

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи



Юрин Юрий Викторович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ
МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН
МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ**

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Димитриенко Ю.И.

Москва, 2017 г.

Оглавление

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| ГЛАВА 1. РАЗРАБОТКА АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН | 11 |
| 1.1. Постановка трехмерной задачи ползучести..... | 11 |
| 1.2. Основные допущения..... | 14 |
| 1.3. Формулировка локальных задач | 16 |
| 1.4. Решение локальных задач..... | 21 |
| 1.5. Осредненные уравнения равновесия бесконечного порядка..... | 29 |
| 1.6. Осредненные определяющие соотношения..... | 31 |
| 1.7. Осреднённые задачи..... | 31 |
| 1.8. Моноклинные материалы | 39 |
| 1.9. Вариационные уравнения осредненных задач | 43 |
| 1.10. Вариационный принцип Хеллингера-Рейснера | 48 |
| 1.11. Разрешимость осредненных задач без учета ползучести..... | 50 |
| 1.12. Примеры моделей ползучести..... | 55 |
| ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН | 63 |
| 2.1. Применение метода конечных элементов для решения двумерных осредненных задач асимптотического метода..... | 63 |
| 2.2. Частный случай конечно-элементных соотношений для одинаковой аппроксимации обобщенных деформаций..... | 69 |
| 2.3. Треугольный конечный элемент для решения осредненных задач | 72 |
| 2.3.1. Применение аппроксимации Белла для функций прогиба | 73 |

| | |
|--|------------|
| 2.3.2. Применение аппроксимации кубическими полиномами для обобщенных деформаций..... | 75 |
| 2.3.3. Применение аппроксимации трикубическими полиномами Биркгофа для продольных перемещений..... | 77 |
| 2.4. Решение систем уравнений..... | 80 |
| 2.5. Программная реализация..... | 81 |
| ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ И БЕЗ УЧЕТА ПОЛЗУЧЕСТИ..... | 84 |
| 3.1. Задача об изгибе многослойной прямоугольной тонкой пластины без учета ползучести..... | 84 |
| 3.1.1. Аналитическое решение задачи..... | 84 |
| 3.1.2. Сравнение с трехмерным решением | 86 |
| 3.1.3. Сравнение аналитического и конечно-элементного решения..... | 92 |
| 3.2. Задача об изгибе многослойной прямоугольной тонкой пластины с учетом ползучести..... | 98 |
| 3.2.1. Аналитическое решение задачи изгиба пластины с симметричным расположением слоев под действием постоянного давления..... | 98 |
| 3.2.2. Сравнение конечно-элементного и аналитического решения..... | 100 |
| 3.2.3. Численное решение задачи изгиба при несимметричном расположении слоев под действием переменного давления | 108 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ | 130 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 131 |

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании конструкций энергетических силовых установок (двигателей внутреннего сгорания, газотурбинных двигателей, ядерных двигателей), кроме инженерных расчетов на статическую прочность дополнительно обычно оценивают деформации ползучести составных деталей. Такая оценка требуется в связи с тем, что при длительной эксплуатации, измеряемой годами, в условиях воздействия высоких температур (до 1000 °С и выше), практически все жаропрочные конструкционные сплавы проявляют существенную ползучесть [61, 99, 103]. Для моделирования деформаций ползучести, как известно, широко применяют различные варианты теории типа теории течения, старения и наследственные теории [61]. Деформации ползучести большинства жаростойких сплавов, как правило, обнаруживают нелинейную зависимость от напряжений и являются практически необратимыми, поэтому для таких материалов наибольшее распространение получили теории типа теории течения, наиболее адекватно описывающие отмеченные эффекты. Указанные теории восходят к известной теории пластического течения. Среди множества работ по теории пластического течения отметим работы А. Ю. Ишлинского [48], В. В. Новожилова и Ю. И. Кадашевича [49-50], Д. Д. Ивлева [45-46], Ю. Н. Радаева [62].

Интенсивное развитие вычислительной техники привело к появлению вычислительных устройств и программного обеспечения, предоставляющих возможности для решения трехмерных формулировок сложных задач механики деформируемого твердого тела. Однако расчет тонкостенных конструкций продолжает производиться преимущественно с помощью специальных методов, адаптированных к геометрии таких конструкций, так как проведение расчетов, в рамках которых тонкие тела рассматриваются как трехмерные, приводит к необходимости существенного измельчения расчетной сетки и, как следствие, к увеличению требований к характеристикам вычислительных устройств. В связи с этим, для расчетов напряженно-деформированного состояния тонких тел

применяют специализированные методы – используют особые типы конечных элементов, например [16], или двумерные теории пластин и оболочек [7, 60]. Значительное сокращение вычислительных затрат, обеспечиваемое применением двумерных теорий, стимулирует исследования по разработке уточненных модификаций классических теорий пластин и оболочек с целью повышения точности расчета напряженно-деформированного состояния тонких тел и приближения к расчетам на основе трехмерной теории. Подобных модификаций разработано множество, отметим теорию ломаной нормали Григолюка-Куликова [13], а также работы Э. И. Григолюка и П. П. Чулкова [14-15], в которых строятся уточненные двумерные теории путем наложения кинематических гипотез для каждого слоя оболочки, что приводит к зависимости порядка соответствующих систем уравнений от числа слоев. Кроме того, необходимо отметить различные модификации классических теорий пластин и оболочек, представленные, например, в работах Е. М. Зверьева [41-42], В. В. Васильева и С. А. Лурье [9], С. А. Лурье и Л. М. Гаввы [52], Ю. И. Димитриенко [85, 87], J. R. Hutchinson [93], F. Gruttmann и W. Wagner [90], в статье [81] авторов H. Thia Chien, S. Kulasegaram, Loc V. Tran и H. Nguyen-Xuan, в публикации [100] авторов J. L. Mantari, A. S. Oktem, C. Guedes Soares, в статье [89] авторов Y. M. Ghugal и R. P. Shimpi, в публикации [108] A. S. Sayyad и в большом числе других работ. Данные модификации основаны на различных предположениях относительно распределения неизвестных функций (перемещений, деформаций, напряжений) по толщине пластины. Математически наиболее строгим подходом для построения подобных теорий является применение активно разрабатываемого в настоящее время метода асимптотического осреднения.

Метод асимптотического осреднения для периодических сред был предложен Н. С. Бахваловым в работах [3-4] и Б. Е. Победрей в работе [59]. Одними из первых зарубежных исследователей, рассмотревших теорию этого метода, были Е. Sanchez-Palencia в работе [107] и А. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou в книге [79]. Впоследствии метод асимптотического осреднения развивался множеством отечественных и зарубежных авторов. Не претендуя на полноту

изложения, отметим некоторые исследования в этом направлении. Работу М. Э. Эглит [72], где метод применяется к уравнениям пластического течения; публикацию Г. А. Иосифьяна, О. А. Олейник, А. С. Шамаева [47], в которой метод применяется для уравнений процессов в слоистых средах; статью Т. А. Суслиной [68], где рассматривается усреднение уравнений Максвелла; работу J. A. Otero, J. B. Castillero и R. R. Ramos [104], где метод применяется для пьезоэлектрических сред; публикацию T. Matsuda, S. Kanamaru, N. Yamamoto, Y. Fukuda [101], где метод применяется для упруго-вязкопластических материалов; статью J. C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet [102], где рассматривался численный метод поиска эффективных характеристик композиционных материалов; работу И. В. Андрианова, В. И. Большакова, В. В. Данишевского и D. Weichert [74] где рассматривались высшие асимптотики метода осреднения для композитов; публикацию A. L. Kalamkarov, E. M. Hassan, A. V. Georgiades, M. A. Savi [94], где метод применяется для композитов с ортотропными армирующими элементами; статью Ю. И. Димитриенко [84] по внутреннему тепло-массопереносу в тонкостенных конструкциях из абляционных материалов и множество других работ. Отметим работы, проведенные на кафедре ФН-11 МГТУ им. Баумана под руководством Ю. И. Димитриенко совместно со своими учениками: Кашкаровым А. В. в [30], где предложен конечно-элементный метод расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов; Соколовым А. П. в [32], по многомасштабному моделированию упругих свойств композитов; Е. С. Ничеговским в [31] по моделированию магнитных свойств композиционных материалов; С. В. Сборщиковым совместно с Е. А. Губаревой в работе [23], по многомасштабному моделированию упругопластических свойств и повреждаемости композитов, и совместно с А. П. Соколовым в работе [88], в которой рассматривается задача моделирования прочностных характеристик и микроразрушения композиционных материалов и др.

Непосредственное применение общей трехмерной процедуры осреднения для периодических сред [6] к тонкостенным телам не представляется возможным в связи с отсутствием периодичности по нормальной координате. Применение

метода асимптотического осреднения для пластин при дополнительном предположении о линейной зависимости начальных членов асимптотических разложений продольных перемещений от нормальной координаты было проведено в работах R. V. Kohn и M. Vogelius, A. G. Kolpakov, С. В. Шешенина и О. А. Ходоса [95, 96, 70-71]. Вариант метода осреднения для тонких пластин без дополнительных допущений относительно неизвестных функций, но с наличием в асимптотических разложениях для вектора перемещений и тензора напряжений членов при отрицательных степенях малого геометрического параметра (характеризующего относительную толщину пластины) предложен в работах С. А. Назарова [1, 55-56]. Отметим также работы Г. П. Панасенко, М. В. Резцова [57], Т. Lewiński в [97], Т. Lewiński и J. J. Telega в [98], Yuanwu Cai, Liang Xu, Gengdong Cheng [106] и др., в которых подобный вариант метода применяется для двоякопериодических тонких пластин.

Новый подход к построению процедуры осреднения трехмерных уравнений теории упругости с целью получения теории тонких пластин, без дополнительных предположений о распределении неизвестных функций по толщине пластины, не допускающий возникновения членов при отрицательных степенях геометрического параметра в асимптотических разложениях для вектора перемещений и тензора напряжений был предложен Ю. И. Димитриенко в работе [18]. В работе [40] проведен анализ точности указанного варианта асимптотического метода, продемонстрировавший его высокую точность, которую трехмерный конечно-элементный метод обеспечивает при использовании очень мелких сеток. В дальнейшем метод был применен для пластин с двупериодической структурой [22] и пластин с учетом эффектов вязкоупругости [24, 29].

Данная работа посвящена распространению указанного подхода на задачу ползучести (деформации ползучести моделируются в рамках теории типа теории течения) многослойных тонких пластин.

Актуальность темы. Разработка метода расчета напряжённо-деформированного состояния многослойных тонких пластин с учетом ползучести,

основанном на асимптотическом анализе трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела, как математически наиболее строгом подходе к задаче получения системы уравнений пониженной размерности, является актуальной в авиационной, атомной, космической и других областях, в которых применяются тонкостенные пластинчатые элементы конструкций, подверженные эффектам ползучести. В частности такой метод может быть использован при расчетах прочности и долговечности конструкций корпусов и внутренних частей энергетических силовых установок.

Нерешенность этой актуальной проблемы обусловила **цель** данной **диссертационной работы**: разработка математического аппарата и численного метода моделирования напряженно-деформированного состояния многослойных тонких пластин с учетом эффектов ползучести на основе метода асимптотического осреднения.

Задачами настоящей работы являются:

- разработка асимптотического метода решения задач ползучести многослойных тонких пластин;
- разработка конечно-элементного метода расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких пластин с учетом деформаций ползучести;
- численное исследование эффектов в многослойных тонких пластинах, обусловленных сочетанием факторов тонкостенности пластин и наличия эффектов ползучести материалов слоев.

Методы исследования. В работе использованы следующие методы исследования: метод асимптотического осреднения, численные конечно-элементные методы решения задачи трехмерной теории упругости, численные конечно-элементные методы решения двумерных осредненных задач асимптотического метода расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких анизотропных пластин с учетом ползучести, численные конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений, численные методы решения интегральных уравнений Вольтерры второго рода.

Научная новизна работы состоит:

- в разработке асимптотического метода решения задач ползучести многослойных тонких пластин;
- в разработке нового варианта конечно-элементного метода для тонких пластин, основанного на применении смешанного вариационного принципа Хеллингера-Рейснера и построения решения с использованием аппроксимации Белла для функций прогиба и аппроксимации трикубическими полиномами Биркгофа для продольных перемещений.

На защиту вынесены следующие положения:

- асимптотический метод решения задач ползучести многослойных тонких пластин;
- конечно-элементный метод расчета напряжённо-деформированного состояния многослойных тонких пластин с учетом эффектов ползучести.

Достоверность результатов обусловлена корректной постановкой задач, применением математически обоснованных методов их решения, сравнением результатов расчетов с результатами, полученными другими методами.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях:

- на научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященной 135-летию кафедры теоретической механики имени профессора Н. Е. Жуковского, февраль 2013;
- на III международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 100-летию со дня рождения академика В. Н. Челомея, май 2014;
- на международной научной конференция «Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech - 2014)», посвященной 50-летию Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н. Э. Баумана 17-19 ноября 2014 года. 2014;

- на международной конференции «Multiscale Modeling and Methods: Upscaling in Engineering and Medicine», Bauman Moscow State Technical University, Moscow, June 25-27, 2015.

- на семинаре «Актуальные проблемы вычислительной математики и механики» под руководством проф. Ю. И. Димитриенко, 2012-2016 гг.

Публикации. Основные результаты отражены в 11 научных работах [25-28, 33-38, 86], в том числе в 10 статьях [25-28, 33-38], включенных в перечень российских рецензируемых научных изданий и в 1 научной публикации [26] в изданиях, входящих в международную базу данных и систему цитирования Scopus.

Структура и объем работы: диссертация состоит из 3 глав, введения, заключения и списка использованной литературы из 110 наименований. Объем диссертации 141 с.

ГЛАВА 1. РАЗРАБОТКА АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

1.1. Постановка трехмерной задачи ползучести

Рассмотрим многослойную (имеющую m слоев) пластину, занимающую ограниченную область $\tilde{\Omega} = \{\mathbf{x} + \mathbf{n}^\Sigma h \xi : \mathbf{x} \in \tilde{\Sigma}, \xi \in [-1/2, 1/2]\} \subset \mathbb{R}^3$, где $\tilde{\Sigma}$ - срединная плоская поверхность с нормальным вектором \mathbf{n}^Σ и липшицевой границей [63] $\partial \tilde{\Sigma} = \tilde{\Gamma}$, h - постоянная толщина пластины, для которой $\kappa = h/L \ll 1$ - малый геометрический параметр (L - характерный линейный размер области $\tilde{\Omega}$, например $L = \text{diam}(\tilde{\Omega})$), ξ - безразмерная нормальная координата пластины. На границе рассматриваемой области $\partial \tilde{\Omega}$ выделим внешнюю $\tilde{\Sigma}_\sigma^+ = \{\mathbf{x} + \mathbf{n}^\Sigma h/2 : \mathbf{x} \in \tilde{\Sigma}\}$, торцевую $\tilde{\Sigma}^T = \{\mathbf{x} + \mathbf{n}^\Sigma h \xi : \mathbf{x} \in \tilde{\Gamma}, \xi \in [-1/2, 1/2]\}$ и внутреннюю $\tilde{\Sigma}_\sigma^- = \{\mathbf{x} - \mathbf{n}^\Sigma h/2 : \mathbf{x} \in \tilde{\Sigma}\}$ поверхности: $\partial \tilde{\Omega} = \tilde{\Sigma}_\sigma^- \cup \tilde{\Sigma}^T \cup \tilde{\Sigma}_\sigma^+$. Введем поверхность раздела k -го и $k+1$ -го слоя пластины $\tilde{\Sigma}_c^k = \{\mathbf{x} + \mathbf{n}^\Sigma h \xi_k : \mathbf{x} \in \tilde{\Sigma}\}$, $k = 0, \dots, m-1$, соответствующую множеству точек $\Xi_m = \{\xi_0, \dots, \xi_{m-1}\}$ из отрезка $[-1/2, 1/2]$. Будем обозначать $[f]_{\xi=\xi_k}$ - скачок некоторой функции f через поверхность $\tilde{\Sigma}_c^k$: $[f]_{\xi=\xi_k} = f|_{\xi=\xi_k+0} - f|_{\xi=\xi_k-0}$, $f|_{\xi=\xi_k \pm 0} = \lim_{\tilde{x}_3 \rightarrow h\xi_k \pm 0} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, $k = 0, \dots, m-1$; $\mathbf{n}^{\tilde{\Sigma}_\sigma^\pm} = \pm \mathbf{n}^\Sigma$ - векторы внешней нормали к поверхностям $\tilde{\Sigma}_\sigma^\pm$; ∂_t - оператор частной производной по времени ($\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$); $\tilde{T} \in \mathbb{R}_+$ - верхний предел моделирования по времени. Тогда в области $[0, \tilde{T}] \times \tilde{\Omega}$, рассмотрим краевую задачу механики деформируемого твердого тела с учетом деформаций ползучести, моделируемых в рамках теории типа теории течения [19-20]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \\
\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c), \\
\partial_t \boldsymbol{\varepsilon}^c = \mathbf{F}(\xi, \boldsymbol{\varepsilon}^c, \boldsymbol{\sigma}), \\
\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T), \\
\mathbf{n}^\Sigma \cdot [\boldsymbol{\sigma}]_{\xi=\xi_k} = 0, \\
[\mathbf{u}]_{\xi=\xi_k} = 0, \\
\boldsymbol{\varepsilon}^c|_{\tau=0} = 0, \\
\boldsymbol{\sigma}|_{\tilde{\Sigma}_\sigma^\pm} \cdot \mathbf{n}_{\tilde{\Sigma}_\sigma^\pm} = -\tilde{p}_\pm \mathbf{n}_{\tilde{\Sigma}_\sigma^\pm}, \\
\mathbf{u}|_{\tilde{\Sigma}^T} = \mathbf{u}^b.
\end{array} \right. \quad (1.1)$$

Данная система состоит из уравнений равновесия ($\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений), определяющего соотношения ползучести (${}^4\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ - тензоры модулей упругости, деформаций и деформаций ползучести), определяющего соотношения для скоростей деформаций ползучести (\mathbf{F} - тензорная функция, определяющая модель ползучести), соотношений Коши (\mathbf{u} - вектор перемещений), условий идеального контакта на поверхности $\tilde{\Sigma}_c^k$, начального условия для тензора деформаций ползучести, граничных условий на внешней и внутренней поверхности пластины $\tilde{\Sigma}_\sigma^\pm$ и граничного условия на торцевой поверхности $\tilde{\Sigma}^T$. Модель ползучести может различаться для разных слоев пластины, что отражено в зависимости функции \mathbf{F} от нормальной координаты ξ .

