 2^{1/2}$

Рис. 1.44. Перестройки при больших λ .

Значительные изменения в диаграмме Смейла – Фоменко (как и во всех ранее рассмотренных разделяющих множествах), а также в составе камер происходят при переходе через значение $\lambda = \lambda_*$. При этом значении стягиваются в точку (и затем исчезают) петля, окружающая камеру \mathbb{E}_2 , камера \mathbb{E}_3 , ласточкин хвост кривой δ_2 вместе с камерами $\mathbb{A}_5, \mathbb{A}_6, \mathbb{A}_7, \mathbb{C}$, отрезки границ камеры \mathbb{A}_4 . При $\lambda > \lambda_*$ снова появляется хвост на кривой δ_2 , но уже с другими новыми камерами в его окрестности. Это камеры $\mathbb{A}_{10}, \mathbb{A}_{11}, \mathbb{A}_{12}, \mathbb{A}_{13}, \mathbb{E}_6, \mathbb{F}$. Переход показан на рис. 1.42.

Переход через $\lambda = 1$ достаточно прост – общая точка касания $\delta_2, \Delta_0, \Delta_3$ попадает на ось симметрии $\ell = 0$ и затем исчезает. При этом исчезают камеры $\mathbb{A}_3, \mathbb{E}_1$. Переход показан на рис. 1.43.

Все дальнейшие перестройки диаграмм Смейла – Фоменко связаны с точками на оси $\ell = 0$. Область, содержащая все такие перестройки, и соответствующие камеры показаны на рис. 1.44.

При переходе через λ^* рождаются камеры \mathbb{G}, \mathbb{H}_1 , при переходе через λ_4 появляется камера \mathbb{H}_2 . Переход через λ_5 сопровождается исчезновением камеры \mathbb{A}_{13} и появлением \mathbb{H}_3 . При переходе через λ_2 исчезает камера \mathbb{F} , а при переходе через последнее разделяющее значение $\sqrt{2}$ исчезают камеры $\mathbb{G}, \mathbb{H}_1, \mathbb{A}_2$. Ниже информация по времени существования камер собрана в таблицу (см. табл. 1.6.1).

1.6.2. Графы Фоменко

Для каждой камеры в пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, \lambda)$, вырезанной диаграммой Смейла – Фоменко, определен грубый топологический инвариант — граф Фоменко или молекула $W_{\ell, h}(\lambda)$, то есть граф, полученный стягиванием в точку каждой связной компоненты интегрального многообразия с указанием для каждого критического уровня дополнительного интеграла K типа и, при необходимости, ориентации соответствующего ато-

ма. Два графа Фоменко считаются совпадающими (индентичными), если существует гомеоморфизм графов, продолжающийся на атомы (подробности см. в [26]).

Все возникающие в этой задаче графы Фоменко на гладких изоэнергетических уровнях $Q_{\ell,h}^3$, не содержащих критических точек ранга 0 и вырожденных критических точек ранга 1, описаны в работе [54] и представлены на рис. 1.45. Здесь в группы собраны графы, формально идентичные, но в рамках данной системы они не могут быть переведены один в другой. Группы 1–6 соответствуют типам графов $W_1 - W_6$, найденным в работе [85]. Группы 7–9 являются новыми. В группах 7, 8 атомы B не соединены “голова в голову”, как в группе 3 и в типе W_3 [85], а в группе 9, в отличие от графа W_7 [85], ребро из атома C_2 идет в “ногу”, а не в “голову” атома B , что порождает иное слоение Лиувилля.

Естественно, что имеются совпадающие графы Фоменко даже для различных типов изоэнергетических поверхностей. Для того, чтобы различать такие графы, необходимо применять тонкую классификацию [26]. Собирая информацию по всем возникающим камерам в табл. 1.6.1, видим, что для большинства графов метки могут быть получены непосредственно из аналогов для случаев $\lambda = 0$ или $\ell = 0$. Отметим, что в работе [54] в аналогичной таблице допущена неточность – время жизни камеры \mathbb{A}_2 указано неограниченным, хотя ее и соответствующего ей графа не существует при $\lambda^2 > 2$.

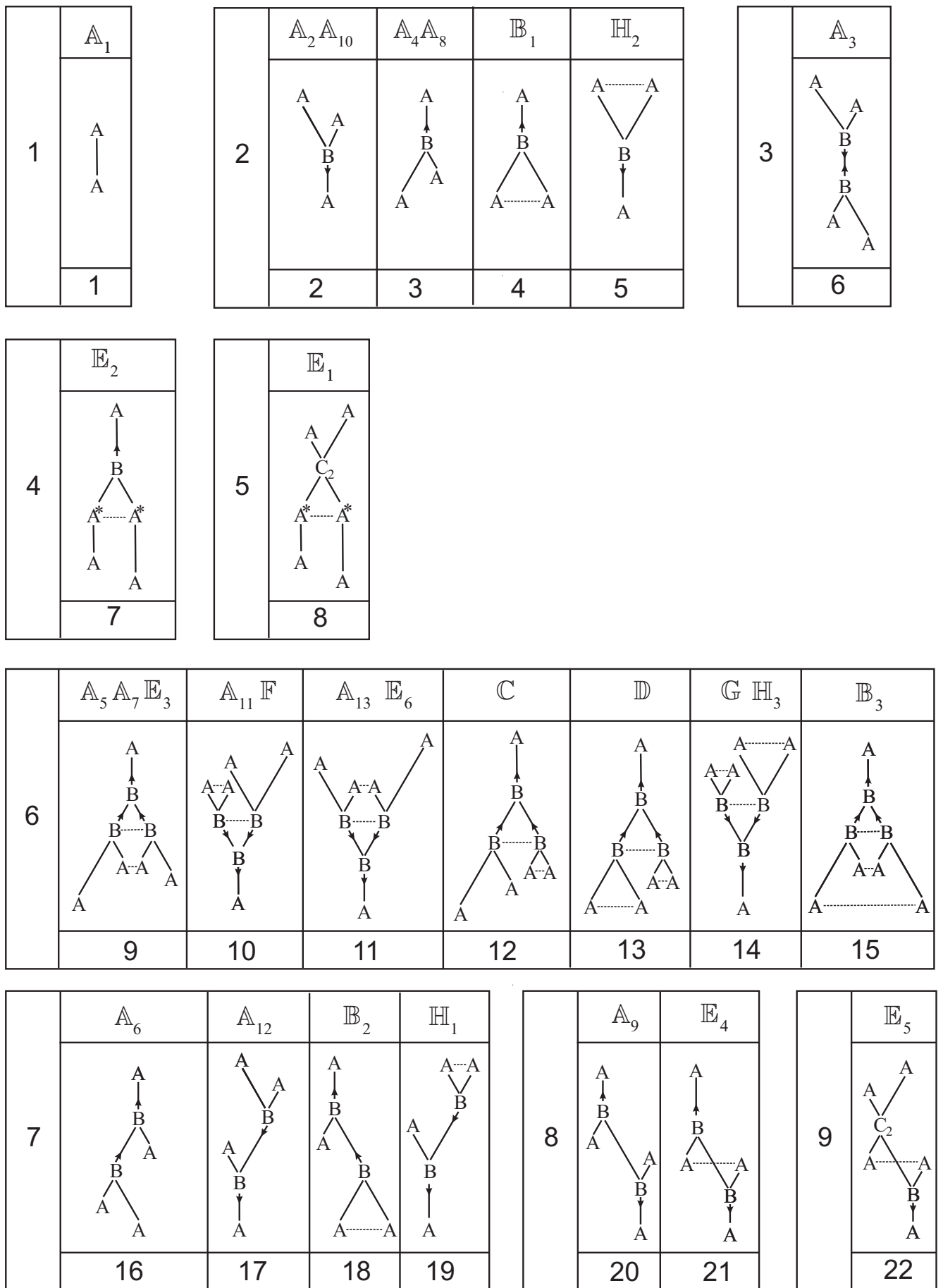


Рис. 1.45. Графы Фоменко

Таблица 1.6.1

Камера	Группа графа (номер)	Время жизни по λ	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Меченая молекула
\mathbb{A}_1	1(1)	$0 \leq \lambda < +\infty$	Да/Да	<i>A</i> [27, Табл. 3], [116, Табл. 8]
\mathbb{A}_2	2(2)	$0 < \lambda < \sqrt{2}$	Нет/Да	<i>B</i> [116, Табл. 8]
\mathbb{A}_3	3(6)	$0 \leq \lambda < 1$	Да/Да	<i>C</i> [27, Табл. 3], [116, Табл. 8]
\mathbb{A}_4	2(3)	$0 \leq \lambda < \lambda_*$	Да/Нет	<i>B</i> [27, Табл. 3]
\mathbb{A}_5	6(9)	$0 \leq \lambda < \lambda_*$	Да/Нет	<i>J</i> [27, Табл. 3]
\mathbb{A}_6	7(16)	$0 < \lambda < \lambda_*$	Нет/Нет	
\mathbb{A}_7	6(9)	$0 < \lambda < \lambda_*$	Нет/Нет	
\mathbb{A}_8	2(3)	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Нет	
\mathbb{A}_9	8(20)	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Нет	
\mathbb{A}_{10}	2(2)	$\lambda > \lambda_*$	Нет/Нет	
\mathbb{A}_{11}	6(10)	$\lambda > \lambda_*$	Нет/Нет	
\mathbb{A}_{12}	7(17)	$\lambda_* < \lambda < \lambda_2$	Нет/Нет	
\mathbb{A}_{13}	6(11)	$\lambda_* < \lambda < \lambda_5$	Нет/Да	<i>F</i> [116, Табл. 8]
\mathbb{B}_1	2(4)	$0 \leq \lambda < +\infty$	Да/Нет	<i>F</i> [27, Табл. 3]
\mathbb{B}_2	7(18)	$0 < \lambda < \lambda_3$	Нет/Нет	

Таблица 1.6.1 (продолжение)

Камера	Группа графа (номер)	Время жизни по λ	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Меченая молекула
\mathbb{B}_3	6(15)	$0 \leq \lambda < \lambda_1$	Да/Нет	G [27, Табл. 3]
\mathbb{C}	6(12)	$0 < \lambda < \lambda_*$	Нет/Нет	
\mathbb{D}	6(13)	$0 \leq \lambda < \lambda_1$	Да/Нет	I [27, Табл. 3]
\mathbb{E}_1	5(8)	$0 \leq \lambda < 1$	Да/Да	D [27, Табл. 3], [116, Табл. 8]
\mathbb{E}_2	4(7)	$0 \leq \lambda < \lambda_*$	Да/Нет	E [27, Табл. 3]
\mathbb{E}_3	6(9)	$0 \leq \lambda < \lambda_*$	Да/Нет	H [27, Табл. 3]
\mathbb{E}_4	8(21)	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Нет	
\mathbb{E}_5	9(22)	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Да	E [116, Табл. 8]
\mathbb{E}_6	6(11)	$\lambda_* < \lambda < +\infty$	Нет/Да	G [116, Табл. 8]
\mathbb{F}	6(10)	$\lambda_* < \lambda < \lambda_2$	Нет/Нет	
\mathbb{G}	6(14)	$\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$	Нет/Да	H [116, Табл. 8]
\mathbb{H}_1	7(19)	$\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$	Нет/Нет	
\mathbb{H}_2	2(5)	$\lambda_4 < \lambda < +\infty$	Нет/Да	J [116, Табл. 8]
\mathbb{H}_3	6(14)	$\lambda_5 < \lambda < +\infty$	Нет/Да	I [116, Табл. 8]

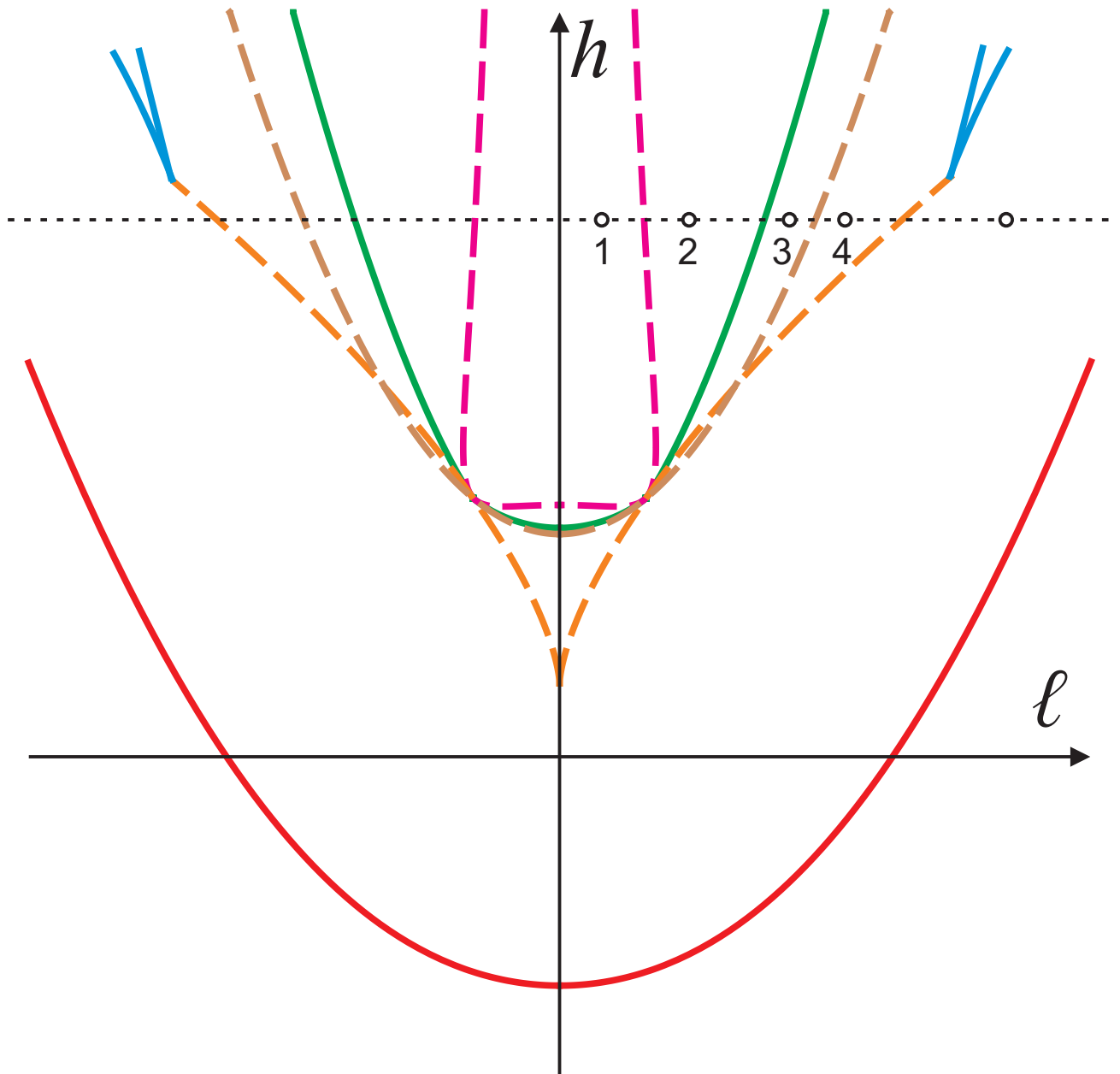


Рис. 1.46. Диаграмма Смейла-Фоменко для $\lambda = 0.8$.

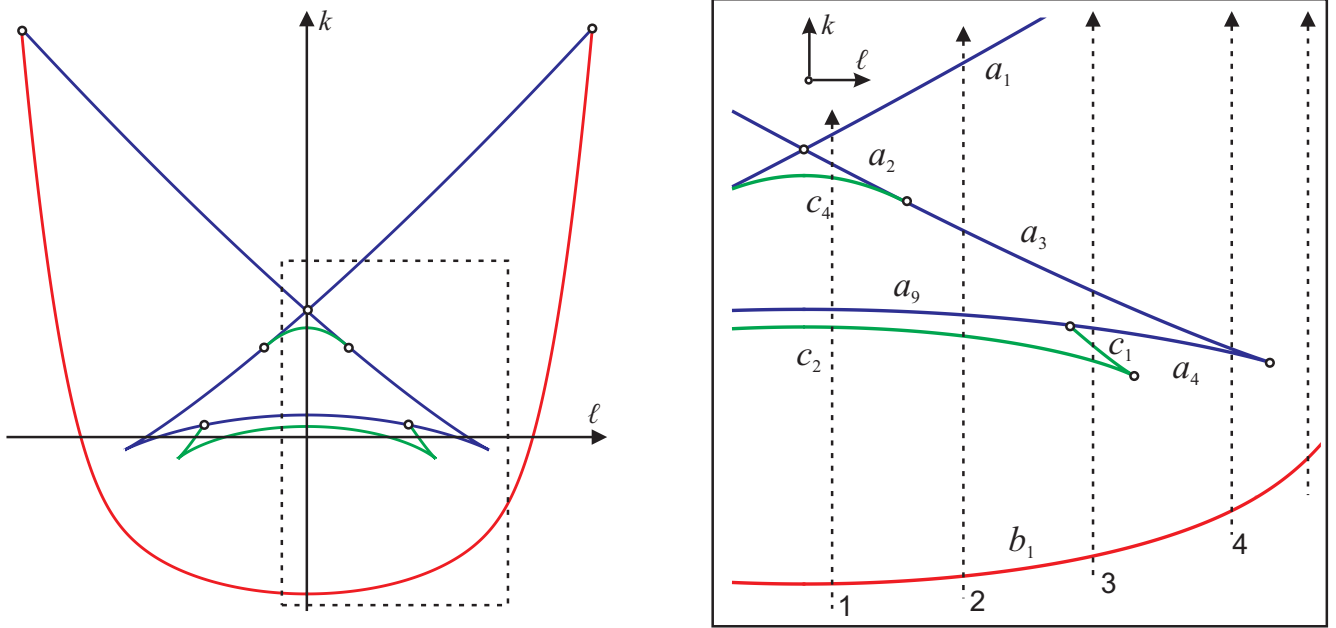


Рис. 1.47. Бифуркационная диаграмма в (ℓ, k) -плоскости для $\lambda = 0.8, h = 2.5$.

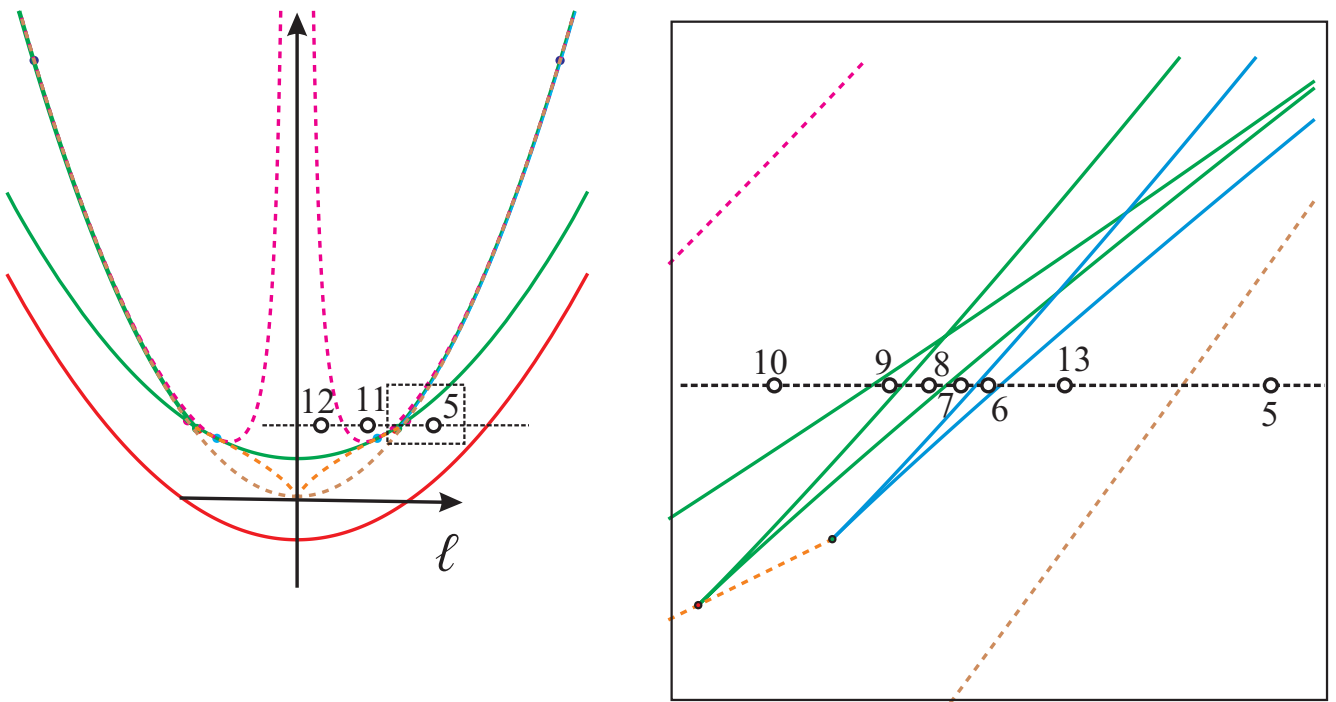


Рис. 1.48. Диаграмма Смейла–Фоменко для $\lambda = 0.1$.

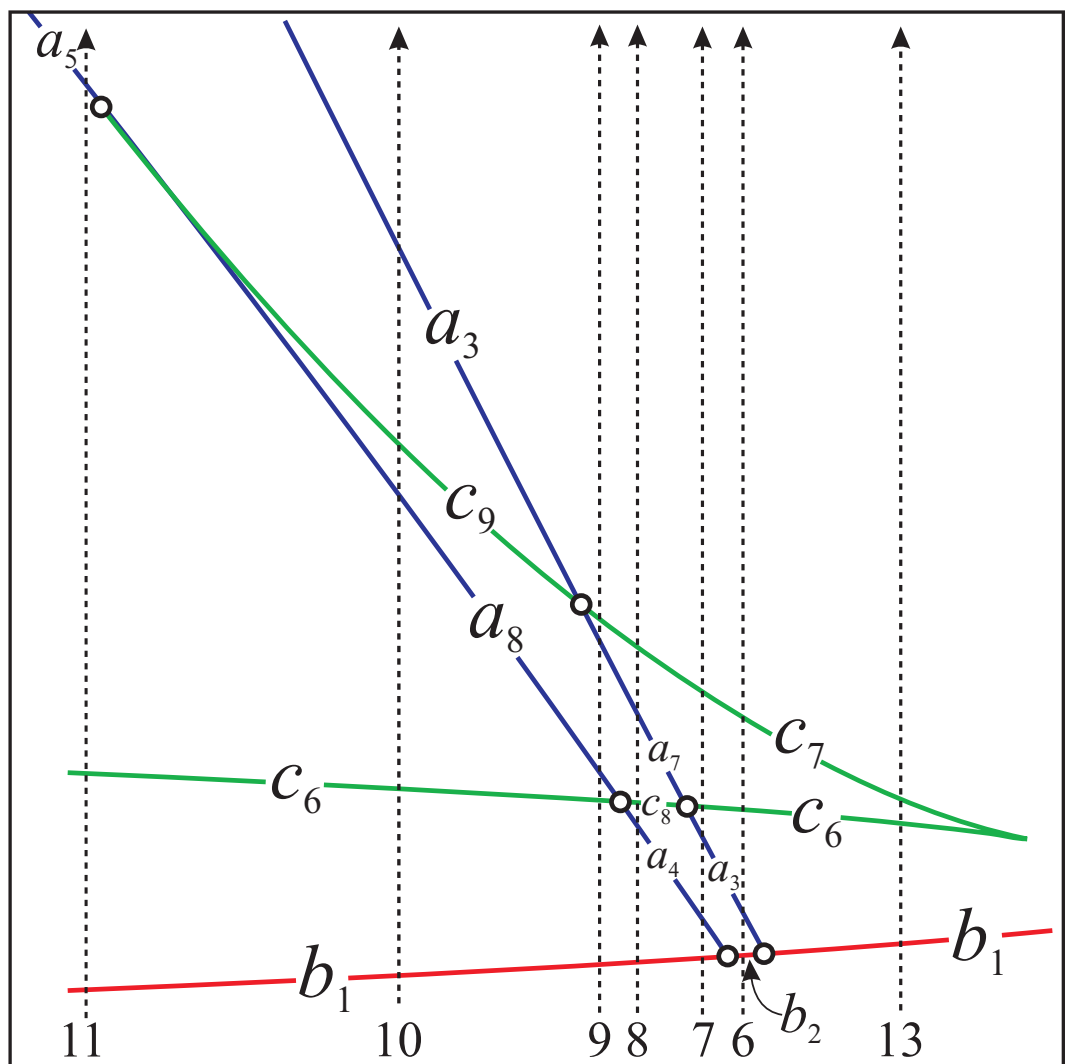
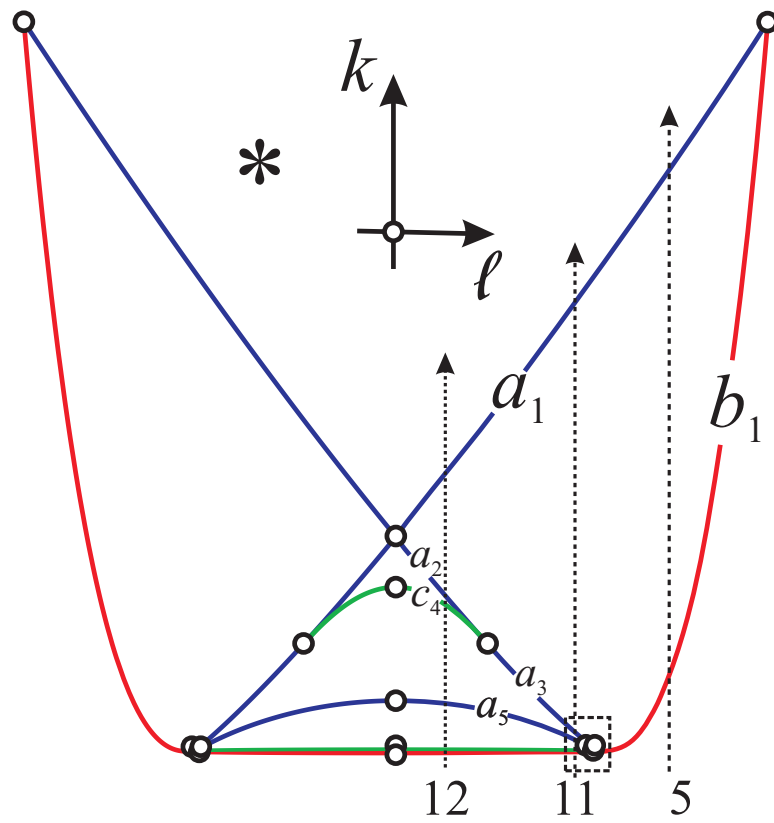


Рис. 1.49. Бифуркационная диаграмма в (ℓ, k) -плоскости для $\lambda = 0.1, h = 1.8$.

Проиллюстрируем работу “конструктора” графов Фоменко на примерах. Рассмотрим диаграммы Смейла – Фоменко для средних значений λ (выбрано $\lambda = 0.8$) и пусть $h = 2.5$ (рис. 1.46). Этот уровень при возрастании ℓ от нуля пересекает пять камер $\mathbb{E}_5, \mathbb{E}_4, \mathbb{A}_9, \mathbb{A}_8, \mathbb{A}_1$ (пути $\ell = \text{const}$ на рис. 1.46 занумерованы цифрами 1, ..., 5). В соответствующем h -сечении диаграммы $\Sigma(\lambda)$ графы Фоменко определяются бифуркациями вдоль прямых $\ell = \text{const}$ при возрастании k (пять пунктирных стрелок на рис. 1.47). Еще 8 камер можно увидеть на одном уровне h при малых λ . Диаграмма Смейла – Фоменко для $\lambda = 0.1$ и уровень $h = 1.8$ показаны на рис. 1.48. Соответствующие пути $\ell = \text{const}$ на диаграмме $\Sigma(\lambda)$ с обозначением пересекаемых дуг показаны на рис. 1.49. Пересекаемые дуги отвечают областям, определенным диаграммами критических подсистем. Последовательности этих пересечений и соответствующих атомов для путей с номерами 1, ..., 13 приведены в табл. 1.6.2. Полный “конструктор” графов представлен в табл. 1.6.3.

Таблица 1.6.2

Номер пути	Камера	Последовательность дуг	Последовательность атомов	Группа графа (номер)
1	\mathbb{E}_5	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_9 \rightarrow$ $\rightarrow c_4 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow (A_+, A_-) \rightarrow$ $\rightarrow C_2 \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	9(22)
2	\mathbb{E}_4	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_9 \rightarrow$ $\rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow (A_+, A_-) \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	8(21)
3	\mathbb{A}_9	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow$ $\rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow A_+ \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	8(20)
4	\mathbb{A}_8	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	2(3)
5	\mathbb{A}_1	$b_1 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_-$	1(1)
6	\mathbb{B}_2	$b_2 \rightarrow a_3 \rightarrow c_6 \rightarrow$ $\rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$2A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_+ \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	7(18)
7	\mathbb{A}_6	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow$ $\rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow$ $\rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	7(16)

Таблица 1.6.2 (продолжение)

Номер пути	Камера	Последовательность дуг	Последовательность атомов	Группа графа (номер)
8	\mathbb{C}	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow c_8 \rightarrow$ $\rightarrow a_7 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow 2B_- \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(12)
9	\mathbb{A}_5	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_8 \rightarrow$ $\rightarrow a_7 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow 2B_- \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(9)
10	\mathbb{E}_3	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_8 \rightarrow$ $\rightarrow c_9 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow 2B_- \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(9)
11	\mathbb{E}_2	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_5 \rightarrow$ $\rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A^* \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	4(7)
12	\mathbb{E}_1	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_5 \rightarrow$ $\rightarrow c_4 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A^* \rightarrow$ $\rightarrow C_2 \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	5(8)
13	\mathbb{A}_4	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	2(3)

Таблица 1.6.3

Камера	Последовательность дуг	Последовательность атомов	Группа графа (номер)
$\mathbb{A}_1(f_1)$	$b_1 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_-$	1(1)
$\mathbb{A}_2(f_2)$	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	2(2)
$\mathbb{A}_3(f_3)$	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow$ $\rightarrow a_6 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow$ $\rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	3(6)
$\mathbb{A}_4(f_4)$	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	2(3)
$\mathbb{A}_5(f_5)$	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_8 \rightarrow$ $\rightarrow a_7 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2B_- \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(9)
$\mathbb{A}_6(f_6)$	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow$ $\rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow$ $\rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	7(16)
$\mathbb{A}_7(f_7)$	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow c_8 \rightarrow$ $\rightarrow c_9 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2B_- \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(9)
$\mathbb{A}_8(f_8)$	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	2(3)

Таблица 1.6.3 (продолжение)

Камера	Последовательность дуг	Последовательность атомов	Группа графа (номер)
$\mathbb{A}_9(f_9)$	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow$ $\rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow$ $\rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	8(20)
$\mathbb{A}_{10}(f_{10})$	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	2(2)
$\mathbb{A}_{11}(f_{11})$	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_{11} \rightarrow$ $\rightarrow a_{10} \rightarrow c_1 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow 2B_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2A_- \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	6(10)
$\mathbb{A}_{12}(f_{12})$	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow a_2 \rightarrow$ $\rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow$ $\rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	7(17)
$\mathbb{A}_{13}(f_{13})$	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow c_5 \rightarrow$ $\rightarrow c_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow 2B_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2A_- \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	6(11)
$\mathbb{B}_1(f_{14})$	$b_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$2A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	2(4)
$\mathbb{B}_2(f_{15})$	$b_2 \rightarrow a_3 \rightarrow c_6 \rightarrow$ $\rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$2A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_+ \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	7(18)
$\mathbb{B}_3(f_{16})$	$b_2 \rightarrow c_8 \rightarrow c_9 \rightarrow$ $\rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$2A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow 2B_- \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(15)
$\mathbb{C}(f_{17})$	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow c_8 \rightarrow$ $\rightarrow a_7 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2B_- \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(12)
$\mathbb{D}(f_{18})$	$b_2 \rightarrow c_8 \rightarrow a_7 \rightarrow$ $\rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	$2A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow 2B_- \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(13)
$\mathbb{E}_1(f_{19})$	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_5 \rightarrow$ $\rightarrow c_4 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A^* \rightarrow$ $\rightarrow C_2 \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	5(8)
$\mathbb{E}_2(f_{20})$	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_5 \rightarrow$ $\rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A^* \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	4(7)
$\mathbb{E}_3(f_{21})$	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_8 \rightarrow$ $\rightarrow c_9 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow 2A_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2B_- \rightarrow B_- \rightarrow A_-$	6(9)
$\mathbb{E}_4(f_{22})$	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_9 \rightarrow$ $\rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow (A_+, A_-) \rightarrow$ $\rightarrow B_- \rightarrow A_-$	8(21)
$\mathbb{E}_5(f_{23})$	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_9 \rightarrow$ $\rightarrow c_4 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow (A_+, A_-) \rightarrow$ $\rightarrow C_2 \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	9(22)
$\mathbb{E}_6(f_{24})$	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_{11} \rightarrow$ $\rightarrow c_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow 2B_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2A_- \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	6(11)
$\mathbb{F}(f_{25})$	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow c_5 \rightarrow$ $\rightarrow a_{10} \rightarrow c_1 \rightarrow a_1$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow 2B_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2A_- \rightarrow A_- \rightarrow A_-$	6(10)

Таблица 1.6.3 (продолжение)

Камера	Последовательность дуг	Последовательность атомов	Группа графа (номер)
$\mathbb{G}(f_{26})$	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow c_5 \rightarrow$ $\rightarrow a_{10} \rightarrow a_{12}$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow 2B_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2A_- \rightarrow A_-$	6(14)
$\mathbb{H}_1(f_{27})$	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow a_2 \rightarrow$ $\rightarrow c_2 \rightarrow a_{12}$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow$ $\rightarrow B_+ \rightarrow 2A_-$	7(19)
$\mathbb{H}_2(f_{28})$	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_{12}$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow 2A_-$	2(5)
$\mathbb{H}_3(f_{29})$	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_{11} \rightarrow$ $\rightarrow a_{10} \rightarrow a_{12}$	$A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow 2B_+ \rightarrow$ $\rightarrow 2A_- \rightarrow A_-$	6(14)

Одно возникающее при этом интересное явление обычно при трактовке совпадения графов Фоменко не оговаривается – в некоторых группах имеются графы, все отличие которых в том, что пара атомов попадает или не попадает на один и тот же критический уровень K . Так, на рис. 1.45 все уровни, содержащие две критические окружности, обладают следующим свойством “устойчивости”: при любом достаточно малом возмущении (ℓ, h) количество окружностей на таком критическом уровне не изменяется. Однако это не так, если критический уровень содержит кратные точки. Таковыми являются уровни $\ell = 0, k = 1 + (h - \lambda^2/2), h \geq \lambda^2/2$, то есть все уровни, образ которых попадает на особую параболу (1.4.4). Такой уровень содержится в любом графе Фоменко вида $W_{0,h}$ с $h > \lambda^2/2$ (напомним, что граничное значение $h = \lambda^2/2$ задает изоэнергетическое многообразие с вырожденной точкой и здесь не рассматривается). Как легко видеть, неустойчивой уровень при малом возмущении ℓ от нулевого значения без выхода за пределы камеры распадается на два, лежащие на нем атомы расходятся на разную высоту по k . Это явление имеет место во всех камерах, имеющих выход на ось $\ell = 0$ при $h > \lambda^2/2$. Неустойчивые (в указанном смысле) графы Фоменко представлены на рис. 1.50. Здесь обозначение камеры, снабженное индексом 0,

означает пересечение камеры с осью $\ell = 0$.

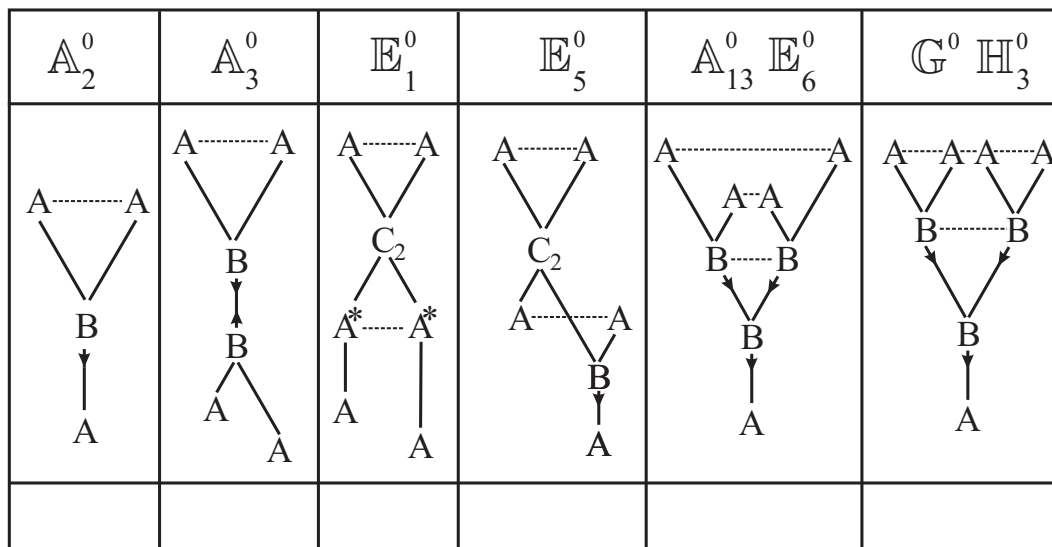


Рис. 1.50. Неустойчивые графы Фоменко.

1.7. Заключение

На этом исследование фазовой топологии случая Ковалевской – Яхья закончено. Как отмечалось выше, эту главу можно дополнить описанием предельных случаев, с которых и начинались подобные исследования, а именно, классической задачи Ковалевской и гиростата с нулевой постоянной площадей. Здесь они не только предполагаются известными, но и активно используются при построении топологических инвариантов. Все исследуемые здесь объекты классифицированы в пространствах соответствующих параметров, построены и изображены разделяющие множества и определяемые ими области устойчивых типов объектов, а затем проиллюстрированы и сами объекты в деталях. Здесь сознательно не приводится подробное изложение общей теории интегрируемых гамильтоновых систем (кроме совсем необходимого минимума определений), поскольку тогда объем главы был бы несоразмерно увеличен.

Глава 2

Топологический анализ волчка Ковалевской в двойном поле сил

В работе [24] С. Смейл сформулировал в современном виде задачу топологического анализа механических систем с первыми интегралами и разработал методы ее решения для класса систем, в которых интегралы, дополнительные к квадратичному по скоростям интегралу энергии, являются следствием наличия групп симметрий, действующих на конфигурационном пространстве. В частности, эти интегралы линейны по скоростям. М.П. Харламов [25, 103, 104, 120, 121] предложил метод исследования топологии интегрируемых систем с нелинейными интегралами и выполнил топологический анализ классических интегрируемых задач динамики твердого тела. В работах Л.М. Лермана, Я.Л. Уманского [122, 123] развита теория особенностей интегральных отображений вполне интегрируемых гамильтоновых систем, получены базовые результаты по топологической структуре окрестностей особенностей, которые теперь называют невырожденными. Новое понимание топологии интегрируемых гамильтоновых систем и глобальные методы ее описания в терминах инвариантов предложены А.Т. Фоменко [124–126]. На основе этих идей в последующих работах А.Т. Фоменко, его учеников и коллег создана теория топологической классификации. Отметим некоторые важные для этого направления работы А.Т. Фоменко, Х. Цишанга, А.В. Болсинова, С.В. Матвеева, Н.Т. Зунга, А.А. Ошемкова [127–131] и подробное изложение этой теории в монографии [26].

Теория топологических инвариантов интегрируемых систем со многими степенями свободы была построена в работах А.Т. Фоменко [126, 132, 133]. В этой теории введено новое понятие меченых сетей. В ра-

ботах Н.Т. Зунга [134], Л.С. Поляковой [135], А.В. Кузнецова [136] и Е.Н. Селивановой [137] вычислены меченые сети для некоторых важных физических интегрируемых систем со многими степенями свободы (цепочки Тоды, системы трехточечных вихрей, геодезические потоки на многомерных сферах и торах). Исследования по топологии интегрируемых систем на многомерных многообразиях содержатся в работах А.В. Болсинова [138, 139]. В работах Ю.А. Браилова [140, 141] приведены результаты топологического анализа интегрируемой системы с тремя степенями свободы, которая представляет собой аналог твердого тела на алгебре Ли $su(3)$.

В цитированной выше работе С. Смейл в качестве примера рассматривал задачу n тел из небесной механики. После этого долгое время одним из основных источников примеров интегрируемых систем с двумя степенями свободы являлась задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле вместе с ее обобщениями на некоторые коалгебры Ли. Эта задача и сегодня остается важным объектом приложения новых идей и генератором новых интегрируемых систем (см., например, работы Х.М. Яхья, В.В. Соколова, А.В. Цыганова [30, 31, 86, 142–146] и приведенные в них ссылки). В классической постановке задача динамики твердого тела описывается механической системой с гироскопическими силами на группе $SO(3)$ с S^1 -симметрией. Отказ от осесимметричных сил приводит к системам с тремя степенями свободы без возможности глобального понижения порядка. Задачей такого типа является обобщение классического случая интегрируемости С.В. Ковалевской на движение гиростата в двойном силовом поле. Полная интегрируемость этой системы доказана в работах [30, 34, 35] путем последовательного обобщения классических интегралов. В настоящей главе эта система рассматривается при отсутствии гиростатического момента. Этот случай принято называть волчком Ковалевской в

двойном поле. Предложено полное исследование трехмерной топологии системы, частично анонсированное в [56]. Предполагаются известные определения и факты, связанные с особенностями отображения момента и бифуркациями в случае многих степеней свободы [26, 125, 126, 147].

Структура настоящей главы основана на идее топологического атласа неприводимой системы с тремя степенями свободы, зависящей от некоторого набора физических параметров [112, 148]. В этом случае грубый изоэнергетический инвариант уже не является одномерным графом, а может быть представлен в виде так называемой оснащенной изоэнергетической диаграммы – бифуркационной диаграммы ограничения отображения момента на уровень энергии, стратифицированной рангом отображения и типами критических точек в прообразе. Более того, необходимо в понятие оснащенной диаграммы включить и ее оболочку, то есть дополнить ее двумерными камерами, на которые она разбивает плоскость пары дополнительных интегралов, с указанием количества регулярных торов в камерах и способа объединения этих торов в так называемые семейства. Для этого необходима полная классификация изоэнергетических диаграмм и анализ их эволюции в зависимости от параметров системы.

На первом этапе выполняется стратификация фазового пространства критическими подсистемами, образованными множеством критических точек в прообразах гладких поверхностей, несущих бифуркационную диаграмму Σ полного отображения момента в трехмерном пространстве. Критические подсистемы имеют не более двух степеней свободы, и к ним применим весь накопленный опыт топологического анализа. В частности, вычисляются бифуркационные диаграммы критических подсистем, типы точек ранга 0 и 1, критических *внутри* подсистем, и соответствующие атомы двумерных бифуркаций. В то же вре-

мя, уравнения фазовых пространств критических подсистем позволяют явно вычислить *внешний* тип любой точки критической подсистемы, в частности, всех точек ранга 2. Комбинируя эту информацию, получаем полную классификацию критических точек по их типам в исходной системе с тремя степенями свободы.

Пусть c – вектор физических параметров, H – гамильтониан системы. В нерезонансной системе при отсутствии экзотических бифуркаций (с так называемыми расщепляющимися атомами) сечения бифуркационной диаграммы Σ плоскостями постоянного значения $H = h$ перестраиваются в тех случаях, когда выполняется одно из следующих условий: (а) на изоэнергетическое многообразие $H_h = \{H = h\}$ попадают точки ранга 0 и вырожденные точки ранга 1; (б) гамильтониан имеет экстремум на семействе вырожденных критических точек ранга 2. При заданном векторе параметров этим условиям удовлетворяет лишь конечное число точек. Записывая в них зависимости $h = h(c)$, получаем набор поверхностей в пространстве параметров (c, h) , разделяющих различные неэквивалентные параметрически устойчивые изоэнергетические диаграммы. Таким образом, для получения *топологического атласа* необходимо построить совокупность разделяющих поверхностей и для каждой области дополнения к разделяющему множеству в пространстве (c, h) указать соответствующую оснащенную изоэнергетическую диаграмму. Дальнейшее сопоставление этих диаграмм позволяет завершить и задачу описания строения семейств регулярных торов.

2.1. Уравнения и интегралы. Понятие критической подсистемы

Задача о движении волчка Ковалевской в двойном поле описывается системой уравнений [34]

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 + \beta_3, & \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\beta}_1 &= \beta_2\omega_3 - \omega_2\beta_3, \\ 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, & \dot{\alpha}_2 &= \omega_1\alpha_3 - \omega_3\alpha_1, & \dot{\beta}_2 &= \omega_1\beta_3 - \omega_3\beta_1, \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, & \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, & \dot{\beta}_3 &= \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Здесь ω – вектор мгновенной угловой скорости. Постоянные в инерциальном пространстве векторы α, β характеризуют действие силовых полей. Обозначения выберем так, чтобы выполнялось неравенство $|\alpha| \geq |\beta|$. Как показано в [149], без ограничения общности силовые поля можно считать взаимно ортогональными. Тогда геометрические интегралы системы (2.1.1) запишутся в виде ($a \geq b \geq 0$)

$$|\alpha|^2 = a^2, \quad |\beta|^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = 0. \quad (2.1.2)$$

Перенесем на пространство $\mathbb{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$ введенную в работе [34] скобку Ли – Пуассона коалгебры Ли $e(3, 2)^* = \{(M, \alpha, \beta)\}$, используя компоненты кинетического момента $M_1 = 2\omega_1, M_2 = 2\omega_2, M_3 = \omega_3$. Система (2.1.1) примет вид $\dot{x} = \{H, x\}$, где x – любая из координат, а

$$H = \frac{1}{2}(2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + \omega_3^2) - \alpha_1 - \beta_2. \quad (2.1.3)$$

Функциями Казимира для скобки Ли – Пуассона являются левые части уравнений (2.1.2). Поэтому векторное поле (2.1.1), ограниченное на заданное этими уравнениями шестимерное подмногообразие P^6 в $\mathbb{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$, является гамильтоновой системой с тремя степенями свободы.

При $b = 0$ система (2.1.1) описывает случай С.В. Ковалевской движения твердого тела в поле силы тяжести, а при $a = b$ – случай

Х.М. Яхья [30]. Эти предельные задачи обладают группой симметрий и редуцируются к семействам интегрируемых систем с двумя степенями свободы (конфигурационное пространство – сфера). Классический случай Ковалевской изучен в [27, 103, 104]. Случай Яхья и его обобщения рассматривались в [150, 151]. Глобальный подход к классификации интегрируемых систем на двумерной сфере, порожденных задачами динамики твердого тела с осесимметричным потенциалом, реализован в работах [152–154]. Далее рассматривается случай $a > b > 0$, не приводимый к двум степеням свободы.

Найденные в [34] и [35] первые интегралы системы (2.1.1)

$$\begin{aligned}
 K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\
 G &= [\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3]^2 + [\omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3\omega_3]^2 + \\
 &\quad + \omega_3 [(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\omega_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\omega_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\omega_3] - \\
 &\quad - \alpha_1b^2 - \beta_2a^2
 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

вместе с H образуют на P^6 полный инволютивный набор. Соответствующее отображение момента $\mathcal{F} : P^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ определим, полагая $\mathcal{F}(x) = (G(x), K(x), H(x))$.

Пусть \mathcal{K} – множество критических точек отображения момента, то есть точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 3$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^3$ называется *бифуркационной диаграммой*. Множество \mathcal{K} стратифицировано рангом отображения момента $\mathcal{K} = \mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1 \cup \mathcal{K}^2$. Здесь $\mathcal{K}^r = \{x \in P^6 \mid \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}$. В соответствии с этим и диаграмма Σ становится клеточным комплексом $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2$. С другой стороны, на практике бифуркационные диаграммы описываются в терминах некоторых поверхностей в пространстве констант первых интегралов. Уравнения этих поверхностей (неявные или параметрические) зачастую можно получить даже не вычисляя самих критических точек как дискриминантные множества некоторых многочленов (например, исходя

из особенностей алгебраических кривых, ассоциированных с представлениями Лакса). Такие поверхности будем обозначать через Π_i и записывать представление $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$, где $\Sigma_i = \Sigma \cap \Pi_i$. Смысл этого представления в том, что критическое множество \mathcal{K} оказывается объединением естественным образом возникающих инвариантных множеств $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{F}^{-1}(\Pi_i)$. Если поверхность Π_i записана регулярным уравнением

$$\phi_i(g, k, h) = 0, \quad (2.1.5)$$

то \mathcal{M}_i определится как множество критических точек интеграла $\phi_i(G, K, H)$, лежащих на его нулевом уровне, а вычисленные в точке \mathcal{M}_i компоненты градиента функции ϕ_i в подстановке значений интегралов G, K, H дадут коэффициенты равной нулю линейной комбинации дифференциалов dG, dK, dH . В точке трансверсального пересечения двух поверхностей Π_i и Π_j получим две независимые равные нулю комбинации, поэтому в точках соответствующего пересечения $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$ ранг \mathcal{F} равен 1. Очевидно, что точки трансверсального пересечения трех поверхностей (углы бифуркационной диаграммы) оказываются порожденными точками с условием $\text{rank } \mathcal{F} = 0$. Множества \mathcal{M}_i с индуцированной на них динамикой далее называем *критическими подсистемами*.

Критические подсистемы и уравнения поверхностей Π_i в рассматриваемой задаче найдены в работах [34, 87, 155]. Подробное описание стратификации критического множества по рангу отображения момента изложено в [156]. Там же в виде явных неравенств для постоянной энергии указаны области существования движений на поверхностях Π_i – множества Σ_i , составляющие бифуркационную диаграмму. Как следствие этих неравенств построено множество в пространстве параметров, разделяющее различные виды сечений диаграммы Σ плоскостями постоянной энергии, то есть виды бифуркационных диаграмм отображе-

ния $G \times K$, ограниченного на изоэнергетические поверхности $\{H = h\} \subset P^6$. Критические подсистемы оказываются интегрируемыми почти всюду гамильтоновыми системами с числом степеней свободы меньшим трех. Для них, в свою очередь, определено индуцированное отображение момента. Бифуркационная диаграмма Σ_i^* для отображения $\mathcal{F}|_{M_i}$ очевидным образом отождествляется с подмножеством объединения нульмерного и одномерного остовов множества Σ_i . Здесь стратификацию Σ_i естественно вводить геометрически, исходя из существующих пересечений вида $\Sigma_i \cap \Sigma_j$. При этом в одномерный остов Σ_i^1 могут попасть и точки касания двух поверхностей, в прообразе которых ранг $\mathcal{F}|_{M_i}$ не падает, и которые, следовательно, формально не входят в Σ_i^* . Конечно, соответствующие точки множества \mathcal{K} окажутся *вырожденными* критическими точками для \mathcal{F} , но подсистема M_i может этого не почувствовать. Описание диаграмм Σ_i^* и бифуркаций *внутри* критических подсистем получено в работах [157–160]. Классификация точек множества \mathcal{K} по отношению ко всей исходной системе с тремя степенями свободы на P^6 выполнена в работе [57]. В двух следующих разделах приводится краткое изложение необходимых сведений из цитированных работ.

2.2. Описание критических подсистем и классов особенностей

В этом разделе излагается сводка результатов, относящихся к нахождению критического множества отображения момента и классификации критических точек по их рангу.

Для компактного описания критических подсистем воспользуемся

заменой переменных [155]:

$$\begin{aligned}x_1 &= (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 &= (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\y_1 &= (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 &= (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\z_1 &= \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 &= \alpha_3 - i\beta_3, \\w_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & w_2 &= \omega_1 - i\omega_2, & w_3 &= \omega_3.\end{aligned}$$

Введем следующие функции

$$\begin{aligned}Z_1 &= w_1^2 + x_1, & Z_2 &= w_2^2 + x_2, \\F_1 &= \sqrt{x_1 x_2} w_3 - \frac{(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2)}{\sqrt{x_1 x_2}}, & F_2 &= \frac{x_2}{x_1} Z_1 - \frac{x_1}{x_2} Z_2, \\R_1 &= \frac{w_2 x_1 + w_1 y_2 + w_3 z_1}{w_1} - \frac{w_1 x_2 + w_2 y_1 + w_3 z_2}{w_2}, \\R_2 &= (w_2 z_1 + w_1 z_2) w_3^2 + \left[\frac{w_2 z_1^2}{w_1} + \frac{w_1 z_2^2}{w_2} + w_1 w_2 (y_1 + y_2) + \right. \\&\quad \left. + x_1 w_2^2 + x_2 w_1^2 \right] w_3 + \frac{w_2^2 x_1 z_1}{w_1} + \frac{w_1^2 x_2 z_2}{w_2} + \\&\quad + x_1 z_2 w_2 + x_2 z_1 w_1 + (w_1 z_2 - w_2 z_1)(y_1 - y_2).\end{aligned}$$

Определим параметры $p > r > 0$, полагая $p^2 = a^2 + b^2$ и $r^2 = a^2 - b^2$. Далее они используются наравне с a, b там, где это удобно для сокращения записи.

Теорема 22 ([87]). *Критическое множество отображения \mathcal{F} состоит из четырех критических подсистем \mathcal{M}_i ($i = 1, \dots, 4$), заданных в P^6 следующими системами уравнений:*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 : & \quad Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \\ \mathcal{M}_2 : & \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \\ \mathcal{M}_3 : & \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \\ \mathcal{M}_4 : & \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0.\end{aligned}$$

\mathcal{F} -образы множеств \mathcal{M}_i , обозначаемые соответственно через Π_i , в пространстве $\mathbb{R}^3(h, k, g)$ постоянных интегралов H, K, G записываются

ся следующими системами уравнений

$$\begin{aligned} \Pi_1 : \begin{cases} k = 0, \\ g = \frac{1}{2}p^2h - \frac{1}{4}f^2; \end{cases} & \quad \Pi_2 : \begin{cases} k = r^4m^2, \\ g = \frac{1}{2}(p^2h - r^4m); \end{cases} \\ \Pi_3 : \begin{cases} k = 3s^2 - 4hs + p^2 + h^2 - \frac{a^2b^2}{s^2}, \\ g = -s^3 + hs^2 + \frac{a^2b^2}{s}; \end{cases} & \quad \Pi_4 : \begin{cases} k = (a \mp b)^2, \\ g = \pm abh. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Здесь через f, m, s обозначены постоянные частных интегралов F, M, S в соответствующих подсистемах $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$:

$$\begin{aligned} F &= w_1w_2w_3 + z_2w_1 + z_1w_2, \\ M &= \frac{1}{2r^2} \left(\frac{x_2}{x_1} Z_1 + \frac{x_1}{x_2} Z_2 \right), \\ S &= -\frac{1}{4} \left(\frac{y_2w_1 + x_1w_2 + z_1w_3}{w_1} + \frac{x_2w_1 + y_1w_2 + z_2w_3}{w_2} \right). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Сделаем ряд комментариев.

Очевидно, системы уравнений (инвариантных соотношений), описывающие множества \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 , имеют особенности. Здесь имеется в виду, что рассматривается замыкание в P^6 множества решений соответствующей системы в ее области определения.

Подсистема \mathcal{M}_1 и интеграл F найдены в работе [34], подсистема \mathcal{M}_2 и интеграл M – в работе [155]. Подсистемы \mathcal{M}_3 и \mathcal{M}_4 , завершающие описание критического множества, а также интеграл S , являющийся аналогом переменной Ковалевской, сохраняющей постоянное значение на критических движениях 4-го класса Аппельрота, найдены в [87]. Множество \mathcal{M}_4 , заданное четырьмя уравнениями, является гладким двумерным многообразием. С точностью до диффеоморфизма это – объединение двух цилиндров $S^1 \times \mathbb{R}$. Индуцированная система гамильтонова с одной степенью свободы.

