

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Хамед Мемарианфард

**ДВУХУРОВНЕВЫЙ МЕТОД В МЕХАНИКЕ
ТОЛСТОСТЕННЫХ НАМОТОЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ
АРМИРОВАННЫХ ПОЛИМЕРОВ
(ПРИ ИХ СОЗДАНИИ И ЭКСПЛУАТАЦИИ)**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
профессор, доктор физ.-мат. наук
Р.А. Турусов

Москва – 2016

ОГЛАВНЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ, ЦЕЛИ РОБОТЫ И ОБЗОР НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ	14
1.1. Основные проблемы при создании толстостенных намоточных оболочек..	14
1.2. Обзор и анализ исследований и работ по расчету остаточных напряжения в толстостенных намоточных оболочках	20
1.3. Эксперименты по исследованию трещинообразования в толстостенных намоточных цилиндрах	23
1.4. Обзоры литературы о методах микромасштабного анализа напряжений в композиционных материалах.....	38
ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ (РАЗРАБОТКА МНОГОМАСШТАБНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА)	41
2.1. Определение механических характеристик композиционных материалов на макроуровне (Гомогенизация композиционных материалов)	41
2.1.1. Усреднение по объёму.....	46
2.1.2 Теория гомогенизации.....	47
2.1.3. Периодические граничные условия	54
2.2. Механическое поведение материалов (определяющие уравнения)	58
2.2.1. Определяющие уравнения изотропных материалов	58
2.2.2. Определяющие уравнения анизотропных материалов	59
2.2.3. Определяющие уравнения и механическое поведение матрицы (полимерного связующего).....	60
2.3. Процесса теплопередачи	68
2.4. Численный метод решения (Метод Конечных Элементов)	71
2.4.1. Анализ температуры.....	72
2.4.2. Теория гомогенизации для тепловых задач в МКЭ	77
2.4.3. Анализ напряженно-деформированного состояния.....	78
2.5. Теория гомогенизации в МКЭ	83
2.6. Нелинейный анализ методом конечных элементов	85

2.6.1. Нелинейный многомасштабный алгоритм для решения задачи методом конечных элементов	89
ГЛАВА 3. РАСЧЁТЫ ТОЛСТОСТЕННОГО КОКОНА И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ	96
3.1. Разработка толстостенного кокона из армированного полимера	96
3.2. Оценка остаточных напряжений в толстостенном намоточном цилиндром при отверждении и охлаждении на микро и макроуровне	102
3.3 Толстостенный кокон под действием внешнего давления	130
3.4. Обсуждение результатов	137
ГЛАВА.4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ	139
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	146

ВВЕДЕНИЕ

Перспективы применения толстостенных анизотропных оболочек из армированных полимеров: глубоководные аппараты и строительные конструкции, корпуса летальных аппаратов, посадочные шасси космических аппаратов, специальные контейнеры, включая супербаллоны для хранения и транспортировки газов. Этим определяется научная новизна, актуальность и практическая значимость данной диссертационной работы. Здесь будут решаться проблемы напряженно-деформированного состояния толстостенных оболочек и цилиндров из армированных пластиков на этапах формирования и эксплуатации в зависимости от характера анизотропии, толщины и диаметра цилиндра.

В таких конструкционных элементах образуются кольцевые трещины на технолитической стадии отверждения и охлаждения. Общеизвестно, что уровень развития техники в значительной степени определяется наличием необходимых материалов. Наиболее наглядно это можно проследить на примере развития древних цивилизаций, когда изобретение или создание нового прогрессивного материала становилось толчком к развитию техники и цивилизации. Недаром технический уровень развития цивилизации характеризуют видом материала, позволявшего создавать в свое время наиболее передовые орудия и средства производства. Так были каменный век, бронзовый век, железный век. Настоящее время многие ученые называют «век композиционных материалов».

Решение проблемы технологической монолитности толстостенных намоточных изделий из армированных полимеров позволяет повысить их коэффициент массового совершенства в несколько раз. Например, супербаллон из нержавеющей стали (см. таблицу) объемом 2.5 м^3 для хранения и транспортировки газов под давлением 400 атм (40 МПа) будет иметь массовое совершенство ~ 0.79 км (при собственной массе ~ 12 т.), а такой же супербаллон, изготовленный с применением намоточных армирующих волокнистых

композитов может иметь весовое совершенство в 4.9 км (при собственной массе ~2.2 т).

№	МАТЕРИАЛ	PV/m, км
1	нержавеющая сталь 10X18H10T	0,78
2	легированная сталь ВФА	1,82
3	титан	2,6
4	сталь ВНС 17(лейнер)+ органопластик	4,9
5	экранированный фольгой органит	15-18
6	герметичный армированный полимер	18-20

За рубежом проводятся интенсивные исследования в плане создания толстостенных (т.е. толщина более 3% от внутреннего радиуса изделия) намоточных ёмкостей большого объёма из армированных полимеров для глубоководных аппаратов и субмарин и для супербаллонов высокого массового совершенства в 5–6 км с металлическим лейнером. В настоящее время близко к завершению решение проблемы обеспечения технологической монолитности толстостенных намоточных изделий из армированных полимеров. Она состоит в получении толстостенных намоточных изделий без кольцевых трещин, которые являются следствием анизотропии материала и геометрии изделия. В ближайшие несколько лет эта задача будет, по-видимому, решена как в научном, так и в практическом плане.

Попытки создания толстостенных продольно-поперечных намоточных цилиндров не были удачными из-за расслаивания цилиндров в процессе их создания. В случае толстостенных намоточных цилиндров из-за анизотропии усадки и особенности формы в них в процессах отверждения и охлаждения

возникают растягивающие напряжения в радиальном направлении, что может привести и часто приводит к формированию кольцевых трещин. Исследованию этого явления и посвящена настоящая работа.

Актуальность:

Подводные аппараты являются нейтральной плавучестью; их вес равняется вес вытесненной воды. Таким образом, средняя плотность погружного равна плотности вытесненной воды. Вес корпуса является функцией его формы и выбор конструкционных материалов и увеличивается с проектной глубиной (глубина эксплуатации). Вследствие этого, для какой-то глубины, вес пустого корпуса, противостоящего давлению будет так большой, что количество электроники и энергии (батареи) которые корпус может нести не будет достаточным для предполагаемой миссии.

Сферические оболочки высокого давления дают наилучшее соотношение объема к массе для данной проектной глубины, но даже для сферических оболочек на некоторой глубине вес корпуса превысит вес вытесняемой воды. Таким образом, для того, чтобы идти глубже, должен создаваться корпус из самых легких материалов, таких, например, как композиционные материалы на основе высокожестких и высокопрочных волокон.

Достигнутый уровень развития теории позволяет в большинстве случаев с достаточно удовлетворительной для инженерных расчетов точностью предсказать поведение конструкций и изделий из однородных материалов. То же самое сказать по отношению к конструкциям из армированных полимеров пока не приходится. Это касается и толстостенных намоточных цилиндров из армированных полимеров. Здесь остается еще не до конца решенной проблема технологической монолитности таких цилиндров с разной степенью упругой и деформационно-температурной анизотропии. Перспектива получения таких конструкционных элементов монолитными открывает широкие возможности применения их в мало освоенных областях деятельности человека. Например,

глубоководные аппараты, строительные конструкции, корпуса летальных аппаратов, стойка шасси посадочной модули космических аппаратов, специальные контейнеры, включая супербаллонные для хранения и транспортировки газов.

Для достижения к этой цели необходимо прогнозировать остаточные температурные напряжения (технологические напряжения) в толстостенных крупногабаритных изделиях, например, цилиндрах, не только на макро-, но и на микро-уровне.

Степень исследованности проблемы:

Решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния анизотропных толстостенных цилиндров впервые описано в работе С.Г Лехницкого. Он решил задачу на основе теории упругости анизотропной сплошной среды. Турусов Р.А, Коротков В.Н, и Розенберг Б.А решили задачу о температурных напряжениях в ортотропном цилиндре в вязкоупругой постановке с учетом фактического распределения температуры по сечению изделия с использованием обобщённого нелинейного уравнения Максвелла в процессе охлаждения цилиндра. Турусов Р.А, Коротков В.Н. с сотрудниками в 1986 году в своих экспериментальных и теоретических работах учитывали макронапряжения, возникающие вследствие химической усадки связующего. Авторы широко использовали численные методы для того, чтобы более подробно исследовать остаточные напряжения в толстостенных намоточных оболочках в процессе охлаждения и отверждения с однородным и неоднородным распределением температуры и с учетом неупругого поведения материала. Все эти исследования в совокупности дали очень много интересных результатов, но они были сосредоточены и ограничены анализом макронапряжений в анизотропной сплошной среде, Большинство этих работ, ограничивалось исследованием однонаправленных намоточных цилиндров, и оказались не в состоянии объяснить некоторые экспериментальные артефакты.

Цель и задачи диссертации:

Расчеты остаточных напряжений в процессах отверждения и охлаждения намоточного цилиндра, когда он рассматривается, как анизотропная сплошная среда свидетельствуют о небольших величинах остаточных напряжений, что не дает ответа на поставленные вопросы. Но образование кольцевых трещин происходит в процессе охлаждения толстостенного цилиндра. Поэтому, можно сказать, что расчеты по методу сплошной анизотропной среды не отражают в полной мере сложное напряженное состояние толстостенных оболочек. Из-за сложности и неравномерности поля напряжений, в реальной микроструктуре композиционных материалов использованные выше упрощенные аналитические методы, так же как и метод анизотропной сплошной среды не могут полностью и подробно представлять реальные остаточные напряжения. Нарушение (разрыв) в композиционных материалах часто происходит вследствие значительной концентрации напряжений в матрице. По этой причине необходимо исследовать распределение микронапряжений в композите. Однако анализ всей структуры в микро-масштабе потребует большого времени и огромного количества компьютерных ресурсов, Но можно поступить иначе и применить, многомасштабный (многоуровневый) анализ напряжений для нахождения поля микронапряжений в интересующей исследователей подозрительной зоне, а не во всей структуре. В настоящей работе сосредоточено внимание на восстановлении микронапряжений в изделии в процессе изготовления и эксплуатации.

Цели и задачи данной диссертационной работы включают в себя, разработку нелинейного вычислительного многомасштабного метода и алгоритма для прогнозирования остаточных макронапряжений и локальных микронапряжений в толстостенных намоточных толстостенных оболочках из армированных полимеров в процессе их охлаждения и отверждение для создания кокона под действием внешнего давления.

Создание модели кокона – толстостенного цилиндра с полусферическими заглушками по торцам под действием внешнего давления 640 атмосфер (прочный корпус глубоководных аппаратов) с прогнозированием полного напряжённого состояния в макро- и микро структуре в процессах отверждения и охлаждения и затем во время его эксплуатации.

Научная новизна:

I. Впервые исследованы остаточные напряжения в толстостенных намоточных цилиндрах из армированных полимеров на макро и микроуровне. для точного прогноза локального нелинейного поведения толстостенных анизотропных намоточных цилиндрических оболочек из армированных полимеров на основе применения метода конечных элементов (МКЭ) и реалистичных Представительных Элементов Объёма.

II. Разработан нелинейный вычислительный многомасштабный алгоритм для прогнозирования остаточных локальных микронапряжений в микроструктуре (в представительном элементе) толстостенных намоточных толстостенных оболочек в процессе отверждения и охлаждения. В этом алгоритме нелинейное вязкоупругое поведение материала во времени (на каждом шаге времени) реализуется в полимерной матрице (в представительном элементе).

III. Исследование на всех уровнях совокупного действия остаточных температурных напряжений и механической нагрузки, на стадии эксплуатации изделия.

Объект исследования:

Кокон состоит из намоточного толстостенного анизотропного цилиндра с полусферическими заглушками из титана по его торцам.

Практическая и теоритическая значимость работы:

разработана аналитическая асимметричная модель для определения микронапряжений в однонаправленных намоточных цилиндрах. Разработан нелинейный численный многомасштабный (многоуровневый) метод решения для

прогноза напряженно-деформированного состояния в толстостенных намоточных оболочках из армированных полимеров (при создании и эксплуатации) на макро- и микроуровне.

Результаты диссертационной работы могут использоваться для точного прогноза напряженно-деформированного состояния анизотропных толстостенных намоточных цилиндрических оболочек из армированных полимеров в процессах отверждения, охлаждения и эксплуатации на макро- и микроуровне. Результаты этого исследования также можно использовать для прогноза остаточных термических напряжений в микро- и макромасштабах в разнообразных конструкциях из композиционного материала.

Методология и методы исследования:

При подготовке диссертации были использованы аналитические методы и современные нелинейные многомасштабные численные методы на основе метода конечных элементов.

Достоверность результатов:

Содержащиеся в работе экспериментальные исследования трещинообразования в толстостенных гладких цилиндрических оболочках из стеклопластика однонаправленной и продольно-поперечной структуры проведены в Институте химической физики РАН (ИХФ РАН) с использованием аттестованного оборудования и поверенных средств измерений. Теоретические результаты настоящей работы не противоречат экспериментальным исследованиям и подтверждают выдвинутые гипотезы о решающем влиянии микронапряжений в монолитности толстостенных армированных полимерных цилиндров продольно–поперечной структуры.

Структура работы:

Данная диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, и списка литературы.

В первой главе диссертационной работы проводится обзор научной литературы известных научных исследований по расчету остаточных напряжений и результатам экспериментальных данных. На основании анализа литературных данных обосновывается необходимость решения сформулированной выше задачи в связи с перспективной необходимостью создания толстостенных намоточных цилиндрических оболочек из армированного полимера. Наглядно отражены их преимущества по сравнению с такими структурами из металлов и сплавов. Изложен ряд проблем, возникающих при создании толстостенных намоточных оболочек. В конце этой главы дан обзор работ, посвященных постановкам задач и методам их решения.

Вторая глава диссертации содержит, методы исследования, формулировки расчетных схем, разработку физико-математических моделей, и вычислительного многоуровневого алгоритма для решения задач о напряженно-деформированном состоянии макро- и микроструктуры толстостенных композитов из армированных полимеров в процессе изготовления изделия.

В третьей главе моделируется цельная модель кокона высокого давления (намоточный толстостенный цилиндр с полусферическими заглушками по торцам) и рассчитываются остаточные температурные макро- и микронапряжения на стадии отверждения и охлаждения, а затем при действии механической нагрузки с использованием разработанного и описанного во второй главе вычислительного алгоритма.

Четвертая глава содержит выводы и обсуждение полученных результатов, в сопоставлении с результатами исследований других авторов. И в конце работы список литературы.

Апробация работы:

Основные положения диссертационной работы были изложены в докладе на:

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ,

посвященная десятилетию образования ИФО МГСУ 31 марта 2015 года.

2. VI МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ДЕФОРМАЦИЯ И РАЗРУШЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И НАНОМАТЕРИАЛОВ» 10-13 ноября 2015 г. Москва, ИМЕТ РАН.

Публикации:

Основные положения диссертационной работы опубликованы в 7 работах, 3 из них опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК; и, 2 статьи опубликованы в зарубежном журнале, входящем в список, индексируемых в SCOPUS и ISI Web.

1. Турусов Р.А., Мемарианфард Х. Дискретная модель в анализе остаточных напряжений однонаправленных намоточных цилиндров из армированного пластика в процессе охлаждения // Вестник МГСУ. 2015. № 1. С. 27—35.

2. Turusov R.A., Memarianfard H. Numerical Prediction of Residual Stresses in Open-Ended Thick-Walled Cross-Ply Filament Wound Fiber-Reinforced Cylinders // Вестник МГСУ. 2015. № 11. С. 80—89.

3. Мемарианфард Х., Турусов Р.А. Напряженно-деформированное состояние толстостенных намоточных цилиндров на макро-, мезо- и микроуровне при охлаждении//МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 577–590.

4. R.A. Turusov., H. Memarianfard, Stress-Strain State of Thick-Walled Filament-Wound Cylinders at the Macro-, Meso-, and Microscales During Cooling.//Mechanics of Composite Materials, Vol. 52, No. 3, July, 2016, pp 411–420.

5. Мемарианфард М., Турусов Р.А., Мемарианфард Х. Численные и экспериментальные исследования монолитности толстостенной анизотропной оболочки // Вестник МГ СУ. 2016. № 7. С. 36—45.

6. Мемарианфард Х., Турусов Р.А, Многомасштабный анализ остаточных напряжений, возникающих в процессе охлаждения однонаправленных

ТОЛСТОСТЕННЫХ НАМОТОЧНЫХ ЦИЛИНДРОВ//МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ. — 2016. — Т. 52, № 4 Июль — август. С. 737—750.

7. H. Memarianfard, R. A. Turusov., A Multiscale Analysis of the Residual Stresses Occurring During Cooling of Thick-Walled Unidirectionally Filament-Wound Cylinders// Mechanics of Composite Materials, Vol. 52, No. 4, September, 2016. pp 521–530.

ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ, ЦЕЛИ РОБОТЫ И ОБЗОР НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

1.1. Основные проблемы при создании толстостенных намоточных оболочек

Материалы, которые люди использовали в трудовой деятельности, всегда играли важную роль в процессе развития цивилизации. Даже эпохи истории человечества называют именами материалов: каменный век, железный век, медный век, бронзовый век. С некоторой пристрастностью настоящую эпоху можно назвать веком композиционных материалов. В настоящее время актуальными становятся работы в космосе и на больших океанских глубинах. Для их осуществления требуются емкости с большим массовым совершенством, которое представляет собой отношение произведения давления на внутренний объем емкости к её массе. Это значит, что этот объем при минимально возможной массе изделия должен быть достаточно большим и противостоять заданному внутреннему или внешнему давлению [32]. Массовое совершенство измеряется в километрах (км). Например, супербаллон оптимальных размеров для хранения и транспортировки различных газов при давлении более 350 атмосфер, изготовленный из прочной стали или титана будет обладать массовым совершенством 0,5 – 3,0 км. Сухой вес такого баллона из стали будет более 10 тонн. Но если изготовить его из композита, например, полимера, армированного современными суперпрочными и супержесткими волокнами (углеродными или органическими), то массовое совершенство может возрасти до 10 – 15 км (см. рис. 1.1). Соотношение для весового (массового) совершенства (измеряются в километрах км) сосудов высокого давления определяется следующим образом [103]:

$$k_w = \frac{PV}{M} \quad (1.1)$$

Где P – разрушающая нагрузка (давление) сосуда (kg/mm^2), V – внутренний объем (литр), W – вес сосуда (kg).

Небольшие композитные сосуды с высоким разрывным давлением 700 – 1000 атмосфер находятся в эксплуатации на сегодняшний день в аэрокосмической области и спорте. Сосуды с давлением разрушения между 2000–4000 атмосфер пока исследуются. Простейшая модель кокона – цилиндр с полусферическими заглушками по торцам. В нашем случае это толстостенный цилиндр толщиной 10 и более процентов от внутреннего радиуса.

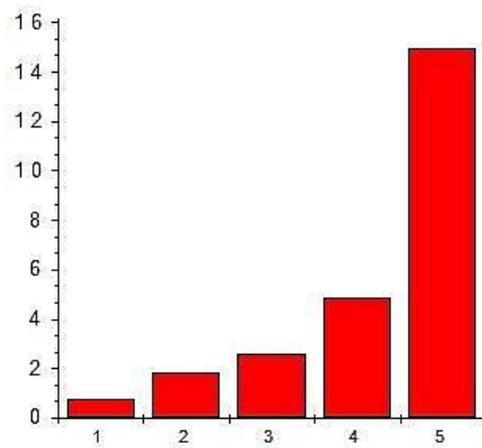


Рис. 1.1. Диаграмма зависимости массового (весового) совершенства (в километрах) супербаллона, рассчитанного на давление 400атм. объёмом 2.5m^3 , диаметром 1м, длиной 4 м. 1 – нержавеющая сталь, 2 – легированная сталь, 3 – титан, 4 – водородоустойчивая сталь + органик кольцо, 5 – органоупластик.

Обычно такие емкости по разным причинам создают в виде кокона методами намотки, которые поддаются автоматизации. В процессе намотки, непрерывные волокна покрытые смолой наматывают на вращающуюся оправку (или лайнер). Композиционные намоточные сосуды обязательно содержат металлический внутренний лайнер, на который намотан армированный композит. Металлический лайнер (он же служит и оправкой) необходим для предотвращения утечки закачиваемых под давлением различных газов. Цилиндры наматываются с натяжением лентами, сформированными из многих волокон.

Каждое волокно в ленте покрыто вязким полимером, которое при последующем отверждении связывает волокна в единое целое. Затем их отверждают или при комнатной температуре, или в печи при повышенной температуре с получением конечного продукта. Методика предполагает высокую скорость и точный метод для размещения многих композитных слоев по технологической схеме, показанной на рис. 1.2. Эта технология, первоначально разработана для военного использования, но была адаптирована для гражданских целей, и потом распространялась на гражданском рынке.

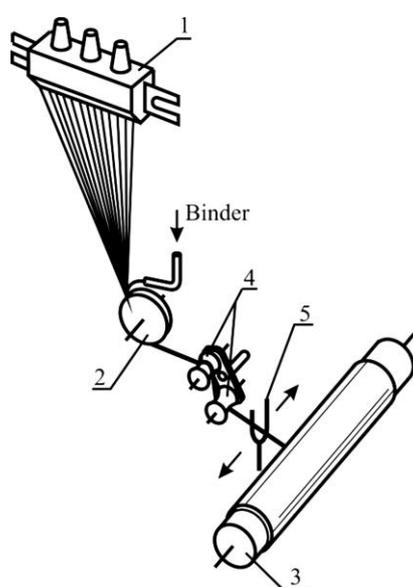


Рис. 1.2. Технологическая схема намотки цилиндра из армированных пластиков.

Коконсы могут разрушаться под действием внутреннего давления (баллоны, баки), или терять устойчивость и разрушаться внешним давлением (подводные аппараты, дома, субмарины). При создании толстостенных намоточных цилиндрических оболочек возникает ряд проблем. В дальнейшем мы отметим некоторые из таких важных проблем. Наиболее важные из них отмечены ниже.

- Расслаивание цилиндра. В толстостенных цилиндрах в процессе отверждения или охлаждения возникают кольцевые трещины (технологическая монолитность) [30].

- Низкая прочность толстостенной намоточной оболочки по сравнению с тонкостенной из-за увлечения их удельной поверхности и объема материала.
- При намотке толстостенных цилиндров и колец существует опасность потери устойчивости слоев волокна, прилегающих к лейнеру. Это приводит к образованию свилей, т.е. к полной дезориентации волокон и, как следствие, к резкому падению прочности материала в окружном направлении.

Одной из важных проблем, возникающих при создании толстостенных намоточных цилиндров из армированных полимеров, является проблема технологической монолитности материала. Наилучшие композиты по физико-механическим свойствам получаются в результате отверждения при повышенных температурах от 150 до 350°C. Т.е. после намотки при комнатной температуре изделие подвергается значительному разогреву. Из-за анизотропии усадки и особенности формы в них в процессе отверждения и охлаждения возникают растягивающие напряжения в радиальном направлении, что может привести к формированию кольцевых трещин, как показано на рис. 1.3. Анизотропия здесь означает различие усадочных, упругих и теплофизических свойств материала в окружном, осевом и радиальном направлениях. Это значит, радиус хочет уменьшаться, а окружность не может сделать то же самое. Но, как известно длина окружности $l = 2\pi r$ и если это соотношение не выполняется – окружность теряет устойчивость и перестает быть окружностью. Если же окружности сохраняются, как в случае толстостенного цилиндра, то в толще композита образуются растягивающие радиальные напряжения и может возникнуть разрыв в виде кольцевой трещины.



Рис. 1.3. Кольцевые трещины (расслаивание) в толстостенном намоточном цилиндре.

Полимерное связующее при разогреве расширяется и становится более жидким (вязкость его при этом становится часто меньше вязкости воды). В результате давление в материале возрастает, и полимер фильтруется через пористую структуру наружу. Давление внутри структуры падает и создается дефицит связующего. Этот дефицит усугубляется в процессе последующего отверждения полимера, поскольку плотность его увеличивается, а объем уменьшается. Твердея, полимер связывает волокна в единое целое и создает композит. С точки зрения геометрии происходит усадка материала, например, у эпоксидов это химическая (в ходе химической реакции отверждения) усадка. При последующем охлаждении происходит термическая (физическая) усадка. Но процесс отверждения толстостенных изделий может оказаться неравномерным по радиусу. Он часто начинается от внешней поверхности и может двигаться фронтом внутрь. На фронте происходит усадка. В силу сохранения сплошности начнется встречное движение жидкого полимера к фронту. Давление перед фронтом может упасть вплоть до отрицательной величины. В результате жидкость порвется, сформировав или создав будущую возможность кольцевой трещины [27]. В результате в цилиндре, вследствие фильтрации жидкого связующего, могут совсем исчезнуть запасённые при намотке под натяжением радиальные напряжения сжатия. В силу малой жесткости смолы при отверждении

при высоких температурах создаваемые на этом этапе напряжения в композите малы [13]. Поэтому можно считать, что основная часть остаточных напряжений возникает в процессе охлаждения.

С этой целью в соответствии с первой проблемой (проблемой монолитности) здесь будет рассматриваться возникновение остаточных напряжений в толстостенном намоточном цилиндре в процессе отверждения и охлаждения.

Однако во многих реальных неоднородных структурах (например, композитах), из-за сложности микроструктуры поле напряжения не является равномерным на уровне размера частиц наполнителя и градиенты напряжений в микроструктуре могут быть значительными. Это означает, что только макроскопического анализа недостаточно, и требуется соответствующий анализ напряженно-деформированного состояния на микро-уровне, т.е. на уровне микроструктуры композита. Однако анализ структуры всего изделия на микро-уровне оказывается весьма дорогостоящим для крупных изделий. Вычислительного многомасштабного анализа принимается для восстановления микронапряжения в микроструктуре толстостенной намоточной оболочки из армированных полимеров. Различные масштабы (уровни) структуры композита из армированного полимера представлены на рис. 1.4.

Для осреднения механических свойств композитного материала в настоящей работе применялся численный асимптотический метод гомогенизации. Метод гомогенизации и локализации позволяет практически математически точно вычислять эффективные характеристики композитов, а затем восстанавливать локальные напряжения с помощью решения специальных «локальных задач» на ячейках периодичности. Этот метод объясняется более подробно во второй главе.

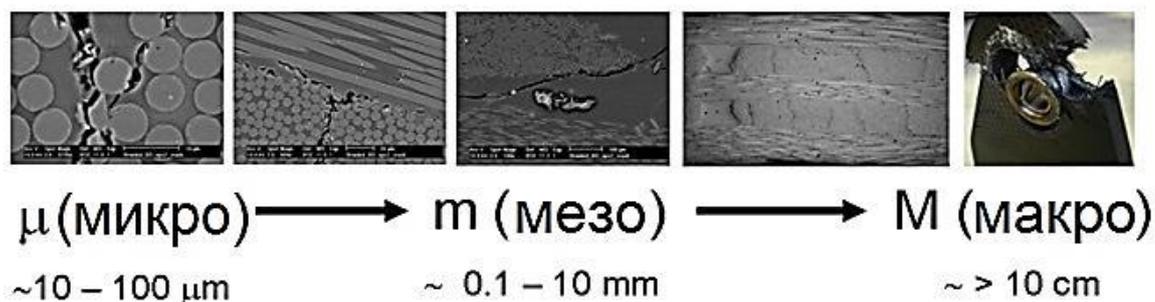


Рис. 1.4. Различные масштабы структуры композита из армированных полимеров.

1.2. Обзор и анализ исследований и работ по расчету остаточных напряжения в толстостенных намоточных оболочках

Плоская задача многослойного анизотропного цилиндра является одной из немногих задач теории упругости, которая имеет точное аналитическое решение. Решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния анизотропных толстостенных цилиндров впервые описано в работе С.Г Лехницкого [16]. Он решил задачу на основе теории упругости анизотропной сплошной среды. На западе аналитическое решение для многослойного анизотропного цилиндра подробно описано Herakovich [45] на основе работы Лехницкого.

Исследованию термических напряжений в толстостенных намоточных цилиндрах из армированных полимеров посвящено большое количество работ. Первые исследования температурных напряжений в толстостенных намоточных цилиндрах представлены в работах Болотин В.В. и Болотин К.С. в 1969 году [102]. Они предложили метод для определения остаточных напряжений и деформаций в намоточных стеклопластиковых изделиях. Авторы сравнили результаты расчета остаточных напряжений с экспериментальными данными.

Лапин Ю.А. и Варюшкин Э.М. в 1974 году рассмотрели изменение остаточных напряжений в процессе изготовления толстостенных намоточных

изделий из стеклопластика. Авторы также представили результаты экспериментального исследования остаточных напряжений в толстостенных стеклопластиковых цилиндрах в процессе их изготовления [107]. Болотин В.В и Воронцов А.Н. в 1976 году рассмотрели возникновение остаточных напряжений в ламинированных и волокнистых композитах в процессе отверждения [100,7].

Турусов Р.А, Коротков В.Н, Андреевская Г.Д. и Розенберг Б.А. [99] в 1981 году рассчитывали температурные напряжения, возникавшие в толстостенном однонаправленном цилиндре из армированного полимера в процессе охлаждения с учетом нелинейного поведения материала и различных скоростей охлаждения. Турусов Р.А, Коротков В.Н, и Розенберг Б.А решили задачу температурных напряжений в ортотропном цилиндре в вязкоупругой постановке с учетом фактического распределения температуры по сечению изделия с использованием обобщённого нелинейного уравнения Максвелла – Гуревича [31] в процессе его охлаждения. В заключении авторы проводили сравнение расчетов по нелинейной и линеаризованной теориям. Они тоже разработали теоретические методики оптимизации режима охлаждения толстостенных изделий из композитных материалов [29,11]. Екельчик В.С. с коллегами рассмотрели температурные напряжения в толстостенных ортотропных цилиндрах из армированных полимерных материалов при неоднородном охлаждении [2]. Турусов Р.А, Коротков В.Н, Розенберг Б.А и Джавадян Э.А в 1986 году в своих работах учитывали макронапряжения, возникающие из-за химической усадки связующего. Они проводили расчеты на основе предположения об однородном и неоднородном распределении температуры и, следовательно, неоднородной по радиусу и времени степени отверждения в процессе термообработки, используя экспериментальные кривые кинетики отверждения смолы [13].

Hyer M.W. and Rousseau C.Q. в 1987 году рассматривали задачу о температурных напряжениях в намоточных цилиндрах с перпендикулярным расположением волокон в соседних слоях $[0^0/90^0]$ (угол ориентации волокна в слоях композита) [63]. T.Tzeng, предложил модель для прогнозирования

остаточных напряжений в термопластичных композиционных цилиндрах [68]. T.Tzeng, L.S Chien в 1995 году исследовали термическое вязкоупругое поведение толстостенного композитного цилиндра. Они рассматривали цилиндр как слоистую структуру и использовали численный метод решения задачи [93,69].

L. G. Stringer, R. J. Hayman, M. J. Hinton, and M. R. Wisnom в 1999 году проанализировали остаточные напряжения в процессе отверждения в толстостенных однонаправленных намоточных цилиндрах с учетом химической усадки в процессе гелеобразования, опираясь на ортотропную теорию вязкоупругости [105].

Y. K. Kim и S.R. White выполнили несколько работ по расчету остаточных напряжений в толстостенных намоточных цилиндрах с продольно-поперечной структурой в процессе их создания с учетом вязкоупругого поведения материала [73]. Li C. с сотрудниками в 2000 году прогнозировали остаточные макронапряжения, возникающие в толстостенных намоточных цилиндрах в процессе отверждения, и исследовали влияние контакта между оправкой и композитом на остаточные напряжения при отверждении [76].

Можно констатировать, что в последние несколько десятилетий опубликовано счётное количество работ, по расчету остаточных напряжений в толстостенных намоточных оболочках основные из них отмечены выше. Первые работы были на основе аналитического подхода. С развитием численных методов авторы широко использовали эти методы для того, чтобы более подробно исследовать остаточные напряжения в толстостенных намоточных оболочках в процессе охлаждения и отверждения с однородным и неоднородным распределением температуры и с учетом неупругого поведения материала. Все эти исследования в совокупности дали очень много интересных результатов, но они были сосредоточены и ограничены анализом макронапряжений в анизотропной сплошной среде, Большинство этих работ, ограничивались

анализом однонаправленного намоточного цилиндра и не могли объяснить некоторые экспериментальные артефакты.

1.3. Эксперименты по исследованию трещинообразования в толстостенных намоточных цилиндрах

Для экспериментального исследования трещинообразования в толстостенных гладких цилиндрических оболочках из стеклопластика была разработана, спроектирована и изготовлена специальная установка, позволяющая практически независимо управлять температурами внутренней поверхности оправки (или оболочки) и наружной поверхности оболочки с внутренними диаметром приблизительно 150мм в процессах отверждения и охлаждения. Схема установки представлена на рис. 1.5. В качестве теплоносителя использовался воздух, что позволяло проводить охлаждение поверхности со скоростью более 10 град/мин, поэтому ограничения снизу практически нет.

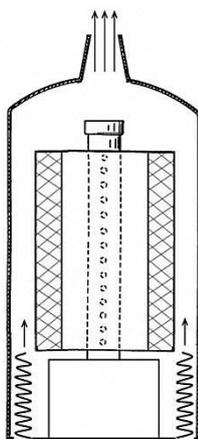


Рис. 1.5. Схема установки для отверждения и охлаждения толстостенных намоточных цилиндрических оболочек.

В процессах отверждения и охлаждения осуществлялся контроль температуры в 12 точках оболочки распределённых по радиусу и по длине.

Исследования проводились на цилиндрических оболочках из стеклопластика, изготовленного на основе двух связующих ЭДТ-10 и ЭКР.

Термообработка будущего изделия осуществлялась по традиционному режиму – медленное охлаждение с использованием термошкафа для сравнения с результатами охлаждения по разработанному в ИХФ РАН оптимальному режиму охлаждения. Такой способ борьбы с трещинообразованием в толстостенном намоточном цилиндре наиболее легко осуществим в технологическом плане практически не оказывает влияния на несущую способность готового изделия. Задача оптимизации ставилась следующим образом. Найти режим охлаждения, позволяющий получить монолитное изделие за минимальное время. Выбор минимального времени в качестве целевой функции определялся двумя причинами – зависимостью трансверсальной прочности, т.е. величины критических нормальных радиальных напряжений от скорости нагружения и экономикой. Решение полной системы уравнений задачи оптимизации относится к задачам нелинейного программирования с ограничениями.

Оболочки на основе связующего ЭДТ-10 исследования проводились на оболочках с однонаправленной структурой $[90^0]$. Внутренний диаметр оболочки 150мм, наружный 248мм, т.е. относительная толщина цилиндра $\approx 65\%$. цилиндра наматывалась на стальную оправку толщиной 4 мм. Длина наматываемого цилиндра $L=180$ mm. Намотка стеклопластиков производилась по разработанной в Институте химической физики РАН (ИХФ РАН). Технологической схеме, показанной на рис. 1.6. максимальная температура отверждения 160° C. После соответствующей выдержки при этой температуре начинается процесс охлаждения.

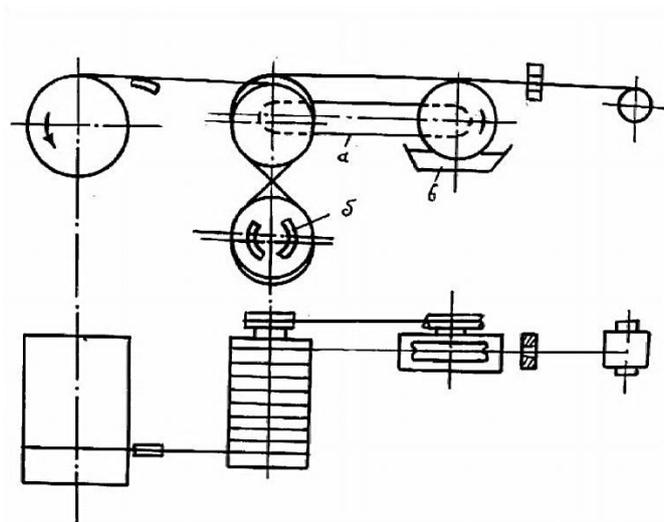


Рис. 1.6. Технологическая схема намотки изделия из армированных пластиков

Основная рабочая гипотеза при этих исследованиях – температурные напряжения, возникающие в оболочке в процессе её охлаждения, способны привести к возникновению кольцевых трещин.

С целью проверки этой гипотезы были проведены на трёх цилиндрических оболочках следующие опыты по валянию режимов охлаждения на образование трещин.

Первая цилиндрическая оболочка, отверждённая по стандартному режиму, охлаждалась медленно вместе с выключенной печью.

Ультразвуковой контроль по амплитуде проходящей волны, проведённый после завершения охлаждения, обнаружил довольно обширную дефектную область на одном радиусе. После разрезки цилиндра на диски обнаружили, кроме указанной, и другие дефектные области. Кольцеобразные трещины различной длины белы хорошо видны и располагались на разных радиусах без видимой закономерности.

Второй цилиндр охлаждался на воздухе (его вынимали из термошкафа). Режим охлаждения внешней и внутренней поверхностей (со стороны тела оболочки) представлен на рис. 1.7.

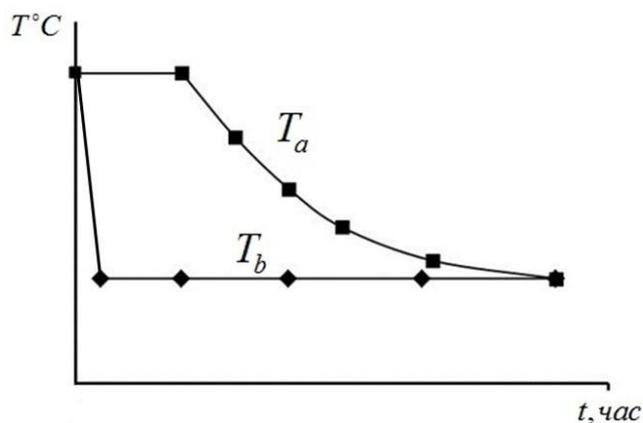


Рис. 1.7. Оптимальный режим охлаждения цилиндра на основе ЭДТ-10. T_a – температура внутренней и T_b – температура внешней поверхностей цилиндра.

Ультразвуковой контроль после охлаждения цилиндра дефектов в нём не обнаружил. После этого цилиндр был разрезан на диски. В этих дисках обнаружили трещины, которые раскрывались, очевидно, во время отрезания диски. Это раскрытие продолжалось и после отрезания, сопровождаясь характерным потрескиванием. Трещины образовались, по видимому, в процессе охлаждения. В торцах всех испытанных нами оболочек трещины обнаруживаются очень редко, что вероятно, связано с избытком связующего покрывающего все торцы равным слоем. Эти слои и стягивают обе поверхности трещины, не позволяя им проявиться в торцах.

В этом случае трещины небольшой длины 15–20 мм и их мало-одна-две на сечение.

Третий цилиндр охлаждался по режиму, близкому к оптимальному, полученному расчётным методом по разработанной в ИХФ РАН и приведённой выше теории оптимизации процесса охлаждения толстостенных цилиндров из армированных полимеров. График его практического воплощения для третьего цилиндра приведён на рис. 1.7. Из рисунка видно, что внешняя поверхность цилиндра охлаждался быстро до температуры меньше температуры стеклования полимера ($T_g=100^\circ\text{C}$). В этом случае, не обнаружили не каких дефектов в отрезанных дисках [18].

В связи с этим Р.А Турусов и Х Мемарианфард, рассмотрели намотанный толстостенный однонаправленный цилиндр, из стеклопластика на оправку с внутренним радиусом $a=75\text{мм}$, внешним радиусом цилиндра $b=125\text{мм}$ и длиной 180мм ; толщина стальной оправки 4 мм (предположим, что оправка не приклеена к намотанному на нее композитному толстостенному цилиндру). Они рассмотрели две задачи: Первая – для случая, когда цилиндр охлаждается по стандартному режиму, от 150°C до комнатной температуры при скорости охлаждения $0,5^\circ\text{C}/\text{мин}$ и вторая – для случая, когда цилиндр охлаждается по режиму, близкому к оптимальному (скорость охлаждения внешней поверхности оболочки $10^\circ\text{C}/\text{мин}$ и внутренней поверхности оболочки $0,5^\circ\text{C}/\text{мин}$) [18].

На рис. 1.8 изображен график зависимости максимальных остаточных температурных радиальных напряжений от времени при охлаждении от 150°C до 20°C для стандартного и оптимального режимов охлаждения.