Будем далее полагать, если не оговорено иное, что индексы, обозначенные строчными буквами i, j, k, l, \dots , пробегает значения из множества $\{1, 2, 3\}$, а индексы $I, \dots \in \{1, 2\}$. Введем прямоугольные декартовы координаты $O\tilde{x}_i$, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по орту \mathbf{n}^Σ , а оси $O\tilde{x}_i$ принадлежат $\tilde{\Sigma}$; а также соответствующие безразмерные координаты $q_i = \tilde{x}_i / L$ и безразмерный временной параметр $\tau = t / t_0$ ($T = \tilde{T} / t_0$), где t_0 - характерное время процесса ползучести. Тогда безразмерную нормальную координату пластины ξ можно

записать в виде: $\xi = \tilde{x}_3 / h = q_3 / \kappa$. Введем далее обозначения для областей $\Sigma^T = \left\{ (\tilde{x}_1 / L \ \tilde{x}_2 / L \ \tilde{x}_3 / h) : (\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \tilde{x}_3) \in \tilde{\Sigma}^T \right\}$, $\Sigma = \left\{ (\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2) / L : (\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \tilde{x}_3) \in \tilde{\Sigma} \right\}$ и области $\Omega = \Sigma \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$, соответствующих областям $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma}^T$ и $\tilde{\Omega}$. Введем безразмерные компоненты величин входящих в задачу (1.1):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\tau, \tilde{x}_K / L, \tilde{x}_3 / h) &= \tilde{\sigma}_{ij}(\tau t_0, \tilde{x}_K, \tilde{x}_3) / E_0, \quad C_{ijkl}(\tilde{x}_3 / h) = \tilde{C}_{ijkl}(\tilde{x}_3) / E_0, \\ \varepsilon_{ij}(\tau, \tilde{x}_K / L, \tilde{x}_3 / h) &= \tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau t_0, \tilde{x}_K, \tilde{x}_3), \quad \varepsilon_{ij}^c(\tau, \tilde{x}_K / L, \tilde{x}_3 / h) = \tilde{\varepsilon}_{ij}^c(\tau t_0, \tilde{x}_K, \tilde{x}_3), \\ F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}) &= t_0 \tilde{F}_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq} E_0), \quad u_i(\tau, \tilde{x}_K / L, \tilde{x}_3 / h) = \tilde{u}_i(\tau t_0, \tilde{x}_K, \tilde{x}_3) / L, \\ \hat{p}_{\pm}(\tau, \tilde{x}_K / L) &= \tilde{p}_{\pm}(\tau t_0, \tilde{x}_K) / E_0, \quad u_i^b(\tau, \tilde{x}_K / L, \tilde{x}_3 / h) = \tilde{u}_i^b(\tau t_0, \tilde{x}_K, \tilde{x}_3) / L, \end{aligned}$$

где E_0 – характерное значение модуля упругости, а волной сверху обозначены компоненты объектов в системе координат $O\tilde{x}_i$. Пусть также $\tilde{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$ – оператор дифференцирования по введенным декартовым координатам \tilde{x}_i , а точкой над функцией будем обозначать производную по временному параметру ($\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \tau}$). Тогда система (1.1) в безразмерной координатной форме в области $[0, T] \times \bar{\Omega}$ примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\partial}_j \sigma_{ij} &= 0, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^c), \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^c &= F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}), \\ 2\varepsilon_{ij} &= L (\tilde{\partial}_j u_i + \tilde{\partial}_i u_j), \\ [\sigma_{i3}]_{\xi=\xi_k} &= 0, \\ [u_i]_{\xi=\xi_k} &= 0, \\ \varepsilon_{ij}^c \Big|_{\tau=0} &= 0, \\ \sigma_{i3} \Big|_{\tilde{x}_3=\pm h/2} &= -\hat{p}_{\pm} \delta_{i3}, \\ u_i \Big|_{\Sigma^T} &= u_i^b. \end{aligned} \right. \quad (1.2)$$

Запись определяющего соотношения для скоростей деформаций ползучести в системах (1.1)-(1.2), как частный случай, включает стандартную для моделей ползучести типа теории течения запись функций F_{ij} в потенциальном виде [61]:

$$F_{ij} = H \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Введем далее вспомогательные компоненты \tilde{C}_{ijkl} , которые определяются следующим образом:

$$\tilde{C}_{ijkl} = \left(\delta_{kp} \delta_{lq} + \delta_{l3} \delta_{q3} (\delta_{kp} - \delta_{k3} \delta_{p3}) + \delta_{k3} \delta_{p3} (\delta_{lq} - \delta_{l3} \delta_{q3}) \right) C_{ijpq}.$$

1.2. Основные допущения

Построение решения задачи (1.2) в виде формального асимптотического разложения (ФАР) будем производить при следующих допущениях:

1. Безразмерное давление \hat{p}_{\pm} на верхней и нижней поверхности пластины имеет третий порядок относительно геометрического параметра κ :

$$\hat{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}. \quad (1.3)$$

Здесь функции p_{\pm} не зависят от малого параметра κ (и, в частности, от толщины пластины h).

2. Тензор модулей упругости 4C является кусочно-гладким (т. е. бесконечно дифференцируемым по ξ всюду в $[-1/2, 1/2] \setminus \Xi_m$, а в точках Ξ_m оно и его производные могут иметь разрывы первого рода) симметричным равномерно положительно определенным тензорным полем от нормальной координаты пластины ξ :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}(\xi) &= C_{jikl}(\xi), C_{ijkl}(\xi) = C_{ijlk}(\xi), C_{ijkl}(\xi) = C_{klij}(\xi), \\ C_{ijkl}(\xi) T_{ij} T_{kl} &\geq \gamma T_{ij} T_{ij}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где T_{ij} – компоненты произвольной симметричной матрицы 3×3 , а $\gamma > 0$ – константа, не зависящая от ξ и κ (и от h в частности). В силу последнего условия в (1.4), матрица $\tilde{C} = \left(\tilde{C}_j^i = C_{i3j3} \right)_3^3$ (также как и матрица $\tilde{\tilde{C}} = \left(\tilde{\tilde{C}}_j^i = \tilde{C}_{i3j3} \right)_3^3$) обратима: $\tilde{C}^{-1} = \left(\left(\tilde{C}^{-1} \right)_j^i = C_{i3j3}^{-1} \right)_3^3$: $C_{i3s3}^{-1} C_{s3j3} = C_{i3s3} C_{s3j3}^{-1} = \delta_{ij}$. Тогда будем дополнительно предполагать, что приведенные модули упругости $\hat{C}_{IJKL} = C_{IJKL} - C_{IK3} C_{k3s3}^{-1} C_{s3KL}$ является равномерно положительно определенными:

$$\hat{C}_{IJKL}(\xi) T_{IJ} T_{KL} \geq \gamma_1 T_{IJ} T_{IJ}, \quad (1.5)$$

где T_{IJ} – компоненты произвольной симметричной матрицы 2×2 , а $\gamma_1 > 0$ – константа, не зависящая от ξ и κ (и от h в частности).

3. Граничные перемещения u_i^b являются функциями безразмерных координат q_I и параметра τ , а также представимы в виде:

$$\begin{aligned} u_1^b(\tau, q_J) &= u_1^{b(0)}(\tau, q_J) + \kappa u_1^{b(1)}(\tau, q_J), \\ u_3^b(\tau, q_J) &= u_3^{b(0)}(\tau, q_J). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь функции $u_i^{b(0)}$, $u_i^{b(1)}$ не зависят от параметра κ (и от h в частности).

4. Функции F_{ij} являются кусочно-гладкими по ξ (в том же смысле, что и в допущении 2) и трижды непрерывно дифференцируемыми по каждому из аргументов ε_{kl}^c , σ_{pq} на всей числовой прямой. Кроме того, данные функции будем предполагать центрированными по компонентам тензора напряжений:

$$F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{ij}) \Big|_{\sigma_{ij}=0} = 0,$$

и удовлетворяющими следующему условию:

$$F_{I3}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{PQ}, \sigma_{p3}) \Big|_{\sigma_{p3}=0} = 0.$$

В этих условиях ε_{kl}^c и σ_{PQ} - компоненты произвольных симметричных матриц 3×3 и 2×2 соответственно.

1.3. Формулировка локальных задач

Согласно общему подходу метода асимптотического осреднения (МАО) [6] координаты q_i будем рассматривать как макроскопические (медленные), а координату ξ - как локальную (быструю). Тогда (из формулы для производной сложной функции) для оператора дифференцирования $\tilde{\partial}_i$ имеем:

$$L\tilde{\partial}_i = \partial_i + \frac{\delta_{i3}}{\kappa} \partial_\xi, \quad (1.7)$$

где $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q_i}$ - соответствующие операторы дифференцирования по локальной и макроскопическим координатам. Далее безразмерные координаты q_3 и ξ , в соответствии с общей схемой МАО, будем предполагать независимыми. Решение задачи (1.2) (вектор перемещений \mathbf{u}) будем строить в виде ФАР по степеням малого геометрического параметра κ :

$$u_i(\tau, q_l, \xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n u_i^{(n)}(\tau, q_l, \xi). \quad (1.8)$$

Дифференциальный оператор $P_i(\cdot)$ в уравнении равновесия системы (1.2) с помощью формулы (1.7) может быть записан в форме:

$$\begin{aligned} LP_i(\mathbf{u}) &= L\tilde{\partial}_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = L^2 \tilde{\partial}_j (C_{ijkl} \tilde{\partial}_k u_l) - L\tilde{\partial}_j (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^c) = \\ &= \kappa^0 (D_i^{qq}(\mathbf{u}) - C_{ijkl} \partial_j \varepsilon_{kl}^c) + \kappa^{-1} (D_i^{q\xi}(\mathbf{u}) + D_i^{\xi q}(\mathbf{u}) - \partial_\xi [C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^c]) + \kappa^{-2} D_i^{\xi\xi}(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где дифференциальные операторы $D_i^{\alpha\beta}$; $\alpha, \beta \in \{q, \xi\}$ вследствие допущения 2 имеют следующий вид:

$$D_i^{qq}(\mathbf{u}) = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial q_j \partial q_k}, \quad D_i^{q\xi}(\mathbf{u}) = C_{ij3l} \frac{\partial^2 u_l}{\partial q_j \partial \xi}, \quad D_i^{\xi q}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C_{i3kl} \frac{\partial u_l}{\partial q_k} \right), \quad D_i^{\xi\xi}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C_{i33l} \frac{\partial u_l}{\partial \xi} \right).$$

Пусть далее $\varepsilon_{ij}^c \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \varepsilon_{ij}^{c(n)}$ - ФАР для компонент тензора деформаций ползучести.

Тогда подставляя в (1.9) это разложение и ФАР (1.8) приходим к асимптотической форме уравнений равновесия системы (1.2):

$$LP_i(\mathbf{u}) \sim \kappa^{-2} D_i^{\xi\xi}(\mathbf{u}^{(0)}) + \kappa^{-1} H_i^{(-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n H_i^{(n)} \sim 0, \quad (1.10)$$

где:

$$H_i^{(-1)} = D_i^{\xi\xi}(\mathbf{u}^{(1)}) + D_i^{q\xi}(\mathbf{u}^{(0)}) + D_i^{\xi q}(\mathbf{u}^{(0)}) - \partial_{\xi} \left(C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^{c(0)} \right),$$

$$H_i^{(n)} = D_i^{\xi\xi}(\mathbf{u}^{(n+2)}) + D_i^{q\xi}(\mathbf{u}^{(n+1)}) + D_i^{\xi q}(\mathbf{u}^{(n+1)}) + D_i^{qq}(\mathbf{u}^{(n)}) - C_{ijkl} \partial_j \varepsilon_{kl}^{c(n)} + \partial_{\xi} \left(C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^{c(n+1)} \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Потребовав, чтобы член при κ^{-2} в этом разложении обратился в нуль, приходим к независимости $\mathbf{u}^{(0)}$ от локальной координаты ξ :

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(\tau, q_l). \quad (1.11)$$

Из этого, в частности, следует, что $D_i^{q\xi}(\mathbf{u}^{(0)}) = 0$.

Далее, подставляя разложение (1.8) в соотношение Коши в системе (1.2), получим:

$$2\varepsilon_{ij} \sim \partial_j u_i^{(0)} + \frac{\delta_{j3}}{\kappa} \partial_{\xi} u_i^{(0)} + \dots + \partial_i u_j^{(0)} + \frac{\delta_{i3}}{\kappa} \partial_{\xi} u_j^{(0)} + \dots$$

Тогда с учетом (1.11) ФАР для компонент тензора деформаций можно записать в виде:

$$\varepsilon_{ij} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \varepsilon_{ij}^{(n)}, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(n)} = \partial_j u_i^{(n)} + \partial_i u_j^{(n)} + \delta_{j3} \partial_{\xi} u_i^{(n+1)} + \delta_{i3} \partial_{\xi} u_j^{(n+1)}. \quad (1.12)$$

Подставляя ФАР компонент тензора деформаций и разложение (1.12) в определяющее соотношение ползучести в системе (1.2), получим ФАР компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{(n)} - \varepsilon_{kl}^{c(n)}). \quad (1.13)$$

Учитывая вид разложений (1.12)-(1.13) и условие (1.11), функции $H_i^{(-1)}$ и $H_i^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ при степенях малого параметра в разложении (1.10) могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} H_i^{(-1)} &= \partial_{\xi} \left(C_{i33l} \partial_{\xi} u_l^{(1)} + C_{i3kl} \partial_k u_l^{(0)} - C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^{c(0)} \right) = \partial_{\xi} \left(C_{i3kl} \left[\varepsilon_{kl}^{(0)} - \varepsilon_{kl}^{c(0)} \right] \right) = \partial_{\xi} \sigma_{i3}^{(0)}, \\ H_i^{(n)} &= \partial_J \left(C_{iJ3l} \partial_{\xi} u_l^{(n+1)} + C_{iJKl} \partial_K u_l^{(n)} - C_{iJKl} \varepsilon_{kl}^{c(n)} \right) + \partial_{\xi} \left(C_{i33l} \partial_{\xi} u_l^{(n+2)} + C_{i3kl} \partial_k u_l^{(n+1)} - C_{i3kl} \varepsilon_{kl}^{c(n+1)} \right) = \\ &= \partial_J \left(C_{iJKl} \left[\varepsilon_{kl}^{(n)} - \varepsilon_{kl}^{c(n)} \right] \right) + \partial_{\xi} \left(C_{i3kl} \left[\varepsilon_{kl}^{(n+1)} - \varepsilon_{kl}^{c(n+1)} \right] \right) = \partial_J \sigma_{ij}^{(n)} + \partial_{\xi} \sigma_{i3}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Приравнивая член $H_i^{(-1)}$ при κ^{-1} в разложении (1.10) к нулю, а члены $H_i^{(n)}$ при $\kappa^n, n \in \mathbb{Z}_+$ к некоторым функциям $h_i^{(n)}$, не зависящим от локальной координаты ξ (т.е. $h_i^{(n)} = h_i^{(n)}(\tau, q_I)$) и учитывая последние соотношения, последовательность локальных уравнений равновесия, соответствующих уравнению равновесия в исходной системе (1.2), принимает вид:

$$\begin{aligned} \partial_{\xi} \sigma_{i3}^{(0)} &= 0, \\ \partial_J \sigma_{ij}^{(n)} + \partial_{\xi} \sigma_{i3}^{(n+1)} &= h_i^{(n)}, \quad (1.14) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n h_i^{(n)} &\sim LP_i(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned}$$

Подставив теперь ФАР для тензора деформаций ползучести и разложение (1.12) в определяющее соотношение для тензора деформаций ползучести в системе (1.2), получим:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \kappa^s \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(s)} + \kappa^n \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(n)} + \kappa^{n+1} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(n+1)} + \dots = \varphi_{ij}(\kappa),$$

$$\varphi_{ij}(\kappa) = F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}) = F_{ij}\left(\xi, \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n)} + \kappa^n R_{kl}^{\varepsilon^c(n)}(\kappa), \tilde{\sigma}_{pq}^{(n)} + \kappa^n R_{pq}^{\sigma(n)}(\kappa)\right),$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{c(n)} = \sum_{s=0}^n \kappa^s \varepsilon_{ij}^{c(s)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} = \sum_{s=0}^n \kappa^s \sigma_{ij}^{(s)}. \quad (1.15)$$

Здесь $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ $R_{ij}^{\varepsilon^c(n)}(\kappa)$, $R_{ij}^{\sigma(n)}(\kappa)$ - нормированные остаточные члены ФАР для ε_{ij}^c и σ_{ij} , для которых, в предположении что указанные разложения действительно являются асимптотическими, справедливы свойства:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} R_{ij}^{\varepsilon^c(n)}(\kappa) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} R_{ij}^{\sigma(n)}(\kappa) = 0.$$

Введем далее $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ определяющие функции модели ползучести n -го приближения $F_{ij}^{(n)}(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0)}, \dots, \varepsilon_{k_n l_n}^{c(n)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0)}, \dots, \sigma_{p_n q_n}^{(n)})$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_{ij}^{(0)}(\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0)}, \sigma_{pq}^{(0)}) &= F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}), \\ F_{ij}^{(n)}(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0)}, \dots, \varepsilon_{k_n l_n}^{c(n)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0)}, \dots, \sigma_{p_n q_n}^{(n)}) &= \kappa^{-n} \left[F_{ij}(\xi, \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n)}, \tilde{\sigma}_{pq}^{(n)}) - F_{ij}(\xi, \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)}, \tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)}) \right], n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Введенные таким образом функции определены корректно, поскольку, применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано [44] для функции F_{ij} , получим ($n \in \mathbb{N}$):

$$F_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{kl}^{c(n)} \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}^c} \Big|_{\substack{\varepsilon_{kl}^c = \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)} \\ \sigma_{pq} = \tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)}}} + \sigma_{pq}^{(n)} \frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma_{pq}} \Big|_{\substack{\varepsilon_{kl}^c = \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n-1)} \\ \sigma_{pq} = \tilde{\sigma}_{pq}^{(n-1)}}} + o(\kappa^n) = O(1), \text{ при } \kappa \rightarrow 0.$$

Построенный на основе функций (1.16) формальный ряд $\sum_{s=0}^{\infty} \kappa^s F_{ij}^{(s)}$ действительно

определяет асимптотическое разложение для $\varphi_{ij}(\cdot)$, так как, вновь используя

формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для F_{ij} , имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\kappa) - \sum_{s=0}^n \kappa^s F_{ij}^{(s)} &= \varphi_{ij}(\kappa) - F_{ij}(\xi, \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n)}, \tilde{\sigma}_{pq}^{(n)}) = \\ &= \kappa^n R_{kl}^{\varepsilon^c(n)}(\kappa) \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}^c} \Big|_{\substack{\varepsilon_{kl}^c = \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n)} \\ \sigma_{pq} = \tilde{\sigma}_{pq}^{(n)}}} + \kappa^n R_{pq}^{\sigma(n)}(\kappa) \frac{\partial F_{ij}}{\partial \sigma_{pq}} \Big|_{\substack{\varepsilon_{kl}^c = \tilde{\varepsilon}_{kl}^{c(n)} \\ \sigma_{pq} = \tilde{\sigma}_{pq}^{(n)}}} + o(\kappa^{2n}) = o(\kappa^n), \text{ при } \kappa \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Подставляя разложение $\sum_{s=0}^{\infty} \kappa^s F_{ij}^{(s)}$ в (1.15) и приравнявая коэффициенты при κ^n в правой и левой части полученной формулы, будем иметь:

$$\varepsilon_{ij}^{c(n)} = F_{ij}^{(n)} \left(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0)}, \dots, \varepsilon_{k_n l_n}^{c(n)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0)}, \dots, \sigma_{p_n q_n}^{(n)} \right). \quad (1.17)$$

Таким образом, для членов асимптотического разложения компонент тензора деформаций ползучести имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.17).