Множества \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 являются гладкими четырехмерными многообразиями, однако \mathcal{M}_2 неориентируемо (см. [110, 157]). С использованием явных параметрических уравнений множества \mathcal{M}_3 , полученных в

[161] (они приведены и в [57]), можно показать, что \mathcal{M}_3 – гладкое четырехмерное многообразие всюду за исключением общих точек с \mathcal{M}_4 , в которых \mathcal{M}_3 имеет трансверсальное самопересечение по двумерному подмногообразию с краем $\mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_4$.

В силу представления (2.2.1) области существования критических движений Σ_i и бифуркационные диаграммы критических подсистем Σ_i^* удобно описывать в терминах частных отображений момента. Для первых трех подсистем это отображения $\mathcal{F}_i : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенные как

$$\mathcal{F}_1 = F^2 \times H, \quad \mathcal{F}_2 = M \times H, \quad \mathcal{F}_3 = S \times H.$$

Для подсистемы \mathcal{M}_4 с одной степенью свободы естественно положить $\mathcal{F}_4 = H : \mathcal{M}_4 \rightarrow \mathbb{R}$.

Для дальнейшего нам понадобятся обозначения различных классов критических точек и их образов под действием отображений момента. Ранг точек всегда указывается по отношению к полному отображению момента \mathcal{F} .

Замечание 9. *Далее действует соглашение, по которому образы одной и той же критической точки или определенного семейства критических точек обозначаются одинаково, независимо от того, какое из введенных выше отображений момента применяется. Это не приведет к недоразумению. Единственное исключение составляют точки самопересечения поверхности Π_3 , которые при развертке на плоскость (s, h) получают два представления с различными значениями s . Точки на плоскости (s, h) , которые переходят в одну и ту же точку (h, k, g) будем снабжать верхним индексом “плюс” или “минус” соответственно для большего и для меньшего значений s .*

Нам удобно сразу же выделить классы движений Q_i в подсистемах \mathcal{M}_i ($i = 1, 2, 3$), отвечающие подмножествам, на которых вырождается

форма, индуцированная симплектической структурой. Известно [162], что на подмногообразиях, заданных как совместный уровень двух независимых функций, такое вырождение происходит там, где скобка Пуассона этих функций обращается в нуль. В точках подсистем \mathcal{M}_i выполнены тождества [157, 158, 161]

$$\{Z_1, Z_2\} \equiv -2iF, \quad \{F_1, F_2\} \equiv -2i r^2 L, \quad \{R_1, R_2\} \equiv \frac{8i}{S} U,$$

где F, S определены в (2.2.2), а L и U – интегралы подсистем \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 соответственно и имеют вид

$$L = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} [w_1 w_2 + x_1 x_2 + z_1 z_2 M], \quad U = 2S^4 - 2HS^3 + a^2 b^2. \quad (2.2.3)$$

Таким образом, $Q_1 = \mathcal{M}_1 \cap \{F = 0\}$, $Q_2 = \mathcal{M}_2 \cap \{L = 0\}$ и $Q_3 = \mathcal{M}_3 \cap \{U = 0\}$. Почти все точки этих подмножеств имеют ранг 2, но при этом, как показано в [57], все они, включая и точки конечного числа попадающих сюда периодических решений, состоящих из точек ранга 1, являются вырожденными критическими точками отображения момента \mathcal{F} .

По определению $Q_i \subset \mathcal{M}_i$, но вдобавок $Q_1 \subset \mathcal{M}_2$ и $Q_2 \subset \mathcal{M}_3$, причем ограничение симплектической структуры на \mathcal{M}_2 не вырождается в точках Q_1 , а ограничение симплектической структуры на \mathcal{M}_3 не вырождается в точках Q_2 . Обозначим образы множеств Q_1, Q_2, Q_3 под действием полного отображения момента \mathcal{F} и частных отображений \mathcal{F}_i через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ соответственно.

Классифицируем критические точки по их рангу и принадлежности к критическим подсистемам.

Критических точек ранга 0 в рассматриваемой системе ровно четыре [163]. В них, очевидно, $\alpha_1 = \pm a$, $\beta_2 = \pm b$, остальные компоненты α и β , как и вектор ω , равны нулю. В порядке возрастания значений H обозначим эти точки через p_0, p_1, p_2, p_3 . Ни одна из них не лежит в \mathcal{M}_1 и

все они лежат в $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_4$. Индекс $i = 0, \dots, 3$ равен индексу Морса функции H в этих точках [163]. Образы точек p_i под действием отображений момента обозначим через P_i . Их координаты легко вычисляются из (2.1.3), (2.1.4). Для дальнейшего нам важны лишь h -координаты, равные $\mp a \mp b$.

Все критические точки ранга 1 организованы в девять семейств периодических решений, обозначаемых \mathcal{D}_i ($i = 1, 2, 3$) и \mathcal{L}_j ($j = 1, \dots, 6$).

Семейства $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ впервые описаны в [157] как множества критических траекторий пары интегралов H, F на \mathcal{M}_1 . Явные алгебраические выражения фазовых переменных через одну вспомогательную, связанную с временем t эллиптической квадратурой, приведены в работе [164], где, в частности, доказано, что объединение этих семейств совпадает с пересечением подсистем \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_3 . Там же даны параметрические выражения для значений первых интегралов (общих и частных) на этих семействах, в которых в качестве параметра используется постоянная интеграла S . Обозначая одномерные образы семейств \mathcal{D}_i через δ_i ($i = 1, 2, 3$), получим уравнения

$$\delta_1 : \begin{cases} h = 2s - \frac{1}{s} \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} \\ f^2 = -\frac{2}{s} \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} (\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2})^2 \quad ; \\ g = \frac{1}{s} (s^4 - s^2 \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} + a^2 b^2), \quad s \in [-b, 0) \end{cases}$$

$$\delta_2 : \begin{cases} h = 2s + \frac{1}{s} \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} \\ f^2 = \frac{2}{s} \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} (\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2})^2 \quad ; \quad (2.2.4) \\ g = \frac{1}{s} (s^4 + s^2 \sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} + a^2 b^2), \quad s \in (0, b] \end{cases}$$

$$\delta_3 : \begin{cases} h = 2s - \frac{1}{s} \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} \\ f^2 = \frac{2}{s} \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} (\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2})^2 \\ g = \frac{1}{s} (s^4 - s^2 \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} + a^2 b^2), \quad s \in [a, +\infty) \end{cases} .$$

При этом следует учесть, что $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{M}_1$, поэтому здесь $k = 0$.

Точки (2.2.4) с граничными значениями s (соответственно, $s = -b, b, a$) обозначим через e_i ($i = 1, 2, 3$). На плоскости $\mathbb{R}^2(f^2, h)$ кривые δ_i имеют концевые точки e_i на оси $f^2 = 0$, кривая δ_3 имеет точку возврата, обозначаемую далее через e_4 и отвечающую значению s_0 – единственному корню уравнения

$$3s^8 - 4p^2s^6 + 6a^2b^2s^4 - a^4b^4 = 0 \quad (2.2.5)$$

на полупрямой $s > a$. На плоскости $\mathbb{R}^2(s, h)$ все три кривые δ_i не имеют особых точек (кроме концевых), а значению s_0 отвечает минимум h на δ_3 .

Семейства \mathcal{L}_j представляют собой маятниковые движения (колебания или вращения) около главных осей инерции тела и в фазовом пространстве имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,2} &= \{\alpha \equiv \pm a\mathbf{m}_1, \beta = b(\mathbf{m}_2 \cos \theta - \mathbf{m}_3 \sin \theta), \omega = \theta \cdot \mathbf{m}_1, 2\theta'' = -b \sin \theta\}, \\ \mathcal{L}_{3,4} &= \{\alpha = a(\mathbf{m}_1 \cos \theta + \mathbf{m}_3 \sin \theta), \beta \equiv \pm b\mathbf{m}_2, \omega = \theta \cdot \mathbf{m}_2, 2\theta'' = -a \sin \theta\}, \\ \mathcal{L}_{5,6} &= \{\alpha = a(\mathbf{m}_1 \cos \theta - \mathbf{m}_2 \sin \theta), \beta = \pm b(\mathbf{m}_1 \sin \theta + \mathbf{m}_2 \cos \theta), \omega = \theta \cdot \mathbf{m}_3, \\ &\quad \theta'' = -(a \pm b) \sin \theta\}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2\mathbf{m}_3$ – канонический базис в \mathbb{R}^3 . Семейству с первым номером соответствует верхний знак. Бифуркациям в семействах отвечают значения h в неподвижных точках p_i ($i = 0, \dots, 3$), а именно, $h = \mp a \mp b$. Считаем, что многообразия \mathcal{L}_i включают и такие особые траектории, то есть в действительности являются замыканиями семейств периодических траекторий. Непосредственно проверяется, что бифуркации внутри семейств (возникновение колебательных движений и перестройка колебательных движений во вращательные) происходят в соответствии со следующей принадлежностью: $p_0 \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_5$, $p_1 \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_4 \cap \mathcal{L}_6$, $p_2 \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_6$, $p_3 \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_4 \cap \mathcal{L}_5$. В частности, наименьшие значения H на \mathcal{L}_i таковы: $-a - b$ на $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_3$ и \mathcal{L}_5 ; $a - b$ на \mathcal{L}_2 ; $-a + b$ на \mathcal{L}_4 и \mathcal{L}_6 .

Как уже отмечалось, все точки траекторий, попадающих на множества точек вырождения форм, индуцированных симплектической структурой на многообразиях критических подсистем, независимо от ранга являются вырожденными критическими точками отображения момента \mathcal{F} . Формальное доказательство имеется в [57]. Среди точек ранга 0 таких нет. Перечислим вырожденные периодические траектории.

Пусть $\tau_i = \mathcal{D}_i \cap Q_1$. Известно [157], что τ_1, τ_2 состоят из одной траектории, а τ_3 из двух. Эти пересечения имеют своими образами введенные выше точки e_i ($i = 1, 2, 3$), так что $e_i = \Delta_1 \cap \delta_i$. В образе отображения \mathcal{F}_2 они лежат на оси $m = 0$. Эти же траектории являются пересечениями $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{M}_2$ и, в совокупности, исчерпывают пересечение Q_1 с \mathcal{M}_3 . С множеством Q_2 семейства \mathcal{D}_i не пересекаются. Пересечение с Q_3 имеется лишь у \mathcal{D}_3 по паре траекторий τ_4 , отвечающих введенному выше значению s_0 — корню уравнения (2.2.5).

Пересечения Q_i с \mathcal{L}_j таковы:

- Q_1 пересекается с $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_2$ по уже указанным траекториям τ_1, τ_2, τ_3 и не имеет других пересечений с \mathcal{L}_j ;
- Q_2 пересекается с \mathcal{L}_4 по паре вращательных траекторий τ_5 с $h = \frac{a^2+3b^2}{2b}$, с \mathcal{L}_2 по паре вращательных траекторий τ_6 с $h = \frac{3a^2+b^2}{2a}$ и не имеет других пересечений с \mathcal{L}_j ;
- траектории τ_5, τ_6 служат также пересечениями Q_3 с \mathcal{L}_4 и \mathcal{L}_2 соответственно, и в дополнение Q_3 пересекается с \mathcal{L}_5 по одной колебательной траектории τ_7 ($h = -2\sqrt{ab}$) и паре вращательных траекторий τ_8 ($h = 2\sqrt{ab}$).

Для понимания общей картины расположения семейств \mathcal{L}_i относительно критических подсистем полезны также следующие факты.

Предложение 17. 1. Подсистема M_1 не пересекается с семействами $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6$ и содержит траектории τ_1, τ_2, τ_3 семейств $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_2$. Эти траектории лежат и в Q_1 , являясь его пересечениями с семействами $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$.

2. Семейства $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_4$ целиком лежат в пересечении $M_2 \cap M_3$.

3. Семейство \mathcal{L}_5 пересекается с подсистемой M_2 по бифуркационным траекториям уровней $h = \pm(a + b)$, траектории семейства \mathcal{L}_5 лежат в M_3 для всех значений $h \notin (-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab})$. Граничным значениям отвечают траектории τ_7, τ_8 .

4. Семейство \mathcal{L}_6 пересекается с подсистемой M_2 по бифуркационным траекториям уровней $h = \pm(a - b)$ и целиком лежит в M_3 .

5. Подсистема M_4 есть объединение семейств \mathcal{L}_5 и \mathcal{L}_6 , при этом часть M_4 , не принадлежащая другим подсистемам, состоит из траекторий \mathcal{L}_5 со значениями $h \in (-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab})$.

Образы семейств \mathcal{L}_i под действием отображений момента обозначим через λ_i ($i = 1, \dots, 6$). Это одномерные объекты. Точки, служащие образами особых траекторий τ_i , обозначим через e_i ($i = 1, \dots, 8$).

Дадим теперь сводку информации по образам перечисленных выше особых точек и подмножеств фазового пространства.

В табл. 2.2.1 приведены значения всех первых интегралов в точках траекторий τ_i , то есть координаты точек e_i во всех пространствах-образах отображений момента. Здесь для точки e_4 координаты h, g и f вычисляются по формулам (2.2.4) для δ_3 с определенным выше значением s_0 .

Замечание 10. В табл. 2.2.1 добавлена новая точка e_9 . Она отвечает наименьшему значению энергии H на множестве вырожденных критических точек Q_2 . В отличие от множеств Q_1 и Q_3 , где все экстремальные значения энергии отвечают случаям возникновения вырожденных

периодических решений, то есть бифуркациям вырожденных двумерных торов, на множестве Q_2 наименьшее значение H достигается при отсутствии каких-либо дополнительных бифуркаций вырожденных критических точек ранга 2. Однако это значение энергии окажется существенным при классификации изоэнергетических инвариантов.

Таблица 2.2.1

	h	k	g	f	m	s
e_1	$-2b$	0	$-bp^2$	0	0	$-b$
e_2	$2b$	0	bp^2	0	0	b
e_3	$2a$	0	ap^2	0	0	a
e_4	$h(s_0)$	0	$g(s_0)$	$f(s_0)$	$-$	s_0
e_5	$\frac{a^2 + 3b^2}{2b}$	$\frac{r^4}{4b^2}$	$\frac{p^4 - b^2r^2}{2b}$	$-$	$-\frac{1}{2b}$	b
e_6	$\frac{3a^2 + b^2}{2a}$	$\frac{r^4}{4a^2}$	$\frac{p^4 + a^2r^2}{2a}$	$-$	$-\frac{1}{2a}$	a
e_7	$-2\sqrt{ab}$	$(a - b)^2$	$-2(ab)^{3/2}$	$-$	$-$	$-\sqrt{ab}$
e_8	$2\sqrt{ab}$	$(a - b)^2$	$2(ab)^{3/2}$	$-$	$-$	\sqrt{ab}
e_9	$p\sqrt{2}$	$\frac{r^4}{2p^2}$	$\frac{2p^4 + r^4}{2p\sqrt{2}}$	$-$	$-\frac{1}{p\sqrt{2}}$	$\frac{p}{\sqrt{2}}$

Образы множеств Q_i вырожденных точек ранга 1 и 2 под действием

\mathcal{F} имеют вид

$$\Delta_1 : \begin{cases} k = 0, \\ 2g = p^2 h \end{cases}, \quad h \geq -2b.$$

$$\Delta_2 : \begin{cases} k = \frac{1}{r^4}(2g - p^2 h)^2 \\ g = g_{\pm}(h) = \frac{1}{4p^2} \left[(2p^4 - r^4)h \pm r^4 \sqrt{h^2 - 2p^2} \right], \quad h \geq \sqrt{2p^2}. \\ h = \frac{a^2 b^2 + 3s^4}{2s^3} \end{cases}$$

$$\Delta_3 : \begin{cases} k = -\frac{3s^2}{4} + a^2 + b^2 - \frac{3a^2 b^2}{2s^2} + \frac{a^4 b^4}{4s^6}, \quad 0 < s \leq s_0. \\ g = \frac{3a^2 b^2 + s^4}{2s} \end{cases}$$

Вид множеств Δ_i в плоскостях-образах частных отображений момента дан в табл. 2.2.2.

Таблица 2.2.2

	Вид в $\mathbb{R}^2(f^2, h)$	Вид в $\mathbb{R}^2(m, h)$	Вид в $\mathbb{R}^2(s, h)$
Δ_1	$f = 0,$ $h \geq -2b$	$m = 0,$ $h \geq -2b$	$e_1(-b, -2b), e_2(b, 2b), e_3(a, 2a)$
Δ_2	—	$2p^2 m^2 + 2hm + 1 = 0,$ $m < 0$	$2s^2 - 2hs + p^2 = 0, s > 0$
Δ_3	—	—	$3s^4 - 2hs^3 + a^2 b^2 = 0, s \in (0, s_0]$

Семействам \mathcal{L}_j отвечают значения первых интегралов, заполняющие кривые λ_j . В $\mathbb{R}^3(h, k, g)$ их уравнения таковы:

$$\lambda_{1,2} = \{g = a^2 h \pm ar^2, k = (h \pm 2a)^2, h \geq \mp(a \pm b)\},$$

$$\lambda_{3,4} = \{g = b^2 h \mp br^2, k = (h \pm 2b)^2, h \geq -(a \pm b)\},$$

$$\lambda_{5,6} = \{g = \pm abh, k = (a \mp b)^2, h \geq -(a \pm b)\}.$$

На плоскости $\mathbb{R}^2(m, h)$ образы $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_4$ под действием \mathcal{F}_2 — это лучи

$$\lambda_{1,2} = \{h = r^2 m \mp 2a, h \geq \mp(a \pm b)\}, \quad \lambda_{3,4} = \{h = -r^2 m \mp 2b, h \geq -(a \pm b)\},$$

а на плоскости $\mathbb{R}^2(s, h)$ под действием \mathcal{F}_3 образы всех шести семейств имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \{s = \mp a, h \geq \mp(a \pm b)\}, & \lambda_{3,4} &= \{s = \mp b, h \geq -(a \pm b)\}, \\ \lambda_5 &= \{h = s + \frac{ab}{s}, s \in [-a, -b] \cup (0, +\infty)\}, \\ \lambda_6 &= \{h = s - \frac{ab}{s}, s \in [-a, 0) \cup [b, +\infty)\}.\end{aligned}$$

Во всех этих формулах верхнему знаку отвечает множество с первым индексом.

Собирая все перечисленные образы особых множеств на плоскостях-образах частных отображений момента $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, получим бифуркационные диаграммы $\Sigma_1^*, \Sigma_2^*, \Sigma_3^*$ подсистем $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ и \mathcal{M}_3 . Они изображены на рис. 2.1 – 2.3. Прокомментируем эти рисунки.

1. Типичный прообраз точек кривых Δ_1 и Δ_2 в критическом множестве, как отмечалось, состоит из вырожденных критических точек ранга 2, которые внутри критических подсистем с двумя степенями свободы могут и не быть бифуркационными. Однако при таком выборе частных интегралов Δ_1 и Δ_2 являются внешними границами областей существования движений для подсистем \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 , поэтому обязательно входят в бифуркационную диаграмму. Явления, происходящие в окрестности прообразов этих кривых внутри подсистем \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 , подробно изучены в [110, 165]. В третьей подсистеме \mathcal{M}_3 кривые Δ_2, Δ_3 бифуркаций, внутренних по отношению к \mathcal{M}_3 , не вызывают. Но, являясь образами вырожденных точек полного отображения момента, они разделяют точки подсистемы \mathcal{M}_3 с различным внешним типом. Поэтому на рис. 2.3 эти множества также изображены (пунктиром).
2. Диаграммами Σ_i^* ($i = 1, 2, 3$) точки подсистем $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ и \mathcal{M}_3 ранга 2 (то есть регулярные точки по отношению к этим подсистемам) раз-

делены также на определенные классы (для \mathcal{M}_3 к разделяющему множеству мы также добавляем кривые Δ_2, Δ_3). Эти классы (точнее подобласти с непустыми интегральными многообразиями, возникающие в образе частных отображений момента) обозначены для первых трех подсистем символами a, b, c с соответствующими индексами. Связные компоненты дополнения бифуркационных диаграмм принято называть *камерами* [26]. Здесь для разбиения на камеры мы также учитываем образы 2-торов, вырожденных в P^6 .

3. Диаграмма Σ_4^* состоит из изолированных значений энергии, разделяющих разные типы периодических решений. Это значения $h = \pm a \pm b$ в точках ранга 0 и $h = \pm 2\sqrt{ab}$, разделяющие движения семейства \mathcal{L}_5 на принадлежащие подсистеме \mathcal{M}_3 и изолированные от предыдущих критических подсистем. Для последнего семейства участок образа, отвечающий значениям $h \in (-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab})$, не попавший на рисунки, обозначен далее через λ_{50} .

Замечание 11. Кривые Δ_i, λ_j разделены на различные участки узловыми точками e_1, \dots, e_9 . Аналогичное деление имеется на кривой δ_3 точкой e_4 . Такие участки снабжаются вторым индексом после номера кривой.

Пользуясь полученной информацией, дадим явное описание бифуркационной диаграммы Σ отображения \mathcal{F} . Введем некоторые обозначения.

На кривых (2.2.4) определим обращения зависимостей $h(s)$ на монотонных участках

$$\delta_1 : s = s_1(h), \quad h \in [-2b, +\infty), \quad s_1(h) \in [-b, 0),$$

$$\delta_2 : s = s_2(h), \quad h \geq 2b, \quad s_2(h) \in (0, b],$$

$$\delta_{31} : s = s_{31}(h), \quad h \in [h_0, 2a], \quad s \in [a, s_0],$$

$$\delta_{32} : s = s_{32}(h), \quad h \in [h_0, +\infty), \quad s \in [s_0, +\infty).$$

Здесь h_0 – значение $h(s_0)$ на кривой δ_3 . Уравнение (2.2.5) для вычисления значения s_0 теперь получим, записывая условие минимума h на кривой δ_3 в виде

$$\frac{1}{s}\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} = \sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2}. \quad (2.2.6)$$

Единственность решения при $s > a$ очевидна.

Из соотношений (2.2.1) для Π_1 найдем зависимость на δ_1 :

$$g = g_1(h) = s^3 + \frac{ab}{s} - s^2\phi(s)|_{s=s_1(h)}, \quad h \geq -2b.$$

Рассматривая интервалы монотонности $h(s)$ на кривых $\lambda_5 - \lambda_6$ обозначим

$$s_{51}(h) = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4ab}}{2}, \quad s_{52}(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4ab}}{2}, \quad s_6(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 + 4ab}}{2}.$$

Теперь бифуркационная диаграмма полностью описывается следующей теоремой [156], которая сформулирована так, чтобы все условия давали явные неравенства на параметры поверхностей при фиксированном значении энергии h .

Теорема 23. 1. Множество $\Sigma_1 = \Pi_1 \cap \Sigma$ имеет вид

$$\begin{cases} h \geq -2b \\ k = 0, \quad g_1(h) \leq g \leq \frac{1}{2}p^2h \end{cases}.$$

2. Множество $\Sigma_2 = \Pi_2 \cap \Sigma$ лежит в полупространстве $h \geq -(a + b)$ и описывается следующей совокупностью систем неравенств:

$$\begin{cases} -(a + b) \leq h \leq p\sqrt{2} \\ b^2h - br^2 \leq g \leq a^2h + ar^2 \end{cases}; \begin{cases} h \geq p\sqrt{2} \\ b^2h - br^2 \leq g \leq g_-(h) \end{cases}; \begin{cases} h \geq p\sqrt{2} \\ g_+(h) \leq g \leq a^2h + ar^2 \end{cases}.$$

3. Множество $\Sigma_3 = \Pi_3 \cap \Sigma$ полностью описывается следующей совокупностью условий на плоскости (s, h) . Для отрицательных значений s

$$\begin{cases} -(a + b) \leq h \leq -2\sqrt{ab} \\ s \in [-a, s_{51}(h)] \cup [s_{52}(h), -b] \end{cases}; \begin{cases} -2\sqrt{ab} \leq h \leq -2b \\ s \in [-a, -b] \end{cases}; \begin{cases} h > -2b \\ s \in [-a, s_1(h)] \end{cases}.$$

Для положительных значений s

$$\left\{ \begin{array}{l} -a + b \leq h \leq 2b \\ s \in [b, s_6(h)] \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} 2b \leq h \leq h_0 \\ s \in [s_2(h), s_6(h)] \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 \leq h \leq 2a \\ s \in [s_2(h), s_{31}(h)] \cup [s_{32}(h), s_6(h)] \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} h > 2a \\ s \in [s_2(h), a] \cup [s_{32}(h), s_6(h)] \end{array} \right. .$$

4. Множество $\Sigma_4 = \Pi_4 \cap \Sigma$ состоит из двух лучей

$$\left\{ \begin{array}{l} h \geq -(a + b) \\ g = abh, \quad k = (a - b)^2 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} h \geq -a + b \\ g = -abh, \quad k = (a + b)^2 \end{array} \right. .$$

Замечание 12. Эта теорема дает возможность изобразить во всех деталях любое сечение диаграммы Σ плоскостями фиксированного h и отследить с помощью компьютерной графики эволюцию этих сечений с изменением энергии. Граничные значения в условиях на величину h служат разделяющими значениями энергии. В частности, из условий для Σ_2 становится ясна необходимость введения точки e_4 как точки экстремума h на Δ_2 . Однако граничные значения h не обязательно исчерпывают все разделяющее множество. Более точное утверждение приведено ниже.

2.3. Классификация критических точек по типам

Необходимые определения, связанные с понятием невырожденности критических точек и их типов, даны в [26]. Сделаем одно замечание, касающееся используемой здесь терминологии.

В топологическом анализе систем с двумя степенями свободы в [26] используются термины: 3-атом для описания бифуркации в окрестности невырожденной точки ранга 1 (связная компонента прообраза малого отрезка, трансверсального гладкому сегменту бифуркационной диаграммы, расслоенная на 2-торы Лиувилля с одним особым слоем) и

4-атом для описания насыщенной окрестности невырожденной точки ранга 0 (как правило, в виде почти прямого произведения атомов систем с одной степенью свободы).

Замечание 13. *Имея дело с системой с тремя степенью свободы, мы закрепим термин 3-атом для характеристики бифуркации в окрестности точки ранга 1 **внутри** соответствующей критической подсистемы с двумя степенями свободы, а 4-атом будет всегда означать бифуркацию в полном шестимерном фазовом пространстве в окрестности невырожденной точки ранга 2.*

Таким образом, 4-атом определяется как расслоенная на 3-торы Ливилля с одним особым слоем связная компонента прообраза малого отрезка, трансверсального гладкому двумерному листу бифуркационной диаграммы отображения момента $\mathcal{F} : P^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$. При изучении изоэнергетических диаграмм удобно считать такой малый отрезок лежащим на фиксированном уровне энергии, так как в соответствующей невырожденной точке ранга 2 гамильтониан заведомо регулярен.

В четырех точках ранга 0 (неподвижных точках системы) гамильтониан H есть функция Морса и, как отмечалось, $\text{ind } H(p_i) = i$. Это в значительной мере определяет характер поведения системы в окрестности этих точек. Однако строгая классификация требует указания их типа как критических точек отображения момента.

Теорема 24. *Все критические точки ранга 0 невырождены в P^6 . При этом p_0 имеет тип “центр-центр-центр”, p_1 имеет тип “центр-центр-седло”, p_2 имеет тип “центр-седло-седло”, а p_3 имеет тип “седло-седло-седло”.*

Для доказательства в [57] явно вычислены характеристические многочлены симплектического оператора A_H в точках p_i .

Таблица 2.3.1

\mathcal{K}^0	Образ в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$	Тип в \mathcal{M}_2	Образ в $\mathbb{R}^2(s, h)$	Тип в \mathcal{M}_3
p_0	P_0	центр-центр	P_0^-	центр-центр
			P_0^+	центр-центр
p_1	P_1	центр-седло	P_1^-	центр-седло
			P_1^+	центр-центр
p_2	P_2	центр-седло	P_2^-	седло-седло
			P_2^+	центр-седло
p_3	P_3	седло-седло	P_3^-	седло-седло
			P_3^+	седло-седло

Заметим, что в точках p_i встречаются три локальных критических подсистемы – подсистема \mathcal{M}_2 и две части подсистемы \mathcal{M}_3 , которая имеет в этих точках особенность типа самопересечения. В частности, на плоскости (s, h) каждая такая точка изображается двумя. В этом смысле каждая точка пары P_i^\pm диаграммы Σ_3^* имеет свой тип (тип точки p_i по отношению к некоторому выбранному гладкому участку \mathcal{M}_3 в ее окрестности). Соответствующее описание критических точек ранга 0 в критических подсистемах \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 сведено в табл. 2.3.1.

Обратимся к точкам ранга 1, организованным в особые периодические траектории.

Теорема 25. *Точки ранга 1, образующие семейства траекторий \mathcal{L}_i и \mathcal{D}_j ($i = 1, \dots, 6; j = 1, 2, 3$), невырождены как особенности отображения \mathcal{F} , за исключением следующих значений энергии:*

$$\text{на } \mathcal{D}_1: h = -2b;$$

$$\text{на } \mathcal{D}_2: h = 2b;$$

на \mathcal{D}_3 : $h = 2a, h = h(s_0)$;

на \mathcal{L}_2 : $h = 2a, h = \frac{3a^2+b^2}{2a}$;

на \mathcal{L}_3 : $h = -2b$;

на \mathcal{L}_4 : $h = 2b, h = \frac{a^2+3b^2}{2b}$;

на \mathcal{L}_5 : $h = \pm 2\sqrt{ab}$.

В зависимости от семейства и значения энергии тип невырожденных особенностей в P^6 и \mathbb{Z} -атомы в критических подсистемах определяются по табл. 2.3.2.

Таблица 2.3.2

\mathcal{K}^1	Образ или сегмент в образе	Количество траекторий	Тип в P^6	\mathbb{Z} -атом в \mathcal{M}_1	\mathbb{Z} -атом в \mathcal{M}_2	\mathbb{Z} -атом в \mathcal{M}_3
\mathcal{L}_1	$\lambda_{11} : -(a+b) < h < -(a-b)$	1	центр-центр		A	A
	$\lambda_{12} : h > -(a-b)$	2	центр-центр		2A	2A
\mathcal{L}_2	$\lambda_{21} : a-b < h < a+b$	1	седло-седло		B	B
	$\lambda_{22} : a+b < h < \frac{3a^2+b^2}{2a}$	2	седло-седло		2B	2B
	$\lambda_{23} : \frac{3a^2+b^2}{2a} < h < 2a$	2	седло-седло		2B	2B
	$\lambda_{24} : h > 2a$	2	седло-центр		2B	2A
\mathcal{L}_3	$\lambda_{31} : -(a+b) < h < -2b$	1	центр-центр		A	A
	$\lambda_{32} : -2b < h < a-b$	1	центр-седло		A	B
	$\lambda_{33} : h > a-b$	2	центр-седло		2A	C_2
\mathcal{L}_4	$\lambda_{41} : -(a-b) < h < 2b$	1	седло-центр		B	A
	$\lambda_{42} : 2b < h < a+b$	1	седло-седло		B	B
	$\lambda_{43} : a+b < h < \frac{a^2+3b^2}{2b}$	2	седло-седло		2B	C_2
	$\lambda_{44} : h > \frac{a^2+3b^2}{2b}$	2	седло-седло		2B	C_2

Таблица 2.3.2 (продолжение)

\mathcal{K}^1	Образ или сегмент в образе	Количество траекторий	Тип в P^6	3-атом в \mathcal{M}_1	3-атом в \mathcal{M}_2	3-атом в \mathcal{M}_3
\mathcal{L}_5	$\lambda_{50} : -2\sqrt{ab} < h < 2\sqrt{ab}$	1	фокус-фокус			
	$\lambda_{51} : -(a+b) < h < -2\sqrt{ab}$	1	центр-центр			A, A
	$\lambda_{52} : 2\sqrt{ab} < h < a+b$	1	седло-седло			B, B
	$\lambda_{53} : h > a+b$	2	седло-седло			$2A^*, 2B$
\mathcal{L}_6	$\lambda_{61} : -(a-b) < h < a-b$	1	седло-центр			B, A
	$\lambda_{62} : h > a-b$	2	седло-центр			$2A^*, 2A$
\mathcal{D}_1	$\delta_1 : s \in (-b, 0)$	2	центр-центр	$2A$		$2A$
\mathcal{D}_2	$\delta_2 : s \in (0, b)$	2	седло-центр	$2B$		$2A$
\mathcal{D}_3	$\delta_{31} : s \in (a, s_0)$	4	седло-центр	$4B$		$4A$
	$\delta_{32} : s \in (s_0, +\infty)$	4	центр-центр	$4A$		$4A$

Заметим, что перечисленным случаям вырождения отвечают точки $e_1 - e_8$ на бифуркационных диаграммах.

Поясним порядок слов, характеризующих тип точки относительно P^6 в табл. 2.3.2. Для семейств \mathcal{L}_j с $i = 1, \dots, 4$ первый тип – это тип точки ранга 1 в подсистеме \mathcal{M}_2 , второй – это тип этой точки в подсистеме \mathcal{M}_3 ; для семейств $\mathcal{D}_{1,2,3}$ первый тип – это тип точки ранга 1 в подсистеме \mathcal{M}_1 , второй – это тип этой точки в подсистеме \mathcal{M}_3 . Семейства $\mathcal{L}_{5,6}$ (кроме прообраза фокусного сегмента λ_{50} , который является изолированным в пространстве констант первых интегралов, и его граничных точек, для которых соответствующие критические точки ранга 1 вырождены) являются множеством трансверсального самопересечения фазового пространства подсистемы \mathcal{M}_3 . Поэтому каждой такой траектории отвечают два значения s и две точки λ_{ij}^\pm ($i = 5, 6$) в диаграмме подсистемы \mathcal{M}_3

(см. рис. 2.3). Знак “минус” отвечает меньшему значению s . Поэтому в табл. 2.3.2 для этих семейств первый тип – это тип точки ранга 1 в части подсистемы \mathcal{M}_3 с меньшими s , второй – это тип этой точки в части подсистемы \mathcal{M}_3 с большими s .

Для доказательства теоремы в работе [57] явно предъявлены пары интегралов, порождающие картанову подалгебру размерности 2 в алгебре симплектических операторов, и следующие интегралы, порождающие регулярные элементы этих подалгебр:

$$\text{на } \mathcal{L}_{1,2} : \varphi_{1,2} = K - 2(h \pm 2a)H,$$

$$\text{на } \mathcal{L}_{3,4} : \varphi_{3,4} = K - 2(h \pm 2b)H,$$

$$\text{на } \mathcal{L}_{5,6} : \varphi_{5,6} = \pm abH - G,$$

$$\text{на } \mathcal{D}_i : \psi_i = 2G - (p^2 - \varkappa_i)H \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$\varkappa_1 = (\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2})^2, \quad s \in [-b, 0);$$

$$\varkappa_2 = (\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2})^2, \quad s \in (0, b];$$

$$\varkappa_3 = -(\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2})^2, \quad s \in [a, +\infty).$$

Атомы бифуркаций, происходящих внутри критических подсистем $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ на периодических траекториях, состоящих из критических точек ранга 1, установлены в результате топологического анализа этих подсистем (см. [157, 158, 160]).

Рассмотрим множество \mathcal{K}^2 критических точек ранга 2. Это объединение трех систем $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ и \mathcal{M}_3 за вычетом уже исследованных точек множества $\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1$. По соображениям размерности тип невырожденной особенности ранга 2 может быть либо *эллиптическим* (“центр”), либо *гиперболическим* (“седло”). Поскольку свойство невырожденности может быть присуще лишь всему тору Лиувилля целиком, и тогда все точки тора имеют один и тот же тип, говорим об эллиптических или гиперболических торах.

Отметим сразу, что каждый интегральный 2-тор, регулярный в системе \mathcal{M}_1 и невырожденный в P^6 , является эллиптическим. Это вытекает из того, что интеграл $K = Z_1^2 + Z_2^2$ есть неотрицательная всюду функция и обращается в ноль только на \mathcal{M}_1 .

Теорема 26. *Все критические точки ранга 2 на многообразии \mathcal{M}_1 , за исключением точек нулевого уровня интеграла F , являются невырожденными эллиптического типа.*

Доказательство. На \mathcal{M}_1 нет точек зависимости интегралов H и G , кроме множеств $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_3$ [87] (отметим, что зависимость *ограничений* $H|_{\mathcal{M}_1}$ и $F|_{\mathcal{M}_1}$ или, что то же самое, *ограничений* $H|_{\mathcal{M}_1}$ и $G|_{\mathcal{M}_1}$, исследована в [157, 165]). В то же время всюду на \mathcal{M}_1 имеем $dK = 0$. Характеристическое уравнение оператора A_K в \mathbb{R}^9 легко выписывается с учетом уравнений многообразия \mathcal{M}_1 , имеет семь нулевых корней, а оставшийся сомножитель $\mu^2 + 4f^2$ имеет два различных мнимых корня при $f \neq 0$, что и доказывает теорему. \square

В образе отображения момента значения $F = 0$ дают множество $\Delta_1 \subset \mathbb{R}^3(h, k, g)$, для которого тем самым получено обоснование вырожденности соответствующих критических точек.

На многообразии \mathcal{M}_2 система (2.1.1) имеет явное алгебраическое решение [158], а именно, все фазовые переменные представлены в виде рациональных функций от двух вспомогательных переменных s_1, s_2 и некоторых радикалов вида $\sqrt{s_i - c_j}$, где c_j – константы, выраженные через постоянные интегралов H, M . В переменных s_1, s_2 уравнения движения разделяются и сводятся к эллиптическим квадратурам. Соответствующие формулы можно найти в [57].

Теорема 27. *Все критические точки ранга 2 на многообразии \mathcal{M}_2 , за исключением точек, лежащих в прообразе кривых Δ_1, Δ_2 , невырождены.*

При этом они имеют эллиптический тип для $m > 0$ и гиперболический тип для $m < 0$.

Доказательство. В качестве единственного интеграла вида (2.1.5), имеющего особенность в каждой точке $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{K}^2$, благодаря достаточно простым уравнениям (2.2.1) листа Π_2 , удобно взять функцию

$$\Phi = \phi_2(H, K, G) = (2G - p^2H)^2 - r^4K. \quad (2.3.1)$$

Для нее характеристическое уравнение оператора A_Φ после необходимой факторизации по нулевому корневому подпространству в подстановке явных зависимостей фазовых переменных от переменных разделения примет вид

$$\mu^2 + 4r^{12}\ell^2m = 0, \quad (2.3.2)$$

и, за исключением случаев $m = 0$ (Δ_1) и $\ell = 0$ (Δ_2), имеет два различных корня, чисто мнимых при $m > 0$ и вещественных при $m < 0$. Здесь ℓ константа частного интеграла L , определенного в (2.2.3). Теорема доказана. \square

Как показано в [158], \mathcal{M}_2 состоит из критических точек нулевого уровня функций $2G - p^2H \pm r^2\sqrt{K}$, одна из которых является суммой квадратов двух гладких регулярных функций ($m > 0$), а другая – разностью квадратов ($m < 0, \ell \neq 0$). Отсюда следует эллиптичность двумерных торов в первом случае, и гиперболичность во втором. Уравнение (2.3.2) строго доказывает невырожденность таких точек. Интересно отметить связь вырожденности критических точек с аналитическим решением. При $m = 0$ падает степень подкоренного выражения в разделенных дифференциальных уравнениях типа Абеля – Якоби. При $\ell = 0$ переменные s_1, s_2 входят в разделенные уравнения только в четных степенях, в связи с чем возникает дополнительная симметрия. В целом \mathcal{M}_2 неориентируемо, и главную роль в этом играет окрестность множества $\ell = 0$ [110].

На многообразии \mathcal{M}_3 явное алгебраическое решение системы (2.1.1) указано в [160, 161]. Все фазовые переменные представлены в виде рациональных функций от двух вспомогательных переменных t_1, t_2 и некоторых радикалов вида $\sqrt{t_i - c_j}$, где c_j – константы, выраженные через постоянные интегралов H, S . В переменных t_1, t_2 уравнения движения разделяются и имеют вид уравнений Абеля – Якоби или уравнений Ковалевской с многочленом шестой степени под радикалом. Это разделение гиперэллиптическое. Соответствующие формулы также имеются в [57].

Теорема 28. *Все регулярные двумерные торы подсистемы \mathcal{M}_3 состоят из невырожденных критических точек ранга 2 отображения момента \mathcal{F} , за исключением точек в прообразах множеств Δ_2, Δ_3 . Тор эллиптический, если значение $s(2s^2 - 2hs + a^2 + b^2)[s^4 + 2(s - h)s^3 + a^2b^2]$ отрицательно, и гиперболический, если оно положительно.*

Доказательство. В качестве интеграла, имеющего особенность на \mathcal{M}_3 , можно взять функцию вида (2.3.1), полученную, например, исключением s из уравнений (2.2.1) поверхности Π_3 . Однако результат слишком громоздкий, и такой подход нерационален. Здесь удобно рассмотреть функцию с неопределенными множителями Лагранжа, которая введена в [87] для вывода уравнений критических подсистем, $\Psi = 2G + 2s(s - h)H + sK$, где s и h рассматриваются как неопределенные множители. Как показано в [87], после записи условия наличия критической точки у функции Ψ константы s, h на \mathcal{M}_3 оказываются значениями интегралов S, H . Поэтому и при вычислении характеристического многочлена оператора A_Ψ считаем s и h константами, а лишь затем подставляем в найденное выражение зависимости фазовых переменных от переменных разделения. Получим характеристическое уравнение в виде

$$\mu^2 - \frac{2(2s^2 - 2hs + a^2 + b^2)}{s} \left[s^4 + 2(s - h)s^3 + a^2b^2 \right] = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

Подводя итог, обратимся к рис. 2.1 – 2.3, на которых образы критических точек ранга 2 заполняют области $a_1 - a_3$, $b_1 - b_9$ и $c_1 - c_{17}$. Для критических подсистем эти области являются и камерами, так как мы включаем в Σ_i^* также и образы вырожденных 2-торов. В соответствии с теоремами 26 – 28 устанавливаем тип всех точек ранга 2.

Предложение 18. *Критические точки ранга 2 имеют эллиптический тип в прообразах областей $a_1 - a_3$, $b_1 - b_3$, $c_1 - c_4$, c_{10} , c_{13} , c_{17} и гиперболический тип в прообразах остальных областей. При этом в прообразах с эллиптическими бифуркациями 4-атомы таковы:*

A для областей c_1, b_1 ;

2A для областей $a_1, b_2, c_2, c_3, c_4, c_{10}, c_{13}$;

4A для областей $b_4, b_5, b_6, c_{12}, c_{16}$;

8A для области a_3 .

В прообразах сегментов Δ_1, Δ_2 и Δ_3 двумерные торы состоят из вырожденных точек ранга 2.

Информация по количеству критических 2-торов в прообразах всех указанных областей получена при грубом топологическом анализе критических подсистем в работах [158, 160, 165] и для экономии места указана в табл. 2.4.1 следующего раздела. Ясно, что эллиптические 4-атомы этим полностью определены. Для гиперболических атомов необходимые уточнения будут приведены ниже.

Получена полная классификация критических точек отображения момента по их типам и 3-атомам, что завершает и описание грубой топологии критических подсистем.

2.4. Изоэнергетический атлас

Изоэнергетическая диаграмма $\mathcal{S}(h)$ – это бифуркационная диаграмма ограничения отображения момента \mathcal{F} на изоэнергетический уровень $H_h = \{H = h\} \subset P^6$. Естественным образом используется отождествление этого ограничения с отображением в плоскость постоянных g, k :

$$\mathcal{F}|_{\{H=h\}} \cong (G \times K)|_{\{H=h\}} : H_h \rightarrow \mathbb{R}^2(g, k).$$

Для краткости последнее отображение обозначим через $\mathcal{F}(h)$.

Далее мы рассматриваем задачу классификации диаграмм $\mathcal{S}(h)$, оснащенных дополнительной информацией о топологическом устройстве прообраза – указанием количества семейств регулярных торов в дополнении к диаграмме и бифуркаций, происходящих при пересечении её одномерного остова. При этом сама диаграмма $\mathcal{S}(h)$ рассматривается как одномерное стратифицированное многообразие. Гладкие сегменты одномерного остова – это образы невырожденных критических точек ранга 2, а нульмерный остов есть образ всех критических точек рангов 1, а также вырожденных критических точек ранга 2. Здесь, естественно, речь идет о точках фиксированного регулярного изоэнергетического уровня H_h . Имея всю полученную ранее и выявленную на этом этапе информацию, нетрудно снабдить и точки нульмерного остова описанием топологии насыщенных окрестностей в прообразе. Ввиду недостатка места мы ограничимся в следующем разделе грубыми круговыми молекулами гиперболических особенностей ранга 0.

До настоящего времени, в силу того, что теоретически диаграмма может быть устроена достаточно сложно, нет единого определения эквивалентных диаграмм. В нашем случае $\mathcal{S}(h)$ – плоское одномерное стратифицированное многообразие. Поэтому назовем две диаграммы эквивалентными, если существует диффеоморфизм некоторых их окрестно-

стей в плоскости, сохраняющий как сами диаграммы, так и указанное выше оснащение.

Что значит указать бифуркацию? Пусть γ – гладкий сегмент одномерного остова $\mathcal{S}(h)$ и $z = (g, k) \in \gamma$. Проведем через z маленький одномерный отрезок ε , трансверсальный γ и не имеющий других общих точек с $\mathcal{S}(h)$, кроме z . Полный прообраз ε в фазовом пространстве есть четырехмерное многообразие $\mathcal{F}^{-1}(\varepsilon) \subset H_h$, расслоенное на 3-торы Ливилля с одним особым слоем на каждой связной компоненте. Множество критических точек на каждом таком особом слое состоит из конечного числа 2-торов, все точки которых – это точки ранга 2. Связную компоненту в $\mathcal{F}^{-1}(\varepsilon)$ назовем 4-атомом (см. замечание 13). Определенный набор 4-атомов получим, умножая стандартные 3-атомы на окружность. Для них очевидным образом сохраним общепринятые обозначения A, B, C_2, A^* и т.п. Таким образом, оснащенная диаграмма должна содержать на каждом гладком ребре обозначение соответствующего 4-атома. С другой стороны, гладкое ребро $\mathcal{S}(h)$ получается сечением на уровне h соответствующей камеры одной из критических подсистем, а 4-атом получается при рассмотрении бифуркации, получаемой при трансверсальном пересечении гладкого листа – образа критической подсистемы. Поэтому удобно на изоэнергетических диаграммах нанести на ребра обозначения соответствующих камер критических подсистем, а затем, на основе полученной выше информации и эволюции диаграмм $\mathcal{S}(h)$, указать все 4-атомы, отвечающие этим камерам.

Очевидно, что $\mathcal{S}(h)$ зависит не только от h , но также и от физических параметров a, b . Назовем тройку (a, b, h) разделяющей, если в любой ее окрестности в \mathbb{R}^3 существуют тройки с неэквивалентными диаграммами. При этом, поскольку стратифицированное многообразие $\mathcal{S}(h)$ составлено из h -сечений $\Sigma_i(h)$ множеств Σ_i ($i = 1, \dots, 4$), перестройки $\mathcal{S}(h)$ происходят тогда и только тогда, когда перестраивается одно из стра-

тифицированных многообразий $\Sigma_i(h)$. Как следует из теоремы 23 (см. замечание 12) сечения $\Sigma_i(h)$ перестраиваются при прохождении через граничные значения, фигурирующие в условиях на h в этой теореме, что дает восемь разделяющих значений h (в зависимости от a, b), то есть восемь разделяющих поверхностей в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$. В целом же, разделяющие значения h являются критическими значениями величины h , рассматриваемой как функция на стратифицированных многообразиях Σ_i ($i = 1, \dots, 4$) [112, 148]. Как легко видеть из приведенных выше рисунков 2.1 – 2.3, критические значения h на Σ_i – это h -координаты точек $P_0 - P_3$ и $e_1 - e_9$. Обращаясь к табл. 2.2.1, приходим к следующей теореме [156].

Теорема 29. *В пространстве параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ разделяющими поверхностями при классификации изоэнергетических диаграмм $\mathcal{S}(h)$ являются 13 поверхностей, рассматриваемых в естественном ограничении $0 \leq b \leq a$:*

$$\begin{aligned}
 \text{Sep}_1 - \text{Sep}_4 : h &= \mp a \mp b; \\
 \text{Sep}_5 : h &= -2b; \quad \text{Sep}_6 : h = 2b; \quad \text{Sep}_7 : h = 2a; \\
 \text{Sep}_8 : &\begin{cases} h = s \left(3 - \frac{s^2}{a^2} \right) - \frac{1}{a^2} \sqrt{(s^2 - a^2)^3} \\ b = \frac{s}{a} \sqrt{s \left[s \left(3 - \frac{2s^2}{a^2} \right) - \frac{2}{a^2} \sqrt{(s^2 - a^2)^3} \right]} \end{cases}, \quad s \in \left[a, \frac{2}{\sqrt{3}}a \right]; \\
 \text{Sep}_9 : h &= \frac{1}{2b}(a^2 + 3b^2); \quad \text{Sep}_{10} : h = \frac{1}{2a}(3a^2 + b^2); \\
 \text{Sep}_{11} : h &= -2\sqrt{ab}; \quad \text{Sep}_{12} : h = 2\sqrt{ab}; \quad \text{Sep}_{13} : h = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Непустым диаграммам отвечает область $h \geq -a - b$. Все сечения плоскостями постоянного $a \neq 0$ переводятся в сечение $a = 1$ преобразованием подобия $h' = h/a, b' = b/a$, что отвечает выбору значения a в качестве единицы измерения напряженностей силовых полей.

Здесь комментарий требуется лишь для поверхности Sep_8 : она полу-

чена как параметрическая запись значения $h(s_0)$ в точке e_4 с использованием уравнения (2.2.6) и соответствующего уравнения для h на кривой δ_3 .

Разделяющее множество изображено на рис. 2.4 в проекции на сечение $a = 1$. Непустым изоэнергетическим диаграммам отвечают 19 областей в пространстве параметров. Выбирая в каждой из них по точке, соединим их путями, удобными для просмотра и анализа трансформаций диаграмм. В соответствии с рис. 2.4 назовем эти пути “левым кругом”, “правым кругом”, “линией” и “блоком”. Круги имеют общую область 1, правый круг и линия – общую область 9, линия и блок – общую область 14. Соответствующие диаграммы приведены на рисунках 2.5 – 2.8. Для наглядности допущены искажения плоскими диффеоморфизмами (то есть в пределах определенного выше класса эквивалентности диаграмм). Все элементы диаграмм оснащены обозначениями соответствующих участков, введенными выше для диаграмм критических подсистем. Кроме того, римскими цифрами I – IX занумерованы связанные компоненты дополнения к бифуркационному множеству полного отображения момента в допустимом множестве (то есть в множестве, отвечающем непустым интегральным многообразиям) в расширенном пространстве $\mathbb{R}^5(g, k, h, a, b)$. Такие компоненты мы по-прежнему называем *камерами*. В них сохраняется структура регулярного интегрального многообразия при изменении как интегральных постоянных, так и физических параметров. “Внешнюю”, недопустимую камеру (содержащую сколь угодно большие значения интегралов и потому заведомо отвечающую пустым интегральным многообразиям) обозначаем символом \emptyset и называем нуль-камерой. Теперь мы можем обосновать количество регулярных 3-торов в камерах, описать семейства этих торов и установить все типы 4-атомов.

Теорема 30. *Изоэнергетические диаграммы делят расширенное пространство параметров на 10 камер, одна из которых (внешняя) отвечает пустым интегральным многообразиям. В фазовом пространстве с учетом изменений всех параметров имеется 23 семейства трехмерных регулярных торов Лиувилля. Между камерами имеется 29 стенок, отвечающих двумерным камерам, определенным диаграммами критических подсистем. При пересечении этих стенок бифуркации задаются 4-атомами, приведенными в табл. 2.4.1.*

Таблица 2.4.1

Сегмент (область)	К-во 2-торов	Переход	4-атом	Сегмент (область)	К-во 2-торов	Переход	4-атом
a_1	2	$\emptyset \rightarrow \text{II}$	2A	c_4	2	$\emptyset \rightarrow \text{IV}$	2A
a_2	4	$\emptyset \rightarrow \text{V}$	4A	c_5	2	$\text{II} \rightarrow \text{V}$	2B
a_3	8	$\emptyset \rightarrow \text{VIII}$	8A	c_6	1	$\text{I} \rightarrow \text{III}$	B
b_1	1	$\emptyset \rightarrow \text{I}$	A	c_7	2	$\text{II} \rightarrow \text{IV}$	2A*
b_2	2	$\emptyset \rightarrow \text{III}$	2A	c_8	2	$\text{IV} \rightarrow \text{VII}$	2B
b_3	4	$\emptyset \rightarrow \text{VII}$	4A	c_9	2	$\text{III} \rightarrow \text{VI}$	2B
b_4	4	$\text{VII} \rightarrow \text{VIII}$	4B	c_{10}	2	$\text{III} \rightarrow \text{VI}$	2A
b_5	4	$\text{VI} \rightarrow \text{VII}$	2C ₂	c_{11}	2	$\text{III} \rightarrow \text{VI}$	2B
b_6	4	$\text{VII} \rightarrow \text{IX}$	2C ₂	c_{12}	4	$\text{V} \rightarrow \text{VII}$	4A*
b_7	2	$\text{III} \rightarrow \text{V}$	2B	c_{13}	2	$\text{IV} \rightarrow \text{IX}$	2A
b_8	1	$\text{I} \rightarrow \text{II}$	B	c_{14}	2	$\text{IV} \rightarrow \text{IX}$	2B
b_9	2	$\text{III} \rightarrow \text{IV}$	C ₂	c_{15}	2	$\text{III} \rightarrow \text{VII}$	2B
c_1	1	$\emptyset \rightarrow \text{I}$	A	c_{16}	4	$\text{V} \rightarrow \text{VIII}$	4B
c_2	2	$\emptyset \rightarrow \text{II}$	2A	c_{17}	4	$\text{V} \rightarrow \text{VIII}$	4A

Таблица 2.4.1 (продолжение)

Сегмент (область)	К-во 2-торов	Переход	4-атом	Сегмент (область)	К-во 2-торов	Переход	4-атом
c_3	2	$\emptyset \rightarrow III$	2A				

Доказательство проведем в несколько шагов. Вначале, пользуясь только уже известными эллиптическими бифуркациями, определим количество регулярных 3-торов в камерах и соответствующие семейства.

Напомним, что семейством регулярных торов называется слоение на торы Лиувилля связной компоненты множества в фазовом пространстве, которое получается выбрасыванием всех особых слоев. В пределах одной камеры всегда живут фиксированные семейства, но одно семейство может присутствовать и в нескольких камерах.

Стенки между камерами (в том числе между регулярной камерой и нуль-камерой), отвечающие 4-атомам вида kA ($k \in \mathbb{N}$), назовем A -переходами. Расставим все A -переходы на диаграммах, пользуясь бифуркациями типа “центр” из предложения 18. Получим информацию, собранную в табл. 2.4.2. Таким образом, установлено количество регулярных торов во всех камерах, а также общее количество семейств торов. Как видим, их оказалось 23. Общие семейства имеются в парах камер III, VI (два семейства), IV, IX (два семейства) и V, VIII (четыре семейства).

На следующих шагах устанавливается тип гиперболических бифуркаций. Часть из них определяет лемма, аналог которой для двух степеней свободы можно получить из результатов [26].

Лемма 3. Пусть x_0 – невырожденная критическая точка ранга $n - 2$ типа “центр-седло” в интегрируемой системе с n степенями свободы и отображением момента \mathcal{J} . Обозначим через U_1 и U_2 две локальные критические подсистемы с $n - 1$ степенью свободы, пересекающиеся в x_0 трансверсально, причем в U_1 точке x_0 отвечает гиперболический

Таблица 2.4.2

Камера	Переход	Сегменты	4-атом	Кол-во торов	Новых семейств
I	$\emptyset \rightarrow \text{I}$	c_1, b_1	A	1	1
II	$\emptyset \rightarrow \text{II}$	a_1, c_2	$2A$	2	2
III	$\emptyset \rightarrow \text{II}$	b_2, c_3	$2A$	2	2
IV	$\emptyset \rightarrow \text{IV}$	c_4	$2A$	2	2
V	$\emptyset \rightarrow \text{V}$	a_2	$4A$	4	4
VI	$\text{III} \rightarrow \text{VI}$	c_{10}	$2A$	4	2
VII	$\emptyset \rightarrow \text{VII}$	b_3	$4A$	4	4
VIII	$\text{V} \rightarrow \text{VIII}$	c_{17}	$4A$	8	4
IX	$\text{IV} \rightarrow \text{IX}$	c_{13}	$2A$	4	2

n -атом V , а в U_2 точке x_0 отвечает эллиптический n -атом kA ($k \in \mathbb{N}$). Рассмотрим малое двумерное сечение, трансверсальное гладким листам $\mathcal{J}(U_1)$ и $\mathcal{J}(U_2)$, проведенное через точку $\mathcal{J}(x_0)$. Пусть q – точка на ребре этого сечения, порожденном листом $\mathcal{J}(U_2)$. Тогда $(n + 1)$ -атом, содержащий прообраз q , есть $k(V \times S^1)$.