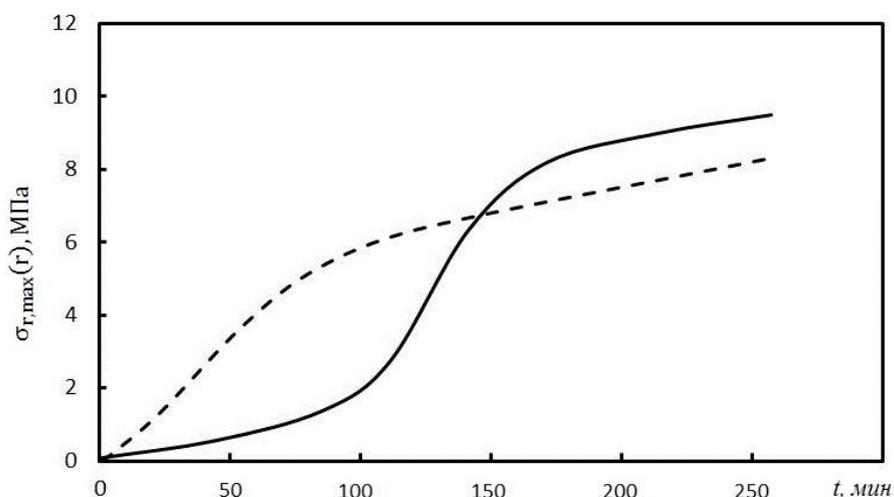


Рис. 1.8. Зависимости максимальных температурных радиальных напряжений от времени при охлаждении. 1 – по стандартному режиму, (штриховая кривая), 2 – по оптимальному режиму (сплошная кривая).

Результаты показали что, максимальные остаточные радиальные напряжения в цилиндре (при охлаждении по стандартному режиму) не превышают 10 МПа . Это существенно меньше трансверсальной прочности однонаправленного стеклопластика при комнатной температуре. Из результатов

расчетов на рис. 1.8 видно, что максимальные остаточные радиальные напряжения, на самом опасном начальном участке при охлаждении цилиндра по оптимальному режиму, оказываются в несколько раз меньше, чем когда цилиндр охлаждается по стандартному режиму.

Эти результаты свидетельствуют о сильном влиянии процесса охлаждения на монолитность толстостенной цилиндрической оболочки и о необходимости разработки и применения оптимизации процесса охлаждения для толстостенных намоточных цилиндров из стеклопластика. Подчеркнём ещё раз, что идея применения неоднородного температурного поля для стеклопластиковой оболочки вылилась в необходимость более быстрого охлаждения наружной поверхности и такое управление получилось как следствие решения.

Результат оптимизации процесса охлаждения для иного материала иной анизотропии может оказаться и противоположным.

Оболочка на основе связующего ЭКР в результате разнообразных экспериментальных исследований, различных вариаций режимов охлаждения (в том числе оптимального) для оболочек из стеклопластика на основе связующего ЭКР можно констатировать, что трещины в оболочках формируются в процессе отверждения.

Варьирование параметрами оболочки (толщиной, структурой), параметрами режима отверждения и анализ этих результатов позволяет прийти к следующему выводу: для того чтобы толстостенная цилиндрическая оболочка из стеклопластика на основе связующего ЭКР получалась монолитной (без трещин), начальную стадию процесса отверждения (до точки геля) необходимо проводить так чтобы вязкость и прочность связующего уменьшалась незначительно по сравнению с вязкостью при нормальной температуре. Практически это значит то, что отверждение на начальной стадии надо проводить при сравнительно низкой температуре.

Причины трещинообразования в процессе отверждения, по-видимому, находятся в низкой прочности связующего в композите при малой вязкости и большой химической усадке этого связующего (она почти вдвое больше усадки ЭДТ-10). Гелеобразование этого полимера происходит примерно при 80% превращения, а, например, у ЭДТ-10 – примерно при 50% превращения эпоксигрупп.

Благодаря отверждению при низкой температуре (на начальной стадии отверждения до глубины 50%) удалось получить монолитной оболочку из стеклопластика с продольно-поперечной структурой $[90^0/0^0]$ с относительной толщиной $b/a=35\%$.

С полученной, таким, способом оболочкой были проведены следующие операции. От оболочки (цилиндра) отрезаны четыре кольца высотой 35мм. Затем кольцо 4 без оправки прошло термообработку при 60^0C в течение 7 суток (охлаждение с выключенным термошкафом). Видимых изменений (в том числе и цвета) не обнаружено увеличилась лишь глубина превращения.

Кольцо 3 без оправки прошло термообработку при температуре 90^0C в течение 24 часов (охлаждение с выключенным термошкафом). На внутренней поверхности обнаружено локальное отслоение одного-двух монослоёв. Длина отслоения по окружности $\approx 6-7\text{мм}$. но близи этого отслоения под поверхностью на глубине двух монослоёв проходить вдоль образующей хромель-копелевая термопара.

Кольцо 1 без оправки прошло термообработку по полной стандартной программе отверждения оболочки на основе связующего ЭКР. После завершения термообработки кольцо 1 изменило цвет—сталокоричневым (было желтоватосветлым). Трещин нет, но внутренние слои локально потеряли устойчивость. Длина зоны по внутренней окружности цилиндра 9–10мм, глубина (от внутренней поверхности в направлении увеличился радиуса) 10.5–11.5 мм. И

высоте гребня, выступающего над внутренней поверхностью (в сторону уменьшения радиуса) 1.5мм.

Такую же, как и кольцо 1, термообработку прошло кольцо 2, на стальной оправке (на которой происходила намотка всей оболочки). В кольце 2 ни трещин и ни локальной потери устойчивости слоёв не обнаружено.

Это означает, что на стадии нагревания, когда в анизотропном свободном кольце возникают окружные напряжения сжатия, внутренние слои могут потерять устойчивость.

Стальная оправка (толщиной 4 мм) при нагревании увеличивает свой размер и во внутренних слоях анизотропного кольца создает окружные напряжения растяжения (вместо сжимающих у свободного кольца) и не позволяет терять устойчивость внутренними слоям. В этом заключается положительная роль оправки при нагревании оболочки.

На основании проведённых экспериментальных и теоритических исследований можно сделать следующие выводы.

Конкретно для цилиндрических оболочек из стеклопластика на основе связующего ЭКР: определяющее влияние на процессе трещинообразования оказывает режим отверждения. Процесс охлаждения меньше виляет, но не безразличен. Не исключено, что режим охлаждения может оказать существенное влияние на формирование некоторых механических свойств цилиндрической оболочки и материала (например, трансверсальная прочность, межслоевая прочность на сдвиг и т.п.). Здесь, вероятно, следует оценить возможности оптимизации процесса охлаждения не только по монолитности, но и по остаточным напряжениям.

Исследования, проведённые на цилиндрических оболочках с двумя различными связующими (ЭКТ-10 и ЭКР), свидетельствуют о важной роли обоих режимов отверждения и охлаждения в формировании монолитной толстостенной

анизотропной оболочки. Кроме того, становится ясным, что для надёжного получения монолитных толстостенных цилиндрических оболочек из армированного полимера с заданными свойствами необходимо глубокое изучение процесса отверждения материала оболочек с механической, физической и химической позиции.

Экспериментальные исследования, проводились над толстостенными намоточными цилиндрами с однонаправленной $[90^0]$ и продольно-поперечной $[90^0/0^0]$ структурой. Эксперименты, показали, что для однонаправленного намоточного цилиндра (все слои волокон, покрытые жидким полимером, намотаны на цилиндрическую стальную оправку) с относительной толщиной 50% от внутреннего радиуса цилиндр может быть получен монолитным и без кольцевых трещин (см. рис. 1.9). Но в толстостенных намоточных цилиндрах с продольно-поперечной структурой после завершения процесса отверждения и охлаждения возникают, кольцевые трещины. Причины такого явления в технологической монолитности цилиндра с продольно-поперечной структуры до сих пор не смогли объяснить. Естественно, степень анизотропии механических и теплофизических свойств, для продольно-поперечной структуры, по-видимому, меньше, чем для однонаправленной структуры и можно было бы ожидать, что с уменьшением степени анизотропии будут уменьшаться растягивающие радиальные остаточные напряжения.



Рис. 1.9. Монолитный (без трещин) толстостенный однонаправленный намоточный цилиндр.

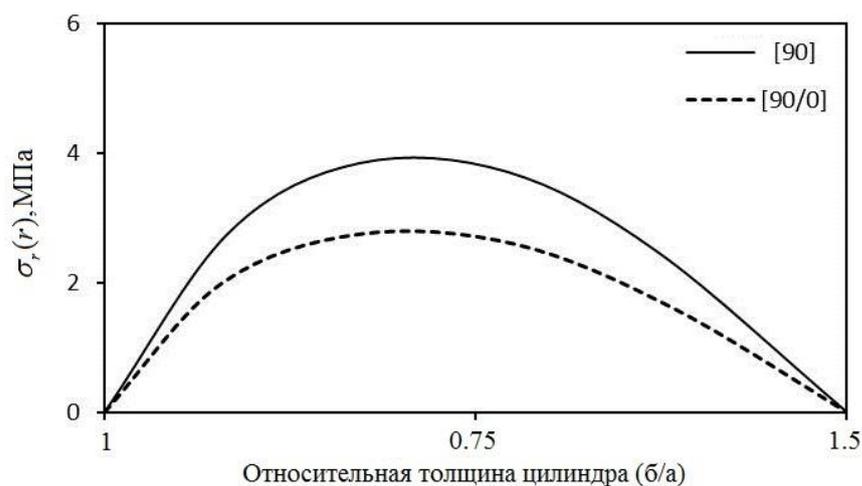


Рис. 1.10. Распределение радиальных напряжений по радиусу. Цилиндр с однонаправленной намоткой – сплошная кривая. Цилиндр с продольно – поперечной укладкой волокон, иначе – с продольно-поперечной намоткой (ППН) – штриховая кривая.

Расчеты остаточных напряжений в процессе охлаждения и отверждения по методу сплошной анизотропной среды тоже показали, что радиальные напряжения, в толстостенных однонаправленных намоточных цилиндрах всегда превышают радиальные напряжения в толстостенных намоточных цилиндрах с продольно-поперечной структурой. Пример такого расчета представлен на рис. 1.10.

Таким образом, можно заключить, что расчеты по методу анизотропной сплошной среды не отражают в полной мере сложное напряженно-деформированное состояние композиционных материалов (в том числе толстостенных намоточных оболочек).

В соответствии с этой гипотезой возникает вопрос о правильности оценки величины остаточных напряжений в толстостенном анизотропном цилиндре, как сплошной анизотропной среды. Чтобы ответить на этот вопрос, и подтвердить гипотезу были предприняты следующие модельные исследования: результаты расчёта температурных радиальных напряжений в толстостенном

однонаправленном цилиндре методом сплошной среды сравниваются с расчетами температурных напряжений соответствующей дискретной структуры (микроструктуры) однонаправленного материала.

Рассмотрим двухмерную осесимметричную модель при плоском напряженном состоянии для однонаправленного намоточного цилиндра (в отсутствие оправки) с внутренним радиусом 75мм и 113мм (относительная толщина цилиндра $\approx 50\%$) при охлаждении цилиндра от 120°C до 20°C . Задачу решалась для двух моделей, первая модель – когда однонаправленный цилиндр рассматривается как слоистая структура (как микроструктуры состоит из n изотропных concentрических цилиндров из стекла и полимера), в которой чередуются тонкие цилиндрические слои стекла и полимера. Она должна отражать однонаправленного намоточного цилиндра, как показано на рис. 1.11, и вторая модель – когда цилиндр рассматривается как ортотропной сплошной среды с эффективными механическими свойствами однонаправленного намоточного цилиндра. Объёмная доля волокна для однонаправленного цилиндра равна 65%. Здесь эта объёмная доля соблюдена как в дискретной модели (микромодели), так и в модели сплошной среды [32].

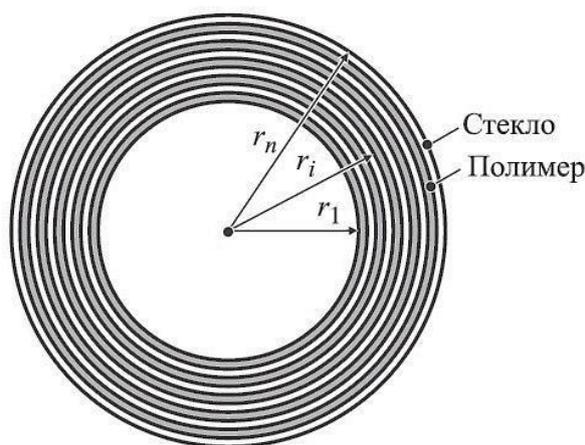


Рис. 1.11. Дискретная модель однонаправленного намоточного цилиндра.

Определяющее дифференциальное уравнение для плоского напряженного состояния для изотропных материалов:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (1.2)$$

Общее решение уравнения (1.2) имеет вид:

$$\sigma_{ri} = A_i r^{-2} + B_i \quad (1.3)$$

Тогда перемещение u_r будет иметь вид:

$$u_r = \frac{1}{E} (-A(1+\nu)r^{-1} + B(1-\nu)r) + \alpha r \Delta T \quad (1.4)$$

Задача решалась при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_1) &= 0 \\ \sigma_{r,\text{полимер}}(r_i) &= \sigma_{r,\text{стекло}}(r_i) \\ u_{r,\text{полимер}}(r_i) &= u_{r,\text{стекло}}(r_i) \\ \sigma_r(r_n) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решая эту систему уравнений, получаем постоянные коэффициенты A_i и B_i .

Определяющее дифференциальное уравнение для плоского напряженного состояния для анизотропной сплошной среды и общее решение этого уравнения:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} \left(3 - \nu_r + \nu_\phi \frac{E_\phi}{E_r} \right) + \frac{\sigma_r}{r^2} \left(1 - \nu_r - \frac{E_\phi}{E_r} (1 - \nu_\phi) \right) = \frac{(\alpha_r - \alpha_\phi)}{r^2} E_\phi \Delta T \quad (1.6)$$

Где E_r – эффективный модуль Юнга в радиальном направлении, E_ϕ – эффективный модуль Юнга в окружном направлении, α_r – эффективный коэффициент линейного теплового расширения (КЛТР) в радиальном направлении и α_ϕ – эффективный КЛТР в окружном направлении, и определяются следующим образом:

$$E_r = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f}, \quad E_\phi = E_f V_f + E_m V_m \quad (1.7)$$

$$\alpha_r = \alpha_f V_f + \alpha_m V_m, \quad \alpha_\phi = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m}$$

$$v_\phi = v_f V_f + v_m V_m$$

Где V , α , E — относительное объемное содержание, КЛТР и модуль Юнга компонент композиционного цилиндра; p — полимер; f — волокно (стекло).

Общее решение уравнения (1.6) имеет вид:

$$\sigma_r = Ar^\lambda + Br^{-\lambda} + C \quad (1.8)$$

Используя следующие граничные условия можно получить коэффициенты A , B .

$$r = r \rightarrow \sigma_r = 0$$

$$r = R \rightarrow \sigma_r = 0 \quad (1.9)$$

Где r — внутренний радиус цилиндра и R — внешний радиус цилиндра.

На рис. 1.12. и 1.13 в сравнении представлены результаты расчетов распределения радиальных и окружных напряжений по радиусу для модели анизотропной сплошной среды и для дискретной (слоистой) модели (микромоделей).

Из рис. 1.12 видно, что радиальные напряжения, в цилиндре рассчитанные по дискретной модели (микромоделей) почти в 3 раза превышают радиальные напряжения, рассчитанные по модели анизотропной сплошной среды. Из рис. 1.13 видно, что окружные микронапряжения в полимерных слоях на растяжение и сжатие мало меняются по толщине цилиндра, но окружные микронапряжения в волокнах на внутренней поверхности цилиндра на растяжение и на внешней поверхности цилиндра на сжатие, и их величина более 2 раза превышают макронапряжения.

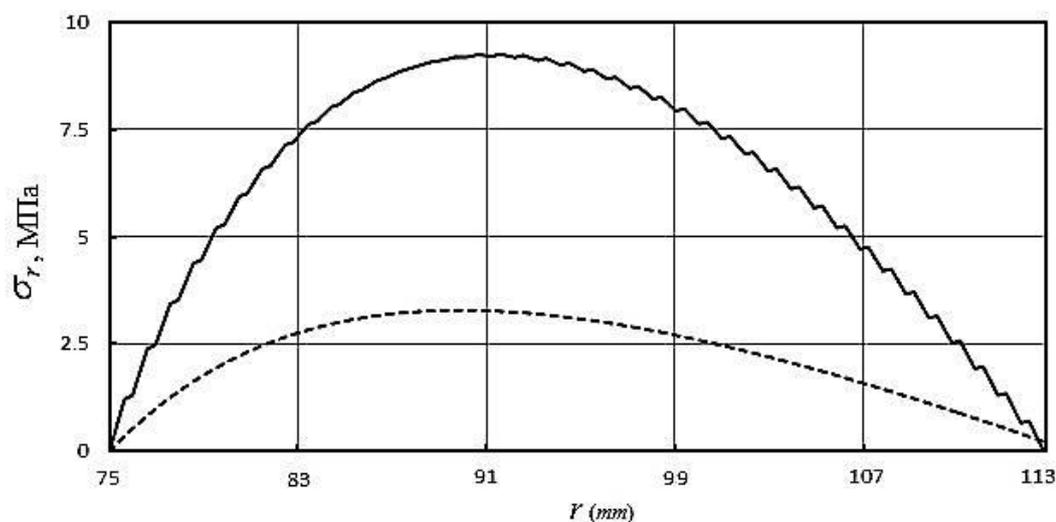


Рис. 1.12. Зависимость радиального напряжения от радиуса для однонаправленного намоточного цилиндра относительной толщины 50%, при охлаждении. Дискретная модель – ступенчатая сплошная кривая, ортотропная сплошная среда – штриховая кривая.

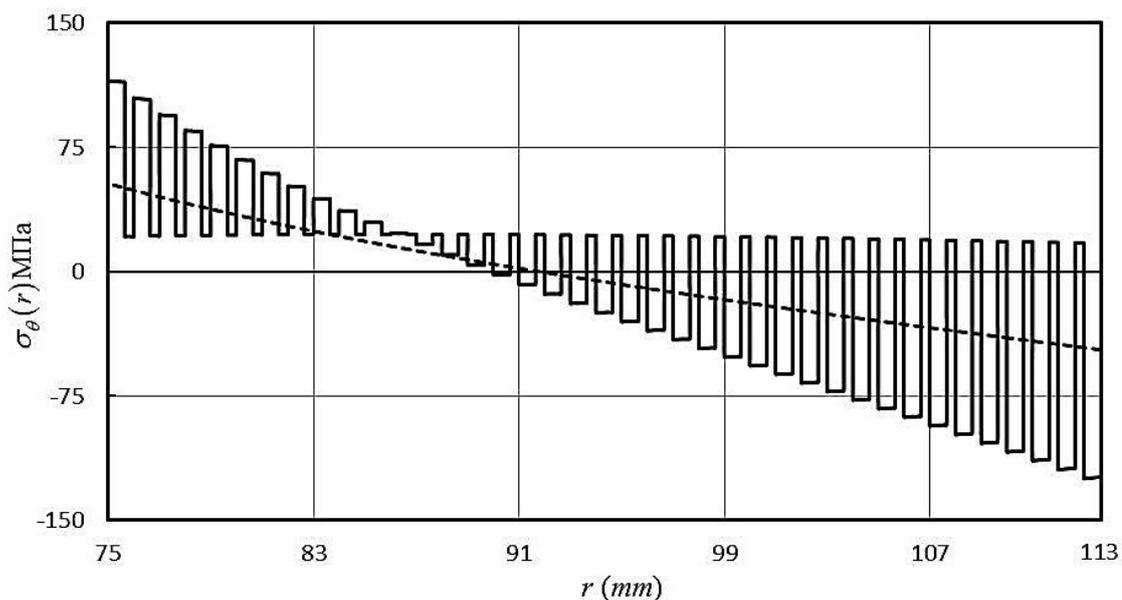


Рис. 1.13. Зависимость окружных напряжений от радиуса для однонаправленного намоточного цилиндра относительной толщины 50%, при охлаждении. Дискретная модель – ступенчатая сплошная кривая, ортотропная сплошная среда – штриховая кривая.

Далее рассмотрим толстостенный однонаправленный намотанный цилиндр на стальную оправку; толщина стальной оправки 3 мм.

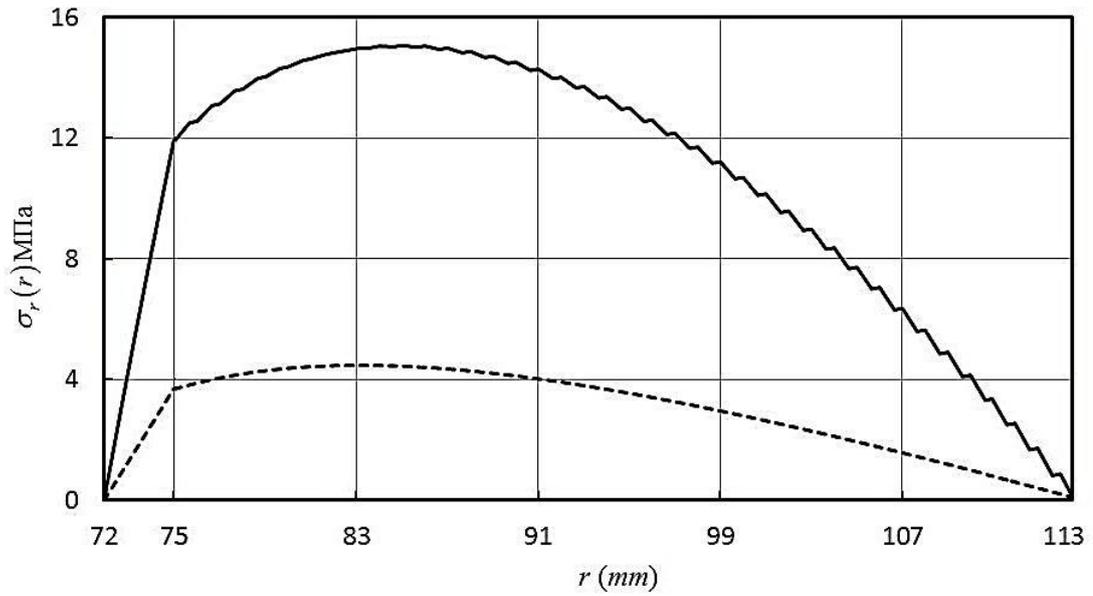


Рис. 1.14. Зависимость радиального напряжения от радиуса для однонаправленного намоточного цилиндра относительной толщины 50% (на оправку) при охлаждении. Дискретная модель – ступенчатая сплошная кривая, ортотропная сплошная среда – штриховая кривая.

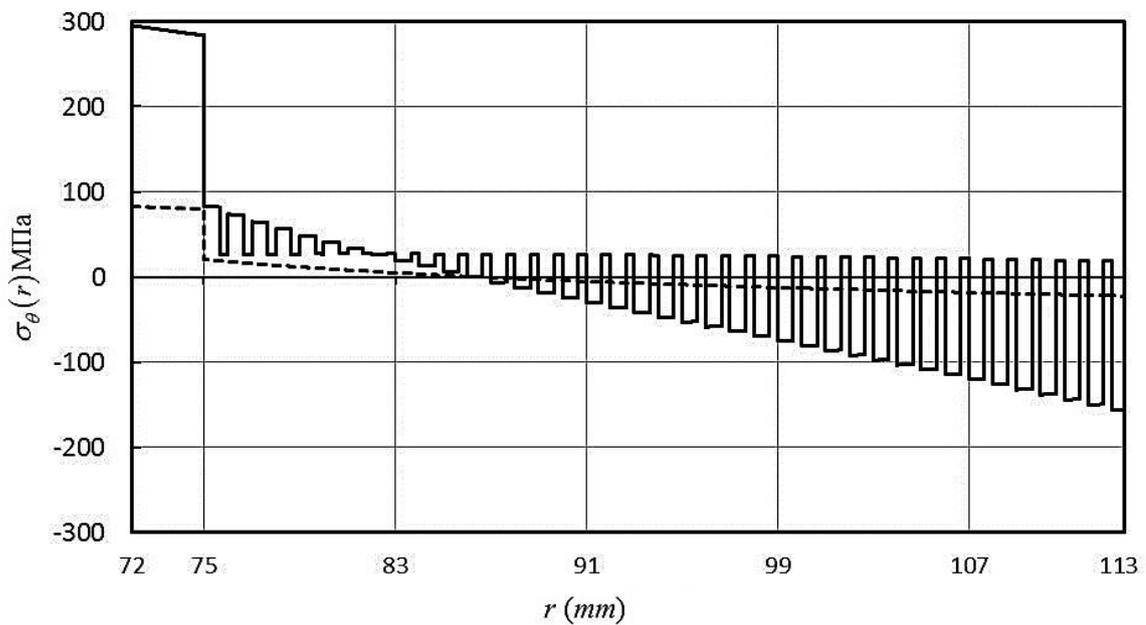


Рис. 1.15. Зависимость окружных напряжений от радиуса для однонаправленного намоточного цилиндра относительной толщины 50% (на оправку) при охлаждении. Дискретная модель – ступенчатая сплошная кривая, ортотропная сплошная среда – штриховая кривая.

На рис. 1.14 и 1.15 представлены распределения остаточных радиальных и окружных напряжений по радиусу для толстостенного намоточного цилиндра на оправку. Из результатов на рис. 1.14 и 1.15 видно, что в случае, когда цилиндр приклеивается к оправке, величина остаточных макро- и микронапряжений почти в два раза больше чем величины остаточных макро- и микронапряжений в случае, когда цилиндре не приклеивается к оправке.

В результате можно заключить, что линейная одномерная модель анизотропной сплошной среды (т.е. армированного пластика) не в состоянии отразить особенности поведения композита в цилиндре при охлаждении. Таким образом, можно предположить, что дискретная модель по сравнению с моделью сплошной среды может оказаться более точной для расчета остаточных напряжений.

Отсюда следует, что определяющие монолитность цилиндра явления разыгрываются на уровне микроструктуры композита. В связи с этим возникает необходимость разработки метода расчёта напряженно-деформированного состояния не только на макроуровне, но и на микроуровне.

1.4. Обзоры литературы о методах микромасштабного анализа напряжений в композиционных материалах

Понятно, что физико-механические характеристики композиционных материалов определяются их микроструктурой на разных масштабных уровнях, от макро и мезоуровней до микроуровней. В связи с этим в последние десятилетия наблюдается неуклонный рост интереса к экспериментальным и теоретическим подходам и способам исследования микроструктуры композиционных материалов в различных процессах их формирования и эксплуатации.

В последние годы в связи с развитием численных методов и вычислительной техники, численные методы широко использовались для

прогнозирования остаточных напряжений, возникающих в процессе изготовления композиционных материалов на макро - и микроуровне.

Исследователи посвятили значительные усилия, чтобы строго оценить механические свойства композиционных материалов с большей точностью. Например, Aboudi (1991) и Nemat-Nasser and Hori (1993) разработали метод оценки механического поведения композитов, исходя из механических свойств армирующей фазы (волокон) и матричной фазы (полимеров, металлов) с помощью анализа Представительных Объёмных Элементов (RVE) или элементарной ячейки композита [36,79].

Тот же автор Aboudi (1991) разработал микромеханическую теорию, на основе исследования взаимодействия периодических ячеек. Она была использована для прогнозирования механического поведения композиционных материалов с учетом упругих и неупругих составляющих [37]. Jacob Aboudi and Marek-Jerzy Pindera (1992) разработали обобщенный метод ячеек (Generalized Method of Cells) для анализа неупругого поведения однонаправленного композита с металлической матрицей [66].

Andersson В. и другие [41] исследовали развитие напряжений при охлаждении от температуры отверждения с использованием оцифрованной микрофотографии фактической композиции. Zhao L.G. и его коллеги [109] исследовали остаточные напряжения с помощью элементарного представительного объема композита методом конечных элементов. Напряжения возникают в однонаправленных армированных полимерах вследствие объемной усадки полимерной матрицы при отверждении. Авторы рассматривают при этом и возможность разрушения, т.е. образование кольцевых трещин при трансверсальной нагрузке. Ellyin F. Zihui Xia Yunfa Zhang рассмотрели трехмерный представительный объемный элемент для прогнозирования остаточных напряжений, возникающих в процессе изготовления композиционных материалов

с однонаправленной и продольно-поперечной структурой с учетом вязкоупругого эффекта и инициирования повреждения материала [111].

Zihui Xia, Yunfa Zhang, Fernand Ellyin сформулировали граничные условия для периодического представительного объёмного элемента с целью прогнозирования эффективных упругих констант однонаправленных и ориентированных слоев [110].

Jacob Fish and Qing Yu разработали нелокальную многомасштабную модель для моделирования повреждений хрупкого композиционного материала. Они применили тройной масштабный асимптотический анализ для исследования повреждения на микро-, мезо- и макро – уровне [50].

Bhaskar Patham and Xiaosong Huang (2014.г) разработали многомасштабную модель для оценки остаточных напряжений, возникающих в процессе отверждения более подробно, близко к интерфейсу волокна и матрицы в толстых однонаправленных термореактивных композитах [44].

Турусов Р.А и Мемарианфард Хамед, рассмотрели напряженно-деформированного состояния в толстостенном намоточном цилиндре с однонаправленной и предельно-поперечной структурой на макро- и микроуровне (в представительном элементе цилиндра) методом конечных элементов. Они также показали, что в цилиндре продольно-поперечной намотки опасные радиальные напряжения растяжения могут превышать аналогичные напряжения в структуре однонаправленной намотки [19, 54,20,84].

ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ (РАЗРАБОТКА МНОГОМАСШТАБНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА)

2.1. Определение механических характеристик композиционных материалов на макроуровне (гомогенизация композиционных материалов)

Композиционные материалы являются многокомпонентные материалы, состоящие из двух или более компонентов (матрицы и наполнителями) с чёткой границей раздела между ними. Для решения механических задач композиционных материалов методами теории упругости анизотропной среды требуется определить эффективные упругие характеристики композитов. Вопрос об определении эффективных характеристик неоднородных сред (в том числе композиционных материалов) ставился ещё в работах Пуассона, Максвелла [78], Рэлея [86], Фойгта [104] и Ройсса [34].

Простейшая модель для оценки эффективного модуля упругости композиционных материалов была разработана в 1887 г. Фойгтом (Voigt) из предположения об однородности деформаций в композите. Таким образом, эффективный модуль упругости Фойгта имеет вид:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) представляет собой эквивалент формулы смеси для модуля продольной упругости композита, как показано на рис. 2.1.

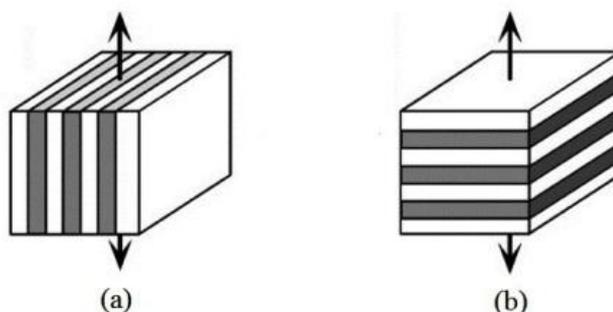


Рис. 2.1. (a) – модель Фойгта и (b) – модель Ройсса.

Ройсс (1929) предположил однородность напряжений действующих в композите. Его предположение дает формулы смеси для модуля трансверсальной упругости композита как показано на рис .2.1. В этом случае эффективный модуль упругости имеет вид:

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \quad (2.2)$$

Из рис. 2.2 видно, что метод Фойгта дает верхнюю, а метод Ройсса дает нижнюю границу оценки эффективных параметров. На этом рисунке представлена зависимость модуля Юнга композита от относительной объёмной доли волокон для модели Фойгта и Ройсса.

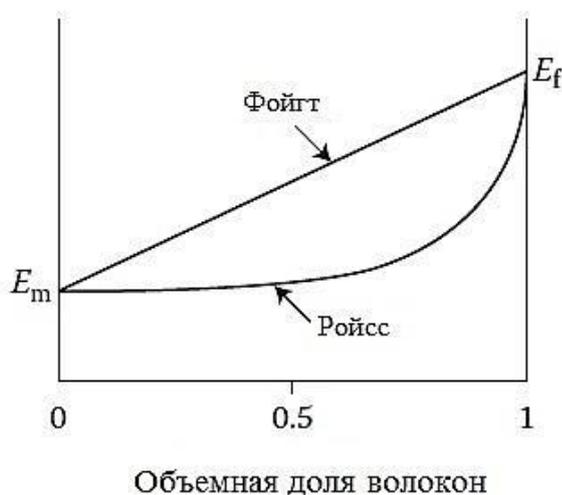


Рис. 2.2. Зависимость модуля Юнга композита от относительной объёмной доли волокон для модели Фойгта (т.е. вдоль волокон) и Ройсса (поперек волокон).

Позднее методы прогнозирования эффективных термоупругих свойств композиционных материалов, развиты в работах Hashin (1962) [56,57,58], Hill (1964) [59], и Halpin-Tsai (1972) [55].

Традиционные методы расчета элементов конструкций из композиционных материалов не в состоянии охватить и учесть процессы, происходящие на уровне структуры композита, т.е. на микроуровне локальных деформаций и напряжений приведенные выше. Микромеханические модели можно рассматривать как

механические или инженерные модели. Математическое развитие таких инженерных методов появилось в 1970- годах под общим заголовком «асимптотической теории гомогенизации». Асимптотическая теория гомогенизации использует периодические граничные условия при моделировании линейных и нелинейных композиционных материалов.

Данный метод позволяет математически точно вычислять эффективные характеристики композитов с помощью решения специальных «локальных задач» на ячейках периодичности. Однако, аналитическое решение такого рода задач для композитов, обладающих сложной геометрической структурой, невозможно, а численное решение осложняется интегро-дифференциальной постановкой локальных задач с неклассическими краевыми условиями периодичности [24]. Методика преобразования локальных задач к классическим краевым задачам с граничными условиями первого и второго рода предложена в работах Бахвалов Н.С. и Панасенко Г.П. [5].

Турусов Р.А. провел экспериментальные исследования оценки модуля Юнга композитного слоистого стержня [97]. Изготовлено одновременно три стержня, с одного «замеса» первоначально жидкого эпоксидного олигомера с отвердителем. Как показано на рис. 2.3. первый стержень из эпоксидной смолы. Вторым стержень состоял из трех последовательно соединенных стержней (стальной – эпоксидный – стальной). Относительная доля стали в таком составном стержне 85%. Третий стержень изготовлялся как многослойная структура (слои расположены перпендикулярно продольной оси) из чередующихся слоев стали и эпоксидного полимера. У этого стержня относительная доля стали составили те же 85%. Модуль Юнга всех трех стержней измерялся квазистатическим методом при малых нагрузках.

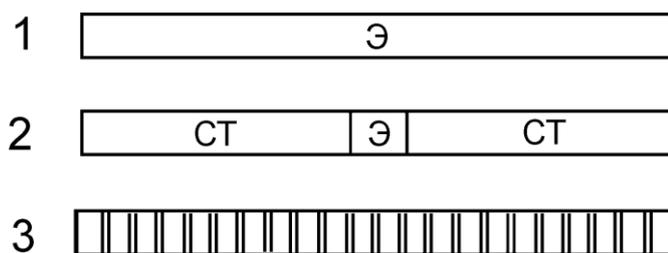


Рис. 2.3. Стержень из эпоксидного полимера; 2- составной стержень (сталь–эпоксид–сталь); 3- слоистый стержень из стали и эпоксидного полимера.

На рис. 2.4 представлены зависимости модуля Юнга обеих стержней – составного (кривая 1) и слоистого (кривая 2) от модуля Юнга эпоксидного полимера.

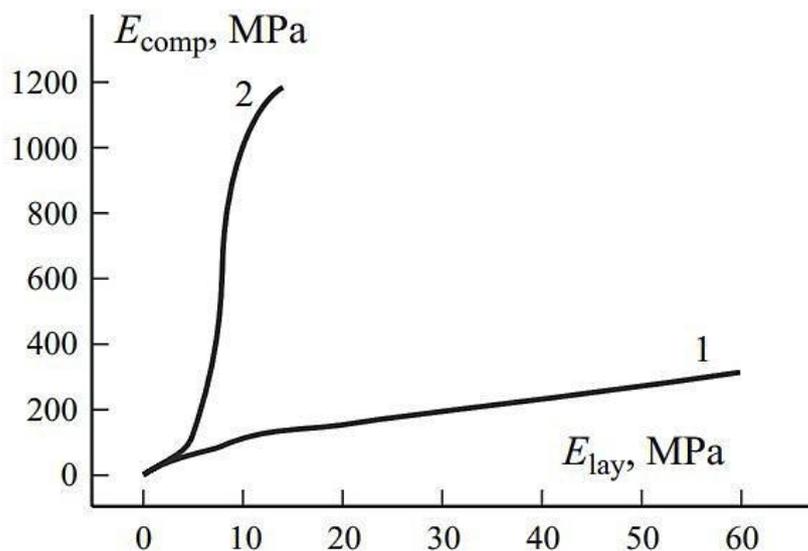


Рис. 2.4. График экспериментальной зависимости модуля Юнга составного (кривая 1) и слоистого (кривая 2) стержней от модуля Юнга эпоксидного полимера при его одновременном твердении во всех трех стержнях.

Из рис. 2.4. виден существенно различный ход кривых 1 и 2. Вначале, при малых величинах модуля Юнга эпоксидного полимера, результаты, полученные на обоих стержнях, совпадают, а затем начинают расходиться. Модуль Юнга стержня с тонкими полимерными прослойками начинает резко возрастать (кривая 2), во много раз превышая модуль трехсекционного стержня (кривая 1). Кривая 1, где она практически прямая, описывается формулой смеси – формулой

Ройсса. Кривая 2 отражает синергетическое поведение слоистой структуры. Она не описывается ни одной из формул смеси. Р.А.Турусовым предложенным им методом контактного слоя была решена задача о напряженно-деформированном состоянии такой структуры с учетом характеристики адгезионного взаимодействия адгезива (здесь эпоксидный полимер) – субстрат (здесь сталь). Показано, что для такой структуры характерна концентрация напряжений вблизи края [96]. В остальной однородной части полимер испытывает всестороннее объемное растяжение. Именно эта область определяет столь необычное поведение прослойки полимера из-за адгезии к стали и слоистой структуры в целом. Были получены формулы для модуля Юнга и коэффициента линейного температурного расширения для слоистых структур.

$$E_{\text{эф. сл. ст}} = \left[\left(\frac{V_0}{E_0} + \frac{V_1}{E_1} \right) - \frac{2(v_0/E_0 - v_1/E_1)^2}{(1-v_1)/E_1 V_1 + (1-v_0)/E_0 V_0} \left(1 - \frac{\text{th } v}{v} \right) \right]^{-1}$$

$$\alpha_{\text{эф. сл. ст.}} = (\alpha_0 V_0 + \alpha_1 V_1) + \frac{4(\alpha_0 - \alpha_1)(v_0 E_1 - v_1 E_0) V_0 V_1}{(1-v_0) E_1 V_1 + (1-v_1) E_0 V_0} \left(1 - \frac{\tan v}{v} \right). \quad (2.3)$$

$$\omega^2 = \frac{G}{h^*} \left[\frac{1-v_0}{E_0 h_0} + \frac{2(1-v_1)}{E_1 h_1} \right]. \quad v = \omega \frac{l}{2}$$

Здесь обозначены: индексами 0 и 1 внизу принадлежность величин к субстрату и полимеру соответственно, v_i , E_i ($i=0,1$) – коэффициенты Пуассона и модули Юнга компонент, V_i – относительные объемные доли компонент; G^*/h^* величина, обозначающая в [52] жесткость контактного слоя, впоследствии названная автором интенсивностью адгезионного взаимодействия адгезива с субстратом. G^* и h^* – модуль сдвига и толщина контактного слоя; l – сторона квадрата (размер) образца. Первые слагаемые в круглых скобках – формулы Ройсса (формулы смеси). Синергизм отражают вторые слагаемые. Т.е. формулы и теория вполне отвечают принципу соответствия – новая теория должна содержать в себе как частный случай старую, проверенную опытом теорию. Как известно, формулы смеси довольно хорошо работают в армированных пластиках, т.е. там, где есть малый размер наполнителя. С точки зрения теории Р.А.Турусова не

стоит ожидать синергизма от наполнения полимера частицами малых размеров (например, наноразмеров). Там будут работать лишь формулы смеси (2.1).