Далее, подставив разложения (1.8) и (1.13) в силовое граничное и контактные условия в системе (1.2), и учтя допущение 1, получим ($n \in \mathbb{Z}_+$):

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{i3}^{(n)} \right]_{\xi=\xi_k} &= 0, \\ \left[u_i^{(n+1)} \right]_{\xi=\xi_k} &= 0, \\ \sigma_{i3}^{(n)} \Big|_{\xi=\pm 1/2} &= -p_{\pm} \delta_{i3} \delta_{n3}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Объединяя полученные соотношения, приходим к локальным задачам для нулевого приближения:

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_{\xi} \sigma_{i3}^{(0)} &= 0, \\ \sigma_{ij}^{(0)} &= C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}^{(0)} - \varepsilon_{kl}^{c(0)} \right), \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0)} &= F_{ij}^{(0)} \left(\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0)}, \sigma_{pq}^{(0)} \right), \\ 2\varepsilon_{ij}^{(0)} &= \partial_j u_i^{(0)} + \partial_i u_j^{(0)} + \delta_{j3} \partial_{\xi} u_i^{(1)} + \delta_{i3} \partial_{\xi} u_j^{(1)}, \\ \left[\sigma_{i3}^{(0)} \right]_{\xi=\xi_k} &= 0, \\ \left[u_i^{(1)} \right]_{\xi=\xi_k} &= 0, \\ \varepsilon_{ij}^{c(0)} \Big|_{\tau=0} &= 0, \\ \sigma_{i3}^{(0)} \Big|_{\xi=\pm 1/2} &= 0, \\ \langle u_i^{(1)} \rangle &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1.19)$$

и для последующих приближений ($n \in \mathbb{N}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\xi} \sigma_{i3}^{(n)} + \partial_J \sigma_{iJ}^{(n-1)} = h_i^{(n-1)}(\tau, q_I), \\ \sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^{(n)} - \varepsilon_{kl}^{c(n)}), \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(n)} = F_{ij}^{(n)}(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0)}, \dots, \varepsilon_{k_n l_n}^{c(n)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0)}, \dots, \sigma_{p_n q_n}^{(n)}), \\ 2\varepsilon_{ij}^{(n)} = \partial_j u_i^{(n)} + \partial_i u_j^{(n)} + \delta_{j3} \partial_{\xi} u_i^{(n+1)} + \delta_{i3} \partial_{\xi} u_j^{(n+1)}, \\ \left[\sigma_{i3}^{(n)} \right]_{\xi=\xi_k} = 0, \\ \left[u_i^{(n+1)} \right]_{\xi=\xi_k} = 0, \\ \varepsilon_{ij}^{c(n)} \Big|_{\tau=0} = 0, \\ \sigma_{i3}^{(n)} \Big|_{\xi=\pm 1/2} = -p_{\pm} \delta_{i3} \delta_{n3}, \\ \langle u_i^{(n+1)} \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Здесь к локальным задачам присовокуплены традиционные для МАО условия однозначной разрешимости локальных задач $\langle u_i^{(n+1)} \rangle = 0$ (условия нормировки),

где $\langle f(\tau, q_I, \xi) \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(\tau, q_I, \xi) d\xi$ – функционал осреднения по толщине пластины.

Неизвестными в этой последовательности задач являются функции $u_i^{(n+1)}, n \in \mathbb{Z}_+$.

Локальные задачи параметризованы функциями $u_i^{(0)} = v_i(\tau, q_I)$, для определения которых далее будет сформулированы осредненные задачи.

1.4. Решение локальных задач

Локальные задачи (1.19)- (1.20), хотя и являются одномерными по переменной ξ , но осложнены входящими в них системами обыкновенных дифференциальных уравнений (1.17). Вследствие этого, получение явного аналитического решения локальных задач, вообще говоря, не представляется возможным. При численном

моделировании для решения системы (1.17) может быть применена одна из разностных схем.

В рамках данного пункта кроме условий в допущении 4, будем предполагать, что функции F_{ij} являются бесконечно дифференцируемыми по каждому из аргументов ε_{kl}^c , σ_{pq} на всей числовой прямой. Для дальнейших пунктов достаточно условий, наложенных в допущении 4.

Определяющее соотношение ползучести для локальных задач (1.19)-(1.20) может быть записано в следующем виде:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijKL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + \tilde{C}_{ijk3} \varepsilon_{k3}^{(n)} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{c(n)}. \quad (1.21)$$

Далее, умножая это соотношение (при $i = s, j = 3$) на матрицу $\tilde{C}^{-1} = \left(\left(\tilde{C}^{-1} \right)_s^k = \tilde{C}_{k3s3}^{-1} \right)_3^3$

(для которой $2\tilde{C}_{K3s3}^{-1} = C_{K3s3}^{-1}$, $\tilde{C}_{33s3}^{-1} = C_{33s3}^{-1}$), будем иметь:

$$\varepsilon_{k3}^{(n)} = \tilde{C}_{k3s3}^{-1} \left[\sigma_{s3}^{(n)} - C_{s3KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{s3pq} \varepsilon_{pq}^{c(n)} \right]. \quad (1.22)$$

Из этого соотношения и из формулы (1.21) получаем:

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJK3} C_{k3s3}^{-1} \sigma_{s3}^{(n)} + \hat{C}_{IJKL} \left[\varepsilon_{KL}^{(n)} - \varepsilon_{KL}^{c(n)} \right]. \quad (1.23)$$

Здесь компоненты \hat{C}_{IJKL} определены в допущении 2.

Найдем рекуррентные соотношения для компонент вектора перемещений. Для компоненты $u_3^{(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ из (1.12), с учетом условия нормировки, имеем:

$$u_3^{(n+1)} = \int_{-1/2}^{\xi} \varepsilon_{33}^{(n)} d\xi - \left\langle \int_{-1/2}^{\xi} \varepsilon_{33}^{(n)} d\xi \right\rangle = \int_{-1/2}^{\xi} \varepsilon_{33}^{(n)} d\xi + \langle (\xi - 1/2) \varepsilon_{33}^{(n)} \rangle = \left\langle \varepsilon_{33}^{(n)} \right\rangle_{\xi}. \quad (1.24)$$

Здесь и далее, для сокращения записи, введен оператор:

$$\left\langle f(\tau, q_I, \xi) \right\rangle_{\xi} = \int_{-1/2}^{\xi} f(\tau, q_I, \xi) d\xi + \langle (\xi - 1/2) f(\tau, q_I, \xi) \rangle.$$

Аналогично, для остальных компонент вектора перемещений $u_I^{(n+1)}$ из (1.12) получим:

$$u_I^{(n+1)} = \left\langle 2\varepsilon_{I3}^{(n)} - \partial_I u_3^{(n)} \right\rangle_{\xi}, \quad (1.25)$$

Далее из (1.25) и (1.12) имеем следующее рекуррентное соотношение, связывающее компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{IJ}^{(n+1)}$ с компонентами тензора деформаций и вектора перемещений предыдущих членов асимптотического разложения:

$$\varepsilon_{IJ}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\partial_J u_I^{(n+1)} + \partial_I u_J^{(n+1)} \right) = \left\langle \partial_J \varepsilon_{I3}^{(n)} + \eta_{IJ}^{(n)} + \partial_I \varepsilon_{J3}^{(n)} \right\rangle_{\xi}.$$

Здесь введены коэффициенты $\eta_{IJ}^{(n)} = -\partial_{IJ}^2 u_3^{(n)}$, а $\partial_{IJ}^2 = \frac{\partial^2}{\partial q_J \partial q_I}$ – соответствующий оператор дифференцирования. Подставляя в это соотношение формулу (1.22), будем иметь:

$$\varepsilon_{IJ}^{(n+1)} = \left\langle \Psi_{IJsK} \partial_K \sigma_{s3}^{(n)} + \Phi_{IJKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{(n)} + \eta_{IJ}^{(n)} \right\rangle_{\xi} + \Phi_{IJ}^{c(n)}, \quad (1.26)$$

$$2\Psi_{IJsK} = C_{I3s3}^{-1} \delta_{KJ} + C_{J3s3}^{-1} \delta_{KI}, \quad 2\Phi_{IJKL} = -C_{s3KL} \left(C_{I3s3}^{-1} \delta_{MJ} + C_{J3s3}^{-1} \delta_{MI} \right),$$

$$2\Phi_{IJ}^{c(n)} = \left\langle C_{s3pq} \left(C_{I3s3}^{-1} \partial_J \varepsilon_{pq}^{c(n)} + C_{J3s3}^{-1} \partial_I \varepsilon_{pq}^{c(n)} \right) \right\rangle_{\xi}.$$

Из уравнения равновесия локальной задачи (1.19) следует, что компоненты $\sigma_{i3}^{(0)}$ не зависят от локальной переменной ξ . Учитывая силовые граничные условия, контактные условия для системы (1.19) и допущение 1, приходим к выводу, что уравнение равновесия локальной задачи начального приближения имеет нулевое решение:

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0. \quad (1.27)$$

Для локальной задачи (1.20) решение уравнение равновесия, с учётом силового граничного условия на внутренней поверхности ($\xi = -1/2$) и контактных условий, имеет вид ($n \in \mathbb{Z}_+$):

$$\sigma_{i3}^{(n+1)} = -p_- \delta_{i3} \delta_{n2} - \int_{-1/2}^{\xi} \partial_J \sigma_{ij}^{(n)} d\xi + (\xi + 1/2) h_i^{(n)}. \quad (1.28)$$

Из граничного условия на внешней поверхности ($\xi = 1/2$) находим выражение для неизвестных функций $h_i^{(n)}$:

$$h_i^{(n)} = -\Delta p \delta_{i3} \delta_{n2} + \langle \partial_J \sigma_{ij}^{(n)} \rangle. \quad (1.29)$$

Здесь введено обозначение $\Delta p = p_+ - p_-$. Далее, подставляя (1.29) в (1.28), будем иметь:

$$\sigma_{i3}^{(n+1)} = -(p_- + \Delta p (\xi + 1/2)) \delta_{i3} \delta_{n2} - \left\{ \partial_J \sigma_{ij}^{(n)} \right\}_{\xi}. \quad (1.30)$$

В этой формуле, для краткости записи, введен оператор:

$$\left\{ f(\tau, q_I, \xi) \right\}_{\xi} = \int_{-1/2}^{\xi} (f(\tau, q_I, \xi) - \langle f(\tau, q_I, \xi) \rangle) d\xi,$$

Из формул (1.30) и (1.23) вытекают рекуррентные соотношения для вычисления членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений $\sigma_{i3}^{(n+1)}$:

$$\sigma_{i3}^{(n+1)} = - \left\{ C_{iJk3} C_{k3s3}^{-1} \partial_J \sigma_{s3}^{(n)} \right\}_{\xi} - \left\{ \hat{C}_{iJKL} \partial_J \varepsilon_{KL}^{(n)} \right\}_{\xi} + \left\{ \hat{C}_{iJKL} \partial_J \varepsilon_{KL}^{c(n)} \right\}_{\xi}, \quad (1.31)$$

$$\sigma_{33}^{(n+1)} = -(p_- + \Delta p (\xi + 1/2)) \delta_{n2} - \left\{ \partial_J \sigma_{3J}^{(n)} \right\}_{\xi}. \quad (1.32)$$

Найдем рекуррентное соотношение для $\eta_{IJ}^{(n+1)} = -\partial_{IJ}^2 u_3^{(n+1)}$. Подставив (1.22) в (1.24) (при $k = 3$), получим:

$$\eta_{IJ}^{(n+1)} = - \left\langle C_{33s3}^{-1} \partial_{IJ}^2 \sigma_{s3}^{(n)} \right\rangle_{\xi} + \left\langle C_{33s3}^{-1} C_{s3KL} \partial_{IJ}^2 \varepsilon_{KL}^{(n)} \right\rangle_{\xi} - \left\langle C_{33s3}^{-1} C_{s3pq} \partial_{IJ}^2 \varepsilon_{pq}^{c(n)} \right\rangle_{\xi}. \quad (1.33)$$

Соотношения (1.33) совместно с (1.31)-(1.32) и (1.26), позволяют вычислять компоненты $\eta_{IJ}^{(n+1)}$, $\varepsilon_{IJ}^{(n+1)}$, $\sigma_{i3}^{(n+1)}$ по предыдущим членам асимптотических разложений этих же компонент. Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{i3}^{(n)}$, напряжений $\sigma_{IJ}^{(n)}$ и вектора перемещений $u_i^{(n)}$ вычисляются по формулам (1.22)-(1.25). Полученные соотношения позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 1. Справедливы следующие представления для функций $\varepsilon_{IJ}^{(m)}$, $\sigma_{i3}^{(m)}$, $\eta_{IJ}^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$:

$$\varepsilon_{IJ}^{(m)} = C_{IJKLM_{m-1}}^{\varepsilon\eta(m)} \partial_{\mathbf{M}_{m-1}}^{m-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{IJKLM_m}^{\varepsilon\varepsilon(m)} \partial_{\mathbf{M}_m}^m \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{IJ}^{\varepsilon(m)} + \Xi_{IJ}^{\varepsilon c(m)}, \quad (1.34)$$

$$\sigma_{I3}^{(m)} = C_{IKLM_{m-1}}^{\sigma S\eta(m)} \partial_{\mathbf{M}_{m-1}}^{m-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{IKLM_m}^{\sigma S\varepsilon(m)} \partial_{\mathbf{M}_m}^m \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_I^{\sigma S(m)} + \Xi_I^{\sigma Sc(m)}, \quad (1.35)$$

$$\sigma_{33}^{(m)} = C_{KLM_{m-1}}^{\sigma T\eta(m)} \partial_{\mathbf{M}_{m-1}}^{m-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{KLM_m}^{\sigma T\varepsilon(m)} \partial_{\mathbf{M}_m}^m \varepsilon_{KL}^{(0)} + P^{\sigma T(m)} + \Xi^{\sigma Tc(m)}, \quad (1.36)$$

$$\eta_{IJ}^{(m)} = C_{IJKLM_m}^{\eta\eta(m)} \partial_{\mathbf{M}_m}^m \eta_{KL}^{(0)} + C_{IJKLM_{m+1}}^{\eta\varepsilon(m)} \partial_{\mathbf{M}_{m+1}}^{m+1} \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{IJ}^{\eta(m)} + \Xi_{IJ}^{\eta c(m)}. \quad (1.37)$$

Здесь $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{M}_n = (M_1, \dots, M_n)$ - мультииндекс, $\partial_{\mathbf{M}_n}^n = \frac{\partial^n}{\partial q_{M_n} \dots \partial q_{M_1}}$ - соответствующие операторы дифференцирования; при $n=0 : \mathbf{M}_0 = \emptyset$, $\partial_{\mathbf{M}_0}^0 = I$ - тождественный оператор, члены, содержащие индекс M_0 считаются равными нулю; при $n=-1 : \mathbf{M}_{-1} = (M_{-1})$, $\partial_{M_{-1}}^{-1}$ - оператор интегрирования по медленной координате $q_{M_{-1}}$:

$$\partial_1^{-1} f(q_1, q_2) = f(q_1^0, q_2) + \int_{q_1^0}^{q_1} f(q_1', q_2) dq_1', \quad \partial_2^{-1} f(q_1, q_2) = f(q_1, q_2^0) + \int_{q_2^0}^{q_2} f(q_1, q_2') dq_2'.$$

В этих интегралах $q_{M_{-1}}^0$ - такое значение координаты $q_{M_{-1}}$, что $(q_1' \ q_2) \in \Sigma$ если $M_{-1}=1$ и $(q_1 \ q_2') \in \Sigma$ если $M_{-1}=2$ при $q_{M_{-1}}' \in [q_{M_{-1}}^0, q_{M_{-1}}]$.