В табл. 2.4.3 перечислены ребра, удовлетворяющие условиям леммы, то есть такие, вдоль которых внутри критической подсистемы-прообраза бифуркация в граничной точке – эллиптическая, а прообраз граничной точки имеет тип “центр-седло”. Гиперболический 3-атом в граничной точке внутри трансверсальной критической подсистемы находим из табл. 2.3.2, тогда на этих ребрах 4-атомы определяются согласно лемме (последний столбец таблицы). Напомним, что 4-атомы, получающиеся из 3-атомов прямым произведением на окружность, мы обозначаем так же, как исходные 3-атомы.

Таблица 2.4.3

Ребро	Граничная точка	Граничный переход	3-атом	4-атом на ребре
b_8	λ_{32}	$c_2 \rightarrow c_1$	B в \mathcal{M}_3	B
c_6	λ_{41}	$b_1 \rightarrow b_2$	B в \mathcal{M}_2	B
b_9	λ_{33}	$c_4 \rightarrow c_3$	C_2 в \mathcal{M}_3	C_2
c_7	λ_{62}^-	$c_2 \rightarrow c_4$	$2A^*$ в \mathcal{M}_3	$2A^*$
c_5	δ_2	$a_1 \rightarrow a_2$	$2B$ в \mathcal{M}_1	$2B$
c_{16}	δ_{31}	$a_2 \rightarrow a_3$	$4B$ в \mathcal{M}_1	$4B$

Рассмотрим точки возврата $\Delta_{31} - \Delta_{33}$ изоэнергетических диаграмм. Зная 4-атомы на входящих в эти точки эллиптических ребрах ($2A$ на ребрах c_{13} в Δ_{31} и c_{10} в Δ_{32}, Δ_{33}), видим, что оставшиеся входящие ребра c_{14}, c_9 и c_{11} отвечают атомам $2B$. Точка возврата Δ_{34} новой информации не дает (атомы ребер c_{16} и c_{17} уже известны).

Еще один блок информации может быть получен из следующего простого соображения. Пусть критические точки в прообразе некоторого ребра образуют k гиперболических двумерных торов, а при переходе через это ребро между соседними камерами число регулярных трехмерных торов меняется с k на $2k$. Тогда атом ребра есть kB . Отсюда, имея информацию о количестве 2-торов, устанавливаем следующие атомы: $2B$ на ребрах b_7, c_8 и c_{15} (переходы III \rightarrow V, IV \rightarrow VI и III \rightarrow VII соответственно), $4B$ на ребре b_4 (переход VII \rightarrow VIII).

Остались неизвестными 4-атомы ребер b_5, b_6 и c_{12} . Все они соответствуют переходам через стенки между камерами, содержащими по четыре тора. Анализируем имеющуюся информацию по невырожденным периодическим траекториям в прообразе следующих точек изоэнергетических диаграмм: λ_{43} для b_5 (область 12), λ_{44} для b_6 (область 15), λ_{53}^\pm

для c_{12} (область 13). Для всех этих точек известны 4-атомы на трех входящих ребрах из четырех и количество регулярных торов в прилегающих камерах. Поэтому 4-атомы для оставшихся ребер таковы: $2C_2$ для ребер b_5, b_6 и $4A^*$ для ребра c_{12} . Теорема доказана.

На этом закончено описание оснащенных изоэнергетических диаграмм и грубой трехмерной топологии регулярных изоэнергетических уровней.

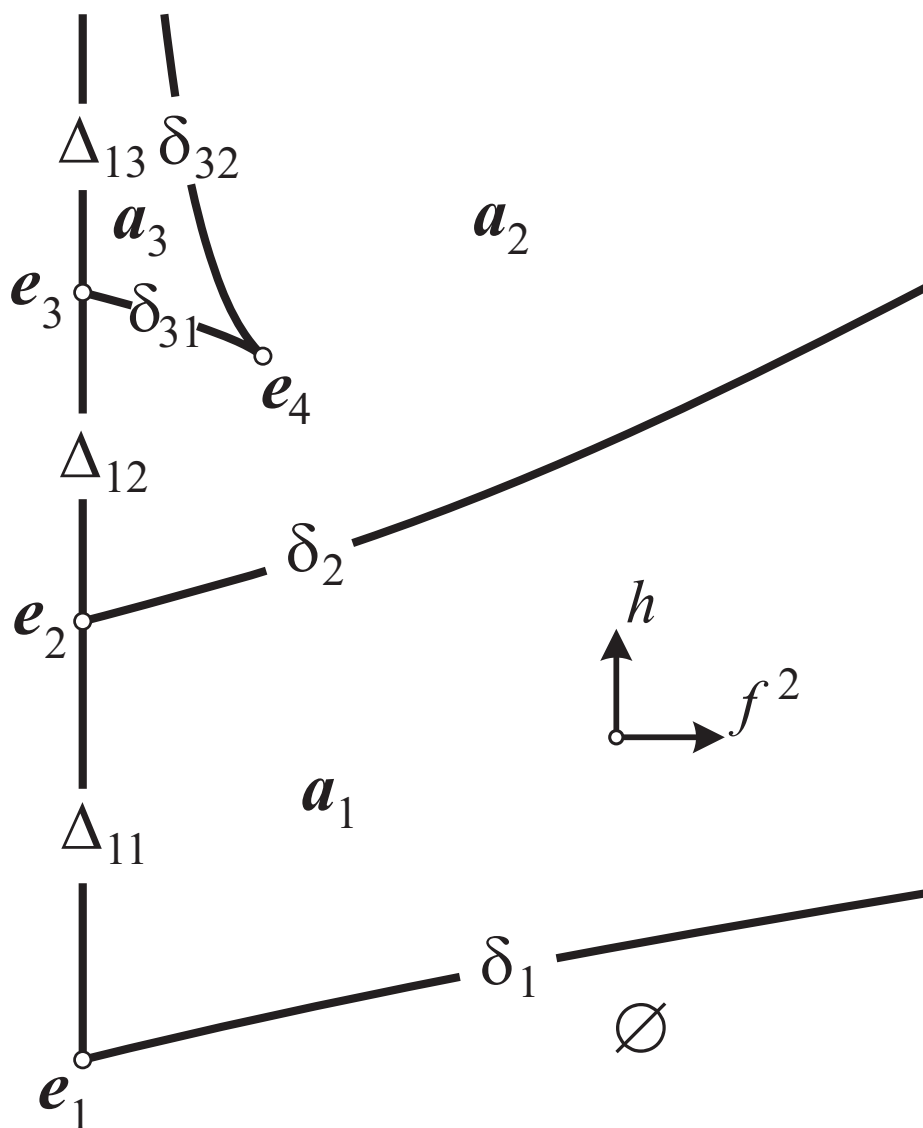


Рис. 2.1. Диаграмма подсистемы \mathcal{M}_1 на плоскости (f^2, h) .

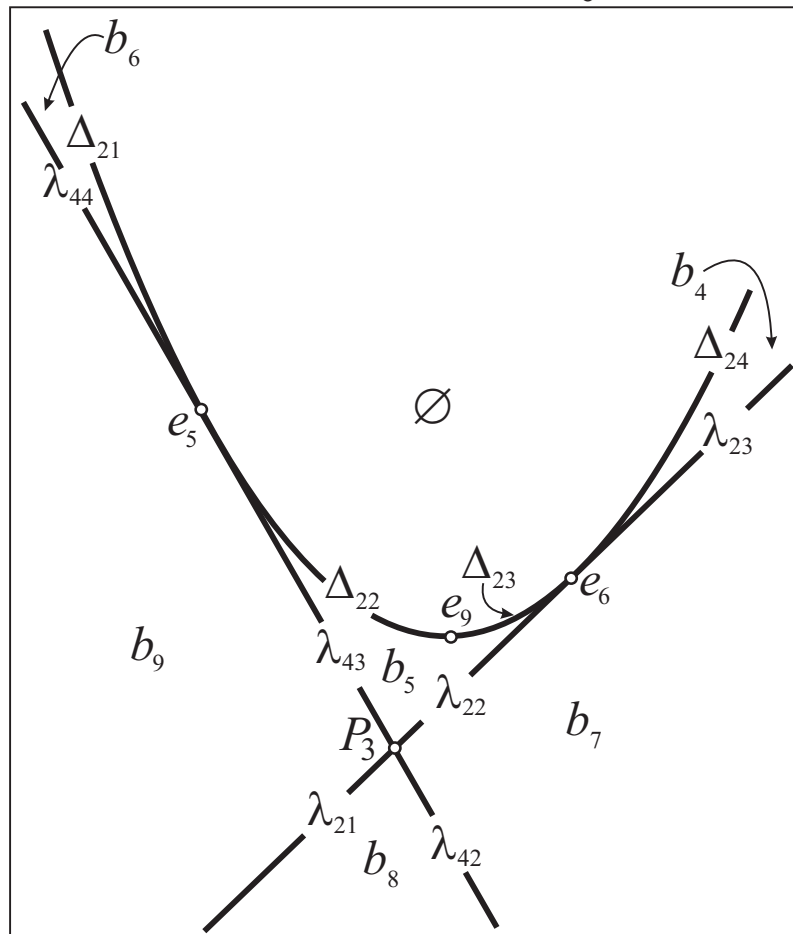
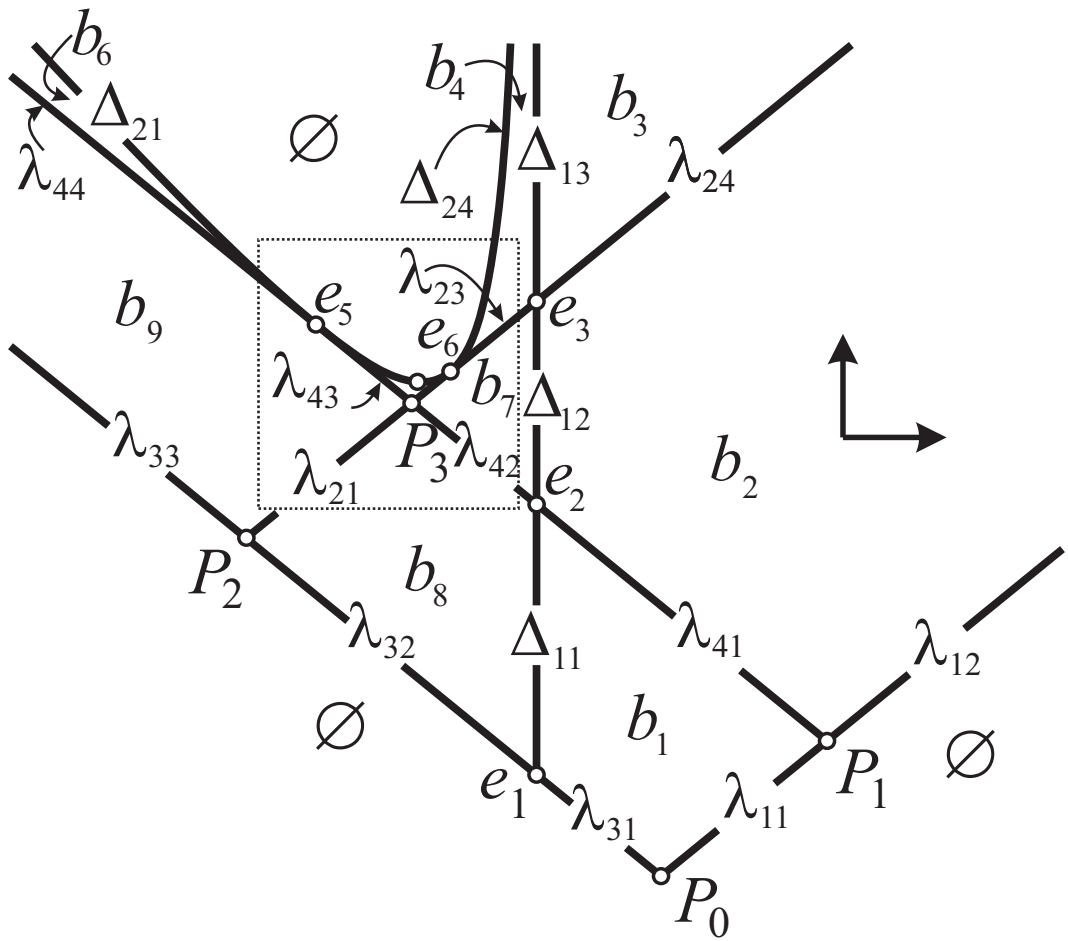


Рис. 2.2. Диаграмма подсистемы \mathcal{M}_2 на плоскости (m, h) и ее фрагмент.

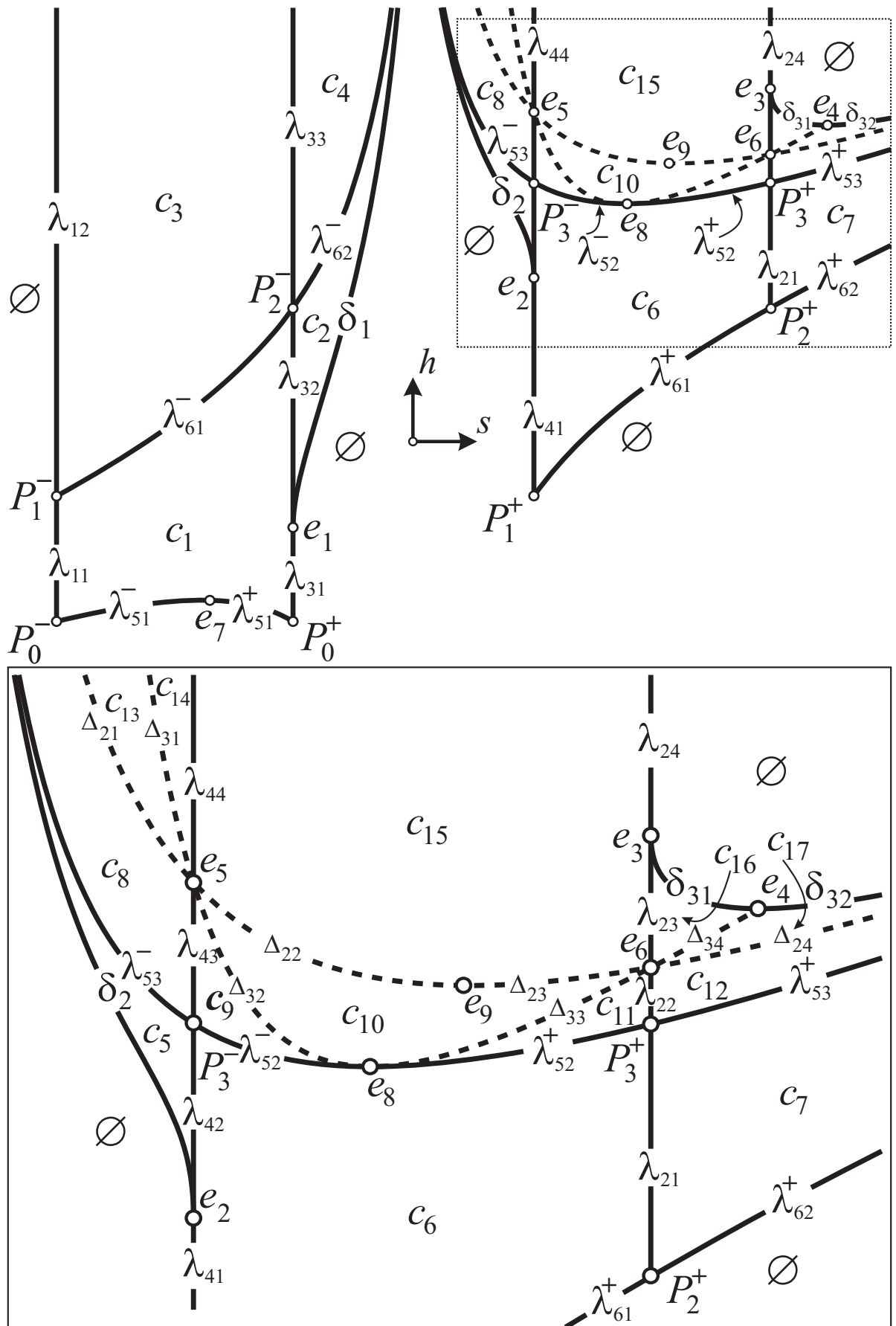


Рис. 2.3. Диаграмма подсистемы M_3 на плоскости (s, h) и ее фрагмент.

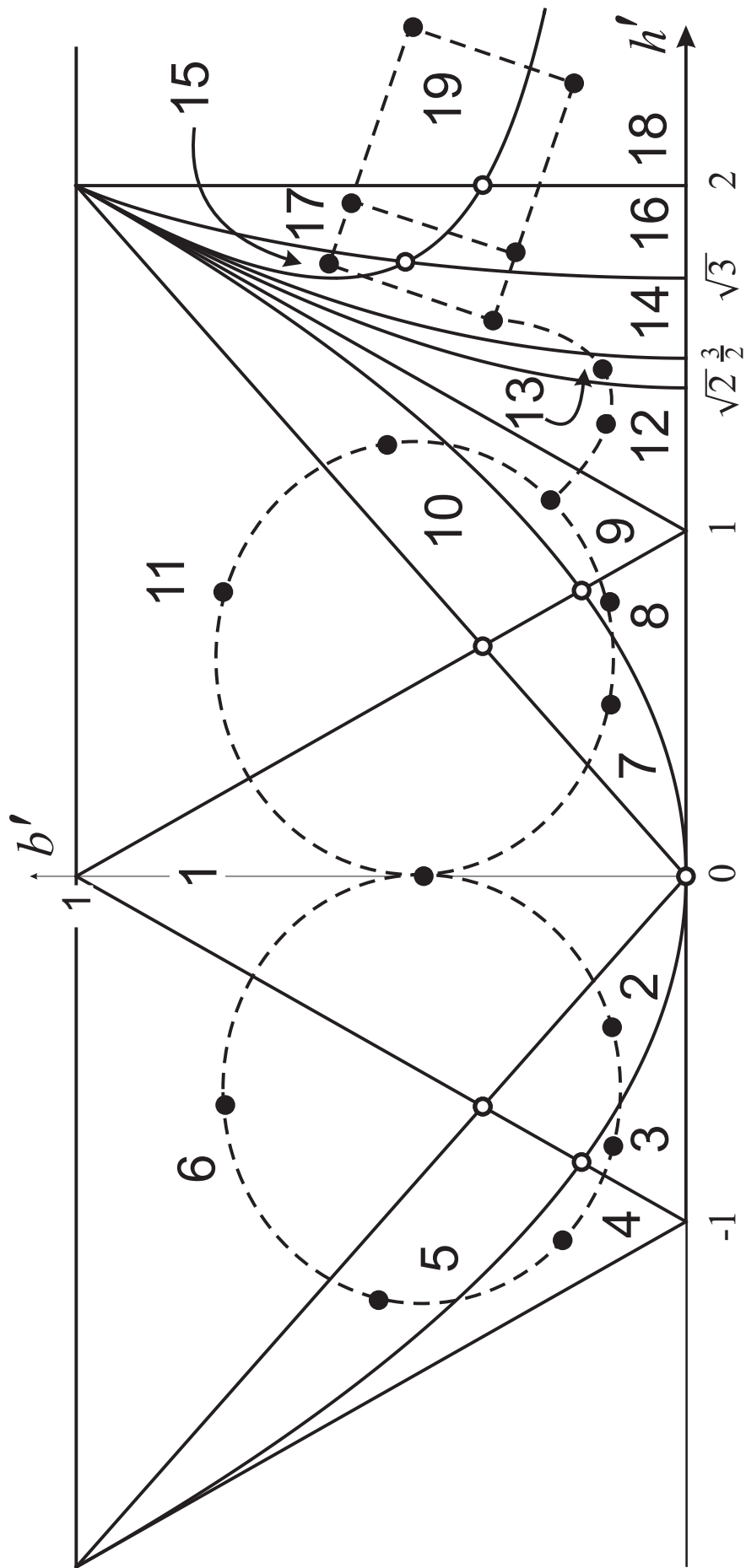


Рис. 2.4. Разделяющее множество и пути просмотра.

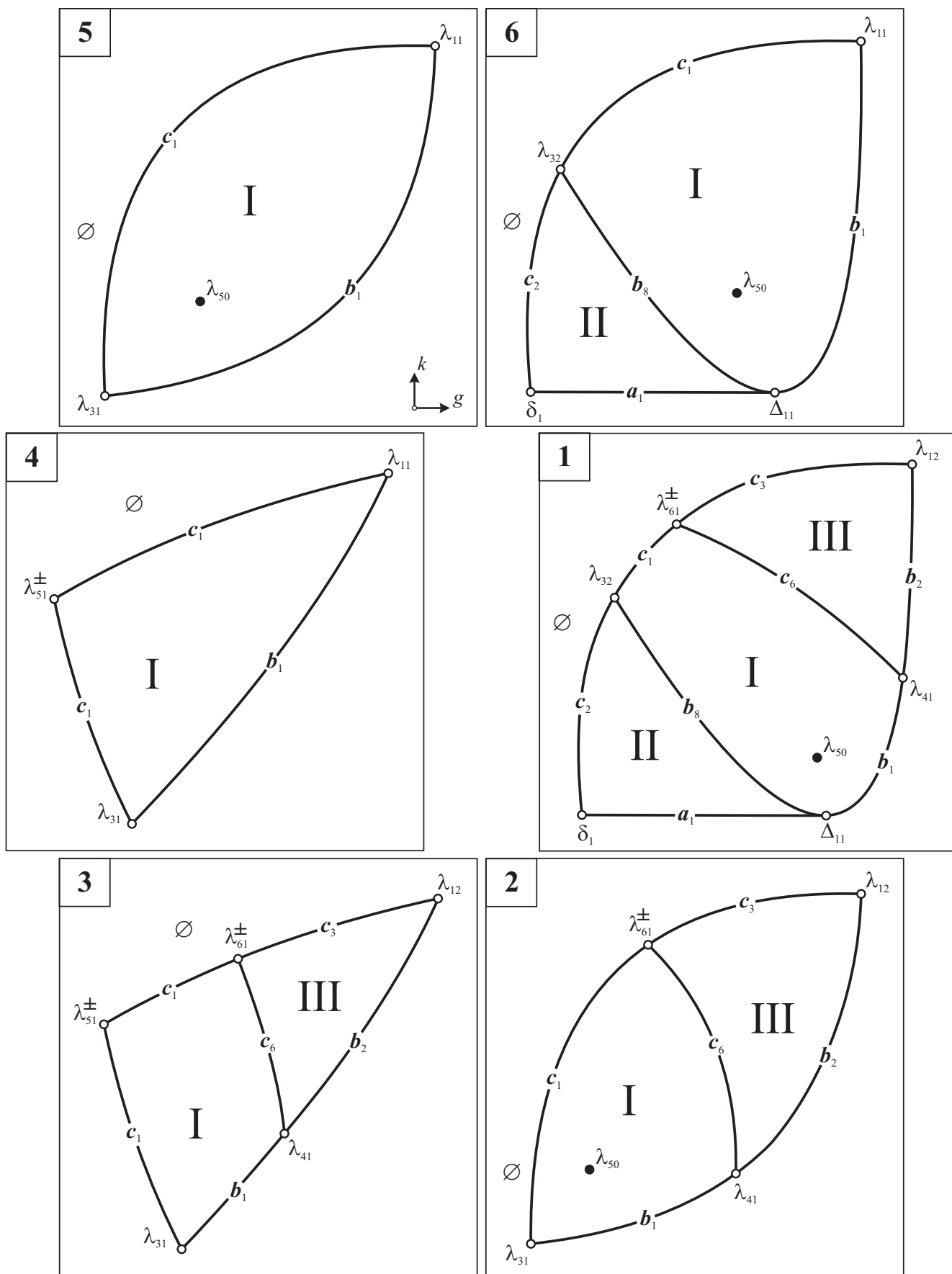


Рис. 2.5. Оснащенные диаграммы: “левый круг”.

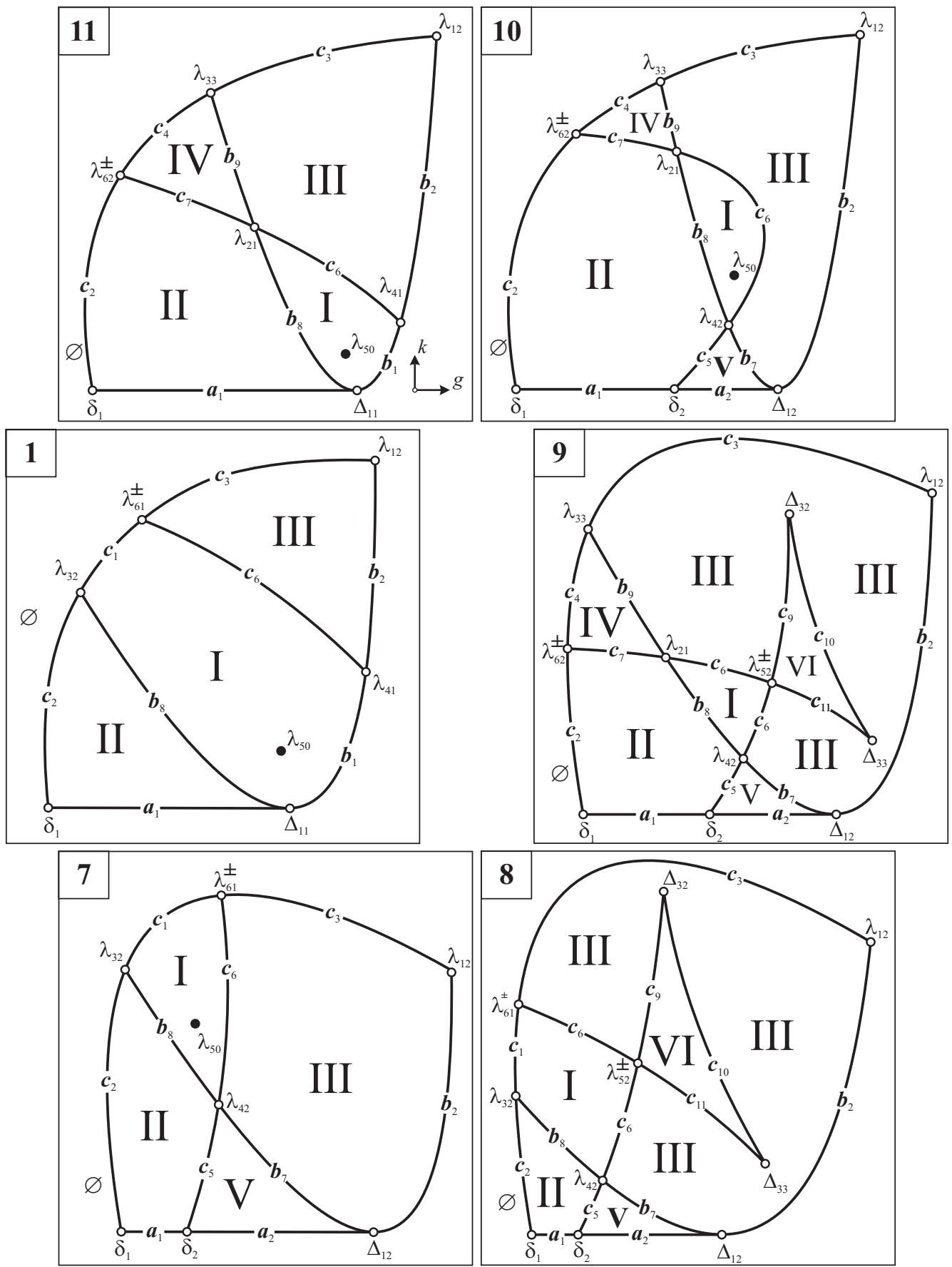


Рис. 2.6. Оснащенные диаграммы: “правый круг”.

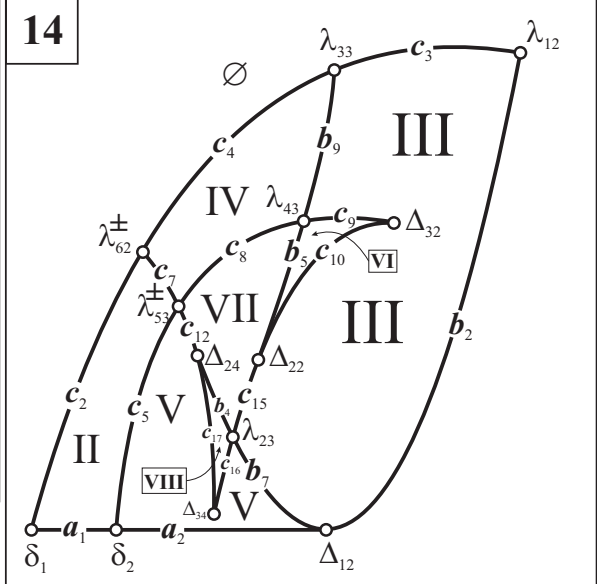
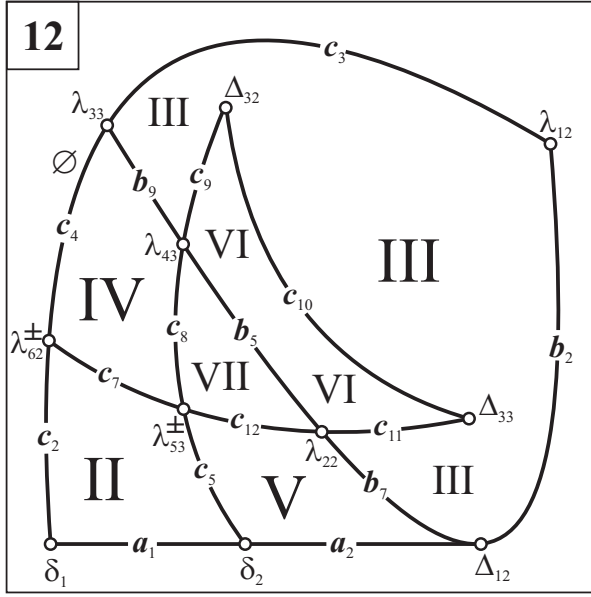
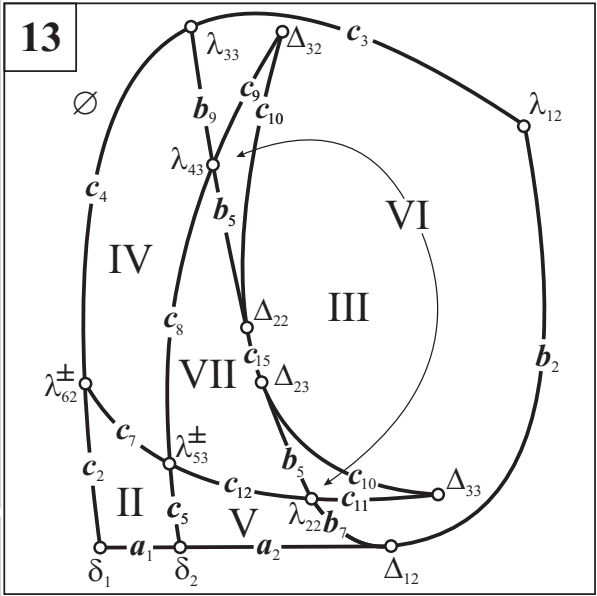
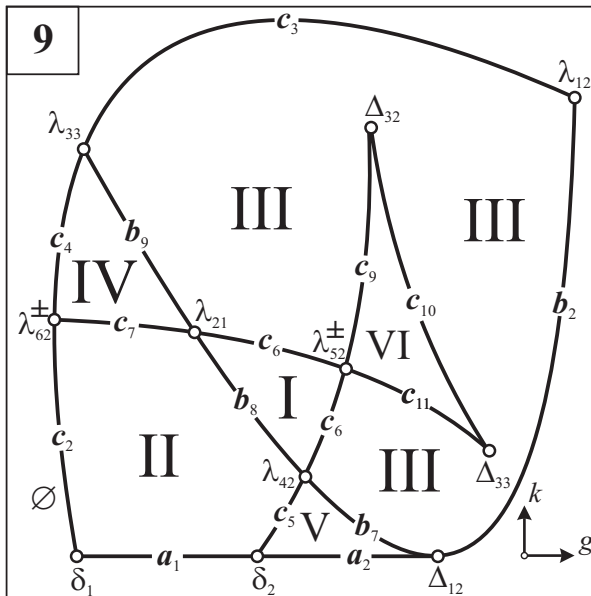


Рис. 2.7. Оснащенные диаграммы: “линия”.

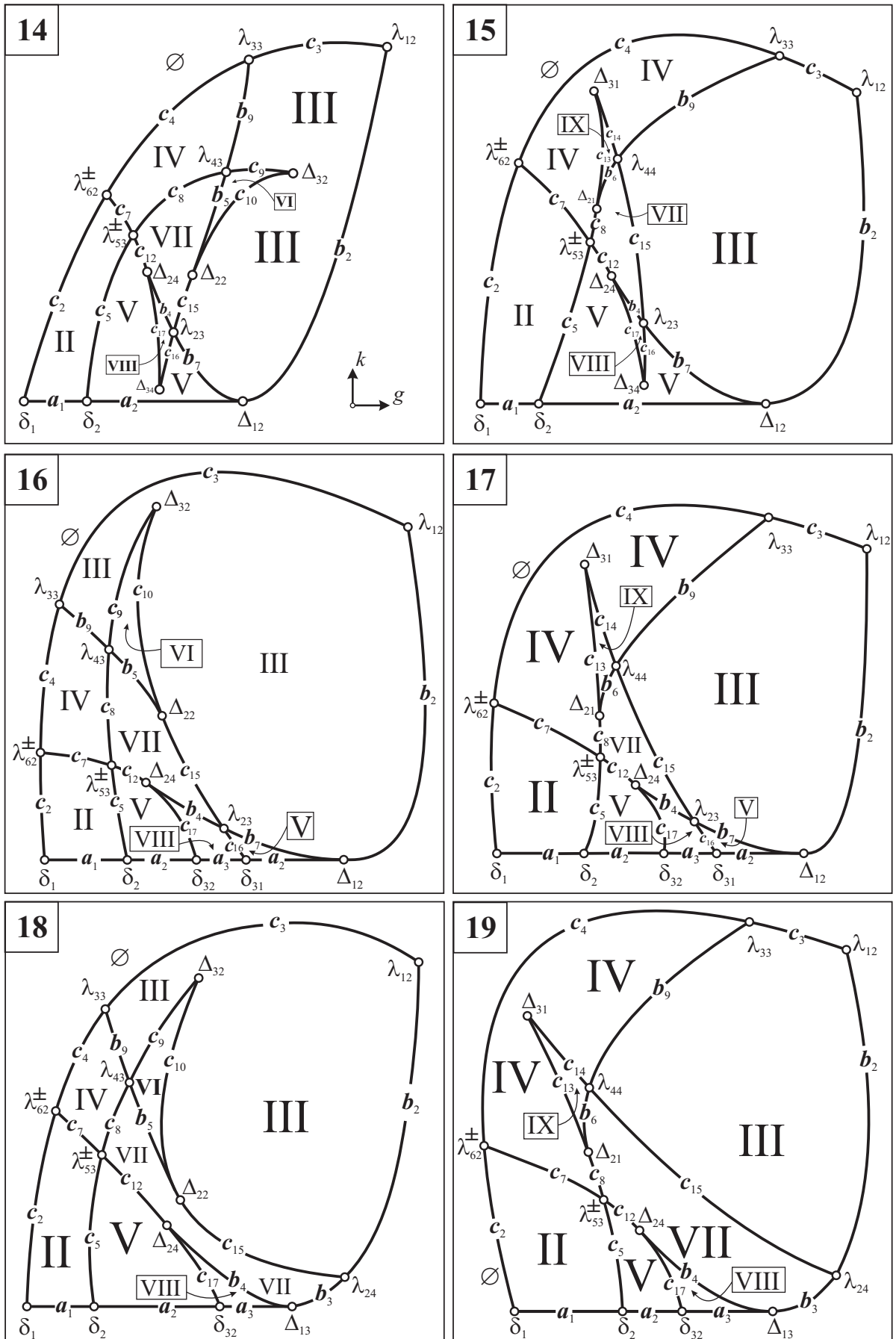


Рис. 2.8. Оснащенные диаграммы: “блок”.

Глава 3

Топологический анализ одного частного случая интегрируемости Д. Н. Горячева в динамике твердого тела

3.1. Введение

Уравнения Кирхгофа движения твердого тела в жидкости в общем случае имеют вид

$$\dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = \alpha \times \frac{\partial H}{\partial M}, \quad (3.1.1)$$

где $M \in \mathbb{R}^3$ – импульсивный момент, $\alpha \in \mathbb{R}^3$ – импульсивная сила, $H = H(M, \alpha)$ – полная энергия. Известными интегралами системы (3.1.1) являются геометрический интеграл

$$\Gamma = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

интеграл площадей

$$L = M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3$$

и полная энергия H . На совместном уровне

$$P_{a,\ell} = \{\Gamma = a^2, \quad L = \ell\}, \quad \dim P_{a,\ell} = 4$$

система (3.1.1) гамильтонова с двумя степенями свободы, в связи с чем для ее интегрируемости достаточно в дополнение к интегралу H указать еще один интеграл, независимый с H почти всюду.

В работе [166] найден случай интегрируемости, в котором

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2) + M_3^2 + \frac{1}{2}[c(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{b}{\alpha_3^2}]. \quad (3.1.2)$$

В предположении

$$L = 0 \tag{3.1.3}$$

система (3.1.1) на $P_{a,0}$ имеет первый интеграл

$$F = [M_1^2 - M_2^2 - \frac{b(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{a^2\alpha_3^2} + c\alpha_3^2]^2 + 4[M_1M_2 - \frac{b\alpha_1\alpha_2}{a^2\alpha_3^2}]^2.$$

В частном случае $b = 0$ этот интеграл найден С. А. Чаплыгиным в статье [167], там же выполнено и сведение задачи при $b = 0$ к эллиптическим квадратурам. Дальнейшие обобщения рассматриваемая интегрируемая система получила в работе Х. М. Яхья [142]. В работе [168] на основе идей бигамильтонова подхода предложен вариант выбора переменных разделения случая Горячева.

В настоящей главе представлено явное вещественное разделение переменных для случая Горячева, отличное от [168] и основанное на геометрическом подходе к разделению переменных, предложенном в [161, 169]. Это решение не требует привлечения каких-либо математических теорий. Полученные аналитические формулы позволяют исследовать фазовую топологию, в частности, бифуркации лиувиллевых торов и построить грубый инвариант А.Т. Фоменко. Исследования фазовой топологии интегрируемого случая представлены в [58], [67].

3.2. Параметризация интегральных многообразий

В этом параграфе мы используем замену С. А. Чаплыгина [167] и геометрический подход к разделению переменных, предложенный в [161, 169, 170].

Вместо одного из интегралов H, F можно рассматривать интеграл в форме, указанной в [168]:

$$K = [M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}]^2 + 2c\alpha_3^2(M_1^2 - M_2^2) + c^2\alpha_3^4.$$

При условии (3.1.3) он выражается через H и F следующим образом:

$$K = F + \frac{4b}{a^2}H - \frac{b^2}{a^4}. \quad (3.2.1)$$

Подходящим выбором направления подвижных осей и единиц измерения можно добиться того, чтобы было выполнено $c = 1$ и $a = 1$.

Введем переменные x, z, ξ , полагая

$$x^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad z = \alpha_3^2, \quad \xi = M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}. \quad (3.2.2)$$

При $b = 0$ соответствующие переменные введены в [167] и привели к найденному там разделению. Следуя С. В. Ковалевской, введем также комплексную замену ($i^2 = -1$)

$$\begin{aligned} w_1 &= M_1 + iM_2, & w_2 &= M_1 - iM_2, \\ x_1 &= \alpha_1 + i\alpha_2, & x_2 &= \alpha_1 - i\alpha_2. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Геометрический интеграл примет вид

$$x^2 + z = 1, \quad (3.2.4)$$

а поскольку сама постановка задачи предполагает $\alpha_3 \neq 0$, из (3.1.3), (3.2.3), (3.2.4) выразим

$$M_3 = -\frac{x_2w_1 + x_1w_2}{2\sqrt{z}}. \quad (3.2.5)$$

Подстановка (3.2.2), (3.2.5) в уравнения

$$H = h, \quad K = k \quad (3.2.6)$$

интегрального многообразия $J_{h,k} \subset P = P_{1,0}$ приводит их к виду

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{k - \xi^2}{z} - z, \quad (3.2.7)$$

$$x_1^2(w_2^2 + z) + x_2^2(w_1^2 + z) = 4hz - 2\xi - 2b \left(1 - \frac{1}{z}\right). \quad (3.2.8)$$

Из определения (3.2.2) с использованием (3.2.4), (3.2.7) имеем также

$$w_1 w_2 = \xi - \frac{b}{z}, \quad (3.2.9)$$

$$z^2(w_1^2 + z)(w_2^2 + z) = kz^2 - 2b\xi z + b^2, \quad (3.2.10)$$

$$x_1 x_2 = 1 - z. \quad (3.2.11)$$

Из (3.2.7), (3.2.9) находим

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt{z}}(\sqrt{\varphi_-} + \sqrt{\varphi_+}), \quad w_2 = \frac{1}{2\sqrt{z}}(\sqrt{\varphi_-} - \sqrt{\varphi_+}),$$

где

$$\varphi_{\pm}(z, \xi) = k \pm 2b - (\xi \pm z)^2.$$

Введем комплексно сопряженные переменные

$$\mu_1 = z(w_1^2 + z), \quad \mu_2 = z(w_2^2 + z), \quad (3.2.12)$$

и пусть $\mu^2 = \mu_1 \mu_2$. Тогда уравнение (3.2.10) примет вид

$$\mu^2 = kz^2 - 2b\xi z + b^2. \quad (3.2.13)$$

Отсюда, в частности, следует, что любая траектория системы изображается в виде кривой на поверхности второго порядка (3.2.13) в вещественном трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3(z, \xi, \mu)$.

Из (3.2.12), (3.2.7) находим

$$\mu_1 + \mu_2 = z^2 - \xi^2 + k.$$

Обозначая $\psi_{\pm} = z^2 - \xi^2 + k \pm 2\mu$, можем записать

$$\sqrt{\mu_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\psi_+} + \sqrt{\psi_-} \right), \quad \sqrt{\mu_2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\psi_+} - \sqrt{\psi_-} \right). \quad (3.2.14)$$

Обозначим

$$\theta_{\pm} = 2hz^2 - (\xi + b)z + b \pm (1 - z)\mu.$$

Тогда из (3.2.8), (3.2.11), (3.2.12) получим

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}} \left(\sqrt{\theta_+} + \sqrt{\theta_-} \right), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2\mu_1}} \left(\sqrt{\theta_+} - \sqrt{\theta_-} \right),$$

или, с учетом (3.2.14)

$$x_1 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\theta_+} + \sqrt{\theta_-}}{\sqrt{\psi_+} - \sqrt{\psi_-}}, \quad x_2 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\theta_+} - \sqrt{\theta_-}}{\sqrt{\psi_+} + \sqrt{\psi_-}}.$$

Выражения для M_3, α_3 находим теперь из (3.2.5) и второго соотношения (3.2.2). Таким образом, найдены все алгебраические выражения для фазовых переменных через две вспомогательных переменных z, ξ . Возвращаясь к вещественным компонентам фазового вектора, имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varphi_-}{z}}, \quad M_2 = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\varphi_+}{z}}, \\ M_3 &= \frac{1}{4\sqrt{2}\mu z} \left\{ \sqrt{\varphi_+} \left(\sqrt{\psi_-} \sqrt{\theta_+} + \sqrt{\psi_+} \sqrt{\theta_-} \right) - \sqrt{\varphi_-} \left(\sqrt{\psi_-} \sqrt{\theta_-} + \sqrt{\psi_+} \sqrt{\theta_+} \right) \right\}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}\mu} \left(\sqrt{\psi_+} \sqrt{\theta_+} + \sqrt{\psi_-} \sqrt{\theta_-} \right), \\ \alpha_2 &= -\frac{i}{2\sqrt{2}\mu} \left(\sqrt{\psi_+} \sqrt{\theta_-} + \sqrt{\psi_-} \sqrt{\theta_+} \right), \\ \alpha_3 &= \sqrt{z}. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Считая, что в представленных выше формулах выбрано $\mu \geq 0$, запишем условие существования вещественных решений (3.2.15) в виде системы неравенств

$$\begin{aligned} \varphi_+(z, \xi) &\leq 0, \quad \varphi_-(z, \xi) \geq 0, \\ \psi_+(z, \xi) &\geq 0, \quad \psi_-(z, \xi) \leq 0, \\ \theta_+(z, \xi) &\geq 0, \quad \theta_-(z, \xi) \leq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что подстановка k через постоянную интеграла F , которую по очевидным соображениям обозначим через f^2 , дает

$$\theta_+ \theta_- = [\xi - b - f + (b + f - 2h)z][\xi - b + f + (b - f - 2h)z]z^2. \tag{3.2.16}$$

Кроме того

$$\psi_+\psi_- = \varphi_+\varphi_- = [(z - \xi)^2 + 2b - k][(z + \xi)^2 - 2b - k].$$

Отсюда следует, что проекция интегрального многообразия $J_{h,k}$ на плоскость (z, ξ) ограничена отрезками прямых или лучами

$$\begin{aligned} \xi - b \pm f + (b \mp f - 2h)z &= 0, \\ z - \xi \pm \sqrt{k - 2b} &= 0, \quad z + \xi \pm \sqrt{k + 2b} = 0. \end{aligned}$$

Каждая из этих прямых, если она корректно определена, служит касательной к кривой второго порядка

$$\mathcal{G} : kz^2 - 2b\xi z + b^2 = 0. \quad (3.2.17)$$

Выбрав семейство таких касательных в качестве координатной сети в соответствующей компоненте плоскости, получим, что в такой сети для всех допустимых пар постоянных первых интегралов область возможности движения окажется прямоугольной, что, как правило, ведет к разделению переменных [161, 169].

3.3. Вещественное разделение переменных

Любая касательная к кривой (3.2.17) в области

$$kz^2 - 2b\xi z + b^2 \geq 0,$$

является проекцией на плоскость (z, ξ) пары прямолинейных образующих однополостного гиперboloида (3.2.13) в пространстве $\mathbb{R}^3(z, \xi, \mu)$. На рис. 3.1 и рис. 3.2 показаны прямолинейные образующие однополостного гиперboloида (3.2.13) и их проекции.

Выберем в качестве параметров двух семейств таких образующих корни u_1, u_2 квадратного уравнения

$$zu^2 - 2bu + (2b\xi - kz) = 0. \quad (3.3.1)$$

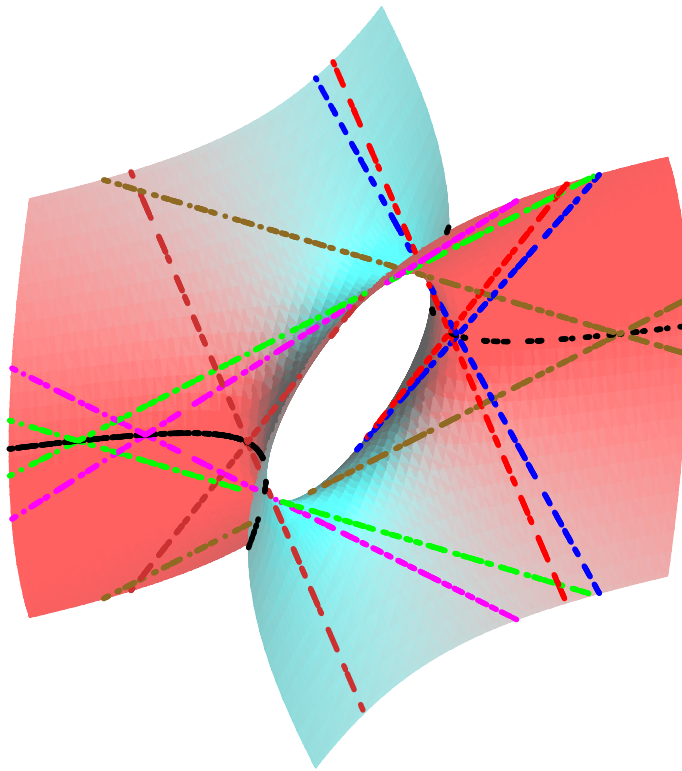


Рис. 3.1. Однополостной гиперболоид (3.2.13) и его прямолинейные образующие.

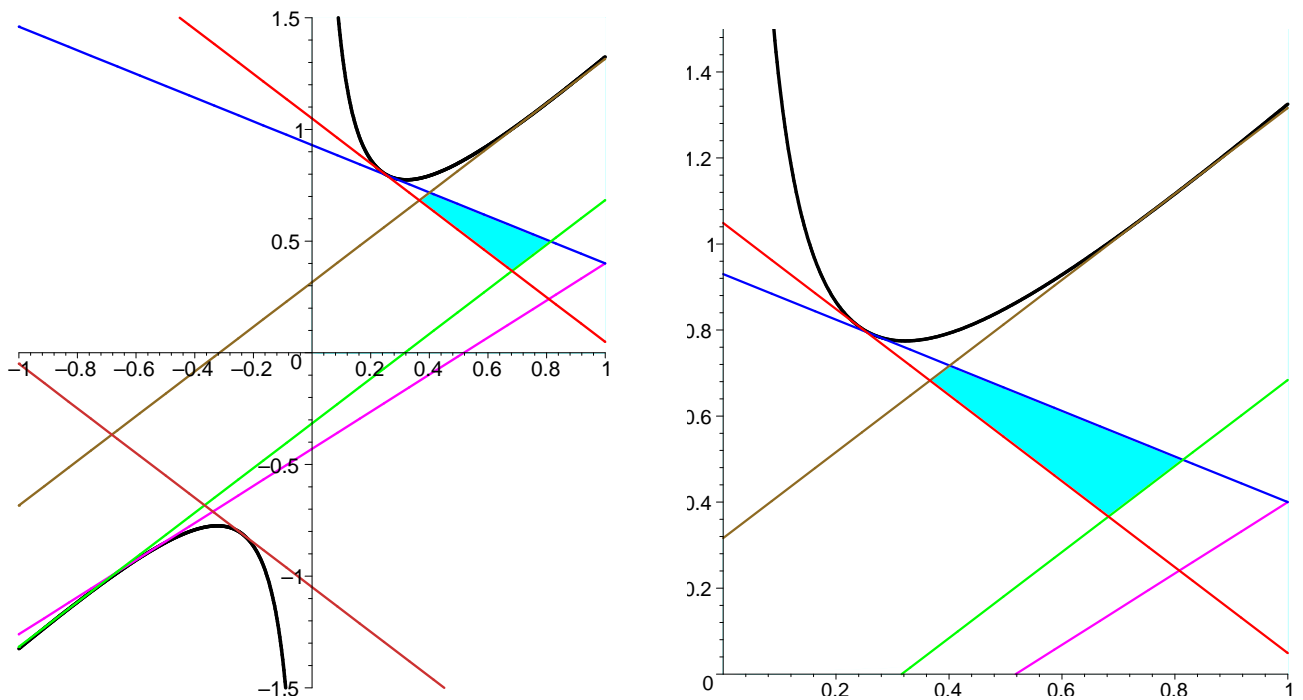


Рис. 3.2. Проекция прямолинейных образующих.

Его дискриминант, равный μ^2 , в силу (3.2.10) неотрицателен на всех траекториях, поэтому u_1, u_2 вещественны. Тогда из (3.3.1), (3.2.13) найдем

$$z = \frac{2b}{u_1 + u_2}, \quad \xi = \frac{u_1 u_2 + k}{u_1 + u_2}, \quad \mu = b \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}. \quad (3.3.2)$$

Обозначим

$$p_1(u) = 2b + k - u^2, \quad p_2(u) = 2b - k + u^2, \quad p_3(u) = (u - b)^2 - f^2,$$

и пусть

$$p_{ij} = p_i(u_j), \quad r_{ij} = \sqrt{p_{ij}} \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2). \quad (3.3.3)$$

Знак каждой из величин r_{ij} произволен, но во всех используемых одновременно формулах должны быть выбраны одинаковыми. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= -\frac{p_{11}p_{12}}{(u_1 + u_2)^2}, & \varphi_- &= -\frac{p_{21}p_{22}}{(u_1 + u_2)^2}, \\ \psi_+ &= \frac{p_{12}p_{21}}{(u_1 + u_2)^2}, & \psi_- &= \frac{p_{11}p_{22}}{(u_1 + u_2)^2}, \\ \theta_+ &= \frac{2bp_{31}}{(u_1 + u_2)^2}, & \theta_- &= \frac{2bp_{32}}{(u_1 + u_2)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения вместе с (3.3.2) в (3.2.15), выбираем знаки радикалов согласованными таким образом, чтобы выполнялись интегральные соотношения (3.2.6). Для этого достаточно выполнения равенства, по смыслу согласованного с (3.2.16):

$$\sqrt{\varphi_+}\sqrt{\varphi_-} = \sqrt{\psi_+}\sqrt{\psi_-}.$$

Поэтому положим

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi_+} &= -i \frac{r_{11}r_{12}}{u_1 + u_2}, & \sqrt{\varphi_-} &= i \frac{r_{21}r_{22}}{u_1 + u_2}, \\ \sqrt{\psi_+} &= \frac{r_{12}r_{21}}{u_1 + u_2}, & \sqrt{\psi_-} &= \frac{r_{11}r_{22}}{u_1 + u_2}, \\ \sqrt{\theta_+} &= \frac{\sqrt{2b}r_{31}}{u_1 + u_2}, & \sqrt{\theta_-} &= \frac{\sqrt{2b}r_{32}}{u_1 + u_2}. \end{aligned}$$

Тогда из (3.2.15) получаем

$$\begin{aligned}
M_1 &= i \frac{r_{21}r_{22}}{2\sqrt{2b}(u_1 + u_2)}, & M_2 &= -\frac{r_{11}r_{12}}{2\sqrt{2b}(u_1 + u_2)}, \\
M_3 &= -\frac{i}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{12}r_{22}r_{31} + r_{11}r_{21}r_{32}), \\
\alpha_1 &= \frac{1}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{12}r_{21}r_{31} + r_{11}r_{22}r_{32}), & (3.3.4) \\
\alpha_2 &= -\frac{i}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{11}r_{22}r_{31} + r_{12}r_{21}r_{32}), \\
\alpha_3 &= \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{u_1 + u_2}}.
\end{aligned}$$

Для вывода дифференциальных уравнений для новых переменных u_1, u_2 из определения (3.2.2) в силу системы (3.1.1) найдем

$$\dot{\xi} = 2\alpha_3(\alpha_2M_1 + \alpha_1M_2), \quad \dot{z} = 2\alpha_3(\alpha_1M_2 - \alpha_2M_1),$$

что в подстановке (3.3.4) дает

$$\dot{\xi} = \frac{(u_1^2 - k)r_{12}r_{22}r_{32} + (u_2^2 - k)r_{11}r_{21}r_{31}}{\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)(u_1 + u_2)}, \quad \dot{z} = -\frac{2\sqrt{b}(r_{11}r_{21}r_{31} + r_{12}r_{22}r_{32})}{(u_1^2 - u_2^2)(u_1 + u_2)}.$$

С другой стороны, из (3.3.2) имеем

$$\dot{\xi} = \frac{1}{(u_1 + u_2)^2} [(u_2^2 - k)\dot{u}_1 + (u_1^2 - k)\dot{u}_2], \quad \dot{z} = -\frac{2b}{(u_1 + u_2)^2}(\dot{u}_1 + \dot{u}_2).$$

Из двух последних систем получим разделенную систему

$$(u_1 - u_2)\dot{u}_1 = \sqrt{W(u_1)}, \quad (u_1 - u_2)\dot{u}_2 = \sqrt{W(u_2)}, \quad (3.3.5)$$

где

$$W(u) = \frac{1}{b}p_1(u)p_2(u)p_3(u) = \frac{1}{b}(2b + k - u^2)(2b - k + u^2)[(u - b)^2 - f^2]. \quad (3.3.6)$$

Уравнения (3.3.4), (3.3.5) сводят случай Д. Н. Горячева к гиперэллиптическим квадратурам. Указанные уравнения были представлены в кратком сообщении [58].