2.1.1. Усреднение по объёму

Механика различных сред, в основном, опирается на концепцию однородной сплошной среды. Однако в некоторых масштабах, все реальные материалы являются неоднородными. Однако размер неоднородности и микроструктуры композиционных материалов больше размера неоднородности обычных материалов, например, таких, как металлы и сплавы. Задачей микромеханики, является объяснение и определение эффективных характеристик неоднородных материалов на более высоком масштабе (макроуровне) исходя из свойств компонент. Для этого необходимо усреднить значения упругих параметров по объёму представительного элемента или периодической элементарной ячейки.

Представительный Объемный Элемент (ПОЭ) является объём материала, эффективное поведение которого неотлично от механического поведение материала в целом. Объём Представительного Элемента должен содержать достаточное количество структурных элементов, чтобы отражать микроструктуру материала с точки зрения статистики.

Введем элемент объёма неоднородной среды, отражающий характер целой среды. Этот элемент объёма V является представительным элементом объёма. Таким образом, если φ некоторая функция свойств, то среднее по объёму значение этой функции $\langle \varphi \rangle$ определяется соотношением [14]:

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varphi dV \quad (2.4)$$

Под действием макроскопических однородных напряжений или деформаций поля на ПОЭ, средние тензоры напряжений и деформаций соответственно определяются формулами:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \\ \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV\end{aligned}\tag{2.5}$$

2.1.2 Теория гомогенизации

Композиционные материалы обычно имеют периодическую структуру или структуру, близкую к ней, поэтому здесь мы будем рассматривать процессы в средах с периодической структурой. Периодичность означает, что если мы рассмотрим тело Ω с периодической структурой и с механической или физической характеристикой f , то имеем:

$$\text{if } x \in \Omega \text{ and } (x + Y) \in \Omega \Rightarrow f(x+Y) = f(x)\tag{2.6}$$

где Y - период структуры. Поэтому функции f являются Y -периодическими функциями вектора положения x [81].

Первые исследования по теории гомогенизации были произведены в СССР, в начале, 1970-х годах.

Разрешающие уравнения в периодических средах (композиционных материалах) описываются дифференциальными уравнениями с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами. Для решения таких уравнений применяется многомасштабный метод [8,15,21] в сочетании с методикой Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского [48,6,22,82]. Схема периодической структуры в глобальном и локальном уровнях представлена на рис. 2.5.

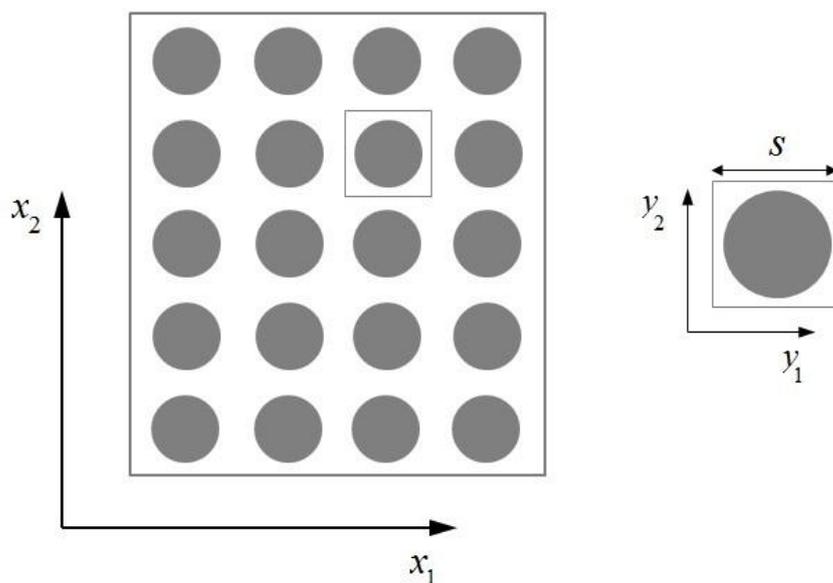


Рис. 2.5. Пример периодической структуры с двумя уровнями: глобальная структура – слева и локальная структура – справа.

Пусть x обозначает глобальную структуру или макрокоординату, а y обозначает локальную структуру или координату микроструктуры. Две координаты связаны соотношением $y_i = x_i/s$. Здесь малый параметр s , отражает отношение размера элементарной ячейки к размеру макроструктуры. Таким образом, асимптотическое решение задачи следует искать в виде рядов по степеням малого параметра s с коэффициентами, зависящими как от переменных x (обычно называемых медленными, или макроскопическими), так и от переменных $y_i = x_i/s$ (быстрых, или микроскопических). Таким образом, поля в периодической среде $f(x) = f(x, y)$ аппроксимируются в виде двухмасштабных асимптотических разложений:

$$f_i^s(x_i, y_i) = f_i^{(0)}(x_i, y_i) + s f_i^{(1)}(x_i, y_i) + s^2 f_i^{(2)}(x_i, y_i) + \dots \quad (2.7)$$

Медленные переменные соответствуют глобальной (макро) структуре полей, а быстрые переменные соответствуют их локальной, т.е. (микро) структуре. Функция $f^{(0)}$ в (2.7) не зависит от быстрых переменных и является макроскопическим или средним значением поля.

Здесь рассмотрим постановку краевых задач теории термоупругости в периодической сплошной среде. В общем случае уравнения равновесия для квазистатической задачи, будут иметь вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial q_i^s}{\partial x_i} - r = 0 \quad (2.9)$$

Здесь r – плотность источников тепла. Определяющие уравнения можно записать в виде:

$$\sigma_{ij}^s = C_{ijkl}^s \varepsilon_{ij}(u^s) - \beta_{ij}^s T \quad (2.10)$$

$$q_i^s = -k_{ij}^s \frac{\partial T^s}{\partial x_j} \quad (2.11)$$

Граничные условия в общем случае:

$$\sigma_{ij}^s n_j = t_i \text{ на } \Gamma_t; \quad u_i^s = \bar{u}_i \text{ на } \Gamma_u \quad (2.12)$$

$$-q_i^s n_i = \bar{q}_i \text{ на } \Gamma_q; \quad T^s = \bar{T} \text{ на } \Gamma_T \quad (2.13)$$

Где C_{ijkl}^s является матрицей жесткости, q_i, k, T – плотности теплового потока, коэффициент теплопроводности и температура. $\beta_{ij}^s = C_{ijkl}^s \alpha_{kl}$, где α_{kl} является тензором коэффициентов теплового расширения. Для решения задачи мы будем использовать асимптотические разложения для перемещений и температур [51]. Тогда решение уравнений (2.8-2.9) ищутся в виде:

$$u_i^s(x_i, y_i) = u_i^{(0)}(x_i, y_i) + s u_i^{(1)}(x_i, y_i) + s^2 u_i^{(2)}(x_i, y_i) + \dots \quad (2.14)$$

$$T_i^s(x_i, y_i) = T_i^{(0)}(x_i, y_i) + s T_i^{(1)}(x_i, y_i) + s^2 T_i^{(2)}(x_i, y_i) + \dots \quad (2.15)$$

Компоненты тензора деформации связаны с малыми перемещениями формулами Коши:

$$\varepsilon_{ij}(u^s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^s}{\partial x_i} \right) \quad (2.16)$$

Используя формулу. (2.7), аналогичные выражения можно записать для напряжений, деформаций и тепловых потоков:

$$\begin{aligned} \sigma_i^s(x_i, y_i) &= \sigma_i^{(0)}(x_i, y_i) + s\sigma_i^{(1)}(x_i, y_i) + s^2\sigma_i^{(2)}(x_i, y_i) + \dots \\ \varepsilon_i^s(x_i, y_i) &= \varepsilon_i^{(0)}(x_i, y_i) + s\varepsilon_i^{(1)}(x_i, y_i) + s^2\varepsilon_i^{(2)}(x_i, y_i) + \dots \\ q_i^s(x_i, y_i) &= q_i^{(0)}(x_i, y_i) + sq_i^{(1)}(x_i, y_i) + s^2q_i^{(2)}(x_i, y_i) + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для дифференцирования асимптотического разложения, воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции $f^s = f(x, y = x/s)$

$$\frac{\partial f^s}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (2.18)$$

Пренебрежём членами высших порядков малости разложения (2.14-2.15) и применим правила дифференцирования сложной функции (2.18) в асимптотическом разложении (2.14-2.15). Подставим полученные результаты в (2.10-2.11), и после сбора слагаемых с одинаковыми степенями s , получаем систему дифференциальных уравнений (2.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} + f_i &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial y_j} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Аналогичные выражения могут быть получены для процесса передачи тепла:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_i^{(0)}}{\partial y_i} &= 0 \\ \frac{\partial q_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial y_j} - r &= 0 \\ \frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial y_j} &= 0 \\ i, j &= 1, 2, 3\end{aligned}\tag{2.20}$$

Отбросим $o(\lambda)$ и члены высших порядков малости в выражениях (2.17). Тензор деформации будет представлен в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(u) &= \varepsilon_{ij}^{(0)}(u) + \varepsilon_{ij}^{(1)}(u); \\ \varepsilon_{ij}^{(0)}(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{ij}^{(1)}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial y_i} \right)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ является средним или макроскопическим тензором деформации, соответствующим средним перемещениям и $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ является осциллирующим тензором деформации соответствующим осциллирующим перемещениям. Предположим теперь, что определяющее уравнение (2.10–2.11) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(0)} &= C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}^{(0)}(u) + \varepsilon_{kl}^{(1)}(u) \right) - \beta_{ij}^s T^{(0)} \\ \sigma_{ij}^{(1)} &= C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}^{(0)}(u) + \varepsilon_{kl}^{(2)}(u) \right) - \beta_{ij}^s T^{(1)}\end{aligned}\tag{2.22}$$

$$q_i^{(0)} = -k_{ij} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial T^{(1)}}{\partial y_j} \right)\tag{2.23}$$

$$q_i^{(1)} = -k_{ij} \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial T^{(2)}}{\partial y_j} \right)$$

Сочетание уравнений (2.22), (2.15) и (2.19), при использовании метода разделения переменных [39,75,49,94], приводит к следующему выражению для $u^{(1)}(x,y)$:

$$u_i^{(1)}(x, y) = \varepsilon_{kl}^0 M_i^{kl} + N_i T^0 \quad (2.24)$$

Здесь M_i^{pq} и N_i – вспомогательные функции гомогенизации, которые и являются периодическими. Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijmn}(y) + \frac{\partial M_m^{kl}}{\partial y_n} \right) + \frac{\partial C_{ijkl}(y)}{\partial y_j} = 0 \quad (2.25)$$

Применение метода разделения переменных [91] к уравнениям (2.23) и (2.120) приводит к следующему выражению для $q^{(1)}(x, y)$:

$$T^{(1)}(x, y) = -X^k \frac{\partial T^0}{\partial x_k} \quad (2.26)$$

Здесь $X^k(x, y)$ – периодическая вспомогательная функция гомогенизации для температур.

Наконец, после усреднения уравнений (2.17) эффективные определяющие уравнений для механических и тепловых задач могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^H \varepsilon_{kl}^{(0)}(u) - \beta_{ij}^H T^{(0)} \\ \bar{q}_i &= -k_{ij}^H \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь гомогенизированная упругая матрица C_{ijkl}^H , термоупругие коэффициенты β_{ij}^H и гомогенизированная матрица теплопроводности k_{ij}^H вычисляются следующим образом:

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|V|} \int_V \left(C_{ijkl}^s - C_{ijmn}^s \frac{\partial M_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dV \quad (2.28)$$

$$\beta_{ij}^H = \frac{1}{|V|} \int_V \left(\beta_{ij}^s - C_{ijkl}^s \frac{\partial N_k}{\partial y_l} \right) dV \quad (2.29)$$

$$k_{ik}^H = \frac{1}{|V|} \int_V \left(k_{ik}^s - k_{ij}^s \frac{\partial X^k}{\partial y_j} \right) dV \quad (2.30)$$

Теперь неоднородные структуры могут быть представлены в качестве однородного материала с эффективными коэффициентами неоднородного материала, полученными по формулам (2.29) – (2.31).

Асимптотический метод осреднения является эффективным методом исследования как макроскопических, так и микроскопических свойств периодических и неоднородных структур. Для того чтобы определить с помощью гомогенизированных матриц свойства материала, необходимо получить численное решение задач на элементарной ячейке или, иначе, в Объёме Представительного Элемента.

Основную трудность при решении задачи гомогенизации и определения эффективной определяющей матрицы представляют граничные условия, зависящие от неизвестной макроскопической деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij}$. Однако для линейной задачи, любое произвольное $\bar{\varepsilon}_{ij}$ можно записать в виде линейной комбинации единичных деформаций, как указано ниже. Единичные деформации для трёхмерной задачи имеют вид [38,89]:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{ij}^{-11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{-22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{-33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\bar{\varepsilon}_{ij}^{-12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{-13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{-23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{\varepsilon}_{ij}^{-21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{-31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{-32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

2.1.3. Периодические граничные условия

Композиционный материал состоит из периодически повторяющихся элементов и их можно рассмотреть как массив периодических представительных объемных элементов. Это означает, что каждый ПОЭ в композите имеет одинаковый режим деформации и нет никакого разрыва или перекрытия между соседними ПОЭ. Тогда, перемещения имеют вид [95,43]:

$$u_i(x) = u_i(x, Y); \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.32}$$

Здесь x представляет любую точку в периодической области и Y , периодичность (Период структуры). Запишем непрерывность перемещений в качестве граничных условий на границах ПОЭ.

$$u_i^{j+} = u_i^{j-}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.33}$$

Периодические граничные условия (2.32) задаются на противоположных сторонах модели. Это означает, что значения поля по обе стороны границы ПОЭ $x+/x-$, $y+/y-$ и $z+/z-$ полностью совпадают, как показано на рис. 2.6 [106].

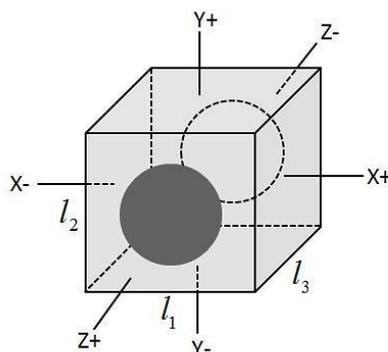


Рис. 2.6. Представительный Объемный Элемент ПОЭ для однонаправленного армированного композита.

Из асимптотических разложений для перемещения условия периодичности на границах определяется формулой:

$$u_i = \varepsilon_{ik}^0 x_k + u_i^{(1)} \quad (2.34)$$

Здесь ε_{ik}^0 – средние значения деформаций, $u_i^{(1)}$ – периодическая часть компонент перемещений на граничных поверхностях. Они в целом неизвестны и зависят от применяемых глобальных нагрузок.

Более явные периодические граничные условия могут быть получены из разложения (2.14). Для кубического ПОЭ, как показано на рис.2.5, перемещения на паре противоположных сторон представляются в виде [106]:

$$\begin{aligned} u_i^{j+} &= \varepsilon_{ik}^0 x_k^{j+} + u_i^{(1)} \\ u_i^{j-} &= \varepsilon_{ik}^0 x_k^{j-} + u_i^{(1)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь индекс "j+" означает положительное направления X_j и "j-" означает отрицательное направление X_j . Разница между этими двумя указанными уравнениями:

$$u_i^{j+} - u_i^{j-} = \varepsilon_{ik}^{(0)} (x_k^{j+} - x_k^{j-}) = \varepsilon_{ik}^{(0)} \Delta x_k^i \quad (2.36)$$

На основе граничных условий (2.35–2.36) для любых моделей ПОЭ величина Δx_k^j является постоянной. Окончательно получаются следующие периодические граничные условия:

$$u_i^{j+}(x, y, z) - u_i^{j-}(x, y, z) = c_i^j \quad (2.37)$$

Константы c_1^1 , c_2^2 и c_3^3 соответствуют нормальным деформациям. Другие три пары констант, $c_1^2 = c_2^1$, $c_1^3 = c_3^1$ и $c_2^3 = c_3^2$ соответствуют сдвиговым деформациям [108]. Такая форма граничных условий соответствует требованию периодичности и непрерывности перемещений. Таким образом, для кубического представительного объёмного элемента (ПОЭ) периодические граничные условия задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1(l_1, y, z) - u_1(0, y, z) &= \varepsilon_{11}l_1 \\ u_2(l_1, y, z) - u_2(0, y, z) &= \varepsilon_{12}l_1 \\ u_3(l_1, y, z) - u_3(0, y, z) &= \varepsilon_{13}l_1 \\ u_1(x, l_2, z) - u_1(x, 0, z) &= \varepsilon_{21}l_2 \\ u_2(x, l_2, z) - u_2(x, 0, z) &= \varepsilon_{22}l_2 \\ u_3(x, l_2, z) - u_3(x, 0, z) &= \varepsilon_{23}l_2 \\ u_1(x, y, l_3) - u_1(x, y, 0) &= \varepsilon_{31}l_3 \\ u_2(x, y, l_3) - u_2(x, y, 0) &= \varepsilon_{32}l_3 \\ u_3(x, y, l_3) - u_3(x, y, 0) &= \varepsilon_{33}l_3 \end{aligned} \quad (2.38)$$

В граничных условиях (2.38) ε_{ij} – макроскопические деформации, получаемые методом конечных элементов в каждой точке интеграции. Параметры l_1 , l_2 , и l_3 являются соответствующими боковыми длинами ПОЭ.

Для температурных задач и для определения эффективных тепловых матриц материалов k_{ik}^H принимаем температурные периодические граничные условия. Для кубического ПОЭ, (см. рис. 2.6), температуры на паре противоположных сторон представлены соотношением (2.39) [62,88]:

$$T^{j+} - T^{j-} = \frac{\partial T^0}{\partial x_i} (x_k^{j+} - x_k^{j-}) \quad (2.39)$$

Таким образом, для кубического представительного объёмного элемента (ПОЭ) периодические граничные условия задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} T(l_1, y, z) - T(0, y, z) &= \frac{\partial T^0}{\partial x_1} l_1 \\ T(x, l_2, z) - T(x, 0, z) &= \frac{\partial T^0}{\partial x_2} l_2 \\ T(x, y, l_3) - T(x, y, 0) &= \frac{\partial T^0}{\partial x_3} l_3 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Принципиальная схема вычислительного мультимасштабного анализа представлена на рис. 2.7.

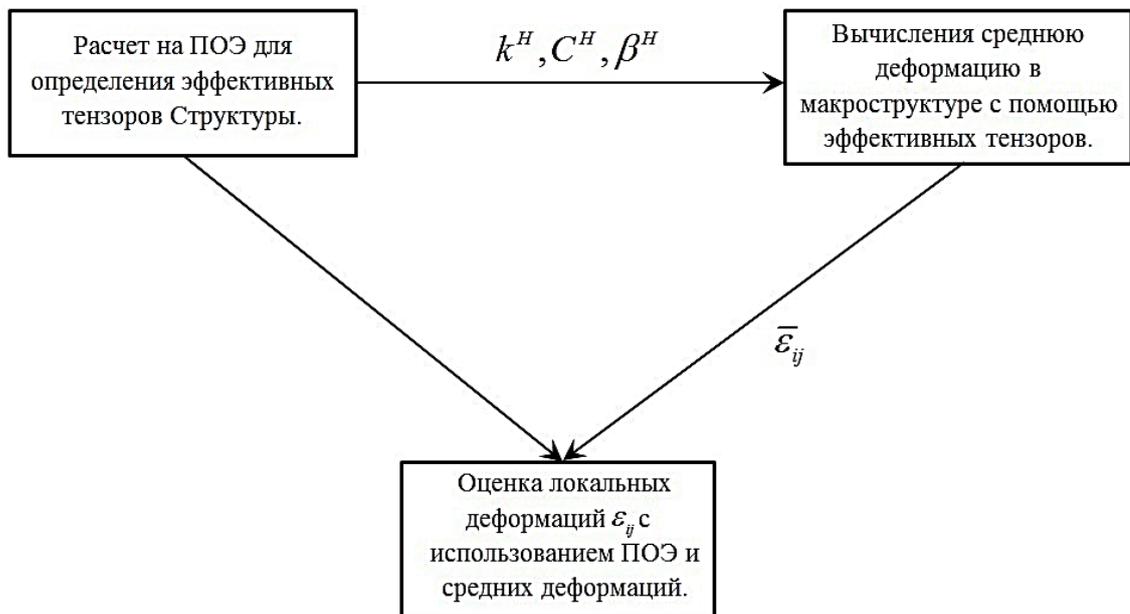


Рис. 2.7. Принципиальная схема вычислительной процедуры

2.2. Механическое поведение материалов (определяющие уравнения)

Механическое поведение деформируемого твёрдого тела, как правило, описывается определяющим уравнением между напряжениями и деформациями. Обычно эти в этих соотношениях выражают напряжения как функцию деформации, скоростей деформаций, истории деформаций и температуры [90]. В этом разделе рассматриваются механическое поведение и определяющие уравнения волокна, матрицы и анизотропной сплошной среды (композита) для определения остаточных температурных напряжений при малых деформациях на двух масштабах (микро и макро). Таким образом, выбор модели механического поведения материала является одним из важных факторов для расчета остаточных напряжений в изделиях.

Согласно обобщенному закону Гука, связь между напряжениями и деформациями в общем виде имеет вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) \quad (2.41)$$

Здесь C_{ijkl} – матрица упругости материала и ε^0 – начальная деформация или иные вынужденные деформации такие, например, как вязкоупругие, температурные, усадочные, набухания и проч.

$$\varepsilon_{kl}^0 = \varepsilon_{kl}^T + \varepsilon_{kl}^c + \dots \quad (2.42)$$

Здесь, например, ε^T представляет термическую деформацию, а ε^c например, вязкоупругую деформацию или деформация иную неупругую деформацию.

2.2.1. Определяющие уравнения изотропных материалов

Здесь материал волокна предполагается упругим изотропным и не меняет свои термоупругие характеристики в зависимости от температуры. Связь между напряжениями и деформациями в матричной форме для линейного изотропного материала выражается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Здесь индексы 1, 2, 3, 12, 23, 31 обозначают x, y, z, xy, yz, zx .

2.2.2. Определяющие уравнения анизотропных материалов

Для расчета напряжено-деформированного состояния неоднородных и композиционных материалов на макроуровне, они характеризуются и считаются как анизотропная сплошная среда. Связь между напряжениями и деформациями для абсолютного анизотропного линейно - упругого материала с учетом температурных деформаций имеет вид [25]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T \\ \varepsilon_{12} - \alpha_{12} \Delta T \\ \varepsilon_{23} - \alpha_{23} \Delta T \\ \varepsilon_{31} - \alpha_{31} \Delta T \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Однонаправленные и продольно-поперечные композиты из армированного полимера рассматриваются как ортотропный или трансверсальный изотропный материал. Ортотропные материалы характеризуются разными механическими свойствами по трем главным осям. Связь между напряжениями и деформациями для ортотропного линейно - упругого материала с учетом температурных деформаций имеет вид [42]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{12} = \frac{\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta}$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{23} = \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, C_{44} = G_{23}, C_{55} = G_{13}, C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Как известно, однонаправленные волокнистые композиты обладают высокими механическими характеристиками только при нагружении вдоль волокон. При трансверсальном нагружении и при межслойном сдвиге жесткость и особенно прочность материала оказываются весьма низкими, так как они определяются свойствами матрицы. В связи с этим однонаправленные волокнистые композиты в чистом виде практически не используются в конструкциях. Как правило, композиты представляет собой совокупность однонаправленных или тканых слоев с различными углами ориентации волокон [9].

2.2.3. Определяющие уравнения и механическое поведение матрицы (полимерного связующего)

Известно, что все полимеры вследствие макромолекулярного строения обладают вязкоупругим поведением. Явления вязкоупругость с точки зрения интегральной теории наследственности Л.Больцмана характеризуется тем, что скорость деформации, например, ползучести зависит не только от мгновенного напряженно-деформированного состояния, но и от всей предыстории нагружения образца. Таким образом, для определения приращения деформации $\{de\}$ на

каком-либо шаге по времени надо знать напряжения и деформации во все предыдущие моменты времени [12].

Иначе говоря, ползучесть характеризуется зависимостью деформации не только от напряжения, но и от времени. Деформации в данный момент времени определяются всей предысторией напряженного состояния. Таким образом, любой вычислительный процесс должен сводиться к расчету приращений для достаточно малых отрезков времени. Для каждого такого отрезка времени, используя заданный закон ползучести, средние значения для этого отрезка величины напряжения и, при необходимости, их предыдущие значения, можно определить приращения деформаций [12].

Известно, что у большинства полимеров, в том числе и эпоксидных, процесс релаксации напряжений завершается установлением некоторого равновесного с заданным внешним возмущением (каковым является заданная фиксированная деформация) напряжения [83]. У металлов, склонных к пластическим деформациям, например, алюминия, всегда напряжения релаксируют до нуля (кроме, разумеется, специальных сплавов с памятью формы).

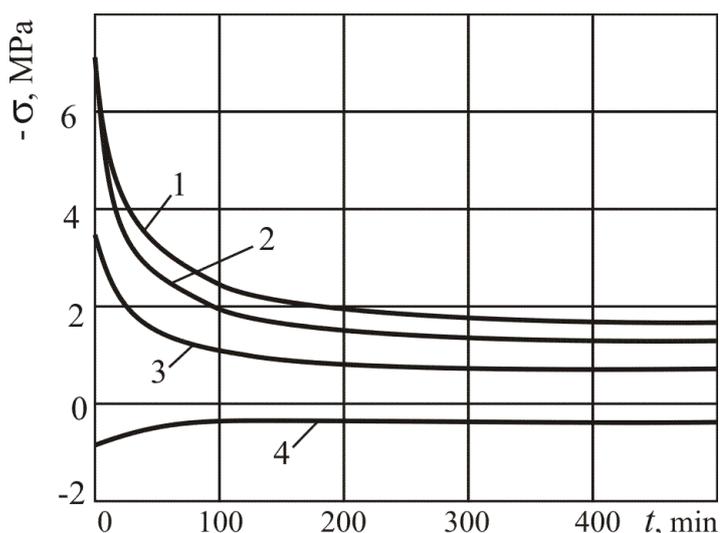


Рис. 2.8. Релаксация температурных напряжений в полимере эпоксидного типа:

$$T_r = 85^\circ\text{C}; \Delta T = T_0 - T_r; 1. \Delta T = 55^\circ\text{C}; 2. \Delta T = 50^\circ\text{C}; 3. \Delta T = 30^\circ\text{C}; 4. \Delta T = 15^\circ\text{C}.$$

На рис. 2.8 представлен пример диаграмм релаксации температурных напряжений в полимерном стержне при различных температурных перепадах [33].

Таким образом, для приращений форма определяющего уравнения и связь между приращенными напряжениями и деформациями для полимерной матрицы может иметь вид:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(T, \varepsilon, \sigma)(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^c - d\varepsilon_{kl}^s) \quad (2.46)$$

Где $d\varepsilon$ — прирост полной деформации, $d\varepsilon^T$ — прирост температурной деформации, $d\varepsilon^c$ — прирост деформации ползучести и $d\varepsilon^s$ — прирост деформации химической усадки.

Химическая усадка пропорциональна степени (или глубине) отверждения, которая в свою очередь пропорциональна количеству тепловыделения [1]. Поскольку проводимые расчеты носят модельный характер, зависимость деформации химической усадки ε^s от температуры учитывать не будем. Здесь достаточно знания, что деформация химической усадки при полном отверждении равна некоторой известной величине.

Для моделирования вязко-упругого поведения полимера здесь используется физически нелинейное определяющее уравнение Максвелла—Гуревича. Г.И. Гуревича вывел это уравнение из молекулярного механизма деформирования полимера [10].

Здесь прирост полной деформации $d\varepsilon$ в каждом шаге времени складывается из прироста упругой деформации $d\varepsilon^e$ и неупругой деформации, например, ползучести $d\varepsilon^c$:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^c \quad (2.47)$$

Обобщенное нелинейное уравнение Максвелла—Гуревича для вязкоупругих деформаций в общем случае имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}^c = \frac{f}{\eta^*} \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta} \exp\left(\frac{|f_{\max}|}{m}\right)$$

Здесь $\dot{\varepsilon}^c$ — скорость неупругой деформации. Это могут быть вынужденные высокоэластические деформации в полимерах, обратимые не в фазе с напряжением или вязкие необратимые (по другой терминологии – остаточные) деформации, например, в обычных металлах. f — функция напряжений, которая определяется следующим образом:

$$f = \frac{3}{2}(\sigma_{ij} - \sigma_m) - E_{\infty s} \varepsilon^c; \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2.49)$$

Таким образом, обобщенное нелинейное уравнение Максвелла—Гуревича [28] для вязкоупругих деформаций имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_s^c}{\partial t} = \frac{\frac{3}{2}(\sigma - \sigma_m) - \varepsilon_s^c E_{\infty s}}{\eta_{0s}} \exp\left(\frac{\left|\frac{3}{2}(\sigma' - \sigma_m) - E_{\infty s} \varepsilon_s^c\right|}{m_s}\right) \quad (2.50)$$

Где σ_m — среднее напряжение; $E_{\infty s}$ — модуль вязкоупругости (вынужденной высокоэластичности), В случае остаточных деформаций он равен нулю. η_0 — коэффициент начальной релаксационной вязкости, σ' — главные напряжения и m — модуль скорости.

Как известно, тензор напряжений можно представить в виде суммы объемного и сдвигового (девиаторного) слагаемых.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= S_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \\ i, j, k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Следовательно, закон Гука может быть представлен в форме:

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + 3K\varepsilon_{kk} \quad (2.52)$$

где e — девиаторные деформации и ε — объёмные деформации.

$$\frac{\partial \varepsilon_s^c}{\partial t} = \frac{\frac{3}{2}S - \varepsilon_s^c E_{\infty s}}{\eta_{0s}} \exp\left(\frac{\left|\frac{3}{2}S' - E_{\infty s} \varepsilon_s^c\right|}{m_s}\right) \quad (2.53)$$

Физически нелинейное дифференциальное уравнение связи (2.53) очень удобно для численного решения вязко-упругой задачи, когда $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ и неупругая деформация вычисляется методом итераций [101]:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon^c &= \dot{\varepsilon}_n^c \Delta t \\ \Delta \varepsilon^c &= \sum_{s=1}^2 \Delta \varepsilon_s^c \\ \varepsilon_n^c &= \varepsilon_{n-1}^* + \Delta \varepsilon_n^* \end{aligned} \quad (2.54)$$

Напомним, что здесь все параметры (упругие, вязкоупругие, теплофизические) полимеров являются функциями температуры [25].

Для численного решения неупругой задачи методом конечных элементов, чтобы вычислить напряжения на каждом шаге по времени, необходимо вычислить компоненты касательной (тангенциальной) матрицы материала. Напряжения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \mathbf{C}(\varepsilon - \varepsilon^c(t) - \Delta \varepsilon^c) \\ \Delta \varepsilon^c &= \dot{\varepsilon}^c(\sigma, \varepsilon^c) \end{aligned} \quad (2.55)$$

где ε — полная деформация и \mathbf{C} — матрица упругости материала.

$$d\Delta \varepsilon^c = d\varepsilon^c = \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \sigma} \Delta t d\sigma + \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \varepsilon^c} \Delta t d\varepsilon^c \quad (2.56)$$

Уравнение (2.56) можно решить для $d\varepsilon^c$:

$$d\varepsilon^c = \left(1 - \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \varepsilon^c} \Delta t\right)^{-1} \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \sigma} \Delta t d\sigma \quad (2.57)$$

Подставим (2.57) в (2.55) и получаем:

$$d\sigma = \mathbf{C} d\varepsilon - \mathbf{C} \left(1 - \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \varepsilon^c} \Delta t\right)^{-1} \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \sigma} \Delta t d\sigma \quad (2.58)$$

Тангенциальный модуль материала имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathbf{C} \left[1 - \mathbf{C} \left(1 - \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \varepsilon^c} \Delta t\right)^{-1} \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \sigma} \Delta t\right]^{-1} \quad (2.59)$$

Для упрощения предполагаем, что $(|f_{\max}|/m) = C$, в каждой итерации шага по времени и его величина определяется в конце каждой итерации. Поэтому:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \varepsilon^c} &= -\frac{E_\infty}{\eta} e^C \\ \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \sigma} &= \frac{e^C}{\eta} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Подставим (2.60) в (2.59) и получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathbf{C} \left[1 - \mathbf{C} \left(1 + \frac{E_\infty}{\eta} e^C \Delta t\right)^{-1} \frac{e^C}{\eta} \Delta t\right]^{-1} \quad (2.61)$$

Таким образом, компоненты тангенциального модуля материала в методе конечных элементов определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{T,11} &= \mathbf{D}_{T,22} = \mathbf{D}_{T,33} = D_{11} \left[1 - D_{11} (1 + E_\infty B \Delta t)^{-1} B \Delta t\right]^{-1} \\ \mathbf{D}_{T,12} &= \mathbf{D}_{T,13} = \mathbf{D}_{T,23} = D_{12} \left[1 - D_{12} (1 + E_\infty B \Delta t)^{-1} B \Delta t\right]^{-1} \\ \mathbf{D}_{T,44} &= \mathbf{D}_{T,55} = \mathbf{D}_{T,66} = D_{44} \left[1 - D_{44} (1 + E_\infty B \Delta t)^{-1} \frac{3}{2} B \Delta t\right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Здесь $\mathbf{D} = C_{ijkl}$ матрица характеристики материала в анализе конечных элементов и $B = e^c / \eta$. Для описания длительных релаксационных процессов, необходимо учитывать два члена спектра времен релаксации [25]. Иначе говоря, две составляющих нелинейной вязкоупругой деформации, $\varepsilon_s^c (s=1,2)$. Таким образом, уравнение (2.60) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \varepsilon^c} &= \sum_{s=1}^2 -\frac{E_{s,\infty}}{\eta_s} e^{C_s} \\ \frac{\partial \dot{\varepsilon}^c}{\partial \sigma} &= \sum_{s=1}^2 -\frac{e^{C_s}}{\eta_s} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Таким образом, для приращения полной деформации имеем:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + \sum_{s=1}^2 d\varepsilon_s^c \quad (2.64)$$

Механическое поведение и физико-механические характеристики полимеров сильно зависят от температуры [3]. Увеличение температуры уменьшает времена релаксации на порядки и, естественно, ускорять процессы релаксации. С ростом температуры растет молекулярная подвижность, а значит и скорость молекулярной перестройки. Следует иметь в виду, что в области температур стеклования T_g полимера его коэффициент линейного расширения увеличивается почти втрое, как показано на рис. 2.9, и выше T_g остается практически неизменным [85]. Коэффициент линейного расширения армирующего волокна $\alpha_f = const$ не зависит от температуры. Обычно он существенно меньше (почти на порядок) коэффициента линейного расширения полимерной матрицы.

В области температур стеклования коэффициент Пуассона связующего возрастает до 0.5, а модуль упругости полимера уменьшается до $0.01 * E$. Здесь E — модуль упругости полимера при комнатной температуре. На рис. 2.10 представлены типичные кривые, отражающие изменение модуля Юнга эпоксидного полимера.

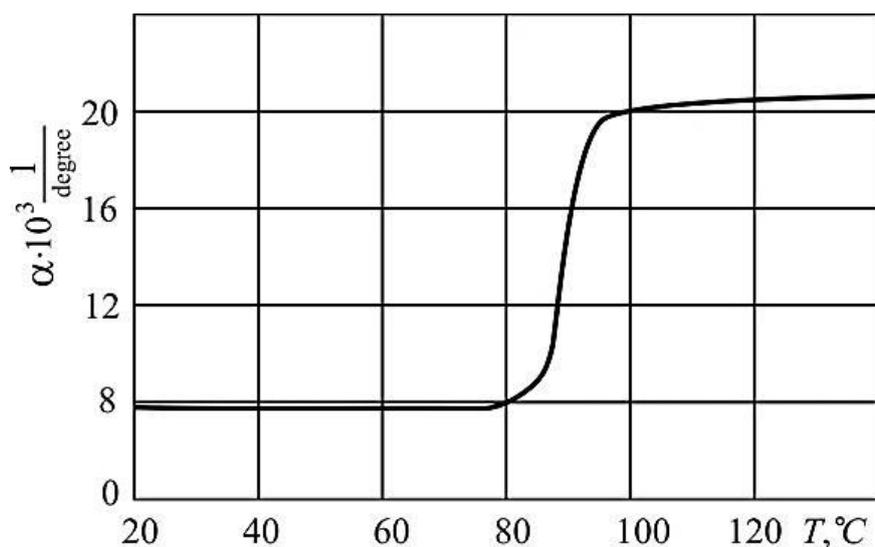


Рис. 2.9. Изменение коэффициента линейного теплового расширения α эпоксидного полимера в зависимости от температуры.

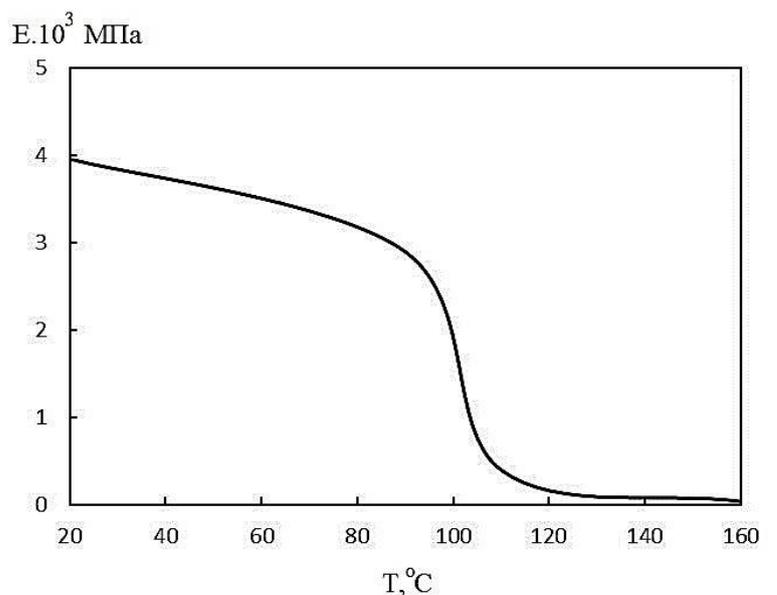


Рис. 2.10. Изменение модуля Юнга эпоксидного полимера в зависимости от температуры.

Ниже приводятся данные для эпоксидной смолы ЭДТ-10. Они получены [4] из различных экспериментов от мгновенной разгрузки, деформации с различными скоростями растяжения, ползучести и релаксации напряжений. Приблизительно температурные зависимости механических и теплофизических параметров вязкоупругой задачи описываются следующими аппроксимирующими формулами:

$$\begin{aligned}
E &= 4000 \exp\left(-\exp\frac{T - T_u}{b}\right) = 4000 \exp\left(-\exp\frac{T - 339}{36.7}\right) \text{ МПа}; \\
\alpha &= \begin{cases} 10^{-6} (0.46T - 58) 1/K & \text{для } T \leq 350 \text{ К}; \\ 10^{-6} (102.3 + 110 \exp[-\exp(6.3 - 0.04T)]) 1/T & \text{для } T \geq 350 \text{ К}; \end{cases} \\
E_{\infty 1} &= \begin{cases} 2.4 \cdot 10^6 1/T - 6120 \text{ МПа} & \text{для } T \leq 370 \text{ К}; \\ 2.23T - 640 \text{ МПа} & \text{для } T \geq 370 \text{ К}; \end{cases} \quad (2.65) \\
\eta_1 &= 36000 \exp(9500 / T - 20) \text{ МПа} \cdot \text{с}; \\
\eta_2 &= 36000 \exp(35400 / T - 90) \text{ МПа} \cdot \text{с}; \\
m_1 = m_2 &= -0,0155T + 7,73 \text{ МПа}; \\
\nu &= 0,37 = \text{const};
\end{aligned}$$

2.3. Процесса теплопередачи

Во многих проблемах напряженно-деформированного состояния твердых тел деформации обусловлены тепловым расширением и их стеснением. Таким образом, для их исследования необходимо решить задачу термоупругости. В связи с этим необходимо решить задачу теплопроводности и определить температурные поля в твёрдых телах.