Коэффициенты $C^{(m)}$ в формулах (1.34)-(1.37) являются функциями только локальной координаты ξ . Для нулевых приближений функции $C^{(0)}$, $P^{(0)}$ и $\Xi^{c(0)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_{IKL}^{\varepsilon\eta(0)} &= C_{IKL}^{\sigma S\eta(0)} = C_{IKL}^{\sigma S\varepsilon(0)} = C_{KL}^{\sigma T\eta(0)} = C_{KL}^{\sigma T\varepsilon(0)} = C_{IKLM}^{\eta\varepsilon(0)} = 0, \\
P_{IJ}^{\varepsilon(0)} &= P_I^{\sigma S(0)} = P_I^{\sigma T(0)} = P_{IJ}^{\eta(0)} = 0, \\
\Xi_{IJ}^{\varepsilon c(0)} &= \Xi_{IJ}^{\eta c(0)} = \Xi_I^{\sigma Sc(0)} = \Xi_I^{\sigma Tc(0)} = 0, \\
C_{IKL}^{\eta\eta(0)} &= C_{IKL}^{\varepsilon\varepsilon(0)} = \Delta_{IKL} = 1/2(\delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Замечание. Функции $P^{(m)}$ в соотношениях (1.34)-(1.37) учитывают зависимость решений локальных задач от силовых граничных условий, функции $\Xi^{c(n)}$ - влияние эффектов ползучести.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по параметру m . Для случая $m=0$ справедливость (1.35)-(1.36) следует из (1.27), а остальные соотношения удовлетворяются тождественно. Пусть соотношения (1.34)-(1.37) справедливы и для $m=n$. Покажем их справедливость для $m=n+1$. Рассмотрим сначала формулу (1.34). Подставляя в формулу (1.26) соотношения (1.34)-(1.37), действительно приходим к виду (1.34), причем рекуррентные соотношения для входящих в нее коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_{IKLM_n}^{\varepsilon\eta(n+1)} &= \left\langle \Psi_{IJSn} C_{SKLM_{n-1}}^{\sigma S\eta(n)} + \Psi_{IJ3M_n} C_{KLM_{n-1}}^{\sigma T\eta(n)} + \Phi_{IJPQM_n} C_{PQKLM_{n-1}}^{\varepsilon\eta(n)} + C_{IKLM_n}^{\eta\eta(n)} \right\rangle_{\xi}, \\
C_{IKLM_{n+1}}^{\varepsilon\varepsilon(n+1)} &= \left\langle \Psi_{IJSn+1} C_{SKLM_n}^{\sigma S\varepsilon(n)} + \Psi_{IJ3M_{n+1}} C_{KLM_n}^{\sigma T\varepsilon(n)} + \Phi_{IJPQM_{n+1}} C_{PQKLM_n}^{\varepsilon\varepsilon(n)} + C_{IKLM_{n+1}}^{\eta\varepsilon(n)} \right\rangle_{\xi}, \\
P_{IJ}^{\varepsilon(n+1)} &= \left\langle \Psi_{IJSK} \partial_K P_S^{\sigma S(n)} + \Psi_{IJ3K} \partial_K P^{\sigma T(n)} + \Phi_{IJKL} \partial_M P_{KL}^{\varepsilon(n)} + P_{IJ}^{\eta(n)} \right\rangle_{\xi}, \\
\Xi_{IJ}^{\varepsilon c(n+1)} &= \left\langle \Psi_{IJSK} \partial_K \Xi_S^{\sigma Sc(n)} + \Psi_{IJ3K} \partial_K \Xi^{\sigma Tc(n)} + \Phi_{IJKL} \partial_M \Xi_{KL}^{\varepsilon c(n)} + \Xi_{IJ}^{\eta c(n)} \right\rangle_{\xi} + \Phi_{IJ}^{c(n)}.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Аналогично, для формулы (1.35), подставляя (1.34)-(1.37) в (1.31), получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
C_{IKLM_n}^{\sigma S\eta(n+1)} &= - \left\{ C_{IM_n k3} \left(C_{k3S3}^{-1} C_{SKLM_{n-1}}^{\sigma S\eta(n)} + C_{k333}^{-1} C_{KLM_{n-1}}^{\sigma T\eta(n)} \right) + \hat{C}_{IM_n PQ} C_{PQKLM_{n-1}}^{\varepsilon\eta(n)} \right\}_{\xi}, \\
C_{IKLM_{n+1}}^{\sigma S\varepsilon(n+1)} &= - \left\{ C_{IM_{n+1} k3} \left(C_{k3S3}^{-1} C_{SKLM_n}^{\sigma S\varepsilon(n)} + C_{k333}^{-1} C_{KLM_n}^{\sigma T\varepsilon(n)} \right) + \hat{C}_{IM_{n+1} PQ} C_{PQKLM_n}^{\varepsilon\varepsilon(n)} \right\}_{\xi}, \\
P_I^{\sigma S(n+1)} &= - \left\{ C_{IJK3} \left(C_{k3S3}^{-1} \partial_J P_S^{\sigma S(n)} + C_{k333}^{-1} \partial_J P^{\sigma T(n)} \right) + \hat{C}_{IJKL} \partial_J P_{KL}^{\varepsilon(n)} \right\}_{\xi}, \\
\Xi_I^{\sigma Sc(n+1)} &= - \left\{ C_{IJK3} \left(C_{k3S3}^{-1} \partial_J \Xi_S^{\sigma Sc(n)} + C_{k333}^{-1} \partial_J \Xi^{\sigma Tc(n)} \right) + \hat{C}_{IJKL} \partial_J \Xi_{KL}^{\varepsilon c(n)} \right\}_{\xi} + \left\{ \hat{C}_{IJKL} \partial_J \mathcal{E}_{KL}^{c(n)} \right\}_{\xi}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Далее, подставляя (1.35) в (1.32), для представления (1.36) будем иметь:

$$\begin{aligned}
C_{KLM_n}^{\sigma T \eta^{(n+1)}} &= -\left\{ C_{M_n KLM_{n-1}}^{\sigma S \eta^{(n)}} \right\}_\xi, \quad C_{KLM_{n+1}}^{\sigma T \varepsilon^{(n+1)}} = -\left\{ C_{M_{n+1} KLM_n}^{\sigma S \varepsilon^{(n)}} \right\}_\xi, \\
P^{\sigma T^{(n+1)}} &= -(p_- + \Delta p(\xi + 1/2)) \delta_{3(n+1)} - \left\{ \partial_M P_M^{\sigma S^{(n)}} \right\}_\xi, \quad (1.41) \\
\Xi^{\sigma T c^{(n+1)}} &= -\left\{ \partial_M \Xi_M^{\sigma S c^{(n)}} \right\}_\xi.
\end{aligned}$$

Подставляя (1.34)-(1.37) в формулу (1.33), для (1.37) получим:

$$\begin{aligned}
C_{IJKL M_{n+1}}^{\eta \eta^{(n+1)}} &= -\Delta_{IJM_n M_{n+1}} \left\langle C_{33S3}^{-1} C_{SKL M_{n-1}}^{\sigma S \eta^{(n)}} + C_{3333}^{-1} C_{KLM_{n-1}}^{\sigma T \eta^{(n)}} - C_{33s3}^{-1} C_{s3PQ} C_{PQKLM_{n-1}}^{\varepsilon \eta^{(n)}} \right\rangle_\xi, \\
C_{IJKL M_{n+2}}^{\eta \varepsilon^{(n+1)}} &= -\Delta_{IJM_{n+1} M_{n+2}} \left\langle C_{33S3}^{-1} C_{SKL M_n}^{\sigma S \varepsilon^{(n)}} + C_{3333}^{-1} C_{KLM_n}^{\sigma T \varepsilon^{(n)}} - C_{33s3}^{-1} C_{s3PQ} C_{PQKLM_n}^{\varepsilon \varepsilon^{(n)}} \right\rangle_\xi, \\
P_{IJ}^{\eta^{(n+1)}} &= -\left\langle C_{33S3}^{-1} \partial_{IJ}^2 P_S^{\sigma S^{(n)}} + C_{3333}^{-1} \partial_{IJ}^2 P^{\sigma T^{(n)}} - C_{33s3}^{-1} C_{s3PQ} \partial_{IJ}^2 P_{PQ}^{\varepsilon^{(n)}} \right\rangle_\xi, \\
\Xi_{IJ}^{\eta c^{(n+1)}} &= -\left\langle C_{33S3}^{-1} \partial_{IJ}^2 \Xi_S^{\sigma S c^{(n)}} + C_{3333}^{-1} \partial_{IJ}^2 \Xi^{\sigma T c^{(n)}} - C_{33s3}^{-1} \left(C_{s3PQ} \partial_{IJ}^2 \Xi_{PQ}^{\varepsilon c^{(n)}} - C_{s3pq} \partial_{IJ}^2 \varepsilon_{pq}^{c^{(n)}} \right) \right\rangle_\xi.
\end{aligned} \quad (1.42)$$

Теорема 1 доказана.

Из доказанной теоремы и соотношений (1.22)-(1.23) вытекают аналогичные по форме представления для членов асимптотических разложений компонент тензоров напряжений и деформаций, отсутствующих в формулах (1.34)-(1.37):

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL M_{n-1}}^{\sigma \eta^{(n)}} \partial_{M_{n-1}}^{n-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{IJKL M_n}^{\sigma \varepsilon^{(n)}} \partial_{M_n}^n \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_{IJ}^{\sigma^{(n)}} + \Xi_{IJ}^{\sigma c^{(n)}}, \quad (1.43)$$

$$\varepsilon_{i3}^{(n)} = C_{iKLM_{n-1}}^{\varepsilon S \eta^{(n)}} \partial_{M_{n-1}}^{n-1} \eta_{KL}^{(0)} + C_{iKLM_n}^{\varepsilon S \varepsilon^{(n)}} \partial_{M_n}^n \varepsilon_{KL}^{(0)} + P_i^{\varepsilon S^{(n)}} + \Xi_i^{\varepsilon S c^{(n)}}, \quad (1.44)$$

где соответствующие коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_{IJKL M_{n-1}}^{\sigma \eta^{(n)}} &= C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} C_{SKL M_{n-1}}^{\sigma S \eta^{(n)}} + C_{IJK3} C_{k333}^{-1} C_{KLM_{n-1}}^{\sigma T \eta^{(n)}} + \hat{C}_{IJPQ} C_{PQKLM_{n-1}}^{\varepsilon \eta^{(n)}}, \\
C_{IJKL M_n}^{\sigma \varepsilon^{(n)}} &= C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} C_{SKL M_n}^{\sigma S \varepsilon^{(n)}} + C_{IJK3} C_{k333}^{-1} C_{KLM_n}^{\sigma T \varepsilon^{(n)}} + \hat{C}_{IJPQ} C_{PQKLM_n}^{\varepsilon \varepsilon^{(n)}}, \\
P_{IJ}^{\sigma^{(n)}} &= C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} P_S^{\sigma S^{(n)}} + C_{IJK3} C_{k333}^{-1} P^{\sigma T^{(n)}} + \hat{C}_{IJPQ} P_{PQ}^{\varepsilon^{(n)}}, \\
\Xi_{IJ}^{\sigma c^{(n)}} &= C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \Xi_S^{\sigma S c^{(n)}} + C_{IJK3} C_{k333}^{-1} \Xi^{\sigma T c^{(n)}} + \hat{C}_{IJPQ} \Xi_{PQ}^{\varepsilon c^{(n)}} - \hat{C}_{IJPQ} \varepsilon_{PQ}^{c^{(n)}}.
\end{aligned} \quad (1.45)$$

и:

$$\begin{aligned}
C_{iKLM_{n-1}}^{\varepsilon S \eta^{(n)}} &= \tilde{C}_{i3S3}^{-1} C_{SKL M_{n-1}}^{\sigma S \eta^{(n)}} + \tilde{C}_{i333}^{-1} C_{KLM_{n-1}}^{\sigma T \eta^{(n)}} - \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} C_{PQKLM_{n-1}}^{\varepsilon \eta^{(n)}}, \\
C_{iKLM_n}^{\varepsilon S \varepsilon^{(n)}} &= \tilde{C}_{i3S3}^{-1} C_{SKL M_n}^{\sigma S \varepsilon^{(n)}} + \tilde{C}_{i333}^{-1} C_{KLM_n}^{\sigma T \varepsilon^{(n)}} - \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} C_{PQKLM_n}^{\varepsilon \varepsilon^{(n)}}, \\
P_i^{\varepsilon S^{(n)}} &= \tilde{C}_{i3S3}^{-1} P_S^{\sigma S^{(n)}} + \tilde{C}_{i333}^{-1} P^{\sigma T^{(n)}} - \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} P_{PQ}^{\varepsilon^{(n)}}, \\
\Xi_i^{\varepsilon S c^{(n)}} &= \tilde{C}_{i3S3}^{-1} \Xi_S^{\sigma S c^{(n)}} + \tilde{C}_{i333}^{-1} \Xi^{\sigma T c^{(n)}} - \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} \Xi_{PQ}^{\varepsilon c^{(n)}} + \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3pq} \varepsilon_{pq}^{c^{(n)}}.
\end{aligned} \quad (1.46)$$

Выпишем явный вид начальных членов асимптотических разложений для компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений. Для этого, интегрируя определяющее соотношение ползучести в локальной задаче нулевого приближения (1.19), учитывая начальное условие, вид решения задачи нулевого приближения (1.27) и допущение 4, получим:

$$\varepsilon_{I3}^{c(0)} = \int_0^{\tau} F_{I3} \left(\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0)}, \sigma_{PQ}^{(0)}, \sigma_{p3}^{(0)} \right) dt = 0.$$

Данное соотношение позволяет упростить выражения для начальных членов рассматриваемых разложений. В результате использования соотношений (1.34)-(1.37) и (1.43)-(1.44), начальные члены указанных ФАР примут следующий вид (верхний индекс в последующих формулах данного пункта показывает, до какого порядка включительно удерживаются члены). Для компонент вектора перемещений:

$$\tilde{u}_I^{(1)} = u_I^{(0)} - \kappa \left(\xi \partial_I u_3^{(0)} + \left\langle C_{I3s3}^{-1} C_{s3KL} \right\rangle_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\langle C_{I3s3}^{-1} C_{s3KL} \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\rangle_{\xi} \right), \quad (1.47)$$

$$\tilde{u}_3^{(1)} = u_3^{(0)} - \kappa \left(\left\langle C_{33s3}^{-1} C_{s3KL} \right\rangle_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\langle C_{33s3}^{-1} C_{s3KL} \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\rangle_{\xi} - \left\langle \varepsilon_{33}^{c(0)} \right\rangle_{\xi} \right). \quad (1.48)$$

Для изгибных и сдвиговых деформаций:

$$\tilde{\varepsilon}_{IJ}^{(1)} = \varepsilon_{IJ}^{(0)} + \kappa \left(\xi \eta_{IJ}^{(0)} + \left\langle \Phi_{JKLM} \right\rangle_{\xi} \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} + \Phi_{IJ}^{c(0)} \right), \quad (1.49)$$

Для деформаций межслойного сдвига и нормальных деформаций:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{i3}^{(1)} = & \tilde{C}_{i3s3}^{-1} \left(-C_{s3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{s3KL} \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right) + \varepsilon_{i3}^{c(0)} - \\ & - \kappa \left(\xi \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3KL} \eta_{KL}^{(0)} + \left[\tilde{C}_{i3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} + \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3PQ} \left\langle \Phi_{PQKLM} \right\rangle_{\xi} \right] \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} \right) + \\ & + \kappa \left(\tilde{C}_{i3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} - \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3KL} \Phi_{KL}^{c(0)} + \tilde{C}_{i3s3}^{-1} C_{s3pq} \varepsilon_{pq}^{c(1)} \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Для изгибных и сдвиговых напряжений:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{IJ}^{(1)} = & \hat{C}_{IJKL} \left[\varepsilon_{KL}^{(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right] + \kappa \hat{C}_{IJKL} \left[\xi \eta_{KL}^{(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1)} + \Phi_{KL}^{c(0)} \right] + \\ & + \kappa \left[\left(\hat{C}_{IJPQ} \langle \Phi_{PQKLM} \rangle_{\xi} - C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} \right) \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Для напряжений межслойного сдвига:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{I3}^{(2)} = & -\kappa \left[\left\{ \hat{C}_{IMKL} \right\}_{\xi} \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} \right] - \\ & - \kappa^2 \left[\left\{ \xi \hat{C}_{IMKL} \right\}_{\xi} \partial_M \eta_{KL}^{(0)} - \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(1)} \right\}_{\xi} + \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \Phi_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} \right] + \\ & + \kappa^2 \left[\left\{ C_{INk3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} - \hat{C}_{INPQ} \langle \Phi_{PQKLM} \rangle_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{MN}^2 \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\{ C_{INk3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_{MN}^2 \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Для нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{33}^{(3)} = & \kappa^2 \left[\left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{MN}^2 \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \partial_{MN}^2 \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \right] - \kappa^3 (p_- + \Delta p (\xi + 1/2)) + \\ & + \kappa^3 \left[\left\{ \left\{ \xi \hat{C}_{MNKL} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{MN}^2 \eta_{KL}^{(0)} - \left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \partial_{MN}^2 \varepsilon_{KL}^{c(1)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} + \left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \partial_{MN}^2 \Phi_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \right] - \\ & - \kappa^3 \left[\left\{ \left\{ C_{RNk3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} - \hat{C}_{RNPO} \langle \Phi_{PQKLM} \rangle_{\xi} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{MNR}^3 \varepsilon_{KL}^{(0)} + \right. \\ & \left. + \kappa^3 \left\{ \left\{ C_{RNk3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_{MNR}^3 \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

1.5. Осредненные уравнения равновесия бесконечного порядка

Подставив формулу (1.29) в асимптотическое разложение (1.14), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \langle \partial_j \sigma_{ij}^{(n)} \rangle \sim \kappa^2 \Delta p \delta_{i3}. \quad (1.54)$$

Введя компоненты усилий и перерезывающих сил:

$$T_{IJ} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n T_{IJ}^{(n)}, \quad Q_I \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n Q_I^{(n)},$$

где $T_{II}^{(n)} = \langle \sigma_{II}^{(n)} \rangle$, $Q_I^{(n)} = \langle \sigma_{I3}^{(n)} \rangle$, соотношение (1.54) можно записать в виде:

$$\partial_J T_{II} = 0, \quad (1.55)$$

$$\partial_J Q_J = \kappa^2 \Delta p. \quad (1.56)$$

Интегрируя по частям и учитывая силовое граничное условие локальных задач (1.19)-(1.20) $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, имеем следующее, вспомогательное, соотношение:

$$\langle \xi \partial_\xi \sigma_{I3}^{(n)} \rangle = -\langle \sigma_{I3}^{(n)} \rangle.$$

Далее, умножив уравнение равновесия в локальной задаче (1.20) на ξ и проинтегрировав по толщине пластины, с учетом последней формулы, получаем:

$$\partial_J \langle \xi \sigma_{II}^{(n-1)} \rangle = \langle \sigma_{I3}^{(n)} \rangle. \quad (1.57)$$

Тогда, вводя компоненты моментов:

$$M_{II} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n M_{II}^{(n)}, \quad M_{II}^{(n)} = \langle \xi \sigma_{II}^{(n-1)} \rangle,$$

соотношение (1.57) позволяет записать формулу связи моментов и перерезывающих сил:

$$\partial_J M_{II}^{(n)} = Q_I^{(n)}. \quad (1.58)$$

Подставляя это соотношение в (1.56), получим:

$$\partial_{II}^2 M_{II} = \kappa^2 \Delta p. \quad (1.59)$$

Уравнения (1.55) и (1.59) составляют осредненные уравнения равновесия пластины бесконечного порядка.