3.4. Допустимая область и бифуркационная диаграмма

Начиная с этого момента, считаем, что оставшийся свободный физический параметр положителен

$$b > 0. \quad (3.4.1)$$

Полученные выше аналитические результаты по разделению переменных справедливы и для $b < 0$, но качественное поведение системы может значительно отличаться. В частности, полная энергия в окрестности особенности $\alpha_3 = 0$ окажется неограниченной снизу.

В качестве пары независимых (почти всюду) интегралов на P удобно выбрать K, F . Введем интегральное отображение

$$J = K \times \sqrt{F} : P \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.4.2)$$

и рассмотрим интегральные многообразия

$$J_{k,f} = J^{-1}(k, f) = \{\zeta \in P : K(\zeta) = k, F(\zeta) = f^2\} \quad (f \geq 0).$$

В силу соотношения (3.2.1) они совпадают с соответствующими многообразиями (3.2.6).

Далее мы пользуемся методами работы [118]. Напомним некоторую терминологию.

Допустимым множеством называется подмножество \mathcal{D} плоскости (k, f) , состоящее из всех точек, для которых $J_{k,f} \neq \emptyset$. Фиксируем $(k, f) \in \mathcal{D}$. Достижимой областью $\alpha(k, f)$ называем проекцию интегрального многообразия $J_{k,f}$ на плоскость (u_1, u_2) . Из (3.3.4), (3.3.5) в предположении (3.4.1) следует, что любая связная компонента достижимой области является прямоугольником, ограниченным отрезками прямых, параллельных координатным осям. На этих прямых значение постоянной координаты является корнем многочлена $W(u)$, называемого максимальным многочленом.

Напомним, что бифуркационной диаграммой называется подмножество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, над которым отображение (3.4.2) не является локально-тривиальным. В условиях рассматриваемой задачи оно совпадает с множеством критических значений J . Наличие зависимостей (3.3.4) гарантирует, что Σ есть часть дискриминантного множества Δ многочлена (3.3.6), содержащаяся в \mathcal{D} :

$$\Sigma = \Delta \cap \mathcal{D}. \quad (3.4.3)$$

Из (3.3.6) получаем, что Δ состоит из трех прямых

$$k = 2b, \quad k = -2b, \quad f = 0$$

и четырех парабол

$$k = \pm 2b + (f \pm b)^2. \quad (3.4.4)$$

Для нахождения допустимого множества требуется получить необходимые и достаточные условия вещественности значений (3.3.4) в терминах знаков подрадикальных выражений в наиболее компактной форме независимых неравенств, легко проверяемых в областях, на которые плоскость постоянных интегралов делится дискриминантным множеством.

Пусть $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ – булева пара. Следуя [118], вводим функцию (булев знак) $\text{bsgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$, такую, что

$$\text{bsgn}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \geq 0 \\ 1, & \theta < 0 \end{cases}.$$

Обозначая символом \oplus сумму по модулю 2, имеем свойство

$$\text{bsgn}(\theta_1 \theta_2) = \text{bsgn}(\theta_1) \oplus \text{bsgn}(\theta_2).$$

Введем булевы переменные

$$z_i = \text{bsgn} p_{i1}, \quad z_{3+i} = \text{bsgn} p_{i2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

При отсутствии кратных корней многочлена W любая компонента достижимой области $\alpha(k, f)$ имеет внутреннюю точку. В такой точке условия вещественности (3.3.4) запишутся в виде системы \mathcal{B} -линейных уравнений

$$\begin{aligned}
 z_2 \oplus z_5 &= 1, \\
 z_1 \oplus z_4 &= 0, \\
 z_3 \oplus z_4 \oplus z_5 &= 1, \\
 z_1 \oplus z_2 \oplus z_6 &= 1, \\
 z_2 \oplus z_3 \oplus z_4 &= 0, \\
 z_1 \oplus z_5 \oplus z_6 &= 0, \\
 z_1 \oplus z_3 \oplus z_5 &= 1, \\
 z_2 \oplus z_4 \oplus z_6 &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Очевидно, ранг этой системы над \mathcal{B} равен 4 и она эквивалентна системе

$$Az = \zeta^0, \tag{3.4.6}$$

где $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_6)^T \in \mathcal{B}^6$, булева матрица A имеет вид (нуль изображаем пустой клеткой)

$$\begin{array}{c}
 \zeta_1 \\
 \zeta_2 \\
 \zeta_3 \\
 \zeta_4
 \end{array}
 \left\| \begin{array}{cccccc}
 z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\
 1 & & & & 1 & 1 \\
 & 1 & & & 1 & \\
 & & 1 & & & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1
 \end{array} \right\|, \tag{3.4.7}$$

а $\zeta^0 = (0, 1, 1, 0)^T$.

Заметим, что

$$p_1(u) > -p_2(u).$$

поэтому к системе (3.4.6) можно добавить условия-импликации

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_1 \rightarrow \neg z_2) = 1, \\ (z_4 \rightarrow \neg z_5) = 1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (z_1, z_2) \neq (1, 1), \\ (z_4, z_5) \neq (1, 1). \end{array} \right.$$

Кроме того, транспозиция $u_1 \leftrightarrow u_2$ в формулах (3.3.4) равносильна замене знака у всех r_{ij} одновременно, поэтому можно условиться, например, о выполнении неравенства

$$u_1^2 < u_2^2, \quad (3.4.8)$$

что дает

$$p_{21} < p_{22},$$

откуда

$$(z_5 \rightarrow z_2) = 1 \Leftrightarrow (z_2, z_5) \neq (0, 1).$$

Перечисленным условиям отвечает лишь одно из четырех решений системы (3.4.6)

$$\mathbf{z} = (0, 1, 1, 0, 0, 0)^T.$$

Следовательно, единственная система неравенств, обеспечивающая существенность решения (3.3.4) при договоренности (3.4.8), имеет вид

$$\begin{aligned} (k + 2b) - u_1^2 \geq 0, \quad u_1^2 - (k - 2b) \leq 0, \quad (u_1 - b)^2 - f^2 \leq 0, \\ (k + 2b) - u_2^2 \geq 0, \quad u_2^2 - (k - 2b) \geq 0, \quad (u_2 - b)^2 - f^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Так как мы условились брать f неотрицательным, отсюда сразу следует, что решения возможны лишь в квадранте

$$k \geq 2b, \quad f \geq 0. \quad (3.4.10)$$

Введем в силу этого обозначения

$$\begin{aligned} m_1 = \sqrt{k - 2b}, \quad m_2 = \sqrt{k + 2b} \quad (0 < m_1 < m_2), \\ n_1 = b - f, \quad n_2 = b + f \quad (n_1 \leq n_2). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

При условии (3.4.1) из последнего уравнения (3.3.4) с необходимостью вытекает требование

$$u_1 + u_2 \geq 0.$$

Поэтому при выборе (3.4.8) получаем, что $u_2 \geq 0$, и тогда система (3.4.9) определяет следующие условия на достижимую область

$$u_1 \in [-m_1, m_1] \cap [n_1, n_2], \quad u_2 \in [m_1, m_2] \setminus [n_1, n_2]. \quad (3.4.12)$$

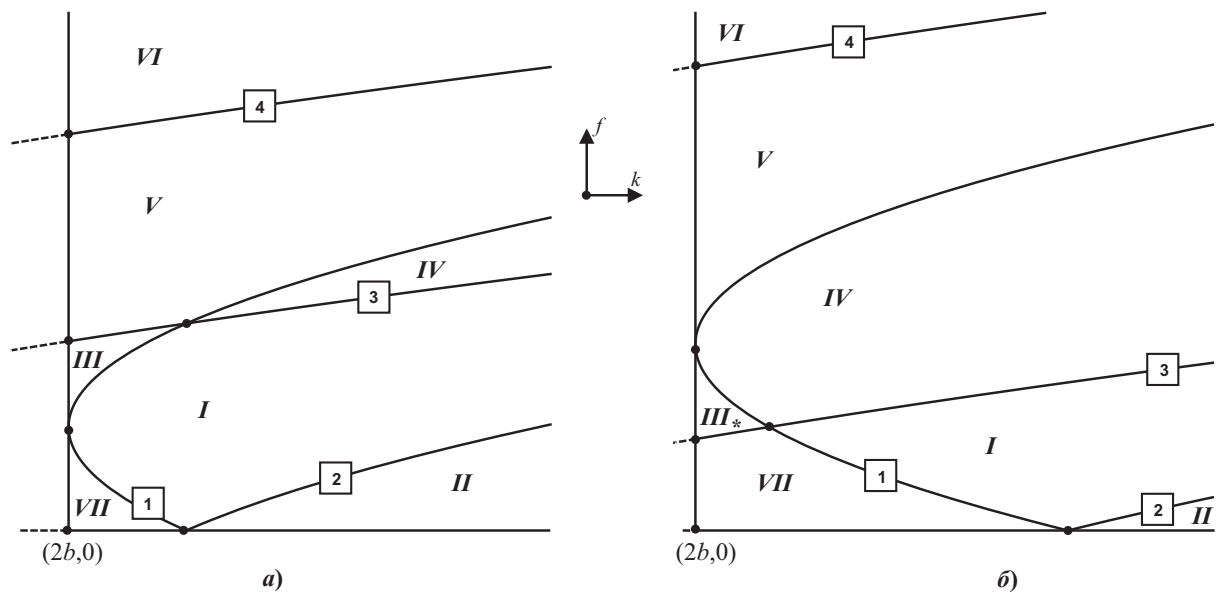


Рис. 3.3. Дискриминантное множество и кодировка областей: а) $b < 1$; б) $b > 1$.

Пересечение множества Δ с квадрантом (3.4.10) показано на рис. 3.3. При переходе через значение $b = 1$ исчезает область III и возникает область, обозначенная III*. На параболах (3.4.4), в соответствии с их нумерацией на рис. 3.3, имеем: 1) $m_1 = |n_1|$; 2) $m_1 = n_2$; 3) $m_2 = n_2$; 4) $m_2 = |n_1|$. Сводка результатов по распределению значений (3.4.11) приведена в первых двух столбцах табл. 3.4.1. Оставшиеся два столбца содержат промежутки осцилляции переменных u_1, u_2 , определенные согласно (3.4.12). Таким образом, движения возможны лишь в областях I–III, при этом проекция интегрального многообразия на плоскость разделенных переменных состоит из одного прямоугольника.

Таблица 3.4.1

Номер области	Корни W	Область изменения u_1	Область изменения u_2
<i>I</i>	$-m_2 < -m_1 < n_1 < m_1 < n_2 < m_2$	$[n_1, m_1]$	$[n_2, m_2]$
<i>II</i>	$-m_2 < -m_1 < n_1 < n_2 < m_1 < m_2$	$[n_1, n_2]$	$[m_1, m_2]$
<i>III</i>	$-m_2 < n_1 < -m_1 < m_1 < n_2 < m_2$	$[-m_1, m_1]$	$[n_2, m_2]$
<i>III*</i>	$-m_2 < -m_1 < m_1 < n_1 < m_2 < n_2$	\emptyset	$[m_1, n_1]$
<i>IV</i>	$-m_2 < -m_1 < n_1 < m_1 < m_2 < n_2$	$[n_1, m_1]$	\emptyset
<i>V</i>	$-m_2 < n_1 < -m_1 < m_1 < m_2 < n_2$	$[-m_1, m_1]$	\emptyset
<i>VI</i>	$n_1 < -m_2 < -m_1 < m_1 < m_2 < n_2$	$[-m_1, m_1]$	\emptyset
<i>VII</i>	$-m_2 < -m_1 < m_1 < n_1 < n_2 < m_2$	\emptyset	$[m_1, n_1]$ $\cup [n_2, m_2]$

Суммируем полученную информацию относительно допустимого множества.

Теорема 31. Допустимое множество в пространстве констант первых интегралов K, \sqrt{F} имеет вид:

1) при $b < 1$

$$\mathcal{D} = \{0 \leq f \leq b, k \geq 2b + (f - b)^2\} \cup \{b \leq f \leq 2\sqrt{b} - b, k \geq 0\} \cup \{f \geq 2\sqrt{b} - b, k \geq -2b + (f + b)^2\};$$

2) при $b \geq 1$

$$\mathcal{D} = \{0 \leq f \leq 1, k \geq 2b + (f - b)^2\} \cup \{f \geq 1, k \geq -2b + (f + b)^2\}.$$

В силу этих неравенств получим согласно (3.4.3) следующее утверждение о бифуркационной диаграмме.

Теорема 32. Бифуркационная диаграмма отображения $K \times \sqrt{F}$ состоит из следующих множеств: при $b < 1$

- a) $k = 2b, \quad b \leq f \leq 2\sqrt{b} - b,$
- b) $f = 0, \quad k \geq 2b + b^2,$
- c) $k = 2b + (f - b)^2, \quad 0 \leq f \leq 1,$
- d) $k = 2b + (f + b)^2, \quad f \geq 0,$
- e) $k = -2b + (f + b)^2, \quad f \geq 2\sqrt{b} - b;$

a при $b \geq 1$

- a) $f = 0, \quad k \geq 2b + b^2,$
- b) $k = 2b + (f - b)^2, \quad 0 \leq f \leq 1,$
- c) $k = 2b + (f + b)^2, \quad f \geq 0,$
- d) $k = -2b + (f + b)^2, \quad f \geq 1.$

Отрезок оси $f = 0$ включается в бифуркационную диаграмму, поскольку очевидно, что ноль – критическое значение функции F , а для арифметического корня \sqrt{F} в соответствующих точках нарушается гладкость.

Допустимое множество и бифуркационная диаграмма указаны на рис. 3.4. Номерами 1–7 отмечены различные участки множеств (a)–(e), на которые их разбивают узловые точки диаграммы. Очевидно, что при переходе к значениям $b > 1$ картина лишь упрощается, поэтому топологический анализ достаточно провести для случая $b < 1$. На рис. 3.4, a отмечены пути $\lambda_1 - \lambda_4$, указав бифуркации вдоль которых, мы получим полную информацию для построения любого грубого топологического инварианта.

3.5. Фазовая топология

Рассмотрим наиболее богатый случай $b < 1$. Для вычисления количества компонент связности регулярных интегральных многообразий (количества торов Лиувилля) и критических интегральных поверхностей воспользуемся методом булевых вектор-функций [118]. Сопоста-

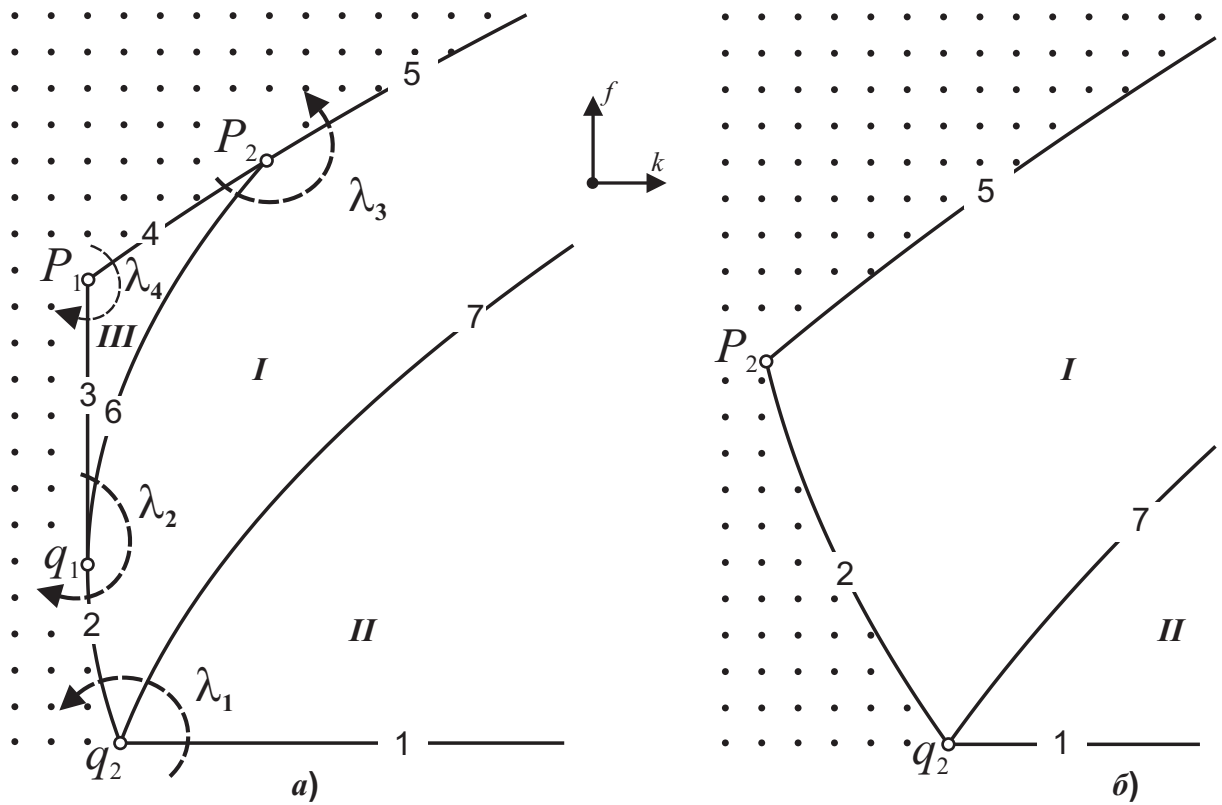


Рис. 3.4. Допустимое множество и бифуркационная диаграмма: а) $b < 1$; б) $b > 1$.

вним каждому радикалу r_{ij} в (3.3.3) его булев знак

$$z_i = \text{bsgn } r_{i1}, \quad z_{3+i} = \text{bsgn } r_{i2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Напомним, что здесь подразумеваются следующие предварительные действия, не влияющие на используемые формулы.

Фиксирована некоторая связная компонента Π достижимой области – прямоугольник осцилляции пары (u_1, u_2) . Тогда вполне определены знаки всех подкоренных выражений p_{ij} в зависимостях (3.3.4). У отрицательных p_{ij} изменим знак, множитель i вынесем в коэффициент перед произведением радикалов и соответственно переопределим r_{ij} так, что это значение будет вещественным.

Сопоставляя каждому моному от радикалов в (3.3.4) компоненту булевой вектор-функции, придем к тем же выражениям для компонент, которые фигурируют в левых частях уравнений (3.4.5). Полученную \mathcal{B} -линейную функцию обозначим $\tilde{A} : \mathcal{B}^6 \rightarrow \mathcal{B}^8$. Исключение зависимых

компонент (элементарные преобразования строк соответствующей матрицы), сводят ее к функции $A : \mathcal{B}^6 \rightarrow \mathcal{B}^4$ с матрицей (3.4.7), которую также как и ранее обозначим через A . Дальнейший алгоритм состоит в следующем. На заданном прямоугольнике Π аргументы функции A разбиваем на две группы, помещая в первую булевы знаки радикалов, не меняющих знак на траекториях в Π , а во вторую – булевы знаки радикалов, периодически меняющих знак на этих траекториях. Для каждого из нефиктивных аргументов второй группы элементарными преобразованиями матрицы A добьемся того, чтобы соответствующий столбец стал единичным, после чего исключим из A этот столбец и строку, содержащую выбранный аргумент. В результате получим \mathcal{B} -линейное отображение, зависящее только от аргументов первой группы. Если p – его ранг, то количество связных компонент интегрального многообразия, накрывающего прямоугольник Π равно 2^p [118]. В случае, когда компонент, зависящих только от аргументов первой группы, не остается, полагаем $p = 0$, и соответствующий прямоугольник накрывается одной компонентой. В критическом случае (наличие кратного корня у максимального многочлена) делаем то же самое с дополнительной оговоркой о том, что радикалы, содержащие кратный корень, всегда относятся ко второй группе, даже если этот кратный корень – внутренняя точка для промежутка осцилляции и фактически за конечное время не достигается соответствующей переменной разделения. Приведенные рассуждения применяются без учета возможности выбора различных знаков у радикала $\sqrt{u_1 + u_2}$. Этот выбор задает одно из двух инвариантных подмногообразий в P , на которые фазовое пространство системы разбивает исключенное из рассмотрения подмножество $\alpha_3 = 0$ особенностей потенциала. Поэтому в полном фазовом пространстве все следующие результаты о количестве компонент связности необходимо умножить на два. Будем считать, что для определенности мы ограничи-

ваемся подмножеством в P , заданным неравенством $\alpha_3 > 0$ (очевидно, рассматриваемая система обладает симметрией – обращением знака величин M_1, M_2, α_3).

Информация о достижимых областях, аргументах второй группы и остающихся после редукции компонентах булевой вектор-функции собрана в табл. 3.5.1.

Таблица 3.5.1

	Достижимая область	Вторая группа	Редуцированная функция	2^p	$\frac{1}{2}J_{k,f}$
<i>I</i>	$[n_1, m_1] \times [n_2, m_2]$	2,3,4,6	0	1	\mathbf{T}^2
<i>II</i>	$[n_1, n_2] \times [m_1, m_2]$	3,4,5	$z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$	2	$2\mathbf{T}^2$
<i>III</i>	$[-m_1, m_1] \times [n_2, m_2]$	2,4,6	$z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$	2	$2\mathbf{T}^2$
1	$\{n_1 = n_2\} \times [m_1, m_2]$	3,4,5	$z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$	2	$2S^1$
2	$\{n_1 = m_1\} \times [n_2, m_2]$	2,3,4,6	0	1	S^1
3	$\{-m_1 = m_1\} \times [n_2, m_2]$	2,4,6	$z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$	2	$2S^1$
4	$[-m_1, m_1] \times \{n_2 = m_2\}$	2,4,6	$z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$	2	$2S^1$
5	$[n_1, m_1] \times \{n_2 = m_2\}$	2,3,4,6	0	1	S^1
6	$[n_1 = -m_1, m_1] \times [n_2, m_2]$	2,3,4,6	0	1	$S^1 \vee S^1$
7	$[n_1, m_1 = n_2] \times [m_1 = n_2, m_2]$	2,3,4,5,6	0	1	$S^1 \vee S^1$

Поясним преобразования матрицы (3.4.7) в трех основных случаях.

Для области *I* и сегментов 2, 5 – 7 последовательно исключаем пары «столбец-строка» $(z_2, \zeta_2), (z_3, \zeta_3), (z_4, \zeta_4)$. Остается одна строка, в которой аргумент z_6 из второй группы – исключаем и ее. Остается вектор-функция без компонент (в табл. 2 она отмечена как тождественный ноль), то есть $p = 0$.

Для области *II* и сегмента 1 последовательно исключаем пары «столбец-строка» $(z_3, \zeta_3), (z_4, \zeta_4)$, после чего к строке ζ_1 прибавим строку ζ_2 . Столбец z_5 становится единичным и исключается пара (z_5, ζ_1) . Остается

одна строка, отвечающая функции $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$, в которой все аргументы из первой группы. Следовательно, $p = 1$.

Для области *III* и сегментов 3, 4 исключаем пары (z_2, ζ_2) и (z_4, ζ_4) , после чего к строке ζ_3 прибавим строку ζ_1 . Столбец z_6 становится единичным и исключается пара (z_6, ζ_1) . Остается одна строка, отвечающая функции $z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$ с аргументами из первой группы. Следовательно, $p = 1$.

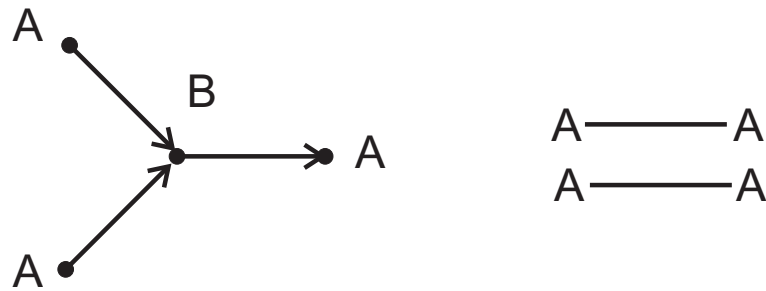


Рис. 3.5. Круговые молекулы для узловых точек.

Теперь по количеству компонент связности однозначно определяются и интегральные многообразия, лежащие в выбранной «половине» системы (фиксированный знак α_3). Они указаны в последнем столбце таблицы. Соответственно, вдоль всех путей $\lambda_1 - \lambda_3$ с учетом указанного направления имеем одну и ту же последовательность бифуркаций $\emptyset \rightarrow 2A \rightarrow 2T^2 \rightarrow B \rightarrow T^2 \rightarrow A \rightarrow \emptyset$, а вдоль пути λ_4 – бифуркацию $\emptyset \rightarrow 2A \rightarrow 2A \rightarrow \emptyset$. Молекулы показаны на рис. 3.5. Здесь для базовых бифуркаций [104] использованы современные обозначения атомов [26, 124, 171].

При переходе к значениям $b > 1$ происходят очевидные упрощения – исчезает регулярная область *III* с двумя торами Лиувилля и примыкающие к ней сегменты 3, 4, 6.

Отметим, что наличие явного алгебраического решения с разделенными переменными позволяет легко вычислить инварианты траекторной эквивалентности, основываясь на числах вращения.

3.6. Аналитическая классификация особенностей и грубый инвариант А. Т. Фоменко

Для аналитической классификации особенностей удобно рассмотреть *отображение момента*

$$\mathcal{F} : P \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (3.6.1)$$

полагая $(k, h) = \mathcal{F}(x) = (K(x), H(x))$.

Обозначим через \mathcal{C} совокупность всех критических точек отображения момента, то есть точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap P)$ также называется *бифуркационной диаграммой*. Множество \mathcal{C} можно стратифицировать рангом отображения момента, представив его в виде объединения $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$. Здесь $\mathcal{C}^r = \{x : \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}$.

Бифуркационную диаграмму Σ отображения момента (3.6.1) можно получить из бифуркационной диаграммы, построенной на плоскости (k, f) , используя преобразование

$$k = f^2 + 4bh - b^2.$$

Теорема 32 переформулируется следующим образом.

Теорема 33. *Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента (3.6.1) состоит из следующих множеств: при $0 < b < 1$*

- a) $k = 2b, \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2},$
- b) $k = 4bh - b^2, \quad h \geq \frac{b+1}{2},$
- c) $k = 2b + (2h - 1)^2, \quad h \geq \frac{b}{2},$
- d) $k = -2b + (2h + 1)^2, \quad h \geq \sqrt{b} - \frac{1}{2};$

a при $b \geq 1$

- a) $k = 4bh - b^2, \quad h \geq \frac{b+1}{2},$
- b) $k = 2b + (2h - 1)^2, \quad h \geq \frac{b}{2},$

$$e) k = -2b + (2h + 1)^2, \quad h \geq \frac{b}{2}.$$

Далее мы используем стандартную скобку Ли-Пуассона

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= -\varepsilon_{ijk}M_k, & \{M_i, \alpha_j\} &= -\varepsilon_{ijk}\alpha_k, & \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0, \\ 1 \leq i, j, k \leq 3, & & \varepsilon_{ijk} &= \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i). \end{aligned}$$

Множество C^0 исчерпывается неподвижными точками системы **(3.1.1)**:

$$\begin{aligned} c_i : M &= 0, & \alpha &= (0, \varepsilon_1 \sqrt{1 - \sqrt{b}}, \varepsilon_2 \sqrt[4]{b}), \\ d_j : M &= 0, & \alpha &= (0, 0, \varepsilon_3), \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

где $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1$ и, соответственно, $i = 1, \dots, 4, j = 1, 2$, причем точки c_i существуют лишь для $0 < b \leq 1$. Значения первых интегралов образуют нульмерный остов бифуркационной диаграммы.

$$\begin{aligned} P_1 = \mathcal{F}(c_i) : k &= 2b, & h &= \sqrt{b} - \frac{1}{2}, \\ P_2 = \mathcal{F}(d_j) : k &= b^2 + 1, & h &= \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Теорема 34. *Особым точкам P_1 и P_2 бифуркационной диаграммы Σ соответствуют невырожденные особенности c_i и d_j ранга 0 отображения момента. В зависимости от значений параметра b тип особенностей определяется таблицей 3.6.1.*

Доказательство. Линеаризации векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в точках **(3.6.2)** являются линейными симплектическими операторами $A_H, A_K : T_{c_i, d_j}P \rightarrow T_{c_i, d_j}P$. Непосредственно проверяется, что они линейно независимы, то есть порождают подалгебру в $\text{sp}(4, \mathbb{R})$ размерности 2. Характеристические уравнения оператора A_H в точках c_i и d_j имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} c_i : [\mu^2 + 4(1 - \sqrt{b})][\mu^2 + 2(2 - \sqrt{b})] &= 0, \\ d_j : (\mu^2 + b - 1)(\mu^2 + b - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Таблица 3.6.1

c^0	Образ в $\mathbb{R}^2(k, h)$	Тип в P
$0 < b < 1$		
c_i	P_1	центр-центр
d_j	P_2	центр-седло
$b > 1$		
d_j	P_2	центр-центр

При значениях параметра b , указанного в табл. 3.6.1, все корни соответствующего характеристического уравнения различны и разбиваются на пары, определяющие тип невырожденной особенности. \square

Перейдем к описанию особенностей ранга 1.

Рассмотрим участок бифуркационной диаграммы 3, что соответствует выбору

$$k = 2b, \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2}.$$

Параметризация особенности ранга 1 в этом случае имеет вид

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} M_1 = 0, M_2^2 = \frac{z^2 - b}{z}, M_3^2 = \frac{1 - 2h}{2b}(z^2 - b), \\ \alpha_1^2 = 1 - z - \frac{1 - 2h}{2b}z^2, \alpha_2^2 = \frac{1 - 2h}{2b}z, \alpha_3^2 = z. \end{cases}$$

Зависимость $z(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{z}^2 = 4 \left(1 - z - \frac{1 - 2h}{2b}z^2 \right) (z^2 - b),$$

$$z \in \left[b; \frac{1}{1 - 2h}(\sqrt{b^2 + 2b - 4bh} - b) \right], \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим многообразие \mathcal{M}_1 , заданное уравнениями

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

где

$$F_1 = M_1, \quad F_2 = M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2} - \alpha_3^2.$$

Пересечение многообразия \mathcal{M}_1 с P дает двумерную поверхность Q_1 , которая является симплектическим подмногообразием, за исключением множества меры нуль точек вырождения индуцированной симплектической структуры при $h = \frac{1}{2}$. Для доказательства достаточно найти скобку Пуассона функций F_1 и F_2 :

$$\{F_1, F_2\}|_{Q_1} = \frac{1}{z} \sqrt{2b} \sqrt{1 - 2h}.$$

Гамильтониан H является первым интегралом на Q_1 . Уровень энергии гладко расслаивает Q_1 на одномерные множества \mathcal{L}_1 . Множества \mathcal{L}_1 с индуцированной на них динамикой далее называем *критическими окружностями*.

Зная параметризацию критических окружностей \mathcal{L}_1 нетрудно аналитически определить их тип. Рассмотрим функцию K , для которой в точках \mathcal{L}_1 дифференциал интеграла K равен нулю, т.е. $dK = 0$. Характеристическое уравнение симплектического оператора A_K в этом случае имеет вид

$$\mu^2 + 128(1 - 2h)b = 0.$$

Поэтому критические окружности \mathcal{L}_1 представляют собой *невыврожденные* особенности эллиптического типа ранга 1 отображения момента, за исключением значения $h = \frac{1}{2}$. Точке касания $q_1 = (k = 2b; h = \frac{1}{2})$ на бифуркационной диаграмме отвечает вырожденная особенность ранга 1 с параметризацией

$$M_1 = M_3 = \alpha_2 = 0; \quad M_2^2 = \frac{z^2 - b}{z}; \quad \alpha_1 = 1 - z; \quad \alpha_3^2 = z;$$

$$\dot{z}^2 = 4(1 - z)(z^2 - b), \quad z \in [\sqrt{b}; 1].$$

Рассмотрим теперь участок бифуркационной диаграммы 1, для ко-

торого

$$k = 4bh - b^2, \quad h \geq \frac{b+1}{2}. \quad (3.6.3)$$

В случае (3.6.3) постоянная интеграла Горячева $f = 0$ порождает многообразие \mathcal{M}_2 , заданное функциями

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0,$$

где

$$Z_1 = M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \frac{b(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_3^2},$$

$$Z_2 = M_1 M_2 - \frac{b\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2}.$$

Пересечение многообразия \mathcal{M}_2 с P дает двумерную поверхность Q_2 , инвариантную относительно фазового потока (3.1.1), расслоенную постоянной h гамильтониана на критические окружности \mathcal{L}_2 . Вычисление скобки Пуассона двух функций Z_1 и Z_2 приводит к выражению

$$\{Z_1, Z_2\}|_{Q_2} = 2\sqrt{b}\sqrt{(2h-b)^2 - 1}.$$

Таким образом, Q_2 является почти всюду симплектическим подмногообразием, за исключением значения $h = \frac{b+1}{2}$. Параметризация критических окружностей \mathcal{L}_2 задается формулами:

$$\mathcal{L}_2 : \begin{cases} M_1^2 = \frac{2h-1-b}{4z}\varphi_2, & M_2^2 = \frac{2h+1-b}{4z}\varphi_1, \\ M_3^2 = \frac{(2h+1-b)(2h-1-b)}{4b}z^2, \\ \alpha_1^2 = \frac{2h+1-b}{4b}\varphi_2, & \alpha_2^2 = \frac{2h-1-b}{4b}\varphi_1, & \alpha_3^2 = z, & h \geq \frac{b+1}{2}, \\ \varphi_1(z) = (2h+1-b)z^2 + 2bz - 2b, \\ \varphi_2(z) = (b-2h+1)z^2 - 2bz + 2b, \end{cases} \quad (3.6.4)$$

где зависимость вспомогательной переменной $z(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{z}^2 = \frac{1}{b}\varphi_1\varphi_2.$$

Аналитическое решение (3.6.4) является аналогом решения Делоне в случае волчка Ковалевской.

Для определения типа критических окружностей \mathcal{L}_2 рассмотрим функцию $g = K - 4bH$, для которой $dg = 0$ на \mathcal{L}_2 . Характеристическое уравнение симплектического оператора A_g имеет вид

$$\mu^2 + 64b(2h + 1 - b)(2h - b - 1) = 0. \quad (3.6.5)$$

Из уравнения (3.6.5) следует, что участку бифуркационной диаграммы 1 соответствует невырожденная особенность эллиптического типа ранга 1 отображения момента, за исключением значения $h = \frac{b+1}{2}$. Точке касания бифуркационной диаграммы $q_2 = (k = b^2 + 2b, h = \frac{b+1}{2})$ отвечает вырожденная особенность ранга 1 с параметризацией

$$M_1 = M_3 = \alpha_2 = 0; \quad M_2^2 = \frac{z^2 + bz - b}{z}; \quad \alpha_1^2 = 1 - z; \quad \alpha_3^2 = z;$$

$$\dot{z}^2 = 4(1 - z) \cdot (z^2 + bz - b); \quad z \in \left[\frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 4b} - b); 1 \right].$$

Пусть теперь

$$k = 2b + (2h - 1)^2, \quad h \geq \frac{b}{2}.$$

Это условие соответствует участкам бифуркационной диаграммы с номерами 6, 2, 7. Параметризация критической окружности имеет вид

$$\mathcal{L}_3 : \quad M_1 = M_3 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1^2 = 1 - z, \quad \alpha_3^2 = z, \quad M_2^2 = \frac{1}{z}[z^2 + (2h - 1)z - b], \quad (3.6.6)$$

где вспомогательная переменная z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{z}^2 = 4(1 - z)(z^2 + (2h - 1)z - b), \quad h \geq \frac{b}{2},$$

$$z \in \left[\frac{1}{2}(\sqrt{(2h - 1)^2 + 4b} + 1 - 2h); 1 \right].$$

Тип критической окружности (3.6.6) можно определить при помощи функции $g = K - 4(2h - 1)H$, для которой $dg = 0$. Характеристическое

уравнение симплектического оператора A_g имеет вид

$$\mu^2 + 64(2h - 1)(b + 1 - 2h) = 0.$$

Из этого уравнения следует, что для значений энергии $\frac{b}{2} < h < \frac{1}{2}$ и $h > \frac{b+1}{2}$ критическая окружность является невырожденной гиперболической особенностью ранга 1, а для $\frac{1}{2} < h < \frac{b+1}{2}$ – невырожденной эллиптической.

Наконец, при условии

$$k = -2b + (2h + 1)^2$$

параметризация критических окружностей \mathcal{L}_4 задается формулами

$$\mathcal{L}_4: \quad M_2 = M_3 = \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2^2 = 1 - z, \quad \alpha_3^2 = z, \quad M_1^2 = \frac{1}{z}[(2h + 1)z - z^2 - b]. \quad (3.6.7)$$

Вспомогательная переменная z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{z}^2 &= 4(1 - z) \left((2h + 1)z - z^2 - b \right), \\ z &\in \left[\frac{2h+1-\sqrt{(2h+1)^2-4b}}{2}; \frac{\sqrt{(2h+1)^2-4b+2h+1}}{2} \right], \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{b}{2}; \\ z &\in \left[\frac{2h+1-\sqrt{(2h+1)^2-4b}}{2}; 1 \right], \quad h \geq \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Для определения типа можно рассмотреть функцию $g = K - 4(2h + 1)H$. Тогда на множестве (3.6.7) $dg = 0$. Характеристическое уравнение симплектического оператора A_g имеет вид

$$\mu^2 + 64(2h + 1)(2h + 1 - b) = 0. \quad (3.6.8)$$

Из уравнения (3.6.8) следует, что участкам бифуркационной диаграммы 4 и 5 отвечает невырожденная эллиптическая особенность ранга 1.

Зная типы особенностей ранга 1, можно легко указать перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента

(3.6.1). На рис. 3.6 перестройка торов Лиувилля описывается атомом, обозначение которого указано около стрелки. В рассматриваемом интегрируемом случае встречаются только два вида атомов: A и B .

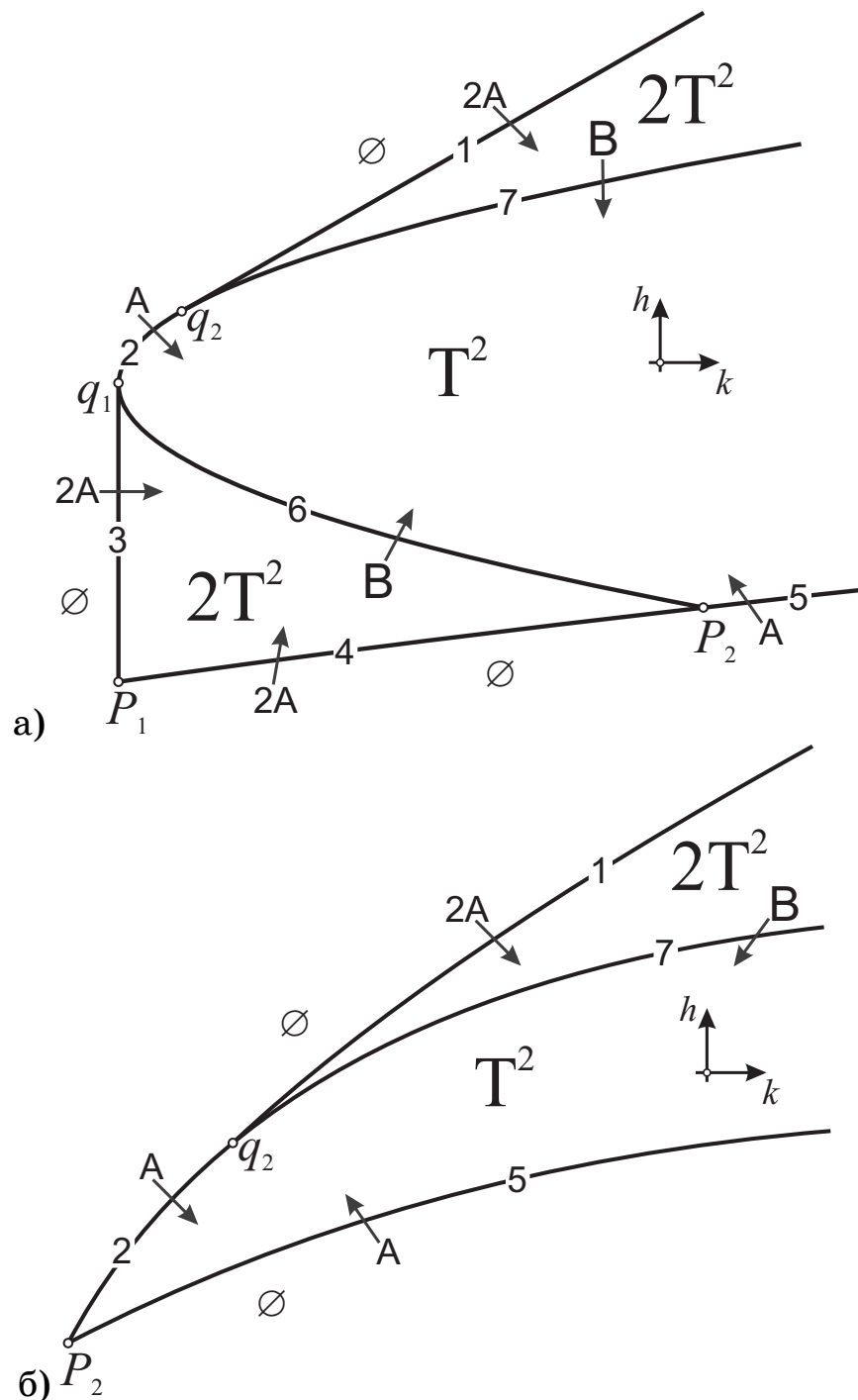


Рис. 3.6. Бифуркационная (k, h) -диаграмма: а) $0 < b < 1$; б) $b > 1$.

Также легко устанавливается топологический тип $Q_h^3(b) = \{(M, \alpha) \in P : H = h\}$ изоэнергитической поверхности по Смейлу как приведенного расслоения окружностей над областью возможности

движения на сфере Пуассона $\{\alpha : U_b(\alpha) \leq h\}$. Здесь $U_b(\alpha)$ – эффективный потенциал, который определяется выражением

$$U_b(\alpha) = \frac{1}{2}[\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}].$$

Для различных значениях параметров b и h многообразие $Q_h^3(b)$ представляет собой либо S^3 , либо $2S^3$.

Из определения топологического инварианта [171] следует, что в состав множества параметров, разделяющего различные инварианты Фоменко на изоэнергетических многообразиях $Q_h^3(b)$, нужно к диаграмме Смейла, как образа неподвижных точек системы уравнений (3.1.1), добавить образ множества вырожденных критических точек ранга 1. Отметим, что для классических задач динамики твердого тела аналогичные диаграммы построены в работах А. А. Ошемкова [100, 130].

Таким образом, мы приходим к следующей простой системе разделяющих кривых на плоскости параметров (b, h) :

$$h = \sqrt{b} - \frac{1}{2}, 0 \leq b \leq 1; \quad h = \frac{b}{2}, b \geq 0; \quad h = \frac{1}{2}, 0 \leq b \leq 1; \quad h = \frac{b+1}{2}, b \geq 0.$$

Для системы с гамильтонианом (3.1.2) на рис. 3.7 изображены разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(b, h)$. Они разбивают плоскость на четыре области разного типа.

В каждой области указана пара $(Q_h^3(b), W)$, то есть изоэнергетическое 3-многообразие и соответствующая ему молекула W в виде графа Фоменко. Таким образом, получается полный список, состоящий из четырех пар, который классифицирует систему (3.1.1) с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

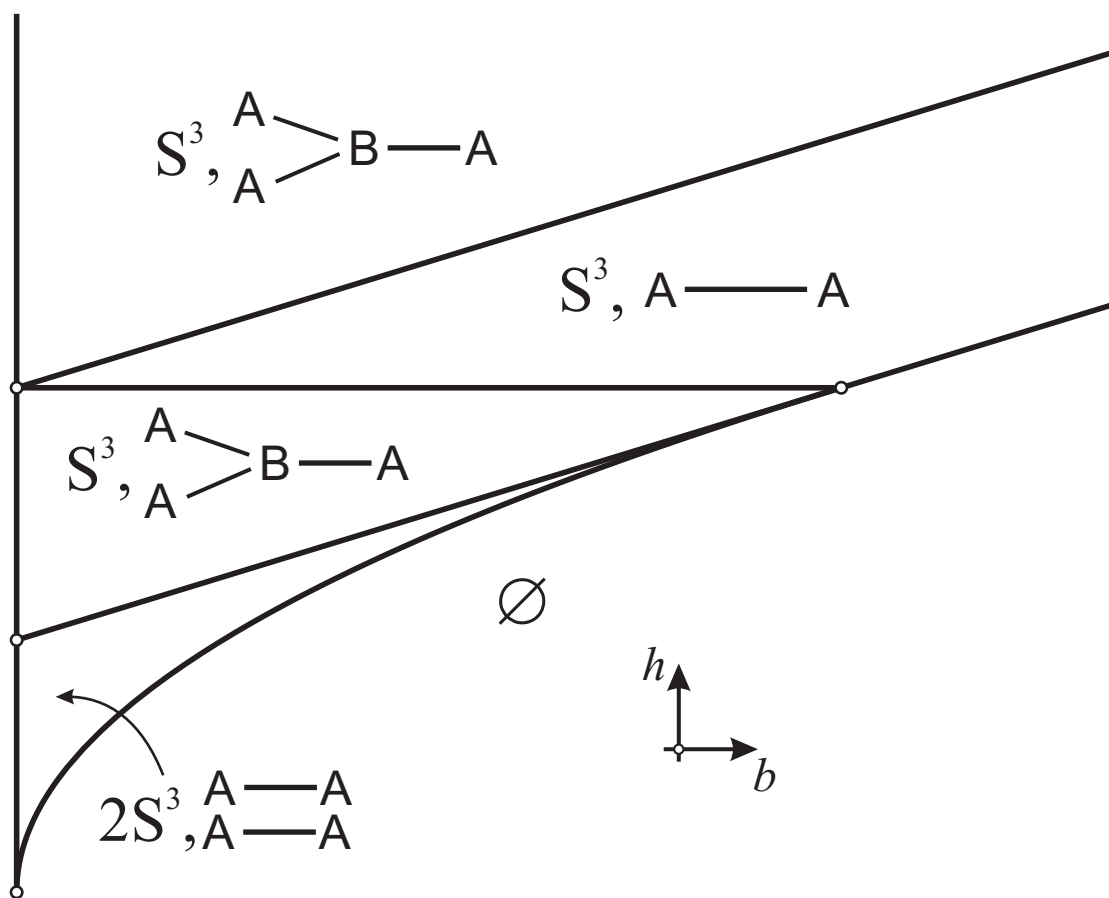


Рис. 3.7. Грубый инвариант Фоменко $(Q_h^3(b), W)$.

Глава 4

Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела

В данной главе рассматривается интегрируемая система с тремя степенями свободы, для которой В. В. Соколовым и А. В. Цыгановым указано представление Лакса. Представление Лакса обобщает $L - A$ пару для гиростата Ковалевской в двойном поле, найденную А. Г. Рейманом и М. А. Семеновым-Тян-Шанским. Здесь мы приводим явные формулы для (независимых почти всюду) дополнительных первых интегралов K и G , которые функционально связаны с коэффициентами спектральной кривой $L - A$ пары В. В. Соколова и А. В. Цыганова. Благодаря такой форме дополнительных интегралов K , G и параметрической редукции М. П. Харламова, удалось выделить аналитически четыре инвариантных четырехмерных подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Система уравнений, задающая одно из инвариантных подмногообразий, является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая О. И. Богоявленского вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном поле. Для описания фазовой топологии всей системы в целом используется метод критических подсистем. Для каждой подсистемы построены бифуркационные диаграммы и указаны бифуркации торов Лиувилля как внутри подсистем, так и во всей системе в целом.

4.1. Введение

Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой O (Рис. 4.1). Выберем триэдр с началом в O , вращающийся вместе с телом, и отнесем к нему все векторные и тензорные объекты. Обозначим через $e_1e_2e_3$ канонический единичный базис в \mathbb{R}^3 , тогда сам подвижный триэдр имеет представление $Oe_1e_2e_3$. Постоянное поле – это силовое поле, порождающее вращающий момент относительно точки O вида $r \times \alpha$, где r – постоянный вектор, а α соответствует некоторому физическому вектору, неподвижному в инерциальном пространстве; r указывает из точки O в центр приложения поля, α есть вектор напряженности поля. Для двух постоянных полей вращающий момент имеет вид $M = r_1 \times \alpha + r_2 \times \beta$. Он может быть представлен как момент одного постоянного поля, если либо $r_1 \times r_2 = 0$, либо $\alpha \times \beta = 0$. Далее мы предполагаем, что

$$r_1 \times r_2 \neq 0, \quad \alpha \times \beta \neq 0. \quad (4.1.1)$$

Два постоянных поля, удовлетворяющие (4.1.1), называются независимыми.

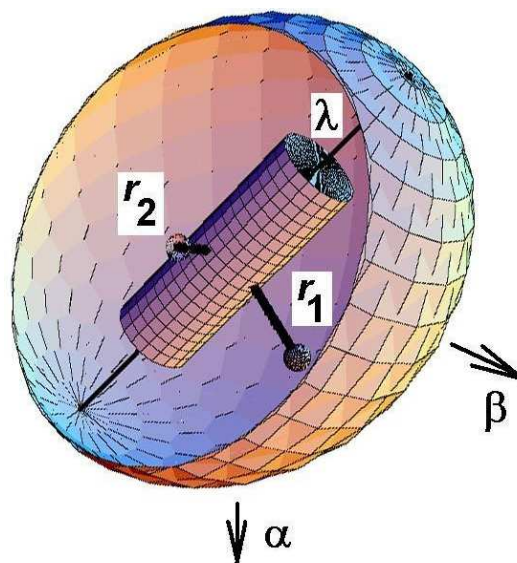


Рис. 4.1. Механическая модель.

Полагаем, что главные моменты инерции подчинены условиям Ковалевской: $A = B = 2C$. Радиус-векторы центров приложения сил r_k параллельны экваториальной плоскости Oe_1e_2 ($r_k \perp e_3$); α, β – векторы напряженностей полей. Гиростатический момент λ направлен по оси динамической симметрии $\lambda = \lambda e_3$, ($\lambda = const$).

Как показано в [99] без потери общности для независимых сил можно полагать

$$r_1 = e_1, \quad r_2 = e_2. \quad (4.1.2)$$

Прошло пятнадцать лет с тех пор, как в [86] была доказана интегрируемость системы

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \frac{\partial H}{\partial M} + \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \beta \times \frac{\partial H}{\partial \beta}, \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \dot{\beta} = \beta \times \frac{\partial H}{\partial M}, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

которая описывает динамику двухполевого обобщенного гиростата при наличии двух силовых полей с деформированным гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_1 M \cdot (r_1 \times \alpha + r_2 \times \beta) - \\ &- 2\varepsilon_2[(r_1 \cdot \alpha) + (r_2 \cdot \beta)] \end{aligned}$$

или, с учетом (4.1.2),

$$\begin{aligned} H &= M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2) \\ &+ 2\varepsilon_1(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Здесь трехмерные векторы M, α, β представляют собой проекции кинетического момента и двух силовых полей на оси, жестко связанные с твердым телом; λ – параметр гиростатического момента, направленного вдоль оси динамической симметрии; ε_1 и ε_2 – параметры деформации. Если параметр деформации ε_1 обращается в нуль, то функция

(4.1.4) совпадает с гамильтонианом в задаче о движении гиростата Ковалевской в системе двух полей [35, формула (3), с. 56]). Системы с такими гамильтонианами, существенно зависящими от α и β , не допускают непрерывной группы симметрии, и поэтому неприводимы глобально к семейству систем с двумя степенями свободы.

Соответствующая скобка Ли–Пуассона задается формулами

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk} \alpha_k, \quad \{M_i, \beta_j\} = \varepsilon_{ijk} \beta_k, \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0, \quad \{\alpha_i, \beta_j\} = 0, \quad \{\beta_i, \beta_j\} = 0, \\ \varepsilon_{ijk} &= \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), \quad 1 \leq i, j, k \leq 3. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Функциями Казимира являются выражения α^2 , $\alpha \cdot \beta$ и β^2 .

Относительно скобки Ли–Пуассона, заданной соотношениями (4.1.5), систему (4.1.3) можно представить в гамильтоновом виде:

$$\dot{x} = \{H, x\},$$

где через x обозначена любая из координат.

Фазовое пространство \mathcal{P} системы уравнений (4.1.3) задается общим уровнем функций Казимира

$$\alpha^2 = a^2, \quad \beta^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = c, \quad (0 < b < a, |c| < ab). \tag{4.1.6}$$

В работе [86] указана соответствующая $L - A$ пара для гамильтониана (4.1.4). Бигамильтонова структура для обобщенного двухполевого гиростата Ковалевской впервые получена в работе [172]. Хорошо известно, что коэффициенты спектральной кривой $\mathcal{E}(z, \zeta) = 0$ для $L - A$ пары всегда являются первыми интегралами. Оказывается необходимый дополнительный интеграл (коэффициент при z^4 в алгебраической кривой $\mathcal{E}(z, \zeta) = 0$) можно выразить через другие (независимые почти всюду) дополнительные интегралы той же системы (формула (4.1.9)). Деформации интегрируемых гамильтонианов, анонсированные в [86], также

упоминаются в книгах [23] ([23, формула (4.18), с. 128]) и [99] ([99, замечание 2, с. 265]).

При отсутствии второго силового поля ($\beta = 0$) и наличии ненулевого параметра λ (параметра гиростатического момента) интегрируемость доказана В. В. Соколовым. Явное выражение дополнительного интеграла (на алгебре $e(3)$) содержится в работе [31]. В [64] дополнительный интеграл Соколова представлен в виде, удобном для исследования фазовой топологии в системе с двумя степенями свободы. Бигамильтоновы структуры интегрируемых деформаций волчка Ковалевской и интегрируемого случая Соколова получены в [172].

Для гамильтониана (4.1.4) дополнительные интегралы имеют следующий явный вид ([66], [89], [172], [68]):

$$\begin{aligned}
K &= Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda[(M_3 + \lambda)(M_1^2 + M_2^2) + 2\varepsilon_2(\alpha_3 M_1 + \beta_3 M_2)] \\
&\quad + \lambda\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2)M_3 + 2\lambda\varepsilon_1[\alpha_2 M_1^2 - \beta_1 M_2^2 - (\alpha_1 - \beta_2)M_1 M_2] - 2\lambda\varepsilon_1^2\omega_\gamma, \\
G &= \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3 + \lambda)\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\alpha^2\beta_2 + \beta^2\alpha_1) \\
&\quad + 2\varepsilon_1[\beta^2(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2) - \alpha^2(M_1\beta_3 - M_3\beta_1)] \\
&\quad + 2(\alpha \cdot \beta)[\varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) + \varepsilon_1(\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 + \beta_2 M_3 - \beta_3 M_2)].
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1 - \beta_2) \\
&\quad + \varepsilon_1[M_3(\alpha_2 + \beta_1) - M_2\alpha_3 - M_1\beta_3] + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(\beta^2 - \alpha^2), \\
Z_2 &= M_1 M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) - \varepsilon_1[M_3(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_3 M_2 - \alpha_3 M_1] - \varepsilon_1^2(\alpha \cdot \beta), \\
\omega_\alpha &= M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3, \\
\omega_\beta &= M_1\beta_1 + M_2\beta_2 + M_3\beta_3, \\
\omega_\gamma &= M_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + M_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + M_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).
\end{aligned}$$

Функции K и G записаны таким образом, чтобы их можно было

сравнить с интегралами I_1 и I_2 из работы [35] или [95]. А именно, если положить значения параметров деформации $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 1$, то получаются выражения для I_1 и I_2 ([35, формула (5), с. 57]).