Остаточные напряжения, как следствие температурного воздействия, вычисляются с использованием нестационарного тепломеханического анализа. Определение термических остаточных напряжений в композиционных материалах и мультимасштабный анализ представляет довольно трудную проблему. Обычно она формулируется в виде системы сложных дифференциальных уравнений в частных производных. В целом, решение систем таких уравнений для изделий практически любой геометрии аналитическими методами практически невозможно. Обычно, даже в случаях несвязанной задачи термоупругости приходится прибегать к численным методам.

Для проведения технических расчетов температурных напряжений в несвязанной задаче необходимо определить нестационарное в общем случае распределение температур $T(x,y,z,t)$.

Распределение температуры в трёхмерных задачах $T(x,y,z,t)$ описывается уравнением теплопроводности Фурье [17]. Для получения уравнения теплопроводности запишем закон сохранения энергии в виде:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot q + \rho \dot{Q} \quad (2.66)$$

Подстановка выражения для потока тепла q из (2.11) позволяет записать следующее дифференциальное уравнение с частными производными для переноса тепла:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho \dot{Q} \quad (2.67)$$

Для цилиндрической системы координат уравнение теплопроводности (2.67) примет вид [26,92]:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho \dot{Q} \quad (2.68)$$

Где \dot{Q} – определяет мощность внутренних источников тепла, например, в результате химической реакции, C – удельная теплоемкость и ρ – плотность среды.

Для нестационарной задаче теплопередачи объёмную теплоёмкость композита можно определить на основе теории гомогенизации. Гомогенизованную матрицу теплопроводности k_{ij}^H можно определить по формулам (2.69):

$$(\rho C_p)^H = \frac{1}{|V|} \int_V \rho C_p dV$$

$$k_{ik}^H = \frac{1}{|V|} \int_V \left(k_{ik}^s - k_{ij}^s \frac{\partial X^k}{\partial y_j} \right) dV$$
(2.69)

Скорость тепловыделения \dot{Q} предопределяет изменение температуры, вызванное процессом отверждения вследствие экзотермической химической реакции.

Степень отверждения (глубина отверждения) α , в каждой точке материала определяется следующим образом

$$\alpha = \frac{H(t)}{H_m}$$
(2.70)

Здесь $H(t)$ – тепло реакции единичной массы смолы с отвердителем, выделяющееся в любой точке во время t , и H_m – общая сумма выделившегося тепла реакции единичной массы смолы за весь процесс отверждения.

Следовательно, тепловыделение при отверждении полимерного связующего в уравнении (2.66) является функцией изменения во времени глубины превращения полимерного связующего $d\alpha/dt$. Таким образом, уравнение теплопроводности (2.66) для композиционных материалов из армированного полимера можно написать следующим образом:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho_m V_m H_m \frac{d\alpha}{dt}$$
(2.71)

В (2.71) ρ_m – плотность полимерной матрицы и V_m – объёмная доля полимерной матрицы. Аналитическое решение этих уравнений, как правило, не возможно. Поэтому численные методы, как, например, метод конечных разностей или метод конечных элементов, как наиболее эффективные, обычно используются для решения подобных задач.

Здесь, при решении уравнений теплопроводности будем использовать экспериментальные данные по тепловыделению в процессе отверждения

эпоксидного полимера. Данные представлены в виде зависимостей тепловыделения от времени при различных температурах T $Q(n)=Q(t)|_{T=T_n}$. Используя эти данные, можно на каждом шаге по времени t_n вычислить количество тепла, выделившегося в каждой точке за время $\Delta t=t_{n+1}-t_n$; $\Delta Q=Q(t_{n+1})-Q(t_n)$.

На рис. 2.11, представлены изменение тепловыделения в процессе отверждения для эпоксидного полимера при различных температурах.

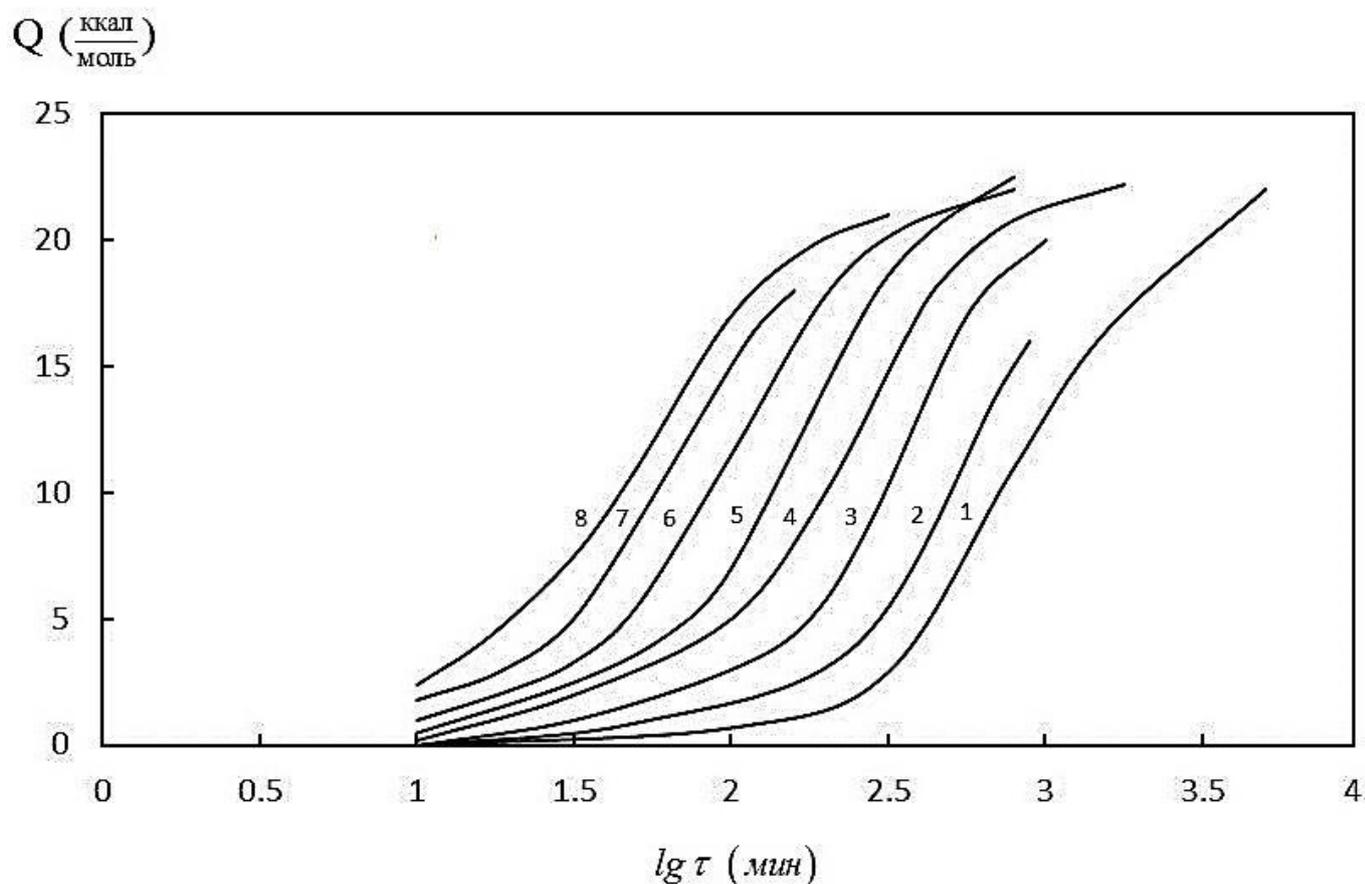


Рис. 2.11. Изменение тепловыделения в процессе отверждения для эпоксидного смоля при различных температурах. 1-80°C; 2-90°C; 3-100°C; 4-110°C; 5-120°C; 6-130°C; 7-140°C; 8-150°C.

2.4. Численный метод решения (Метод Конечных Элементов)

Среди различных численных методов решения дифференциальных уравнений механики сплошных сред метод конечных элементов (МКЭ) является наиболее эффективным методом. Метод конечных элементов является самым

мощным и популярным численным методом для решения линейных и нелинейных задач механики материалов со сложными геометриями и различными граничными условиями.

2.4.1. Анализ температуры

Во многих задачах о напряженно-деформированном состоянии твердых деформируемых тел деформации обусловлены тепловым расширением и его стеснением. Таким образом, для определения напряженно-деформированного состояния необходимо, прежде всего, решить задачу теплопроводности в нестационарной постановке

Из различных видов формулировки МКЭ в механике особенно популярны вариационный метод и метод взвешенных невязок Галеркина. Метод Галеркина позволяет получить решение в обобщенном виде в любой системе координат для тела любой геометрии.

Для частного решения задачи теплопередачи должны быть заданы начальные и граничные условия. Граничные условия первого рода - на поверхности тела S задана температура:

$$T_s = T_1(x, y, z, t) \text{ на } S_1 \quad (2.72)$$

Граничные условия второго рода – поток тепла на поверхности:

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = -q_s \text{ на } S_2 \quad (2.73)$$

Граничные условия конвекционного теплообмена:

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = h(T_s - T_e) \text{ на } S_3 \quad (2.74)$$

Здесь h – коэффициент теплоотдачи (конвекции), T_s – температура поверхности тела и T_e – температура окружающей среды. Температурное поле в начальный момент времени:

$$T(x, y, z, 0) = T^0(x, y, z) \quad (2.75)$$

Поток тепла на единицу площади, q , может быть записан в терминах его декартовых компонент:

$$\mathbf{q} = [q_x \quad q_y \quad q_z]^T \quad (2.76)$$

Для задачи теплопередачи степенями свободы элементов являются узловые температуры. Затем температуру внутри каждого элемента, можно аппроксимировать набором функций N_i :

$$T \approx \sum_i N_i T_i = NT \quad (2.77)$$

Матрица градиентов температуры:

$$\nabla = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{array} \right]^T \quad (2.78)$$

Матрица коэффициентов теплопроводности является [80]:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{array} \right\} = \mathbf{k} \nabla T \quad (2.79)$$

Матрица \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \end{array} \right] \quad (2.80)$$

Используя виртуальную температуру δT , можно получить «слабую» форму уравнений теплопроводности (2.66):

$$\int_V [\delta T c \frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla \delta T)^T (\mathbf{k} \nabla T) + \delta T Q] dV + \int_S \delta T (+H(T - T_0)) dS \quad (2.81)$$

Где $c=\rho C$. Решение (2,81) можно искать с использованием аппроксимации температур, приведенных в (2,77). Таким образом, мы можем переписать основное уравнение теплопроводности в следующей форме:

$$\int_V (\nabla^T \mathbf{q} - Q + c \frac{\partial T}{\partial t}) N dV = 0 \quad (2.82)$$

Применяя теорему дивергенции к первым трем точкам, мы приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_V c \frac{\partial T}{\partial t} N dV - \int_V \mathbf{b}^T \mathbf{q} dV &= \int_V Q N dV - \int_S \mathbf{q}^T \mathbf{n} N dS \\ + \int_{S_2} \mathbf{q}^T N dS - \int_{S_3} h(T - T_e) N dS \end{aligned} \quad (2.83)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности тела:

$$\mathbf{n} = [n_{x_1} \quad n_{x_2} \quad n_{x_3}]^T \quad (2.84)$$

Получаем общую систему дифференциальных уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{HT} = \mathbf{F}^q + \mathbf{F}^g + \mathbf{F}^h \quad (2.85)$$

Здесь \mathbf{H} – общая матрица теплопроводности, \mathbf{C} – матрица теплоёмкости, \mathbf{F}^q — вектор узловых тепловых нагрузок заданных поверхностным тепловым потоком, \mathbf{F}^g — вектор узловых тепловых нагрузок заданной генерации внутренних тепловых источников и \mathbf{F}^h — вектор узловых тепловых нагрузок, эквивалентных конвективным тепловым потокам.

Общая матрица теплопроводности \mathbf{H} , теплоёмкости \mathbf{C} , вектор узловых тепловых нагрузок \mathbf{F}^q , эквивалентных заданной генерации внутренних тепловых источников \mathbf{F}^g и эквивалентных конвективным тепловым потокам \mathbf{F}^h имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \int_V \mathbf{b} \mathbf{k} \mathbf{b}^T dV + \int_{S_3} h \mathbf{N} \mathbf{N}^T dS \\
\mathbf{C} &= \int_V c \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV \\
\mathbf{F}^q &= \int_V g \mathbf{N}^T dV \\
\mathbf{F}^g &= \int_V g \mathbf{N}^T dV \\
\mathbf{F}^h &= \int_S h T_b \mathbf{N}^T dS
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Уравнения (2.85) можно написать в общем виде:

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{H} \mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{T}) \tag{2.87}$$

Здесь $\mathbf{F}(\mathbf{T})$ – матрица узловых нагрузок, отвечающая за нагрев от источников тепла. Для интервала времени $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ скорость изменения температуры аппроксимируется методом обратных разностей, как показано на рис. 2.12:

$$\dot{T}_{n+1} \approx \frac{1}{\Delta t} (T_{n+1} - T_n) \tag{2.88}$$

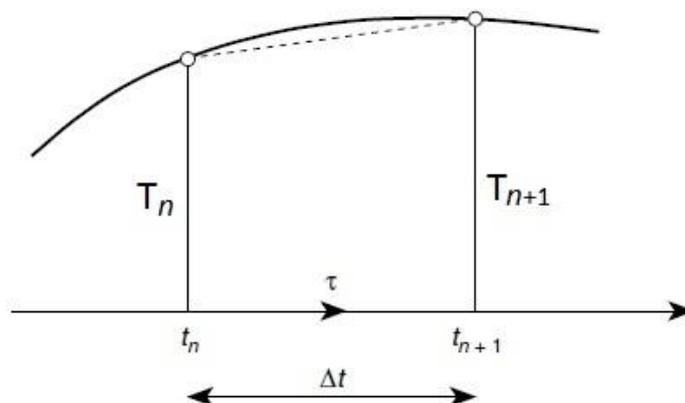


Рис. 2.12. Схема метода конечных разностей.

Если введем параметр θ для $0 \leq \theta \leq 1$, T_{n+1} можно написать в виде [64]:

$$T_{n+1} = (1 - \theta)T_n + \theta T_{n+1} \quad (2.89)$$

Таким образом, для различных значений параметра θ , получим несколько известных схем аппроксимации по времени:

$\theta = 0$, метод Эйлера [67] (явные разностные схемы);

$\theta = 0.5$, схема Кранк-Николсона;

$\theta = 2/3$, схема Галеркина;

$\theta = 1$, неявные разностные схемы;

Например, когда $\theta=1$, с использованием (2.88 и 2.89) уравнения (2.87) приобретают вид:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(T_{n+1}) + \mathbf{H}(T_{n+1}) \right] T_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(T_{n+1}) T_n + \mathbf{F}(T_n) \quad (2.90)$$

В случае, когда матрица теплопроводности \mathbf{H} и матрица теплоёмкости \mathbf{C} не изменяются со временем и температурой, они определяются только один раз. С учетом известной начальной температуры T_0 в момент $t=0$ и интервала времени Δt , из уравнения (2.90) определяется T_1 на Δt . Затем, используя T_1 , определяем T_2 на $t=2(\Delta t)$, и так далее [46].

В общем нелинейном случае проблема, представленная в уравнении (2.87), требует итерационного решения для T_{n+1} в пределах каждого шага времени Δt . Так как глобальная остаточная функция \mathbf{R} для узловых температур имеет вид [61]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{H}\mathbf{T} - \mathbf{F}(\mathbf{T}) \quad (2.91)$$

Используя разложение в ряд Тейлора, глобальную остаточную функцию \mathbf{R} можно приблизить следующим образом:

$$\mathbf{R}(T_{i+1}) \approx \mathbf{R}(T_i) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) \Delta T_i = 0 \quad (2.92)$$

Здесь $(\partial \mathbf{R} / \partial T)$ — тангенциальная матрица и ΔT_i вычисляется следующим образом:

$$\Delta T_i = - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right)^{-1} \mathbf{R}(T_i) \quad (2.93)$$

Используя МКЭ, можно на каждом шаге по времени t_i вычислить количество прироста тепла Δt , выделившегося в каждом узле за время, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, а затем вычислить прирост термических деформаций $\Delta \varepsilon^{th}$. Минимальный интервал времени Δt для тепловых задач в переходных процессах приближённо определяется следующим образом:

$$\Delta t = \frac{l^2 \cdot \rho \cdot c}{4 \cdot k} \quad (2.94)$$

Здесь l — средняя длина элемента, ρ — плотность материала, c — удельная теплоёмкость и k — средний коэффициент теплопроводности.

2.4.2. Теория гомогенизации для тепловых задач в МКЭ

В этом разделе приводятся формулировки метода конечных элементов для задачи гомогенизации в тепловых задачах. Аналогично предыдущему подходу с периодическим элементом механике материалов дискретизация температурного поля в периодическом элементе запишется так:

$$T(y) \approx \sum_i N_i(y) T_i \quad (2.95)$$

Матрица \mathbf{b}_y определяется следующим образом:

$$\mathbf{b}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} & \frac{\partial N_i}{\partial y_3} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Здесь y_i обозначает координат микроструктуры — «быстрые координаты».

Эффективная матрица теплоёмкости \mathbf{C} в уравнение (2.87) приобретает форму:

$$\mathbf{C}^H = \int_V (c)^H N(y)N(y)^T dV = \frac{1}{|V|} \int_V \rho c dV \int_V NN^T dV \quad (2.97)$$

Эффективная матрица теплопроводности в уравнении будет иметь вид:

$$\mathbf{H}^H = \int_V \mathbf{b}_y \mathbf{k}^H \mathbf{b}_y^T dV \quad (2.98)$$

Запишем уравнение в общем виде:

$$\mathbf{C}^H \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{H}^H \mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{T}) \quad (2.99)$$

2.4.3. Анализ напряженно-деформированного состояния

Для квазистатических задач уравнения равновесия можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_b = 0 \quad (2.100)$$

В уравнении (2.100) матрица дифференциальных операторов L определяется следующим образом [81]:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Общее решение уравнения (2.100) можно искать с помощью метода Галеркина. Используя метода Галеркина, можно умножить уравнения (2.100) на векторы виртуальных перемещений $\delta \mathbf{u}$ и интегрировать его по объёму [74]:

$$\int_V (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_b) \delta \mathbf{u}^T dV = 0 \quad (2.102)$$

Уравнение (2.102) может быть выполнено, если выражение в скобках под интегралом равно нулю. Применяя теорему о дивергенции, из уравнения (2.102) получаем:

$$\int_V (\mathbf{L}\delta u)^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{f}_b \delta u^T dV + \int_S \delta u^T t dS \quad (2.103)$$

Все интегралы берутся по области элемента V_e каждого из n элементов сетки конечных элементов. Считаем что, перемещения u, v, w , внутри каждого элемента могут быть аппроксимированы набором функций $N_i(x_i)$:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i; \quad (2.104)$$

N_i являются функцией формы в терминах локальных координат.

Здесь мы будем использовать матричную форму записи уравнения. В этом случае мы представим координаты и перемещения в виде:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

Матрицы напряжений и деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T \\ &= [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}]^T \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31}]^T \\ &= [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx}]^T \end{aligned} \quad (2.107)$$

Связь между напряжениями и деформациями выражается в матричной форме:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} \quad (2.108)$$

Здесь матрица перехода \mathbf{B} выглядит так:

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{\partial N_a}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Тензор деформации и напряжения представляются в виде:

$$\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.110)$$

$$\sigma = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.111)$$

D — матрица характеристик материала (содержащая параметры материала).

С помощью уравнений (2.108 – 2.111), где все интегралы берутся по области V каждого элемента сетки конечных элементов. Иная форма уравнения равновесия может быть переформулирована в следующем виде:

$$\sum_n \int_V \mathbf{B}^T \sigma dV = \sum_n \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV + \sum_n \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (2.112)$$

Вектор внешней силы в (2.112):

$$\mathbf{f}_{ext} = \sum_n \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV + \sum_n \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (2.113)$$

Следовательно, вектор внутренних сил представляется в виде суммы интегралов:

$$\mathbf{f}_{int} = \sum_n \int_V \mathbf{B}^T \sigma dV \quad (2.114)$$

Для решения линейных квазистатических механических задач методом конечных элементов, общий вид уравнения (2.112) может записать в матричной форме:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.115)$$

\mathbf{K} в уравнении (2.115) имеет вид:

$$K = \sum_n \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (2.116)$$

Решение системы линейных уравнений (2.115) имеет вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \quad (2.117)$$

Здесь используем естественную систему координату (ξ, ζ, η) и изопараметрический конечный элемент. Интерполяционные функции элемента в виде прямоугольного параллелепипеда с 20 узлами, (см. рис. 2.13) для узлов в углах элемента будут иметь вид:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\zeta\zeta_i + \eta\eta_i + \xi\xi_i - 2), \quad (2.118)$$

$$i = 1, 3, 15, 13, 7, 5, 17, 19$$

Для узлов в серединах кромок элемента:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i = 2, 6, 14, 18$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i = 4, 8, 16, 20 \quad (2.119)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad i = 9, 10, 11, 12$$

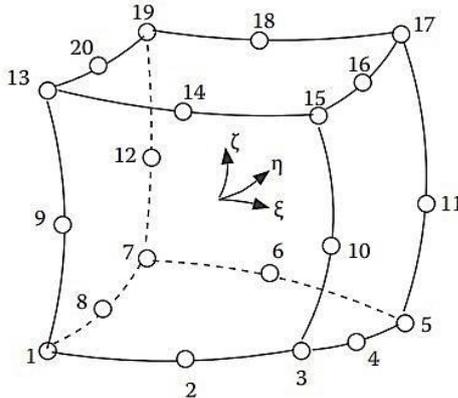


Рис. 2.13. Изопараметрический элемент формы прямоугольного параллелепипеда с 20 узлами.

Используя правило частного дифференцирования, связь между универсальными и локальными системами координатами можно выразить в виде:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (2.120)$$

Общая форма уравнения для трехмерной задачи записывается в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.121)$$

Матрица \mathbf{J} в системе локальных координат может быть представлена в виде:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial x}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial y}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial z}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial x}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial y}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial z}{\partial \zeta} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial x}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial y}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial z}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Чтобы найти производные интерполяционных функций в глобальных системах координат, инвертируем матрицу \mathbf{J} и получаем:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

Таким образом, элементы матрицы жесткости приобретают вид:

$$\mathbf{K} = \sum_n \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\zeta d\eta \quad (2.124)$$

Используя метода численного интегрирования Ньютона-Котеса, можно записать общее выражение матрицы жесткости \mathbf{K} в виде:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^T(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) |\mathbf{J}(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)| d\xi d\zeta d\eta W_i W_j W_k \quad (2.125)$$

Здесь $|\mathbf{J}|$ — определитель Якоби, n — число точек интегрирования и W_i , W_j , W_k — весовые коэффициенты метода Гаусса.

2.5. Теория гомогенизации в МКЭ

Здесь мы представляем формулировки метода конечных элементов для расчета задачи гомогенизации по определению напряженно-деформированного состояния.

Для извлечения и определения макроскопических характеристик материала необходимо выполнить численное решение на ПОЭ материала. Здесь матрица перехода дифференциальных операторов L_y определяется для локальных координат следующим образом:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

В соответствии с методом Галеркина для локальной задачи ПОЭ уравнения (2.102) можно записать в виде:

$$\int_{V_y} (\mathbf{L}_y \boldsymbol{\sigma}) \delta u^{(1)} dV = 0 \quad (2.127)$$

Применяя теорему о дивергенции, уравнение равновесия (2.127) можно записать в виде:

$$\int_{V_y} \mathbf{L}_y \delta u^{(1)} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_y} \delta u^{(1)} t dS = 0 \quad (2.128)$$

Подставляем уравнения (2.121)–(2.122) в (2.128) и получаем:

$$\int_{V_y} (\mathbf{L}_y \delta u^{(1)}) \mathbf{D}(\mathbf{L}_y u^{(1)}) dV = - \int_{V_y} (\mathbf{L}_y \delta u^{(1)}) \mathbf{D}(\mathbf{L}_y u^{(0)}) dV \quad (2.129)$$

В результате преобразований, матрица жесткости \mathbf{K} и внешний вектор силы \mathbf{f}_{ext} будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{V_e} \mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \mathbf{B}_y dV \\ \mathbf{f}_{ext} &= \int_{V_e} \mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \end{aligned} \quad (2.130)$$

Здесь матрица перехода \mathbf{B}_y^T определяется так:

$$\mathbf{B}_y^T = \mathbf{L}_y^T \mathbf{N}^T \quad (2.131)$$

Макроскопические деформации $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ во внешнем векторе силы \mathbf{f}_{ext} определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{11} &= \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{22} &= \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{33} &= \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{12} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}^T \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{23} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0\}^T \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{31} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

Решая эту задачу, получаем средние напряжения, а затем получаем эффективную матрицу характеристик материала \mathbf{D}^H . Таким образом, общее выражение матрицы жесткости \mathbf{K} для каждого элемента на макроуровне определяется следующей формулой:

$$\mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^T(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \mathbf{D}^H \mathbf{B}(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \left| \mathbf{J}(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \right| d\xi d\zeta d\eta W_i W_j W_k \tag{2.133}$$

Для определения локальных поля деформаций и напряжений (микродоформаций и микронапряжений), вектор деформации (2.132) являются макродеформациями, получающимися из результатов анализа макроструктуры методом конечных элементов в каждой точке интеграции [47].

2.6. Нелинейный анализ методом конечных элементов

Решения задач механики деформированного твёрдого тела с учетом неупругого поведения конструкционных материалов (как релаксация напряжений, пластичность, ползучести другие сложные реологические явления или влияние скорости деформирования) с помощью метода конечных элементов приводят к необходимости решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

Для того, чтобы добиться сходимости нелинейной задачи и получить правильный ответ, необходимо применить метод малых приращений и

использовать численные итерационные методы, например, как методы Ньютона-Рафсона и т.д. [87,23,60].

Для квазистатических задач теории упругости в перемещениях уравнения равновесия в методе конечных элементов записываются в виде:

$$\mathbf{f}_{ext}^{n+1} - \mathbf{f}_{ext}^n = 0 \quad (2.134)$$

Для случая, когда нагрузка зависит от времени, необходимо разделить внешнюю нагрузку на несколько этапов нагружения (см. Рис. 2.14). Таким образом, приращение узловых перемещений в каждом шаге (этапе) нагружения определяются по методу явной разностной схемы Эйлера:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\Delta\mathbf{u} &= \mathbf{f}_{ext}^{n+1} - \mathbf{f}_{ext}^n \\ \Delta\mathbf{u} &= \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f}_{ext}^{n+1} - \mathbf{f}_{ext}^n) \end{aligned} \quad (2.135)$$

И далее:

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n \quad (2.136)$$

Алгоритм инкрементального метода решения методом конечных элементов представлен ниже:

1 – Начальная инициализация параметров :

$$n = 0; \quad t_0 = 0; \quad \mathbf{f}^{t_0} = 0; \quad \mathbf{u}_0 = 0; \quad \varepsilon_0 = 0; \quad \sigma_0 = 0$$

2 – Шаг нагрузки $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- $\Delta t = t_{n+1} - t_n$
- Определить новый уровень нагрузки $\mathbf{f}^{t_{n+1}}$
- Вычислять $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{t_{n+1}} \mathbf{B} dV$
- Вычислять \mathbf{u}_{n+1} из $\mathbf{K}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) = \mathbf{f}^{t_{n+1}} - \mathbf{f}^{t_n}$
- Вычислять $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$
- Вычислять $\Delta\varepsilon = \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}$
- Вычислять $\Delta\sigma$
- $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}; \quad \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon; \quad \sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma$
- $n = n + 1$ перейти на 2

В нелинейных задачах элементы матрицы характеристик материалов \mathbf{D} являются, как известно, сложными функциями компонентов деформаций, напряжений или перемещений, определяемыми в соответствии с физической моделью материала, т.е. $\mathbf{D}=\mathbf{D}(u)$. В связи с этим, необходимо применять инкрементную итерационную процедуру вместо чисто инкрементальной процедуры.

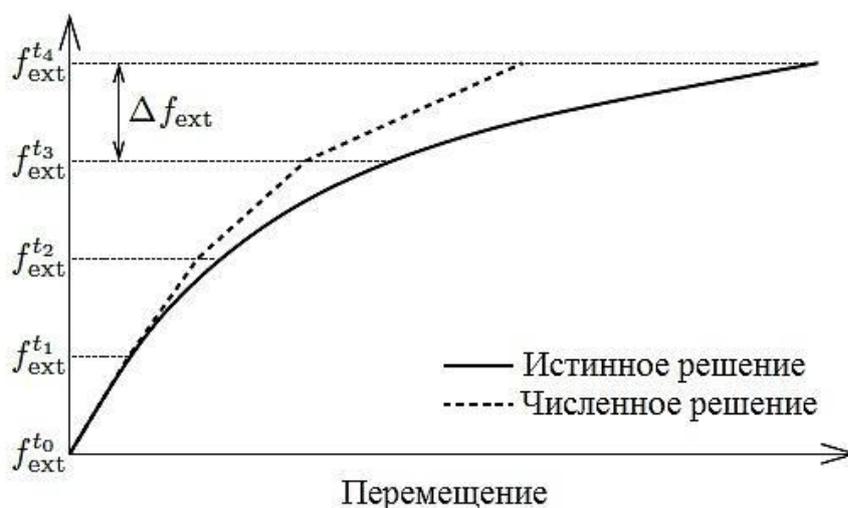


Рис. 2.14. Процедура инкрементального метода решения.

В инкрементно-итерационном методе решения, счетчик итераций i обычно начинается со следующего предположения [77]:

$$i = 0; \mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n; \mathbf{K}_{n+1}^0 = \mathbf{K}_n; \mathbf{f}_{\text{int}}^{t_{n+1}} = \mathbf{f}_{\text{int}}^{t_n} \quad (2.137)$$

Здесь \mathbf{u}_n — перемещение на n -ом шаге нагружения или шаге по времени, \mathbf{K}_n — матрица касательной жесткости на предыдущем шаге и $\mathbf{f}_{\text{int}}^{t_n}$ — вектор внутренней силы предыдущего шага.

Таким образом, итеративная коррекция перемещения на каждом шаге определяется следующим образом:

$$\mathbf{K}_{n+1}^i \mathbf{d}\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{r}_{n+1}^i \quad (2.138)$$

Здесь вектором невязки \mathbf{r}^i является:

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}^i \quad (2.139)$$

Приращение перемещения после каждой итерации на шаге нагружения (n+1) получается из следующего выражения:

$$\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + d\mathbf{u}_{n+1}^i \quad (2.140)$$

Повторяем шаги итерации до сходимости уравнения (2.135). Условием сходимости является:

$$|\mathbf{r}^i = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}^i| < e^* \quad (2.141)$$

где e^* — малая величина.

Схема метода Ньютона-Рафсона графически представлена на рис. 2.15.

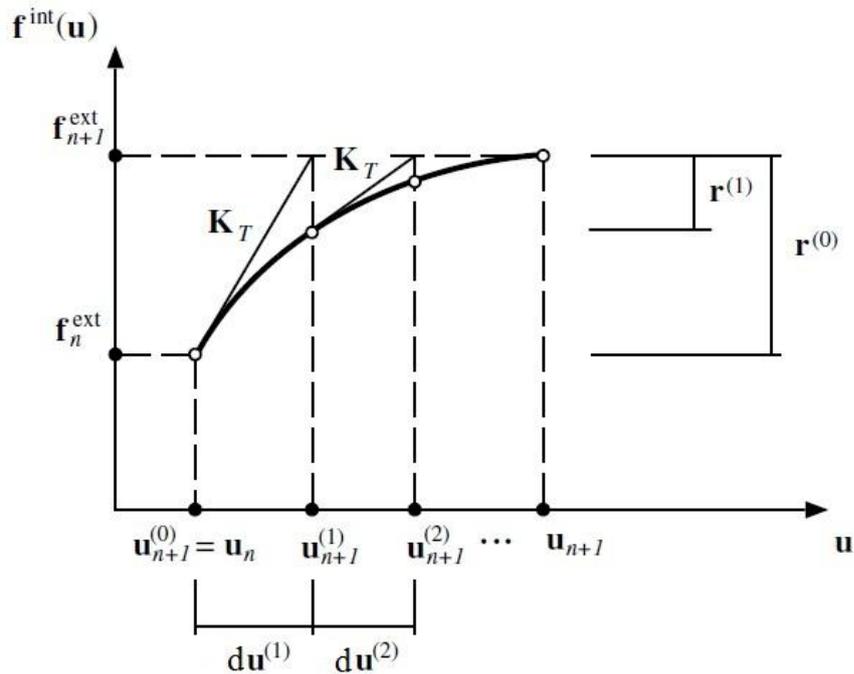


Рис. 2.15. Схема метода Ньютона-Рафсона.

Алгоритм метода Ньютона-Рафсона для решения инкрементального нелинейного уравнения методом конечных элементов (для бесконечной малой деформации) представлен ниже:

1 – Начальная инициализация параметров :

$$n = 0; t_0 = 0; f^{t_0} = 0; u_0 = 0; \varepsilon_0 = 0; \sigma_0 = 0;$$

2 – Шаг нагрузки $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- $t_{n+1} = t_n + \Delta t$

- Определить новый уровень нагрузки $f^{t_{n+1}}$

3 – Инициирование итерации :

- $u_{n+1}^0 = u_n; \mathbf{K}_{n+1}^0 = \mathbf{K}_n; f_{\text{int}}^0 = 0$

4 – $i = 1, 2, 3, \dots$

- Вычислять u_{n+1}^i из $\mathbf{K}_{n+1}^0 (u_{n+1}^i - u_{n+1}^{i-1}) = f_{\text{ext}}^{t_{n+1}} - f_{\text{int}}$

- Вычислять $du_{n+1}^i = u_{n+1}^i - u_{n+1}^{i-1}$

- Добавлять du_{n+1}^i :

$$u_{n+1}^i = u_{n+1}^{i-1} + du_{n+1}^i$$

- Вычислять деформации ε_{n+1}^i для каждой точки интеграции

$$\varepsilon_{n+1}^i = \mathbf{B} u_{n+1}^i$$

- Вычислить напряжения σ_{n+1}^i для каждой точки интеграции

- Вычислить внутренний вектор силы f_{int}

$$f_{\text{int}} = \int_V \mathbf{B}^T \sigma_{n+1}^i dV$$

- Контроль сходимости :

если $\|f_{\text{ext}}^{t_{n+1}} - f_{\text{int}}\| < e^*$ перейти на 5, если нет $i = i + 1$ перейти на 4

5 – $u_{n+1} = u_{n+1}^i; \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^i; \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^i$ и $n = n + 1$ перейти на 2

$e =$ малая величина

2.6.1. Нелинейный многомасштабный алгоритм для решения задачи методом конечных элементов

Здесь, предлагаем численный многомасштабный алгоритм на основе метода конечных элементов для прогноза термомеханических напряжений, возникающих в процессе отверждения и охлаждения толстостенных композиционных материалов на макро - и микроуровнях.

Как известно, вязкоупругое поведение композиционных материалов, когда они считаются, как анизотропная сплошная среда не отражают в полной мере

физические свойства реального вязкоупругого материала. В связи с этим здесь, в отличие от других методов решения, вязкоупругие деформации на каждом шаге времени вычисляются на микроуровне (в ПОЭ) в полимерной матрице.

Сначала, макроскопические деформации ε_{n+1}^M вычисляются на любых точках интеграции макроструктурой с учетом упругого поведения материала для интервала времени $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Затем с использованием макродеформаций, полученных из расчетов на макроуровне, упругих деформации, деформации ползучести, деформации химической усадки и, в конце концов, полных деформаций для полимерной матрицы вычисляются на ПОЭ. Потом средние величины полных деформации и напряжений $\bar{\varepsilon}_{n+1}$ и $\bar{\sigma}_{n+1}$ в ПОЭ для интервала времени $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ вычисляются по методу усреднения деформации по объему ПОЭ. Усреднения деформаций и напряжений по объему определяется по формуле:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{n+1} &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{n+1} dV = \frac{\sum [\varepsilon_{n+1}]_i V_i}{\sum V_i} \\ \bar{\sigma}_{n+1} &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{n+1} dV = \frac{\sum [\sigma_{n+1}]_i V_i}{\sum V_i}\end{aligned}\quad (2.142)$$

Здесь V — объём ПОЭ, V_i — объём i -го элемента и $[\varepsilon^c]_i$ — средние деформации в i -ом элементе. После вычисления полных деформации и напряжений ($\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\sigma}$) (черта сверху означает операцию усреднения по объему) на ПОЭ в конце интервала времени Δt можно вычислять вязкоупругую матрицу поведения материала \mathbf{D}_{n+1} по формуле:

$$\mathbf{D}_{n+1} = \frac{\bar{\sigma}_{n+1}}{\bar{\varepsilon}_{n+1}} \quad (2.143)$$

Теперь продолжаем расчет для следующего шага времени на макроуровне с использованием вязкоупругой матрицы поведения материала из (2.143).

Далее представлен численный алгоритм для двухмасштабного анализа напряженно-деформированного состояния толстостенного композиционного материала методом конечных элементов для интервала времени $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ и изменение температуры $\Delta T = T_{n+1} - T_n$.