1.6. Осредненные определяющие соотношения

Подставляя в начальные члены ФАР усилий и моментов члены ФАР компонент тензора напряжений, выписанные в формуле (1.51), приходим к выражениям для осреднённых определяющих соотношений:

$$T_{IJ} \sim \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + T_{IJ}^{c(0)} + \kappa \left(B_{IJKL} \eta_{KL}^{(0)} + K_{IJKLM} \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{T}_{IJ}^{c(1)} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \kappa^n T_{IJ}^{(n)}, \quad (1.60)$$

$$M_{IJ} \sim \kappa \left(B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + M_{IJ}^{c(1)} \right) + \kappa^2 \left(D_{IJKL} \eta_{KL}^{(0)} + \bar{K}_{IJKLM} \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} + \tilde{M}_{IJ}^{c(2)} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \kappa^n M_{IJ}^{(n)}. \quad (1.61)$$

Здесь введены следующие функции, не зависящие от локальной координаты ξ :

$$\bar{C}_{IJKL} = \left\langle \hat{C}_{IJKL} \right\rangle, B_{IJKL} = \left\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \right\rangle, K_{IJKLM} = \left\langle \hat{C}_{IJPQ} \left\langle \Phi_{PQKLM} \right\rangle_{\xi} - C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} \right\rangle, \quad (1.62)$$

$$D_{IJKL} = \left\langle \xi^2 \hat{C}_{IJKL} \right\rangle, \bar{K}_{IJKLM} = \left\langle \xi \hat{C}_{IJPQ} \left\langle \Phi_{PQKLM} \right\rangle_{\xi} - \xi C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} \right\rangle.$$

$$T_{IJ}^{c(0)} = - \left\langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\rangle, \tilde{T}_{IJ}^{c(1)} = \left\langle C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} + \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1)} \right] \right\rangle, \quad (1.63)$$

$$M_{IJ}^{c(1)} = - \left\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\rangle, \tilde{M}_{IJ}^{c(2)} = \left\langle \xi C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} + \xi \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1)} \right] \right\rangle.$$

1.7. Осреднённые задачи

Неизвестными функциями в осредненных уравнениях равновесия бесконечного порядка (1.55), (1.59) являются функции $u_i^{(0)}(\tau, q_I) = v_i(\tau, q_I)$, составляющие главный член в асимптотическом разложении (1.8). Решение этих уравнений также будем искать в виде асимптотического разложения по степеням геометрического параметра κ :

$$v_i(\tau, q_I) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n v_i^{(n)}(\tau, q_I). \quad (1.64)$$

Выражения для осреднённых определяющих соотношений (1.60)-(1.61) содержат члены $T_{II}^{c(0)}$, $\tilde{T}_{II}^{c(1)}$, $M_{II}^{c(1)}$, $\tilde{M}_{II}^{c(2)}$, которые имеют зависимость от $\mathbf{v}(\tau, q_I)$. Поэтому, для получения осредненных задач необходимо найти разложения для указанных функций по малому параметру κ , подставляя в них разложения (1.64). Поскольку зависимость этих членов от $\mathbf{v}(\tau, q_I)$ неявная, необходимо построить разложения функций входящих в системы (1.19) и (1.20) (для $n=1$). Для удобства дальнейших выкладок введем вспомогательные операторы $e_{II}(\cdot)$ и $\eta_{II}(\cdot)$:

$$2e_{II}(\mathbf{v}) = \partial_J v_I + \partial_I v_J, \quad \eta_{II}(\mathbf{v}) = -\partial_{II}^2 v_3.$$

Оператор $e_{II}(\cdot)$ без изменения обозначений будем рассматривать действующими на вектор-функции двух и трех измерений, а оператор $\eta_{II}(\cdot)$ - действующим на функции одного или трех измерений. Введем также обозначения для членов асимптотического разложения вектора продольных перемещений ($n \in \mathbb{Z}_+$):

$$\mathbf{v}^{L(n)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n)} & v_2^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Получим теперь формулы для двух начальных членов разложений $T_{II}^{c(0)}(\mathbf{v})$, $M_{II}^{c(1)}(\mathbf{v})$. Согласно формулам (1.49)-(1.53), соотношения для компонент первого члена асимптотического разложения для тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$, выраженные через компоненты деформаций $\varepsilon_{II}^{(0)}$, деформаций ползучести $\varepsilon_{II}^{c(0)}$ и перемещений начального приближения $u_i^{(0)} = v_i$, имеют вид (учитывая, что $F_{ij}^{(0)} = F_{ij}$):

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0)} = F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0)}, \sigma_{pq}^{(0)}), \\ \sigma_{II}^{(0)} = \hat{C}_{IIKL}(\varepsilon_{KL}^{(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(0)}), \\ \sigma_{i3}^{(0)} = 0, \\ \varepsilon_{II}^{(0)} = e_{II}(\mathbf{v}), \\ \varepsilon_{ij}^{c(0)}|_{\tau=0} = 0. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему разложение (1.64) и ограничиваясь двумя начальными членами, приходим к формулам для следующих разложений. Для напряжений межслойного сдвига и нормальных напряжений $\sigma_{i3}^{(0)}$:

$$\sigma_{i3}^{(0)} = \sigma_{i3}^{(0,0)} + \kappa \sigma_{i3}^{(0,1)} + O(\kappa^2) = 0. \quad (1.65)$$

Для изгибных и сдвиговых напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(0)} &= \sigma_{IJ}^{(0,0)} + \kappa \sigma_{IJ}^{(0,1)} + O(\kappa^2) = \\ &= \hat{C}_{IJKL} \left(e_{KL}(\mathbf{v}^{(0)}) - \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right) + \kappa \hat{C}_{IJKL} \left(e_{KL}(\mathbf{v}^{(1)}) - \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right) + O(\kappa^2). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Для компонент $\dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0)}$ тензора деформаций ползучести (аналогично формуле (1.17)):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0)} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0,0)} + \kappa \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0,1)} + O(\kappa^2) = F_{ij}^{(0)} \left(\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0,0)}, \sigma_{pq}^{(0,0)} \right) + \\ &+ \kappa F_{ij}^{(1)} \left(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0,0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^{c(0,1)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0,0)}, \sigma_{p_1 q_1}^{(0,1)} \right) + O(\kappa^2), \end{aligned} \quad (1.67)$$

с начальными условиями:

$$\varepsilon_{ij}^{c(0)} \Big|_{\tau=0} = \varepsilon_{ij}^{c(0,0)} \Big|_{\tau=0} + \kappa \varepsilon_{ij}^{c(0,1)} \Big|_{\tau=0} + O(\kappa^2) = 0.$$

Для изгибных и сдвиговых деформаций $\varepsilon_{IJ}^{(0)}$:

$$\varepsilon_{KL}^{(0)} = e_{IJ} \left(\mathbf{v}^{(0)} + \kappa \mathbf{v}^{(1)} + O(\kappa^2) \right) = e_{IJ} \left(\mathbf{v}^{(0)} \right) + \kappa e_{IJ} \left(\mathbf{v}^{(1)} \right) + O(\kappa^2). \quad (1.68)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра в формулах (1.65)-(1.67), получим системы соотношений при κ^0 :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0,0)} = F_{ij}^{(0)} \left(\xi, \varepsilon_{kl}^{c(0,0)}, \sigma_{pq}^{(0,0)} \right), \\ \sigma_{IJ}^{(0,0)} = \hat{C}_{IJKL} \left(e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) - \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right), \\ \sigma_{i3}^{(0,0)} = 0, \\ \varepsilon_{ij}^{c(0,0)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (1.69)$$

и при κ^1 :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0,1)} = F_{ij}^{(1)} \left(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0,0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^{c(0,1)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0,0)}, \sigma_{p_1 q_1}^{(0,1)} \right), \\ \sigma_{IJ}^{(0,1)} = \hat{C}_{IJKL} \left(e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(1)} \right) - \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right), \\ \sigma_{i3}^{(0,1)} = 0, \\ \varepsilon_{ij}^{c(0,1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (1.70)$$

Из формул (1.67) и (1.63) следует вид начальных членов разложений для операторов $T_{IJ}^{c(0)}(\mathbf{v})$, $M_{IJ}^{c(1)}(\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} T_{IJ}^{c(0)}(\mathbf{v}) &= -\left\langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\rangle - \kappa \left\langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right\rangle + O(\kappa^2) \\ M_{IJ}^{c(1)}(\mathbf{v}) &= -\left\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\rangle - \kappa \left\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right\rangle + O(\kappa^2), \end{aligned} \quad (1.71)$$

при этом функции $\varepsilon_{ij}^{c(0,0)}$ и $\varepsilon_{ij}^{c(0,1)}$ являются решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.69)-(1.70), параметризованных компонентами разложений продольных перемещений $v_I^{(0)}$, $v_I^{(1)}$.

Далее, вновь на основании формул (1.49)-(1.53), соотношения для второго члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$ примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(1)} = F_{ij}^{(1)} \left(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^{c(1)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0)}, \sigma_{p_1 q_1}^{(1)} \right), \\ \sigma_{IJ}^{(1)} = \xi \hat{C}_{IJKL} \eta_{KL}^{(0)} + \left(\hat{C}_{IJPQ} \left\langle \Phi_{PQKLM} \right\rangle_{\xi} - C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} \right) \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} + \\ + C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi} + \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1)} \right], \\ \sigma_{I3}^{(1)} = -\left\{ \hat{C}_{IMKL} \right\}_{\xi} \partial_M \varepsilon_{KL}^{(0)} + \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\}_{\xi}, \\ \sigma_{33}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon_{KL}^{(0)} = e_{IJ}(\mathbf{v}), \\ \eta_{IJ}^{(0)} = \eta_{IJ}(\mathbf{v}), \\ \varepsilon_{ij}^{c(1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (1.72)$$

Подставляя в эту систему разложение (1.64), ограничиваясь только начальным членом и учитывая уже полученные разложения (1.65)-(1.67), по аналогии с системами (1.69)-(1.70), получим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(1,0)} = F_{ij}^{(1)} \left(\xi, \varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0,0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^{c(1,0)}, \sigma_{p_0 q_0}^{(0,0)}, \sigma_{p_1 q_1}^{(1,0)} \right), \\ \sigma_{IJ}^{(1,0)} = \xi \hat{C}_{IJKL} \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right) + \\ + \left(\hat{C}_{IJPQ} \langle \Phi_{PQKLM} \rangle_{\xi} - C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} \right) \partial_M e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) + \\ + C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} + \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right], \\ \sigma_{I3}^{(1,0)} = - \left\{ \hat{C}_{IMKL} \right\}_{\xi} \partial_M e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) + \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi}, \\ \sigma_{33}^{(1,0)} = 0, \\ 2\Phi_{IJ}^{c(0,0)} = \left\langle C_{s3pq} \left(C_{I3s3}^{-1} \partial_J \varepsilon_{pq}^{c(0,0)} + C_{J3s3}^{-1} \partial_I \varepsilon_{pq}^{c(0,0)} \right) \right\rangle_{\xi}, \\ \varepsilon_{ij}^{c(1,0)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{array} \right. \quad (1.73)$$

где $\Phi_{IJ}^{c(0,0)}$, $\sigma_{ij}^{(1,0)}$, $\varepsilon_{ij}^{c(1,0)}$ - начальные члены в разложении $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{c(1)}$ и $\Phi_{IJ}^{c(0)}$ по степеням κ соответственно:

$$\begin{aligned} \Phi_{IJ}^{c(0)} &= \Phi_{IJ}^{c(0,0)} + O(\kappa), \\ \sigma_{ij}^{(1)} &= \sigma_{ij}^{(1,0)} + O(\kappa), \\ \varepsilon_{ij}^{c(1)} &= \varepsilon_{ij}^{c(1,0)} + O(\kappa). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Далее, подставляя формулы (1.67) и (1.74) в (1.63), будем иметь:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{IJ}^{c(1)} &= \left\langle C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} + \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right] \right\rangle + O(\kappa), \\ \tilde{M}_{IJ}^{c(2)} &= \left\langle \xi C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} + \xi \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right] \right\rangle + O(\kappa). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Подставляя разложение (1.64) в осредненные определяющие соотношения (1.60)-(1.61) и далее в осредненные уравнения бесконечного порядка (1.55) и (1.59), учитывая полученные разложения (1.71) и (1.75), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра κ , получим систему уравнения равновесия начального приближения:

$$\begin{cases} \bar{C}_{IJKL} \partial_J e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) = -\partial_J f_{IJ}^{T(0)}, \\ B_{IJKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) = -\partial_{IJ}^2 f_{IJ}^{M(0)}. \end{cases} \quad (1.76)$$

и для первого приближения:

$$\begin{cases} \bar{C}_{IJKL} \partial_J e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + B_{IJKL} \partial_J \eta_{KL}(v_3^{(0)}) = -\partial_J f_{IJ}^{T(1)}, \\ B_{IJKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + D_{IJKL} \partial_{IJ}^2 \eta_{KL}(v_3^{(0)}) = \Delta p - \partial_{IJ}^2 f_{IJ}^{M(1)}. \end{cases} \quad (1.77)$$

Здесь введены обозначения для функций в правых частях уравнений:

$$\begin{aligned} f_{IJ}^{T(0)} &= -\langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \rangle, \quad f_{IJ}^{M(0)} = -\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \rangle, \\ f_{IJ}^{T(1)} &= K_{IJKLM} \partial_M e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) - \langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \rangle + \\ &+ \langle C_{Ijk3} C_{k3S3}^{-1} \{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \}_{\xi} + \hat{C}_{IJKL} [\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)}] \rangle, \\ f_{IJ}^{M(1)} &= \bar{K}_{IJKLM} \partial_M e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) - \langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \rangle + \\ &+ \langle \xi C_{Ijk3} C_{k3S3}^{-1} \{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \}_{\xi} + \xi \hat{C}_{IJKL} [\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)}] \rangle. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Таким образом, получены уравнения равновесия аналогичные по виду уравнениям в теории Кирхгофа-Лява [7]. Отметим, что отнесение членов, содержащих компоненты $\varepsilon_{IJ}^{c(0,0)}$, $\varepsilon_{IJ}^{c(0,1)}$, $\varepsilon_{IJ}^{c(1,0)}$ тензоров деформаций ползучести соответствующих приближений в правые части уравнений равновесия (1.76)-(1.77) при их фактической зависимости от неизвестных функций указанных уравнений, основано на соображении применения для решения этих уравнений явных разностных схем по временному параметру. В этом случае правые части являются известными функциями, вычисленными на предыдущих шагах разностной схемы.

Получим теперь выражения для граничных условий к уравнениям (1.76)-(1.77). Подставляя для этого разложения (1.64), (1.67)-(1.68) в выражения для компонент перемещений (1.47)-(1.48) и далее полученные формулы - в левую

часть граничных условий в системе (1.2), а представление граничных перемещений (1.6) в допущении 3 - в правую часть, получим:

$$\begin{aligned} v_I^{(0)} + \kappa v_I^{(1)} - \kappa \left(\xi \partial_I v_3^{(0)} + \left\langle C_{I3s3}^{-1} C_{s3KL} \right\rangle_{\xi} e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) \right) + \\ + \kappa \left\langle C_{I3s3}^{-1} C_{s3KL} \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\rangle_{\xi} + O(\kappa^2) = u_I^{b(0)} + \kappa u_I^{b(1)}, \text{ на } \Sigma^T, \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$v_3^{(0)} + O(\kappa) = u_3^{b(0)}, \text{ на } \Gamma. \quad (1.80)$$

Таким образом, при наложении на функции $v_i^{(0)}$, $v_I^{(1)}$, являющиеся неизвестными в уравнениях равновесия (1.76)-(1.77) следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} v_i^{(0)} \Big|_{\Gamma} &= u_i^{b(0)}, \\ v_I^{(1)} \Big|_{\Gamma} &= u_I^{b(1)}, \quad (1.81) \\ \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned}$$

граничные условия исходной задачи (1.2) оказываются выполненными с точностью до членов $O(\kappa)$. Следует отметить, что в частном случае моноклинных материалов условия (1.81) обеспечивают выполнение граничных условий для продольных перемещений с точностью до членов $O(\kappa^2)$, при условии $u_3^{b(0)} = 0$, что будет обосновано в пункте 1.8. Необходимость введения граничных условий на нормальные производные от функций $v_3^{(0)}$ обусловлена увеличением порядка производных от прогибов в уравнениях (1.76)-(1.77) относительно исходной системы (1.2).

Объединяя найденные граничные условия (1.81) и уравнения равновесия (1.76)-(1.77), получим систему уравнений начального приближения:

$$\begin{cases} \bar{C}_{IKL} \partial_I e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) = -\partial_I f_{II}^{T(0)}, \\ B_{IKL} \partial_{II}^2 e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) = -\partial_{II}^2 f_{II}^{M(0)}, \quad (1.82) \\ v_I^{(0)} \Big|_{\Gamma} = u_I^{b(0)}. \end{cases}$$

и для первого приближения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{IJKL} \partial_J e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + B_{IJKL} \partial_J \eta_{KL}(v_3^{(0)}) = -\partial_J f_{IJ}^{T(1)}, \\ B_{IJKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + D_{IJKL} \partial_{IJ}^2 \eta_{KL}(v_3^{(0)}) = \Delta p - \partial_{IJ}^2 f_{IJ}^{M(1)}, \\ v_I^{(1)}|_{\Gamma} = u_I^{b(1)}, \\ v_3^{(0)}|_{\Gamma} = u_3^{b(0)}, \\ \left. \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0. \end{array} \right. \quad (1.83)$$

Для замыкания систему (1.82) необходимо рассматривать совместно с системой (1.69), а систему (1.83) - совместно с системами (1.70) и (1.73). Особенностью систем (1.82)-(1.83) является то, что неизвестными функциями в ней являются вектор-функции двух измерений $\zeta^{(0)} = \mathbf{v}^{L(0)} = (v_1^{(0)} \quad v_2^{(0)})$ для системы (1.82) и трех измерений $\zeta^{(1)} = (v_1^{(1)} \quad v_2^{(1)} \quad v_3^{(0)})$ для системы (1.83). Отметим также, что системы (1.82)-(1.83), в силу присутствия в правой части решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.69)-(1.70) и (1.73) являются нелинейными (в общем случае) системами дифференциальных уравнений в частных производных.

Наличие третьего уравнения в системе (1.82) при двух неизвестных функциях $v_I^{(0)}$ показывает, что для существования решения может потребоваться накладывать дополнительные условия на входные данные системы (граничные условия, тензоры свойств материалов). Для практического решения задачи (1.82) удобно заменить ее задачей более простого вида, подобной задаче (1.83):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{IJKL} \partial_J e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) + B_{IJKL} \partial_J \eta_{KL}(\tilde{v}_3^{(0)}) = -\partial_J f_{IJ}^{T(0)}, \\ B_{IJKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) + D_{IJKL} \partial_{IJ}^2 \eta_{KL}(\tilde{v}_3^{(0)}) = -\partial_{IJ}^2 f_{IJ}^{M(0)}, \\ v_I^{(0)}|_{\Gamma} = u_I^{b(0)}, \\ \tilde{v}_3^{(0)}|_{\Gamma} = 0, \\ \left. \frac{\partial \tilde{v}_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0. \end{array} \right. \quad (1.82')$$

Эта система содержит в качестве неизвестной функции функцию фиктивного прогиба $\tilde{v}_3^{(0)}$. Если данная система имеет решение $\tilde{\zeta}^{(0)} = (v_1^{(0)} \quad v_2^{(0)} \quad \tilde{v}_3^{(0)})$ и $\tilde{v}_3^{(0)} = 0$, то $\zeta^{(0)} = (v_1^{(0)} \quad v_2^{(0)})$ будет являться решением системы (1.82). Напротив, если $\zeta^{(0)} = (v_1^{(0)} \quad v_2^{(0)})$ - решение системы (1.82), то $\tilde{\zeta}^{(0)} = (v_1^{(0)} \quad v_2^{(0)} \quad 0)$ будет решением (1.82'). Следует отметить, что при нулевых граничных условиях начального приближения по продольным перемещениям $u_I^{b(0)} = 0$ из допущения 4 вытекает, что система (1.82) имеет тривиальное решение $v_I^{(0)} = 0$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Исследование существования и единственности решения систем (1.82) и (1.83) без учета ползучести будет проведено в пункте 1.11 настоящей работы.