Укажем явное выражение алгебраической кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$ ([66], [68]):

$$\mathcal{E}(z, \zeta) : d_4 \zeta^4 + d_2 \zeta^2 + d_0 = 0, \quad (4.1.8)$$

где

$$\begin{aligned} d_4 &= -z^4 - \varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2)z^2 - \varepsilon_1^4[\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2], \\ d_2 &= 2z^6 + [\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2) - h - \lambda^2]z^4 + [\varepsilon_2^2(\alpha^2 + \beta^2) - \varepsilon_1^2g]z^2 \\ &\quad + 2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2[\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2], \\ d_0 &= -z^8 + hz^6 + f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}z^4 + \varepsilon_2^2gz^2 - \varepsilon_2^4[\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2]. \end{aligned}$$

Коэффициент $f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ при z^4 , как отмечалось выше, всегда является первым интегралом. Нам удалось выразить коэффициент $f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ через казимирские α^2 , β^2 и другие (независимые почти всюду) дополнительные интегралы (4.1.7) той же системы:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &= \varepsilon_1^2g + k - \varepsilon_1^4(\alpha \cdot \beta)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2)h + \varepsilon_1^4(\alpha^2 - \beta^2)^2] - \varepsilon_2^2(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

где h , g и k – постоянные первых интегралов (4.1.4) и (4.1.7).

Как показано в [149], [88], [173] без ограничения общности можно считать векторы α и β взаимно ортогональными, причем $|\alpha| > |\beta|$. Тогда геометрические интегралы, порождаемые функциями Казимира, запишутся в виде

$$|\alpha|^2 = a^2, \quad |\beta|^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = 0, \quad (a > b > 0). \quad (4.1.10)$$

Тот факт, что любая задача о движении твердого тела в двух постоянных полях может быть сведена к задаче, в которой одна из пар r_1, r_2

или α, β ортонормирована, известен из [99]. *Одновременная* ортогонализация обеих пар, предложенная в [149] для твердого тела и в [88] для гиростата, существенно упрощает дальнейшие вычисления

Задача о движении обобщенного гиростата относится к интегрируемым гамильтоновым системам с тремя степенями свободы. Особую роль в изучении фазовой топологии таких систем играют критические подсистемы. Понятие критической подсистемы сформировалось в работах М. П. Харламова при исследовании фазовой топологии неприводимых систем с тремя степенями свободы [87, 160]. Идея критической подсистемы состоит в следующем.

Определим интегральное отображение

$$\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

полагая $\mathcal{F}(x) = \{g = G(x), k = K(x), h = H(x)\}$. Отображение \mathcal{F} принято называть *отображением момента*. Обозначим через \mathcal{C} совокупность всех критических точек отображения момента, т.е. точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 3$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^3$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Пусть

$$\mathcal{L}(h, k, g) = 0 \tag{4.1.11}$$

уравнение двумерной поверхности $\Pi_{\mathcal{L}}$, которое содержит один из листов бифуркационной диаграммы Σ отображения \mathcal{F} .

Определим функцию

$$\Phi_{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \circ \mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}. \tag{4.1.12}$$

Критической подсистемой $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ называется замыкание множества критических точек ранга 2, которое принадлежит нулевому уровню интеграла $\Phi_{\mathcal{L}}$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ является инвариантным подмножеством в \mathcal{P} , со-

стоящим из критических точек отображения \mathcal{F} . Критическая подсистема $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ задается системой уравнений

$$\Phi_{\mathcal{L}} = 0, \quad d\Phi_{\mathcal{L}} = 0. \quad (4.1.13)$$

Напомним один общий факт из симплектической геометрии [162].

Лемма 4. Пусть подмногообразие \mathcal{M} симплектического многообразия \mathcal{P} задается системой независимых уравнений вида

$$f_1 = 0, f_2 = 0. \quad (4.1.14)$$

Тогда 2-форма на \mathcal{M} , индуцированная симплектической структурой из \mathcal{P} , вырождается в точности на множестве

$$\{f_1, f_2\} = 0.$$

Поскольку критические подсистемы обычно описываются системой уравнений вида (4.1.14), то индуцированная симплектическая структура вырождается на множестве коразмерности 1. В этом случае такие системы называются *почти гамильтоновыми*.

Приведем также полезный инструмент для того, чтобы выяснить, будет ли совместный уровень двух функций (4.1.14) состоять из критических точек отображения момента \mathcal{F} [161].

Лемма 5. Рассмотрим систему уравнений (4.1.14) в области \mathcal{W} , открытой в \mathcal{P} . Пусть X – векторное поле на \mathcal{P} , соответствующее (4.1.3) и пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{W}$ определено системой (4.1.14). Предположим, что

- (i) f_1, f_2 – гладкие функции, независимые на \mathcal{M} ;
 - (ii) $Xf_1 = 0, Xf_2 = 0$ на \mathcal{M} ;
 - (iii) скобка Пуассона $\{f_1, f_2\}$ почти всюду на \mathcal{M} отлична от нуля.
- Тогда \mathcal{M} состоит из критических точек отображения \mathcal{F} .

Сформулированные утверждения 4 и 5 будут использоваться при дальнейшем изложении.

Цель настоящей главы — предъявить новые инвариантные четырехмерные подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы.

4.2. Как можно получить уравнения поверхностей $\Pi_{\mathcal{L}}$?

В данном разделе мы покажем, что уравнения поверхностей вида (4.1.11) (неявные или параметрические) можно получить как дискриминантные множества некоторых многочленов, исходя из особенностей алгебраической кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$, ассоциированной с представлением Лакса.

Кривую (4.1.8) можно рассматривать как нулевой уровень отображения $\mathcal{E} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3(g, k, h)$ множество значений констант, на котором кривая \mathcal{E} имеет особенности (с точки зрения гладкой структуры).

Как показывает опыт исследования интегрируемых систем [87], [51]

$$\Sigma \subset \tilde{\Sigma},$$

причем бифуркационное множество Σ выделяется требованием вещественности исходных переменных. В свою очередь, множество $\tilde{\Sigma}$ состоит из таких значений (g, k, h) , при которых в конечных точках имеет решение система

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{E}(z, \zeta) = 0. \quad (4.2.1)$$

Для алгебраической кривой (4.1.8) система (4.2.1) равносильна совокупности двух систем

$$d_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} d_0 = 0 \quad (4.2.2)$$

и

$$\mathcal{D} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{D} = 0, \quad (4.2.3)$$

где $\mathcal{D} = d_2^2 - 4d_4d_0$.

Системы (4.2.2) и (4.2.3) можно рассматривать в пространстве констант первых интегралов как поверхности кратных корней многочленов $d_0 = d_0(z)$ и $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z)$.

Полагая $t = z^2$ в (4.2.2), представим первую дискриминантную поверхность в параметрическом виде

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{ht^2 - 2t^3}{\varepsilon_2^2} + \frac{2\varepsilon_2^2(a^2b^2 - c^2)}{t}, \\ k(t) &= 3t^2 - 2ht + \frac{\varepsilon_1^2(2t^3 - ht^2)}{\varepsilon_2^2} + \frac{\varepsilon_2^2(c^2 - a^2b^2)(2\varepsilon_1^2t + \varepsilon_2^2)}{t^2} \\ &\quad + \frac{1}{4}\{h^2 + 2\varepsilon_1^2(a^2 + b^2)h + \varepsilon_1^4[(a^2 - b^2)^2 + 4c^2] + 4\varepsilon_2^2(a^2 + b^2)\}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Если исключить параметр t из системы (4.2.4) и подставить в полученное уравнение параметр деформации ε_2 равным нулю, в результате параметрически заданная поверхность (4.2.4) распадется на три поверхности:

$$\varepsilon_1^2g + k - \varepsilon_1^4c^2 - \frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon_1^2(a^2 + b^2)h + \varepsilon_1^4(a^2 - b^2)^2] = 0, \quad (4.2.5)$$

$$4k - \varepsilon_1^2\{2h(a^2 + b^2) - 4g + \varepsilon_1^2[4c^2 + (a^2 - b^2)^2]\} = 0 \quad (4.2.6)$$

и

$$\begin{aligned} &4(c^2 - a^2b^2)k + [abh + g + \varepsilon_1^2ab(a + b)^2][abh - g + \varepsilon_1^2ab(a - b)^2] - \\ &- 4\varepsilon_1^4c^4 - \{h^2 + 2\varepsilon_1^2[h(a^2 + b^2) - 2g] + \varepsilon_1^4[(a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2]\}c^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Рассмотрим вторую систему (4.2.3) в области $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus 0$ и определим новую переменную s как решение следующего квадратного уравнения

$$s^2 - 2\{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h + \lambda^2] + 2\varepsilon_2^2\}s + 4\lambda^2\varepsilon_1^6(a^2 + b^2) + 8\lambda^2\varepsilon_1^4z^2 = 0.$$

Тогда параметрические уравнения другой дискриминантной поверхности относительно h, k, g имеют вид

$$\begin{aligned} g(s) &= -\frac{\varepsilon_1^4\lambda^2[(a^2 - b^2)^2 + 4c^2]}{s} - \frac{\{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h + \lambda^2] + 2\varepsilon_2^2\}}{8\varepsilon_1^8\lambda^2}s^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}\frac{s^3}{\lambda^2\varepsilon_1^8} + \frac{1}{2}\{\varepsilon_1^2[(a^2 - b^2)^2 + 4c^2] + (a^2 + b^2)(h + \lambda^2)\}, \\ k(s) &= \frac{\varepsilon_1^8\lambda^4[(a^2 - b^2)^2 + 4c^2]}{s^2} + \frac{\{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h + \lambda^2] + 2\varepsilon_2^2\}}{2\varepsilon_1^4}s \\ &\quad - \frac{3}{16}\frac{s^2}{\varepsilon_1^4} - \frac{1}{2}\lambda^2\left[2\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h + \frac{\lambda^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Если теперь исключить параметр s из системы (4.2.8) и в полученное уравнение положить равным нулю параметр гиростатического момента λ , сохранив отличными от нуля параметры деформаций ε_1 и ε_2 , то параметрически заданная поверхность (4.2.8) также, как и (4.2.4), распадется на три поверхности:

$$k = 0, \tag{4.2.9}$$

$$\{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h] + 2\varepsilon_2^2\}^2 - 4\varepsilon_1^4k = 0, \tag{4.2.10}$$

и

$$\{\varepsilon_1^2[(a^2 - b^2)^2 + 4c^2] + (a^2 + b^2)h - 2g\}^2 - 4[(a^2 - b^2)^2 + 4c^2]k = 0. \tag{4.2.11}$$

4.3. Новые инвариантные соотношения при отсутствии линейного потенциала и наличии гироскопических сил

В данном разделе, в задаче о движении обобщенного двухполевого гиростата мы предполагаем наличие только гироскопических сил, а линейный потенциал отсутствует. Исходя из уравнений дискриминантных двумерных поверхностей $\Pi_{\mathcal{L}_1}$ и $\Pi_{\mathcal{L}_2}$, определенных соотношениями (4.2.5) и (4.2.6), будут предъявлены новые инвариантные почти всюду четырехмерные подмногообразия $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_2}$, на которых индуцированные динамические системы являются почти всюду гамильтоновыми с двумя степенями свободы.

Рассмотрим функции

$$\mathcal{L}_1(h, k, g) = \varepsilon_1^2 g + k - \varepsilon_1^4 c^2 - \frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon_1^2(a^2 + b^2)h + \varepsilon_1^4(a^2 - b^2)^2] \quad (4.3.1)$$

и

$$\mathcal{L}_2(h, k, g) = 4k - \varepsilon_1^2\{2h(a^2 + b^2) - 4g + \varepsilon_1^2[4c^2 + (a^2 - b^2)^2]\}. \quad (4.3.2)$$

Эти функции определяют уравнения двумерных поверхностей $\Pi_{\mathcal{L}_1}$ и $\Pi_{\mathcal{L}_2}$ вида (4.1.11). Выбор функций $\mathcal{L}_i(h, k, g)$ подсказан уравнениями (4.2.5) и (4.2.6).

Следуя (4.1.12), определим соответствующие интегралы $\Phi_{\mathcal{L}_1}$ и $\Phi_{\mathcal{L}_2}$ формулами

$$\Phi_{\mathcal{L}_1} = \varepsilon_1^2 G + K - \varepsilon_1^4(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \frac{1}{4}[H^2 + 2\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2)H + \varepsilon_1^4(\boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\beta}^2)^2], \quad (4.3.3)$$

и

$$\Phi_{\mathcal{L}_2} = 4K - \varepsilon_1^2\{2H(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2) - 4G + \varepsilon_1^2[4(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + (\boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\beta}^2)^2]\}. \quad (4.3.4)$$

Предложение 19. Интеграл $\Phi_{\mathcal{L}_1}$ в \mathcal{P} можно представить в виде произве-

дения двух функций F_1 и F_2 , т.е.

$$\Phi_{\mathcal{L}_1} = F_1 \cdot F_2,$$

где

$$F_1 = M_3 + \lambda + \varepsilon_1(\beta_1 - \alpha_2), \quad (4.3.5)$$

$$F_2 = M_3^3 + [\varepsilon_1(\beta_1 - \alpha_2) + \lambda]M_3^2 + [M_1^2 + M_2^2 + 2\varepsilon_1(\alpha_3M_2 - \beta_3M_1)]M_3 + \\ + [(M_2^2 - M_1^2)(\alpha_2 + \beta_1) + 2M_1M_2(\alpha_1 - \beta_2)]\varepsilon_1 + \lambda(M_1^2 + M_2^2). \quad (4.3.6)$$

Замечание 14. Для уравнений Кирхгофа на алгебре $e(3)$ и уравнений Пуанкаре на $so(4)$ дополнительный интеграл также имеет вид произведения двух функций [31, 145], [32].

Теорема 35. Нулевой уровень каждой из функций (4.3.5), (4.3.6) определяет в \mathcal{P} инвариантное пятимерное многообразие.

Доказательство. Найдем в силу (4.1.3) производные от каждой из функций (4.3.5), (4.3.6).

$$\begin{pmatrix} \dot{F}_1 \\ \dot{F}_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad U = \begin{pmatrix} 2\varepsilon_1(\alpha_1 + \beta_2) & 0 \\ 0 & -2\varepsilon_1(\alpha_1 + \beta_2) \end{pmatrix}. \quad (4.3.7)$$

Из (4.3.7) следует, что каждое из уравнений $F_k = 0, k = 1, 2$ задает в \mathcal{P} инвариантное пятимерное многообразие. \square

Инвариантные пятимерные подмногообразия не являются критическими точками ранга 2 отображения момента \mathcal{F} , поэтому мы будем рассматривать совместную систему уравнений, заданную соотношениями

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (4.3.8)$$

Система (4.3.8) определяет в \mathcal{P} инвариантное четырехмерное подмногообразие $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$ и является критической подсистемой нулевого уровня интеграла $\Phi_{\mathcal{L}_1}$, поскольку справедливы соотношения

$$\Phi_{\mathcal{L}_1} = 0, \quad d\Phi_{\mathcal{L}_1} = F_1 dF_2 + F_2 dF_1 = 0.$$

Теорема 36. Функция

$$\begin{aligned} F_0 = & 2\varepsilon_1\{-(\beta_2 + \alpha_1)M_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2)[\varepsilon_1(\beta_1 - \alpha_2) + \lambda]M_3 - \\ & -\alpha_1M_1^2 - \beta_2M_2^2 - (\alpha_2 + \beta_1)M_1M_2 + [\varepsilon_1(2\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3) + \lambda\alpha_3]M_1 - \\ & -[\varepsilon_1(2\beta_2\alpha_3 - \beta_1\beta_3 - \alpha_2\beta_3) - \lambda\beta_3]M_2\} \end{aligned}$$

является первым интегралом на подмногообразии $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$, заданном уравнениями (4.3.8).

Доказательство. В силу системы (4.3.8) имеем:

$$\dot{F}_0 = \{H, F_0\} = 0.$$

□

Заметим, что

$$\{F_1, F_2\} = F_0.$$

Поэтому нулевой уровень интеграла F_0 , т.е. уравнение $F_0 = 0$, является множеством точек коразмерности 1 вырождения 2-формы на $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$. Множество вырождения симплектической структуры на $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$ задается системой уравнений:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (4.3.9)$$

Одно из решений системы уравнений (4.3.9) является множество

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)[\lambda - \varepsilon_1(\alpha_2 - \beta_1)]}{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}, \\ M_2 &= \frac{(\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3)[\lambda - \varepsilon_1(\alpha_2 - \beta_1)]}{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}, \\ M_3 &= \varepsilon_1(\alpha_2 - \beta_1) - \lambda, \end{aligned}$$

которое удовлетворяет системе

$$G = 0, \quad K = \varepsilon_1^4(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \frac{1}{4}[H^2 + 2\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2)H + \varepsilon_1^4(\boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\beta}^2)^2].$$

Соответствующие значения первых интегралов

$$g = 0, \quad k = \varepsilon_1^4 c^2 + \frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon_1^2(a^2 + b^2)h + \varepsilon_1^4(a^2 - b^2)^2]$$

отвечают точкам касания поверхностей (4.2.5) и (4.2.7).

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 37. *Критическая подсистема $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$, заданная соотношениями (4.3.8), определяет в \mathcal{P} почти всюду четырехмерное подмногообразие и индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. В качестве независимых интегралов можно взять гамильтониан H и функцию F_0 .*

Отметим также, что множество $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$, заданное соотношениями (4.3.8), в силу леммы (5) состоит из критических точек ранга 2 отображения момента \mathcal{F} .

Рассмотрим теперь при условии $\varepsilon_2 = 0$ другое четырехмерное подмногообразие $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_2}$ в \mathcal{P} , заданное системой уравнений

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0. \quad (4.3.10)$$

Последовательно находим

$$\dot{M}_1 = \{H, M_1\} = -2\varepsilon_1\beta_2 M_1 + [2M_3 + 2\lambda + 2\varepsilon_1(\beta_1 - \alpha_2) + 2\varepsilon_1\alpha_2]M_2,$$

$$\dot{M}_2 = \{H, M_2\} = [-2M_3 - 2\lambda - 2\varepsilon_1(\beta_1 - \alpha_2) + 2\varepsilon_1\beta_1]M_1 - 2\varepsilon_1\alpha_1 M_2,$$

$$\{M_1, M_2\} = M_3.$$

В силу (4.3.10) имеем

$$\dot{M}_1 = \dot{M}_2 = 0.$$

Таким образом, используя лемму 5, множество $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_2}$, заданное системой уравнений (4.3.10), также является почти всюду четырехмерным инвариантным подмногообразием в \mathcal{P} и состоит из критических точек отображения момента \mathcal{F} .

В силу соотношений (4.3.10) непосредственно проверяется справедливость следующих уравнений

$$\Phi_{\mathcal{L}_2} = 0, \quad d\Phi_{\mathcal{L}_2} = 0.$$

Откуда следует, что $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_2}$ является критической подсистемой нулевого уровня интеграла $\Phi_{\mathcal{L}_2}$. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 38. *Критическая подсистема $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_2}$, заданная соотношениями (4.3.10), определяет в \mathcal{P} почти всюду инвариантное четырехмерное подмногообразие и индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы.*

Системы инвариантных соотношений (4.3.8) и (4.3.10) можно использовать при вычислении типа критической точки x_0 ранга 2 в интегрируемой системе с тремя степенями свободы в смысле определения [26]. Знание типа критической точки интегрируемой системы отвечает и на все вопросы, связанные с характером устойчивости проходящей через нее траектории.

Рассмотрим первый интеграл $\Phi_{\mathcal{L}}$, который обладает свойством $d\Phi_{\mathcal{L}}(x_0) = 0$ и $d\Phi_{\mathcal{L}} \neq 0$ в окрестности некоторой точки $x_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Тогда, в частности, точка x_0 оказывается неподвижной для гамильтонова поля $\text{sgrad } \Phi_{\mathcal{L}}$ и можно вычислить линеаризацию этого поля в точке x_0 — симплектический оператор $A_{\Phi_{\mathcal{L}}}$ в шестимерном касательном пространстве к фазовому пространству в точке x_0 . Этот оператор будет иметь четыре нулевых собственных числа, оставшийся сомножитель характеристического многочлена имеет вид $\mu^2 - C_{\Phi_{\mathcal{L}}}$. При $C_{\Phi_{\mathcal{L}}} < 0$ получим точку типа

“центр” (соответствующий двумерный тор – эллиптический, является устойчивым многообразием в фазовом пространстве, пределом concentрического семейства трехмерных регулярных торов), а при $C_F > 0$ получим точку типа “седло” (соответствующий двумерный тор – гиперболический, существуют движения, асимптотические к этому тору, лежащие на трехмерных сепаратрисных поверхностях).

В нашем случае ситуация осложнена тем, что фазовое пространство задано в \mathbb{R}^9 тремя неявными уравнениями (4.1.10) и вычислять ограничения операторов на касательные пространства затруднительно. Однако функции в левых частях уравнений (4.1.10) служат функциями Казимира для естественного продолжения на \mathbb{R}^9 скобки Пуассона симплектической структуры пространства \mathcal{P} , поэтому при вычислении симплектических операторов вида $A_{\Phi_{\mathcal{L}}}$ они лишь добавят три нулевых корня в характеристический многочлен, имеющий в целом девятую степень. Таким образом, мы заранее знаем, что при условии $\text{sgrad } \Phi_{\mathcal{L}} = 0$ искомый коэффициент $C_{\Phi_{\mathcal{L}}}$ есть коэффициент при μ^7 в характеристическом многочлене $Z_{\Phi_{\mathcal{L}}}(\mu)$ оператора $A_{\Phi_{\mathcal{L}}}$ в \mathbb{R}^9 . Предложенный в [65] метод вычисления характеристического многочлена приводит к уравнению:

$$Z_{\Phi_{\mathcal{L}}}(\mu) = -\mu^7(\mu^2 - C_{\Phi_{\mathcal{L}}}),$$

где

$$C_{\Phi_{\mathcal{L}}} = \frac{1}{2} \text{trace}(A_{\Phi_{\mathcal{L}}}^2).$$

Сам же оператор $A_{\Phi_{\mathcal{L}}}$ вычисляется и при наличии вырожденных скобок Пуассона (для рассматриваемого здесь пространства \mathbb{R}^9 они определены явно формулами (4.1.5)).

Теорема 39. *В точках критической подсистемы $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$ коэффициент характеристического многочлена $C_{\Phi_{\mathcal{L}_1}}$ определяется формулой*

$$C_{\Phi_{\mathcal{L}_1}} = f_0^2,$$

где через f_0 обозначена постоянная дополнительного интеграла F_0 .

Таким образом, любой двумерный тор $\{(M, \alpha, \beta) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} : H = h, F_0 = f_0\}$ имеет гиперболический тип за исключением, когда постоянная дополнительного интеграла f_0 обращается в нуль.

Теорема 40. В точках критической подсистемы $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_2}$ коэффициент характеристического многочлена $C_{\Phi_{\mathcal{L}_2}}$ определяется выражением

$$C_{\Phi_{\mathcal{L}_2}} = 16h[h(a^2 + b^2) - 2g].$$

Коэффициент $C_{\Phi_{\mathcal{L}_2}}$ обращается в нуль в точках касания поверхностей (4.2.6) и (4.2.8), если положить в уравнение поверхности (4.2.8) параметр деформации ε_2 равным нулю. Таким образом, точки критической подсистемы $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_2}$ имеют как эллиптический тип ($C_{\Phi_{\mathcal{L}_2}} < 0$), так и гиперболический ($C_{\Phi_{\mathcal{L}_2}} > 0$) тип.

Если параметры деформаций ε_1 и ε_2 отличны от нуля, а параметр гиростатического момента λ равен нулю, соответствующие поверхности, заданные соотношениями (4.2.9) и (4.2.10), также порождают инвариантные почти всюду четырехмерные подмногообразия. В следующих разделах 4.4 и 4.5 мы укажем явные уравнения этих четырехмерных подмногообразий. Особый интерес может представлять задача определения инвариантных соотношений, отвечающей параметрически заданной поверхности (4.2.8), для которой параметры деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и параметр гиростатического момента λ отличны нуля.

4.4. Первая система – обобщение интегрируемого случая Богоявленского в динамике твердого тела

При отсутствии постоянного гиросtatического момента (параметр λ равен нулю) дополнительные интегралы (4.1.7) принимают вид:

$$\begin{aligned} K &= Z_1^2 + Z_2^2, \\ G &= \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2M_3\omega_\gamma - 2\alpha^2\beta_2 - 2\beta^2\alpha_1 + \\ &+ 2\varepsilon[\alpha^2(M_3\beta_1 - M_1\beta_3) + \beta^2(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2)], \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \alpha_1 - \beta_2 + \varepsilon(M_3\alpha_2 - M_2\alpha_3 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3) - \frac{1}{2}\varepsilon^2(\alpha^2 - \beta^2), \\ Z_2 &= M_1M_2 + \alpha_2 + \beta_1 + \varepsilon(M_1\alpha_3 - M_3\alpha_1 + M_3\beta_2 - M_2\beta_3). \end{aligned}$$

Здесь и далее для краткости положили $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon_2 = 1$.

Рассмотрим фазовое пространство \mathcal{P} , задаваемое уравнениями (4.1.10).

Предложение 20. Система соотношений

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0 \quad (4.4.2)$$

определяет инвариантное четырехмерное подмногообразие \mathcal{M}_1 фазового пространства \mathcal{P} уравнений (4.1.3) с гамильтонианом

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - 2(\alpha_1 + \beta_2) + 2\varepsilon(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3) \quad (4.4.3)$$

Доказательство. Действительно, с учетом (4.1.10) и (4.4.2) имеем:

$$\dot{Z}_1 = \{H, Z_1\} = 4M_3Z_2 = 0, \quad \dot{Z}_2 = \{H, Z_2\} = -4M_3Z_1 = 0.$$

□

Предложение 21. Функция

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \{Z_1, Z_2\} = \\
 &= [M_1^2 + M_2^2 + 2\varepsilon^2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - \varepsilon^2(a^2 + b^2)]M_3 + 2(M_1\alpha_3 + M_2\beta_3) + \\
 &+ 2\varepsilon^2[M_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) - M_2(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)] + \\
 &+ 2\varepsilon[M_1M_2(\alpha_1 - \beta_2) - M_1^2\alpha_2 + M_2^2\beta_1]
 \end{aligned}$$

является первым интегралом на подмногообразии \mathcal{M}_1 , заданном уравнениями (4.4.2).

Доказательство. Действительно, в силу тождества Якоби, правила Лейбница и уравнений (4.4.2), находим:

$$\dot{F}_0 = \{H, F_0\} = \{H, \{Z_1, Z_2\}\} = 4Z_1\{M_3, Z_1\} + 4Z_2\{M_3, Z_2\} = 0.$$

□

Отметим, что система уравнений (4.4.2) является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая Богоявленского в динамике твердого тела [34, формула (6.6), с. 904].

В точках подмногообразия \mathcal{M}_1 непосредственно проверяется справедливость следующего тождества, которое является обобщением соответствующей формулы работы [157]:

$$\{2 + \varepsilon^2[\varepsilon^2(\alpha^2 + \beta^2) + H]\}[(\alpha^2 + \beta^2)H - 2G + \varepsilon^2(\alpha^2 - \beta^2)^2] - F_0^2 = 0.$$

Перечислим формально (без условия существования) все положения равновесия $c_i(M, \alpha, \beta)$ и их образы P_i в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$. Положения равновесия являются особенностями ранга 0 отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$, порождаемого первыми интегралами (4.4.1), (4.4.3). Особенности ранга 0 образуют нульмерный остов Σ_0 бифуркационной диаграммы Σ (образа

множества критических значений отображения момента):

$$c_{1,2} = \left(0, \mp \frac{\sqrt{a^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, 0, \frac{1}{\varepsilon^2}, 0, \pm \frac{\sqrt{a^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2}, 0, b, 0 \right),$$

$$P_{1,2} = \left(-\frac{1 + a^2\varepsilon^4 + 2b\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \frac{(b\varepsilon^2 - 1)^4}{4\varepsilon^4}, -\frac{b(b + a^2b\varepsilon^4 + 2a^2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right),$$

$$c_{3,4} = \left(0, \mp \frac{\sqrt{a^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, 0, \frac{1}{\varepsilon^2}, 0, \pm \frac{\sqrt{a^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2}, 0, -b, 0 \right),$$

$$P_{3,4} = \left(-\frac{1 + a^2\varepsilon^4 - 2b\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \frac{(b\varepsilon^2 + 1)^4}{4\varepsilon^4}, -\frac{b(b + a^2b\varepsilon^4 - 2a^2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right),$$

$$c_{5,6} = \left(\pm \frac{\sqrt{b^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, 0, 0, a, 0, 0, 0, \frac{1}{\varepsilon^2}, \pm \frac{\sqrt{b^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2} \right),$$

$$P_{5,6} = \left(-\frac{1 + b^2\varepsilon^4 + 2a\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \frac{(a\varepsilon^2 - 1)^4}{4\varepsilon^4}, -\frac{a(a + ab^2\varepsilon^4 + 2b^2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right),$$

$$c_{7,8} = \left(\pm \frac{\sqrt{b^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, 0, 0, -a, 0, 0, 0, \frac{1}{\varepsilon^2}, \pm \frac{\sqrt{b^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2} \right),$$

$$P_{7,8} = \left(-\frac{1 + b^2\varepsilon^4 - 2a\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \frac{(a\varepsilon^2 + 1)^4}{4\varepsilon^4}, -\frac{a(a + ab^2\varepsilon^4 - 2b^2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right),$$

$$c_{9,10,11,12} = (\mathbf{0}, \pm a, 0, 0, 0, \pm b, 0),$$

$$P_{9,10,11,12} = \left(\mp 2(a \pm b), \frac{1}{4}(a \mp b)^2[\varepsilon^2(a \pm b) - 2]^2, \mp 2ab(a \pm b) \right),$$

$$c_{13-16} = \left(0, \mp \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}, \mp \frac{\sqrt{b^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon^2}, \mp \frac{\sqrt{b^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2}, \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{a^2 - b^2}, \pm \frac{\sqrt{b^2\varepsilon^4 - 1}}{\varepsilon^2}, \frac{1}{\varepsilon^2}, 0 \right),$$

$$P_{13-16} = \left(-\frac{\varepsilon^4(a^2 + b^2) + 2}{\varepsilon^2}, 0, -\frac{a^2 + b^2 + 2a^2b^2\varepsilon^4}{\varepsilon^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
c_{17,18} &= \left(0, 0, \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a+b)^2 - 4}}{2\varepsilon}, \frac{2a}{\varepsilon^2(a+b)}, \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a+b)^2 - 4a}}{(a+b)\varepsilon^2}, 0, \mp \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a+b)^2 - 4b}}{(a+b)\varepsilon^2}, \frac{2b}{\varepsilon^2(a+b)}, 0 \right), \\
P_{17,18} &= \left(-\frac{\varepsilon^4(a+b)^2 + 4}{2\varepsilon^2}, 0, -\frac{[\varepsilon^4(a+b)^2 + 4]ab}{2\varepsilon^2} \right), \\
c_{19,20} &= \left(0, 0, \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a-b)^2 - 4}}{2\varepsilon}, \frac{2a}{\varepsilon^2(a-b)}, \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a-b)^2 - 4a}}{(a-b)\varepsilon^2}, 0, \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^4(a-b)^2 - 4b}}{(a-b)\varepsilon^2}, -\frac{2b}{\varepsilon^2(a-b)}, 0 \right), \\
P_{19,20} &= \left(-\frac{\varepsilon^4(a-b)^2 + 4}{2\varepsilon^2}, 0, \frac{[\varepsilon^4(a-b)^2 + 4]ab}{2\varepsilon^2} \right).
\end{aligned}$$

При $\varepsilon > \max\{\frac{1}{\sqrt{b}}; \sqrt{\frac{2}{a-b}}\}$ подмногообразие \mathcal{M}_1 содержит положения равновесия c_{13-20} . Наличие особенностей ранга 0 в системе \mathcal{M}_1 и их аналитическая классификация по типу позволяет применить метод круговых молекул для анализа бифуркаций торов Лиувилля и построения инварианта Фоменко-Цишанга [129], [133]. Соответствующая бифуркационная диаграмма Σ_1 отображения момента $\mathcal{F}_1 = H \times F_0$ изображена на рис. 4.2. Здесь же указаны бифуркации торов Лиувилля.

На рис. 4.3 приведена “предельная” бифуркационная диаграмма.

При указанных значениях параметра деформации ε параметризацию бифуркационной диаграммы Σ_1 явно можно описать следующим образом:

$$\delta_1 : \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2t) - \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{\varepsilon^2[\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)} - t^2] - t \times} \\ \quad \times \sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}(\sqrt{a^2 - t^2} + \sqrt{b^2 - t^2}), \\ t \in [-\frac{1}{\varepsilon^2}; 0), \end{cases}$$

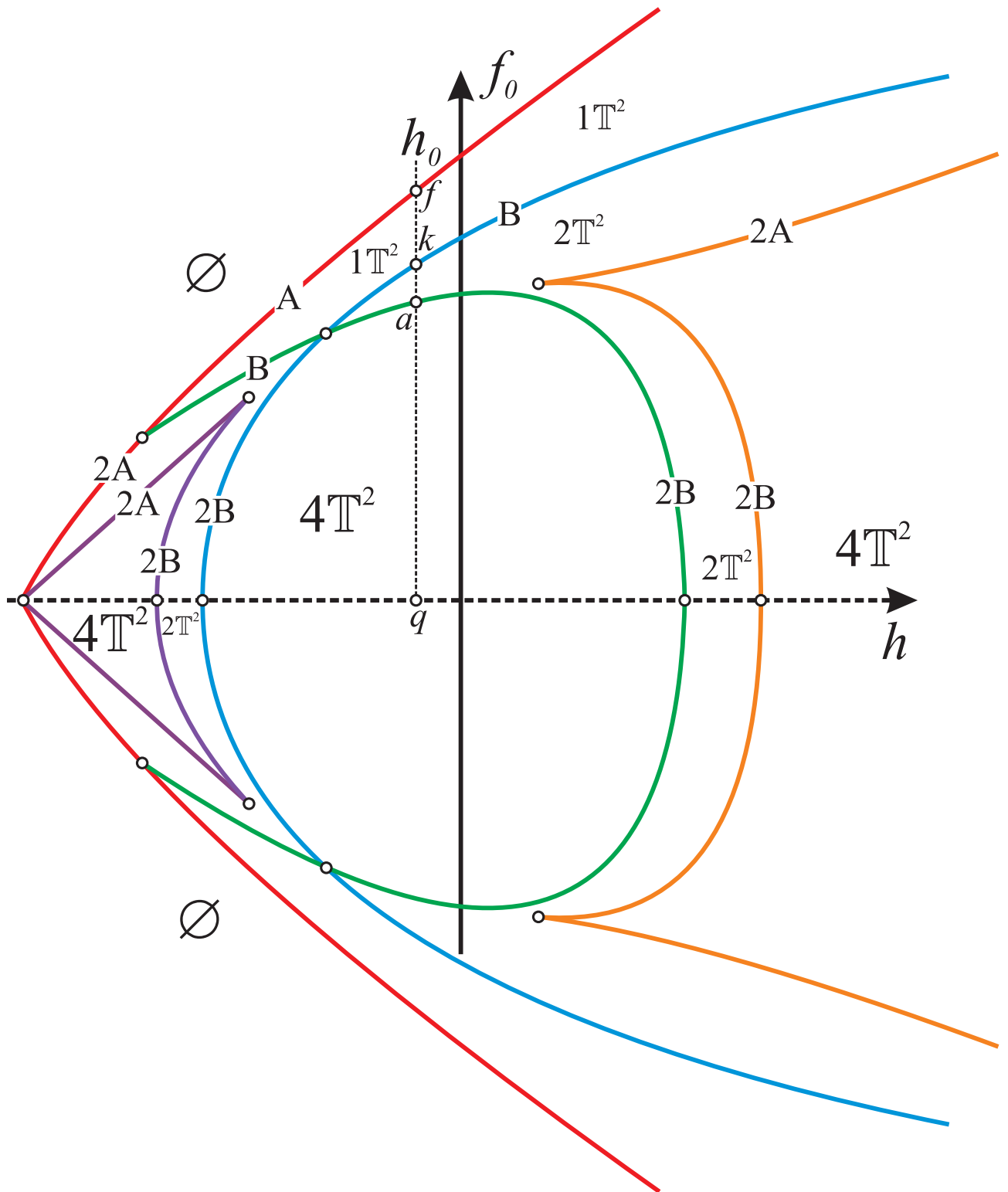


Рис. 4.2. Бифуркационная диаграмма Σ_1 отображения момента $\mathcal{F}_1 = H \times F_0$.

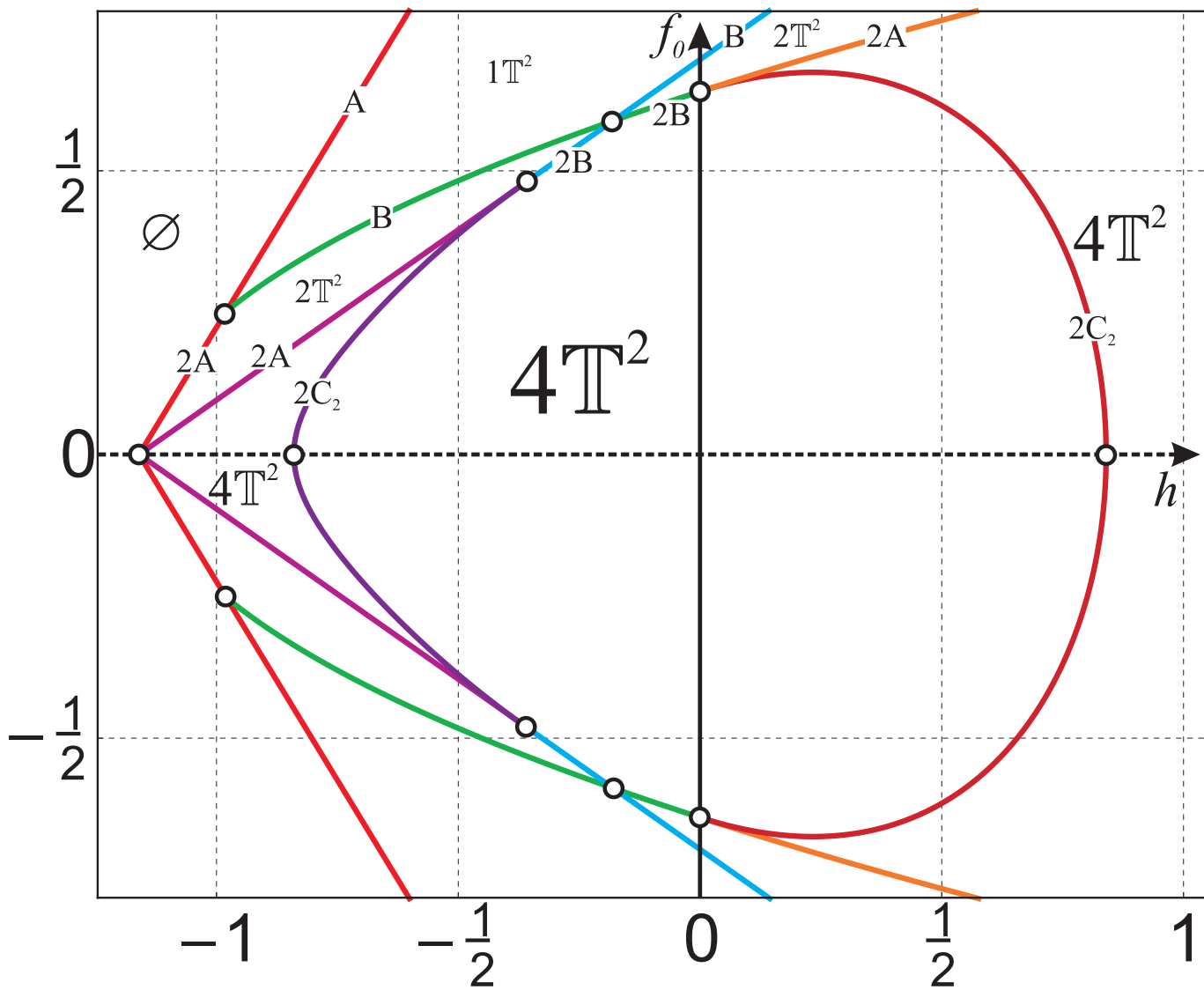


Рис. 4.3. “Предельная” бифуркационная диаграмма.

$$\delta_2 : \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2t) + \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{\varepsilon^2[\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)} + t^2] + t \times} \\ \quad \times \sqrt[4]{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}(\sqrt{a^2 - t^2} - \sqrt{b^2 - t^2}), \\ t \in [-b; -\frac{1}{\varepsilon^2}], \end{cases}$$

$$\delta_3 : \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2t) - \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{\varepsilon^2[t^2 - \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}] + t \times} \\ \quad \times \sqrt[4]{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}(\sqrt{t^2 - a^2} - \sqrt{t^2 - b^2}), \\ t \in [t_0; -a]. \end{cases}$$

Здесь через t_0 обозначено выражение

$$t_0 = -\frac{1}{8\varepsilon^2}[4 + \varepsilon^4(a + b)^2 + \sqrt{16 + 8(a^2 + b^2 - 6ab)\varepsilon^4 + (a + b)^4\varepsilon^8}].$$

$$\delta_4 : \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2t) + \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{\varepsilon^2[\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)} + t^2] + t \times} \\ \quad \times \sqrt[4]{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}(\sqrt{a^2 - t^2} - \sqrt{b^2 - t^2}), \\ t \in (0; b], \end{cases}$$

$$\delta_5 : \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2t) - \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}, \\ f_0 = \pm \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2t)\sqrt{\varepsilon^2[t^2 - \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}] + t \times} \\ \quad \times \sqrt[4]{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}(\sqrt{t^2 - b^2} - \sqrt{t^2 - a^2}), \\ t \in [a, +\infty). \end{cases}$$

4.5. Вторая система

По-прежнему, предполагаем $\lambda = 0$. Рассмотрим функциональное равенство, которое выполняется тождественно в точках фазового пространства \mathcal{P} :

$$\{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2) + H] + 2\varepsilon_2^2\}^2 - 4\varepsilon_1^4 K = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2, \quad (4.5.1)$$

где

$$Q_1 = 2\varepsilon_1[(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)\varepsilon_1^3 + (\alpha_2M_1 + \beta_2M_2 + \beta_3M_3)\varepsilon_1^2 - (M_1M_3 + \varepsilon_2\alpha_3)\varepsilon_1 - M_2\varepsilon_2],$$

$$Q_2 = 2\varepsilon_1[(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\varepsilon_1^3 + (\alpha_1M_1 + \beta_1M_2 + \alpha_3M_3)\varepsilon_1^2 + (M_2M_3 + \varepsilon_2\beta_3)\varepsilon_1 - M_1\varepsilon_2],$$

$$Q_3 = 2 \{ (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \varepsilon_1^4 + \varepsilon_1^3 (\beta_1 - \alpha_2) M_3 + [M_3^2 - \varepsilon_2 (\alpha_1 + \beta_2)] \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \}.$$

Выберем постоянные первых интегралов, удовлетворяющих соотношению

$$k = \frac{1}{4\varepsilon_1^4} \{ \varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h] + 2\varepsilon_2^2 \}^2.$$

Тогда соотношение (4.5.1) приводит к системе уравнений

$$Q_k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.5.2)$$

Отметим, что любые два уравнения системы (4.5.2) дают третье. Определим множество решений системы (4.5.2) как множество

$$\mathcal{M}_2 = \{ (M, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P} : V_1 = 0, \quad V_2 = 0 \}, \quad (4.5.3)$$

где

$$V_1 = M_1(\varepsilon_1^2\alpha_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1[M_2M_3 + \varepsilon_1(M_2\beta_1 + \alpha_3M_3) + \varepsilon_1^2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \varepsilon_2\beta_3],$$

$$V_2 = \varepsilon_1^2\beta_2(\varepsilon_1^2\alpha_1 - \varepsilon_2) + [\varepsilon_1^2M_3^2 - \varepsilon_1^3(\alpha_2 - \beta_1)M_3 - \varepsilon_2(\varepsilon_1^2\alpha_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_1^4\beta_1\alpha_2].$$

или, в симметричном виде,

$$V_1 = (\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2)(M_1 - \varepsilon_1 \beta_3) + \varepsilon_1(M_3 + \varepsilon_1 \beta_1)(M_2 + \varepsilon_1 \alpha_3),$$

$$V_2 = (\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1^2 \beta_2 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1^2(M_3 + \varepsilon_1 \beta_1)(M_3 - \varepsilon_1 \alpha_2).$$

Отметим, что если положить параметры деформации $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1$, то система, которая определяет M_2 , не имеет решений. Откуда следует, что не существует аналога данной системы для волчка Ковалевской в двойном поле. Система M_2 на самом деле существует уже при

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2} \leq a. \quad (4.5.4)$$

Ограничимся выбором параметра деформации $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon > \max\{\frac{1}{\sqrt{b}}; \sqrt{\frac{2}{a-b}}\}$. В этом случае системам (4.5.2), (4.5.3) удовлетворяют положения равновесия $c_1 - c_8$ и $c_{13} - c_{16}$. Исключим из рассмотрения указанные положения равновесия. Тогда имеет место

Предложение 22. Система соотношений (4.5.3) определяет инвариантное четырехмерное подмногообразие M_2 фазового пространства \mathcal{P} уравнений (4.1.3) с гамильтонианом (4.4.3).

Доказательство. Действительно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = \{H, V_1\} &= \frac{2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2)}(a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + V_1V_2), \\ \dot{V}_2 = \{H, V_2\} &= \frac{2\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2}(a_{21}V_1 + a_{22}V_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon_1^2(\varepsilon_1 \alpha_2 - M_3)[M_3 + \varepsilon_1(\beta_1 - \alpha_2)], \\ a_{12} &= -(\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2)M_1 - \varepsilon_1^2 \alpha_2(M_2 + \varepsilon_1 \alpha_3), \\ a_{21} &= \beta_3(\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \alpha_3(M_3 - \varepsilon_1 \alpha_2), \\ a_{22} &= -\alpha_3(M_2 + \varepsilon_1 \alpha_3). \end{aligned}$$

В силу (4.5.3) имеем: $\dot{V}_1 = 0, \dot{V}_2 = 0$. □

Предложение 23. Функция

$$F_1 = \frac{\sqrt{(\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_1^2 (\beta_1 \varepsilon_1 + M_3)^2}}{\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2} \times \quad (4.5.5)$$

$$\times [M_2 M_3 - \varepsilon_1 M_2 (\alpha_2 - \beta_1) + \varepsilon_1^2 \beta_1 \alpha_3 - \beta_3 (\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2)]$$

является первым интегралом на подмногообразии \mathcal{M}_2 , заданном уравнениями (4.5.3).

Доказательство. Действительно, в точках подмногообразия \mathcal{M}_2 справедливо равенство

$$\dot{F}_1 = \{H, F_1\} = 0.$$

□

Отметим важное тождество

$$\varepsilon_1^2 \{ \varepsilon_1^4 [G + 2\varepsilon_1^2 (a^2 b^2 - c^2)] - \varepsilon_2^2 H \} = 2\varepsilon_2^4 + \varepsilon_1^4 F_1^2. \quad (4.5.6)$$

Найдем скобку $\{V_1, V_2\}$:

$$\{V_1, V_2\} = -\varepsilon_1^2 \sqrt{(\varepsilon_1^2 \alpha_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_1^2 (\beta_1 \varepsilon_1 + M_3)^2} F_1. \quad (4.5.7)$$

Таким образом, вырождение симплектической структуры происходит как раз в точках нулевого уровня функции F_1 . Отсюда следует, что \mathcal{M}_2 является почти всюду гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. В качестве независимых почти всюду первых интегралов можно взять гамильтониан H и F_1 .

Систему инвариантных соотношений (4.5.3) можно использовать для определения типа критической точки x_0 ранга 2 в интегрируемой системе с тремя степенями свободы. Рассмотрим интеграл $\Phi_{\mathcal{L}}$ регулярный в окрестности точки $x_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, за исключением самой точки x_0 , $d\Phi_{\mathcal{L}}(x_0) = 0$. Его линеаризация есть симплектический оператор $A_{\Phi_{\mathcal{L}}}$. Характеристический многочлен имеет вид

$$Z_{\Phi_{\mathcal{L}}}(\mu) = (\mu^2 - C_{\Phi_{\mathcal{L}}}), \quad C_{\Phi_{\mathcal{L}}} = \frac{1}{2} \text{trace}(A_{\Phi_{\mathcal{L}}}^2).$$

Если $C_{\Phi_{\mathcal{L}}} < 0$, то мы получаем “эллиптический” тип точки (соответствующие двумерные торы являются устойчивыми многообразиями в фазовом пространстве и представляют собой предел концентрического семейства трехмерных регулярных торов). Если $C_{\Phi_{\mathcal{L}}} > 0$, то мы получаем “гиперболический” тип точки (соответствующие двумерные торы будут неустойчивые).

Покажем, что любой тор, который принадлежит совместной поверхности уровня $\{H = h, F_1 = f_1\}$, является эллиптическим (невырожденной особенностью ранга 2 эллиптического типа), кроме точек, где вырождается симплектическая структура. Для доказательства необходимо вычислить характеристический многочлен симплектического оператора $A_{\Phi_{\mathcal{L}}}$. Здесь интеграл $\Phi_{\mathcal{L}}$ определяется следующей формулой

$$\Phi_{\mathcal{L}} = \{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2) + H] + 2\varepsilon_2^2\}^2 - 4\varepsilon_1^4 K.$$

Характеристический многочлен симплектического оператора $A_{\Phi_{\mathcal{L}}}$ имеет явный вид:

$$\mu^2 + 128\varepsilon_1^8 f_1^2 \sqrt{k} = 0. \quad (4.5.8)$$

Здесь через f_1 и k обозначены постоянные дополнительного интеграла F_1 и общего интеграла K . Откуда и следует выше утверждение.

На рис. 4.4 изображены бифуркационная диаграмма Σ_2 отображения момента $\mathcal{F}_2 = H \times G$ и бифуркации торов Лиувилля.

Параметризация бифуркационной диаграммы Σ_2 описывается сле-

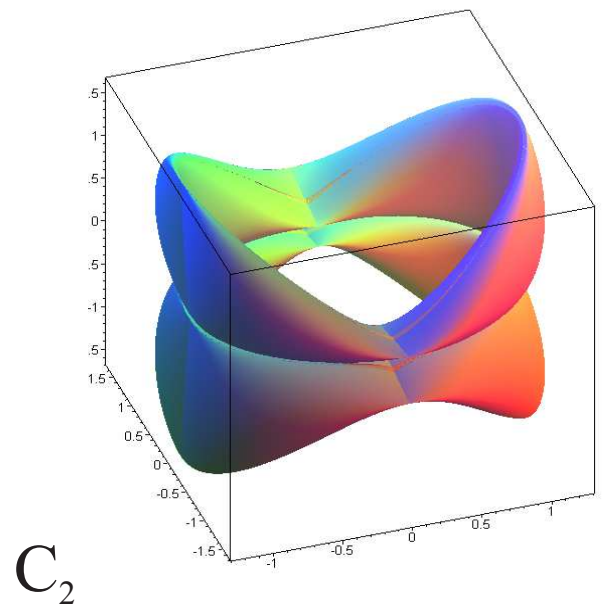
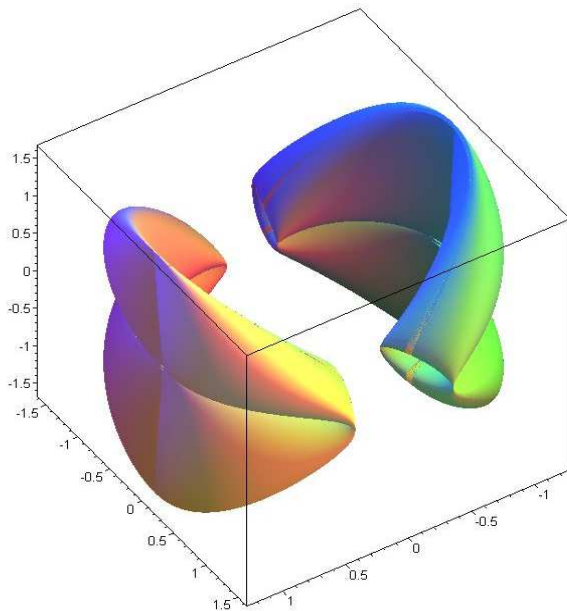
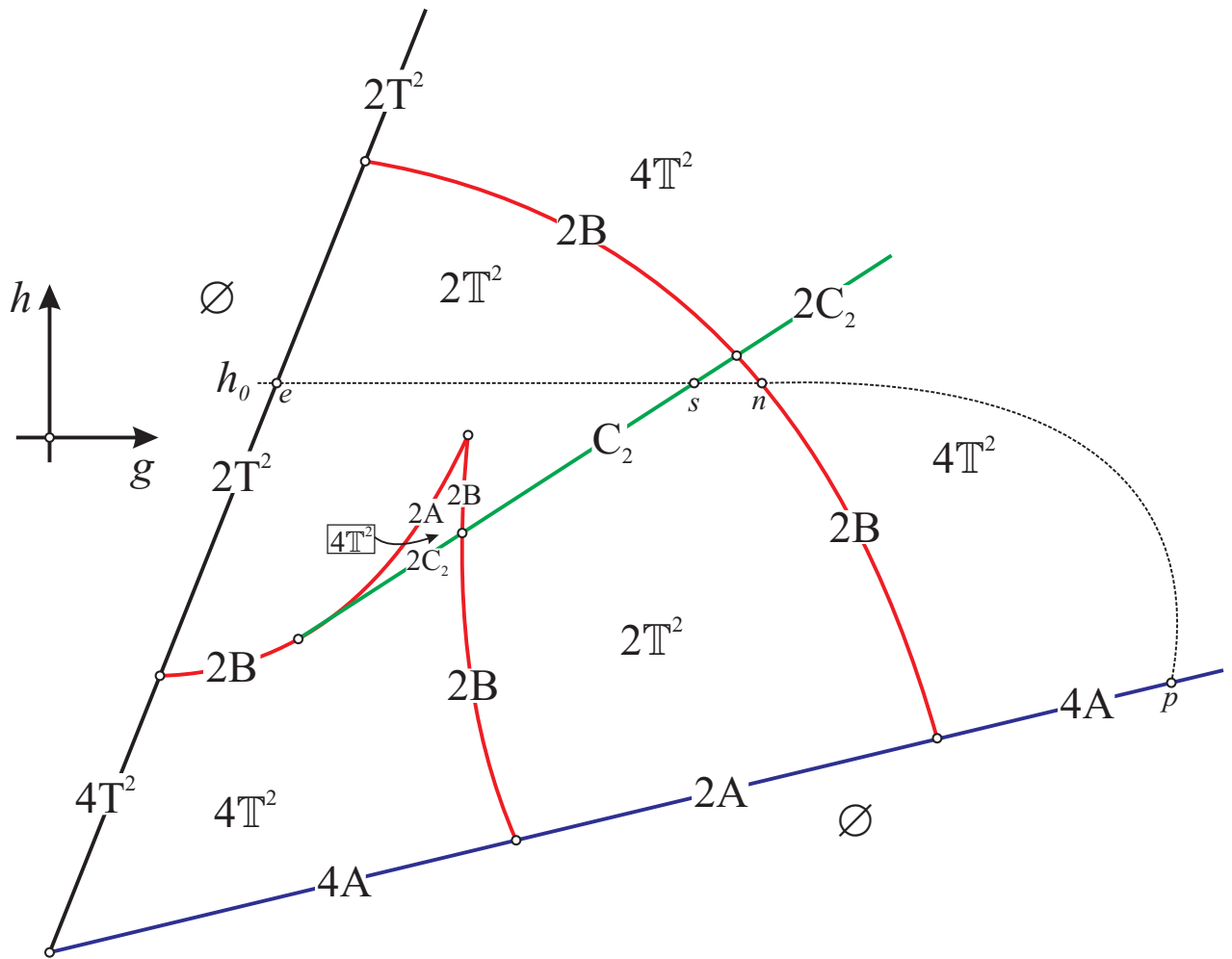


Рис. 4.4. Бифуркационная диаграмма Σ_2 отображения момента $\mathcal{F}_2 = H \times G$.