I. Макромасштабный анализ (Первый уровень анализа):

- Начальные параметры:

$$t_0 = 0; T_0 = 0; f^{t_0} = 0; u_0^M = 0; \varepsilon_0^M = 0; \sigma_0^M = 0; \varepsilon_0^s = 0$$

1. Шаги $n=0, 1, 2, 3, \dots$

2. $\Delta t = t_{n+1} - t_n, \Delta T = T_{n+1} - T_n, \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_{el}$

3. Определит новый уровень нагрузки $f_{ext}^{t_{n+1}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_n \boldsymbol{\alpha} (T_{n+1} - T_n)$

4. Вычислять $\mathbf{K}_n = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_n \mathbf{B} dV$

5. Вычислять u_{n+1} из $\mathbf{K}(u_{n+1}^M - u_n^M) = f_{ext}^{t_{n+1}} - f_{ext}^{t_n}$

6. Вычислять $\Delta u^M = u_{n+1}^M - u_n^M$

7. Вычислять $\Delta \varepsilon^M = \mathbf{B} \Delta u$ для каждой необходимой точки

8. Вычислять $\Delta \sigma^M = \mathbf{D}_n \Delta \varepsilon$ для каждой необходимой точки

9. $u_{n+1}^M = u_n^M + \Delta u^M; \varepsilon_{n+1}^M = \varepsilon_n^M + \Delta \varepsilon^M; \sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma^M$

II. Микромасштабный анализ на ПОЭ (Второй уровень анализа):

- Начальные параметры:

$$f_{int}^0 = 0; u_0 = 0; \varepsilon_0 = 0; \sigma_0 = 0; \varepsilon_0^c = 0; \varepsilon_{n+1}^s$$

1. Действует периодические граничные условия на ПОЭ:

$$u_{n+1}^{j+} - u_{n+1}^{j-} = \varepsilon_{n+1}^M l$$

2. Определит новый уровень нагрузки $f_{ext}^{t_{n+1}}$

3. Инициирование итерации:

$$u_{n+1}^0 = u_n; \varepsilon_{n+1}^0 = \varepsilon_n; \dot{\varepsilon}_{n+1}^{c,0} = 0; \Delta \varepsilon_{n+1}^{c,0} = 0;$$

4. Счетчик итерации $i = 1, 2, 3, \dots$

Для матрицы (полимера):

$$5. \text{ Вычислять } \mathbf{K}_n^{i-1} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_n^{i-1} \mathbf{B} dV$$

$$6. \text{ Вычислять } \mathbf{u}_{n+1}^i \text{ из } \mathbf{K}_n^{i-1} (\mathbf{u}_{n+1}^i - \mathbf{u}_{n+1}^{i-1}) = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{t_n+1} - \mathbf{f}_{\text{int}}^{i-1}$$

$$7. \text{ Вычислять } d\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{u}_{n+1}^i - \mathbf{u}_{n+1}^{i-1}$$

8. Добавлять $d\mathbf{u}_{n+1}^i$ на инкрементальное перемещение:

$$\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{u}_{n+1}^{i-1} + d\mathbf{u}_{n+1}^i$$

9. Вычислять приращения деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i = \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^i$$

$$10. \text{ Вычислять } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{c,i-1} = \frac{1.5(s^{i-1}) - \boldsymbol{\varepsilon}_s^{c,i-1} E_{\infty s}}{\eta_{0s}} e^{C^{i-1}}$$

$$11. \text{ Вычислять } \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^{c,i} = \sum_{s=1}^2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{s,n+1}^{c,i-1} \Delta t$$

$$12. \text{ Вычислять деформации ползучести } \boldsymbol{\varepsilon}^{c,i} = \boldsymbol{\varepsilon}^{c,i-1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^{c,i}$$

$$13. \text{ Вычислять упругую деформацию } \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{c,i}$$

(Для первой итерации $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i$)

$$14. \text{ Вычислять } \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{e,i} = \mathbf{D}_n^{i-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{c,i-1}); s_{n+1}^{e,i} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{e,i} - p$$

$$15. \text{ Вычислять } C_{n+1}^i = \left(\frac{f_{\text{max},n+1}^i}{m_{n+1}} \right)$$

$$16. \text{ Вычислять тангенциального модуля материала } \mathbf{D}_n^i = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)$$

$$17. \text{ Вычислять } \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i = \mathbf{D}_n^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i$$

$$18. \text{ Вычислять } \mathbf{f}_{\text{int}}^i = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i dV$$

19. Если $\|\mathbf{f}_{\text{ext}}^{t_n+1} - \mathbf{f}_{\text{int}}^i\| < e^*$ перейти на 21, иначе перейти на 4.

$$20. \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i; \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^s = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e; \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i; \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{c,i} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c$$

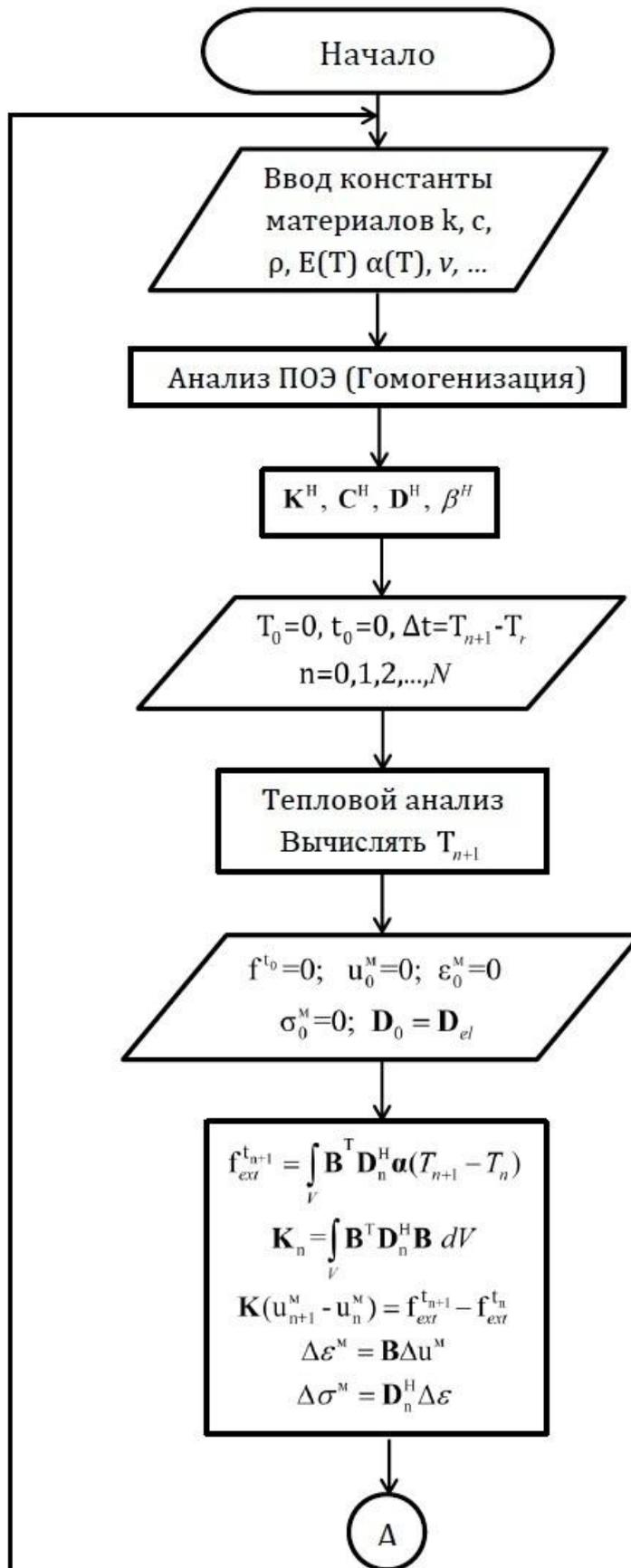
21. Вычислять $\bar{\varepsilon}_{n+1} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{n+1} dV$

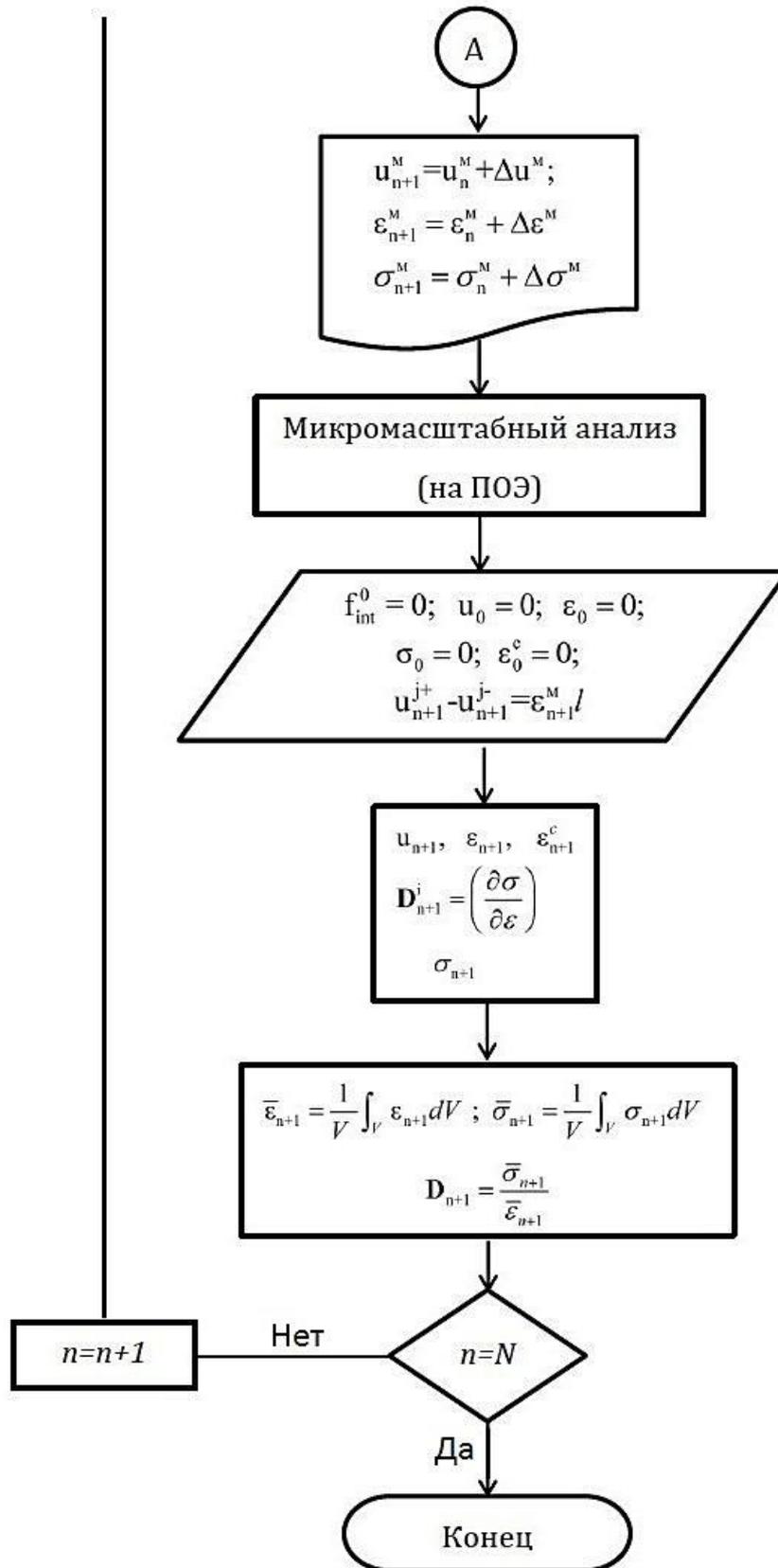
22. Вычислять $\bar{\sigma}_{n+1} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{n+1} dV$

23. Вычислять $\mathbf{D}_{n+1} = \frac{\bar{\sigma}_{n+1}}{\bar{\varepsilon}_{n+1}}$

24. $n=n+1$ перейти на **I-1**.

Общая блок-схема двухмасштабного алгоритма для прогнозирования остаточных температурных напряжений в толстостенных намоточных оболочках из армированных полимеров на макро - и микроуровне представлена ниже.





ГЛАВА 3. РАСЧЁТЫ ТОЛСТОСТЕННОГО КОКОНА И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

3.1. Разработка толстостенного кокона из армированного полимера

Во второй главе представлены гипотезы, методы решения и нелинейный численный многомасштабный алгоритм для прогноза остаточных напряжений в толстостенном цилиндре из армированных полимеров на макро и микроуровне.

Затем эффективные физико-механические характеристики периодической структурой композиционного материала определяются с помощью процесса гомогенизации и элементарной ячейки структуры. Теперь неоднородный материал заменяется однородным материалом с эффективными физико-механическими свойствами (которые вычисляются путём гомогенизации неоднородного материала)

Таким образом, периодическая среда рассматривается как сплошная анизотропная среда, чтобы получить макроскопическая поля температурных напряжений. Затем с использованием двухмасштабного алгоритма, разработавшего во второй главе, вычисляется (восстанавливается) макроскопическое напряжение и затем поля напряжения в элементарной ячейке в интересующей исследователей подозрительной зоне.

Теперь можно моделировать толстостенный кокон высокого давления, подходящий для погружных структур (для создания глубоководных аппаратов) из армированного полимера (стеклопластика), и прогнозировать технологических остаточных напряжений возникающие в процессе его изготовления (в процессе отверждения и охлаждения) на микро и макроуровне с использованием многомасштабного численного алгоритма.

Простая модель толстостенного цилиндрического корпуса высокого давления состоит из толстостенного намоточного композиционного цилиндра в середине с полусферическими заглушками по торцам, как показана на рис. 3.1.

Такая форма толстостенного кокона высокого давления предлагается из-за предельно простой конструкции, для их изготовления.



Рис. 3.1. Схема толстостенного кокона высокого давления с металлическими полусферическими заглушками по торцам.

Как известно в цилиндрических оболочках под действием внутреннего и внешнего давления, окружное напряжение σ_θ почти в два раза больше чем осевого напряжения σ_z . Таким образом, используя метода намотки можно создавать композиционный цилиндр с ортотропным или анизотропным материалом, который почти в два раза прочнее в кольцевом направлении, чем в продольном направлении.

Анализ показывает, что одним из простейших оптимального угла намотки является $\pm 55^\circ$. Graham в своей работе (1996) описал, что толстостенный намотанный цилиндр из углепластика с полусферическими заглушками из титана который было предназначен для выполнения внешнего давления 60 МПа, разрушил под действием давлением 61 МПа, из-за потери устойчивости [52,53]. Цилиндр был намотан при $\pm 55^\circ$ угол, из-за простота (легкого) получения промышленно и он два раза прочнее в кольцевом направлении, чем в продольном направлении (Kaddur, и др, 1998) [71]. Но такая форма намотка и распределения слоев приводит к низкому окружной и осевой модуль Юнга

(жѐсткости по окружности и осевой) и, следовательно, плохой устойчивостью. Жѐсткость может быть значительно, увеличить с помощью продольно-поперечной намотки $[90^\circ_2/0^\circ]_n$. это представляет продольно-поперечного композита, так чтобы число слоев по окружности $[90^\circ]$ вдвое больше число слоев в осевом направлении $[0^\circ]$.

Здесь можно предположить, что волокна равномерно распределены в матрице и имеют одинаковый радиус. Предполагаем, что каждый продольный слой состоит из 4 монослоев и каждый поперечный слой состоит из 2 мнослоев ($[90^\circ_4/0^\circ_2]_n$). Схема такой структуры и её представительный объѐмный элемент представлены на рис. 3.2. Объѐмная доля волокон 55%.

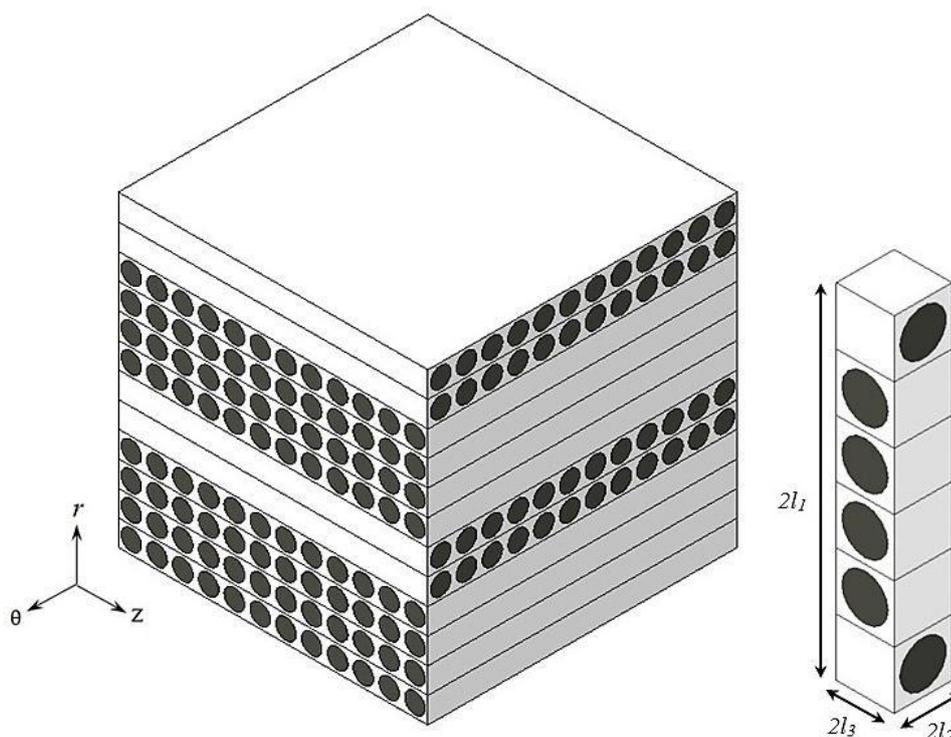


Рис. 3.2. Схема армированного полимера с продольно-поперечной структурой $[90^\circ_4/0^\circ_2]_n$ и его представительный объѐмный элемент.

Если размера элементарной ячейки $l_1 \times l_2 \times l_3$, для определения компонентов матрицы поведения однородного материала используем набор макродеформаций ε_{ij}^M . Таким образом, периодические граничные условия для определения эффективного модуля E_r имеет вид:

$$u(l_1, \theta, z) - u(0, \theta, z) = \varepsilon_{11}^M; \quad (3.1)$$

Для определения эффективного модуля E_θ :

$$v(r, l_2, z) - v(r, 0, z) = \varepsilon_{22}^M; \quad (3.2)$$

Для определения эффективного модуля E_z :

$$w(x, y, l_3) - w(x, y, 0) = \varepsilon_{33}^M; \quad (3.3)$$

Для определения эффективного модуля G_{12} :

$$v(l_1, y, z) - v(0, y, z) = \varepsilon_{12}^M; \quad (3.4)$$

$$u(x, l_2, z) - u(x, 0, z) = \varepsilon_{12}^M;$$

Для определения эффективного модуля G_{13} :

$$w(l_1, y, z) - w(0, y, z) = \varepsilon_{13}^M; \quad (3.5)$$

$$u(x, y, l_3) - w(x, y, 0) = \varepsilon_{13}^M;$$

Для определения эффективного модуля G_{23} :

$$v(x, y, l_3) - v(x, y, 0) = \varepsilon_{23}^M; \quad (3.6)$$

$$w(x, l_2, z) - w(x, 0, z) = \varepsilon_{23}^M;$$

Используя (2-141) можно вычислять усреднение деформации и напряжения по объему, и затем эффективные модули материала и компоненты (константы) C_{ij} .

Для определения эффективных КЛТР композита, используется равномерную температурную нагрузку на элементарной ячейке композита [104]. Таким образом, эффективные коэффициенты линейного теплового расширения определяются следующим образом:

$$\alpha_{ii} = \frac{\bar{\varepsilon}_{ii}}{\Delta T} \quad (3.7)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_{ii}$ – усреднения нормальных микродеформаций.

Используя температурные периодические граничные условия (2-38) и (2-39), усреднение плотности теплового потока \bar{q} и градиент температуры по объёму вычисляем следующим образом:

$$\bar{q} = \frac{1}{V} \int_V q dV = \frac{1}{S} \int_S q.n dV$$

$$\bar{g} = \frac{1}{V} \int_V \nabla T dV = \frac{1}{S} \int_S T.n dV$$
(3.8)

Таким образом, эффективная теплопроводность может быть вычислена следующим образом:

$$k = \frac{\bar{q}}{\bar{g}}$$
(3.9)

Физико-механические характеристики матрицы и частицы представлены в табл. 3.1.

Здесь из-за симметрии ПОЭ, для упрощения, рассматриваем только половину представительного объёмного элемента, как показано на рис. 3.3.

Характеристики	Эпоксид	Стекловолокно	Сталь
E (МПа)	$3.9 \cdot 10^3$	$72.5 \cdot 10^3$	$200 \cdot 10^3$
G (МПа)	$1.45 \cdot 10^3$	$29.3 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$
ν	0.33	0.23	0.29
КЛТР α (1/К)	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$5.4 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$
ρ (г/см ³)	1.2	2.5	7.5
Теплопроводность k (w/m.K)	0.26	1	54
Теплоёмкость c (J/ Kg.K)	1800	720	434

Табл. 3.1. Физико-механические характеристики матрицы и волокна.

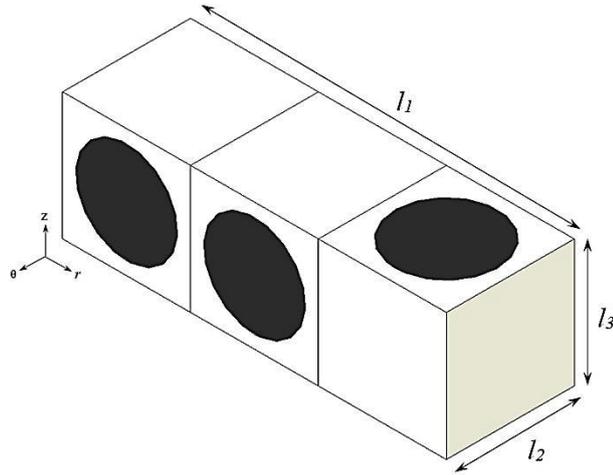


Рис. 3.3. 1/2 симметричная модель ПОЭ (половина представительного объемного элемента).

Для решения задачи гомогенизации и анализа на ПОЭ методом конечных элементов, используем тетраэдрический 10-узловой конечный элемент, как показано на рис. 3.3. Таким образом, эффективная матрица жесткости материала имеет вид:

$$C^H = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{\theta r} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{zr} & C_{z\theta} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{zr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{\theta z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17.88 \times 10^3 & 5.74 \times 10^3 & 8.40 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 5.74 \times 10^3 & 44.30 \times 10^3 & 7.6 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 8.40 \times 10^3 & 7.6 \times 10^3 & 27.08 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.16 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.34 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.33 \times 10^3 \end{bmatrix} \text{ МПа}$$

Эффективные физико-механические характеристики материала представлены в табл. 3.2.

Тепловые свойства	α_r ($10^{-6}1/К$)	α_θ ($10^{-6}1/К$)	α_z ($10^{-6}1/К$)	k_r (w/m.K)	k_θ (w/m.K)	k_z (w/m.K)	C_p (J/Kg.K)
Композит	3.9	1.8	2.9	0.42	0.53	0.48	843

Табл. 3.2. Эффективные физико-механические характеристики материала

3.2. Оценка остаточных напряжений в толстостенном намоточном цилиндром при отверждении и охлаждении на микро и макроуровне

Процесса создания намоточного цилиндра из армированного полимера включает два основных этапа: отверждение жидкого полимера и охлаждение уже твёрдого полимерного композиционного материала. Целью настоящей задачи является определения поля технологических (остаточных) напряжений в толстостенном намоточном цилиндре из армированного полимера.

Здесь будем считать что, величину натяга при намотке малой, так что её можно пренебречь [98] (вследствие фильтрации жидкого полимера - связующего в изделии, могут совсем исчезнуть натяга и запасённые при намотке под натяжением радиальные напряжения сжатия).

Рассмотрим длинный намоточный цилиндр из армированного полимера (стеклопластика) на оправку с внутренним радиусом цилиндра $r_1 = 100$ см, внешним радиусом цилиндра $r_2 = 135$ см и длиной 800 см; толщина стальной оправки 4 см (внутренний радиуса оправки $r_0 = 96$ см). Задача решалась при следующих общих начальных условиях:

$$T_0 = 20^\circ \text{C}; T_M = 150^\circ \text{C}; t_0 = 0; T(t_0, r, \theta, z) = T_0;$$

Начальные и граничные условия:

$$\sigma_r(r_0) = 0; \sigma_r(r_2) = 0; \sigma_z(0) = 0; \sigma_z(L) = 0;$$

$$T(t, r_0, \theta, z) = T(t, r_2, \theta, z) = \begin{cases} T_0 + v_1 \cdot t & 0 < t < t_1 \\ T_M & t_1 \leq t \leq t_2 \\ T_M - v_2 \cdot t & t_2 < t < t_3 \end{cases}$$

$$T(t, r, \theta, L) = T(t, r, \theta, 0) = \begin{cases} T_0 + v_1 \cdot t & 0 < t < t_1 \\ T_M & t_1 \leq t \leq t_2 \\ T_M - v_2 \cdot t & t_2 < t < t_3 \end{cases}$$

где T_0 — максимальная температура отверждения, v_1 — скорость отверждения, v_2 — скорость охлаждения и $(t_2 - t_1)$ — время выдержки при температуре отверждения. $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $T_M = 150^\circ\text{C}$ (Расчеты проводились с помощью программного комплекса ABAQUS и FORTRAN).

Рассматриваются задачи: первая — для случая, когда существует непрерывный контакт между оправкой и композитом и вторая — оправка не приклеена к намотанному на нее композитному толстостенному цилиндру (в реальном случае для толстостенных намоточных цилиндров, цилиндр отходит от оправки в ходе процесса охлаждения). Скорость отверждения и охлаждения $1^\circ\text{C}/\text{мин}$.

На рис. 3.4–6 представлены график зависимости максимальных остаточных, макронапряжений σ_r , σ_θ и σ_z от времени в цилиндре в процессе отверждения и охлаждения для случая, когда оправка не приклеена к намотанному на нее композитному толстостенному цилиндру.

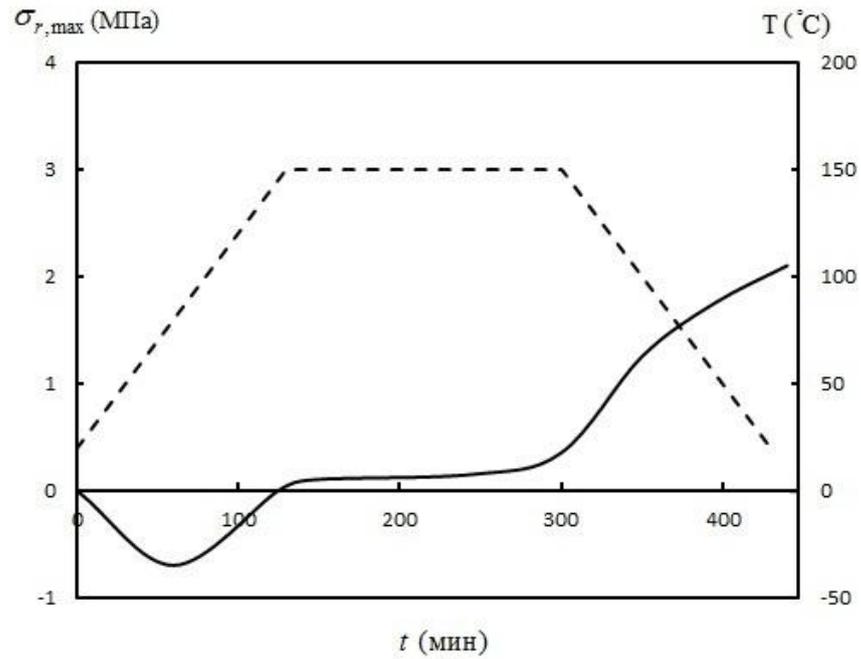


Рис. 3.4. Изменение температуры (штриховая кривая) и максимальных остаточных радиальных макронапряжений (сплошная кривая) от времени в процессе отверждения и охлаждения.

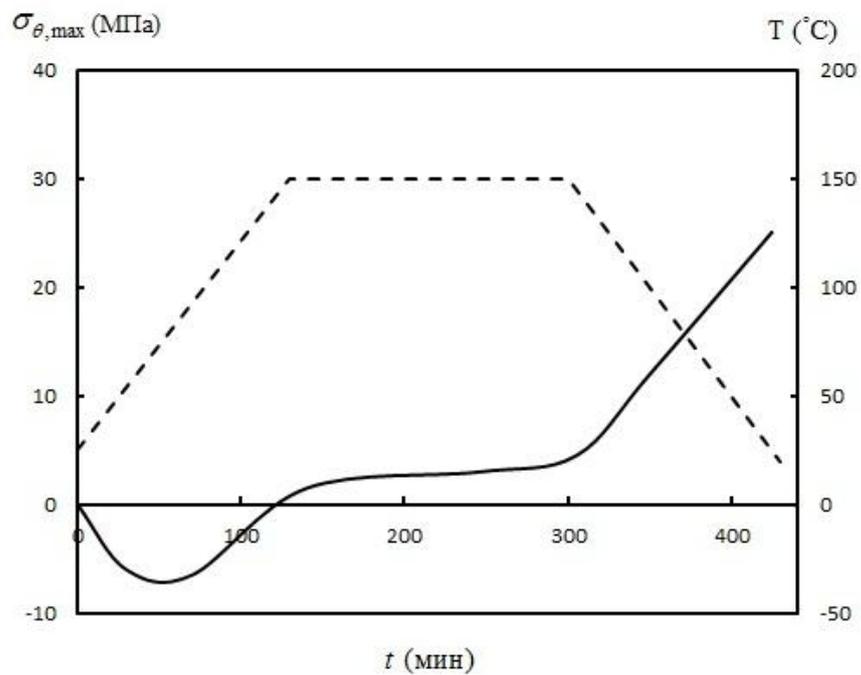


Рис. 3.5. Изменение температуры (штриховая кривая) и максимальных остаточных окружных макронапряжений (сплошная кривая) от времени в процессе отверждения и охлаждения.

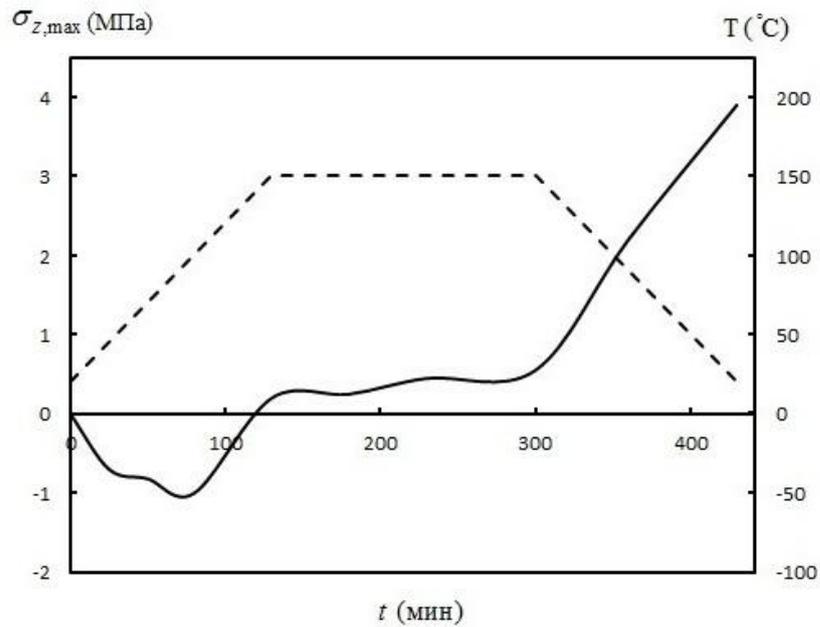


Рис. 3.6. Изменение температуры (штриховая кривая) и максимальных остаточных осевых макронапряжений (сплошная кривая) от времени в процессе отверждения и охлаждения.

В случае, когда оправка не приклеена к намотанному на нее композитному толстостенному цилиндру, максимальные радиальные макронапряжения переходят в середину толщины цилиндра. На рис. 3.7–9 представлен распределение температурных макронапряжений в цилиндре в конце процесса охлаждения.

Затем выбираются 3 различные зоны по толщине цилиндра ($r=101\text{см}$, $r=117\text{см}$ и $r=134\text{см}$) для определения поля микронапряжений в ПОЭ. На рис. 3.10–27 представлены поля микронапряжений в трех различных зонах (по толщине цилиндра), в центре цилиндра $L=400\text{см}$ (по длине) и в концах, после завершения процесса отвердевания, при котором момент прочность полимера ещё очень мала. На рис. 3.25–45 представлены поля микронапряжений в конце процесса создания (после охлаждения) в случае, когда оправка не приклеена к намотанному на нее композитному толстостенному цилиндру.

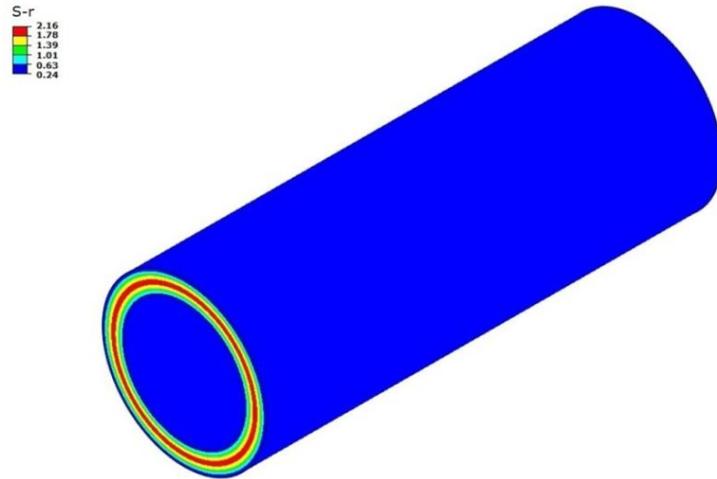


Рис. 3.7. Распределение остаточных радиальных макронапряжений в конце процесса изготовления цилиндра.

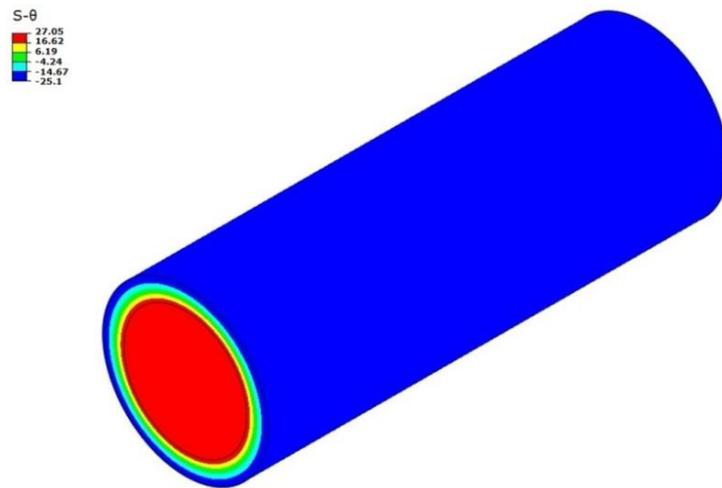


Рис. 3.8. Распределение остаточных окружных макронапряжений в конце процесса изготовления цилиндра.

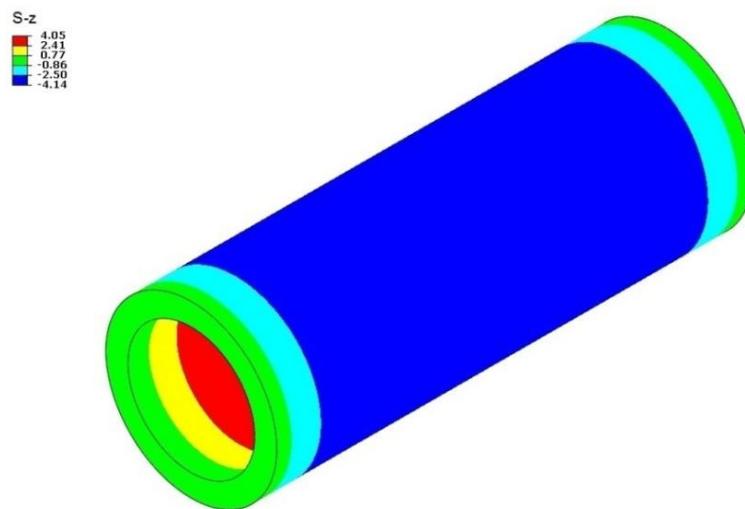


Рис. 3.9. Распределение остаточных осевых макронапряжений в конце процесса изготовления цилиндра.

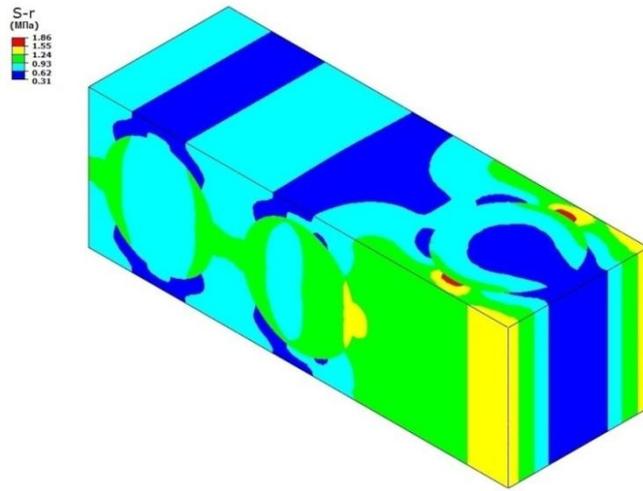


Рис. 3.10. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

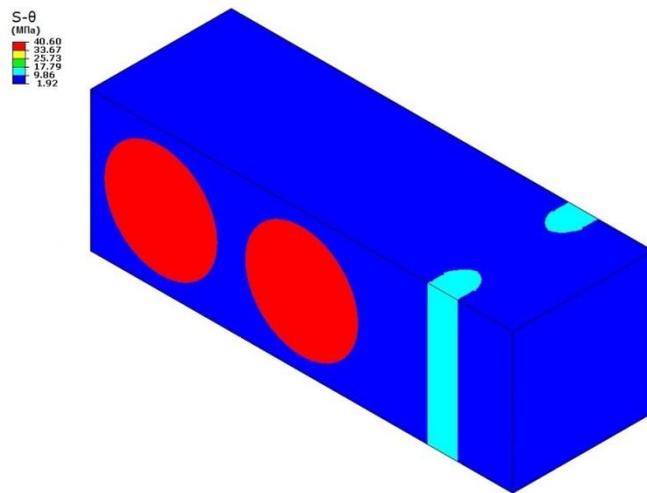


Рис. 3.11. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

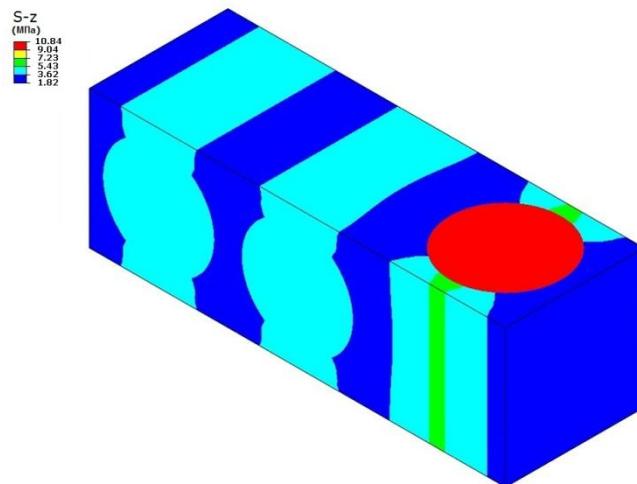


Рис. 3.12. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

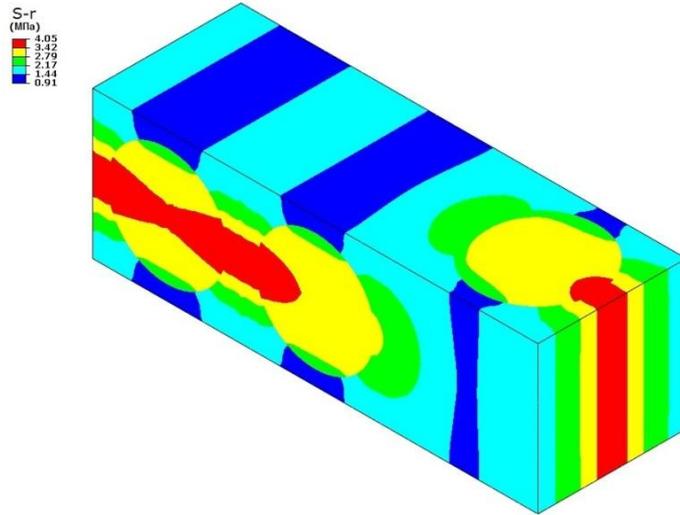


Рис. 3.13. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

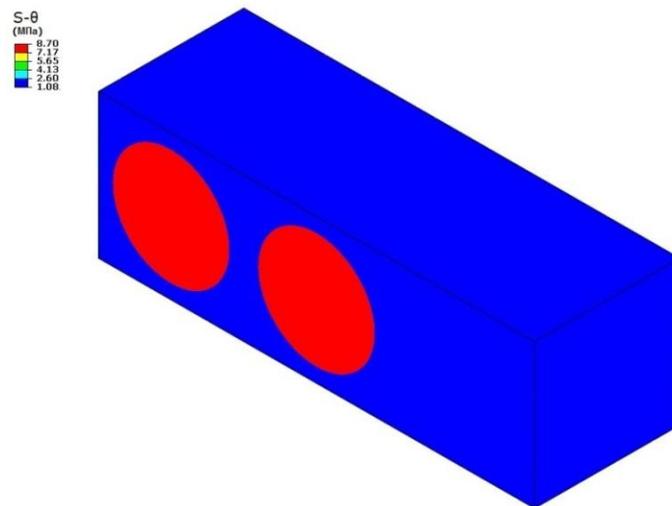


Рис. 3.14. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

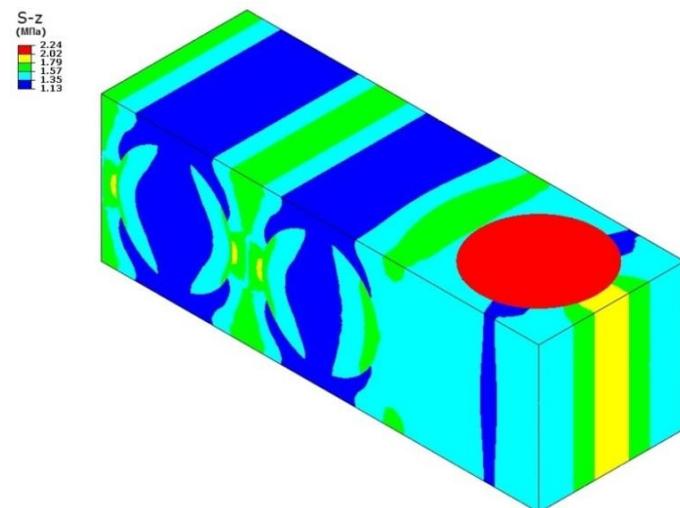


Рис. 3.15. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

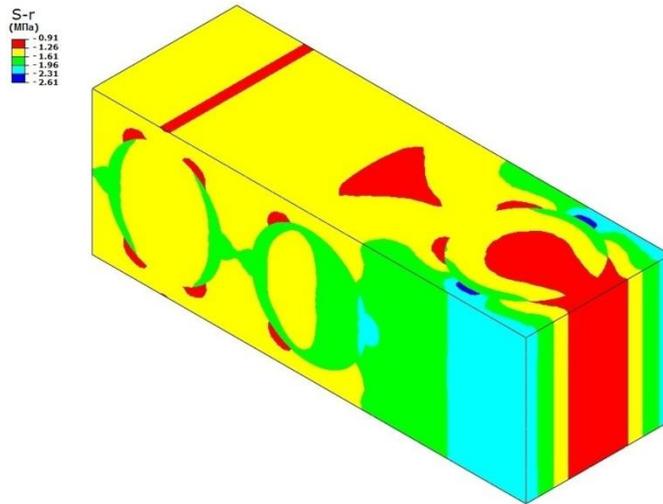


Рис. 3.16. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{см}$ - $T=90$)

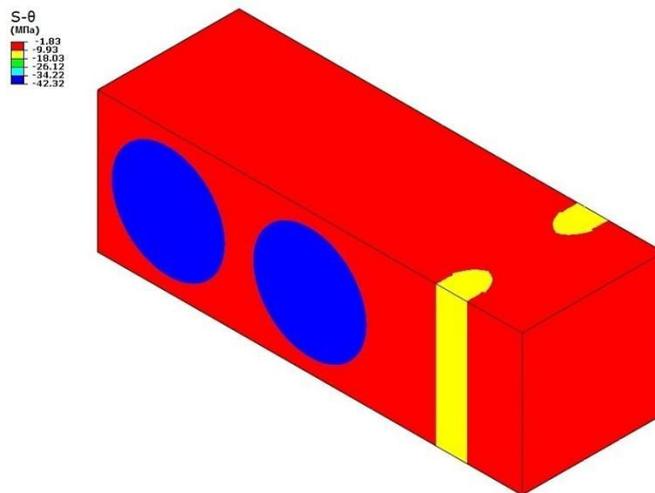


Рис. 3.17. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

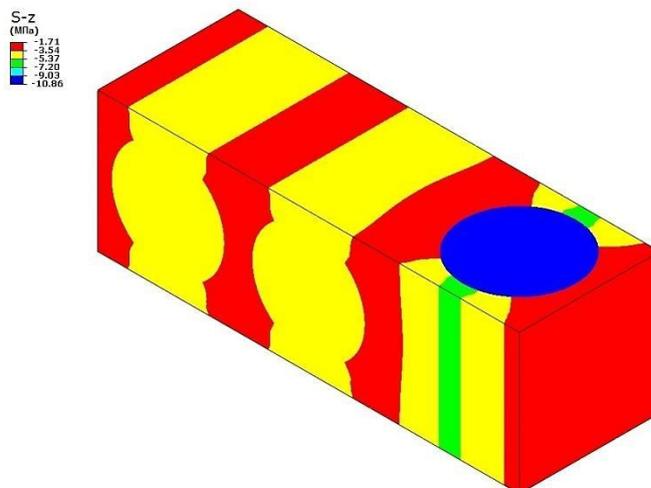


Рис. 3.18. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

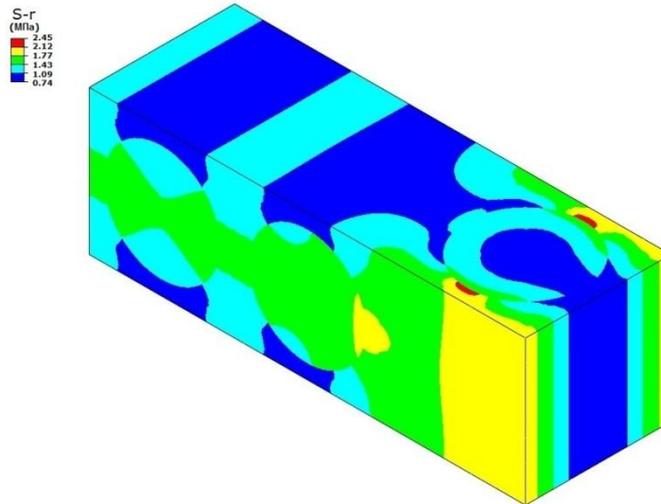


Рис. 3.19. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=799$ см - $T=90$).