Явный вид соотношений для вычисления компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений можно получить, подставляя разложения (1.67)-(1.68) и (1.74) в (1.47)-(1.53). В частном случае моноклинных материалов эти соотношения будут приведены в следующем пункте.

1.8. Моноклинные материалы

Полученные ранее соотношения справедливы без ограничения на тип анизотропии материалов слоев пластины. В инженерной практике чаще всего применяются моноклинные (и в частности ортотропные) материалы, для которых тензор моделей упругости ${}^4C(\cdot)$ имеет не более 13 независимых компонент. Немоноклинные материалы используются сравнительно редко – это обычно кристаллические материалы, применяемые в электротехнике.

Для моноклинных материалов матричное представление компонент тензора модулей упругости C_{ijkl} имеет следующий вид [21]:

$$\begin{aligned}
(C_{ijkl})_6^6 &= \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ & & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ & \text{симм.} & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & \text{симм.} & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \end{pmatrix}. \quad (1.84)
\end{aligned}$$

Такая матрица связывает столбцы компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$(\sigma_{ij})_1^6 = (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23})^T, \quad (\varepsilon_{ij})_1^6 = (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23})^T,$$

$$(\sigma_{ij})_1^6 = C(\varepsilon_{ij})_1^6.$$

Из вида этой матрицы следует, что матрица $\tilde{C} = (\tilde{C}_j^i = C_{i3j3})_3^3$ для моноклинных материалов принимает вид:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{1313} & C_{1323} & C_{1333} \\ C_{1323} & C_{2323} & C_{2333} \\ C_{1333} & C_{2333} & C_{3333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1313} & C_{1323} & 0 \\ C_{1323} & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & C_{3333} \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

Далее, из (1.84) и (1.85) (поскольку обратная матрица \tilde{C}^{-1} имеет ту же структуру) вытекает следующая формула для вспомогательных компонент $Z_{IJK} = C_{I3s3}^{-1} C_{s3JK}$:

$$Z_{IJK} = C_{I313}^{-1} C_{13JK} + C_{I323}^{-1} C_{23JK} + C_{I333}^{-1} C_{33JK} = 0. \quad (1.86)$$

Последние формулы позволяет упростить часть полученных ранее соотношений в случае моноклинных материалов. В частности, введенные в допущении 2 компоненты \hat{C}_{IJKL} принимают вид:

$$\hat{C}_{IJKL} = C_{IJKL} - C_{IJP3} C_{p3s3}^{-1} C_{s3KL} = C_{IJKL} - C_{IJP3} Z_{PKL} - C_{IJ33} C_{33s3}^{-1} C_{s3KL} = C_{IJKL} - \frac{C_{IJ33} C_{33KL}}{C_{3333}}. \quad (1.87)$$

Далее, для моноклинных материалов в нуль обращаются следующие функции в формуле (1.78):

$$2\Phi_{IJKLM} = -(Z_{IKL}\delta_{MJ} + Z_{JKL}\delta_{MI}) = 0, K_{IJKLM} = \left\langle \hat{C}_{IJPQ} \langle \Phi_{PQKLM} \rangle_{\xi} - Z_{SIJ} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} \right\rangle = 0,$$

$$\bar{K}_{IJKLM} = \left\langle \xi \hat{C}_{IJPQ} \langle \Phi_{PQKLM} \rangle_{\xi} - \xi Z_{SIJ} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \right\}_{\xi} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} \right\rangle = \left\langle Z_{SIJ} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \xi C_{IJK3} C_{k3S3}^{-1} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} \right\rangle = \left\langle \xi Z_{SIJ} \left\{ \hat{C}_{SMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} \right\rangle = 0. \quad (1.88)$$

Вследствие последних соотношений функции в правой части системы (1.83) допускают упрощение следующего вида:

$$\begin{aligned} f_{IJ}^{T(1)} &= -\left\langle \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right\rangle + \left\langle \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right] \right\rangle, \\ f_{IJ}^{M(1)} &= -\left\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right\rangle + \left\langle \xi \hat{C}_{IJKL} \left[\Phi_{KL}^{c(0,0)} - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Рассмотрим теперь, как упрощаются для моноклинных материалов соотношения для начальных членов асимптотических разложений перемещений (1.47)-(1.48). Учитывая формулы (1.85)-(1.86), начальные члены ФАР для перемещений могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_I^{(1)} &= u_I^{(0)} - \kappa \xi \partial_I u_3^{(0)}, \\ \tilde{u}_3^{(1)} &= u_3^{(0)} - \kappa \left(\left\langle \frac{C_{33KL}}{C_{3333}} \right\rangle_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\langle \frac{C_{33KL}}{C_{3333}} \varepsilon_{KL}^{c(0)} \right\rangle_{\xi} - \left\langle \varepsilon_{33}^{c(0)} \right\rangle_{\xi} \right). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Таким образом, формулы для продольных перемещений, получаемые на основе асимптотического метода в случае моноклинных материалов совпадают с формулами, получаемыми на основе классических теорий типа Кирхгофа-Лява

[7]. Аналогичным образом упрощаются формула для граничных условий для продольных перемещений (1.79):

$$v_I^{(0)} + \kappa v_I^{(1)} - \kappa \xi \partial_I v_3^{(0)} + O(\kappa^2) = u_I^{b(0)} + \kappa u_I^{b(1)}, \text{ на } \Sigma^T. \quad (1.91)$$

Если же дополнительно, кроме граничных условий (1.81) выполнено условие $u_3^{b(0)} = 0$, то имеем:

$$\partial_I v_3^{(0)} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}_I + \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} n_I = 0,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ - вектор касательной к кривой Γ . Тогда из (1.91) вытекает, что в указанном случае граничные условия для продольных перемещений в системе (1.2) выполнены с точностью до членов $O(\kappa^2)$.

Соотношения для напряжений (1.51)-(1.53) в случае моноклинных материалов также допускают значительное упрощение. Учитывая разложения (1.67)-(1.68) и (1.74), а также формулы (1.86) и (1.88), соотношения для изгибных и сдвиговых напряжений примут вид (верхний индекс – наибольший порядок удерживаемых членов):

$$\check{\sigma}_{IJ}^{(1)} = \hat{C}_{IJKL} \left[e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) - \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right] + \kappa \hat{C}_{IJKL} \left[e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) - \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} + \xi \eta_{KL}(v_3^{(0)}) - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} + \Phi_{KL}^{c(0,0)} \right]. \quad (1.92)$$

Выражения для напряжений межслойного сдвига:

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_{I3}^{(2)} = & -\kappa \left[\left\{ \hat{C}_{IMKL} \right\}_{\xi} \partial_M e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) - \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} \right] - \\ & -\kappa^2 \left[\left\{ \hat{C}_{IMKL} \right\}_{\xi} \partial_M e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) - \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right\}_{\xi} + \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \Phi_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} \right] - \\ & -\kappa^2 \left[\left\{ \xi \hat{C}_{IMKL} \right\}_{\xi} \partial_M \eta_{KL}(v_3^{(0)}) - \left\{ \hat{C}_{IMKL} \partial_M \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right\}_{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Выражения для нормальных напряжений:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{33}^{(3)} = & \kappa^2 \left[\left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{MN}^2 e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(0)} \right) - \left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \partial_{MN}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \right] - \kappa^3 \left(p_- + \Delta p (\xi + 1/2) \right) + \\
& + \kappa^3 \left[\left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{MN}^2 e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(1)} \right) - \left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \partial_{MN}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{KL}^{c(0,1)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} + \left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \partial_{MN}^2 \Phi_{KL}^{c(0,0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \right] + \\
& + \kappa^3 \left[\left\{ \left\{ \xi \hat{C}_{MNKL} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{MN}^2 \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right) - \left\{ \left\{ \hat{C}_{MNKL} \partial_{MN}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{KL}^{c(1,0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \right].
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Данные соотношения позволяют вычислять компоненты тензора напряжений, на основе решений $v_i^{(0)}$, $v_i^{(1)}$ осредненных задач (1.82)-(1.83).

1.9. Вариационные уравнения осредненных задач

Выведем в данном пункте вариационные уравнения для осредненных задач (1.82)-(1.83) с целью последующего применения для их решения метода конечных элементов.

Пусть $C^n(a, b; X)$ - множество функций $\varphi: [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}$, n раз непрерывно дифференцируемых по первому аргументу, X - некоторое множество. Пусть $w_i^{(j-1)} \in C^1(0, T; C^1(\bar{\Sigma}))$, $w_3^{(j-1)} \in C^1(0, T, C^2(\bar{\Sigma}))$ - функции, удовлетворяющие граничным условиям $w_i^{(j-1)}|_{\Gamma} = w_3^{(j-1)}|_{\Gamma} = \frac{\partial w_3^{(j-1)}}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} = 0$. Тогда, умножив первые два уравнения системы (1.82) на функции $w_i^{(0)}$ и складывая, а третье на функцию $w_3^{(0)}$ и проинтегрировав по области Σ , получим:

$$\int_{\Sigma} \bar{C}_{IKL} \partial_J e_{KL} \left(\zeta^{(0)} \right) w_i^{(0)} d\Sigma = - \int_{\Sigma} \partial_J f_{IJ}^{T(0)} \left(\zeta^{(0)} \right) w_i^{(0)} d\Sigma,$$

$$\int_{\Sigma} B_{IKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL} \left(\zeta^{(0)} \right) w_3^{(0)} d\Sigma = - \int_{\Sigma} \partial_{IJ}^2 f_{IJ}^{M(0)} \left(\zeta^{(0)} \right) w_3^{(0)} d\Sigma.$$

В этих соотношениях явно указана зависимость правых частей от неизвестных функций. Применяя для интегралов в первой формуле один раз, а для второй дважды теорему Грина [63], учитывая граничные условия, наложенные на функции $w_i^{(0)}$ и симметрию по индексам функций \bar{C}_{IJKL} и $f_{IJ}^{T(0)}$ ($I \leftrightarrow J, K \leftrightarrow L$), получим:

$$\int_{\Sigma} \bar{C}_{IJKL} e_{IJ}(\mathbf{w}^{(0)}) e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) d\Sigma = - \int_{\Sigma} f_{IJ}^{T(0)}(\mathbf{v}^{L(0)}) e_{IJ}(\mathbf{w}^{(0)}) d\Sigma, \quad (1.95)$$

$$\int_{\Sigma} \left\{ B_{IJKL} e_{KL}(\mathbf{v}^{L(0)}) + f_{IJ}^{M(0)}(\mathbf{v}^{L(0)}) \right\} \partial_{IJ}^2 w_3^{(0)} d\Sigma = 0. \quad (1.96)$$

Аналогично, умножая первые два уравнения в (1.83) на $w_i^{(1)}$, а третье на $w_3^{(1)}$, складывая полученные соотношения и интегрируя по области Σ , получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left\{ \bar{C}_{IJKL} \partial_J e_{KL}(\zeta^{(1)}) + B_{IJKL} \partial_J \eta_{KL}(\zeta^{(1)}) \right\} w_i^{(1)} d\Sigma + \\ & + \int_{\Sigma} \left\{ B_{IJKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL}(\zeta^{(1)}) + D_{IJKL} \partial_{IJ}^2 \eta_{KL}(\zeta^{(1)}) \right\} w_3^{(1)} d\Sigma = \\ & = - \int_{\Sigma} \partial_J f_{IJ}^{T(1)}(\zeta^{(1)}) w_i^{(1)} d\Sigma + \int_{\Sigma} \left\{ \Delta p - \partial_{IJ}^2 f_{IJ}^{M(1)}(\zeta^{(1)}) \right\} w_3^{(1)} d\Sigma. \end{aligned}$$

Вновь применяя один и два раза теорему Грина к соответствующим слагаемым и учитывая граничные условия на функции $w_i^{(1)}$ и симметрию по индексам функций \bar{C}_{IJKL} , B_{IJKL} , D_{IJKL} и $f_{IJ}^{T(1)}$, $f_{IJ}^{M(1)}$ ($I \leftrightarrow J, K \leftrightarrow L$), получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left\{ \bar{C}_{IJKL} e_{KL}(\zeta^{(1)}) + B_{IJKL} \eta_{KL}(\zeta^{(1)}) \right\} e_{IJ}(\mathbf{w}^{(1)}) d\Sigma + \\ & + \int_{\Sigma} \left\{ B_{IJKL} e_{KL}(\zeta^{(1)}) + D_{IJKL} \eta_{KL}(\zeta^{(1)}) \right\} \eta_{IJ}(\mathbf{w}^{(1)}) d\Sigma = \\ & = - \int_{\Sigma} f_{IJ}^{T(1)}(\zeta^{(1)}) e_{IJ}(\mathbf{w}^{(1)}) d\Sigma - \int_{\Sigma} \left\{ \Delta p w_3^{(1)} + f_{IJ}^{M(1)}(\zeta^{(1)}) \eta_{IJ}(\mathbf{w}^{(1)}) \right\} d\Sigma. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Обозначим для некоторого функционального пространства X и области G : $Cr(X) = X$, $G_{\tau} = G$, если ползучесть отсутствует (т.е. если $F_{ij}(\xi, \varepsilon_{kl}^c, \sigma_{pq}) \equiv 0$), и $Cr(X) = L_2(0, T; X)$, $G_{\tau} = (0, T) \times G$ в случае учета ползучести (где пространства $L_2(0, T; X)$ введены в книге [51]). Пусть $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ ($X^{(n)} = Cr(H^n(\Sigma))$):

$$H_3^{(n)}(\Sigma) = \{(u_1 \ u_2 \ u_3) : u_1 \in X^{(n)}, u_3 \in X^{(n+1)}\}, \quad H_2^{(n)}(\Sigma) = \{(u_1 \ u_2) : u_1 \in X^{(n)}\}$$

- это исходные пространства вектор-функций, а $H^n(\Sigma)$ - пространства Соболева.

Нормы в пространствах $H_k^{(n)}(\Sigma), k = 2, 3$ определим следующим образом:

$$\|\mathbf{u}\|_{H_2^{(n)}(\Sigma)}^2 = \|u_1\|_{X^{(n)}}^2 + \|u_2\|_{X^{(n)}}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in H_2^{(n)}(\Sigma),$$

$$\|\mathbf{u}\|_{H_3^{(n)}(\Sigma)}^2 = \|u_1\|_{X^{(n)}}^2 + \|u_2\|_{X^{(n)}}^2 + \|u_3\|_{X^{(n+1)}}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in H_3^{(n)}(\Sigma).$$

В пространствах $H_k^{(1)}(\Sigma), k = 2, 3$ выделим подпространства функций с нулевыми граничными условиями (в смысле теории следов) на $\partial\Sigma$ (с теми же нормами):

$$V_2(\Sigma) = \{(u_1 \ u_2) : u_1 \in X^{(1)}, \text{Tr}_\Gamma(u_1) = 0\},$$

$$V_3(\Sigma) = \{(u_1 \ u_2 \ u_3) : u_1 \in X^{(1)}, u_3 \in X^{(2)}, \text{Tr}_\Gamma(u_i) = \text{Tr}_\Gamma(\partial_i u_3) n_i^\Gamma = 0\},$$

где $\text{Tr}_\Gamma : Cr(H^1(\Sigma)) \rightarrow Cr(L_2(\Gamma))$ - оператор, сопоставляющий функции из $Cr(H^1(\Sigma))$ ее след на Γ [54, 63], а n_i^Γ - компоненты единичного вектора внешней нормали к Γ .

Введем на основе полученных вариационных уравнений (1.95)-(1.97) (проинтегрировав их по $(0, T)$ при учете ползучести) понятие слабого решения для осредненных задач (1.82)-(1.83). Введем для этого вспомогательное отображение $\forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{B}_{NS} : H_2^{(n)}(\Sigma) \times H_0^2(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ и подмножество $\tilde{H}_2^{(n)}(\Sigma) \subset H_2^{(n)}(\Sigma)$ (с нормой $\|\cdot\|_{H_2^{(n)}(\Sigma)}$) индуцируемое этим отображением ($\forall \mathbf{u} \in H_2^{(n)}(\Sigma), \forall w \in H_0^2(\Sigma)$):

$$\tilde{B}_{NS}(\mathbf{u}, w) = \int_{\Sigma_\tau} \left\{ B_{IJKL} e_{KL}(\mathbf{u}) + f_{IJ}^{M(0)}(\mathbf{u}) \right\} \partial_{IJ}^2 w d\Sigma,$$

$$\tilde{H}_2^{(n)}(\Sigma) = \left\{ \mathbf{u} \in H_2^{(n)}(\Sigma) : \tilde{B}_{NS}(\mathbf{u}, w) = 0, \forall w \in H_0^2(\Sigma) \right\}.$$

Отметим, что в силу допущения 4 $\mathbf{0} \in \tilde{H}_2^{(n)}(\Sigma)$. Также введем следующие билинейные формы:

$$\begin{aligned}
B_S^M(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Sigma_r} \{ \bar{C}_{IJKL} e_{KL}(\mathbf{u}) e_{IJ}(\mathbf{w}) \} d\Sigma, \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_2^{(1)}(\Sigma); \\
B_S^F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Sigma_r} \{ D_{IJKL} \eta_{KL}(\mathbf{u}) \eta_{IJ}(\mathbf{w}) \} d\Sigma, \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma); \\
B_{NS}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Sigma_r} \{ B_{IJKL} [\eta_{KL}(\mathbf{u}) e_{IJ}(\mathbf{w}) + e_{KL}(\mathbf{u}) \eta_{IJ}(\mathbf{w})] \} d\Sigma, \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma).
\end{aligned}$$

и функционалы правых частей:

$$f^{T(K-1)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = - \int_{\Sigma_r} f_{IJ}^{T(K-1)}(\mathbf{u}) e_{IJ}(\mathbf{w}) d\Sigma, \quad f^{M(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = - \int_{\Sigma_r} f_{IJ}^{M(0)}(\mathbf{u}) \eta_{IJ}(\mathbf{w}) d\Sigma, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_2^{(1)}(\Sigma),$$

$$f^{M(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = - \int_{\Sigma_r} \Delta p w_3 d\Sigma - \int_{\Sigma_r} f_{IJ}^{M(1)}(\mathbf{u}) \eta_{IJ}(\mathbf{w}) d\Sigma, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma).$$