дующими кривыми:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{g}{b^2} + \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 b^2}\right)(a^2 - b^2), \quad g \geq -\varepsilon^2 b^2(a^2 + b^2) - \frac{2a^2}{\varepsilon^2}, \\
 g &= \frac{h}{\varepsilon^4} + \frac{2}{\varepsilon^6} - 2\varepsilon^2 a^2 b^2, \quad h \geq -\frac{1}{\varepsilon^2}[\varepsilon^4(a^2 + b^2) + 2], \\
 \Sigma_2 : \quad h &= \frac{g}{a^2} - \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2}\right)(a^2 - b^2), \quad g \geq -\frac{1}{\varepsilon^2}(a^2 + b^2 + 2\varepsilon^4 a^2 b^2), \\
 &\left\{ \begin{array}{l} h = 2t - \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon^2 a^2 b^2}{t^2}, \\ g = -\varepsilon^2 a^2 b^2 - \frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2a^2 b^2}{t}, \quad t \in [-\varepsilon^2 ab; -b] \cup [b; \varepsilon^2 ab]. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

4.6. Третья и четвертая системы

Заметим, что первые две подсистемы \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 удовлетворяют соотношениям

$$L_i(K, H, G) = 0, \quad dL_i(K, H, G) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.6.1)$$

если положить $L_1 = K$ и $L_2 = [2 + \varepsilon^4(\alpha^2 + \beta^2) + \varepsilon^2 H]^2 - 4\varepsilon^4 K$ соответственно.

Поэтому последние две подсистемы \mathcal{M}_3 и \mathcal{M}_4 определим уравнениями:

$$L_i(K, H, G) = 0, \quad dL_i(K, H, G) = 0, \quad i = 3, 4. \quad (4.6.2)$$

Систему \mathcal{M}_3 определим выбором функции

$$L_3 = [(a^2 + b^2)H - 2G - \varepsilon^2(a^2 - b^2)^2]^2 - 4(a^2 - b^2)^2 K,$$

а функцию L_4 для \mathcal{M}_4 можно явно записать, исключив из системы

$$\Phi(t) = 0, \quad \frac{d\Phi(t)}{dt} = 0 \quad (4.6.3)$$

параметр t и подставив в полученное выражение вместо постоянных первых интегралов h, k, g функции H, K и G . Здесь через $\Phi(t)$ обозначен мно-

гочлен

$$\Phi(t) = t^4 - ht^3 + \left(\frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon^2(a^2 + b^2)h + \varepsilon^4(a^2 - b^2)^2] + a^2 + b^2 - k - \varepsilon^2g \right) t - gt + a^2b^2.$$

Параметр t в результате исключения из системы (4.6.3) как функция $T = T(H, K, G)$, на самом деле, является частным интегралом для системы \mathcal{M}_4 .

Отметим, что уравнению $L_4(h, k, g) = 0$ принадлежат две прямые

$$\begin{cases} g = abh, \\ k = \frac{1}{4}(a - b)^2[\varepsilon^4(a + b)^2 + 2\varepsilon^2h + 4], \end{cases} \quad \begin{cases} g = -abh, \\ k = \frac{1}{4}(a + b)^2[\varepsilon^4(a - b)^2 + 2\varepsilon^2h + 4]. \end{cases}$$

Систему (4.6.3) (поверхность кратных корней многочлена $\Phi(t)$) можно записать в параметрическом виде следующим образом:

$$\begin{cases} k = 3t^2 - 2th + a^2 + b^2 + \frac{1}{4}h^2 - \frac{a^2b^2}{t^2} + \\ + [2t^3 - ht^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)h - \frac{2a^2b^2}{t}]\varepsilon^2 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2)^4\varepsilon^4, \\ g = -2t^3 + ht^2 + \frac{2a^2b^2}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus 0. \end{cases}$$

Если в приводимых выше формулах положить параметр деформации ε равным нулю, то получим формулы для аналогов систем \mathcal{M}_3 и \mathcal{M}_4 в задаче обобщения волчка Ковалевской на случай двойного поля [149], [158], [87].

При $\varepsilon > \max\{\frac{1}{\sqrt{b}}; \sqrt{\frac{2}{a-b}}\}$ бифуркационные диаграммы Σ_3, Σ_4 отображений моментов $\mathcal{F}_3 = G \times H$ и $\mathcal{F}_4 = T \times H$ для систем \mathcal{M}_3 и \mathcal{M}_4 изображены на рис. 4.5 и 4.6 соответственно. На этих же рисунках указаны и бифуркации торов Лиувилля. На рис. 4.7 приведена бифуркация тора в тор, которая соответствует A^* .

В основе анализа бифуркаций торов Лиувилля лежат аналитические работы [159], [161], [160], [111] и [57]. Закрашенным областям со-

граммы Σ_3 :

$$h = \frac{g}{a^2} - \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2}\right)(a^2 - b^2), \quad g \geq -\frac{1}{\varepsilon^2}(a^2 + b^2 + 2\varepsilon^4 a^2 b^2),$$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} h = 2t + \frac{a^2 + b^2}{t}, \\ g = (a^2 + b^2)t + \frac{2a^2 b^2}{t}, \quad t \in [-\varepsilon^2 b^2; -\frac{1}{\varepsilon^2}] \cup (0, ; +\infty), \end{cases}$$

$$g = a^2 h + 2a(a^2 - b^2), \quad h \geq -\frac{1 + 2\varepsilon^2 a + \varepsilon^4 b^2}{\varepsilon^2},$$

$$g = a^2 h - 2a(a^2 - b^2), \quad h \geq -\frac{1 - 2\varepsilon^2 a + \varepsilon^4 b^2}{\varepsilon^2},$$

$$h = \frac{g}{b^2} + \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 b^2}\right)(a^2 - b^2), \quad g \geq -\varepsilon^2 b^2(a^2 + b^2) - \frac{2a^2}{\varepsilon^2},$$

$$g = b^2 h - 2b(a^2 - b^2), \quad h \geq -\frac{1 + 2\varepsilon^2 b + \varepsilon^4 a^2}{\varepsilon^2},$$

$$g = b^2 h + 2b(a^2 - b^2), \quad h \geq -\frac{1 - 2\varepsilon^2 b + \varepsilon^4 a^2}{\varepsilon^2}.$$

Пересечение систем \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_3 происходит в точках вырождения индуцированной симплектической структуры, что соответствует на рис. 4.5 прямой

$$h = \frac{1}{a^2 + b^2} [2g - \varepsilon^2(a^2 - b^2)^2], \quad g \geq -\frac{1}{\varepsilon^2}(a^2 + b^2 + 2\varepsilon^4 a^2 b^2).$$

Параметризация бифуркационной диаграммы Σ_4 явно описывается системой кривых:

$$h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2 t) - \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)},$$

$$t \in [-\frac{1}{\varepsilon^2}; 0);$$

$$\Sigma_4 : \begin{cases} h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2 t) + \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \\ t \in [-b; -\frac{1}{\varepsilon^2}] \cup (0; b]; \end{cases}$$

$$h = -\varepsilon^2(a^2 + b^2) + 2t(2 + \varepsilon^2 t) - \frac{2}{t}(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)},$$

$$t \in [t_0; -a] \cup [a; +\infty);$$

$$h = 2t + \frac{2ab}{t}, \quad t \in [t_0; t_1] \cup (0; +\infty);$$

$$\Sigma_4 : \quad h = 2t - \frac{2ab}{t}, \quad t \in [t_3; 0) \cup [t_2; +\infty),$$

$$h = 2t - \frac{\varepsilon^2 a^2 b^2}{t^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad t \in [-\varepsilon^2 ab; -b] \cup [b; \varepsilon^2 ab],$$

$$t = \pm a, \quad h \geq -\frac{1 \mp 2\varepsilon^2 a + \varepsilon^4 b^2}{\varepsilon^2}; \quad t = \pm b, \quad h \geq -\frac{1 \mp 2\varepsilon^2 b + \varepsilon^4 a^2}{\varepsilon^2}.$$

(4.6.4)

В формулах (4.6.4) через t_k обозначены выражения

$$t_{0,1} = -\frac{1}{8\varepsilon^2}[\varepsilon^4(a+b)^2 + 4 \pm \sqrt{16 + \varepsilon^8(a+b)^4 + 8(a^2 + b^2 - 6ab)\varepsilon^4}],$$

$$t_{2,3} = -\frac{1}{8\varepsilon^2}[\varepsilon^4(a-b)^2 + 4 \mp \sqrt{16 + \varepsilon^8(a-b)^4 + 8(a^2 + b^2 + 6ab)\varepsilon^4}].$$

Закрашенная область ограничена кривыми

$$t = -\frac{1}{\varepsilon^2}, \quad h \geq h_{\min} = -\frac{\varepsilon^4(a^2 + b^2) + 2}{\varepsilon^2},$$

$$h = 2t + \frac{a^2 + b^2}{t}, \quad t \in [-\varepsilon^2 b^2; -\frac{1}{\varepsilon^2}] \cup (0; +\infty),$$

$$h = 3t + \frac{a^2 b^2}{t^3}, \quad t \in [-\sqrt[3]{\varepsilon^2 a^2 b^2}; t_4] \cup (0; t_5],$$

где $t_{4,5}$ – единственные корни уравнений

$$t^3(a^2 + b^2 - 2t^2)\varepsilon^2 - t^4 + a^2 b^2 = 2t^2(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}, \quad t \in [-b; 0),$$

$$t^4 - t^3(a^2 + b^2 - 2t^2)\varepsilon^2 - a^2 b^2 = 2t^2(1 + \varepsilon^2 t)\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}, \quad t \in [a; +\infty).$$

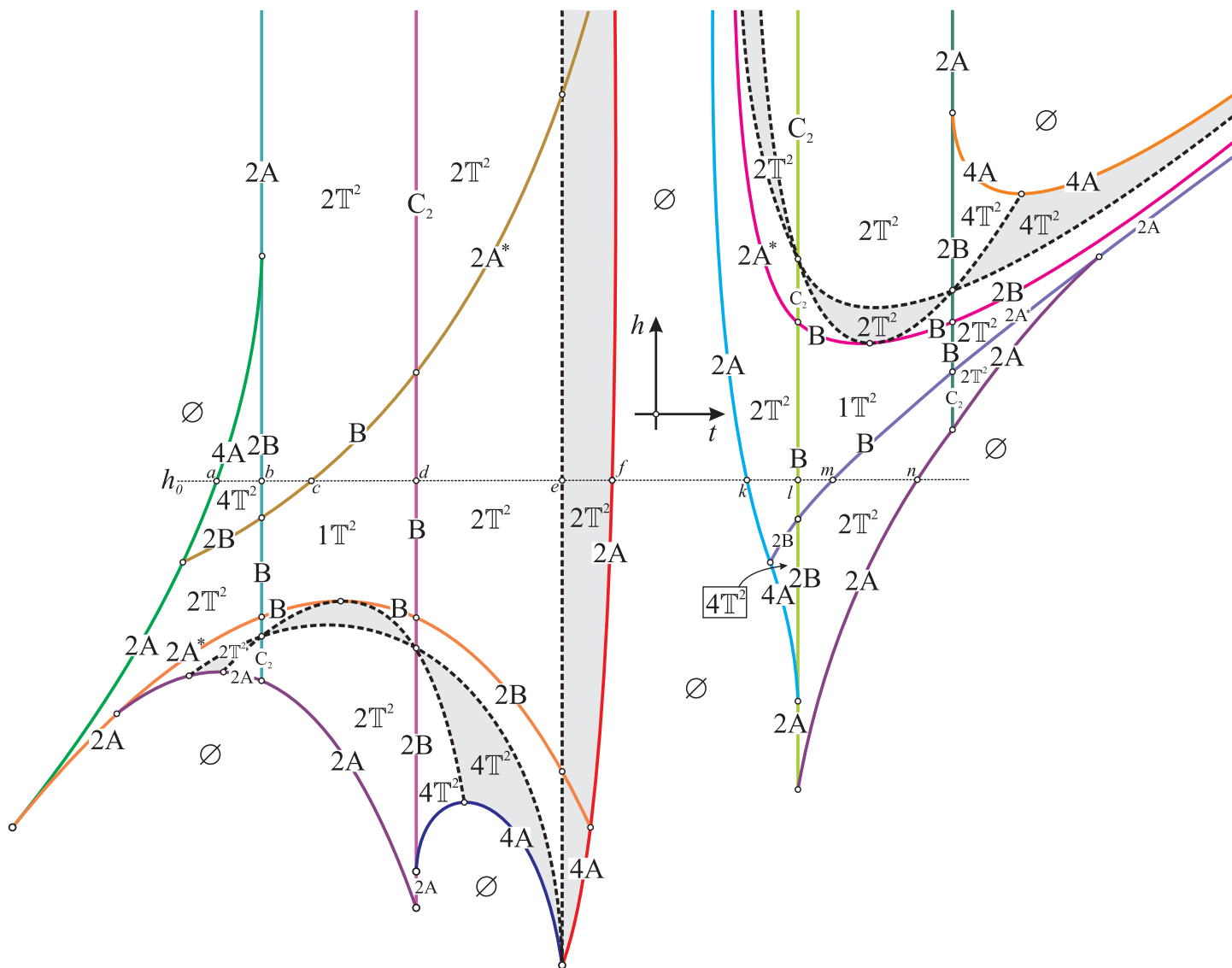
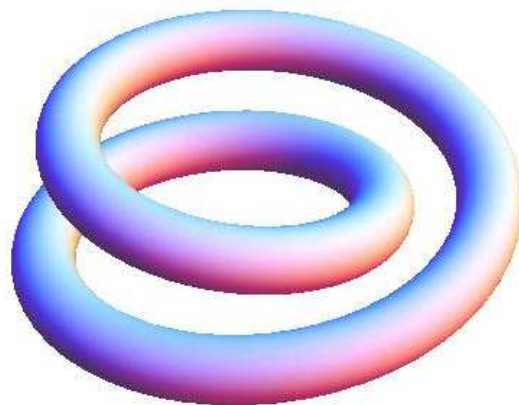
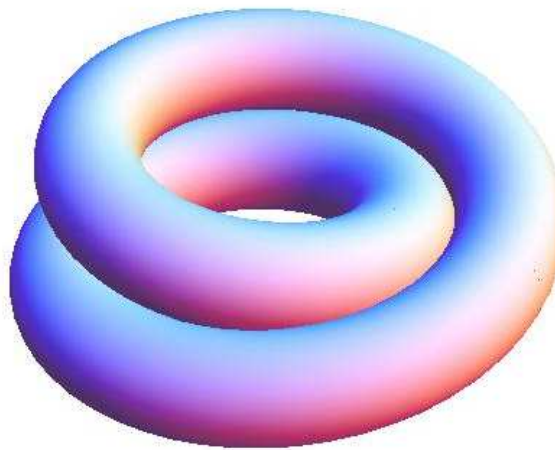
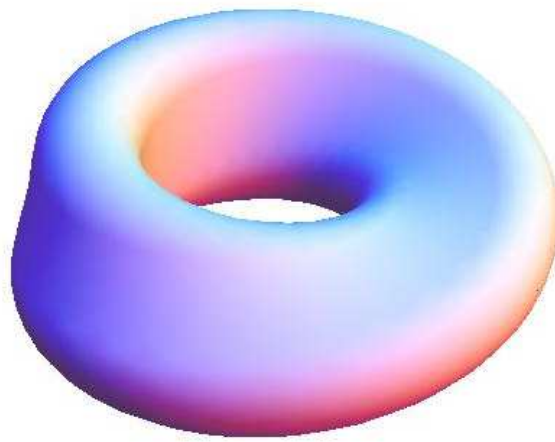


Рис. 4.6. Бифуркационная диаграмма Σ_4 отображения момента $\mathcal{F}_4 = T \times H$.



A^*

Рис. 4.7. Бифуркация тора в тор, которая отвечает A^* .

4.7. Атлас бифуркационных диаграмм и пример сетевой диаграммы

В этом разделе приводится атлас бифуркационных диаграмм полного отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$ и его фрагмент. Здесь под атласом мы понимаем набор разделяющих кривых на плоскости параметров. На рис. 4.8 по оси абсцисс откладывается уровень энергии h , по оси ординат – отношение $\frac{b}{a}$. Атлас построен для значений параметров: $a = 1, \varepsilon = 2$. Все кривые, которые формируют атлас, аналитически определяются по бифуркационным диаграммам $\Sigma_k, k = 1, \dots, 4$. На рис. 4.9 приводится “предельный” атлас бифуркационных диаграмм

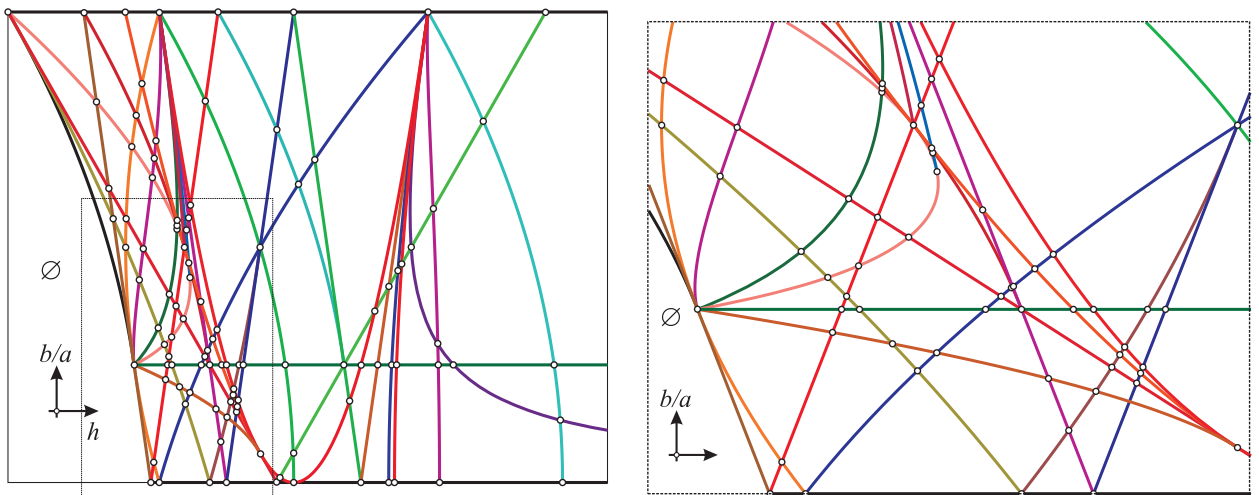


Рис. 4.8. Атлас бифуркационных диаграмм полного отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$ и его фрагмент.

Для построения бифуркационной диаграммы Σ_{h_0} множества Σ полного отображения момента $\mathcal{F} = H \times K \times G$ на уровне $h = h_0$ необходимо зафиксировать значения параметров a, ε . Тем самым определено сечение атласа с камерами. Для определенной камеры выбираем значения параметров b и h_0 (сечение изоэнергетической поверхности). На бифуркационных диаграммах $\Sigma_k, k = 1, \dots, 4$ (рис. 4.2 – 4.6) это сечение отмечено пунктирной линией. На указанных диаграммах для выбранного сече-

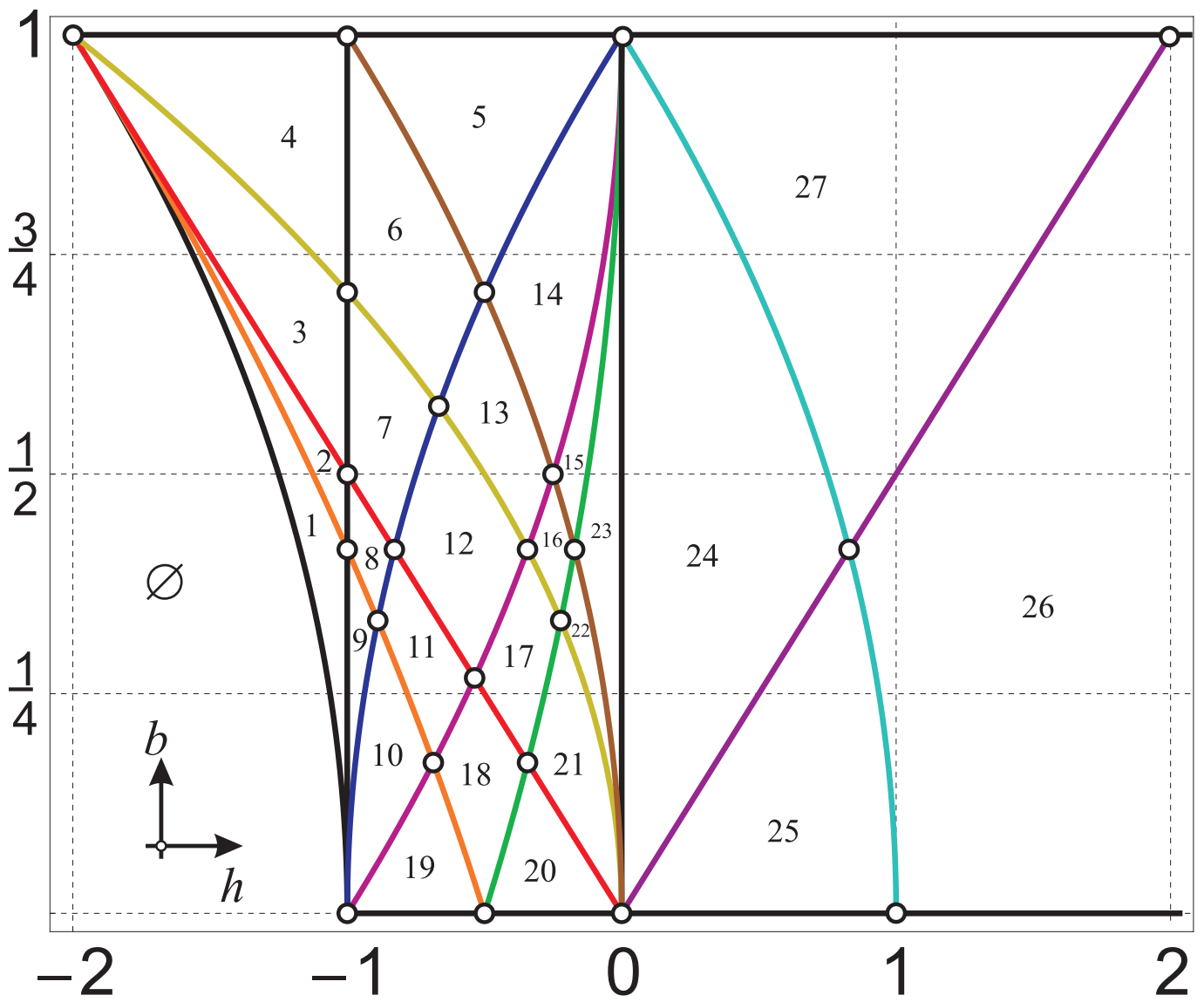


Рис. 4.9. “Предельный” атлас бифуркационных диаграмм.

ния h_0 аналитически вычисляются границы, по которым и строится бифуркационная диаграмма Σ_{h_0} .

На рис. 4.10 и 4.11 бифуркационные диаграммы Σ_{h_0} построены для следующих значений параметров: $a = 1$, $b = \frac{2}{5}$, $\varepsilon = 3$, $h_0 = -0,25$ и $a = 1$, $b = \frac{19}{100}$, $\varepsilon = 5$, $h_0 = 15$. Мы также приводим “предельную” для 4.11 бифуркационную диаграмму, которая соответствует камере 25 (Рис. 4.12). На стенках камер указаны как количество компонент (двумерных торов), так и соответствующие бифуркации в системе с тремя степенями свободы. Для промежутка (f, q) , который отвечает системе \mathcal{M}_1 , количество двумерных торов необходимо удвоить. Пример сетевой диаграммы для выбранного изоэнергетического сечения (аналога многомерной сети А.Т. Фоменко [133],[132]) указан на рис. 4.13. Такой сетевой диаграммы нет среди сетевых диаграмм в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле, полный список которых представлен в [56]. Поэтому никакими заменами переменных рассматриваемую систему нельзя преобразовать в известные.

4.8. Заключение

В данном разделе диссертации предложен возможный подход к описанию фазовой топологии новой интегрируемой системы с тремя степенями свободы, используя метод критических подсистем. Понятие критической подсистемы было введено М. П. Харламовым в начале 2000-х годов в задаче исследования фазовой топологии неприводимых систем с тремя степенями свободы. Результаты, изложенные здесь, получены на основе результатов и методов, представленных в публикациях [66], [68], [149], [88], [173], [158], [87], [159], [161], [160], [111], [56], [57]. Отметим, что в новой системе обнаружена перестройка “pitch-fork” (вырожденная особенность ранга 2), как ориентируемая (неустойчивая к ма-

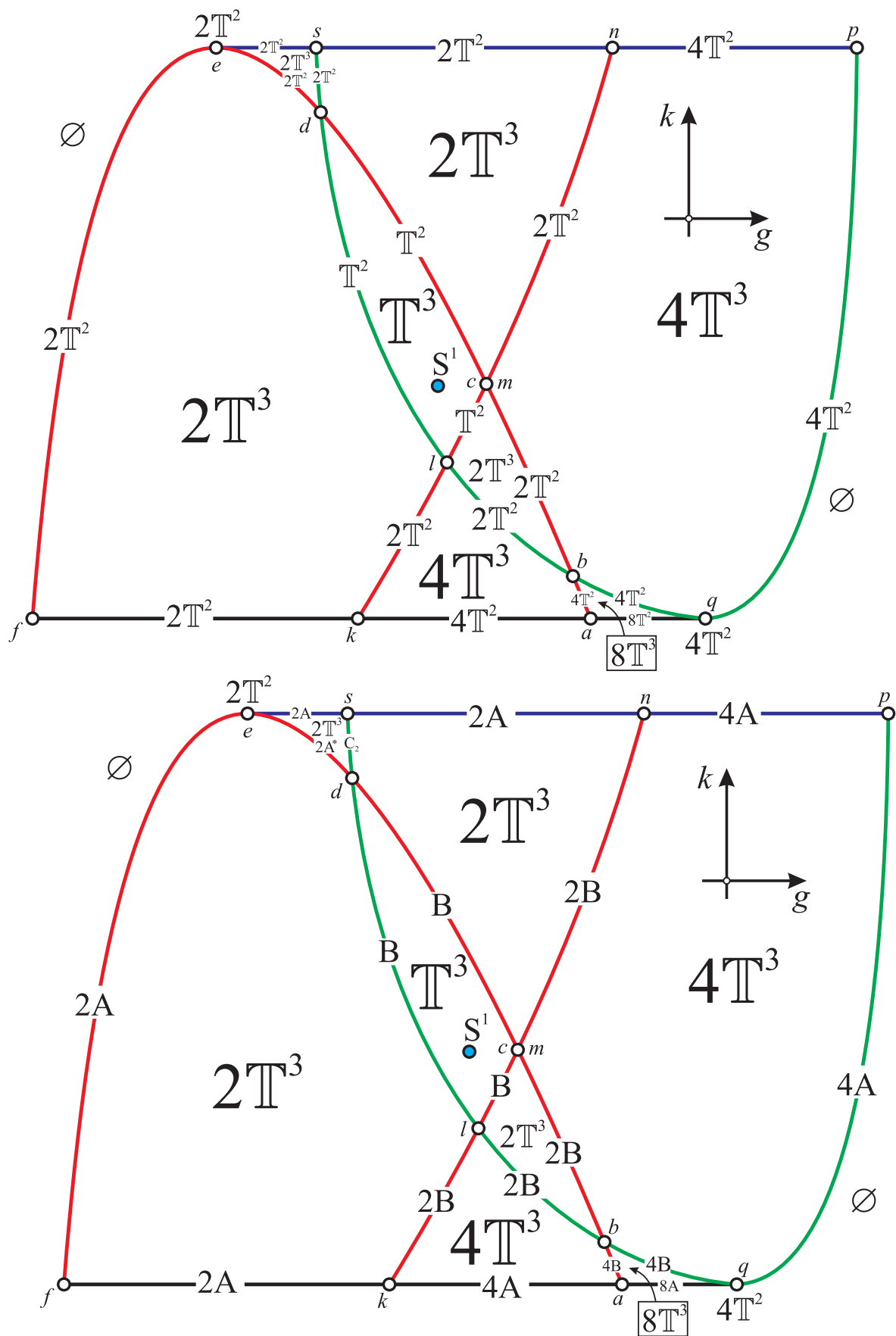


Рис. 4.10. Бифуркационная диаграмма Σ_{h_0} для значений параметров $a = 1, b = \frac{2}{5}, \varepsilon = 3, h_0 = -0,25$.

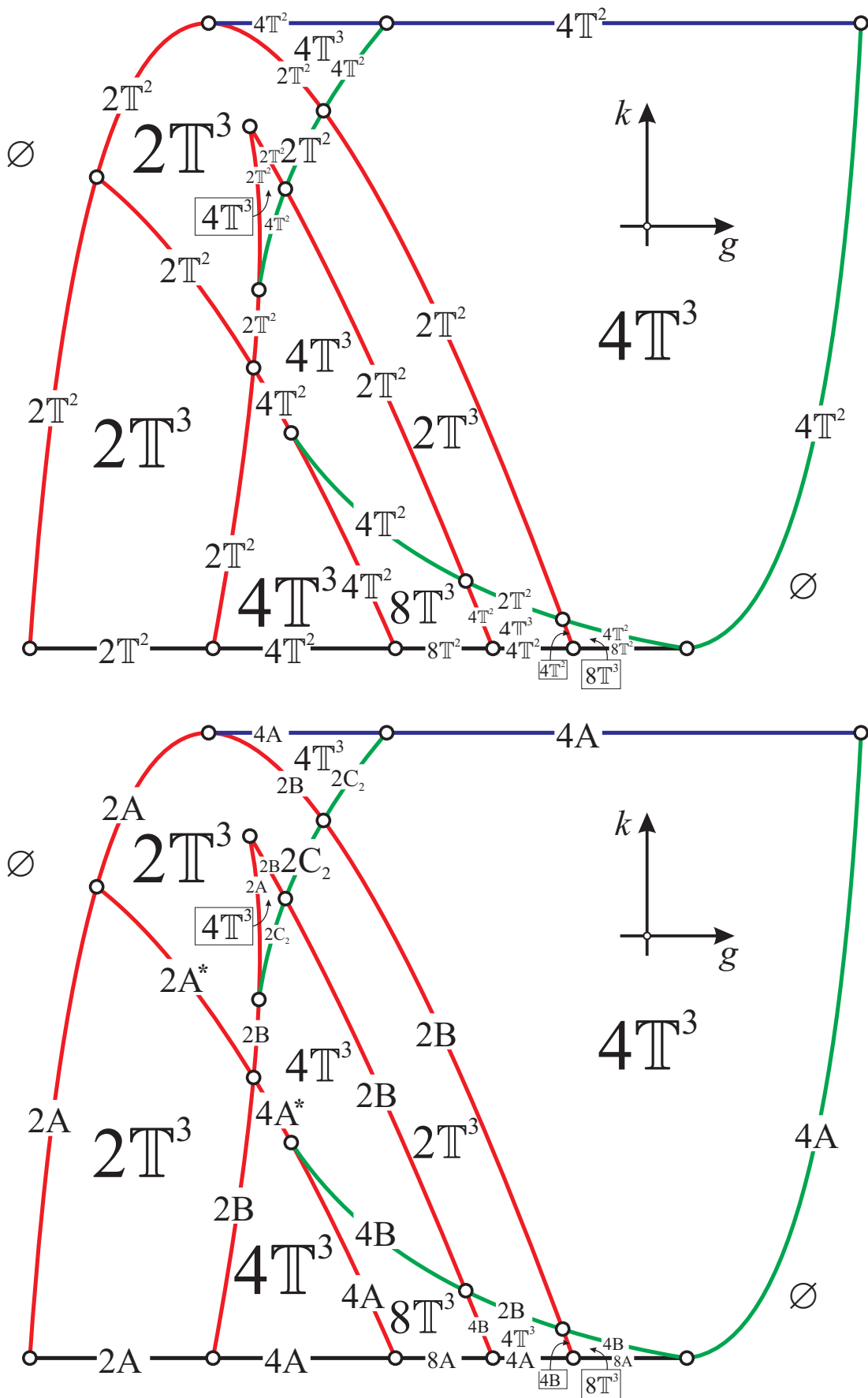


Рис. 4.11. Бифуркационная диаграмма Σ_{h_0} для значений параметров $a = 1, b = \frac{19}{100}, \varepsilon = 5, h_0 = 15$.

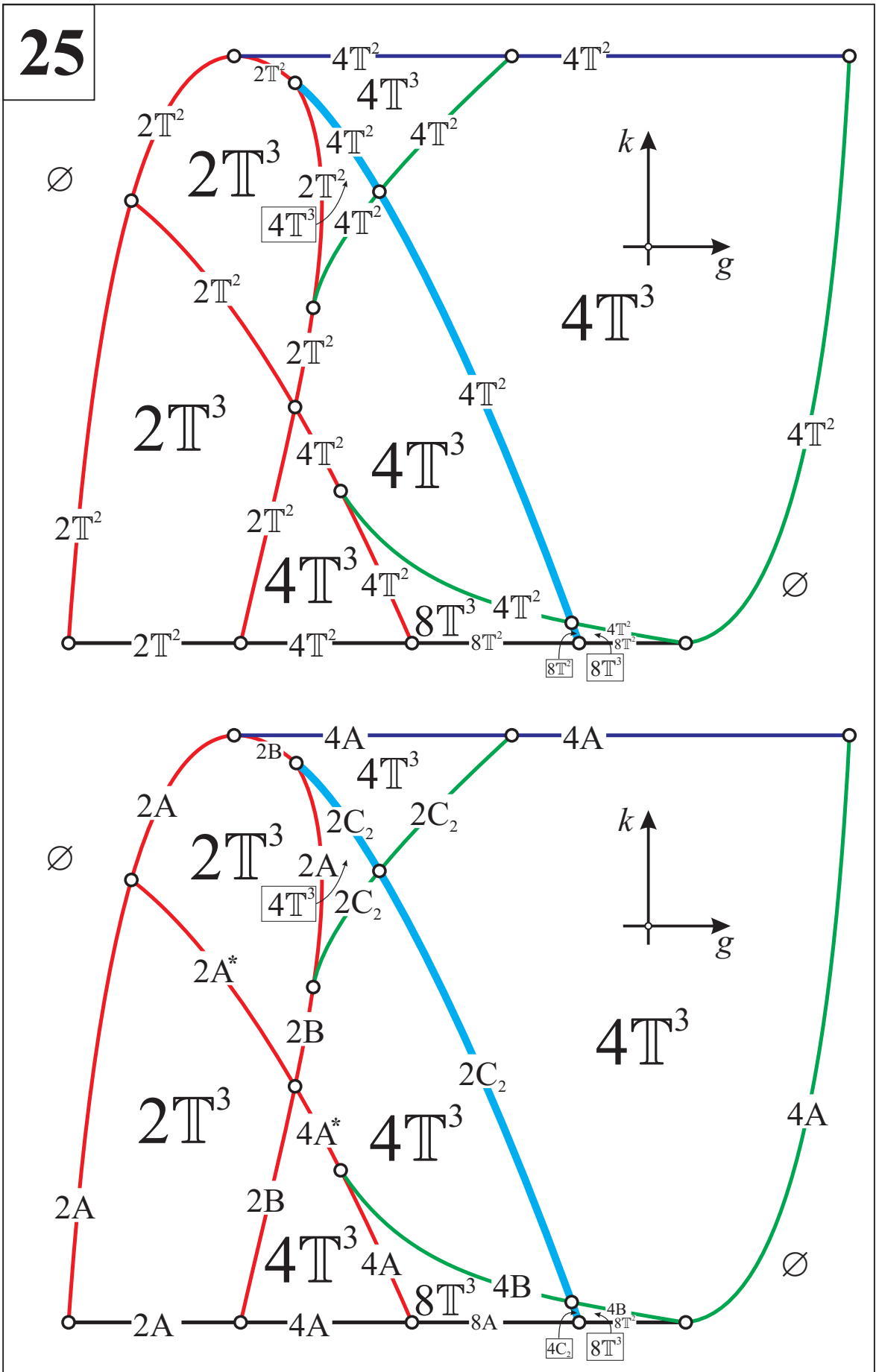


Рис. 4.12. “Предельная” бифуркационная диаграмма для камеры 25.

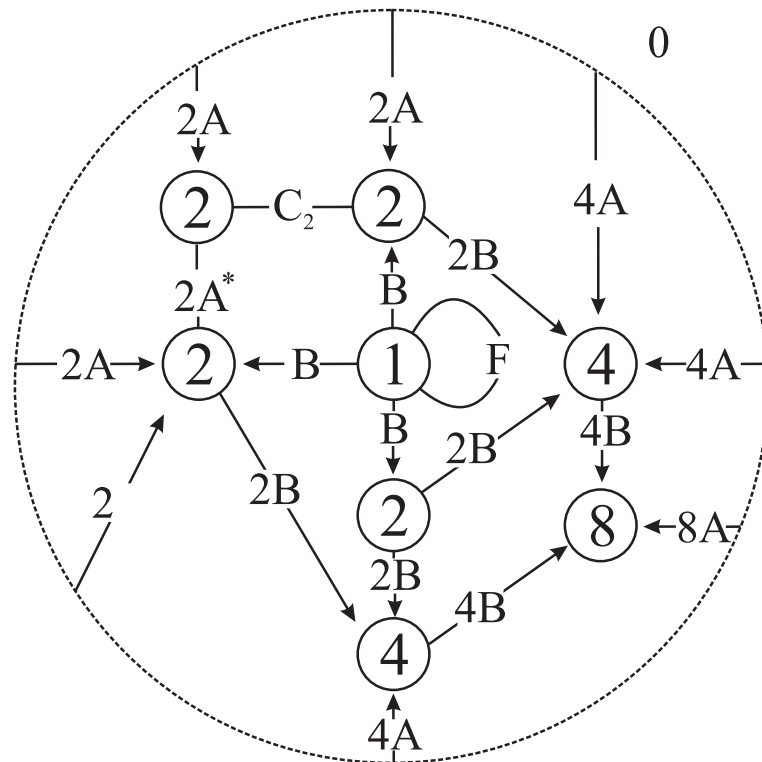


Рис. 4.13. Сетевая диаграмма.

лым возмущениям), так и неориентируемая (наоборот, устойчивая). На рис. 4.10 перестройке типа "pitch-fork" отвечают точки "q" и "e". Для систем с двумя степенями свободы модельные перестройки такого типа описаны в [26] ([26, т. 1, пример 2, с. 24]). Другое наблюдение связано с круговыми молекулами на изоэнергетических уровнях. Например, особым точкам d , l , $c(m)$, b на рис. 4.10, в прообразе которых одна или две компоненты, соответствуют невырожденные особенности ранга 1 типа "седло-седло". Им отвечают круговые молекулы особенностей ранга 0 того же типа после умножения на топологическую окружность [129]. Можно надеяться на получение классификационных теорем о строении круговых молекул невырожденных особенностей ранга 1 типа "седло-седло" с одной или двумя компонентами на слое на изоэнергетическом уровне в системах с тремя степенями свободы.

Исследования фазовой топологии были проведены и для квадратич-

ного гамильтониана, интегрируемость которого доказана в [86]. В частности, система \mathcal{M}_4 “развалилась” на три подсистемы и, таким образом, в системе с тремя степенями свободы с квадратичным гамильтонианом выделяется уже шесть подсистем.

К сожалению, на сегодняшний день так и не удалось получить разделения переменных ни в одной из систем $\mathcal{M}_k, k = 1, \dots, 4$. В первую очередь это связано с необходимостью представления систем (4.6.1) и (4.6.2) в удобном для этого виде. В задаче о движении волчка Ковалевской в двойном силовом поле для аналогов систем \mathcal{M}_3 и \mathcal{M}_4 найдено алгебраическое разделение переменных и исследована фазовая топология [158], [161], [160], [111]. Опираясь, прежде всего, на работы М. П. Харламова, мы надеемся и в нашем случае на возможность явного алгебраического разделения переменных в системах \mathcal{M}_3 и \mathcal{M}_4 .

Глава 5

Фазовая топология волчка Ковалевской –Соколова

В данной главе исследуется фазовая топология интегрируемой гамильтоновой системы на $e(3)$, найденной В.В.Соколовым (2001) и обобщающей случай Ковалевской. Обобщение состоит в том, что к однородному потенциальному силовому полю добавлены гироскопические силы, зависящие от конфигурационных переменных. Классифицированы относительные равновесия, вычислен их тип, определен характер устойчивости. Установлены виды диаграмм Смейла и дана классификация изоэнергетических многообразий приведенных систем с двумя степенями свободы. Множество критических точек полного отображения момента представлено в виде объединения критических подсистем, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является однопараметрическим семейством почти гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Для всех критических точек явно вычислены показатели, определяющие их тип. Выписаны уравнения поверхностей, несущих бифуркационную диаграмму отображения момента. Приведены примеры изоэнергетических диаграмм с полным описанием соответствующей грубой топологии (регулярных торов Лиувилля и их бифуркаций).

5.1. Исходные соотношения и постановка задачи

Коалгебра $\mathfrak{g}_0 = e(3)^*$ реализуется как $\mathbb{R}^6(M, \alpha)$ со скобкой Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk} \alpha_k, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0. \quad (5.1.1)$$

Интегрируемый гиостат Ковалевской – Соколова [31] задается уравнениями Гамильтона

$$\dot{x} = \{H, x\} \quad (5.1.2)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2) + \varepsilon_1(\alpha_3 M_2 - \alpha_2 M_3) - \varepsilon_0 \alpha_1. \quad (5.1.3)$$

Уравнения (5.1.2), записанные в переменных M_i, α_j , называются уравнениями Эйлера – Пуассона. Заметим, что именно такой порядок аргументов в скобке (5.1.2) необходим для совпадения знаков с классическими аналогами. Скобка (5.1.1) обладает двумя функциями Казимира

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad \Gamma = \boldsymbol{\alpha}^2. \quad (5.1.4)$$

Точкой обозначено скалярное произведение в \mathbb{R}^3 , коэффициент в L введен по традиции, сложившейся в задачах динамики твердого тела с конфигурацией типа Ковалевской.

На совместном уровне

$$P_\ell^4 = \{L = \ell, \Gamma = a^2\}$$

скобка (5.1.1) невырождена и ограничение системы (5.1.2) становится гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Иногда нам будет удобно считать фазовым пространством системы (5.1.2) пятимерное многообразие $P^5 = \mathbb{R}^3(\mathbf{M}) \times S^2(\boldsymbol{\alpha})$, заданное одним уравнением

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = a^2 \quad (a > 0),$$

и говорить об однопараметрическом (параметр $\ell \in \mathbb{R}$) семействе систем на P_ℓ^4 . Последнее соотношение в механике называют геометрическим интегралом, определенную им сферу – сферой Пуассона. Функцию L и порожденное ей соотношение $L = \ell$ называется интегралом площадей.

Задача в целом характеризуется тремя параметрами $a, \varepsilon_0, \varepsilon_1$, которые можно назвать физическими. Заметим, что в случае общего положения ($a\varepsilon_0\varepsilon_1 \neq 0$) эта тройка избыточна. Введением подходящих единиц измерения можно два параметра из трех сделать равными единице (кроме пары $\varepsilon_0, \varepsilon_1$, в которой отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ является существенным). Однако мы пока сохраним все три параметра, что дает возможность предельных переходов $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ (классический случай Ковалевской), $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ (случай Соколова для уравнений Кирхгофа [145] и, при введении дополнительного параметра в скобку Пуассона, случай Борисова – Мамаева – Соколова на $so(4)$ [32]) с сохранением произвольного $a > 0$. В связи с наличием таких переходов гамильтониан (5.1.3) иногда называют деформацией случая Ковалевской. Отметим также, что очевидными комбинациями отражений в пространстве \mathbb{R}^6 и инверсии времени можно добиться выполнения неравенств

$$\varepsilon_0 > 0, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

Так, поворот подвижной системы отсчета на π вокруг третьей оси меняет оба знака $\varepsilon_0, \varepsilon_1$, а замена $(M_1, \alpha_2, \alpha_3, t) \rightarrow (-M_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -t)$ равносильна замене знака только у ε_1 .

Первый интеграл, найденный в [31], дополнительный к Γ, L, H и обеспечивающий интегрируемость системы (5.1.2) (соответственно, лиувиллеву полную интегрируемость семейства гамильтоновых систем на P_ℓ^4) можно записать в виде

$$K = \left[\frac{1}{4}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_1(\alpha_2 M_3 - \alpha_3 M_2) - \varepsilon_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \varepsilon_0 \alpha_1 \right]^2 + \left[\frac{1}{2} M_1 M_2 + \varepsilon_1(\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3) + \varepsilon_0 \alpha_2 \right]^2.$$

В механике большое внимание уделяется исследованию особых движений механических систем (в том числе и интегрируемых), их аналитическому описанию и изучению характера устойчивости. Количество

классических работ по этой тематике весьма велико. В последнее время вопрос об устойчивости таких движений связывается с топологией соответствующих интегрируемых систем, отображением момента и так называемым бифуркационным комплексом, отражающим все особенности слоений фазового пространства (см., например, работы [49], [174]). В динамике твердого тела особое место занимает класс движений, называемых равномерными вращениями, в которых вектор угловой скорости тела постоянен в подвижной и неподвижной системах отсчета. С точки зрения системы уравнений Эйлера – Пуассона эти движения являются неподвижными точками, поэтому они также называются относительными равновесиями. Устойчивость относительных равновесий в значительной мере определяется собственными числами матрицы правой части линеаризованных уравнений для системы (5.1.2). В интегрируемой системе эти собственные числа определяют так называемый тип критической точки [26], соответствующей относительному равновесию.

С другой стороны, в топологическом анализе интегрируемой системы строятся топологические инварианты (меченые молекулы Фоменко – Цишанга [175]) на изоэнергетических многообразиях $Q_{\ell,h}^3 = \{H = h\} \cap P_\ell^4$ систем на P_ℓ^4 . Очевидно, эти многообразия зависят также и от a , но эту зависимость явно не пишем. На соответствующие метки оказывает влияние сама топология многообразий $Q_{\ell,h}^3$. Поэтому важным этапом топологического анализа является классификация изоэнергетических многообразий. Соответствующий математический аппарат разработан Смейлом [24]. Оказывается, что перестройки топологического типа $Q_{\ell,h}^3$ происходят при пересечении значений параметров, отвечающим относительным равновесиям, а вид перестройки определен индексом Морса ограничения функции H на P_ℓ^4 в точках относительных равновесий. При фиксированных физических параметрах, множество разделяющих значений для топологического типа $Q_{\ell,h}^3$ в плоскости (ℓ, h)

называют диаграммой Смейла.

Ниже получено полное аналитическое описание всех относительных равновесий гиростата Ковалевской – Соколова, вычислены типы относительных равновесий и установлен характер их устойчивости. Перечислены виды диаграмм Смейла, вычислены индексы Морса приведенной энергии и установлена топология изоэнергетических уровней.

В целом множество критических точек отображения момента рассматриваемой системы получено как объединение четырех критических подсистем. Поскольку, как отмечалось, фазовое пространство системы в целом расслоено на симплектические листы – четырехмерные фазовые пространства приведенных систем, критические подсистемы также представляют собой объединения однопараметрических семейств (a фиксировано, ℓ произвольно) двумерных фазовых пространств индуцированных почти гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Каждое из этих пространств имеет подмножество коразмерности 1, на котором вырождается форма, индуцированная исходной симплектической структурой. Получены условия вырождения в виде равенства нулю некоторого частного интеграла. Явно вычислен тип критических точек ранга 1. В частности, в терминах констант интегралов выписаны уравнения множеств вырожденных критических точек.

Полученная информация, вместе с результатами [66, 89] по фазовой топологии обобщенного двухполевого гиростата Соколова – Цыганова [86], дает возможность построить бифуркационные диаграммы отображения момента, оснащенные обозначениями бифуркаций и указанием количества регулярных торов Лиувилля, что и определяет грубую топологию системы. Знание грубой топологии в целом позволяет завершить и полное описание относительных равновесий указанием топологической структуры их насыщенной четырехмерной окрестности в фазовом пространстве приведенной системы в тех случаях, когда по ана-

литически найденному типу точки эта структура не устанавливается однозначно.

5.2. Множество относительных равновесий

Для дальнейшего удобно использовать наряду с моментами и компоненты угловой скорости $\omega = \partial H / \partial M$:

$$\omega_1 = \frac{M_1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{M_2}{2} + \varepsilon_1 \alpha_3, \quad \omega_3 = M_3 - \varepsilon_1 \alpha_2.$$

Первые интегралы примут вид

$$\begin{aligned} L &= \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \frac{1}{2} \alpha_3 \omega_3 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \alpha_2 \alpha_3 = \ell, \\ H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 (\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2) - \varepsilon_0 \alpha_1 = h, \\ K &= [\omega_1^2 - \omega_2^2 + \varepsilon_1 \alpha_2 \omega_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2 \alpha_1) \alpha_1]^2 + \\ &+ [2\omega_1 \omega_2 - \varepsilon_1 \alpha_1 \omega_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2 \alpha_1) \alpha_2]^2 = k. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Гамильтоново поле, порожденное произвольной функцией F с помощью заданной скобки Пуассона, обозначают через $\text{sgrad } F$. Поэтому векторное поле, отвечающее системе (5.1.2), есть $\text{sgrad } H$. В координатах ω_i, α_j получаем

$$\begin{aligned} \text{sgrad } H &= \left(\frac{1}{2} (\omega_2 - \varepsilon_1 \omega_3) (\omega_3 + \varepsilon_1 \omega_2), -\frac{1}{2} [(\varepsilon_0 - 2\varepsilon_1^2 \alpha_1) \alpha_3 + (\omega_3 + \varepsilon_1 \alpha_2) \omega_1], \right. \\ &\quad \left. (\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2 \alpha_1) \alpha_2 + \varepsilon_1 \alpha_3 \omega_1, \alpha_2 \omega_3 - \alpha_3 \omega_2, \alpha_3 \omega_1 - \alpha_1 \omega_3, \alpha_1 \omega_2 - \alpha_2 \omega_1 \right). \end{aligned}$$

Неподвижные точки системы Эйлера – Пуассона определяются из условия $\text{sgrad } H = 0$. В частности, существует скалярная константа Ω , такая, что

$$\omega = \Omega \alpha. \tag{5.2.2}$$

Оставшиеся условия относительного равновесия дают

$$(\Omega\alpha_2 - \varepsilon_1\alpha_3)(\Omega\alpha_3 + \varepsilon_1\alpha_2) = 0, \quad (5.2.3)$$

$$\varepsilon_1\Omega\alpha_1\alpha_2 + [\varepsilon_0 + (\Omega^2 - 2\varepsilon_1^2)\alpha_1]\alpha_3 = 0, \quad (5.2.4)$$

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2\alpha_1)\alpha_2 + \varepsilon_1\Omega\alpha_1\alpha_3 = 0.$$

Для дальнейшего примем следующую точку зрения. Ненулевые параметры ε_0, a в совокупности характеризуют взаимодействие гиростата с потенциальным силовым полем. Будем считать их выбранными и фиксированными. Классифицирующим различные системы будем считать параметр ε_1 , характеризующий гироскопические силы и обеспечивающий деформацию задачи Ковалевской. Различие систем будет удобно определять по величине ε_1^2 . Введем обозначения для значений этой величины, которые будут в разных ситуациях служить разделяющими:

$$\zeta_1 = \frac{\varepsilon_0}{2a}, \quad \zeta_2 = \frac{\varepsilon_0}{a}, \quad \zeta_3 = (5 + 3\sqrt{3})\frac{\varepsilon_0}{a}. \quad (5.2.5)$$

Опишем относительные равновесия в терминах вектора α и величины Ω с учетом равенства (5.2.2).

Предложение 24. (i) *Относительные равновесия гиростата Ковалевской – Соколова образуют следующие семейства:*

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} : \quad & \alpha_1 = \pm a, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \\ \delta_3 : \quad & \alpha_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1^2 - \Omega^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^2 - \Omega^2}R_3(\Omega), \quad \alpha_3 = \frac{\Omega}{\varepsilon_1^2 - \Omega^2}R_3(\Omega), \\ \delta_4 : \quad & \alpha_1 = \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_1^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\Omega}{2\varepsilon_1^2}R_4(\Omega), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\varepsilon_1^2}R_4(\Omega), \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

где

$$R_3^2(\Omega) = \frac{a^2(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon_1^2 + \Omega^2}, \quad R_4^2(\Omega) = \frac{4\varepsilon_1^2 a^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon_1^2 + \Omega^2}.$$

(ii) *В семействах δ_1, δ_2 величина Ω произвольна. Семейство δ_3 состоит из двух подсемейств δ'_3 для $\Omega^2 \in [\varepsilon_1^2 + \zeta_2, +\infty)$ и δ''_3 для $\Omega^2 \in [0, \varepsilon_1^2 - \zeta_2]$.*

Первое подсемейство существует при всех значениях физических параметров, второе – только при условии $\varepsilon_1^2 > \zeta_2$. Семейство δ_4 существует только при условии $\varepsilon_1^2 > \zeta_1$, и в нем величина Ω произвольна.

(iii) При фиксированных физических параметрах, таких, что $\varepsilon_1^2 \neq \zeta_1$ и $\varepsilon_1^2 \neq \zeta_2$, допустимому значению Ω отвечает по одной точке семейств δ_1, δ_2 и по две точки семейств δ_3, δ_4 .

Отметим, что при равенстве $\varepsilon_1^2 = \zeta_1$ все семейство δ_4 сливается с δ_1 , а граничный случай $\varepsilon_1^2 = \zeta_2$ приводит к единственной точке в δ_3'' , которая принадлежит δ_1 (значение $\Omega = 0$).

Для доказательства предложения достаточно заметить, что уравнения (5.2.4) образуют линейную однородную систему по α_2, α_3 . Нулевое решение дает семейства δ_1, δ_2 , а для ненулевых решений равенство нулю первого или второго сомножителя в (5.2.3) приводит, соответственно, к семействам δ_3, δ_4 .

Вычислим значения первых интегралов в точках найденных семейств. Получим

$$\begin{aligned} \delta_1 : \quad h &= -\varepsilon_0 a + a^2 \Omega^2, \quad \ell = a^2 \Omega, \quad k = a^2 [\varepsilon_0 - a(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)]^2, \\ \delta_2 : \quad h &= \varepsilon_0 a + a^2 \Omega^2, \quad \ell = a^2 \Omega, \quad k = a^2 [\varepsilon_0 + a(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)]^2, \\ \delta_3 : \quad h &= -\frac{\varepsilon_0^2 (\varepsilon_1^2 - 3\Omega^2) + a^2 (\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^3}{2(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2}, \quad \ell = \frac{\Omega [\varepsilon_0^2 + a^2 (\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2]}{2(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2}, \quad k = 0, \\ \delta_4 : \quad h &= -\frac{\varepsilon_0^2}{4\varepsilon_1^2} - \varepsilon_1^2 a^2 + a^2 \Omega^2, \quad \ell = a^2 \Omega, \quad k = \frac{1}{16\varepsilon_1^4} (\varepsilon_0^2 + 4\varepsilon_1^2 a^2 \Omega^2)^2. \end{aligned}$$

Из предложения 24 и выражений первых интегралов находим количество относительных равновесий в прообразах.

Предложение 25. В прообразе точки из пространства констант первых интегралов, отвечающей случаю наличия относительного равновесия, имеется по одному относительному равновесию для семейств δ_1, δ_2 и по два – для семейств δ_3, δ_4 .

5.3. Диаграммы Смейла

В работе [24] Смейл поставил вопрос о структуре бифуркационных диаграмм энергии–момента в системах с симметрией и решил его для натуральных механических систем: бифуркационная диаграмма Σ_{LH} отображения

$$L \times H : TM \rightarrow \mathbb{R}^2$$

(M – конфигурационное пространство) состоит из пар (ℓ, h) , в которых h – критическое значение так называемого эффективного потенциала – зависящей от константы ℓ интеграла момента L функции V_ℓ на конфигурационном пространстве \tilde{M} профакторизованной системы. Далее диаграммы Σ_{LH} называем диаграммами Смейла.