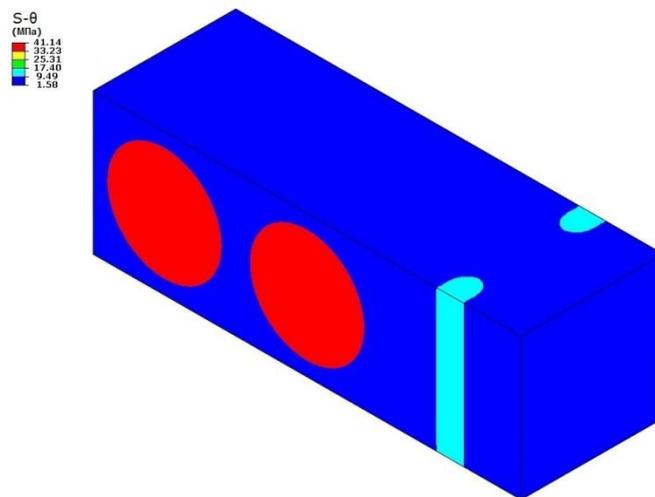


Рис. 3.20. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=799$ см - $T=90$).

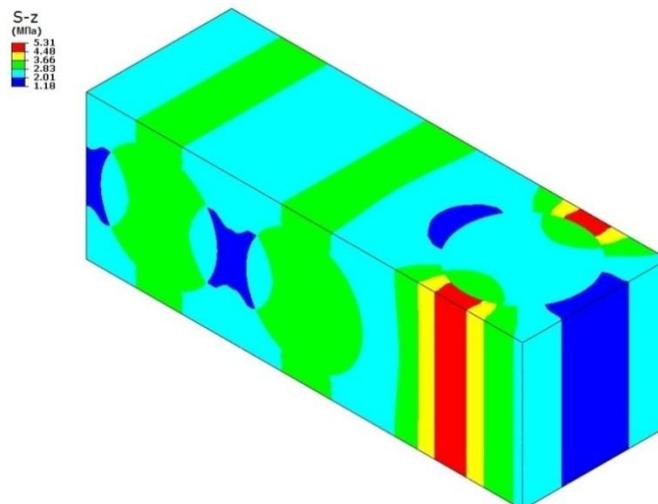


Рис. 3.21. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=799$ см - $T=90$).

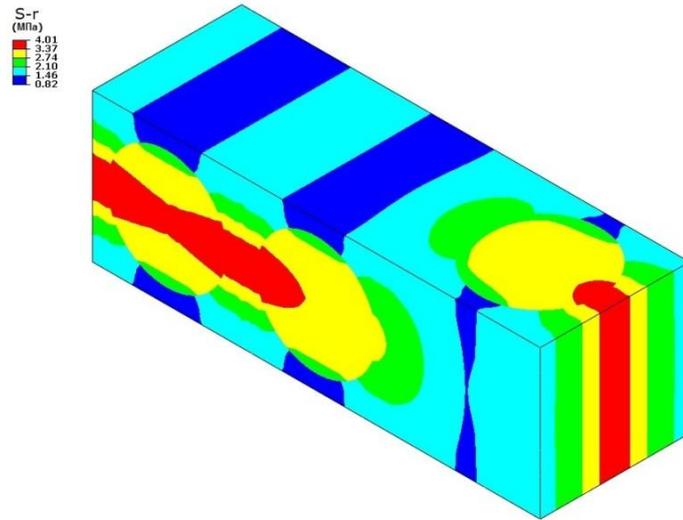


Рис. 3.22. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=90$).

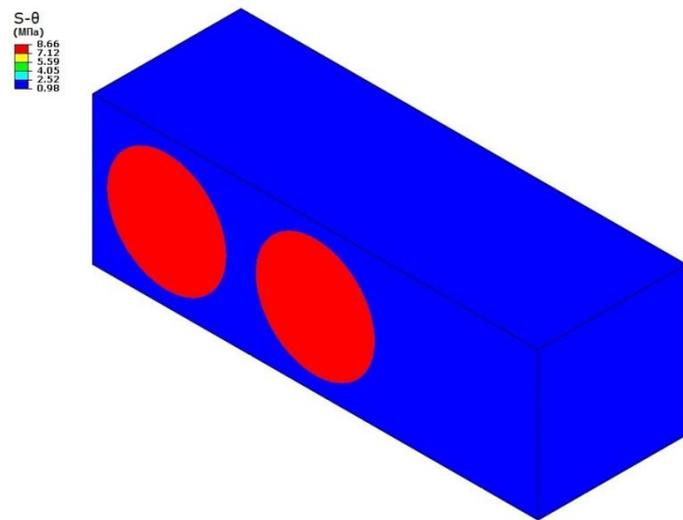


Рис. 3.23. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=90$).

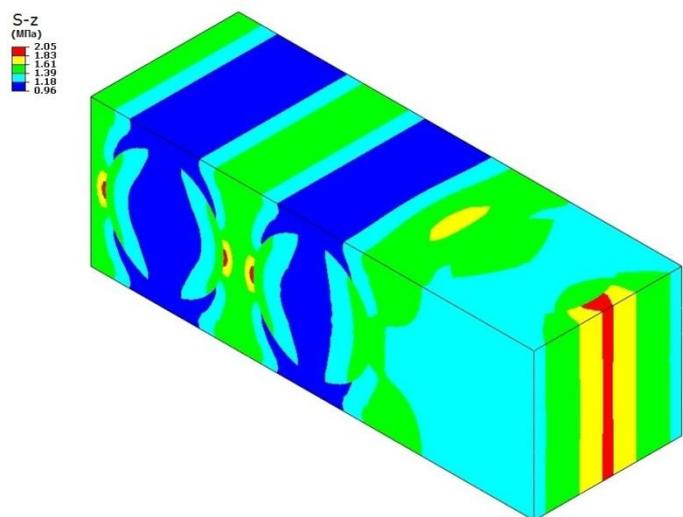


Рис. 3.24. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=90$).

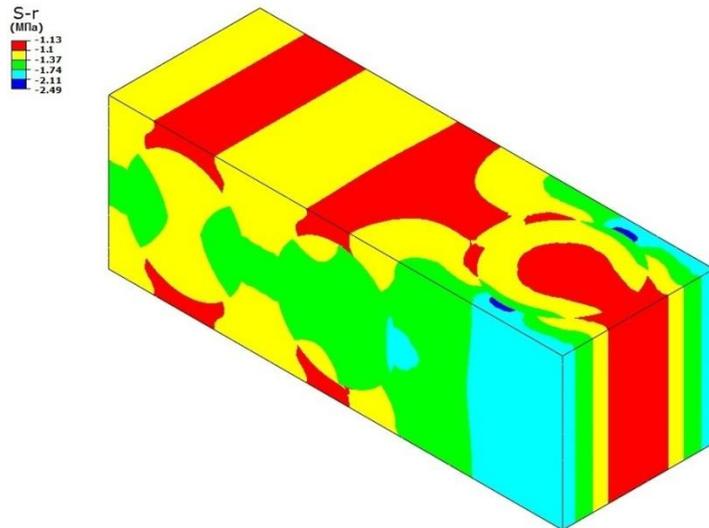


Рис. 3.25. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=90$).

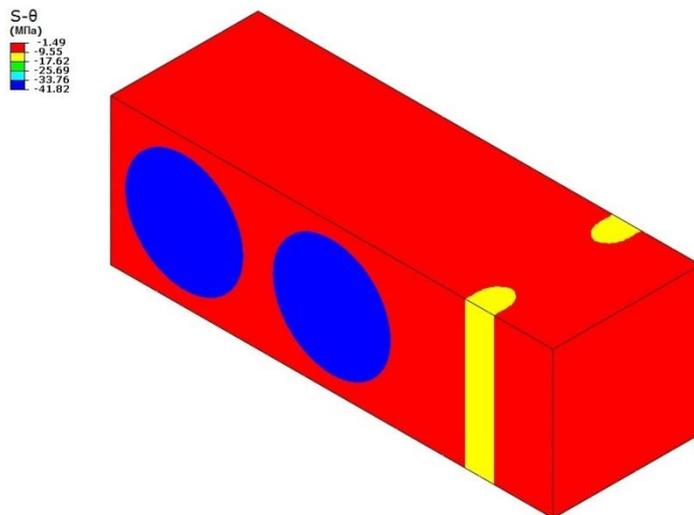


Рис. 3.26. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=90$).

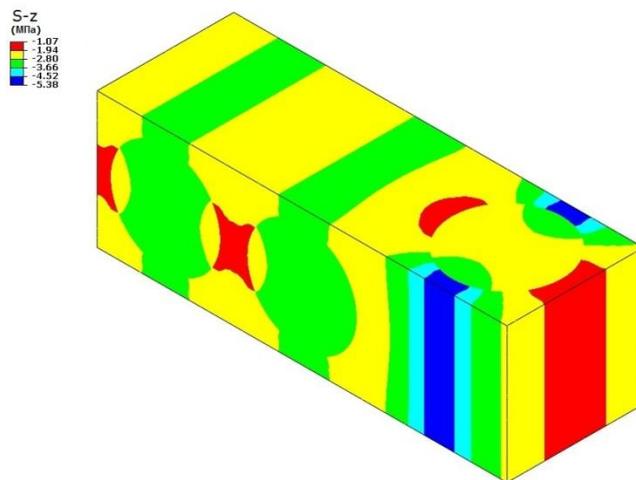


Рис. 3.27. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=90$).

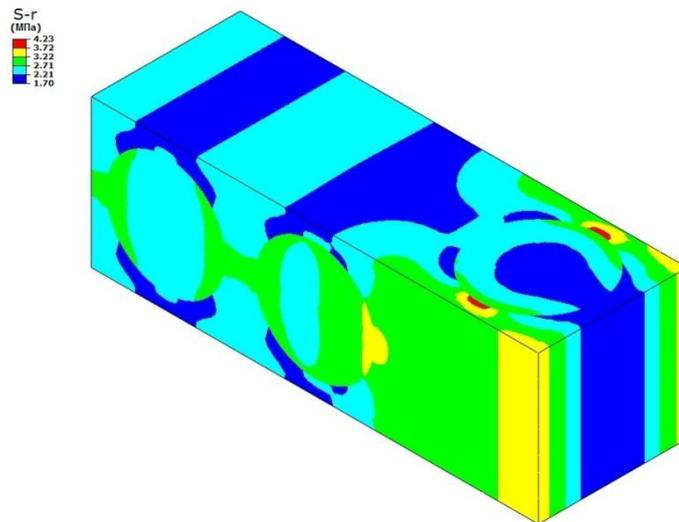


Рис. 3.28. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

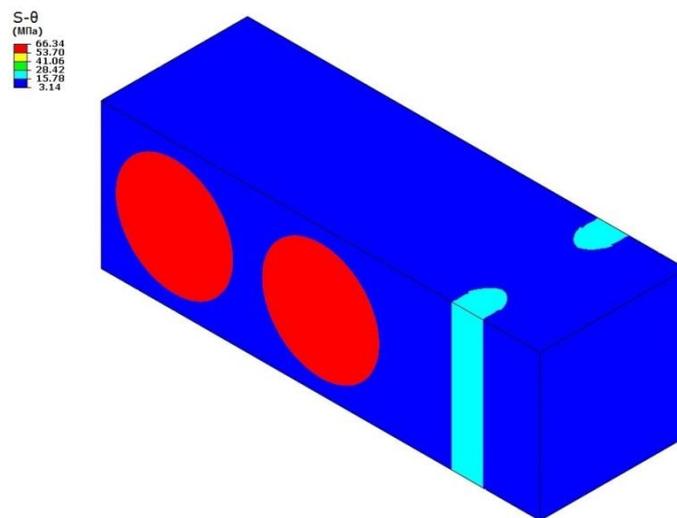


Рис. 3.29. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

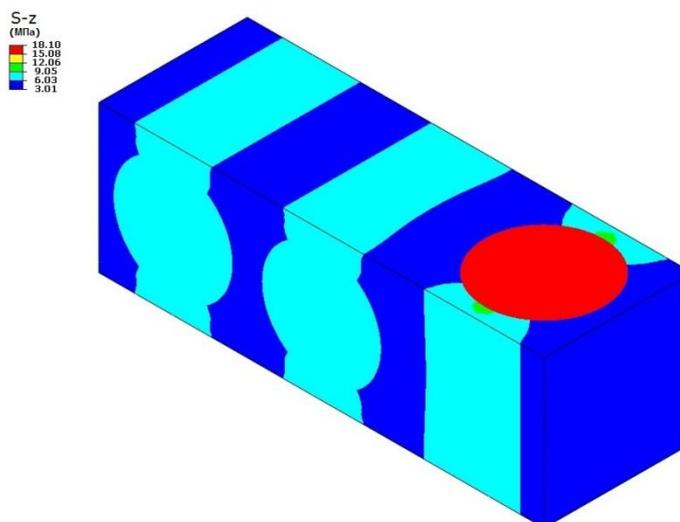


Рис. 3.30. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

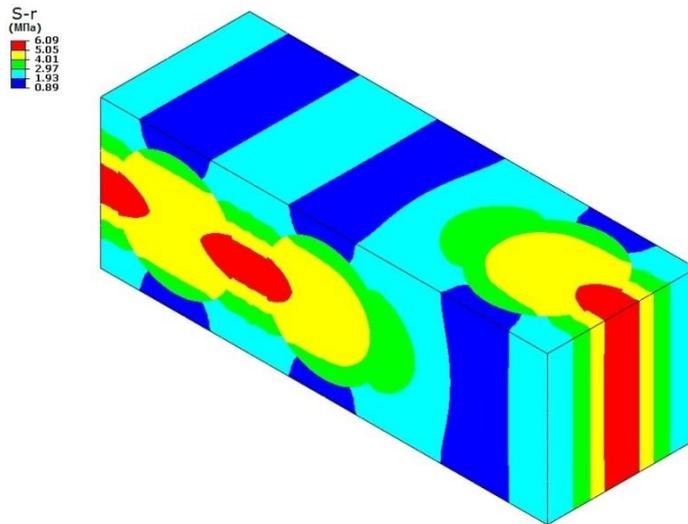


Рис. 3.31. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

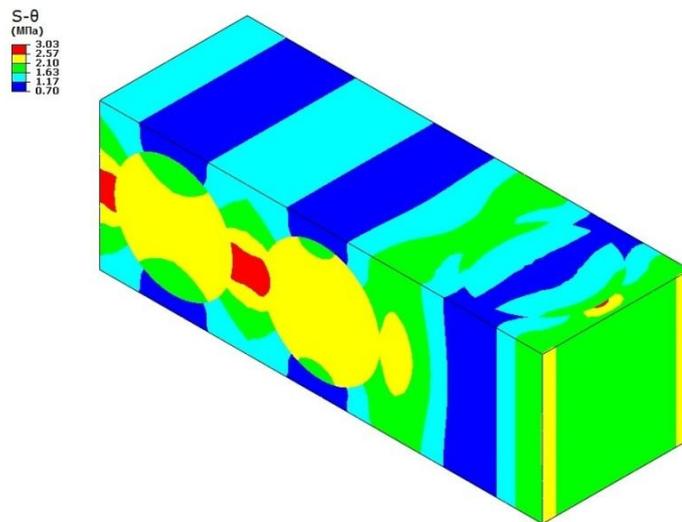


Рис. 3.32. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

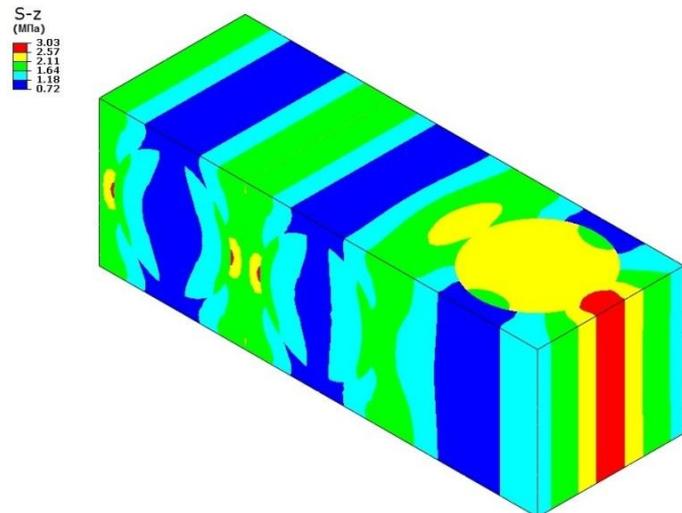


Рис. 3.33. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

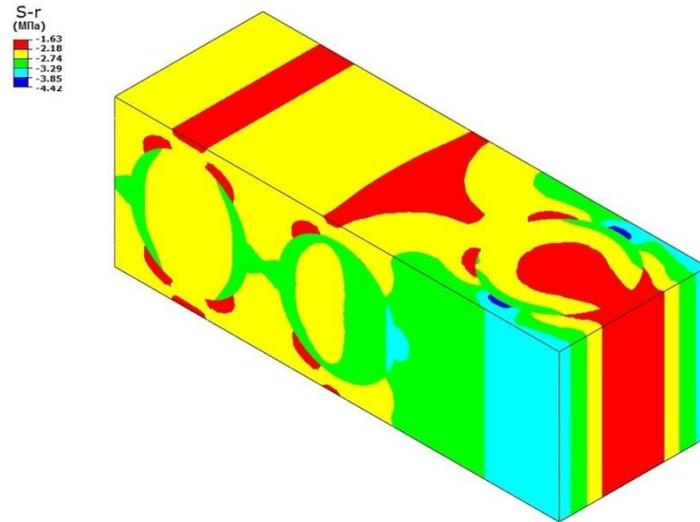


Рис. 3.34. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

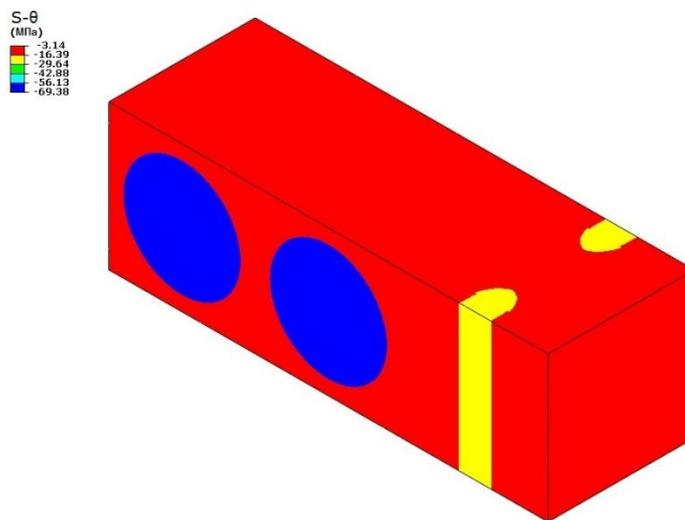


Рис. 3.35. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

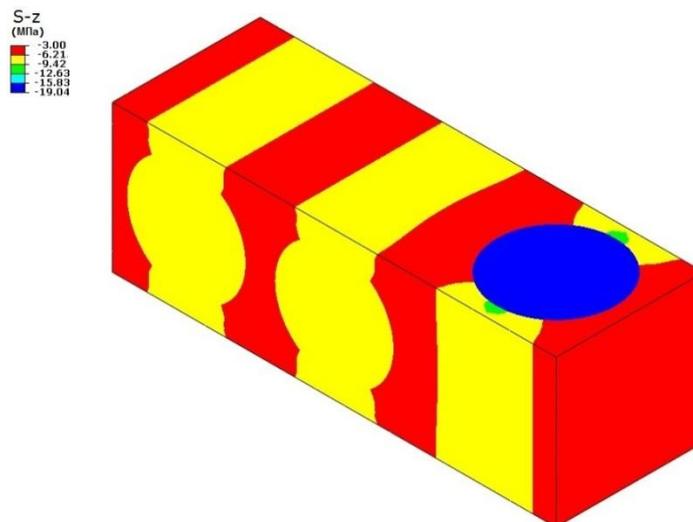


Рис. 3.36. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

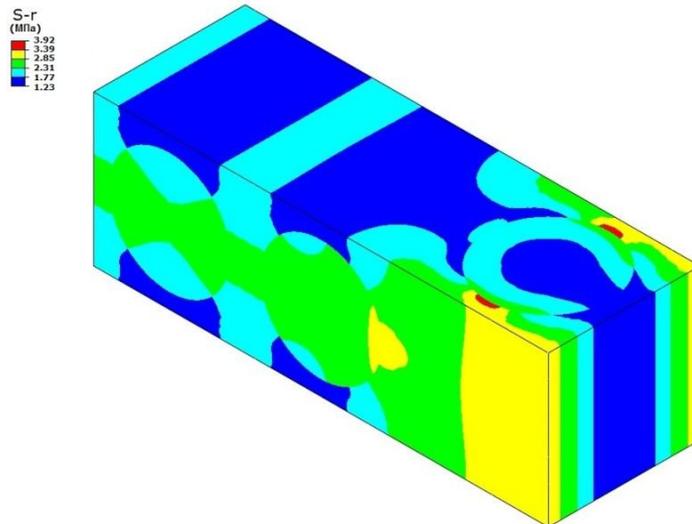


Рис. 3.37. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=799$ см - $T=20$).

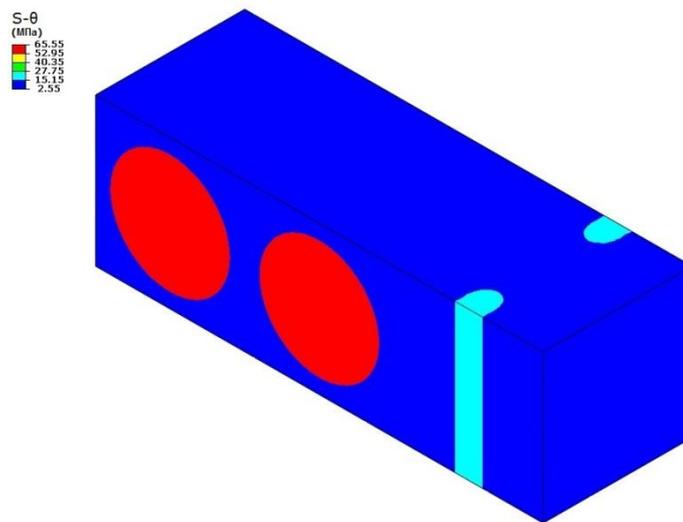


Рис. 3.38. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=799$ см - $T=20$).

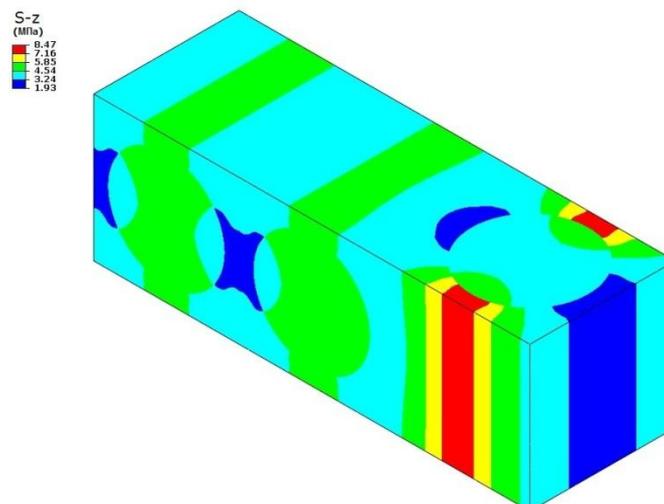


Рис. 3.39. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=799$ см - $T=20$).

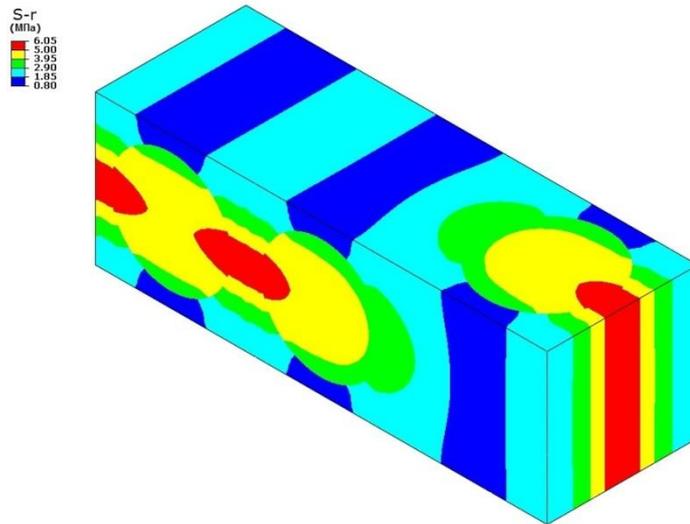


Рис. 3.40. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=20$).

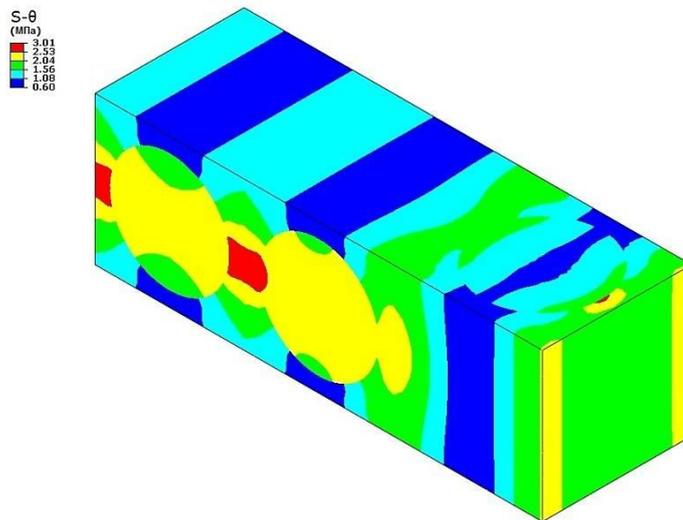


Рис. 3.41. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=20$).

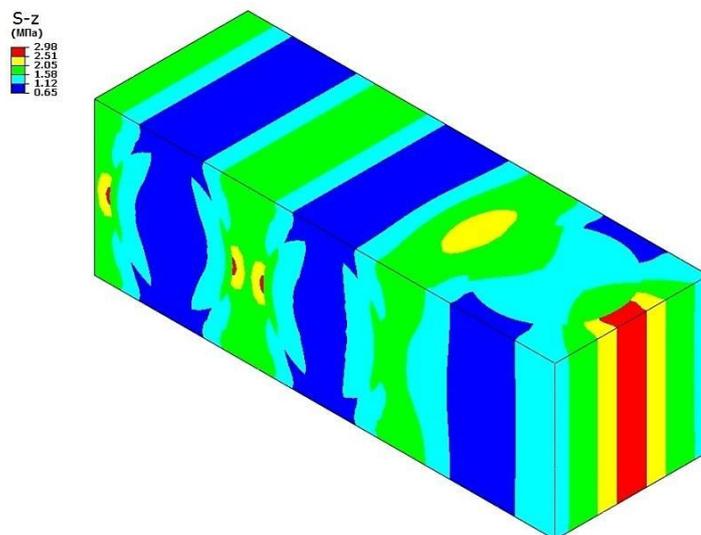


Рис. 3.42. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=20$).

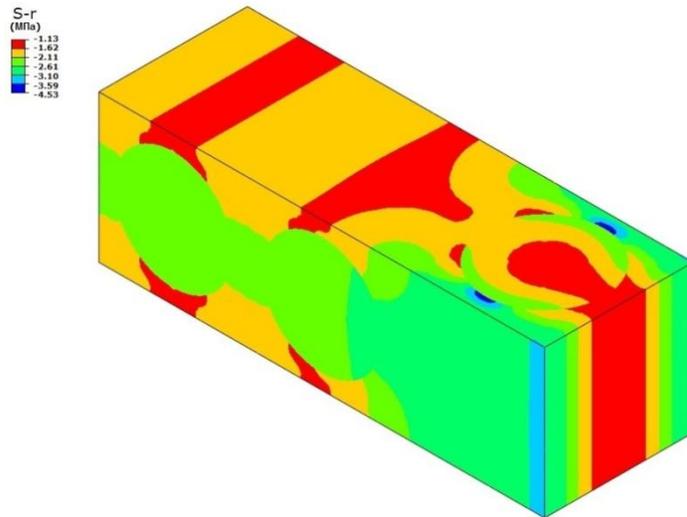


Рис. 3.43. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=20$).

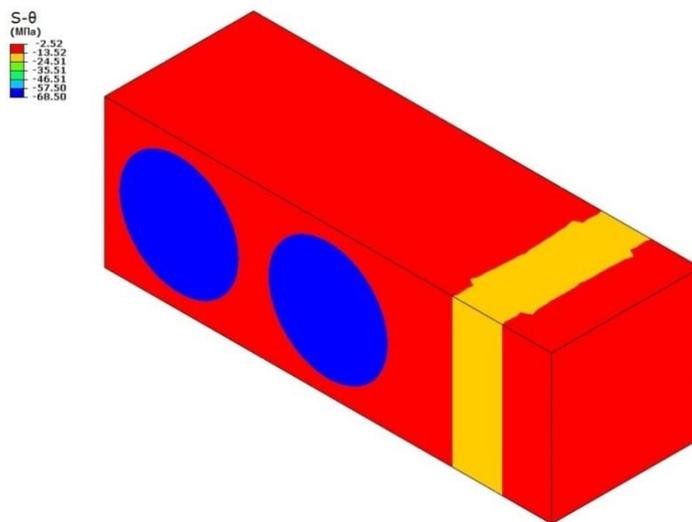


Рис. 3.44. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=20$).

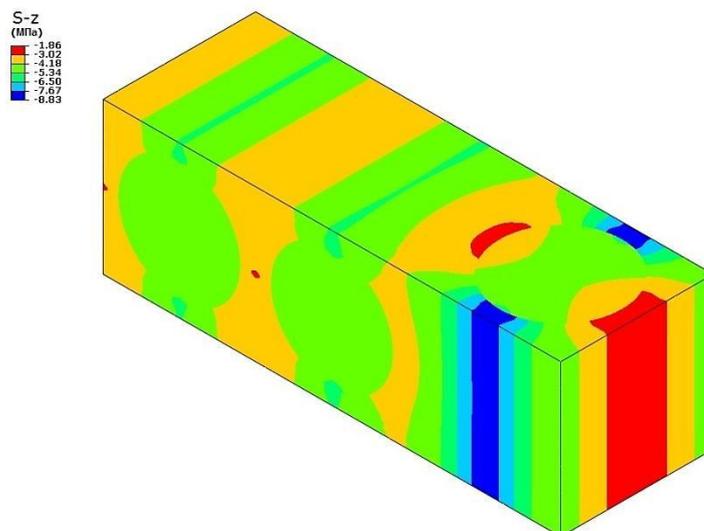


Рис. 3.45. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=799\text{ см}$ - $T=20$).

На рис. 3.10–45 представлены поля микроскопических напряжения в ПОЭ в трех различных зонах по толщине цилиндра ($r=101\text{cm}$, $r=117\text{cm}$ и $r=134\text{cm}$) в центре цилиндра (по длине) и в концах до температуры гелеобразования после отверждения и в конце процессе охлаждения (при комнатной температуре).

Из результатов анализа микронапряжений (см. рис. 3.10–45) видно, что максимальные радиальные микронапряжения переходят в середину толщины цилиндра и из-за концентрации напряжений в полимерной матрице, величина максимальных радиальных микронапряжений в несколько раз превышает макронапряжения в этом месте и достигает более 4 МПа до температуры гелеобразования $T = 90^\circ\text{C}$. На этом этапе прочность полимера при растяжении очень мало и не превышает 10 МПа.

Из рис. 3.11 видно что, максимальные окружные растягивавшие микронапряжения возникают во внутренней поверхности цилиндра. Здесь видно что, основную нагрузку несут продольные волокна (по направление θ) и окружные микронапряжения в волокнах примерно в 20 раза выше, чем окружные микронапряжения в матрице и достигает 40 МПа, и в полимерной матрице до 2 МПа. В некоторых местах представительного объёмного элемента из-за концентрации напряжений рядом осевых волокон в полимерной матрице растягивавшие микронапряжение достигают до 15 МПа. Это из-за того, что большую часть растягивающей нагрузки берут на себя волокна.

Максимальные окружные сжимающие микронапряжения возникают во внешней поверхности цилиндра. В этом месте сжимающие микронапряжения в продольных волокнах достигает более 42 МПа и в полимерной матрице до 2 МПа, хотя в некоторых местах представительного объёмного элемента из-за концентрации напряжений рядом осевого волокна, в полимерной матрице сжимающие микронапряжение достигают до 15 МПа, и это может привести к локальным дефектам.

Из результатов анализа видно, что изменение радиальных и окружных микронапряжений и макро напряжений по длине цилиндра мало, но осевые остаточные напряжения меняется не только по толщине, но также по длине цилиндра. Из рис. 3.9 видно, что максимальные остаточные осевые макро напряжения возникают в середине цилиндра. Из рис. 3.12 видно, что максимальные растягивавшие осевые микронапряжения в ПОЭ возникают во внутренней поверхности цилиндра. Основную нагрузку несет осевое (поперечное) волокно (по направлению z). Таки образом осевые микронапряжения в ПОЭ волокне примерно в несколько раз выше, чем осевые микронапряжения в матрице и достигает 10 МПа.

Из рис. 3.28–45 видно что, максимальные радиальные микронапряжения (в середине толщина цилиндра) в конце процесса охлаждения $T = 20^\circ\text{C}$ в полимерной матрице и между волокнами достигают более 6 МПа (до 3 раза больше макро напряжений). Максимальные окружные растягивавшие микронапряжения тоже достигают до 66 МПа в волокнах. Хотя в этом этапе прочность полимерной матрицы достигает до максимального значения (около 50–60 МПа).

Далее на рис. 3.46–48 представлены график зависимости максимальных остаточных, макро напряжений σ_r , σ_θ и σ_z от времени в цилиндре в процессе отверждения и охлаждения для случая, когда существует непрерывный контакт между цилиндром и оправкой.

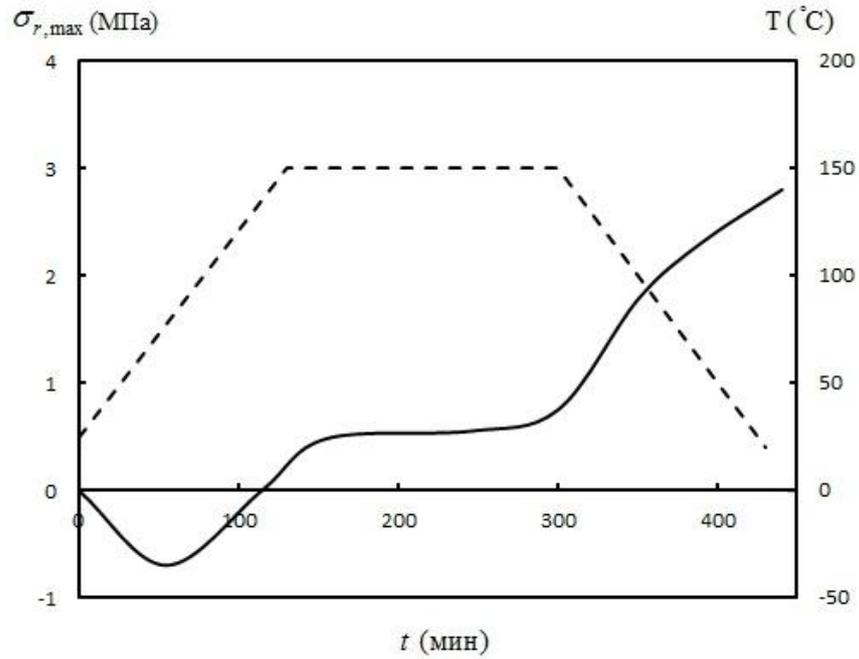


Рис. 3.46. Изменение температуры (штриховая кривая) и максимальных остаточных радиальных макронапряжений (сплошная кривая) от времени в процессе отверждения и охлаждения (для случая, когда существует непрерывный контакт между оправкой).