Функционалы $f^{T(0)}(\dots)$, $f^{M(0)}(\dots)$ и билинейную форму $B_S^M(\dots)$, в силу замечания относительно операторов $e_{IJ}(\cdot)$ и $\eta_{IJ}(\cdot)$, можно также рассматривать в пространстве $H_3^{(1)}(\Sigma) \times H_3^{(1)}(\Sigma)$. Это, в частности, позволяет ввести билинейную форму $B(\dots)$:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = B_S^M(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B_S^F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B_{NS}(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma).$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}^{(0)} = (\omega_1^{(0)} \quad \omega_2^{(0)}) \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma)$, $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = (\omega_1^{(1)} \quad \omega_2^{(1)} \quad \omega_3^{(1)})^T \in H_3^{(1)}(\Sigma)$ - такие функции (если они существуют), что:

$$Tr_{\Gamma}(\omega_i^{(0)}) = u_i^{b(0)}, \quad (1.98)$$

$$Tr_{\Gamma}(\omega_i^{(1)}) = u_i^{b(1)}, \quad Tr_{\Gamma}(\omega_3^{(0)}) = u_3^{b(0)}, \quad Tr_{\Gamma}(\partial_I \omega_3^{(1)}) n_I^{\Gamma} = 0, \quad (1.99)$$

Тогда под слабым решением задачи (1.82) будем понимать такой элемент $\zeta^{(0)} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma)$, что $\zeta^{(0)} - \boldsymbol{\omega}^{(0)} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma) \cap V_2(\Sigma)$ и выполняется условие:

$$B_S^M(\zeta^{(0)}, \mathbf{w}) = f^{T(0)}(\zeta^{(0)}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma) \cap V_2(\Sigma). \quad (1.100)$$

Аналогично, под слабым решением задачи (1.83) будем понимать такой элемент $\zeta^{(1)} \in H_3^{(1)}(\Sigma)$, что $\zeta^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(1)} \in V_3(\Sigma)$ и:

$$B(\zeta^{(1)}, \mathbf{w}) = f^{T(1)}(\zeta^{(1)}, \mathbf{w}) + f^{M(1)}(\zeta^{(1)}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in V_3(\Sigma). \quad (1.101)$$

Подобно классическому решению, о чем было отмечено ранее, возможно эквивалентное определение слабого решения, основанное на системе (1.82'). Пусть функция $\tilde{\omega}^{(0)} \in H_3^{(1)}(\Sigma)$ (если она существует) удовлетворяет следующим условиям:

$$Tr_{\Gamma}(\tilde{\omega}_I^{(0)}) = u_I^{b(0)}, \tilde{\omega}_3^{(0)} = 0. \quad (1.98')$$

Тогда слабым решением будем называть такую функцию $\tilde{\zeta}^{(0)} \in H_3^{(1)}(\Sigma)$, что $\tilde{\zeta}^{(0)} - \tilde{\omega}^{(0)} \in V_3(\Sigma)$ и:

$$B(\tilde{\zeta}^{(0)}, \mathbf{w}) = f^{T(0)}(\tilde{\zeta}^{(0)}, \mathbf{w}) + f^{M(0)}(\tilde{\zeta}^{(0)}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in V_3(\Sigma), \quad (1.100')$$

причем $\tilde{\zeta}^{(0)}$ удовлетворяет условию $\tilde{\zeta}_3^{(0)} = 0$.

Отметим, что отображения $B_{NS}(\dots)$ и $\tilde{B}_{NS}(\dots)$ обращаются в нуль для пластин с симметричным расположением слоев (т.е. когда $F_{ij}(\dots)$ и $C_{ijkl}(\dots)$ являются четными функциями от локальной координаты ξ). Отсюда, в частности, следует, что для симметричной пластины $\forall n \in \mathbb{N}: \tilde{H}_2^{(n)}(\Sigma) = H_2^{(n)}(\Sigma)$.

Для применения метода конечных элементов более удобной является матричная запись уравнений (1.100'), (1.101). В этой записи вводятся координатный столбец-оператор обобщенных деформаций $\varepsilon(\cdot)$, составленный из столбцов-операторов $e(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$; столбец массовых нагрузок F ; обобщенная матрица упругости C , составленная из блоков \bar{C} , B , D , которые образованы из соответствующих жесткостей \bar{C}_{ijkl} , B_{ijkl} , D_{ijkl} :

$$e(\mathbf{u}) = (e_{11}(\mathbf{u}) \quad e_{22}(\mathbf{u}) \quad 2e_{12}(\mathbf{u}))^T, \quad \eta(\mathbf{u}) = (\eta_{11}(\mathbf{u}) \quad \eta_{22}(\mathbf{u}) \quad 2\eta_{12}(\mathbf{u}))^T,$$

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = (e(\mathbf{u})^T \quad \eta(\mathbf{u})^T)^T, \quad (1.102)$$

$$F = (0 \quad 0 \quad \Delta p)^T, \quad C = \begin{pmatrix} \bar{C} & B \\ B & D \end{pmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1111} & \bar{C}_{1122} & \bar{C}_{1112} \\ \bar{C}_{2211} & \bar{C}_{2222} & \bar{C}_{2212} \\ \bar{C}_{1211} & \bar{C}_{1222} & \bar{C}_{1212} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1111} & B_{1122} & B_{1112} \\ B_{2211} & B_{2222} & B_{2212} \\ B_{1211} & B_{1222} & B_{1212} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{pmatrix}; \quad (1.103)$$

а также столбцы-функционалы правых частей:

$$\hat{f}^{T(I-1)}(\mathbf{u}) = (f_{11}^{T(I-1)}(\mathbf{u}) \quad f_{22}^{T(I-1)}(\mathbf{u}) \quad f_{12}^{T(I-1)}(\mathbf{u}) \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T,$$

$$\hat{f}^{M(I-1)}(\mathbf{u}) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad f_{11}^{M(I-1)}(\mathbf{u}) \quad f_{22}^{M(I-1)}(\mathbf{u}) \quad f_{12}^{M(I-1)}(\mathbf{u}))^T.$$

Тогда билинейная форма $B(\dots)$ и функционалы правых частей могут быть записаны в следующей форме:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Sigma_r} \varepsilon(\mathbf{w})^T C \varepsilon(\mathbf{u}) d\Sigma, \quad (1.104)$$

$$f^{T(I-1)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = - \int_{\Sigma_r} \hat{f}^{T(I-1)}(\mathbf{u})^T \varepsilon(\mathbf{w}) d\Sigma, \quad f^{M(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = - \int_{\Sigma_r} \hat{f}^{M(0)}(\mathbf{u})^T \varepsilon(\mathbf{w}) d\Sigma,$$

$$f^{M(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = - \int_{\Sigma_r} (w_1 \quad w_2 \quad w_3)^T F d\Sigma - \int_{\Sigma_r} \hat{f}^{M(1)}(\mathbf{u})^T \varepsilon(\mathbf{w}) d\Sigma. \quad (1.105)$$

1.10. Вариационный принцип Хеллингера-Рейснера

Уравнения (1.100), (1.100') и (1.101) фактически являются вариационными уравнениями для вариационного принципа Лагранжа. Для численного поиска слабых решений (1.82)-(1.83) более удобной в смысле результирующих выражений для разрешающей системы уравнений оказывается формулировка на основе вариационных уравнений, получаемых для вариационного принципа Хеллингера-Рейснера [8, 12, 19, 60, 64], что будет продемонстрировано в

пунктах 2.1-2.2. Альтернативно, для рассматриваемых задач возможно использование вариационного принципа типа Геррмана [7, 65, 92, 105], позволяющего получить вариационные уравнения, содержащие производные не выше первого порядка. Однако данный подход не лишен недостатков. В частности, применение указанного вариационного принципа для построения конечно-элементного метода приводит к разрешающей системе уравнений с матрицей, не являющейся положительно определенной [7], и требует специальных методов поиска решения такой системы. В связи с этим, в рамках данной работы, будет использован подход на основе вариационных уравнений вариационного принципа Хеллингера-Рейснера.

Введем пространство столбцов обобщенных деформаций $S(\Sigma) = [Cr(L_2(\Sigma))]^6$. Рассмотрим вариационное уравнение (1.101) в матричной форме (1.104)-(1.105). Обозначив в этом уравнении $\lambda^{(1)} = \varepsilon(\zeta^{(1)}) \in S(\Sigma)$, выбрав произвольный элемент $\mu \in S(\Sigma)$ и формально добавив в (1.101) дополнительное уравнение $\int_{\Sigma_r} \mu^T C [\varepsilon(\zeta^{(1)}) - \lambda^{(1)}] = 0$, удовлетворяющееся тождественно, получим:

$$\begin{cases} \int_{\Sigma_r} \varepsilon(\mathbf{w})^T C \lambda^{(1)} d\Sigma = f^{T(1)}(\zeta^{(1)}, \mathbf{w}) + f^{M(1)}(\zeta^{(1)}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in V_3(\Sigma), \\ \int_{\Sigma_r} \mu^T C [\varepsilon(\zeta^{(1)}) - \lambda^{(1)}] d\Sigma = 0, \forall \mu \in S(\Sigma). \end{cases} \quad (1.106)$$

Принимая далее, что $\lambda^{(1)} \in S(\Sigma)$ - новая неизвестная функция, которая в дополнение к функции $\zeta^{(1)} \in H_3^{(1)}(\Sigma)$ определяется системой (1.106), получим альтернативное определение слабого решения задачи (1.83). Требуется найти такую пару $(\zeta^{(1)}, \lambda^{(1)}) \in H_3^{(1)}(\Sigma) \times S(\Sigma)$, что $\zeta^{(1)} - \mathbf{w}^{(1)} \in V_3(\Sigma)$ и:

$$\begin{cases} B_{HR}^1(\mathbf{w}, \lambda^{(1)}) = f^{T(1)}(\zeta^{(1)}, \mathbf{w}) + f^{M(1)}(\zeta^{(1)}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in V_3(\Sigma), \\ B_{HR}^1(\zeta^{(1)}, \mu) = B_{HR}^2(\mu, \lambda^{(1)}), \forall \mu \in S(\Sigma). \end{cases} \quad (1.101')$$

Здесь обозначены следующие билинейные отображения:

$$B_{HR}^1(\mathbf{w}, \lambda) = \int_{\Sigma_r} \varepsilon(\mathbf{w})^T C \lambda d\Sigma, B_{HR}^2(\mu, \lambda) = \int_{\Sigma_r} \mu^T C \lambda d\Sigma, \forall \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma), \forall \lambda, \mu \in S(\Sigma).$$

Эквивалентность (1.101') и (1.101) немедленно вытекает из того, что форма $(\lambda, \mu) = \int_{\Sigma_r} \lambda^T \mu d\Sigma$ определяет скалярное произведение в пространстве $S(\Sigma)$.

Аналогично, определение слабого решения задачи (1.82) на основе системы вариационных уравнений вариационного принципа Хеллингера-Рейснера имеет следующую формулировку. Требуется определить такую пару $(\tilde{\zeta}^{(0)}, \lambda^{(0)}) \in H_3^{(1)}(\Sigma) \times S(\Sigma)$, что $\tilde{\zeta}^{(0)} - \tilde{\omega}^{(0)} \in V_3(\Sigma)$ и:

$$\begin{cases} B_{HR}^1(\mathbf{w}, \lambda^{(0)}) = f^{T(0)}(\tilde{\zeta}^{(0)}, \mathbf{w}) + f^{M(0)}(\tilde{\zeta}^{(0)}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in V_3(\Sigma), \\ B_{HR}^1(\tilde{\zeta}^{(0)}, \mu) = B_{HR}^2(\mu, \lambda^{(0)}), \forall \mu \in S(\Sigma), \end{cases} \quad (1.100'')$$

причем $\tilde{\zeta}^{(0)}$ должно удовлетворять условию $\zeta_3^{(0)} = 0$.

1.11. Разрешимость осредненных задач без учета ползучести

Исследуем в данном пункте вопросы разрешимости задач (1.76)-(1.77) в линейном случае (без учета ползучести). В этом случае, функционалы правых частей в условиях (1.100), (1.100') и (1.101) слабых решений задач (1.82)-(1.83) принимают вид:

$$f^{T(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f^{M(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0, \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_2^{(1)}(\Sigma), \quad (1.107)$$

$$f^{T(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f^{T(1)}(\mathbf{w}) = - \int_{\Sigma} f_{IJ}^{T(1)} e_{IJ}(\mathbf{w}) d\Sigma,$$

$$f^{M(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f^{M(1)}(\mathbf{w}) = - \int_{\Sigma} \Delta p w_3 d\Sigma - \int_{\Sigma} f_{IJ}^{M(1)} \eta_{IJ}(\mathbf{w}) d\Sigma,$$

$$f_{IJ}^{T(1)} = K_{IJKLM} \partial_M e_{KL}(\zeta^{(0)}), f_{IJ}^{M(1)} = \bar{K}_{IJKLM} \partial_M e_{KL}(\zeta^{(0)}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma). \quad (1.108)$$

Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N}$ подмножество $\tilde{H}_2^{(n)}(\Sigma) \subset H_2^{(n)}(\Sigma)$ является подпространством.

Существование слабого решения задачи (1.82) описывается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть выполнено допущение 2, а также существует такая функция $\omega^{(0)} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma)$, что выполнено условие (1.98). Тогда слабое решение $\zeta^{(0)} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma)$ задачи (1.82) существует и единственно, независимо от выбора функции $\omega^{(0)}$.

Доказательство. Докажем сначала, что отображение $\tilde{B}_{NS}(\cdot, \cdot)$ непрерывно в $H_2^{(n)}(\Sigma) \times H_0^2(\Sigma) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Действительно, из неравенства Коши-Буняковского $\forall \mathbf{u} \in H_2^{(n)}(\Sigma), \forall w \in H_0^2(\Sigma)$ имеем:

$$|\tilde{B}_{NS}(\mathbf{u}, w)| \leq c_2 e_{\mathbf{u}} \sqrt{\int_{\Sigma} \sum_{I,J} [\partial_{IJ}^2 w_3]^2 d\Sigma} \leq c_2 \|\mathbf{u}\|_{H_3^{(n)}(\Sigma)} \|w_3\|_{H_0^2(\Sigma)},$$

где $c_2 = \sqrt{\sum_{I,J,K,L} B_{IJKL}^2}$ и $e_{\mathbf{u}} = \sqrt{\int_{\Sigma} \sum_{I,J} e_{IJ}^2(\mathbf{u}) d\Sigma}$. Таким образом, подпространство $\tilde{H}_2^{(n)}(\Sigma)$

замкнуто, поскольку если $\mathbf{u}_{(k)} = (\mathbf{u}_k \in \tilde{H}_2^{(n)}(\Sigma), k \in \mathbb{Z}_+)$ - последовательность, сходящаяся к элементу $\mathbf{u} \in H_2^{(n)}(\Sigma)$, то $\forall w \in H_0^2(\Sigma)$:

$$|\tilde{B}_{NS}(\mathbf{u}, w)| = |\tilde{B}_{NS}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k, w)| \leq c_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_{H_2^{(n)}(\Sigma)} \|w\|_{H_0^2(\Sigma)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Далее из неравенства Коши-Буняковского имеем непрерывность билинейной формы $B_S^M(\cdot, \cdot)$ на $H_k^{(1)}(\Sigma) \times H_k^{(1)}(\Sigma)$ при $k = 2, 3$, поскольку $\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_k^{(1)}(\Sigma)$:

$$|B_S^M(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq c_1 e_{\mathbf{u}} e_{\mathbf{w}} \leq c_1 \|\mathbf{u}\|_{H_k^{(1)}(\Sigma)} \|\mathbf{w}\|_{H_k^{(1)}(\Sigma)},$$

где $c_1 = \sqrt{\sum_{I,J,K,L} \bar{C}_{IJKL}^2}$.

Докажем теперь коэрцитивность формы $B_S^M(\dots)$ на $V_2^{(1)}(\Sigma)$. Действительно, $\forall \mathbf{w} \in V_2^{(1)}(\Sigma)$ из условия (1.5) равномерной положительной определенности тензора \hat{C}_{IJKL} имеем:

$$B_S^M(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \int_{\Sigma} \langle \hat{C}_{IJKL} e_{IJ}(\mathbf{w}) e_{KL}(\mathbf{w}) \rangle d\Sigma \geq \gamma_1 e_{\mathbf{w}}^2.$$

Далее, применив для члена $e_{\mathbf{w}} = \sqrt{\int_{\Sigma} \sum_{I,J} e_{IJ}^2(\mathbf{w}) d\Sigma}$ первое неравенство Корна, получим:

$$B_S^M(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \gamma_1 c_K \left(\|w_1\|_{H_0^1(\Sigma)}^2 + \|w_2\|_{H_0^1(\Sigma)}^2 \right) = \gamma_1 c_K \|\mathbf{w}\|_{H_2^{(1)}(\Sigma)}^2, \quad (1.109)$$

где $c_K > 0$ – константа в неравенстве Корна.

Таким образом, из теоремы Лакса – Мильграма следует, что существует и единственен такой элемент $\mathbf{z} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma) \cap V_2^{(1)}(\Sigma)$, что $\forall \mathbf{w} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma) \cap V_2^{(1)}(\Sigma)$:

$$B_S^M(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = -B_S^M(\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \mathbf{w}).$$

Но тогда элемент $\zeta^{(0)} = \mathbf{z} + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma)$ будет слабым решением задачи (1.82).

Докажем единственность решения и независимость от выбора $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$. Пусть $\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \boldsymbol{\omega}^{(0)'} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma)$ – функции, удовлетворяющие условию (1.98) и следовательно, $\boldsymbol{\omega}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}^{(0)'} \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma) \cap V_2^{(1)}(\Sigma)$. Тогда если $\zeta^{(0)}, \zeta^{(0)'}$ – два слабых решения задачи (1.74) соответствующих функциям $\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \boldsymbol{\omega}^{(0)'}$, то векторы $\zeta^{(0)} - \boldsymbol{\omega}^{(0)}$ и $\zeta^{(0)'} - \boldsymbol{\omega}^{(0)'}$ принадлежат пространству $\tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma) \cap V_2^{(1)}(\Sigma)$. Следовательно:

$$\zeta^{(0)} - \zeta^{(0)'} = \left(\zeta^{(0)} - \boldsymbol{\omega}^{(0)} \right) - \left(\zeta^{(0)'} - \boldsymbol{\omega}^{(0)'} \right) + \left(\boldsymbol{\omega}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}^{(0)'} \right) \in \tilde{H}_2^{(1)}(\Sigma) \cap V_2^{(1)}(\Sigma).$$

Тогда, вычитая условия (1.98), записанные для каждой из функций $\zeta^{(0)}, \zeta^{(0)'}$, полагая в полученном соотношении $\mathbf{w} = \zeta^{(0)} - \zeta^{(0)'}$ и пользуясь коэрцитивностью формы $B_S^M(\dots)$ (1.109), будем иметь:

$$\left\| \zeta^{(0)} - \zeta^{(0)'} \right\|_{H_2^{(1)}(\Sigma)}^2 \leq \frac{1}{\gamma_1 c_K} B_S^M \left(\zeta^{(0)} - \zeta^{(0)'}, \zeta^{(0)} - \zeta^{(0)'} \right) = 0.$$

Т.е. $\zeta^{(0)}$ и $\zeta^{(0)'}$ совпадают как элементы $H_2^{(1)}(\Sigma)$. Теорема доказана.