В работе [176] схема Смейла была распространена на механические системы с гироскопическими силами. К таким системам относится задача о движении твердого тела с неподвижной точкой (конфигурационное пространство $M = SO(3)$) с гамильтонианом (5.1.3). Профакторизованная система – это индуцированная система на $P^5 = \{(M, \alpha)\}$, так что $\tilde{M} = S^2(\alpha)$ – это сфера Пуассона. Эффективный потенциал на сфере задан в этом случае формулой

$$V_\ell(\alpha) = -\varepsilon_0 \alpha_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 (\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2) + \frac{(2\ell + \varepsilon_1 \alpha_2 \alpha_3)^2}{2[2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_3^2]}. \quad (5.3.1)$$

Поскольку критические точки отображения $L \times H$ – это в точности относительные равновесия, то критические точки V_ℓ описываются предложением 24: при заданном ℓ нужно выбрать Ω в соответствии с (5.2.2) так, что $L(\Omega\alpha, \alpha) = \ell$, то есть положить

$$\Omega = \frac{2\ell + \varepsilon_1 \alpha_2 \alpha_3}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_3^2}.$$

Образы семейств относительных равновесий в плоскости (ℓ, h) образуют кривые, формирующие диаграммы Смейла. Допуская некоторую

вольность, будем эти кривые обозначать так же, как и сами семейства:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 : h &= -\varepsilon_0 a + a^2 \Omega^2, \quad \ell = a^2 \Omega, \\
 \delta_2 : h &= \varepsilon_0 a + a^2 \Omega^2, \quad \ell = a^2 \Omega, \\
 \delta'_3, \delta''_3 : h &= -\frac{\varepsilon_0^2 (\varepsilon_1^2 - 3\Omega^2) + a^2 (\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^3}{2(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2}, \quad \ell = \frac{\Omega [\varepsilon_0^2 + a^2 (\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2]}{2(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2}, \\
 \delta_4 : h &= -\frac{\varepsilon_0^2}{4\varepsilon_1^2} - \varepsilon_1^2 a^2 + a^2 \Omega^2, \quad \ell = a^2 \Omega.
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Напомним обозначения (5.2.5).

Предложение 26. *В случае Ковалевской – Соколова существует четыре вида диаграмм Смейла, устойчивых относительно малых возмущений параметров. Разделяющими значениями параметров служат $\varepsilon_1^2 = \zeta_i$ ($i = 1, 2, 3$).*

Доказательство следует из свойств кривых δ_j и их взаимных пересечении. Перечислим необходимые факты.

Нетрудно видеть, что δ_1, δ_2 и δ_4 – это конгруэнтные параболы

$$\delta_i : h = c_i + \frac{\ell^2}{a}, \quad \ell \in \mathbb{R}, \tag{5.3.3}$$

причем

$$c_4 = -\frac{\varepsilon_0^2 + 4\varepsilon_1^4 a^2}{4\varepsilon_1^2} < c_1 = -\varepsilon_0 a < c_2 = \varepsilon_0 a.$$

Первое неравенство выполнено, естественно, в области параметров $\varepsilon_1^2 > \zeta_1$, где кривая δ_4 существует.

Диаграммы Смейла, очевидно, симметричны относительно оси $\ell = 0$, поэтому все дальнейшие рассуждения приводим для $\ell \geq 0$, не оговаривая это особо.

Кривая δ_3 не имеет простой явной зависимости. Отметим, что ее аналог в классическом случае Ковалевской ($\varepsilon_1 = 0$) можно записать в виде

$$\ell_{\pm} = \frac{1}{27\varepsilon_0^2} \left[h(h^2 + 9\varepsilon_0^2 a^2) \pm (h^2 - 3\varepsilon_0^2 a^2)^{3/2} \right],$$

так что на ℓ_+

$$h \in [\varepsilon_0 a \sqrt{3}, 2\varepsilon_0 a], \quad \ell^2 \in \left[\frac{4}{3\sqrt{3}} \varepsilon_0 a^3, \varepsilon_0 a^3 \right],$$

а на ℓ_-

$$h \in [\varepsilon_0 a \sqrt{3}, +\infty), \quad \ell^2 \in \left[\frac{4}{3\sqrt{3}} \varepsilon_0 a^3, +\infty \right).$$

Сегмент ℓ_+ соединяет точку C возврата кривой δ'_3

$$C: \quad \ell = a \sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}} \varepsilon_0 a}, \quad h = \varepsilon_0 a \sqrt{3}$$

с точкой T_1 касания кривых δ'_3 и δ_2

$$T_1: \quad \ell = a \sqrt{\varepsilon_0 a}, \quad h = 2\varepsilon_0 a.$$

При этом вся кривая δ'_3 находится строго выше кривой δ_1 , кривых δ''_3, δ_4 не существует. Соответствующая диаграмма показана на рис. 5.1,а, дополнительные обозначения будут объяснены позже.

Пусть $\varepsilon_1 > 0$.

Лемма 6. *В полуплоскости $\ell > 0$ кривая δ'_3 имеет с кривой δ_2 ровно одну точку касания T_1 и ровно одну точку пересечения p_1 . Кривая δ'_3 имеет единственную точку возврата C .*

Доказательство. Записывая условие пересечения кривой δ'_3 с параболой δ_2 в явной форме (5.3.3) и выполняя подстановку на δ'_3

$$\Omega^2 = \varepsilon_1^2 + \zeta_2 + v, \quad v > 0, \quad (5.3.4)$$

получим уравнение

$$v^2 P_1(v) = 0,$$

где

$$P_1(v) = a^3 v^3 - (\varepsilon_1^2 a - \varepsilon_0) a^2 v^2 - 2\varepsilon_0 (2\varepsilon_1^2 a + \varepsilon_0) a v - 2\varepsilon_0^2 (2\varepsilon_1^2 a + \varepsilon_0).$$

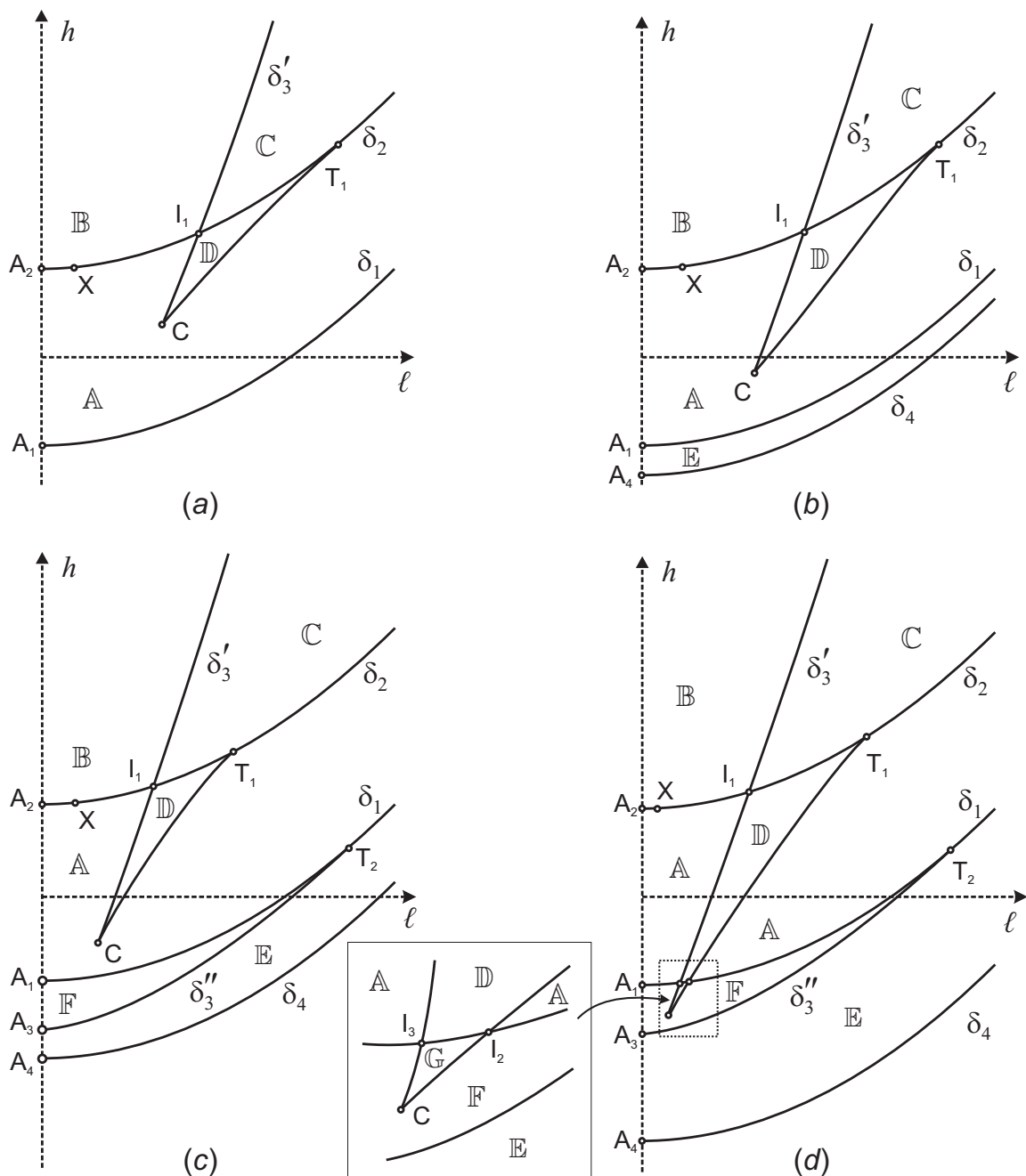


Рис. 5.1. Диаграммы Смейла и порожденные области

Кратный корень $v = 0$ отвечает точке касания в начале промежутка изменения Ω , координаты которой вычисляются так:

$$T_1 : \quad \ell = a\sqrt{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1^2 a)a}, \quad h = (2\varepsilon_0 + \varepsilon_1^2 a)a.$$

Многочлен $P_1(v)$, обладая свойствами $P_1(0) < 0$, $P_1'(0) < 0$, $P_1(+\infty) = +\infty$, имеет ровно один положительный, и притом простой, корень, отвечающий точке трансверсального пересечения δ_3' и δ_2 , обозначенной через p_1 .

Для нахождения точек возврата запишем на δ_3 систему

$$\partial_{\Omega} h = 0, \quad \partial_{\Omega} \ell = 0.$$

Получим одно уравнение, которое в подстановке (5.3.4) примет вид $P_2(v) = 0$, где

$$P_2(v) = a^3 v^3 + 3\varepsilon_0 a^2 v^2 - 2\varepsilon_0^2 (2\varepsilon_1^2 a + \varepsilon_0).$$

Очевидно, и этот многочлен на полупрямой $v > 0$ имеет единственный и простой корень, определяющий точку возврата C . \square

Отметим зависимости между ε_1 и Ω (для семейства δ_3') в точках p_1 и C , вытекающие из уравнений $P_1(v) = 0$ и $P_2(v) = 0$:

$$\begin{cases} p_1 : \varepsilon_1^2 = \frac{(av + \varepsilon_0)(a^2 v^2 - 2\varepsilon_0^2)}{a(av + 2\varepsilon_0)^2} \\ C : \varepsilon_1^2 = \frac{a^3 v^3 + 3\varepsilon_0 a^2 v^2 - 2\varepsilon_0^3}{4a\varepsilon_0^2} \end{cases} ; \quad v = \Omega^2 - \left(\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_0}{a}\right) \geq 0. \quad (5.3.5)$$

Для точки p_1 , принадлежащей также образу семейства δ_2 , значение Ω в δ_2 будет другим.

В качественном плане диаграмма Смейла, построенная для малых ε_1 , сохранится при увеличении ε_1 до значения $\varepsilon_1^2 = \zeta_2$, после которого появляется кривая δ_4 (рис. 5.1, b), лежащая строго ниже всех предыдущих кривых.

Дальнейшая эволюция диаграммы Смейла связана с появлением сегмента δ_3'' в момент $\varepsilon_1^2 = \zeta_2$. При этом значении ε_1 множество δ_3'' состоит из единственной точки на оси $\ell = 0$, принадлежащей δ_1 .

Лемма 7. При $\varepsilon_1^2 > \zeta_2$ в полуплоскости $\ell > 0$ кривая δ_3'' имеет с кривой δ_1 ровно одну точку касания T_2 и не имеет с ней точек пересечения.

Доказательство. Очевидно, что при таких значениях параметров кривая δ_3'' начинается при $\Omega = 0$ на оси $\ell = 0$ ниже кривой δ_1 . Условие пересечения кривой δ_3'' с параболой δ_1 , записанной в явной форме (5.3.3), в

подстановке

$$\Omega^2 = \varepsilon_1^2 - \zeta_2 - u, \quad u > 0 \quad (5.3.6)$$

дает уравнение $u^2 P_3(u) = 0$, где

$$P_3(u) = a^3 u^3 + (\varepsilon_1^2 a + \varepsilon_0) a^2 u^2 + 2\varepsilon_0(2\varepsilon_1^2 a - \varepsilon_0) a u + 2\varepsilon_0^2(2\varepsilon_1^2 a - \varepsilon_0).$$

Кратный корень $u = 0$ отвечает точке касания в конце промежутка изменения Ω , координаты которой вычисляются так:

$$T_2 : \quad \ell = a\sqrt{(\varepsilon_1^2 a - \varepsilon_0)a}, \quad h = (\varepsilon_1^2 a - 2\varepsilon_0)a.$$

Многочлен $P_3(u)$ при $\varepsilon_1^2 > \zeta_2$ положительных корней не имеет. \square

Легко проверить, что δ_3'' не имеет общих точек с другими кривыми в составе диаграммы Смейла. Отметим еще, что вдоль оси Ol точка T_2 всегда лежит левее точки T_1 (рис. 5.1,с).

Появление нового (и последнего) разделяющего значения $\varepsilon_1^2 = \zeta_3$ связано с возникновением пересечений кривых δ_3' и δ_1 в тот момент, когда на δ_1 попадает точка возврата C кривой δ_3' .

Лемма 8. *В полуплоскости $\ell > 0$ кривые δ_3' и δ_1 не имеют общих точек при $\varepsilon_1^2 < \zeta_3$ и имеют ровно две точки пересечения при $\varepsilon_1^2 > \zeta_3$.*

Доказательство. Условие пересечения δ_3' с параболой δ_1 в подстановке (5.3.4) дает, после сокращения на ненулевые множители, уравнение

$$a^3 v^3 - (\varepsilon_1^2 a - 5\varepsilon_0) a^2 v^2 + 6\varepsilon_0^2 a v + 2\varepsilon_0^3 = 0. \quad (5.3.7)$$

Из него выразим ε_1^2 как функцию v . При $v > 0$ эта функция имеет единственный экстремум, а именно, минимум в точке

$$v = (1 + \sqrt{3}) \frac{\varepsilon_0}{a},$$

и тогда из (5.3.7) получим значение $\varepsilon_1^2 = \zeta_3$. \square

Две точки пересечения δ'_3 с δ_1 обозначим через p_2, p_3 . Аналогично (5.3.5) отметим для этих точек зависимость между ε_1 и Ω , полученную из (5.3.7):

$$p_{2,3} : \varepsilon_1^2 = \frac{a^3 v^3 + 5\varepsilon_0 a^2 v^2 + 6\varepsilon_0^2 a v + 2\varepsilon_0^3}{a^3 v^2}, \quad v = \Omega^2 - \left(\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_0}{a}\right). \quad (5.3.8)$$

Здесь значение Ω взято в точках семейства δ'_3 , а в семействе δ_1 для тех же точек p_1, p_2 оно будет другим.

Диаграмма Смейла для случая $\varepsilon_1^2 > \zeta_3$ показана на рис. 5.1, d.

5.4. Показатели Морса и изоэнергетические многообразия

Пусть H_ℓ есть ограничение функции H на четырехмерное симплектическое многообразие P_ℓ^4 – фазовое пространство приведенной системы. Изоэнергетические многообразия $Q_{\ell,h}^3$ – это уровни функции H_ℓ , а относительные равновесия на P_ℓ^4 – это критические точки H_ℓ . Поэтому для классификации изоэнергетических многообразий нужно найти индекс Морса функции H_ℓ в точках семейств относительных равновесий, описанных в предложении 24. В свою очередь, индекс Морса функции H_ℓ в такой точке равен индексу Морса эффективного потенциала (5.3.1) как функции на сфере $S^2(\alpha)$ в точках (5.2.6). Индекс Морса как количество отрицательных собственных чисел второго дифференциала инвариантен относительно выбора систем координат. Однако сами собственные числа, которые ниже для краткости назовем показателями Морса, конечно, неинвариантны. Более того, при использовании избыточных координат для строгого вычисления показателей Морса нужно вводить функции с неопределенными множителями Лагранжа. Этого можно избежать, подобрав подходящим образом дифференциальный оператор, заменяющий второй дифференциал.

Лемма 9 ([54]). Пусть функция f определена и дифференцируема в окрестности сферы $S^2(\alpha) = \{\alpha^2 = a^2\}$. Введем дифференциальный оператор

$$\mathbf{D} = \alpha \times \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Тогда критические точки ограничения $f|_{S^2}$ определяются уравнением

$$\mathbf{D}f = 0,$$

а в качестве показателей для определения индекса Морса можно взять корни квадратного уравнения

$$\frac{1}{\mu} \det(\mathbf{D}^2 f - \mu E) = 0. \quad (5.4.1)$$

Очевидно, что какие-либо изменения свойств относительных равновесий внутри семейств, объединенных вдобавок по всем значениям физических параметров, могут происходить либо при глобальном изменении семейства на разделяющем значении параметров, либо при пересечении точкой семейства одной из отмеченных выше узловых точек диаграммы Смейла, каковыми являются $T_1, T_2, C, p_1, p_2, p_3$. По договоренности, фиксируем произвольные положительные параметры a, ε_0 и рассматриваем произвольные значения $\varepsilon_1 > 0$. В расширенном пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, \varepsilon_1)$ образы семейств относительных равновесий заполняют поверхности δ_i . Кривые, образованные множествами узловыми точками, разбивают эти поверхности на подобласти, в которых сохраняются свойства соответствующих относительных равновесий. Подобласти будем снабжать вторым индексом, так что они получают обозначения вида δ_{ij} .

Поскольку не все поверхности – образы относительных равновесий однозначно проектируются на координатные плоскости расширенного пространства, оказывается удобным изображать их на плоскости (ε_1, Ω) , где Ω – величина, определяющая угловую скорость относительного равновесия, и одновременно параметр кривых в записи (5.3.2). Поскольку

мы условились считать все параметры и величину ℓ неотрицательными, то все зависимости можно записать через $\varepsilon_1^2, \Omega^2$. Поэтому в дальнейшем мы применяем обозначения

$$\zeta = \varepsilon_1^2, \quad W = \Omega^2, \quad (5.4.2)$$

используемые в том числе и на иллюстрациях.

Начнем с семейства δ_1 . На плоскости (ζ, W) разделяющие кривые отвечают случаям $\zeta = \zeta_1$ (при этом узловыми становятся все точки δ_1 , так как из них рождается кривая δ_4), образу точки T_2 , которая отвечает значению $u = 0$ в (5.3.6) и дает

$$W = \zeta - \zeta_2,$$

и образу пары точек p_2, p_3 , который в силу (5.3.8) запишется в параметрической форме

$$\zeta = \frac{(\varepsilon_0 + av)(2\varepsilon_0^2 + 4a\varepsilon_0v + a^2v^2)}{a^3v^2}, \quad W = \frac{(2\varepsilon_0^2 + 4a\varepsilon_0v + a^2v^2)^2}{2av^2(\varepsilon_0 + av)}, \quad v > 0. \quad (5.4.3)$$

Здесь $W = \Omega^2$ отвечает параметру на δ_1 в записи (5.3.2). Таким образом, возникают четыре типа относительных равновесий в семействе δ_1 . На рис. 5.2,а они обозначены через $\delta_{11} - \delta_{14}$.

Корни уравнения (5.4.1) в подстановке точек δ_1 из (5.2.6) имеют вид:

$$\mu_1 = a(\varepsilon_0 - 2\varepsilon_1^2a), \quad \mu_2 = \Omega^2 + a(\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2a),$$

и знаки показателей Морса на δ_1 таковы: $(++)$ для δ_{11} ; $(-+)$ для δ_{12} ; $(--)$ для δ_{13} и для δ_{14} . Число минусов есть индекс Морса функции H_ℓ в соответствующем относительном равновесии.

Рассмотрим семейство δ_2 . На плоскости (ζ, W) разделяющие кривые отвечают образу точки T_1 , которая отвечает значению $v = 0$ в (5.3.4) и дает

$$W = a(\varepsilon_0 + a\zeta), \quad (5.4.4)$$

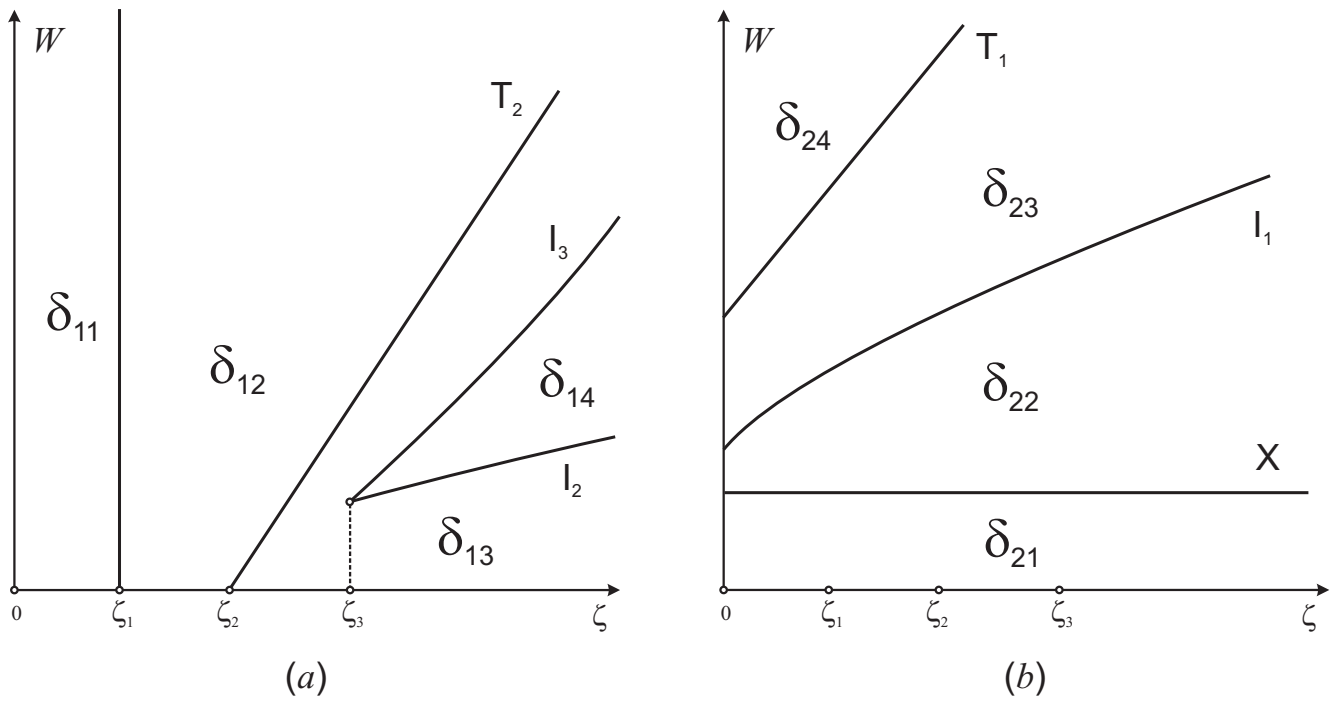


Рис. 5.2. Разбиение семейств (a) δ_1 ; (b) δ_2

и образу точки p_1 , который в силу (5.3.5) запишется в параметрической форме

$$\zeta = \frac{(\varepsilon_0 + av)(a^2v^2 - 2\varepsilon_0^2)}{a(2\varepsilon_0 + av)^2}, \quad W = \frac{a(2\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0av + a^2v^2)^2}{2(\varepsilon_0 + av)(2\varepsilon_0 + av)^2}, \quad v \geq \sqrt{2\frac{\varepsilon_0}{a}}.$$

Здесь $W = \Omega^2$ отвечает параметру на δ_2 в записи (5.3.2). Кроме того, на плоскости (ζ, W) имеется прямая $W = \zeta_1$, соответствующая значению параметра Ω кривой δ_2

$$\Omega = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2a}}, \quad (5.4.5)$$

которое порождает на δ_2 у всех диаграмм Смейла (см. рис. 5.1) точку

$$X: \quad \ell = a\sqrt{\frac{a\varepsilon_0}{2}}, \quad h = \frac{3a\varepsilon_0}{2}. \quad (5.4.6)$$

Об этой точке ниже будет сказано особо при вычислении типов. Подчеркнем, что (5.4.5) не имеет отношения к разделяющему значению $\zeta = \zeta_1$.

Таким образом, возникают четыре типа относительных равновесий в семействе δ_2 . На рис. 5.2,b они обозначены через $\delta_{21} - \delta_{24}$.

Корни уравнения (5.4.1) в подстановке точек δ_2 из (5.2.6) имеют вид:

$$\mu_1 = -a(\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1^2 a), \quad \mu_2 = \Omega^2 - a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1^2 a).$$

Первый всегда отрицателен, второй меняет знак при переходе через точку T_1 согласно (5.4.4). Итак, знаки показателей Морса на δ_2 таковы: $(--)$ для $\delta_{21} - \delta_{23}$; $(-+)$ для δ_{24} , что и определяет индекс Морса приведенного гамильтониана H_ℓ .

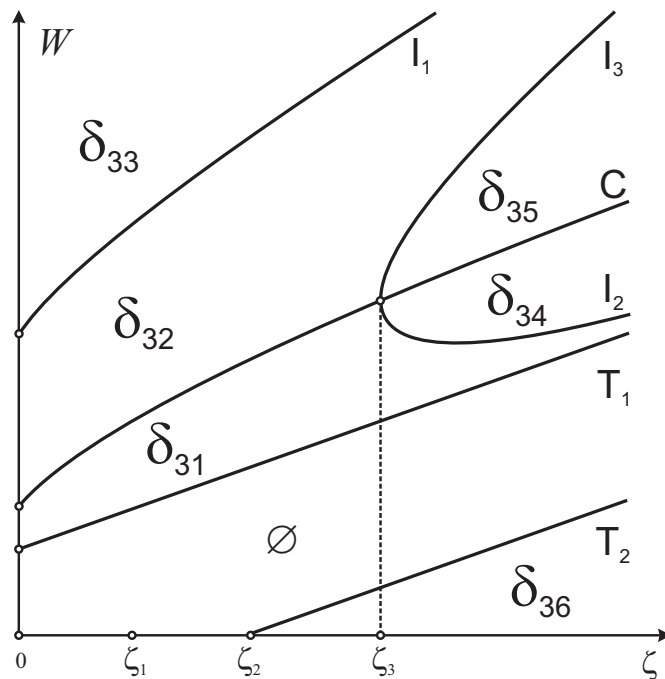


Рис. 5.3. Разбиение семейства δ_3

Обратимся к семейству δ_3 . На плоскости (ζ, W) разделяющие кривые – это образ точек T_1, T_2 , которые отвечают значению $v = 0$ в (5.3.4) и значению $u = 0$ в (5.3.6). Используя параметр $W = \Omega^2$ семейства δ_3 , получим

$$T_1 : W = \zeta + \zeta_2, \quad T_2 : W = \zeta - \zeta_2.$$

Из (5.3.5) найдем выражения для образов точки возврата C и точки пе-

пересечения p_1 :

$$C : \quad \zeta = \frac{a^3 v^3 + 3\varepsilon_0 a^2 v^2 - 2\varepsilon_0^3}{4a\varepsilon_0^2}, \quad W = \frac{(\varepsilon_0 + av)(2\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0 av + a^2 v^2)}{4a\varepsilon_0^2},$$

$$v \geq (\sqrt{3} - 1) \frac{\varepsilon_0}{a};$$

$$p_1 : \quad \zeta = \frac{(av + \varepsilon_0)(a^2 v^2 - 2\varepsilon_0^2)}{a(av + 2\varepsilon_0)^2}, \quad W = \frac{2(\varepsilon_0 + av)^3}{a(2\varepsilon_0 + av)^2}, \quad v \geq \sqrt{2} \frac{\varepsilon_0}{a}.$$

Наконец, образ пары точек p_2, p_3 найдем из (5.3.8):

$$p_2, p_3 : \quad \zeta = \frac{(\varepsilon_0 + av)(2\varepsilon_0^2 + 4a\varepsilon_0 v + a^2 v^2)}{a^3 v^2}, \quad W = \frac{2(\varepsilon_0 + av)^3}{a^3 v^2}, \quad v > 0.$$

Отметим, что, в отличие от представления (5.4.3), здесь $W = \Omega^2$ – параметр семейства δ_3 .

Нанесем полученные кривые на плоскость (ζ, W) , получим разбиение семейства δ_3 на шесть подсемейств, как показано на рис. 5.3. Между прямыми, порожденными точками T_1, T_2 , относительных равновесий нет, что соответствует разрыву между подсемействами δ'_3 и δ''_3 .

Корни уравнения (5.4.1) в подстановке точек δ_3 из (5.2.6) простого выражения не имеют. Для того чтобы установить индекс Морса функции H_ℓ на семействе δ_3 , выпишем вначале свободный член уравнения (5.4.1). Отбрасывая заведомо положительные сомножители, получим

$$\operatorname{sgn} \mu_1 \mu_2 = \operatorname{sgn} \left\{ [a^2(\zeta - W)^2 - \varepsilon_0^2][a^2(W - \zeta)^3 - \varepsilon_0^2(\zeta + 3W)] \right\}.$$

Первый сомножитель в правой части обращается в нуль в точках T_1, T_2 , являющихся граничными для семейств δ'_3, δ''_3 , то есть внутри семейств влияния на изменение знаков μ_1, μ_2 он не оказывает. Более того, он положителен внутри обоих семейств. Обращение в нуль второго сомножителя соответствует, как легко видеть, точке возврата C . Поэтому ниже кривой, порожденной точкой C этот сомножитель отрицателен (например, при $W = 0$), а выше – положителен (что очевидно при больших $W > 0$). Итак, $\mu_1 \mu_2 < 0$ на $\delta_{31}, \delta_{34}, \delta_{36}$ и $\mu_1 \mu_2 > 0$ на $\delta_{32}, \delta_{33}, \delta_{35}$. Осталось

определить общий знак μ_1, μ_2 для последних трех подсемейств. Запишем выражение для суммы показателей:

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= a^2(\zeta - 2W) + \frac{1}{(W - \zeta)^2[\varepsilon_0^2 W + a^2(W - \zeta)^2(W + 2\zeta)]} \times \\ &\times [a^2\varepsilon_0^2(W - \zeta)^2(5W^2 + 3W\zeta - 3\zeta^2) - a^4(W - \zeta)^4\zeta^2 - \varepsilon_0^4 W(3W + 5\zeta)] = \\ &= a^2(\zeta - 2W) + O(W^{-1}). \end{aligned}$$

Очевидно, при больших $W > 0$ эта сумма отрицательна, а так как выше кривой, отвечающей точке возврата C , знаки μ_1, μ_2 неизменны, то на $\delta_{32}, \delta_{33}, \delta_{35}$ оба показателя отрицательны.

Наконец, образ на плоскости (ℓ, h) семейства δ_4 , существующей при условии $\varepsilon_1^2 > \zeta_1$, не имеет никаких пересечений с другими кривыми, поэтому ни семейство, ни обозначенная так же кривая, дополнительных разбиений не получают. Корни уравнения (5.4.1) в подстановке точек δ_4 из (5.2.6) таковы:

$$\mu_1 = \frac{4\varepsilon_1^2 a^2 - \varepsilon_0^2}{2\varepsilon_1^2}, \quad \mu_2 = \frac{8\varepsilon_1^2 a^4 (\varepsilon_1^2 + \Omega^2)^2}{\varepsilon_0^2 + 4\varepsilon_1^2 a^2 (\varepsilon_1^2 + 2\Omega^2)}.$$

Очевидно, в области существования они всегда положительны, так что здесь положительны все показатели Морса функции H_ℓ .

Найденная информация об относительных равновесиях собрана в табл. 5.4.1 (последний столбец обсуждается в следующем параграфе). Зная количество точек и индекс Морса, находим топологические типы $Q_{\ell,h}^3$ и характер бифуркаций (в таблице они записаны в направлении возрастания h). В расширенном пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, \varepsilon_1)$ объединение диаграмм Смейла определяет семь областей с непустыми $Q_{\ell,h}^3$ (очевидно, что ниже всех парабол $Q_{\ell,h}^3 = \emptyset$). Эти области обозначены через $\mathbb{A} - \mathbb{G}$. В случае рис. 5.1,а все эти многообразия известны из случая Ковалевской [102]: $\mathbb{A}) S^3$; $\mathbb{B}) \mathbb{R}P^3$; $\mathbb{C}) S^2 \times S^1$; $\mathbb{D}) N_2^3$. Здесь и далее через N_m^3 обозначена связная сумма m экземпляров $S^2 \times S^1$. Такое изоэнергетическое многообразие получается в схеме Смейла как приведенное расслоение окруж-

ностей над двумерным диском с m дырками. В частности, естественно считать $N_0^3 = S^3$, $N_1^3 = S^2 \times S^1$. Для области \mathbb{E} получим $Q_{\ell,h}^3 = 2S^3$ из очевидной бифуркации на δ_4 (рис. 5.1, *b*). В область \mathbb{F} удобно спуститься из области \mathbb{A} через точку семейства δ_{13} с индексом Морса 2, что соответствует вырезанию дырки в диске на сфере $S^2(\alpha)$, отвечающем области \mathbb{A} . Поэтому многообразие $Q_{\ell,h}^3$ в области \mathbb{F} связно и диффеоморфно $S^2 \times S^1$. В частности, переход к нему из области \mathbb{E} через пару точек семейства δ_{36} – это приклейка двух ручек к двум сферам так, что результат связан, то есть хотя бы одна ручка приклеивается своими концами к разным сферам. Наконец, в область \mathbb{G} также удобно спуститься из области \mathbb{A} через точку семейства δ_{14} с индексом Морса 2, что соответствует вырезанию дырки в диске на сфере $S^2(\alpha)$, отвечающем области \mathbb{D} , который уже имеет две дырки. Поэтому результатом для \mathbb{G} является N_3^3 . Интересно отметить, что изоэнергетическое многообразие N_3^3 в классической динамике твердого тела (движение вокруг неподвижной точки в поле только силы тяжести) возможно в случае общего положения центра масс [177] (историю вопроса можно найти в [99]), однако, в интегрируемых задачах оно ранее появлялось лишь в случаях Клебша [178] и Соколова [145] для задачи Кирхгофа движения тела в жидкости (что в соответствующей задаче о движении вокруг неподвижной точки в первом случае означает наличие центрального ньютоновского поля вместо поля силы тяжести, а во втором предполагает наличие гироскопических сил, зависящих от ориентации тела). Изоэнергетические многообразия случая Клебша классифицированы в работе [100] (где, собственно, впервые и обнаружилось изоэнергетическое многообразие N_3^3), фазовая топология случая Соколова изучена в работе [63]. Случай Соколова для уравнений Кирхгофа является предельным для рассматриваемой здесь задачи при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. При таком переходе сохраняются области $\mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$, а новых областей не возникает. В частности, любая из областей $\mathbb{A} - \mathbb{G}$ при

деформации параметров имеет выход либо на классический случай Ковалевской ($\varepsilon_1 = 0$), либо на случай Соколова для уравнений Кирхгофа ($\varepsilon_0 = 0$).

Таблица 5.4.1. Классы относительных равновесий

Код	К-во точек	Индекс Морса	Сегменты	Бифуркация $Q_{\ell,h}^3$	Тип
δ_{11}	1	0	$[A_1, \infty)$	$\emptyset \rightarrow S^3$	“центр-центр”
δ_{12}	1	1	$[A_1, \infty), (b)$ $[T_2, \infty), (c, d)$	$2S^3 \rightarrow S^3 \# S^3 = S^3$	“центр-седло”
δ_{13}	1	2	$[A_1, T_2], (c)$ $[A_1, p_3] \cup [p_2, \infty), (d)$	$S^2 \times S^2 \rightarrow S^3$	“седло-седло”
δ_{14}	1	2	$[p_3, p_2], (d)$	$N_3^3 \rightarrow N_2^3$	“седло-седло”
δ_{21}	1	2	$[A_2, X]$	$S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$	“седло-седло”
δ_{22}	1	2	$[X, p_1]$	$S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$	“седло-седло”
δ_{23}	1	2	$[p_1, T_1]$	$N_2^3 \rightarrow S^2 \times S^1$	“седло-седло”
δ_{24}	1	1	$[T_1, \infty)$	$S^3 \rightarrow S^2 \times S^1$	“центр-седло”
δ_{31}	2	1	$[T_1, C], (a, b, c)$ $[T_1, p_2], (d)$	$S^3 \rightarrow N_2^3$	“центр-седло”
δ_{32}	2	2	$[C, p_1], (a, b, c)$ $[p_3, p_1], (d)$	$N_2^3 \rightarrow S^3$	“центр-центр”
δ_{33}	2	2	$[p_1, \infty)$	$S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^3$	“центр-центр”
δ_{34}	2	1	$[p_2, C], (d)$	$S^2 \times S^1 \rightarrow N_3^3$	“центр-седло”
δ_{35}	2	2	$[C, p_3], (d)$	$N_3^3 \rightarrow S^2 \times S^1$	“центр-центр”
δ_{36}	2	1	$[A_3, T_2], (c, d)$	$2S^3 \rightarrow S^2 \times S^1$	“центр-седло”
δ_4	2	0	$[A_4, \infty), (b, c, d)$	$\emptyset \rightarrow 2S^3$	“центр-центр”

5.5. Типы и устойчивость относительных равновесий

Хорошо известно [8], что в неподвижной точке матрица линеаризации канонических уравнений с гамильтонианом H задает оператор $A_H : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$, у которого характеристический многочлен содержит только

четные степени. Соответствующие собственные числа полностью определяют характер устойчивости, если все они различны. В силу вырожденности скобки (5.1.1) или, что то же самое, в силу наличия интегралов (5.1.4), два собственных числа оператора A_H нулевые. Обозначим через $\varrho_H(\mu)$ характеристический многочлен A_H , сокращенный на μ^2 . Очевидно, многочлен $\varrho_H(\mu)$ есть биквадрат. Заменяя в уравнениях (5.1.2) гамильтониан H на первый интеграл K , той же процедурой получим оператор A_K и биквадратный трехчлен $\varrho_K(\mu)$.

Полагая $\lambda = \mu^2$ и используя формулы (5.2.6) выпишем явно квадраты корней $\varrho_H(\mu)$ в точках найденных семейств относительных равновесий:

$$\begin{aligned} \delta_1 : \quad & \lambda_1 = a^2 \left(\varepsilon_1^2 - \frac{\varepsilon_0}{2a} \right), \quad \lambda_2 = a^2 \left[\left(\varepsilon_1^2 - \frac{\varepsilon_0}{a} \right) - \Omega^2 \right]; \\ \delta_2 : \quad & \lambda_1 = a^2 \left(\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_0}{2a} \right), \quad \lambda_2 = a^2 \left[\left(\varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_0}{a} \right) - \Omega^2 \right]; \\ \delta_3 : \quad & \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{a^2(\varepsilon_1^2 + \Omega^2)}{(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2} \left[(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2 - \frac{\varepsilon_0^2}{a^2} \right] \\ \lambda_2 = \frac{a^2}{4(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^2} \left[(\varepsilon_1^2 - \Omega^2)^3 + \frac{\varepsilon_0^2}{a^2}(\varepsilon_1^2 + 3\Omega^2) \right] \end{cases}; \\ \delta_4 : \quad & \lambda_1 = -\frac{a^2}{\varepsilon_1^2} \left[\varepsilon_1^4 - \frac{\varepsilon_0^2}{4a^2} \right], \quad \lambda_2 = -a^2(\varepsilon_1^2 + \Omega^2). \end{aligned}$$

Напомним, что в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, имеющей два функционально независимых первых интеграла H, K , тип неподвижной точки определяется для так называемых невырожденных точек. Критерий невырожденности состоит в том, что операторы A_H, A_K линейно независимы и найдется такая их линейная комбинация, у которой все собственные числа различны [26, 122]. Пусть A такая комбинация. Оператор A называется в этом случае регулярным элементом (алгебры симплектических операторов, порожденной парой A_H, A_K). Говорят, что неподвижная точка имеет тип “центр-центр”, если все собственные числа A чисто мнимые, тип “седло-седло”, если все они

вещественные, и тип “центр-седло”, если одна пара собственных чисел чисто мнимая, а вторая вещественна. Теоретически имеется еще один случай, когда собственные числа A имеют вид $(\pm a \pm bi)$ с $ab \neq 0$. Такие неподвижные точки называются фокусными. При этом характеристический многочлен регулярного элемента неприводим над \mathbb{R} . Однако уже из полученных выражений для $\varrho_H(\mu)$ следует, что в рассматриваемой задаче фокусных точек нет.

Найденные значения показывают, что многочлен $\varrho_H(\mu)$ имеет нулевые корни только в некоторых из случаев, отмеченных выше как разделяющие для семейств δ_i . Более точно, нулевые корни существуют

- в семействе δ_1 лишь при значении $\varepsilon_1^2 = \zeta_1$, когда от δ_1 отщепляется семейство δ_4 , и в точке T_2 ;
- в семействе δ_2 только в точке T_1 ;
- в семействе δ_3 только в точках T_1, T_2 и C .

В семействе δ_4 , за исключением момента его появления, все корни $\varrho_H(\mu)$ чисто мнимые.

Рассмотрим возможность другого типа вырождения, а именно, случай наличия двух одинаковых пар корней $\lambda_1 = \lambda_2$. На кривых δ_1, δ_4 это, очевидно, невозможно. На кривой δ_2 это равенство дает значение (5.4.5), которому отвечает точка (5.4.6) на диаграммах Смейла. При этом совпадающие пары вещественны. Вычисляя многочлен $\varrho_\Phi(\mu)$ для произвольной комбинации $\Phi = \varkappa_1 K + \varkappa_2 H$, убеждаемся, что совпадение пар корней сохраняется для относительного равновесия в прообразе точки X для любого такого интеграла Φ . Поэтому это относительное равновесие всегда вырождено, хотя на характер бифуркации $Q_{\ell,h}^3$ это не влияет, и по-прежнему касательное пространство к P_ℓ^4 можно разложить в прямую сумму плоскостей, в проекции на каждую из которых соответству-

ющая неподвижная точка приведенной системы будет выглядеть седловой. Заметим, что операторы A_H и A_K остаются в этой точке линейно независимыми.

На кривой δ_3 в обозначениях (5.4.2) равенство $\lambda_1 = \lambda_2$ дает

$$a^2(W - \zeta)^2(3W + 5\zeta) - \varepsilon_0^2(W + 3\zeta) = 0.$$

Выполним подстановку $W = \zeta + \zeta_2 x$. Из условий для параметров на кривой δ_3 следует, что $|x| \geq 1$. Получим

$$\zeta = \frac{\varepsilon_0 (3x^2 - 1)x}{4a (2x^2 - 1)}, \quad W = -\frac{\varepsilon_0 (5x^2 - 3)x}{4a (2x^2 - 1)},$$

то есть ζ, W должны иметь разные знаки, что невозможно. Итак, на кривой δ_3 случаев $\lambda_1 = \lambda_2$ нет.

В результате приходим к следующему утверждению.

Предложение 27. *В интегрируемом случае Ковалевской – Соколова все относительные равновесия невырождены, за исключением тех, которые лежат в прообразе точек T_1, T_2, C, X , и всех относительных равновесий совпадающих семейств $\delta_1 = \delta_4$ при разделяющем значении параметров $\varepsilon_1^2 = \zeta_1$. Невырожденные относительные равновесия имеют тип, указанный в последнем столбце табл. 5.4.1.*

Поскольку все типы относительных равновесий удалось определить, исходя из многочлена $\varrho_H(\mu)$, то они полностью определяют характер устойчивости соответствующих неподвижных точек приведенной системы: точки типа “центр-центр” устойчивы по всем переменным, точки типа “седло-седло” неустойчивы по всем переменным, а точки типа “центр-седло” устойчивы по двум переменным, а по двум – неустойчивы.

Топология так называемой насыщенной четырехмерной окрестности неподвижной точки интегрируемой системы с двумя степенями сво-

боды полностью определена типом для точек “центр-центр” и “центр-седло” [26, 122]. Для седловых особенностей возможны различные варианты. Их определение требует знания топологии двумерных регулярных уровней первых интегралов приведенных систем в окрестности неподвижных точек и характера их бифуркаций. Следующий раздел содержит необходимую информацию по грубой топологии рассматриваемой задачи.

5.6. Разделение переменных и дискриминантные поверхности

Система на коалгебре \mathfrak{g}_0 со скобкой (5.1.1) и гамильтонианом (5.1.3) тесно связана с обобщением случая Ковалевской на пучок коалгебр $\mathfrak{g}_\varkappa = \{(M, p)\}$ ($\varkappa \neq 0$), в котором скобка Пуассона имеет вид

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} M_k. \quad (5.6.1)$$

Это обобщение найдено в работе [28], там же предложена цепочка замен переменных, приводящих в конечном итоге к разделенным уравнениям типа Ковалевской. Более подробно этот результат представлен в работе [29]. Во многих публикациях имеются модификации разделения переменных для этой задачи (см., например, [179–182]). Формулы построения разделения переменных в [181, 182], по существу, следуют тому варианту, который предложил Кёттер [183] для классического случая Ковалевской, однако, полученные переменные разделения все же не коммутируют. Чтобы записать результат разделения для рассматриваемой здесь задачи, рассмотрим диффеоморфизм коалгебры \mathfrak{g}_0 на коалгебру \mathfrak{g}_\varkappa с $\varkappa < 0$, которая, как известно, есть $so(3, 1)^*$, причем нормировкой вектора p всегда можно добиться равенства $\varkappa = -1$. Этот пуассонов диффеоморфизм $(M, \alpha) \mapsto (M, p)$, переводящий скобку (5.1.1) в скобку (5.6.1) в

общем случае имеет вид [184]

$$\mathbf{p} = c_1 \boldsymbol{\alpha} + c_2 \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{M}, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \quad (5.6.2)$$

Очевидно, для того чтобы гамильтониан (5.1.3) перешел в гамильтониан Ковалевской

$$H = \frac{1}{4}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2) - cp_1,$$

необходимо положить

$$c_1 = c^{-1} \varepsilon_0, \quad c_2 = c^{-1} \varepsilon_1. \quad (5.6.3)$$

Преобразование, обратное к (5.6.2), запишется в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \frac{c}{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 M^2} [\varepsilon_0^2 \mathbf{p} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mathbf{M} \times \mathbf{p} + \varepsilon_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{M}] = \\ &= c \mathbf{p} + \frac{\varepsilon_1 c}{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 M^2} [\varepsilon_0 \mathbf{M} \times \mathbf{p} + \varepsilon_1 \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Из (5.6.2), (5.6.3) для параметра пучка найдем

$$\varkappa = -\frac{a^2 \varepsilon_1^2}{c^2},$$

поэтому нужная нормировка скобки на $so(3, 1)^*$ достигается выбором параметра c . Функции Казимира для коалгебры \mathfrak{g}_{-1} возьмем в виде

$$G = \mathbf{p}^2 - M^2, \quad F = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}.$$

Соответствующие константы обозначим через g, f . Преобразование (5.6.4) с учетом нормировки связывает константы c, f, g и ε_1, a, ℓ соответственно

$$c = \varepsilon_1 a, \quad g = \frac{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^4 \ell^2}{\varepsilon_1^2}, \quad f = \varepsilon_0 \varepsilon_1 a \ell.$$

Обратное к нему

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{f} \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + 4f^2} - g}{2}}, \quad a = \frac{cf}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{g^2 + 4f^2} - g}}, \quad \ell = \frac{f}{c \varepsilon_0}.$$

Здесь, как и ранее, удобно считать $\varepsilon_0 > 0$ фиксированным.

Таким образом, все известные разделения переменных для случая Ковалевской – Комарова на $so(3, 1)^*$ переносятся на задачу Ковалевской – Соколова. Полученные в результате зависимости допускают предельный переход при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ к классическому волчку Ковалевской (как и случай Ковалевской – Комарова, если не нормировать параметр \varkappa). С другой стороны, сам случай Ковалевской – Соколова является предельным для обобщенного двухполевого гиростата Соколова – Цыганова, интегрируемость которого доказана в [86] (при обращении в ноль второго однородного поля). Для полного согласования с исследованиями особых (критических) движений классического волчка Ковалевской [76, 103, 114] и гиростата Соколова – Цыганова [66, 89] будем строго следовать методу Кёттера.

Введем переменные ($i^2 = -1$)

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}(M_1 + i M_2), & w_2 &= \frac{1}{2}(M_1 - i M_2), & w_3 &= M_3, \\ x_1 &= \alpha_1 + i \alpha_2, & x_2 &= \alpha_1 - i \alpha_2, & z &= \alpha_3, \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

и обозначим

$$\begin{aligned} R(w) &= -w^4 + 2hw^2 + 4\varepsilon_0 \ell w - k + \varepsilon_1^2 [a^2(2h + \varepsilon_1^2 a^2) - 4\ell^2] + \varepsilon_0^2 a^2, \\ R(w_1, w_2) &= \frac{1}{2}[R(w_1) + R(w_2) + (w_1^2 - w_2^2)^2]. \end{aligned}$$

Прямое применение метода Кёттера приводит к следующему результату.

Предложение 28 ([184]). *Переменные типа Ковалевской*

$$s_1 = \frac{R(w_1, w_2) - \sqrt{R(w_1)R(w_2)}}{(w_1 - w_2)^2}, \quad s_2 = \frac{R(w_1, w_2) + \sqrt{R(w_1)R(w_2)}}{(w_1 - w_2)^2}$$

коммутируют $\{s_1, s_2\} = 0$ и их динамика описывается разделенными уравнениями

$$(s_1 - s_2)^2 \dot{s}_1^2 = -2P(s_1)\varphi(s_1), \quad (s_1 - s_2)^2 \dot{s}_2^2 = -2P(s_2)\varphi(s_2),$$

где

$$P(s) = [s - (h + \varepsilon_1^2 a^2)]^2 - k,$$

$$\varphi(s) = s^3 - 2hs^2 + [(h + \varepsilon_1^2 a^2)^2 + a^2 \varepsilon_0^2 - 4\varepsilon_1^2 \ell^2 - k]s - 2\varepsilon_0^2 \ell^2.$$

Оказывается, что в этой задаче бифуркации первых интегралов в точности соответствуют дискриминантному множеству многочлена, участвующего в разделенных уравнениях, с обычными оговорками вещественности решений.

Теорема 41. *Бифуркационная диаграмма полного отображения момента*

$$\mathcal{F} = H \times L \times K : P^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

случая Ковалевской – Соколова есть отвечающая вещественным решениям часть дискриминантного множества многочлена $S(s) = P(s)\varphi(s)$, которое состоит из следующих поверхностей:

$$\Pi_1 : k = 0;$$

$$\Pi_2 : k = \frac{1}{4\varepsilon_1^4} [2\varepsilon_1(h + \varepsilon_1^2 a^2) + \varepsilon_0^2]^2;$$

$$\Pi_3 : k = \frac{[a^2(h + \varepsilon_1^2 a^2) - 2\ell^2]^2}{a^4};$$

$$\Pi_4 : \begin{cases} \ell^2 = \frac{1}{\varepsilon_0^2} (h - s)s^2 \\ k = \frac{4\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} s^3 + \left(3 - \frac{4\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2} h\right) s^2 - 4hs + a^2 \varepsilon_0^2 + (h + \varepsilon_1^2 a^2)^2 \end{cases}.$$

Доказательство можно получить из результатов работ [66, 89], где дано описание бифуркационных диаграмм и множества критических точек отображения момента для гиростата в двойном поле. В частности, в этих работах множество критических точек отображения момента представлено как объединение так называемых критических подсистем.

5.7. Критическое множество и типы критических точек

Чтобы сформулировать описание критического множества отображения момента в случае Ковалевской – Соколова, напомним понятие критической подсистемы [87–89]. Рассмотрим неприводимую интегрируемую систему с тремя степенями свободы с инволютивным набором интегралов, который обозначим так же, как и в нашей задаче, через H, L, K . Предположим, для простоты, что в ней отсутствуют фокусные особенности ранга 1. Тогда в представлении бифуркационной диаграммы отображения момента в виде двумерного клеточного комплекса, будут отсутствовать изолированные одномерные клетки. Пусть

$$\Phi(h, \ell, k) = 0$$

уравнение двумерной поверхности, несущей на себе некоторую двумерную клетку бифуркационной диаграммы. Рассмотрим систему уравнений

$$\Phi = 0, \quad d\Phi = 0, \quad (5.7.1)$$

в которой вместо (h, ℓ, k) подставлены соответствующие функции. Ранг этой системы на множестве ее решений \mathcal{N}_Φ почти всюду равен двум. Поэтому множество решений есть замыкание четырехмерного многообразия \mathcal{N}_Φ^0 , состоящего целиком из критических точек ранга 2. На \mathcal{N}_Φ индуцируется динамическая система, которая почти всюду гамильтонова с двумя степенями свободы. Множество \mathcal{N}_Φ называем критической подсистемой, порожденной функцией Φ .

С другой стороны многообразию \mathcal{N}_Φ^0 может быть записано в виде системы инвариантных соотношений

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad (5.7.2)$$

в которой функции φ_1, φ_2 независимы на \mathcal{N}_Φ^0 . В таком представлении мож-

но говорить, что критическая подсистема $\mathcal{N}_\Phi = \text{Cl}(\mathcal{N}_\Phi^0)$ определена инвариантными соотношениями (5.7.2).

Известно [162], что 2-форма, индуцированная на \mathcal{N}_Φ^0 симплектической структурой фазового пространства, вырождается на множестве $\{\varphi_1, \varphi_2\} = 0$.

Замечание 15. Обычно систему инвариантных соотношений можно выбрать так, чтобы было

$$\dot{\varphi}_1 = \varkappa_1 \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = \varkappa_2 \varphi_1$$

с некоторыми функциями \varkappa_1, \varkappa_2 (точкой обозначено дифференцирование в силу исходной гамильтоновой системы). Тогда (см., например, [72]) скобка $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ будет частным интегралом на \mathcal{N}_Φ^0 и, следовательно, на его замыкании \mathcal{N}_Φ . В [26] отмечено, что на многообразиях, сформированных невырожденными критическими точками одного ранга, индуцированная симплектическая структура не вырождается. В частности, это означает, что нулевой уровень частного интеграла $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ целиком состоит из вырожденных критических точек.

В нашем случае механическая система на $SO(3)$ приводима и, после факторизации по группе симметрий S^1 вращений трехмерного пространства вокруг вектора α , решения систем вида (5.7.1) заполняют трехмерные многообразия в P^5 , расслоенные уровнями интеграла L на почти гамильтоновы системы с одной степенью свободы в P_ℓ^4 . В частности, рангом критической точки отображения момента будем называть ее ранг в приведенной системе на P_ℓ^4 .

Далее следуем процедуре, описанной в [89], с учетом приводимости нашей системы. Пусть Φ – функция, порождающая критическую подсистему \mathcal{N}_Φ . Рассмотрим композицию $\Phi \circ \mathcal{F}$ функции Φ с отображением момента на всем $\mathbb{R}^6(\mathbb{M}, \alpha)$ и вычислим характеристический многочлен соответствующего этой функции симплектического оператора, то есть оператора, задающего линейризацию гамильтонова векторного по-

ля $\text{sgrad}(\Phi \circ \mathcal{F})$. Допуская очевидную вольность, обозначим оператор через A_Φ (строго говоря, здесь в индексе следовало бы указывать $\Phi \circ \mathcal{F}$). Он имеет четыре нулевых собственных значения. Поэтому здесь через $\varrho_\Phi(\mu)$ обозначим характеристический многочлен A_Φ , сокращенный на μ^4 . Тогда $\varrho_\Phi(\mu) = \mu^2 - \lambda$, а знак λ определяет тип критической точки из \mathcal{N}_Φ по отношению к малой площадке, трансверсальной к $\mathcal{N}_\Phi \cap P_\ell^4$ в P_ℓ^4 . Для точки ранга 1 это полный тип, а для точки ранга 0 это называют внешним типом по отношению к подсистеме \mathcal{N}_Φ . Поскольку невырожденные точки ранга 0 принадлежат трансверсальному пересечению двух критических подсистем или трансверсальному самопересечению одной системы, то они получают два внешних типа, которые и определяют их полный тип в соответствующей приведенной системе.