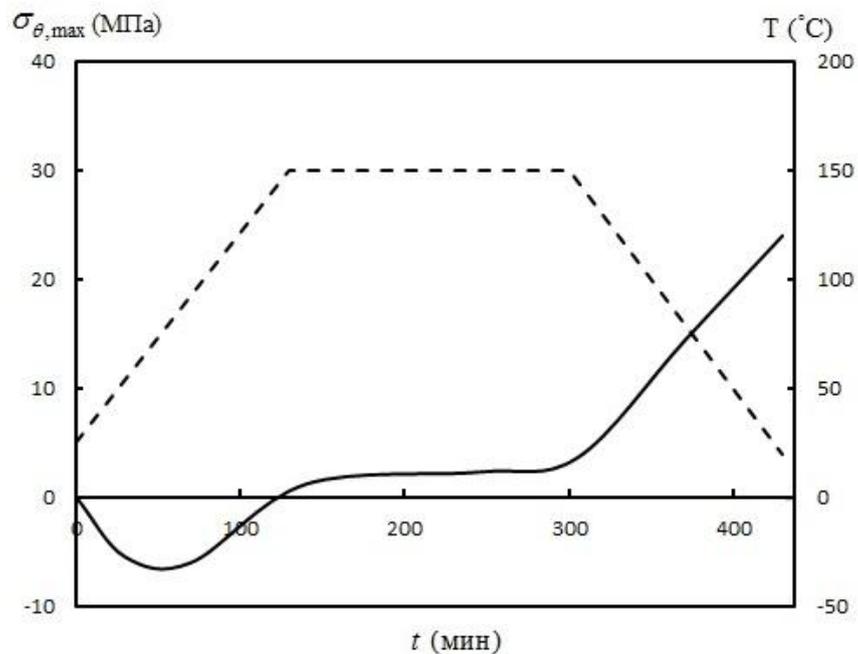


Рис. 3.47. Изменение температуры (штриховая кривая) и максимальных остаточных окружных макронапряжений (сплошная кривая) от времени в процессе отверждения и охлаждения (для случая, когда существует непрерывный контакт между оправкой).

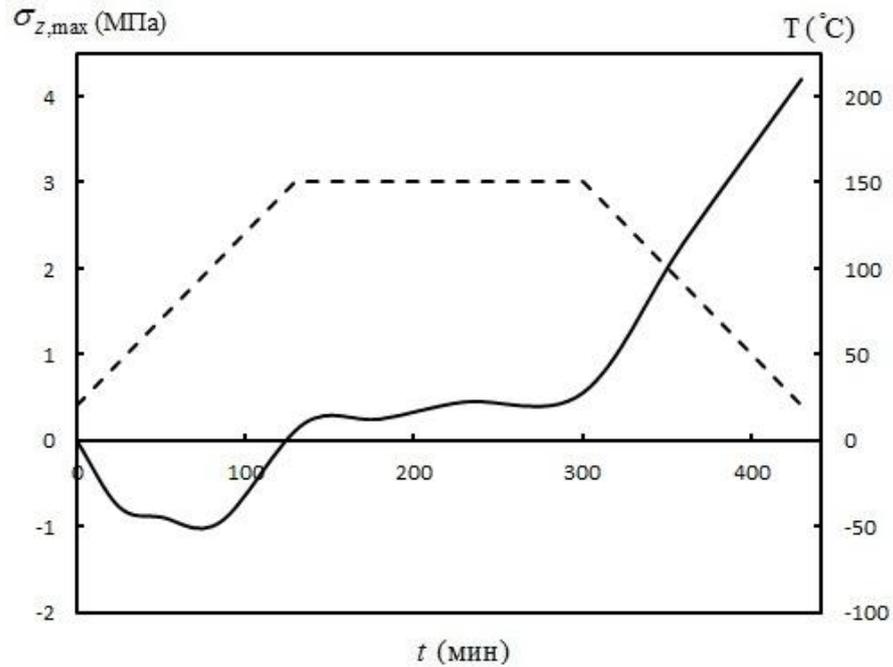


Рис. 3.48. Изменение температуры (штриховая кривая) и максимальных остаточных осевых макронапряжений (сплошная кривая) от времени в процессе отверждения и охлаждения (для случая, когда существует непрерывный контакт между оправкой).

Далее на рис. 3.49–57 представлены поля микронапряжений в трех различных зонах (по толщине цилиндра), в центре цилиндра $L=400$ см (по длине) и в концах, после завершения процесса отвердевания. На рис. 3.58–66 представлены поля микронапряжений в конце процесса создания (после охлаждения), для случая, когда оправка не приклеена к намотанному на нее композитному толстостенному цилиндру.

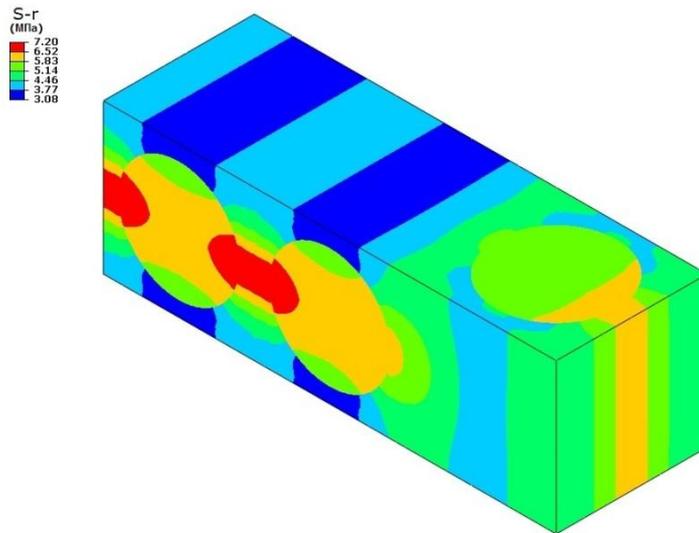


Рис. 3.49. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

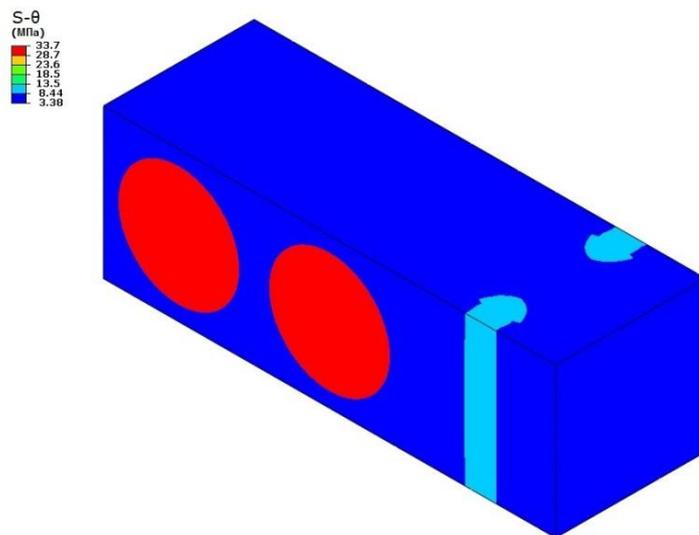


Рис. 3.50. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

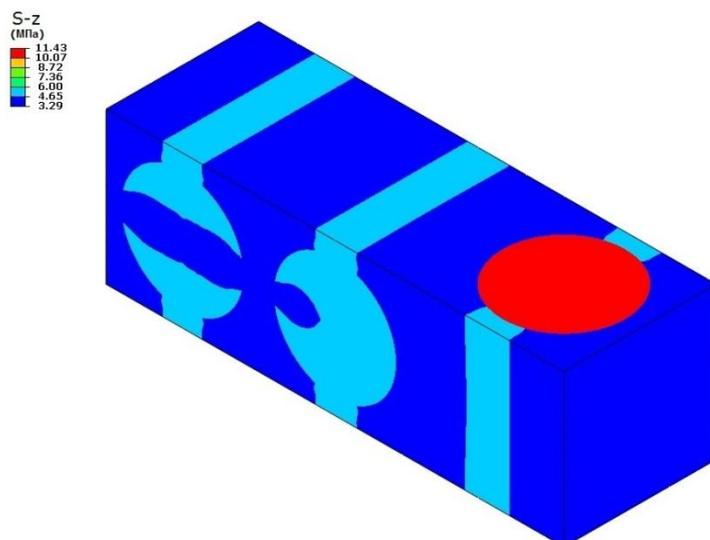


Рис. 3.51. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

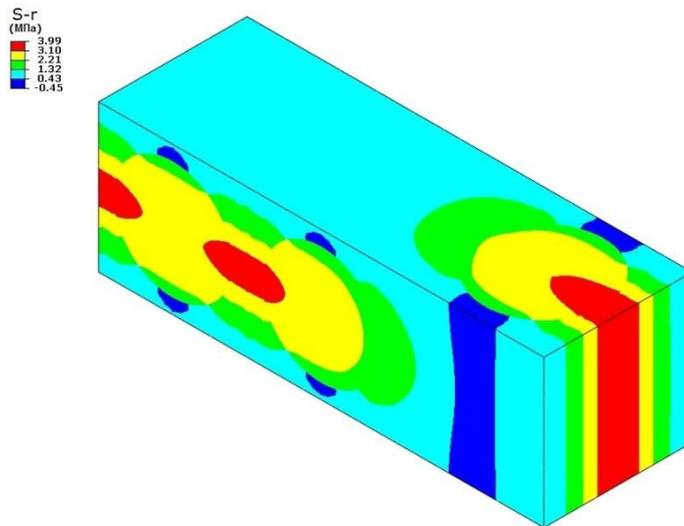


Рис. 3.52. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

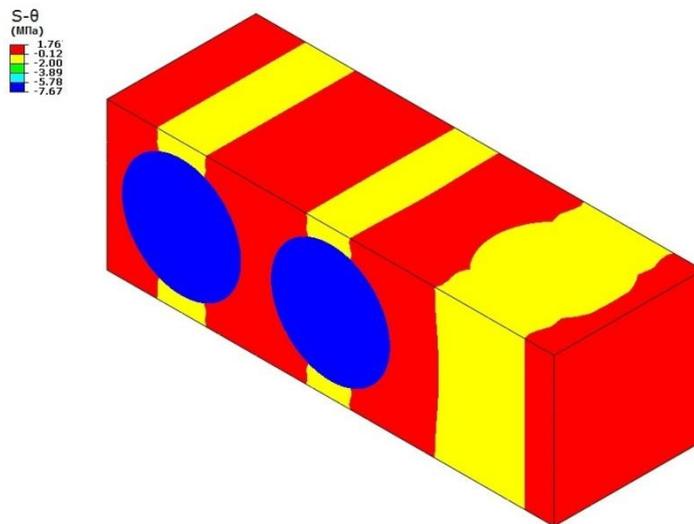


Рис. 3.53. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

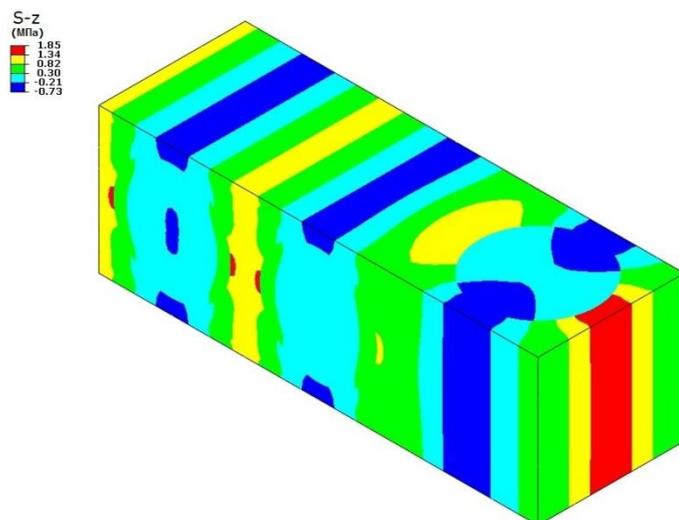


Рис. 3.54. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

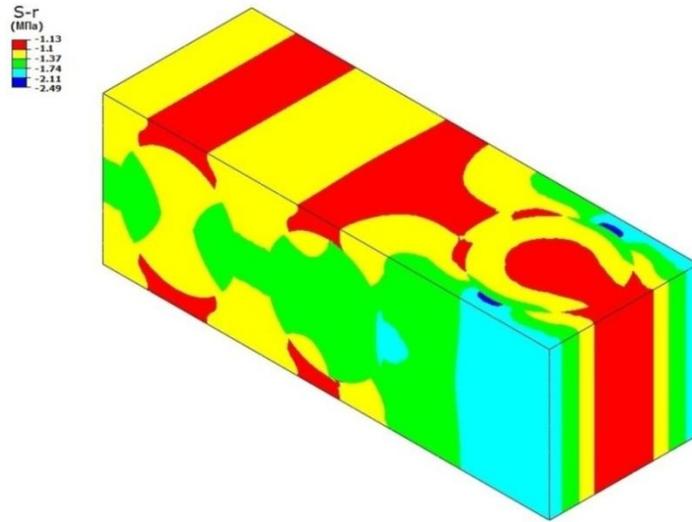


Рис. 3.55. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

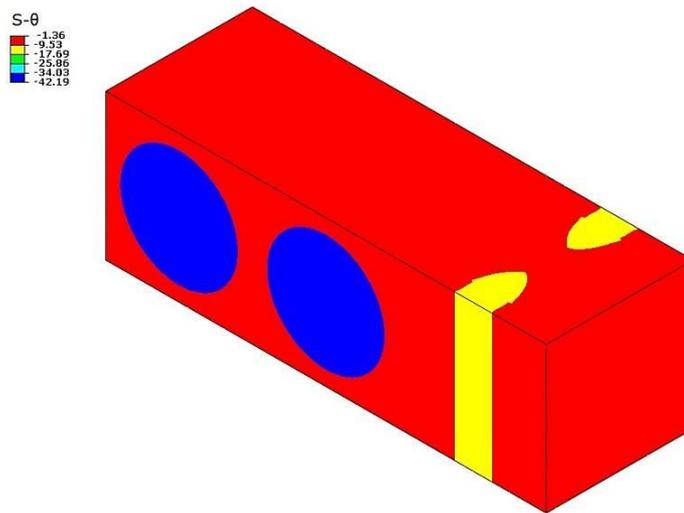


Рис. 3.56. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

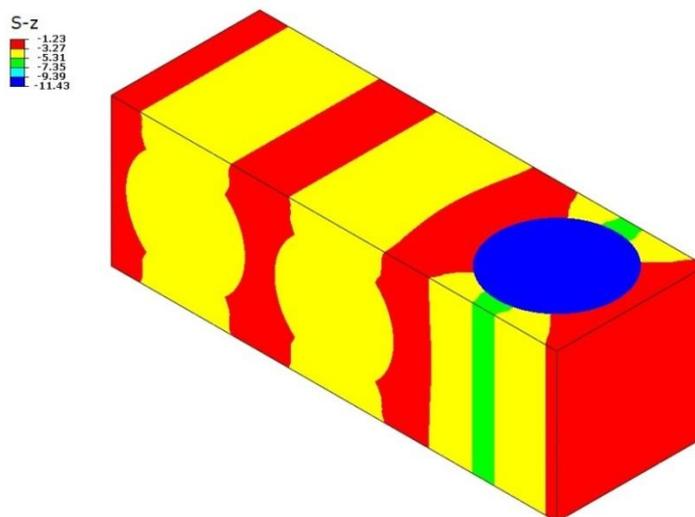


Рис. 3.57. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=90$).

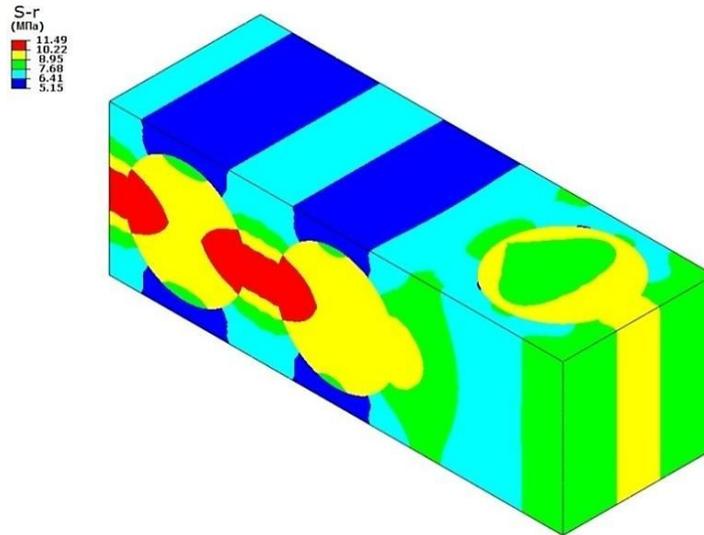


Рис. 3.58. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=400$ см - $T=20$).

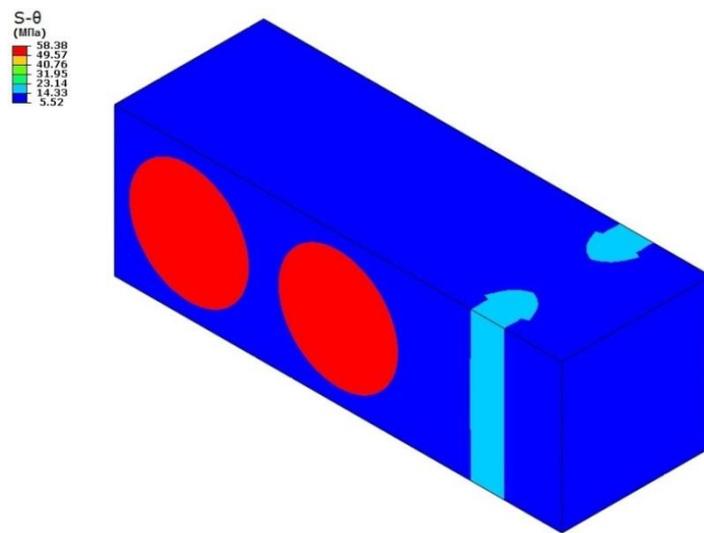


Рис. 3.59. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=400$ см - $T=20$).

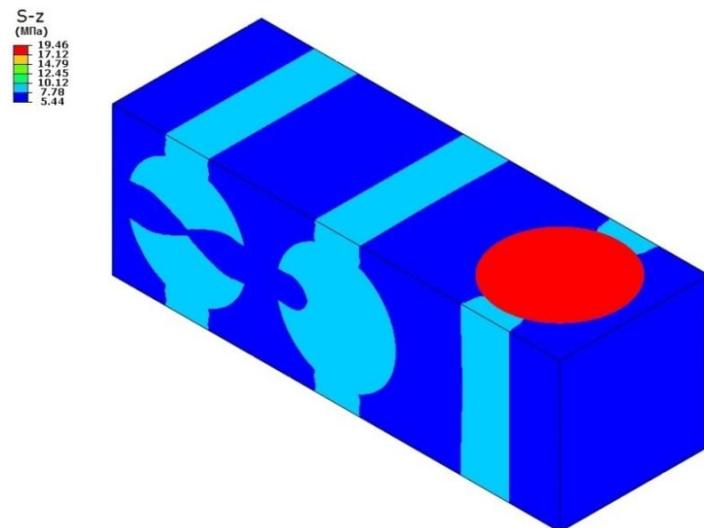


Рис. 3.60. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=101$ см, $L=400$ см - $T=20$).

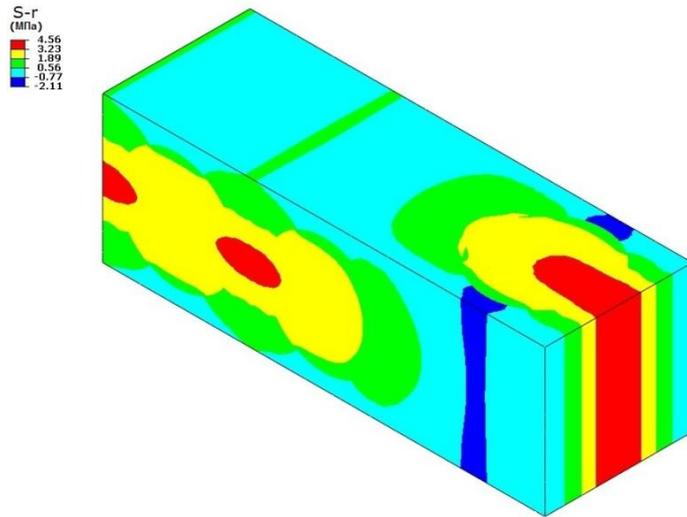


Рис. 3.61. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

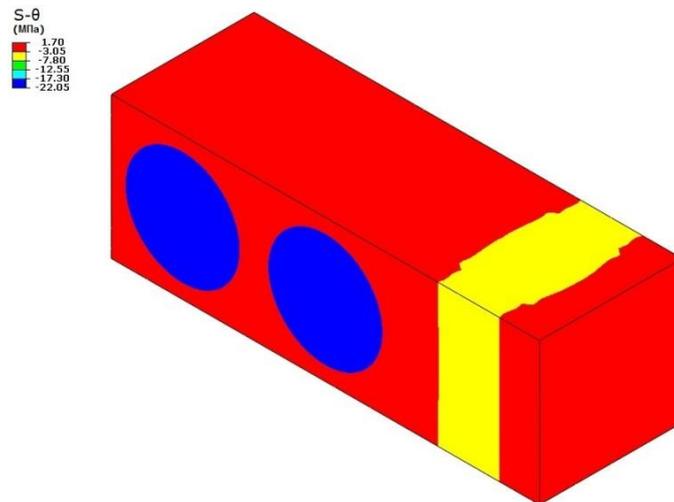


Рис. 3.62. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

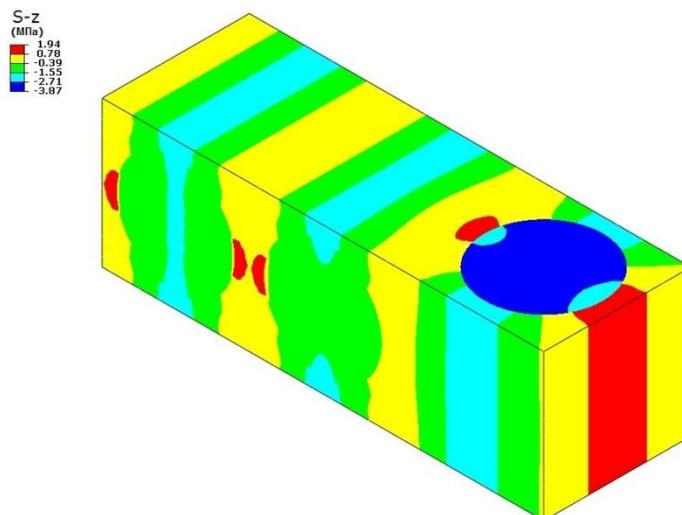


Рис. 3.63. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=117\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

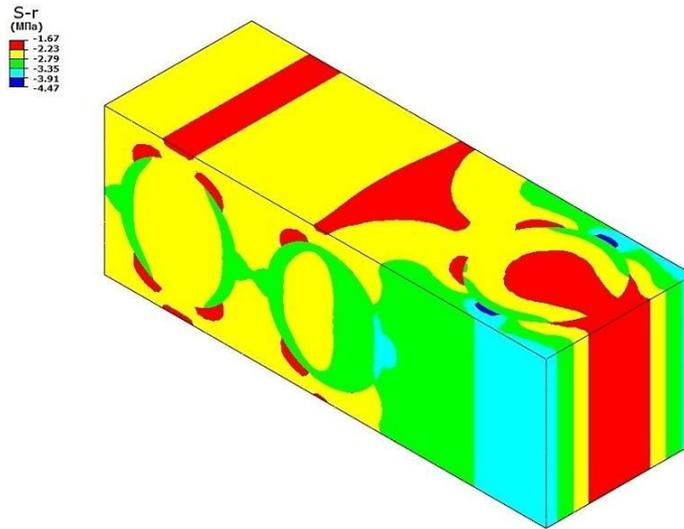


Рис. 3.64. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

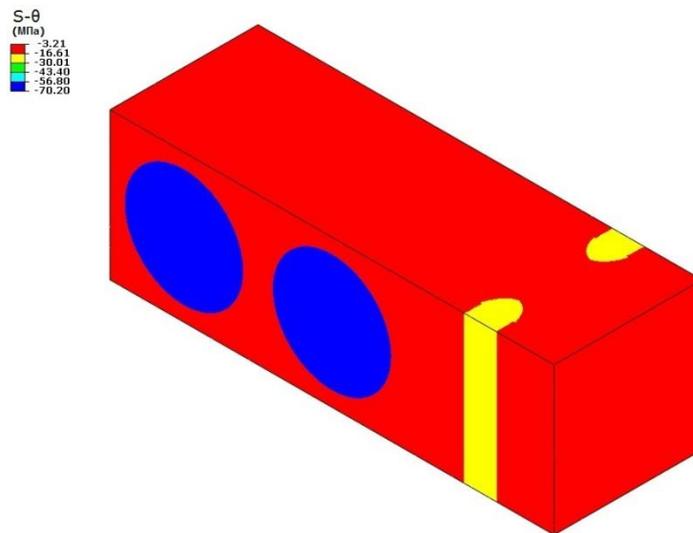


Рис. 3.65. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

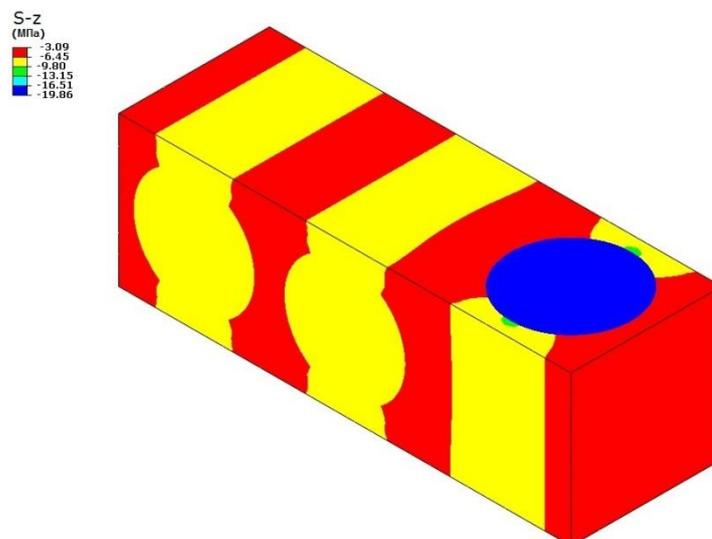


Рис. 3.66. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$, $L=400\text{ см}$ - $T=20$).

Из результатов расчёта макронапряжений, видно что, для случая когда, когда существует непрерывный контакт между оправкой, из-за механического взаимодействия между оправкой и изделием, максимальные растягивавшие радиальные остаточные макронапряжения возникают, на 30% больше по сравнению с предыдущим случаем и достигают около 2.8 МПа. В этом случае максимальные радиальные макронапряжения переходят в границе между оправкой и цилиндром. Коэффициент температурного расширения материала оправки (сталь) по окружности больше коэффициента температурного расширения композита по окружности, поэтому оправка при охлаждении хочет сократиться больше и из-за этого между оправкой и цилиндром возникают растягивавшие радиальные напряжения. Однако влияние оправки на возникновение максимальных окружных и осевых растягивавших макронапряжений очень мало.

Из результатов анализа микронапряжений в ПОЭ для этого случая видно, что величина максимальных радиальных микронапряжений достигает более 7.2 МПа до температуры гелеобразования $T=90$ С и в конце процесса охлаждения максимальных радиальных микронапряжений достигает до 12 МПа.

3.3 Толстостенный кокон под действием внешнего давления

Далее рассматривается напряжено-деформированного состояние в толстостенном коконе (корпуса высокого давления) состоит из толстостенного намоточного цилиндра в середине с полусферическими заглушками по торцам из титана, под действием нагрузки с учетом остаточных напряжений возникающих в процессе изготовления композиционного цилиндра.

Здесь предполагается, что это кокон разработан для сопротивления гидростатического внешнего давления, до 65 МПа (эквивалентное глубина 6500 тысяча метров).

На рис. 3.67–69 графически показаны распределение макронапряжений в коконе при внешнем давлении 65 МПа.

На рис. 3.70–72 представлены зависимости радиальных, окружных и осевых макронапряжений от толщины (по радиусу) в середине длина кокона при внешнем давлении 65 МПа.

На рис. 3.73–78 представлены поля микронапряжения в ПОЭ в $r=101\text{см}$ и $r=134\text{см}$ в середине длина кокона. Далее на рис. 3.79–84 представлены поля микронапряжения в ПОЭ с учётом остаточных температурных напряжений, возникающих в процессе создания.

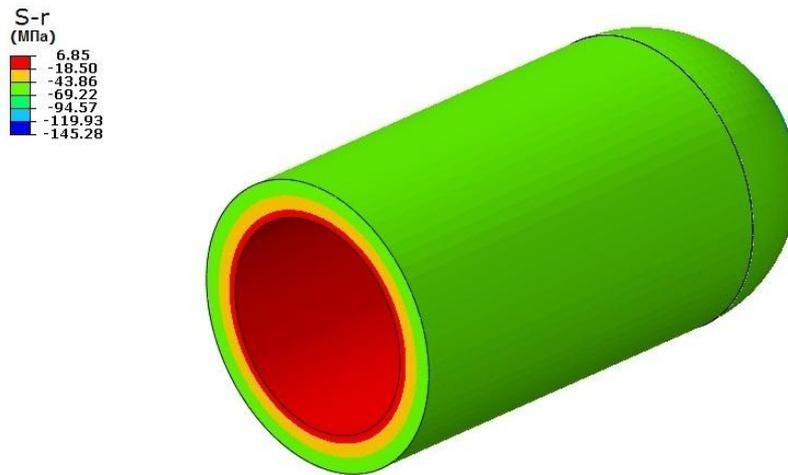


Рис. 3.67. Распределение радиальных макронапряжений в коконе при внешнем давлении.

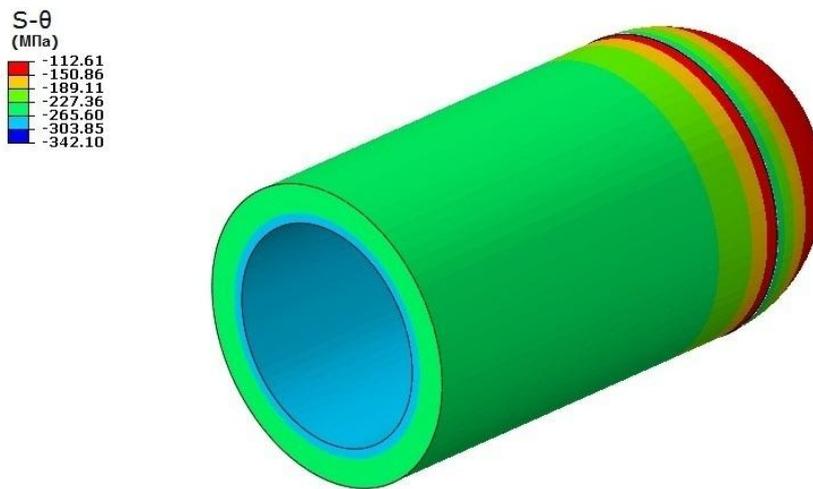


Рис. 3.68. Распределение окружных макронапряжений в коконе при внешнем давлении.

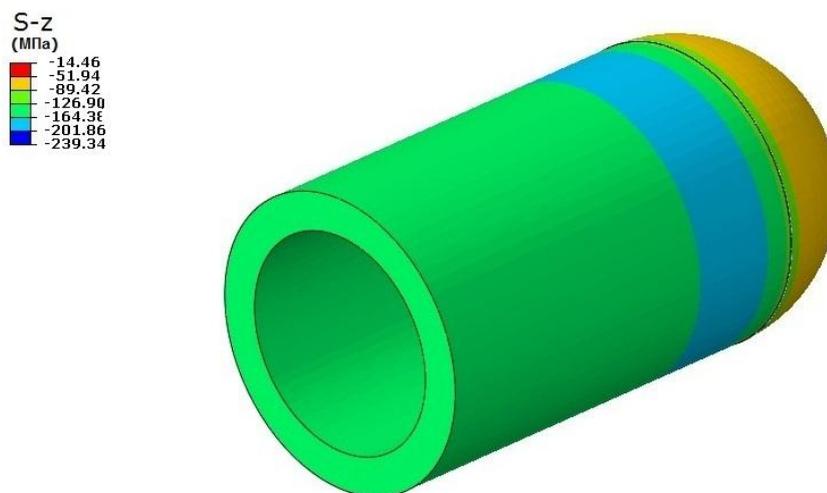


Рис. 3.69. Распределение осевых макронапряжений в коконе при внешнем давлении.

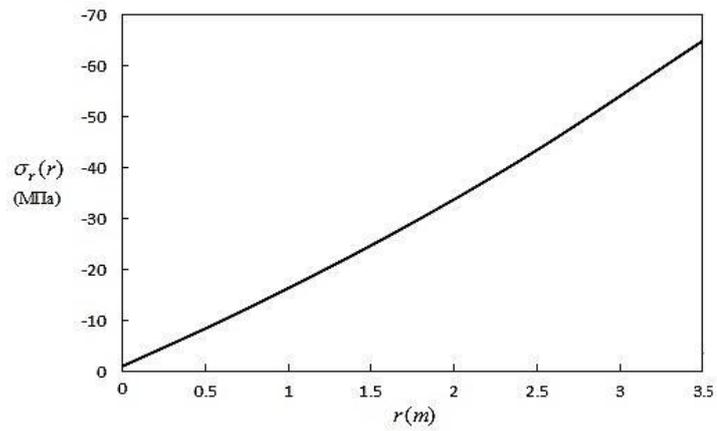


Рис. 3.70. Зависимости радиальных макронапряжений σ_r от толщины (по радиусу) в середине длина кокона при внешнем давлении 65 МПа.

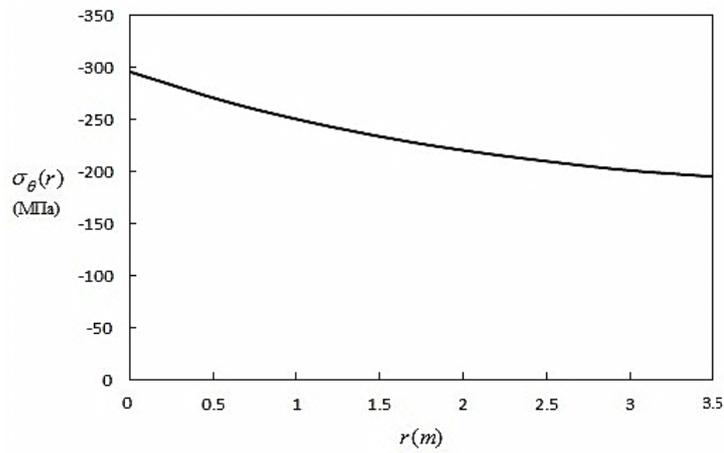


Рис. 3.71. Зависимости окружных макронапряжений σ_θ от толщины (по радиусу) в середине длина кокона при внешнем давлении 65 МПа.

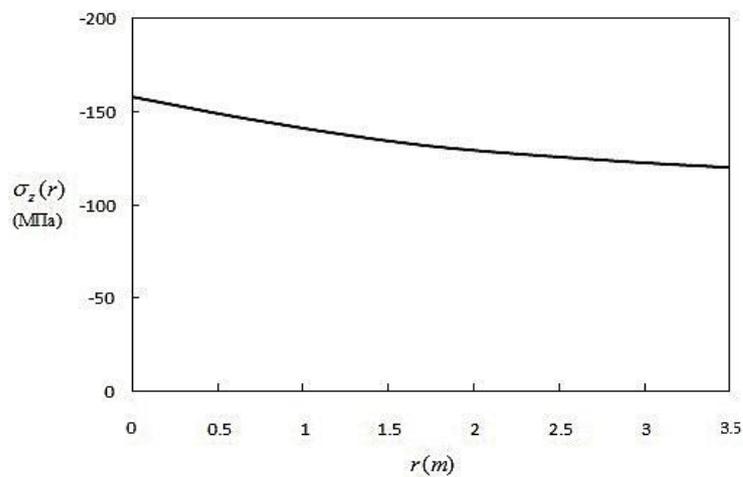


Рис. 3.72. Зависимости осевых макронапряжений σ_z от толщины (по радиусу) в середине длина кокона при внешнем давлении 65 МПа.

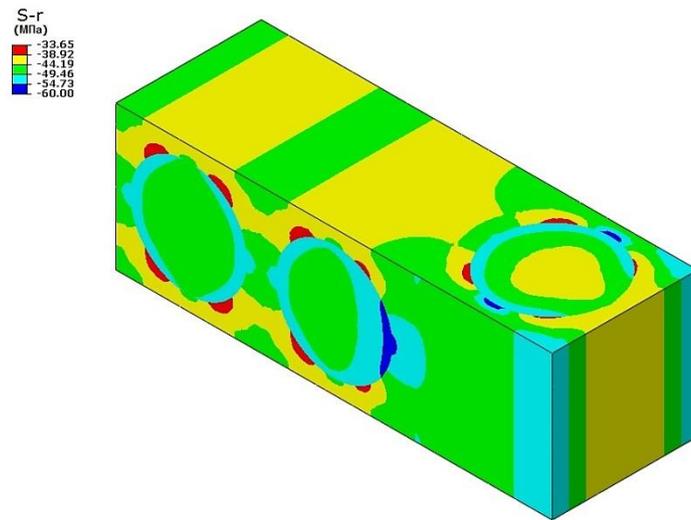


Рис. 3.73. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$).

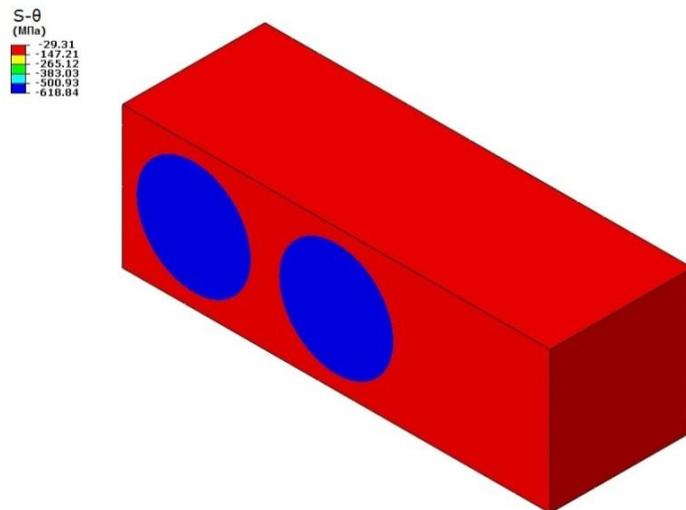


Рис. 3.74. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$).

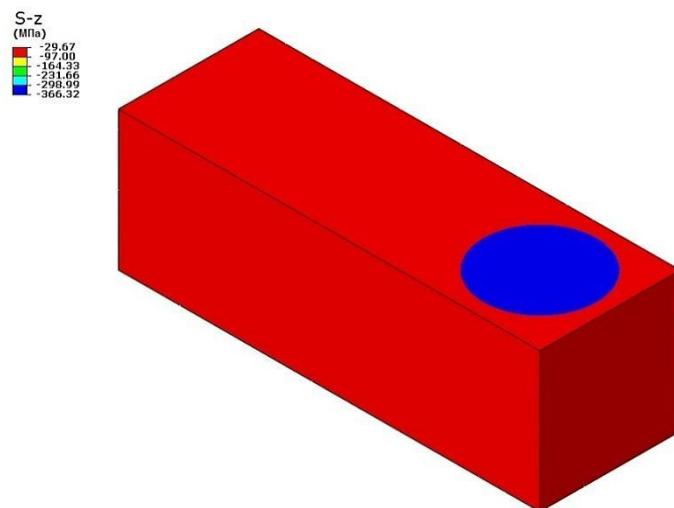


Рис. 3.75. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=101\text{см}$).

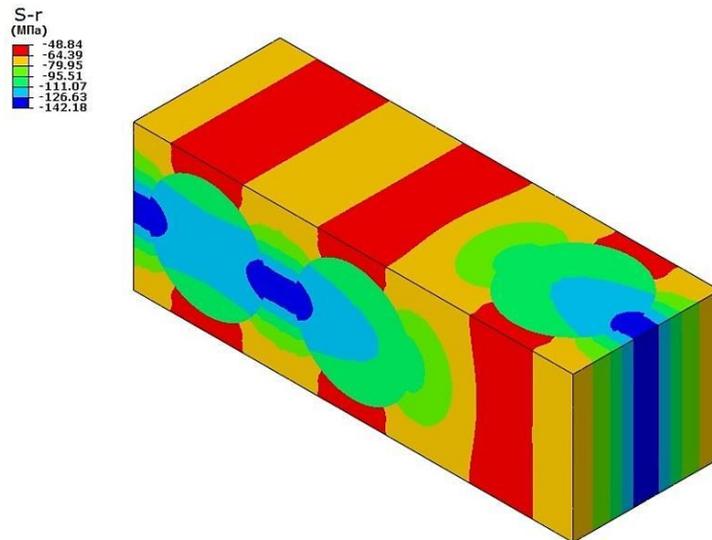


Рис. 3.76. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$).

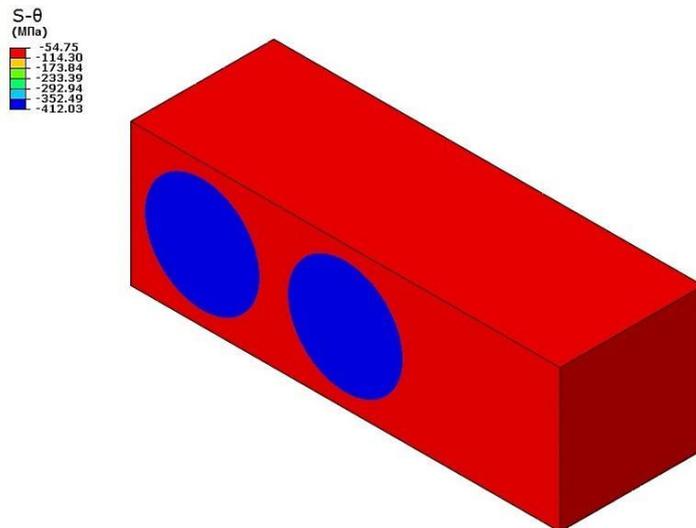


Рис. 3.77. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$).

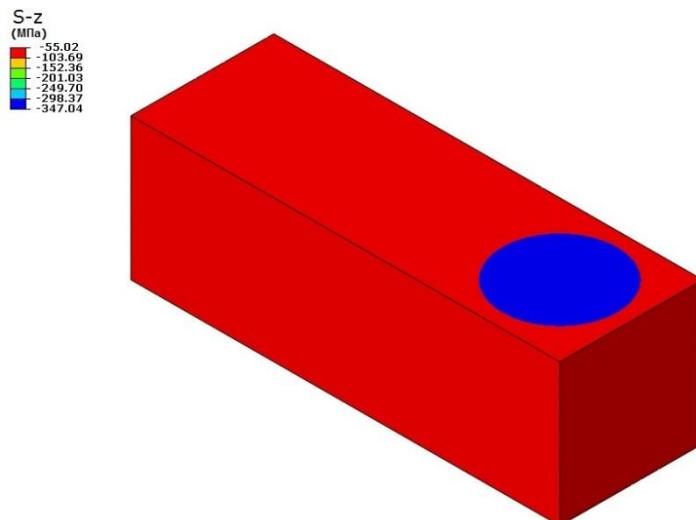


Рис. 3.78. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ ($r=134\text{см}$).

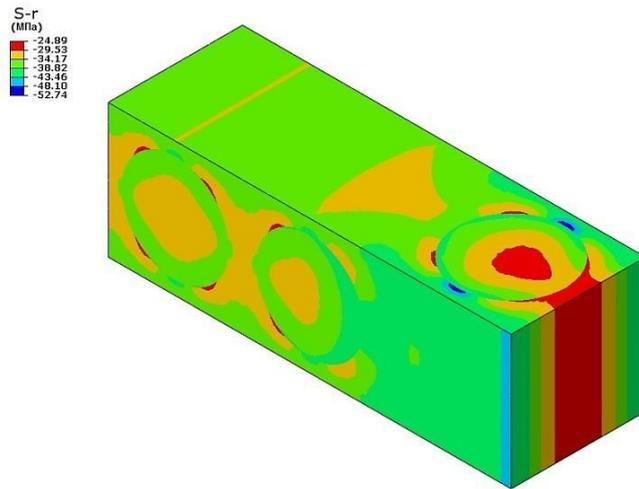


Рис. 3.79. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ с учётом остаточных напряжений ($r=101\text{см}$).

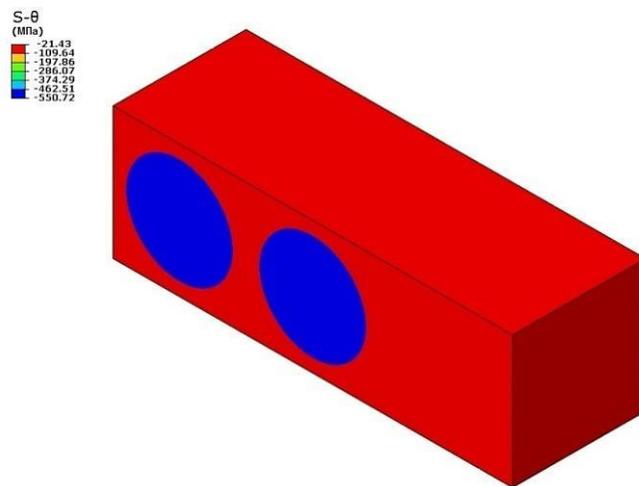


Рис. 3.80. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ с учётом остаточных напряжений ($r=101\text{см}$).

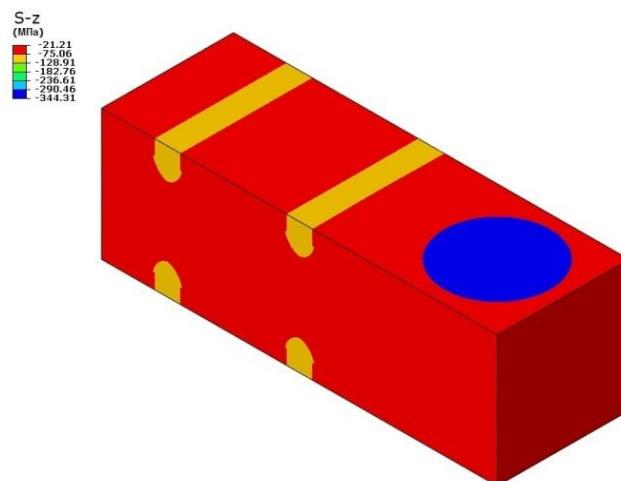


Рис. 3.81. Распределение осевых микронапряжений в ПОЭ с учётом остаточных напряжений ($r=101\text{см}$).

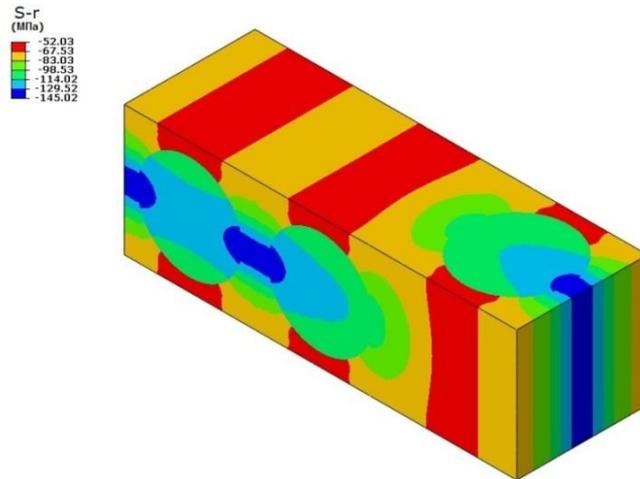


Рис. 3.82. Распределение радиальных микронапряжений в ПОЭ с учётом остаточных напряжений ($r=134\text{см}$).

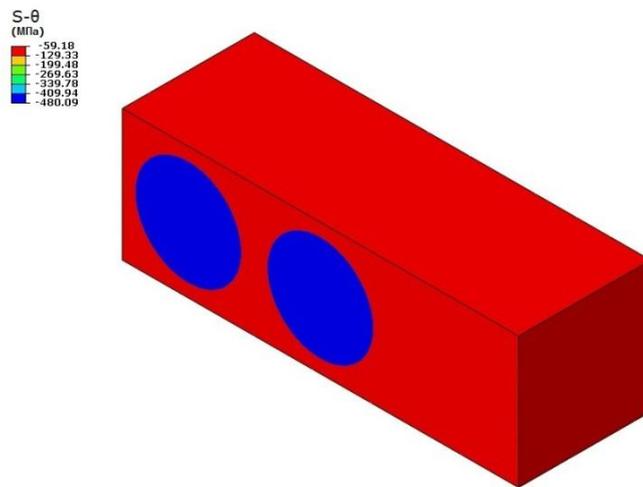


Рис. 3.83. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ с учётом остаточных напряжений ($r=134\text{см}$).

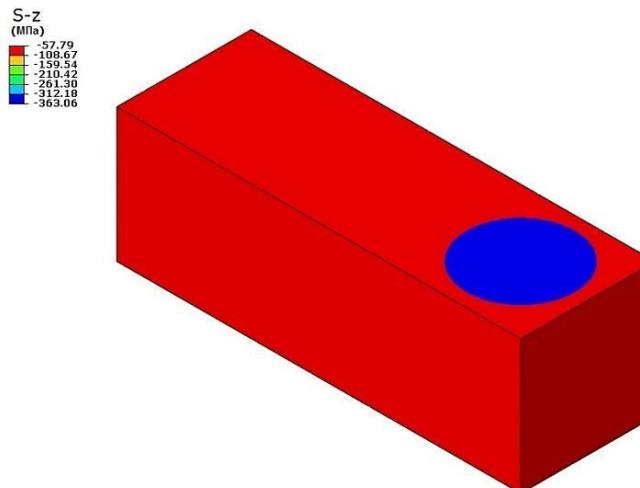


Рис. 3.84. Распределение окружных микронапряжений в ПОЭ с учётом остаточных напряжений ($r=134\text{см}$).

3.4. Обсуждение результатов

На рис. 3.4 изображено изменение температуры и максимальных радиальных остаточных, макронапряжений σ_r в цилиндре при создании изделия (в процессе отверждения и охлаждения). Как показано на рис. 3.4 на начале стадии отверждения из-за анизотропии коэффициента температурного расширения в изделии возникают сжимающие радиальные напряжения. В дальнейшем начинается химической усадки полимера, и знак радиальных напряжений определяется соотношением величины температурного расширения и химической усадки. На стадии охлаждения в цилиндре возрастают растягивавшие радиальные макронапряжения из-за увлечения жесткости материала и температурной усадки.

На рис. 3.46–48 изображено изменение температуры и максимальных радиальных остаточных, макронапряжений для случая когда, существует непрерывный контакт между оправкой и композитом и для случая когда, оправка не приклеена к намотанному на нее композитному толстостенному цилиндру. Из рис. 3.46 видно что, растягивавшие радиальные макронапряжения превышают растягивавшие радиальные макронапряжения для случая, когда оправка не приклеена к композиту.

Таким образом, большую часть растягивавшие макронапряжения возникают в процессе охлаждения. Хотя бы, большую опасность для монолитности цилиндра представляют растягивавшие напряжения, возникавшие на стадии отверждения и до точки и температуры гелеобразования, когда механические характеристики материала и трансверсальная прочность очень малы.

Далее на рис. 3.70–72 графически показаны распределение макронапряжений в середине толстостенного кокона (по длине) при внешнем давлении 65 МПа с учетом остаточных макронапряжений возникающих при создании композиционного цилиндра. Здесь максимальные сжимающие радиальные макронапряжения возникают во внешней поверхности кокона, и максимальные сжимающие окружные макронапряжения возникают во

внутренней поверхности кокона, и достигает до 300 МПа. В этом случае, самая опасная зона находится во внешней поверхности кокона. Из результатов анализа микронапряжений на рис. 3.82 видно что, во внешней поверхности кокона, сжимающие радиальные макронапряжения в полимерной матрице, в некоторых местах между волокнами возникают более 140 МПа и достигают до сжимающего предела текучести полимера. Из рис. 3.80 видно что, во внутренней поверхности кокона (где возникают максимальные сжимающие окружные и осевые макронапряжения) окружные сжимающие микронапряжения в волокнах достигают до 550 МПа, хотя это ниже предела текучести волокна, но такие окружные напряжения сжатия, внутренние слои могут перевести к потере устойчивости волокон и наконец, расслаиванию кокона.

Из результатов расчётов видно, что, во внутренней поверхности цилиндра в процессе изготовления цилиндра возникают максимальные остаточные растягивающие напряжения, а под внешним давлением возникают максимальные сжимающие механические напряжения. Следовательно, остаточные технологические напряжения являются благоприятными и компенсируют часть из механических радиальных и окружных напряжений.

ГЛАВА.4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В третьей главе представлены результаты расчётов остаточных и механических напряжений в толстостенном намоточном цилиндре из армированного полимера, и затем в коконе на макро– и микроуровне с использованием, нелинейного численного многомасштабного алгоритма.

Кокон состоит из намоточного цилиндра в середине с полусферическими заглушками из титана. В начале, оценили температурные остаточные напряжения, возникающие в намоточном цилиндре из стеклопластика в процессе отверждения и охлаждения. Хотя механическое поведение термореактивных полимеров в процессе отверждения полностью не изучено и поэтому оценить остаточные напряжения при отверждении с большой точностью вряд ли возможно. В первом случае задача решалась для случая, когда оправка не приклеена к намотанному на нее композитному толстостенному цилиндру, и во втором случае, когда существует непрерывный контакт между оправкой и намотанным цилиндром. В экспериментах часто уже в начале процесса охлаждения наблюдается отслоение изделий от металлической оправки.

Результаты расчётов макронапряжения МКЭ показали что, остаточные растягивавшие радиальные макронапряжения в ходе процесса изготовления намоточного цилиндра не превышает 3 МПа и это мала и существенно меньше трансверсальной прочности намоточного композита при нормальной температуре, но здесь самые опасные остаточные напряжения для монолитности возникают до температуры гелеобразования полимера. Прочность полимера в этой температуре очень мала.

Расчеты остаточных макронапряжений показали что, если величина химической усадки превышает температурное расширение на стадии нагрева, то в цилиндре возникают растягивавшие радиальные макронапряжения в процессе отверждения. Таким образом, чем меньше коэффициента химической усадки

полимера, тем меньше возникают остаточные растягивавшие радиальные напряжения в опасном этапе.

Коэффициент температурного расширения оправки также влияет на возникновения остаточных напряжений в изделии. Уменьшение КТР оправки влияет благоприятно с точки зрения уместения растягивавших напряжений.

Результаты расчётов микронапряжения в представительном элементе объема композита показали что, из-за значительной концентрации напряжений в матрице, радиальные микронапряжения в некоторых местах в полимере возникают до 3 раза больше чем макронапряжений в той зоне и могут быть перевести к локальным дефектам. Кроме того, в волокнах, близи внешней поверхности цилиндра, возникают огромные сжимающие напряжения (в несколько раз больше чем срединных напряжений) которые могут перевести к потере устойчивости слоев волокна [40] и наконец, расслаиванию изделия.

Так как, для прогноза остаточных температурных напряжений в намоточных изделиях из армированных полимеров, кроме оценки макронапряжений, а также необходимо сделать расчёты на микроуровне (методом многомасштабного анализа) и восстанавливать, и оценить поля микронапряжений в опасных зонах.

Таким образом, в результате изучения кинетики напряженно-деформированного состояния толстостенного цилиндра из армированного полимера на микро и макроуровнях можно прийти к выводу, что наибольшую опасность представляют растягивающие напряжения, возникающие на микроуровне, т.е. на структурном уровне взаимодействия армирующего волокна и полимерного связующего.

Ещё один важный фактор при создании толстостенного композиционного кокона является, влияние масштабного фактора на прочность анизотропных намоточных изделий из армированного непрерывными стеклянными волокнами

эпоксидного полимера (в данном случае масштабными факторами являются диаметр и толщина колец).

Обычно под масштабными факторами подразумевают поверхность и объем исследуемого объекта. В соответствии со статистической теорией прочности принято считать, что всякому твердому телу свойственно наличие некоторых дефектов, которые снижают «практическую» прочность по сравнению с теоретической. Они распределены в теле с некоторой объемной и поверхностной плотностью. С увеличением площади поверхности и объема деформируемого твердого тела растет вероятность появления «значимого» дефекта (например, опасной микротрещины). При слиянии микротрещин вместе в достаточно обширной зоне возникает предпосылка к макроразрушению. Но обычно на масштабный фактор ссылаются при недостаточной осведомленности о происходящих процессах.

Келлас и Мортон (1992), Джексон К.Э и Келлас (1993) исследовали влияние масштабного фактора на прочность армированных полимеров с продольно-поперечной структурой $[90^{\circ}_{2n}/0^{\circ}_{2n}]_s$. И проводились эксперименты на 4 образцах. Они показали, что с увлечением размера образца в 4 раза прочность уменьшается на 17% [72,65].

При создании толстостенного намоточного цилиндра из стеклопластика в изделии возникают растягивавшие радиальные остаточные напряжения, и максимальные растягивавшие окружные напряжения возникают во внутренней поверхности цилиндра. Но при действии внешней механической нагрузке (оболочка под внешним давлением) радиальные напряжения по всей толщины на сжатие и максимальные сжимающие окружные напряжения возникают во внутренней поверхности цилиндра. Таким образом, при получения изделия монолитными, эти остаточные напряжение могут компенсировать часть механических нагрузок и они, благоприятные для проектирования толстостенных оболочек, под действием внешнего давления.

Исследования напряженно-деформированного состояния на микроуровне свидетельствуют о принципиальной причине, препятствующей получению больших толщин намоточных цилиндров продольно-поперечной намотки. Поэтому способы понижения растягивающих радиальных напряжений на полимерном связующем заключаются в понижении усадки и коэффициента линейного температурного расширения полимера. Коэффициента линейного температурного расширения полимера желательно приближать к КЛТР армированных волокон.

На основании полученных в диссертации результатов по исследованию кинетики напряженно-деформированного состояния толстостенных анизотропных оболочек из армированного полимера можно сделать следующие

ВЫВОДЫ:

- разработана аналитическая асимметричная модель для определения микронапряжений в однонаправленных намоточных цилиндрах.
- расчеты остаточных напряжений в процессе охлаждения однонаправленного намоточного цилиндра показывают, что радиальные напряжения в дискретной модели (многослойный цилиндр, в котором чередуются тонкие слои стекла и полимера) значительно превышают напряжения в модели ортотропной сплошной среды. Они оказались близкими к микронапряжениям, что может существенно облегчить оценки опасных напряжений.
- для выяснения реально опасных микронапряжений в крупномасштабных элементах конструкций из армированных полимеров предложен двухуровневый подход для нахождения поля макронапряжений и микронапряжений в интересующих исследовательских подозрительных зонах.
- Разработан нелинейный численный многомасштабный (многоуровневый) метод решения для прогноза напряженно-деформированного состояния в

толстостенных намоточных оболочках из армированных полимеров (при создании и эксплуатации) на макро– и микроуровне.

- для описания неупругого поведения во времени полимерной матрицы в композите использовалось физически нелинейное дифференциальное уравнение связи Максвелла – Гуревича, хорошо зарекомендовавшее себя в описании механического поведения гомогенных и армированных полимеров.
- в расчетах учитывалась зависимость упругих и релаксационных констант от температуры и глубины отверждения.
- расчеты остаточных напряжений по модели сплошной анизотропной среды, когда константы материала определяются по широко известным формулам смеси, не отражают в полной мере сложное напряженное состояние толстостенных оболочек. Они способны отражать средние напряжения в композите и не могут передать локальную картину величин и распределения напряжений в матрице и волокне.
- величина максимальных растягивающих радиальных макро и микронапряжений, представляющих наибольшую опасность для монолитности, зависит от типа контакта (приклеена или нет) между оправкой и намоточным цилиндром.
- результаты двухмасштабного анализа показали, что величина микронапряжений, в некоторых зонах ПОЭ, в несколько раз превышает макронапряжения в этих зонах.
- наибольшую опасность представляют области растянутого состояния матрицы, являющегося следствием анизотропии на макроуровне плюс неоднородности на микроуровне.
- результаты расчетов, выполненные по методу сеток, близки к результатам, полученным по методу конечного элемента.
- вычисление напряжений на макро и микроуровнях приложимы к реальным элементам конструкций. В работе это продемонстрировано на трехмерной

модели кокона, состоящего из толстостенного намоточного цилиндра из армированного полимера и торцевых заглушек из титана.

- показано, что для кокона под действием внешнего давления, остаточные технологические напряжения являются благоприятными, так как компенсируют часть механических радиальных и окружных напряжений при эксплуатации.

В дальнейшем мы предлагаем некоторые идеи для ущемления остаточных растягивавших напряжений в процессе создания (холождения и отверждения) толстостенных намоточных оболочек из армированных полимеров, и получить их монолитными и без трещин:

- Для получения монолитного толстостенного цилиндра из армированных полимеров, натянутого на металлический лайнер, рекомендуется намотка и отверждение сравнительно тонкими слоями, поэтапным набором нужной толщины. Недостатком метода является снижение его эффективности с увеличением диаметра изделия
- Использование оправки с малым коэффициентом термического расширения. Например, при использовании сплава Инвар, остаточные растягивающие напряжения в изделии уменьшаются по сравнению с использованием оправки из алюминия [70]. Этот метод далеко не всегда применим, например, если оправка является лайнером.
- Оптимизация процесса отверждения и охлаждения:
 - Суть его в том, что внешняя поверхность цилиндра охлаждается быстро, а внутренняя поверхность медленно. В частности, он не позволил получить большие толщины цилиндров продольно – поперечной структуры армирования.
 - Отверждения на нагреваемой оправке (это приводит к гелеобразованию, начиная с внутренней стороны цилиндра). Сначала усадка внутренних слоев цилиндра, затем отделение оправки от

композита, предупреждая возникновение значительных межслойных растягивающих напряжений в анизотропном цилиндре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Берлин, С.А. Вольфсон, В.Г. Ошмян, Н.С. Ениколопов. Принципы создания композиционных полимерных материалов. Изд-во «Химия», М., 1990, 238 с.
2. Афанасьев Ю.А., Екельчик В.С., Кострицкий С.Н. “Температурные напряжения в толстостенных ортотропных цилиндрах из армированных полимерных материалов при неоднородном охлаждении//Механика композитных материалов,” 1980, № 4, С. 651-660.
3. Бабич В. Ф., Рабинович А. Л. Влияние температуры на механические характеристики некоторых эпоксидных связующих // Физико-химия и механика ориентированных стеклопластиков. 1967. С. 150–153.
4. Бабич В.Ф. Исследование влияния температуры на механические характеристики жесткихсетчатых полимеров: дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1966. 125 с.
5. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1984. С– 16.
6. Боголюбов Н. Н., Мптрополский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.- М.: Наука, 1974, 408 с.
7. Болотин В.В., Благонадежин В.Л., Варушкин Е.М., Перевозчиков В.Г. Остаточные напряжения в намоточных элементах конструкций из армированных пластиков. М.: Изд. ЦНИИ информации, 1977, 136 с.
8. Бутузов В.Ф, Васпельева А.Б, Федорюк М.В, Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Итого науки, Матем. анализ,1967,С.7-73.
9. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.

10. Гуревич Г.И. Деформируемость сред и распространение сейсмических волн. –М., Наука, 1974. – 482 с.
11. Дубовицкий А.Я., Турусов Р.А., Коротков В.Н., Рогозинский А.К. Алгоритм оптимизации и оптимальные режимы охлаждения толстостенных изделий из композитных материалов//Механика композитных материалов. №2, 1984, С.334-340.
12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике — М.: Мир, 1975. 1975. — 543 с.
13. Коротков В.Н. ,Турусов Р.А., Рогозинский А.К., Э.А. Джавадян. Технологические напряжения при отверждении цилиндрических изделий из полимерных композиционных материалов//Механика композитных материалов,» №1, 1986 С.118-123.
14. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. — М.: Мир, 1982. – 336 с.
15. Кузмак Г.Е. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. ПММ, 1959, 23, в. 3,С. 515-526.
16. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Изд-во «Наука». Главная редакция физико-математической литературы.1977, – 416 с.
17. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
18. Мемарианфард М., Турусов Р.А., Мемарианфард Х. Численные и экспериментальные исследования монолитности толстостенной анизотропной оболочки // Вестник МГ СУ. 2016. № 7. С. 36—45.
19. Мемарианфард Х., Турусов Р.А, Многомасштабный анализ остаточных напряжений, возникающих в процессе охлаждения однонаправленных толстостенных намоточных цилиндров//МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ. — 2016. — Т. 52, № .4 Июль — август. С. 737—750.

20. Мемарианфард Х., Турусов Р.А. Напряженно-деформированное состояние толстостенных намоточных цилиндров на макро-, мезо- и микроуровне при охлаждении//МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 577–590.
21. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969, 379 с.
22. Мптрополский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971, 440 с.
23. О. Зенкевич, И. Чанг. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред - М.: Недра, 1974.
24. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М., изд-во МГУ, 1984. 336 с.
25. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров. М. : Наука, 1970. – 481 с.
26. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М: Едиториал УРСС, 2003-С.37.
27. Турусов Р. А., Руабхи А. Капиллярная модель толстостенного намоточного цилиндра. Механика композитных материалов. 2014.Т. 50, № 1. С. 91–100.
28. Турусов Р.А. «Адгезионная механика. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ, 2015, 232 С.
29. Турусов Р.А., Дубовицкий А.Я., Коротков В.Н., Рогозинский А.К. Теория оптимизации режима охлаждения толстостенных изделий из композитных материалов //Механика композитных материалов. №6, 1982, С.1051—1055 .
30. Турусов Р.А., Коротков В.Н., Рогозинский А.К., Куперман А.М., Гаранин В.В. и др. Технологическая монолитность оболочек из полимерных

композитных материалов. Механика композитных материалов, №6, 1987, с.1072 – 1076.

31. Турусов Р.А., Коротков В.Н., Рогозинский А.К. Температурные напряжения в цилиндре из композитного материала в процессе его охлаждения и хранения //Механика композитных материалов. 1983. № 2. С. 290—295.

32. Турусов Р.А., Мемарианфард Х. Дискретная модель в анализе остаточных напряжений однонаправленных намоточных цилиндров из армированного пластика в процессе охлаждения // Вестник МГСУ. 2015. № 1. С. 27—35.

33. Языев Б.М., Андреев В.И., Турусов Р.А., Микитаев А.К. Некоторые задачи и методы механики вязкоупругой полимерной среды. – Ростов-на-Дону, РГСУ, 2009. – 209 с.

34. A.Reuss Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle Z Angew Math Mech 9:49-58 1929.

35. A.Yu. Sergeev , R. A. Turusov , N. I. Baurova, A. M. Kuperman, Stresses Arising During Cure of the Composite Wound on the Cylindrical Surface of an Element of Exhaust System. Mechanics of Composite Materials, July 2015, Volume 51, Issue 3, pp-321–332.

36. Aboudi, J., 1990. Micromechanical prediction of initial and subsequent yield surfaces of metal matrix composites. International Journal of Plasticity 6, 134–141.

37. Aboudi, J., Mechanics of Composite Materials, A Unified Micromechanical Approach. Elsevier Science Publishers, vol.29. 1991.328.

38. Adjovi Tchalla, Salim Belouettar, Ahmed Makradi, Hamid Zahrouni. An ABAQUS toolbox for multiscale finite element computation. Composites Part B: Engineering Volume 52, September 2013, Pages 323–333.

39. Alexander L. Kalamkarov; Marcelo A. Savi . Micromechanical modeling and effective properties of the smart grid-reinforced composites. J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng. vol.34 no.spe Rio de Janeiro 2012.

40. Allan S. Crasto 1 and Ran Y. Kim 1. The Effects of Constituent Properties. Compression Strength of Advanced. Groves SE, Highsmith AL. Compression Response of Composite Structures.1994.181.
41. Andersson B., Sjogren A., and Berglund L., “Micro- and mesolevel residual stresses in glass-fiber/vinyl-ester composites,” *Composites Science and Technology*, 2000, vol. 60, no. 10, C. 2011–2028.
42. Autar K. Kaw, “Mechanics of Composite Materials, Second Edition” CRC Press, Nov 2, 2005, 490 p.
43. Berger, H., Kari, S., Gabbert, U., Rodriguez-Ramos, R., Guinovart, R., Otero, J.A., Bravo-Castillero, J., 2005. An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites. *Int. J. Solids Struct.* 42, 5692–5714.
44. Bhaskar Patham and Xiaosong Huang, “Multiscale Modeling of Residual Stress Development in Continuous Fiber-Reinforced Unidirectional Thick Thermoset Composites,” *Journal of Composites*, vol. 2014, Article ID 172560, 17 pages, 2014. doi:10.1155/2014/172560.
45. Carl T. Herakovich *Mechanics of Fibrous Composites*, 1th edition. Wiley, November 27, 1997.
46. Daryl L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method* 5th Edition, Cengage Learning, 2011.804–805 .
47. Dongdong Wang , Lingming Fang and Pinkang Xie, “Multiscale Asymptotic Homogenization of Heterogeneous Slab and Column Structures with Three-Dimensional Microstructures”, *Handbook of Micromechanics and Nanomechanics*, Pan Stanford Pub. Pte. Ltd 2013.pp1067.
48. E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer Verlag, Berlin,1980.
49. Farage, Michèle Cristina Resende, Beaucour, Anne-Lise, Barra, Luis Paulo da Silva, Ke, Yang, Sanábio, Diogo Ferreira dos Santos, & Ferreira, Anna Paula Guida.

Multiscale modeling of the elastic moduli of lightweight aggregate concretes: numerical estimation and experimental validation. *Rem: Revista Escola de Minas*, 2009, 62(4), 455–462.

50. Fish, J. and Yu, Q. (2001), Multiscale damage modelling for composite materials: theory and computational framework. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 52: 161–191. doi:10.1002/nme.276.

51. G.A. Francfort. Homogenization and fast oscillations in linear thermoelasticity. In R. Lewis et al., editors, *Numerical Methods for Transient and Coupled Problems*, pages 382–392. Pineridge Press, Swansea, 1984.

52. Graham, D. (1995). Composite pressure hulls for deep ocean submersibles. *Composite Structures*, 32:331–343.

53. Graham, D. (1996). Buckling of thick-section composite pressure hulls. *Composite Structures*, 35:5–20.

54. H. Memarianfard, R. A. Turusov., A Multiscale Analysis of the Residual Stresses Occurring During Cooling of Thick-Walled Unidirectionally Filament-Wound Cylinders// *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 52, No. 4, September, 2016. pp 521–530.

55. Halpin *J.C.*, *Tsai S.W.* Effect of environment factors on composite materials // Air Force tech. rep. AFML-TR-67-423. June 1969. 62 p.

56. Hashin Z., and B. W. Rosen, (1964), "The elastic moduli of fiber-reinforced materials", *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, 31, 223-232.

57. Hashin Z., and Shtrikman, S., A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behavior of Multiphase Materials, *J Mech Phys Solids*, 11, 127–140, 1963.

58. Hashin, Z., The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials, *J Appl Mech*, *Trans ASME*, 84E, 1962, 143–150.

59. Hill, R. (1964) Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I, Elastic behaviour, *J. Mech. Phys. Solids* 12, 199–212.

60. Hoffman, J.D., Steven Frankel, Numerical Methods for Engineers and Scientists, Second Edition, CRC Press, 31 May 2001, 840.

61. Hughes, T. J. R., “Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Conduction,” Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, Vol. 10, No. 2, pp. 135–139, 1977.

62. Hui Wang, Yong-Peng Lei, Zhao-Ran Xiao & Li Chen, The Influence Of Packing Dimension On The Effective Thermal Properties Of Doubly-periodic Composites By Using Super Hybrid Finite Body Elements. WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014.56. pp 11.

63. Hyer, M.W. and Rousseau, C.Q., Thermally-Induced Stresses and Deformations in Angle-Ply Composite Tubes, J. Composite Materials, 1987, 21, 454–480.

64. J.N. Reddy, D.K. Gartling. The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics, Third Edition (Computational Mechanics and Applied Analysis) 3rd Edition. 2010, CRC Press. 524 p.

65. Jackson, K.E., Kellas, S., and Morton, J. (1992). Scale Effects in the Response and Failure of Fiber Reinforced Composite Laminates Loaded in Tension and Flexure. Journal of Composite Materials 26(18), pp. 2674–2705.

66. Jacob Aboudi, Mark-Jerzy Pindera. Micromechanics of metal matrix composites using the Generalized Method of Cells model (GMC) user's guide. NASA CR-190756. Virginia Univ.; Charlottesville, VA, United States. 1992.

67. James, M. L., Smith, G. M., and Wolford, J. C., Applied Numerical Methods for Digital Computation, 3rd ed., Harper & Row, New York, 1985.

68. Jerome T. Tzeng, prediction and experimental verification of residual stresses in thermoplastic composites. Journal of Thermoplastic Composite Materials April 1995. vol. 8 no. 2 163–179.

69. Jerome T. Tzeng. Viscoelastic Analysis of Composite Cylinders Subjected to Rotation, Journal of Composite Materials January 2002 vol. 36 no. 2 229–239.

70. Jocelyn M. Seng .Laminate Design. Handbook of Composites, Springer, 1998, pp 686–708.
71. Kaddour, A.S., Soden, P.D. and Hinton, M.J. (1998). Failure of ± 55 degree filament wound glass-epoxy composite tubes under biaxial compression. Journal of Composite Materials, 32 (18): 1618–1645.
72. Kellas, S., and Morton, J. (1992). Strength Scaling in Fiber Composites. AIAA Journal, Vol. 30, No. 4, April, pp. 1074-1080. (or see: NASA Contractor Report 4335, November, 1990).
73. Kim, Y.K. and White, S.R. Cure-Dependent Viscoelastic Residual Stress Analysis of Filament Wound Composite Cylinder, Mechanics of Composite Materials and Structures, 1998, 327–354.
74. Klaus-Jürgen bathe. Finite Element Procedures, 1st Edition. Prentice Hall, 1996.
75. Krishna s. Challagulla, Anastasis Georgiades and Alexander I. Kalamkarov. Asymptotic homogenization model for three-dimensional network reinforced composite structures. Journal of mechanics of materials and structures, vol. 2, no. 4, 2007.
76. Li C., Wisnom M.R., Stringer L.G., Hayman R., Hinton M.J.. “Effect of Mandrel contact on residual stresses during cure of filament wound tubes,” 8th International Conference on Fibre Reinforced Composites, 13-15 September 2000, Newcastle-upon-Tyne, UK.2000. pp.105–112.
77. M. Kojić and K. J. Bathe, Inelastic Analysis of Solids and Structures, Computational Fluid and Solid Mechanics. Springer, Berlin, 2005, 20.
78. Maxwell, G. and J. C., "Colours in metal glasses and metal films," Philos. Trans. R. Soc. London, Vol. 3, 385–420, 1904.
79. Nemat-Nasser, S., Hori, M., 1993. Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

80. O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *Finite Element Method: Volume: 1, 5th Edition*, Butterworth-Heinemann Elsevier, 2000, 689 p.
81. O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. “*The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Sixth Edition*”, Butterworth-Heinemann, 2005, 549.
82. P. Kanouté, D.P. Boso, J.L. Chaboche, B.A. Schrefler. *Multiscale Methods for Composites: A Review*. *Arch Comput Methods Eng* (2009) 16: 31–75.
83. P.H. Margen, S. Mennon, *PCRVs for BWRs - a new dimension in LWR exploitation*, *Jorn. of the British Nuclear Energy Soc.* vol. 14. No. 1 (1975) 35–48.
84. R.A. Turusov., H. Memarianfard, *Stress-Strain State of Thick-Walled Filament-Wound Cylinders at the Macro-, Meso-, and Microscales During Cooling*.//*Mechanics of Composite Materials*, Vol. 52, No. 3, July, 2016, pp 411–420.
85. R.A. Turusov, V.I. Andreev, *Thermal stresses and relaxation phenomena in polymer rods*. *Proceedings of the International Conference on Advanced Materials and Engineering Structural Technology (ICAMEST 2015)*, Qingdao, China , April 25–26, 2015.
86. Rayleigh, Lord, J. W. Strutt (1885). *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*, *Proc. Roy. Math. Soc.*, 17, 4–11.
87. René De Borst, Mike A. Crisfield, Joris J. C. Remmers, Clemens V. Verhoosel, “*Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*” Wiley, Sep 4, 2012, 46.
88. Royan J D’Mello, Marianna Maiarù and Anthony M Waas. *Effect of the curing process on the transverse tensile strength of fiber-reinforced polymer matrix lamina using micromechanics computations*. *Integrating Materials and Manufacturing Innovation* (2015) 4:7 DOI 10.1186/s40192-015-0035-y.
89. S.J. Hollister, N. Kikuchi. *A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites*. *Computational Mechanics* March 1992, Volume 10, Issue 2, pp 73-95.

90. Sadd M.H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier, 2004, p 82.
91. Senthil S. Vel , Andrew J. Goupee. Multiscale thermoelastic analysis of random heterogeneous materials Part I: Microstructure characterization and homogenization of material properties. *Computational Materials Science* 48 (2010) 22–38.
92. Stringer LG, Hayman RJ, Hinton MJ, Badcock RA, Wisnom MR. Curing stresses in thick polymer composite components. Part II: Management of residual stresses. In *12th International Conference on Composite Materials, Paris, July 1999*, Paper 861. Woodhead Publishing Ltd. 1999.
93. T.Tzeng, L.S Chien. A Thermal Viscoelastic Analysis for Thick-Walled Composite Cylinders. *Journal of Composite Materials* March 1995 vol. 29 no. 4 525–548.
94. Tarlakovski D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V. Method of averaging in problems of thermoelasticity of composite materials // *Encyclopedia of Thermal Stresses*. — Springer Dordrecht, Heidelberg, New York, London, 2014.
95. *Toughening Mechanisms in Composite Materials* Edited by Qinghua Qin and Jianqiao Ye. Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering: Number 55.26.
96. Turusov R.A. Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part II. Calculation results // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51. No. 1. January. 127—134 p.
97. Turusov R.A., Kuperman A.M. Elastic properties of thin adhesive interlayers // *Polymer Science. Series D*. – 2014. – T. 7. – № 1. – C. 1 – 8. 14.
98. V.N. Korotkov, R. A. Turusov, É. A. Dzhavadyan, B. A. Rozenberg, Production stresses during the solidification of cylindrical articles formed from polymer composite materials, *Mechanics of Composite Materials*, January 1986, Volume 22, Issue 1, pp 99–103.

99. V.N. Korotkov, R. A. Turusov, G. D. Andreevskaya. Temperature stresses in polymeric and composite materials// *Mechanics of composites*. NY, March 1981, 290–295.
100. V. V. Bolotin, A. N. Vorontsov. Formation of residual stresses in components made out of laminated and fibrous composites during the hardening process // *Mechanics of composites* .September 1976, Volume 12, Issue 5, 701–705.
101. V.I. Andreev, R.A. Turusov, Nonlinear Modeling of the Kinetics of Thermal Stresses in the Polymer Rods, Proceedings of the International Conference on Advanced Materials and Engineering Structural Technology (ICAMEST 2015), Qingdao, China, April 25–26, 2015.
102. V.V. Bolotin, K.S. Bolotina. Calculation of the residual stresses and strains in wound reinforced-plastic products // *Mechanics of composites*. January 1969, Volume 5, Issue 1, 109–114.
103. V.V. Vasiliev, E. Morozov. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*, 3rd Edition, Elsevier, 2013.779.
104. Voight W. *LehrBuch der Kristallphysik*. Berlin: Teubner, 1928.962. S.
105. Wisnom, MR; Stringer, LG; Hayman, RJ; Hinton, MJ. Curing stresses in thick polymer composite components. Part I: Analysis. 12th International Conference on Composite Materials, Paris, July 1999, Woodhead Publishing Ltd, 1999. Paper 859.
106. Xia, Z.H., Zhang, Y.F., Ellyin, F., 2003. A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. *Int. J. Solids Struct.* 40, 1907–1921.
107. Yu. A. Lapin, E. M. Varushkin. Variation of the residual stresses during the fabrication of thick-walled wound glass-reinforced plastic articles// *Mechanics of composites*. March 1974, Volume 10, Issue 2, pp 297–299.
108. Yunfa Zhang, Zihui Xia, Fernand Ellyin. Nonlinear viscoelastic micromechanical analysis of fibre-reinforced polymer laminates with damage evolution. *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005) 591–604.

109. Zhao L. G., Warrior N. A., and Long A. C., “A micromechanical study of residual stress and its effect on transverse failure in polymer-matrix composites,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. 18-19, 2006, pp 5449–5467.

110. Zihui Xia, Yunfa Zhang, Fernand Ellyin, A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 40, Issue 8, April 2003, Pages 1907–1921.

111. Zihui Xia, Yunfa Zhang, Fernand Ellyin” *Micro/Meso-Modeling of Polymeric Composites with Damage Evolution,*” *Solid Mechanics and Its Applications* Volume 140, 2006, pp 505–516.