Следующие утверждения относительно критических подсистем и множества критических точек отображения момента случай Ковалевской – Соколова получаются из результатов работ [66, 89] предельным переходом при обнулении второго поля, но, конечно, могут быть проверены и непосредственным вычислением. Для каждой из подсистем вводятся частные интегралы, обозначенные прописными буквами. Их константы обозначаются соответствующими строчными буквами (в том числе, с индексами). Для краткости индуцированной симплектической структурой мы называем 2-форму, индуцированную на четномерных подмногообразиях в P_ℓ^4 исходной симплектической структурой на $TSO(3)$ или, что то же самое, симплектической структурой на симплектических листах P_ℓ^4 скобки Пуассона. Мы явно указываем, где эта форма имеет точки вырождения. Более того, инвариантные соотношения выбраны в соответствии с замечанием 15 так, чтобы их скобка Пуассона была частным интегралом критической подсистемы, поэтому и множество точек вырождения описано в терминах таких интегралов.

Предложение 29. Множество \mathcal{N}_1 , заданное системой

$$Z_1^{(1)} = 0, \quad Z_2^{(1)} = 0,$$

где

$$Z_1^{(1)} = \frac{1}{4}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_1(\alpha_2 M_3 - \alpha_3 M_2) + \varepsilon_0 \alpha_1 - \varepsilon_1^2 a^2,$$

$$Z_2^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 M_2 + \varepsilon_1(\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3) + \varepsilon_0 \alpha_2,$$

является критической подсистемой случая Ковалевской – Соколова, порожденной функцией $\Phi_1(h, \ell, k) = k$. На \mathcal{N}_1 определен частный интеграл $F_1 = \{Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}\}$:

$$F_1 = \frac{1}{4}(M_1^2 + M_2^2)M_3 + \varepsilon_1(\alpha_1 M_2 - \alpha_2 M_1)M_1 + \varepsilon_0 \alpha_3 M_1 - \varepsilon_1^2 a^2 M_3,$$

причем на \mathcal{N}_1 постоянные интегралов F_1, H, L связаны соотношением

$$f_1^2 = [\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_1^2(h + \varepsilon_1^2 a^2)][a^2(h + \varepsilon_1^2 a^2) - 2\ell^2].$$

Нулевой уровень F_1 определяет множество точек вырождения индуцированной симплектической структуры в каждом $\mathcal{N}_1 \cap P_\ell^4$. Характеристический многочлен имеет вид

$$\varrho_{\Phi_1}(\mu) = \mu^2 + 4f_1^2,$$

в частности, при $f_1 \neq 0$ все точки ранга 1 из \mathcal{N}_1 невырождены и имеют тип “центр”. Невырожденные точки ранга 0, лежащие в \mathcal{N}_1 , имеют внешний тип “центр”.

Предложение 30. Множество \mathcal{N}_2 , заданное системой

$$Z_1^{(2)} = 0, \quad Z_2^{(2)} = 0,$$

где

$$Z_1^{(2)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2(M_1^2 + M_3^2)}}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 M_3^2}} [\varepsilon_1^2(M_3 - 2\varepsilon_1 \alpha_2)M_3 - 2\varepsilon_0 \varepsilon_1^2 \alpha_1 + \varepsilon_0^2],$$

$$Z_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 M_3^2}} [\varepsilon_1^2(M_2 + 2\varepsilon_1 \alpha_2)M_3^2 + 2\varepsilon_1^3 \alpha_1 M_1 M_3 + \varepsilon_0(\varepsilon_0 M_2 - 2\varepsilon_1^2 \alpha_2 M_1 + 2\varepsilon_0 \varepsilon_1 \alpha_3)],$$

является критической подсистемой случая Ковалевской – Соколова, порожденной функцией

$$\Phi_2(h, \ell, k) = k - \frac{1}{4\varepsilon_1^4} [2\varepsilon_1^2(h + \varepsilon_1^2 a^2) + \varepsilon_0^2]^2.$$

На \mathcal{N}_2 определен частный интеграл $F_2 = \varepsilon_0 \{Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}\}$:

$$F_2 = M_2 \sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2(M_1^2 + M_3^2)} [\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2(M_3 - 2\varepsilon_1 \alpha_2)^2].$$

Нулевой уровень F_2 определяет в каждом $\mathcal{N}_2 \cap P_\ell^4$ точки вырождения индуцированной симплектической структуры. Характеристический многочлен имеет вид

$$\rho_{\Phi_2}(\mu) = \mu^2 + \frac{4}{\varepsilon_0^2} f_2^2,$$

в частности, при $f_2 \neq 0$ все точки ранга 1 из \mathcal{N}_2 невырождены и имеют тип “центр”. Невырожденные точки ранга 0, лежащие в \mathcal{N}_2 , имеют внешний тип “центр”.

Замечание 16. Простое выражение для скобки $\{Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}\}$ получено в точках \mathcal{N}_2 путем исключения переменных α_1, α_3 в силу инвариантных соотношений. В этом представлении легко видеть, что на \mathcal{N}_2 условие $F_2 = 0$ равносильно тому, что $M_2 = 0$. Таким же путем проверяется, что на \mathcal{N}_2 частным интегралом является функция

$$Q = \frac{M_2}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2(M_1^2 + M_3^2)}},$$

и, кроме уравнения поверхности Π_2 , не содержащего ℓ , имеется следующее соотношение на постоянные первых интегралов

$$8\varepsilon_1^6 \ell^2 - \varepsilon_0^2(\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_1^2 h) = \frac{\varepsilon_1^2}{2} f_2 q.$$

Следующую критическую подсистему удобно записать в переменных (5.6.5). Обозначим

$$\xi_1 = Z_1^{(1)} + i Z_2^{(1)}, \quad \xi_2 = Z_1^{(1)} - i Z_2^{(1)}.$$

В частности, интеграл K примет вид $K = \xi_1 \xi_2$.

Предложение 31. Замыкание \mathcal{N}_3 множества, заданного системой

$$Z_1^{(3)} = 0, \quad Z_2^{(3)} = 0,$$

где

$$Z_1^{(3)} = \sqrt{x_1 x_2} w_3 - \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} [(w_1 x_2 + w_2 x_1) z - i a^2 \varepsilon_1 (x_1 - x_2)],$$

$$Z_2^{(3)} = \frac{1}{i} \left(\frac{x_2}{x_1} \xi_1 - \frac{x_1}{x_2} \xi_2 \right),$$

является критической подсистемой случая Ковалевской – Соколова, порожденной функцией

$$\Phi_3(h, \ell, k) = k - \frac{[a^2(h + \varepsilon_1^2 a^2) - 2\ell^2]^2}{a^4}.$$

На \mathcal{N}_3 определен частный интеграл

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \left[(w_1 + i \varepsilon_1 z)(w_2 - i \varepsilon_1 z) + \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{x_1} \xi_1 + \frac{x_1}{x_2} \xi_2 \right) \right] + \varepsilon_1^2 \sqrt{x_1 x_2}$$

такой, что

$$\{Z_1^{(3)}, Z_2^{(3)}\} = 2a^2 F_3.$$

Нулевой уровень F_3 определяет в каждом $\mathcal{N}_3 \cap P_\ell^4$ точки вырождения индуцированной симплектической структуры.

В этом случае вырожденные критические точки появляются и не в связи с вырождением индуцированной симплектической структуры.

Предложение 32. На инвариантном подмножестве \mathcal{N}_3 определен частный первый интеграл

$$M = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x_2}{x_1} \xi_1 + \frac{x_1}{x_2} \xi_2 \right),$$

такой, что постоянные общих интегралов связаны с постоянными интегралов F_3, M соотношениями

$$\ell^2 = \frac{a^2}{4(m + \varepsilon_1^2)} (f_3^2 - \varepsilon_0^2), \quad k = a^4 m,$$

$$h = -a^2(m + \varepsilon_1^2) - \frac{1}{2(m + \varepsilon_1^2)} (f_3^2 - \varepsilon_0^2)$$

и характеристический многочлен имеет вид

$$\varrho_{\Phi_3}(\mu) = \mu^2 + 4a^4 m f_3^2.$$

В частности, при $f_3 \neq 0$ и $m \neq 0$ все точки ранга 1 из \mathcal{N}_3 невырождены и имеют тип “центр” при $m > 0$ и тип “седло” при $m < 0$. Для невырожденных точек ранга 0 эти же условия определяют внешний тип по отношению к \mathcal{N}_3 .

Устремляя ε_1 к нулю, нетрудно убедиться, что критическая подсистема \mathcal{N}_1 есть аналог первого класса Аппельрота случая Ковалевской, критическая подсистема \mathcal{N}_3 есть аналог второго и третьего классов. Критическая подсистема \mathcal{N}_2 является новой, она не имеет такого аналога и непуста лишь при условии $\varepsilon_1^2 > \zeta_1$. Так называемые особо замечательные движения четвертого класса Аппельрота представляют собой наиболее устойчивую подсистему относительно различных обобщений случая Ковалевской. К ним относятся, например, случай Бобылева – Стеклова и его обобщение на гиростат весьма общего вида [79], обобщения на твердое тело в двойном поле [142, 159] и на гиростат в двойном поле [88]. Аналог этого класса движений есть и в рассматриваемой задаче. Порождающую функцию $\Phi_4(h, \ell, k)$ можно получить, исключая из уравнений поверхности Π_4 параметр s , однако, в таком виде она, как и в классическом случае Ковалевской, оказывается бесполезной.

Предложение 33. Множество \mathcal{N}_4 , заданное системой

$$Z_1^{(4)} = 0, \quad Z_2^{(4)} = 0,$$

где

$$Z_1^{(4)} = M_2, \quad Z_2^{(4)} = \frac{1}{2}M_1M_3 - \varepsilon_1\alpha_2M_1 + \varepsilon_0\alpha_3,$$

является критической подсистемой случая Ковалевской – Соколова. На \mathcal{N}_4 имеется частный интеграл

$$S = -\frac{2\varepsilon_0L}{M_1},$$

такой, что постоянные общих интегралов и интеграла S связаны уравнениями поверхности Π_4 и

$$\{Z_1^{(4)}, Z_2^{(4)}\} = 2H - 3S.$$

Условие $2H - 3S = 0$ определяет точки вырождения индуцированной симплектической структуры в каждом $\mathcal{N}_4 \cap P_\ell^4$. Геометрически оно задает ребро возврата поверхности Π_4 .

Для вычисления типов критических точек порождающая функция Φ_4 слишком сложна. Для нас важно следующее из уравнений поверхности Π_4 соотношение на дифференциалы общих интегралов

$$\frac{4(\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_1^2 s)\ell}{s} dL + dK - 2(h + \varepsilon_1^2 a^2 - s)dH = 0.$$

Учитывая, что L есть функция Казимира скобки Пуассона и, значит, $\text{sgrad } L \equiv 0$, рассмотрим функцию

$$\tilde{\Phi}_4 = k - 2(h + \varepsilon_1^2 a^2 - s)h.$$

Очевидно, что на \mathcal{N}_4 тождественно $\text{sgrad } \tilde{\Phi}_4 = 0$, где косой градиент берется, конечно, от композиции $\tilde{\Phi}_4$ с отображением момента. Более того, для упрощения процедуры следует до вычисления косого градиента и его линеаризации (то есть искомого симплектического оператора) считать коэффициент $2(h + \varepsilon_1^2 a^2 - s)$ произвольной константой, и лишь после вычисления подставить в него функции H, S .

Предложение 34. *На инвариантном подмножестве \mathcal{N}_3 характеристический многочлен симплектического оператора имеет вид*

$$\varrho_{\tilde{\Phi}_4}(\mu) = \mu^2 - \lambda_4,$$

где

$$\lambda_4 = 2(\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_1^2 s)(3s - 2h)(\varepsilon_0^2 a^2 - 2hs + 2s^2).$$

В частности, при $\lambda_4 \neq 0$ все точки ранга 1 из \mathcal{N}_4 невырождены и имеют тип “центр” при $\lambda_4 < 0$ и тип “седло” при $\lambda_4 > 0$. Для невырожденных точек ранга 0 эти же условия определяют внешний тип по отношению к \mathcal{N}_4 .

Теорема 42. Множество \mathcal{C} критических точек отображения момента случая Ковалевской – Соколова является объединением инвариантных подмножеств, служащих фазовыми пространствами перечисленных выше четырех критических подсистем,

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{N}_i.$$

Невырожденные точки ранга 0 являются трансверсальными пересечениями двух открытых подмножеств критических подсистем и тип точек ранга 0 определяются парой внешних типов, вычисленных для критических подсистем.

Для доказательства отметим вначале, что критические точки произвольной функции f на P^5 определяются уравнениями (см. лемму 9)

$$\partial_M f = 0, \quad Df = 0. \quad (5.7.3)$$

Критические точки H уже изучены. Поэтому в линейных комбинациях дифференциалов можно один из коэффициентов при остальных интегралах считать ненулевым. Записывая условия (5.7.3) для комбинации вида $K - \sigma H$, получим подсистемы $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$. Таким образом, эти подсистемы отражают зависимость K и H без учета их ограничения на уровень функции L . В частности, для оставшихся критических точек мы можем считать ненулевым коэффициент при дифференциале L . Вводя функцию $f = L - \tau H - \sigma K$, запишем условия (5.7.3) и исключим из них τ, σ . Получим систему инвариантных соотношений, ранг которой в искомым точках должен равняться двум. Легко проверить, что каждое из

этих уравнений можно записать в двух видах

$$Z_1^{(i)} f_{1i} + Z_2^{(i)} f_{2i} = 0 \quad (i = 3, 4).$$

Вначале запишем систему для $i = 3$, затем, предполагая, что вектор $(Z_1^{(3)}, Z_2^{(3)})$ ненулевой, исключим эти функции. Полученные уравнения представим в том же виде для $i = 4$. Предполагая вектор $(Z_1^{(4)}, Z_2^{(4)})$ ненулевым, исключим и эти функции. Возьмем любое независимое уравнение вида $F = 0$ из оставшихся и убедимся, что в силу исходной системы дифференциальных уравнений \ddot{F} не обращается в нуль тождественно при $F = 0$ и $\dot{F} = 0$. Таким образом, ранг оставшейся системы инвариантных соотношений больше двух, и она может порождать только критические точки ранга 0, которые уже известны.

Трансверсальность пересечений (или самопересечений) критических подсистем в невырожденных точках ранга 0 следует из существования двух вычисленных выше внешних типов. Теорема доказана.

5.8. Примеры изоэнергетических диаграмм и грубая топология

В силу того, что уровни энергии компактны, что следует, например, из представления функции H в виде (5.2.1), удобно рассматривать бифуркационные диаграммы ограничения отображения момента на изоэнергетические уровни, то есть ограничения отображения $L \times K$ на четырехмерные многообразия $P^5 \cap \{H = h\}$. Конечно, такие диаграммы — это сечения общей бифуркационной диаграммы отображения момента плоскостями $h = \text{const}$. С этой целью и уравнения несущих поверхностей $\Pi_1 - \Pi_4$ записаны так, чтобы в них величина h играла роль параметра. Для описания грубой топологии мы приводим оснащенные диаграммы, то есть такие, в которых на каждом ребре указан атом происходящей би-

фуркации, а в непустых клетках дополнения указано количество торов Лиувилля.

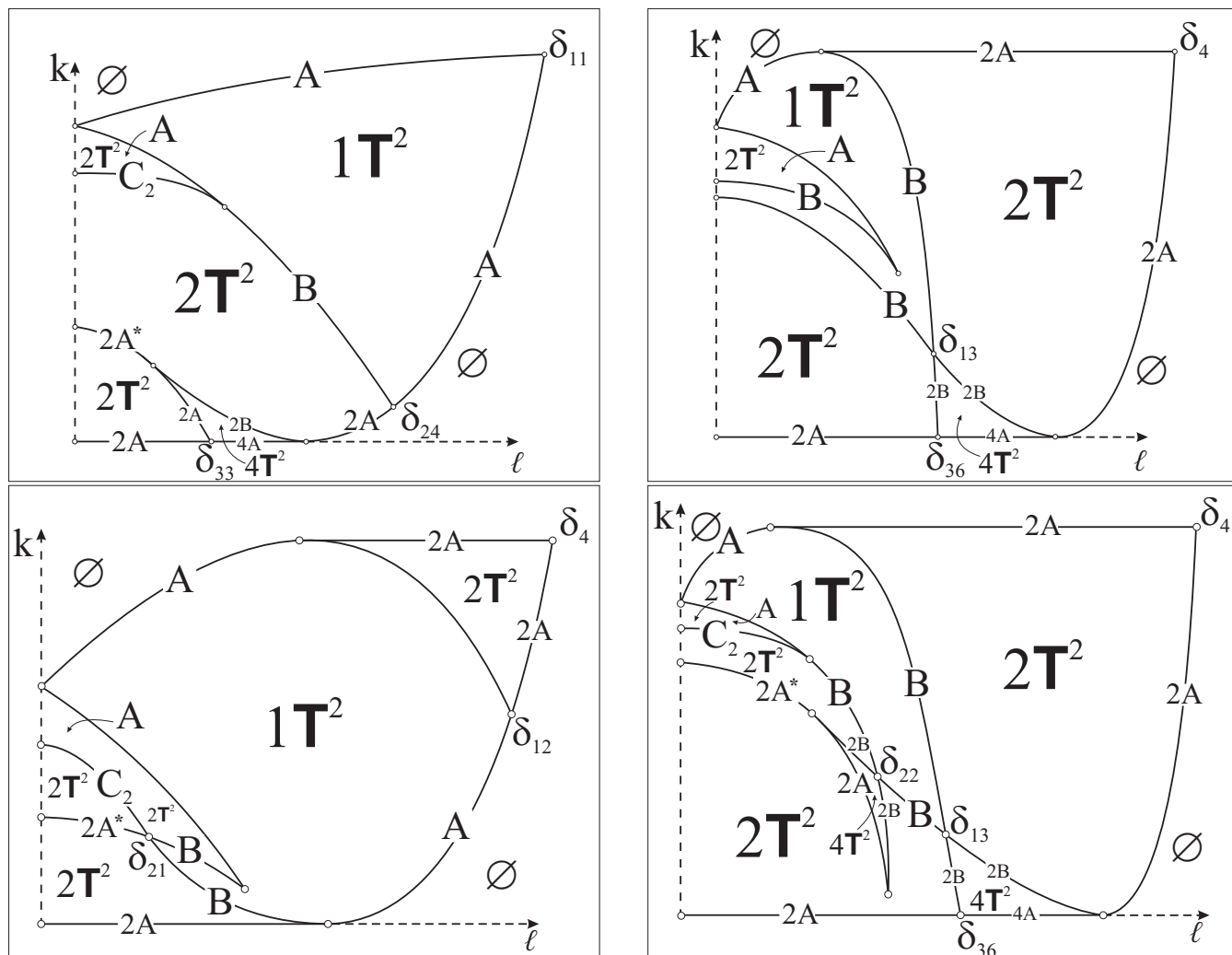


Рис. 5.4. Примеры оснащенных бифуркационных диаграмм

Полная классификация изоэнергетических диаграмм получена в [70]. Считая, как и ранее, параметры ε_0, a заданными, рассмотрим кривые на плоскости (ε_1, h) , которые служат образами вырожденных точек ранга 0 и экстремальных значений H на семействах вырожденных решений ранга 1 [54]. Полученные кривые оказываются разделяющим множеством при классификации изоэнергетических диаграмм. Так, для волчка в двойном поле таких диаграмм получилось 19 (см. [149]), а для гиростата Ковалевской – Яхья имеется 33 диаграммы (см. [53, 90]. На рис. 5.4 – 5.5 приведены примеры оснащенных диаграмм, на которых

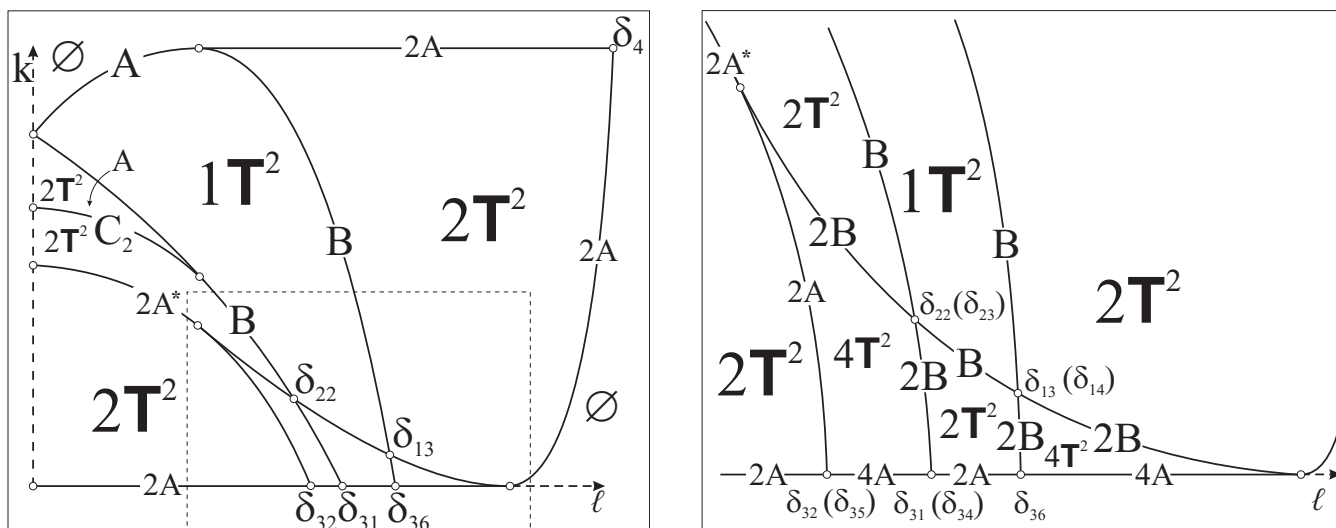


Рис. 5.5. Пример оснащенной бифуркационной диаграммы с фрагментом

видны все найденные выше невырожденные критические точки ранга 0. Естественно, диаграммы в целом симметричны относительно оси Ok . Типы бифуркаций в седловых особенностях ранга 1 определяются предельным переходом из задачи о гиростате в двойном поле [66].

Отметим, что представители пар классов $(\delta_{13}, \delta_{14})$, $(\delta_{22}, \delta_{23})$, $(\delta_{31}, \delta_{34})$ и тройки классов $(\delta_{32}, \delta_{33}, \delta_{35})$ как точки ранга 0 на самом деле не отличаются: точку одного из таких классов можно непрерывно перевести в расширенном фазовом пространстве в точку другого класса, не пересекая множества вырожденных точек ранга 0. На рисунке фрагмента варианты расположения точек в эквивалентных по существу диаграммах указаны в скобках. В плоскости параметров (ζ, W) такие классы разделены следами точек p_1, p_2, p_3 трансверсального пересечения кривых δ_i . На изоэнергетических диаграммах они различаются порядком проекций всего набора точек, отвечающих относительным равновесиям, на ось Ol . Глобальное топологическое отличие здесь в том, что при пересечении соответствующих значений (l, h) происходят, как показано выше в табл. 5.4.1, различные бифуркации трехмерных изоэнергетических многообразий приведенных систем, а изменение порядка проекций влечет изменение набора тонких инвариантов Фоменко – Цишанга, отвеча-

ющих фиксированному значению энергии.

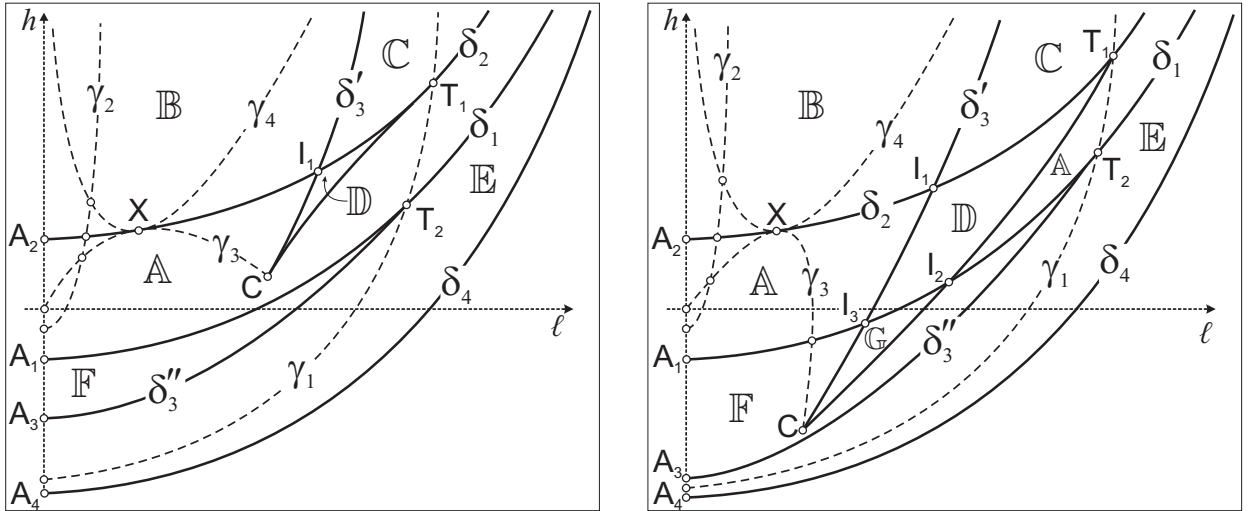


Рис. 5.6. Примеры диаграмм Смейла – Фоменко

Рассматривая сечения изоэнергетических оснащенных диаграмм прямыми $\ell = \text{const}$, получим соответствующие грубые инварианты Фоменко на трехмерных изоэнергетических уровнях $Q_{\ell, h}^3$ приведенных систем. Основные примеры таких инвариантов можно извлечь из представленных рисунков. Для их полной классификации нужно на плоскость (ℓ, h) нанести в дополнение к диаграммам Смейла кривые, которые являются образами вырожденных точек ранга 1. Из предложения 29, замечания 16 и предложений 32, 34 следуют уравнения этих кривых:

$$\gamma_1 : 2\ell^2 - a^2(h + \varepsilon_1^2 a^2) = 0,$$

$$\gamma_2 : 8\varepsilon_1^6 \ell^2 - \varepsilon_0^2(\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_1^2 h) = 0,$$

$$\gamma_3 : 4h^3 - 27\varepsilon_0^2 \ell^2 = 0,$$

$$\gamma_4 : 8\ell^4 - 4a^2 h \ell^2 + \varepsilon_0^2 a^6 = 0.$$

Полученное множество называют диаграммой Смейла – Фоменко. Эта диаграмма служит разделяющим множеством для различных инвариантов Фоменко – Цишанга. Отметим, что теперь иначе объяснимо и появление точки X на диаграммах Смейла – в ней сходятся две последние

разделяющие кривые. Примеры диаграмм Смейла – Фоменко показаны на рис. 5.6.

Классификация всех диаграмм Смейла – Фоменко получена в [70]. Пример такой классификации (для случая Ковалевской – Яхья) имеется в работе [54].

Теперь, исходя из грубой топологии четырехмерных изоэнергетических уровней, представленной оснащенными изоэнергетическими диаграммами, устанавливаем вид 4-атома (и, соответственно, круговой молекулы) для всех точек ранга 0 типа “седло-седло”, то есть в тех случаях, где такой 4-атом не определен однозначно типом самой точки. В данном случае, получаем атом $B \times B$ для точек $\delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{22}, \delta_{23}$ и атом $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ для точек единственного класса δ_{21} .

В заключение отметим, что все полученные здесь результаты, в силу эквивалентности задач, автоматически переносятся на задачу о волчке Ковалевской на коалгебре $so(3, 1)^*$. В описании критического множества отображения момента имеется определенное соответствие с уравнениями для волчка Ковалевской на $so(4)^*$, полученными в работе [185], однако, последние не представлены в “неприводимой” форме систем минимального ранга и не позволяют явным образом вычислять типы критических точек.

Заключение

В заключении приведем выводы, которые были представлены в диссертационной работе.

- Изложены строго обоснованные результаты по аналитическим решениям и топологическому анализу интегрируемого случая Ковалевской – Яхья:
 - представлена полная аналитическая классификация бифуркаций гиростата Ковалевской–Яхья, возникающих в особых периодических движениях (критических точках ранга 1 отображения момента);
 - найдены все разделяющие значения гиростатического момента при классификации диаграмм Смейла;
 - разработан «конструктор» построения инвариантов, применение которого дало полное описание грубой топологии этого интегрируемого случая;
 - доказано, что имеется девять групп эквивалентных инвариантов (без меток), содержащих 22 устойчивых графа и 6 неустойчивых по отношению к количеству критических окружностей на критических уровнях;
 - обоснованы результаты об устойчивости периодических решений, полученные при помощи бифуркационной диаграммы; приведено полное описание динамики системы в окрестности особых (критических) периодических траекторий.

Перечисленные выше результаты представлены в публикациях [51], [52], [53], [54].

- Приводится полное исследование неприводимой системы с тремя степенями свободы, которая описывает движение волчка Ковалевской в двойном поле:
 - приводится описание критических подсистем и бифуркационных диаграмм;
 - дана классификация всех невырожденных критических точек – положений равновесия (невырожденных особенностей ранга 0), особых периодических движений (невырожденных особенностей ранга 1), а также критических двухчастотных движений (невырожденных особенностей ранга 2);
 - предъявлены явные формулы характеристических уравнений для собственных чисел соответствующих симплектических операторов, которые и определяют тип невырожденной особенности. Знание типа критической точки интегрируемой системы позволило ответить на все вопросы, связанные с характером устойчивости проходящей через нее траектории.

Исследования представлены в работах [56], [57].

- Исследована фазовая топология интегрируемых случаев уравнений Кирхгофа движения твердого тела в жидкости с дополнительным интегралом четвертой степени по импульсам (случаи интегрируемости Чаплыгина, Яхья, Горячева, Соколова (2001)). Для случая интегрируемости Горячева найдено явное вещественное разделение переменных, основанное на геометрическом подходе к разделению переменных. Полученные аналитические формулы позволили исследовать фазовую топологию, в частности, бифуркации лиувиллевых торов, а также устойчивость невырожденных (в смысле особенностей) траекторий.

Указанные исследования представлены в публикациях [59], [60], [61], [62], [63], [58], [64].

- Для обобщенного двухполевого гиростата (случай интегрируемости Соколова-Цыганова) удалось выделить аналитически четыре новых инвариантных четырехмерных подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Система уравнений, задающая одно из инвариантных подмногообразий, является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая О. И. Богоявленского вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном поле. Остальные три инвариантных подмногообразия являются новыми в динамике твердого тела. Для каждого из них указан дополнительный интеграл. Для описания фазовой топологии всей системы в целом используется метод критических подсистем. Для каждой подсистемы построены бифуркационные диаграммы и указаны бифуркации торов Лиувилля как внутри подсистем, так и во всей системе в целом. Исследования представлены в работах [66], [68].
- Исследована фазовая топология интегрируемой гамильтоновой системы на $e(3)$, найденной В.В.Соколовым (2001) и обобщающей случай Ковалевской. Обобщение состоит в том, что к однородному потенциальному силовому полю добавлены гироскопические силы, зависящие от конфигурационных переменных.
 - Классифицированы относительные равновесия, вычислен их тип, определен характер устойчивости.
 - Установлены виды диаграмм Смейла и дана классификация изоэнергетических многообразий приведенных систем с дву-

мя степенями свободы.

- Множество критических точек полного отображения момента представлено в виде объединения четырех критических подсистем, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является однопараметрическим семейством почти гамильтоновых систем с одной степенью свободы.
- Выписаны уравнения поверхностей, несущих бифуркационную диаграмму отображения момента. Приведены изоэнергетические диаграммы с полным описанием соответствующей грубой топологии (регулярных торов Лиувилля и их бифуркаций).

Исследования выполнены в работах [69, 70].

Все изложенные результаты могут быть использованы для исследования фазовой топологии более сложных задачах динамики твердого тела в произвольном потенциальном поле и в жидкости [186], [187], [23], [188], [189], в том числе для описания динамической модели левитрона. Полученные в диссертации результаты позволяют находить явные решения и исследовать их устойчивость, что имеет важное значение для решения прикладных задач механики, в том числе робототехники и мехатроники.

Список литературы

1. Пуанкаре А. Избранные труды. В 3 т. Москва: Наука, 1971.
2. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л: ГТТИ, 1947.
3. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Москва: Физматгиз, 1959.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения: работы по аналитической механике. Москва: Изд-во АН СССР, 1962.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
7. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. Москва: Изд-во иностр. лит., 1959.
8. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966.
9. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
10. Маркеев А. П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космич. исслед. 1975. Т. 13, № 3. С. 322–336.
11. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1979.
12. Джакалья Г. Е. Методы возмущений для нелинейных систем. Москва: Наука, 1979.
13. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Гостехиздат, 1956.
14. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.

- Москва: Наука, 1981.
15. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974.
 16. Найфе А. Х. Введение в методы возмущений. Москва: Мир, 1984.
 17. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 527–530.
 18. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // УМН. 1963. Т. 18, № 5(113). С. 13–40.
 19. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18, № 6. С. 91–192.
 20. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. Москва: Мир, 1973.
 21. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Москва: Изд-во МГУ, 1980.
 22. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 1995.
 23. Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Ижевск: Изд-во РХД, 2003.
 24. Smale S. Topology and Mechanics. I, II // *Inventiones Mathematicae*. 1970. Vol. 10, no. 4. P. 305–331.
 25. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988.
 26. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2-х т. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
 27. Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Математический сборник.

2000. Т. 191, № 2. С. 3–42.
28. Комаров И. В. Базис Ковалевской для атома водорода // Теоретическая и математическая физика. 1981. Т. 47, № 1. С. 67–72.
 29. Komarov I. V., Kuznetsov V. B. Kowalewski's top on the Lie algebras $o(4)$, $e(3)$ and $o(3, 1)$ // J. Phys. A: Math. & Gen. 1990. Vol. 23. P. 841–846.
 30. Yehia H. M. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // [Mechanics Research Communications](#). 1986. Vol. 13, no. 3. P. 173–180.
 31. Sokolov V. V. A generalized Kowalewski Hamiltonian and new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ // In «Kowalevski property», ed. V.B. Kuznetsov, CRM Proceedings and Lect. Notes, AMS. 2002. P. 304–315.
 32. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколов В. В. Новый интегрируемый случай на $so(4)$ // Доклады Академии Наук. 2001. Т. 381, № 5. С. 614–615.
 33. Борисов А. В., Мамаев И. С. Нелинейные скобки Пуассона и изоморфизмы в динамике // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2, № 3–4. С. 72–89.
 34. Bogoyavlensky O. I. Euler equations on finite-dimension Lie algebras arising in physical problems // Commun. Math. Phys. 1984. Vol. 95. P. 307–315.
 35. Reyman A. G., Semenov Tian-Shansky M. A. Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations // Lett. Math. Phys. 1987. Vol. 14, no. 1. P. 55–61.
 36. Kamchatnov A. M. and Sokolov V. V. Nonlinear waves in two-component Bose-Einstein condensates: Manakov system and Kowalevski equations // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 91. P. 043621–0436211.
 37. Иртегов В. Д. Об устойчивости маятниковых колебаний гироскопа

- С.В. Ковалевской // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1968. № 97. С. 38–40.
38. Брюм А. З. Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // ПММ. 1989. Т. 53, № 6. С. 873–879.
39. Маркеев А. П. Об ограниченности траекторий в окрестности орбитально неустойчивого периодического движения гамильтоновой системы // ПММ. 2002. Т. 66, № 1. С. 24–32.
40. Маркеев А. П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65, № 1. С. 51–58.
41. Маркеев А. П., Медведев С. В., Чеховская Т. Н. К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 3–9.
42. Маркеев А. П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // ПММ. 2004. Т. 68, № 2. С. 282–293.
43. Карапетян А. В. Инвариантные множества в задаче Горячева–Чаплыгина: существование, устойчивость, ветвление // ПММ. 2006. № 2. С. 221–224.
44. Маркеев А. П. О плоских и близких к плоским вращениях тяжёлого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР МТТ. 1988. № 4. С. 29–36.
45. Маркеев А. П. О движении твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Стеклова // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 20–33.
46. Бардин Б. С. К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14–21.
47. Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева–Стеклова // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 535–550.
48. Бардин Б. С. Савин А. А. Об орбитальной устойчивости маятнико-

- вых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 2. С. 249–266.
49. Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН. 2010. Т. 65, № 2(392). С. 71–132.
50. Рябов П. Е. О вычислении бифуркационного множества в случае Ковалевской–Яхьи // Механика твердого тела. 1995. № 27. С. 36–40.
51. Kharlamov M. P., Ryabov P. E. The bifurcations of the first integrals in the case of Kowalewski-Yehia // [Regular and Chaotic Dynamics](#). 1997. Vol. 2, no. 2. P. 25–40.
52. Рябов П. Е. Аналитическая классификация особенностей интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2010. № 4. С. 25–30.
53. Харламова И. И., Рябов П. Е. Электронный атлас бифуркационных диаграмм гиростата Ковалевской–Яхьи // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. № 2. С. 147–162.
54. Харламов М. П., Рябов П. Е. Диаграммы Смейла–Фоменко и грубые инварианты случая Ковалевской–Яхьи // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. № 4. С. 40–59.
55. Рябов П. Е., Смирнов Г. Е., Харламов М. П. Атлас диаграмм обобщения 4-го класса особо замечательных движений Аппельрота на гиростат в двойном поле // Механика твердого тела. 2012. № 42. С. 62–76.
56. Харламов М. П., Рябов П. Е. Сетевые диаграммы для инварианта Фоменко в интегрируемой системе с тремя степенями свободы // Доклады Академии Наук. 2012. Т. 447, № 5. С. 499–502.
57. Рябов П. Е., Харламов М. П. Классификация особенностей в зада-

- че о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил // Математический сборник. 2012. Т. 203, № 2. С. 111–142.
58. Рябов П. Е. Явное интегрирование и топология случая Д. Н. Горячева // Доклады Академии наук. 2011. Т. 439, № 3. С. 315–318.
59. Orel O. E., Ryabov P. E. Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem // Regular & Chaotic Dynamics. 1998. Vol. 3, no. 2. P. 82–93.
60. Ryabov P. E. Bifurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid // Regular and Chaotic Dynamics. 1999. Vol. 4, no. 4. P. 59–76.
61. Orel O. E., Ryabov P. E. Topology, bifurcations and Liouville classification of Kirchhoff equations with an additional integral of fourth degree // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. Vol. 34. P. 2149–2163.
62. Рябов П. Е. Фазовая топология задачи Чаплыгина о движении твердого тела в жидкости // Механика твердого тела. 2000. № 30. С. 140–150.
63. Рябов П. Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова // Теоретическая и математическая физика. 2003. Vol. 134, no. 2. P. 207–226.
64. Рябов П. Е. Алгебраические кривые и бифуркационные диаграммы двух интегрируемых задач // Механика твердого тела. 2007. № 37. С. 97–111.
65. Харламов М. П. Рябов П. Е., Савушкин А. Ю., Смирнов Г. Е. Типы критических точек гиростата Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. 2011. № 41. С. 27–38.
66. Рябов П. Е. Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 176, № 2. С. 205–221.
67. Рябов П. Е. Фазовая топология одного частного случая интегри-

- руемости Горячева в динамике твердого тела // Математический сборник. 2014. Т. 205, № 7. С. 115–134.
68. Ryabov P. E. New invariant relations for the generalized two-field gyrostat // *Journal of Geometry and Physics*. 2015. Vol. 87. P. 415–421.
69. Рябов П. Е., Савушкин А. Ю. Фазовая топология волчка Ковалевской–Соколова // *Нелинейная динамика*. 2015. Т. 11, № 2. С. 287–317.
70. Kharlamov M. P., Ryabov P. E., Savushkin A. Y. Topological atlas of the Kowalevski – Sokolov top // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2016. Vol. 21, no. 1. P. 24–65.
71. Яхья Х. М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*. 1987. № 4. С. 88–90.
72. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1984. Т. 48, № 5. С. 883–938.
73. Komarov I. V. A generalization of the Kovalevskaya top // *Phys. Letters*. 1987. Vol. 123, no. 1. P. 14–15.
74. Gavrilov L. N. On the geometry of Gorjatchev-Tchaplygin top // *C.R. Acad. Bulg. Sci.* 1987. Vol. 40. P. 33–36.
75. Рябов П. Е. Некоторые случаи вырождения переменных в одной задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // *Деп. в ВИНТИ*. 1991. № 3660-В91. С. 9.
76. Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // В кн.: *Движение твердого тела вокруг неподвижной точки*. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1940. С. 61–156.
77. Гашененко И. Н. Новый класс движений тяжелого гиростата // *Доклады АН СССР*. 1991. Т. 318, № 1. С. 66–68.

78. Гашененко И. Н. Один случай интегрируемости уравнений движения гиростата // *Механика твердого тела*. 1992. № 24. С. 1–4.
79. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965.
80. Гашененко И. Н. Бифуркационное множество задачи о движении гиростата, подчиненного условиям Ковалевской // *Механика твердого тела*. 1995. № 27. С. 31–35.
81. Харламов П. В. Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // *Механика твердого тела*. 1971. № 3. С. 57–64.
82. Харламова Е. И., Харламов П. В. Новое решение дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, при условиях С. В. Ковалевской // *Доклады АН СССР*. 1969. Т. 189, № 5. С. 967–968.
83. Рябов П. Е. Бифуркационные множества в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // *Вестник ВолГУ*. 1996. № 1. С. 41–49.
84. Рябов П. Е. Перестройки бифуркационного множества в обобщенной задаче С. В. Ковалевской // *Деп. в ВИНТИ*. 1996. № 884-В96. С. 7.
85. Гашененко И. Н. Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата // *Механика твердого тела*. 1997. № 29. С. 1–7.
86. Соколов В. В., Цыганов А. В. Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина // *Теоретическая и математическая физика*. 2002. Т. 131, № 1. С. 118–125.
87. Kharlamov M. P. Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2005. Vol. 10, no. 4. P. 381–398.

88. Харламов М. П. Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // *Нелинейная динамика*. 2007. Т. 3, № 3. С. 331–348.
89. Kharlamov M. P. Extensions of the Appelrot classes for the generalized gyrostat in a double force field // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014. Vol. 19, no. 2. P. 226–244.
90. Харламов М. П., Харламова И. И., Шведов Е. Г. Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях гиростата Ковалевской-Яхья // *Механика твердого тела*. 2010. № 40. С. 77–90.
91. Kuznetsov V. B. Simultaneous separation for the Kowalevski and Goryachev-Chaplygin gyrostats // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2002. Vol. 35, no. 30. P. 6419–6430.
92. Цыганов А. В. Разделение переменных в гиростате Ковалевской-Горячева-Чаплыгина // *Теоретическая и математическая физика*. 2003. Т. 135, № 2. С. 240–247.
93. Якоби К. Лекции по динамике. М.-Л.: ОНТИ, 1936.
94. Рейман А. Г., Семенов Тянь-Шанский М. А. Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // *Функциональный анализ и его приложения*. 1988. Т. 22, № 2. С. 87–88.
95. Bobenko A. I., Reyman A. G., Semenov Tian-Shansky M. A. The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions // *Commun. Math. Phys.* 1989. Vol. 122, no. 2. P. 321–354.
96. Рябов П. Е. Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхья: Кандидатская диссертация / Москва, МГУ. 1997.
97. Гашененко И. Н. Инвариантные многообразия и множества допустимых скоростей в динамике твердого тела: Докторская диссер-

- тация / Донецк, ИПММ НАНУ. 2008.
98. Харламов М. П. Аналитическая классификация равномерных вращений гиристата Ковалевской–Яхья // *Механика твердого тела*. 2012. № 42. С. 47–61.
 99. Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*. Ижевск: Изд-во РХД, 2005.
 100. Ошемков А. А. Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела // *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*. 1993. Т. 25, № 2. С. 23–109.
 101. Логачева Н. С. Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской–Яхьи // *Математический сборник*. 2012. Т. 203, № 1. С. 31–60.
 102. Jacob A. Invariant manifolds in the motion of a rigid body about a fixed point // *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 1971. Vol. 16, no. 10. P. 1497–1521.
 103. Харламов М. П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // *Прикладная математика и механика*. 1983. Т. 47, № 6. С. 922–930.
 104. Харламов М. П. Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела // *Доклады АН СССР*. 1983. Т. 273, № 6. С. 1322–1325.
 105. Dullin H. R., Juhnke M., Richter P. H. Action integrals and energy surfaces of the Kovalevskaya top // *Bifurcation and Chaos*. 1994. no. 4. P. 1535–1562.
 106. Москвин А. Ю. Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере // *Математический сборник*. 2008. Т. 199, № 3. С. 95–132.

107. Dullin H. R., Matveev V. S. A new integrable system on the sphere // *Math. Res. Lett.* 2004. Vol. 11, no. 5–6. P. 715–722.
108. Yehia H. M. On certain two-dimensional conservative mechanical systems with a cubic second integral // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 2002. Vol. 35. P. 9469–9487.
109. Radnović M., Rom-Kedar V. Foliations of isonergy surfaces and singularities of curves // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2008. Vol. 13, no. 6. P. 645–668.
110. Kharlamov M. P. Phase topology of one system with separated variables and singularities of the symplectic structure // *Journal of Geometry and Physics.* 2015. Vol. 87. P. 248–265.
111. Харламов М. П. Изоэнергетические слоения интегрируемых систем с тремя степенями свободы // *Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXII».* Воронеж: Изд-во ВГУ. 2011. С. 199–200.
112. Харламов М. П. Полный топологический атлас интегрируемой системы с двумя или тремя степенями свободы // *Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXIV».* Воронеж: Изд-во ВГУ. 2013. С. 210–211.
113. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. *Оптимальное управление.* Москва: Наука, 1979.
114. Ипатов А. Ф. Движение гироскопа С. В. Ковалевской на границе области ультраэллиптичности // *Уч. зап. Петрозаводск. ун-та.* 1970. Т. 18, № 2. С. 6–93.
115. Гашененко И. Н. Бифуркационное множество в задаче о движении тяжелого гиростата при условиях Ковалевской // *Доповіді НАН України.* 1997. № 2. С. 60–62.

116. Морозов П. В. Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи // *Математический сборник*. 2007. Т. 198, № 8. С. 59–82.
117. Савушкин А. Ю., Харламова И. И., Шведов Е. Г. Электронный атлас изоэнергетических диаграмм гиростата Ковалевской–Яхья // *Изв. ВолгГТУ. Серия «Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах»*. 2012. Т. 102, № 15. С. 30–35.
118. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам // *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6, № 4. С. 769–805.
119. Морозов П. В. Тонкая лиувиллева классификация интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи // *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1*. 2008. № 2. С. 11–19.
120. Харламов М. П. Интегральные многообразия приведенной системы в задаче о движении по инерции твердого тела с неподвижной точкой // *Механика твердого тела*. 1976. № 8. С. 18–23.
121. Харламов М. П. Фазовая топология одного интегрируемого случая движения твердого тела // *Механика твердого тела*. 1979. № 11. С. 50–64.
122. Lerman L. M., Umanskiĭ Ya. L. Structure of the Poisson action of \mathbb{R}^2 on a four-dimensional symplectic manifold. I, II // *Selecta Math. Sov.* 1987;1988. Vol. 6;7, no. 4;1. P. 365–396; 39–48.
123. Лерман Л. М., Уманский Я. Л. О классификации четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем в расширенных окрестностях простых особых точек // *Методы качеств. теории и теории бифуркаций*. Горьк.гос.ун-т. Горький. 1988. С. 67–76.
124. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 287, № 5. С. 1071–1075.

125. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 6. С. 1276–1307.
126. Фоменко А. Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1989. Т. 44, № 1. С. 145–173.
127. Фоменко А. Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, № 2. С. 378–407.
128. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45, № 2. С. 49–77.
129. Bolsinov A. V. Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant // In: Advances in Soviet Mathematics, AMS. 1991. Vol. 6. P. 147–187.
130. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // In: Advances in Soviet Mathematics, AMS. 1991. Vol. 6. P. 67–146.
131. Zung N. T. Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems // Letters in Mathematical Physics. 1995. Vol. 33. P. 187–193.
132. Фоменко А. Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, № 4. С. 747–779.
133. Fomenko A. T. The theory of invariants of multidimensional integrable hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom), molecular table of all integrable systems with two degrees of

- freedom) // *Advances in Soviet Mathematics*. 1991. Vol. 6. P. 1–35.
134. Зунг Н. Т. Топологические инварианты интегрируемых геодезических потоков на многомерном торе и сфере // *Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем*. Сборник статей. Тр. МИАН. 1994. Т. 205. С. 73–90.
135. Polyakova L. S. Topological invariants for some algebraic analogs of the Toda lattice // *Advances in Soviet Mathematics*. 1991. Vol. 6. P. 185–207.
136. Кузнецов А. В. Построение инварианта алгебраического аналога периодической цепочки Тода // *УМН*. 1992. Т. 47, № 5(287). С. 181–182.
137. Селиванова Е. Н. Топология задачи о трехточечных вихрях // *Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем*. Сборник статей. Тр. МИАН. 1994. Т. 205. С. 141–149.
138. Bolsinov A. V., Dullin H. R., Veselov A. P. Spectra of Sol-manifolds: arithmetic and quantum monodromy // *Commun. Math. Phys.* 2006. Vol. 264. P. 583–611.
139. Davison C. M., Dullin H. R., Bolsinov A. V. Geodesics on the ellipsoid and monodromy // *Journal of Geometry and Physics*. 2007. Vol. 57. P. 2437–2454.
140. Браилов Ю. А. Топология бифуркационных диаграмм интегрируемых систем на полупростых алгебрах Ли // *Докл. Акад. Наук. Сер. матем.* 2000. Т. 375, № 2. С. 151–153.
141. Brailov Yu. A. Geometry of singularities of integrable systems on Lie algebras // *Rev. Math. Phys.* 2005. Vol. 12, no. 2. P. 1–51.
142. Yehia H. M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. I - The case of axisymmetric forces // *Mechanics Research Communications*. 1996. Vol. 23, no. 5.

- P. 423–427.
143. Yehia H. M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. II - The case of axisymmetric forces // *Mechanics Research Communications*. 1996. Vol. 23, no. 5. P. 429–431.
 144. Yehia H. M. The master integrable two-dimensional system with a quartic second integral // *Journal of Physics A: Math. & Gen.* 2006. Vol. 39. P. 5807–5824.
 145. Соколов В. В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // *Теоретическая и математическая физика*. 2001. Т. 129, № 1. С. 31–37.
 146. Соколов В. В. Об одном классе квадратичных $so(4)$ – гамильтонианов // *Доклады Академии наук*. 2004. Т. 394, № 5. С. 602–605.
 147. Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Singularities of integrable Hamiltonian systems // In: *Topological Methods in the Theory of Integrable Systems*. Cambridge Scientific Publ. 2006. P. 1–67.
 148. Kharlamov M. P. Complete topological atlases of some integrable systems with two and three degrees of freedom // IV International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable Systems». Book of Abstracts. Izhevsk: RCD. 2013.
 149. Харламов М. П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // *Механика твердого тела*. 2004. № 34. С. 47–58.
 150. Зотьев Д. Б. Фазовая топология волчка Ковалевской в $SO(2)$ – симметричном двойном силовом поле // *Механика твердого тела*. 2004. № 34. С. 66–71.
 151. Kharlamova I. I., Savushkin A. Y. Bifurcation diagrams involving the linear integral of Yehia // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2010. Vol. 43, no. 10. P. 105203.

152. Фоменко А. Т. Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях // Функциональный анализ и его приложения. 1991. Т. 25, № 4. С. 23–35.
153. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева–Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 139–142.
154. Болсинов А. В., Козлов В. В., Фоменко А. Т. Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела // УМН. 1995. Т. 50, № 3. С. 3–32.
155. Харламов М. П. Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Механика твердого тела. 2002. № 32. С. 32–38.
156. Харламов М. П. Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // Механика твердого тела. 2006. № 36. С. 13–22.
157. Zotev D. V. Fomenko–Zieschang invariant in the Bogoyavlenskiyi case // Regular and Chaotic Dynamics. 2000. Vol. 5, no. 4. P. 437–457.
158. Харламов М. П., Савушкин А. Ю. Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Украинский математический вестник. 2004. Т. 1, № 4. С. 564–582.
159. Kharlamov M. P., Shvedov E. G. On the existence of motions in the generalized 4th Appelrot class // Regular and Chaotic Dynamics. 2006. Vol. 11, no. 3. P. 337–342.
160. Kharlamov M. P. Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class. II. Real solutions // Regular and Chaotic Dynamics.

2009. Vol. 14, no. 6. P. 621–634.
161. Kharlamov M. P. Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2007. Vol. 12, no. 3. P. 267–280.
162. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. Москва: Изд-во МГУ, 1988.
163. Kharlamov M. P., Zotev D. B. Non-degenerate energy surfaces of rigid body in two constant fields // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2005. Vol. 10, no. 1. P. 15–19.
164. Харламов М. П. Особые периодические решения обобщенного случая Делоне // *Механика твердого тела*. 2006. № 36. С. 23–33.
165. Зотьев Д. Б. Фазовая топология 1-го класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2006. Т. 12, № 1. С. 95–128.
166. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // *Изв. Варшавского ун-та*. 1916. № 3. С. 1–13.
167. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // *Труды отд-я физ. наук общества любителей естествознания*. 1903. Т. 11, № 2. С. 7–10.
168. Tsiganov A. V. On the generalized Chaplygin system // *J. of Math. Sciences*. 2010. Vol. 168, no. 8. P. 901–911.
169. Харламов М. П. Обобщение 4-го класса Аппельрота: область существования движений и разделение переменных // *Нелинейная динамика*. 2006. Т. 2, № 4. С. 453–472.
170. Kharlamov M. P., Savushkin A. Y. Explicit integration of one problem of motion of the generalized Kowalevski top // *Mech. Res. Commun*. 2005. Vol. 32. P. 547–552.
171. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // *Функц. анализ и его прил.*

1988. Т. 22, № 4. С. 38–51.
172. Вершилов А. В., Григорьев А. Ю., Цыганов А. В. Об одной интегрируемой деформации волчка Ковалевской // *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10, № 2. С. 223–236.
173. Kharlamov M. P. Bifurcation diagrams and critical subsystems of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // *Hiroshima Mathematical Journal*. 2009. Vol. 39, no. 3. P. 327–350.
174. Борисов А. В., Мамаев И. С., Васькина А. В. Новые относительные равновесия в системе трех точечных вихрей в круговой области и их устойчивость // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, № 1. С. 119–138.
175. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1990. Т. 54, № 3. С. 546–575.
176. Харламов М. П. Симметрия в системах с гироскопическими силами // *Механика твердого тела*. 1983. № 15. С. 87–93.
177. Гашененко И. Н. Интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // *Механика твердого тела*. 2003. № 33. С. 20–32.
178. Clebsch A. *Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit* // *Math. Ann.* 1870. Vol. 3, no. 1. P. 238–262.
179. Jurdjevic V. Integrable Hamiltonian systems on Lie groups: Kowalewski type // *Annals of Mathematics*. 1999. Vol. 150, no. 2. P. 605–644.
180. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kholmskaya A. G. Kowalevskaya top and generalizations of integrable systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2001. Vol. 6, no. 1. P. 1–16.
181. Dragović V., Kukić K. Systems of Kowalevski type and discriminant-

- ly separable polynomials // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014. Vol. 19, no. 2. P. 162–184.
182. Dragović V., Kukić K. The Sokolov case, integrable Kirchhoff elasticae, and genus 2 theta functions via discriminantly separable polynomials // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2014. Vol. 286, no. 1. P. 224–239.
183. Kötter F. Sur le cas traité par M-me Kowalevski de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe // *Acta Mathematica*. 1893. Vol. 17, no. 1-2. P. 209–263.
184. Komarov I. V., Sokolov V. V., Tsiganov A. V. Poisson maps and integrable deformations of the Kowalevski top // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2003. Vol. 36. P. 1–14.
185. Козлов И. К. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ // *Математический сборник*. 2014. Т. 205, № 4. С. 79–120.
186. Богоявленский О. И. *Опрокидывающиеся солитоны*. М: Наука, 1991.
187. Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела*. Ижевск: Изд-во РХД, 2001.
188. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. *Динамика тела с полостями, содержащими жидкость*. М: Наука, 1965.
189. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. *Эволюция движений твердого тела относительно центра масс*. М.- Ижевск: АНО ИИКИ, 2015.