Аналогично доказанной теореме, существование слабого решения задачи (1.83) обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть выполнено допущение 2, $p_-, p_+ \in L_2(\Sigma)$ и существует слабое решение задачи (1.82), причем $\zeta^{(0)} \in \tilde{H}_2^{(2)}(\Sigma)$. Тогда слабое решение $\zeta^{(1)}$ задачи (1.83) существует и единственно независимо от выбора функции $\omega^{(1)}$.

Доказательство. Докажем, что билинейная форма $B(\dots)$ непрерывна в $H_3^{(1)}(\Sigma) \times H_3^{(1)}(\Sigma)$. Для формы $B_{NS}(\dots)$ из неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$|B_{NS}(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq c_2 (e_{\mathbf{u}} \eta_{\mathbf{w}} + \eta_{\mathbf{u}} e_{\mathbf{w}}) \leq c_2 \sqrt{(e_{\mathbf{u}}^2 + \eta_{\mathbf{u}}^2)(e_{\mathbf{w}}^2 + \eta_{\mathbf{w}}^2)} \leq c_2 \|\mathbf{u}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)} \|\mathbf{w}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma),$$

где $\eta_{\mathbf{u}} = \sqrt{\int_{\Sigma} \sum_{I,J} \eta_{IJ}^2(\mathbf{u}) d\Sigma}$. Аналогично, для формы $B_S^F(\dots)$ из неравенства Коши-

Буняковского $\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma)$ получаем:

$$|B_S^F(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq c_3 \eta_{\mathbf{u}} \eta_{\mathbf{w}} \leq c_3 \sqrt{(e_{\mathbf{u}}^2 + \eta_{\mathbf{u}}^2)(e_{\mathbf{w}}^2 + \eta_{\mathbf{w}}^2)} \leq c_3 \|\mathbf{u}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)} \|\mathbf{w}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)},$$

где $c_3 = \sqrt{\sum_{I,J,K,L} D_{IJKL}^2}$. Таким образом, билинейная форма $B(\dots)$ непрерывна в

пространстве $H_3^{(1)}(\Sigma) \times H_3^{(1)}(\Sigma)$:

$$|B(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq |B_S^M(\mathbf{u}, \mathbf{w})| + |B_S^F(\mathbf{u}, \mathbf{w})| + |B_{NS}(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq \max(c_1, c_2, c_3) \|\mathbf{u}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)} \|\mathbf{w}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)}.$$

Докажем теперь коэрцитивность формы $B(\dots)$ в $V_3^{(1)}(\Sigma)$. Для этого заметим, что, с учетом формул (1.62), она может быть представлена в виде ($\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma)$):

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Sigma} \left\langle \hat{C}_{IJKL} (e_{KL}(\mathbf{u}) + \xi \eta_{KL}(\mathbf{u})) (e_{IJ}(\mathbf{w}) + \xi \eta_{IJ}(\mathbf{w})) \right\rangle d\Sigma.$$

Но тогда из условия равномерной положительной определенности тензора \hat{C}_{IJKL} (1.5) $\forall \mathbf{w} \in V_3^{(1)}(\Sigma)$ имеем:

$$B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \gamma_1 \int_{\Sigma} \left\langle \sum_{I,J} (e_{IJ}(\mathbf{w}) + \xi \eta_{IJ}(\mathbf{w}))^2 \right\rangle d\Sigma = \gamma_1 (e_{\mathbf{w}}^2 + \langle \xi^2 \rangle \eta_{\mathbf{w}}^2) = \gamma_1 \left(e_{\mathbf{w}}^2 + \frac{\eta_{\mathbf{w}}^2}{12} \right). \quad (1.110)$$

Выражение $\eta_{\mathbf{w}} = \sqrt{\int_{\Sigma} \sum_{I,J} \eta_{IJ}^2(\mathbf{w}) d\Sigma}$ представляет собой норму $\|\cdot\|_{H_0^2(\Sigma)}^{(1)}$, эквивалентную норме пространства Соболева $H_0^2(\Sigma)$ [17]. И в частности:

$$\|w_3\|_{H_0^2(\Sigma)}^{(1)} \geq \sqrt{c} \|w_3\|_{H_0^2(\Sigma)}, c > 0.$$

Тогда, применяя для выражения $e_{\mathbf{w}}^2 = \int_{\Sigma} \sum_{I,J} e_{IJ}^2(\mathbf{w}) d\Sigma$ в (1.110) первое неравенство Корна, а для $\eta_{\mathbf{w}}^2$ - последнее неравенство, будем иметь:

$$B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \gamma_1 \left(c_K (\|w_1\|_{H_0^1(\Sigma)}^2 + \|w_2\|_{H_0^1(\Sigma)}^2) + \frac{c}{12} \|w_3\|_{H_0^2(\Sigma)}^2 \right) \geq \gamma_1 \min(c_K, \frac{c}{12}) \|\mathbf{w}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)}^2. \quad (1.111)$$

Здесь $c_K > 0$ – константа в неравенстве Корна. Таким образом, билинейная форма $B(\cdot, \cdot)$ - коэрцитивна в $V_3^{(1)}(\Sigma)$.

Далее для функционалов $f^{T(1)}(\cdot)$ и $f^{M(1)}(\cdot)$ из неравенства Коши-Буняковского $\forall \mathbf{w} \in H_3^{(1)}(\Sigma)$ имеем:

$$|f^{T(1)}(\mathbf{w})| \leq e_{\mathbf{w}} \sqrt{\int_{\Sigma} \sum_{I,J} (f_{IJ}^{T(1)})^2 d\Sigma} \leq c_4 \sqrt{\int_{\Sigma} \|e_{IJ}(\zeta^{(0)})\|_{H^1(\Sigma)}^2} \|\mathbf{w}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)} \leq c_4 \|\zeta^{(0)}\|_{H_2^{(2)}(\Sigma)} \|\mathbf{w}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)},$$

$$|f^{M(1)}(\mathbf{w})| \leq \sqrt{\int_{\Sigma} (\Delta p)^2 d\Sigma} \sqrt{\int_{\Sigma} w_3^2 d\Sigma} + \eta_{\mathbf{w}} \sqrt{\int_{\Sigma} \sum_{I,J} (f_{IJ}^{M(1)})^2 d\Sigma} \leq \left(\|\Delta p\|_{L_2(\Sigma)} + c_5 \|\zeta^{(0)}\|_{H_2^{(2)}(\Sigma)} \right) \|\mathbf{w}\|_{H_3^{(1)}(\Sigma)},$$

где $c_4 = \sqrt{\sum_{I,J,K,L,M} K_{IJKL}^2}$, $c_5 = \sqrt{\sum_{I,J,K,L,M} \bar{K}_{IJKL}^2}$. Таким образом, эти функционалы

непрерывны в гильбертовом пространстве $H_3^{(1)}(\Sigma)$. Тогда, согласно теореме Лакса-

Мильграмма, существует и единственен такой элемент $\mathbf{z} \in V_3^{(1)}(\Sigma)$, что:

$$B(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = f^T(\mathbf{w}) + f^M(\mathbf{w}) - B(\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in V_3^{(1)}(\Sigma).$$

Но тогда элемент $\zeta^{(1)} = \mathbf{z} + \boldsymbol{\omega}^{(1)}$ является слабым решением задачи (1.83). Доказательство единственности решения и его независимости от выбора $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ производится аналогично теореме 2. Теорема доказана.

1.12. Примеры моделей ползучести

Рассмотрим в данном пункте некоторые модели ползучести материалов слоев пластины, которые будут применяться в главе 3 при решении задач. Материалы слоев будем предполагать изотропными. В качестве основной модели выберем степенную модель ползучести вида:

$$\mathbf{F}(\xi, \boldsymbol{\varepsilon}^c, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1 - \varpi(\xi)(\varepsilon_u^c)^2}{\eta(\xi)} \left(1 + \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_T(\xi)} \right)^{2r(\xi)} \right) \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{E} \right). \quad (1.112)$$

Здесь $\varpi \in \mathbb{R}_+$ - коэффициент стабилизации ползучести, $r > 3$ - показатель нелинейности деформаций ползучести, $\eta \in \mathbb{R}_+$ - коэффициент вязкости, σ_T - характерное значение напряжений, \mathbf{E} - единичный тензор второго ранга, $I_1(\cdot)$ - первый главный инвариант тензора второго ранга:

$$I_1(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E},$$

$(\cdot)_u$ - интенсивность тензора второго ранга:

$$\mathbf{T}_u = \sqrt{\left(\mathbf{T} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{T}) \mathbf{E} \right) \cdot \left(\mathbf{T} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{T}) \mathbf{E} \right)}.$$

Для тестирования конечно-элементного метода, который будет предложен во второй главе, будет использован линейризованный вариант модели (1.112) вида:

$$\mathbf{F}(\xi, \boldsymbol{\varepsilon}^c, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\eta(\xi)} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{E} \right). \quad (1.113)$$

Такая модель позволяет получить явное аналитическое решение тестовых задач. Нетрудно видеть, что выбранные таким образом функции моделей ползучести удовлетворяют условиям в допущении 4.

Для получения дальнейших соотношений, граничные условия нулевого приближения на продольные перемещения будем предполагать нулевыми, т.е.:

$$u_I^{b(0)} = 0.$$

В этом случае, как уже было отмечено в пункте 1.7, система (1.82) имеет тривиальное решение $v_I^{(0)} = 0$, что влечет обращение в нуль тензоров деформаций и напряжений нулевых приближений:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^{c(0,0)} = 0, \\ \sigma_{ij}^{(0,0)} = 0. \end{cases} \quad (1.114)$$

Учитывая эти соотношения и формулу (1.16), функции $F_{ij}^{(1)}$ в системах (1.70) и (1.73) для моделей, определяемых функциями (1.112)-(1.113), примут вид (для краткости аргумент ξ будем опускать):

$$F_{ij}^{(1)}(\varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0,0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^c, \sigma_{p_0 q_0}^{(0,0)}, \sigma_{p_1 q_1}) = \frac{1 - \varpi \kappa^2 (\varepsilon_u^c)^2}{\eta} \left(1 + \kappa^{2r} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_T} \right)^{2r} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right), \quad (1.115)$$

$$F_{ij}^{(1)}(\varepsilon_{k_0 l_0}^{c(0,0)}, \varepsilon_{k_1 l_1}^c, \sigma_{p_0 q_0}^{(0,0)}, \sigma_{p_1 q_1}) = \frac{1}{\eta} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right). \quad (1.116)$$

На основе последней формулы, система (1.70) для модели (1.113) примет вид ($\tau \in [0, T]$):

$$\begin{cases} \sigma_{IJ}^{(0,1)} = \hat{C}_{IJKL} \left(e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) - \varepsilon_{KL}^{c(0,1)} \right), \\ \sigma_{i3}^{(0,1)} = 0, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(0,1)} = \frac{1}{\eta} \left(\sigma_{ij}^{(0,1)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}^{(0,1)} \right), \\ \varepsilon_{ij}^{c(0,1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (1.117)$$

Из второго, третьего уравнения и начального условия в этой системе следует:

$$\varepsilon_{i3}^{c(0,1)} = 0. \quad (1.118)$$

Тогда, подставляя первое уравнение в третье, получим неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно компонент $\varepsilon_{IJ}^{c(0,1)}$ тензора деформаций:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{11}^{c(0,1)} = \frac{1}{3\eta} \left[\left\{ 2\hat{C}_{1111} - \hat{C}_{1122} \right\} \left(e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) - \varepsilon_{11}^{c(0,1)} \right) + \left\{ 2\hat{C}_{1122} - \hat{C}_{2222} \right\} \left(e_{22}(\mathbf{v}^{L(1)}) - \varepsilon_{22}^{c(0,1)} \right) \right], \\ \dot{\varepsilon}_{22}^{c(0,1)} = \frac{1}{3\eta} \left[\left\{ 2\hat{C}_{1122} - \hat{C}_{1111} \right\} \left(e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) - \varepsilon_{11}^{c(0,1)} \right) + \left\{ 2\hat{C}_{2222} - \hat{C}_{1122} \right\} \left(e_{22}(\mathbf{v}^{L(1)}) - \varepsilon_{22}^{c(0,1)} \right) \right], \\ \dot{\varepsilon}_{12}^{c(0,1)} = \frac{2}{\eta} \hat{C}_{1212} \left(e_{12}(\mathbf{v}^{L(1)}) - \varepsilon_{12}^{c(0,1)} \right), \\ \varepsilon_{IJ}^{c(0,1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (1.119)$$

Для решения данную систему удобно представить в матричной форме. Для этого введем столбцы $\varepsilon^{c(0,1)}$, $e(\mathbf{v}^{L(1)})$ и матрицу C^c :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{c(0,1)} &= \left(\varepsilon_{11}^{c(0,1)} \quad \varepsilon_{22}^{c(0,1)} \quad \varepsilon_{12}^{c(0,1)} \right)^T, \\ e(\mathbf{v}^{L(1)}) &= \left(e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) \quad e_{22}(\mathbf{v}^{L(1)}) \quad e_{12}(\mathbf{v}^{L(1)}) \right)^T, \\ C^c &= \frac{1}{3\eta} \begin{pmatrix} 2\hat{C}_{1111} - \hat{C}_{1122} & 2\hat{C}_{1122} - \hat{C}_{1111} & 0 \\ 2\hat{C}_{1122} - \hat{C}_{1111} & 2\hat{C}_{1111} - \hat{C}_{1122} & 0 \\ 0 & 0 & 6\hat{C}_{1212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^c & C_2^c & 0 \\ C_2^c & C_1^c & 0 \\ 0 & 0 & C_3^c \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.120)$$

При построении матрицы C^c учтено, что в силу изотропности материалов слоев пластины имеет место следующее равенство ($C_{1111} = C_{2222} = C_{3333}$, $C_{1122} = C_{1133} = C_{2233}$, $C_{1212} = C_{1313} = C_{2323}$):

$$\hat{C}_{1111} = C_{1111} - \frac{(C_{1133})^2}{C_{3333}} = \hat{C}_{2222} = C_{2222} - \frac{(C_{2233})^2}{C_{3333}}.$$

Таким образом, матричная форма записи системы (1.119) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{c(0,1)} = C^c \left(e(\mathbf{v}^{L(1)}) - \varepsilon^{c(0,1)} \right), \\ \varepsilon^{c(0,1)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (1.121)$$

Непосредственной подстановкой в последнюю систему легко убедиться, что ее решение может быть записано в форме матричной экспоненты:

$$\varepsilon^{c(0,1)}(\tau) = C^c \int_0^{\tau} \exp(-C^c[\tau-t]) e(\mathbf{v}^{L(1)}(t)) dt. \quad (1.122)$$

Структура матрицы C^c позволяет записать сингулярное разложение для всех матриц такого вида следующим образом:

$$C^c = UC^{cd}U^T, \quad (1.123)$$

где:

$$C^{cd} = \begin{pmatrix} C_1^{cd} & 0 & 0 \\ 0 & C_2^{cd} & 0 \\ 0 & 0 & C_3^{cd} \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$C_1^{cd} = C_1^c + C_2^c = \frac{1}{3\eta} (\hat{C}_{1111} + \hat{C}_{1122}), \quad C_2^{cd} = C_1^c - C_2^c = \frac{1}{\eta} (\hat{C}_{1111} - \hat{C}_{1122}), \quad C_3^{cd} = C_3^c = \frac{2}{\eta} \hat{C}_{1212}.$$

С помощью этого разложения, матрица $C^c \exp(-C^c \tau)$ в (1.122) может быть представлена в следующей форме:

$$\begin{aligned}
C^c \exp(-C^c \tau) &= U \begin{pmatrix} C_1^{cd} e^{-C_1^{cd} \tau} & 0 & 0 \\ 0 & C_2^{cd} e^{-C_2^{cd} \tau} & 0 \\ 0 & 0 & C_3^{cd} e^{-C_3^{cd} \tau} \end{pmatrix} U^T = \\
&= U \begin{pmatrix} K_1(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & K_2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & K_3(\tau) \end{pmatrix} U^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K_1(\tau) + K_2(\tau) & K_1(\tau) - K_2(\tau) & 0 \\ K_1(\tau) - K_2(\tau) & K_1(\tau) + K_2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 2K_3(\tau) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.124}$$

Введем далее $\forall \tau \in [0, T]$ симметричный тензор четвертого ранга ${}^4\mathbf{K}(\tau)$ с компонентами $K_{IJKL}(\tau)$ в рассматриваемой декартовой системе координат (имеющего симметрии вида: $K_{IJKL}(\tau) = K_{JKLI}(\tau)$, $K_{IJKL}(\tau) = K_{ILJK}(\tau)$, $K_{IJKL}(\tau) = K_{KLJI}(\tau)$), матричное представление независимых компонент которого имеет вид:

$$\begin{aligned}
(K_{IJKL}(\tau))_3^3 &= \begin{pmatrix} K_{1111}(\tau) & K_{1122}(\tau) & 2K_{1112}(\tau) \\ & K_{2222}(\tau) & 2K_{2212}(\tau) \\ \text{сим.} & & 2K_{1212}(\tau) \end{pmatrix} = C^c \exp(-C^c \tau) = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K_1(\tau) + K_2(\tau) & K_1(\tau) - K_2(\tau) & 0 \\ K_1(\tau) - K_2(\tau) & K_1(\tau) + K_2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 2K_3(\tau) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.125}$$

Введем также обозначение для интегрального оператора $\check{K}_{IJKL} : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$ с непрерывным на $[0, T] \times [0, T]$ разностным ядром $\check{K}_{IJKL}(\tau, t) = K_{IJKL}(\tau - t)$ ($\tau, t \in [0, T]$, $\forall f \in L_2[0, T]$):

$$\check{K}_{IJKL} f = \int_0^\tau K_{IJKL}(\tau - t) f(t) dt.$$

Тогда решение (1.122) системы (1.119) может быть представлено в виде:

$$\varepsilon_{IJ}^{c(0,1)} = \check{K}_{IJKL} e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}). \tag{1.126}$$

Перейдем теперь к решению системы (1.73). Учитывая формулы (1.114) и (1.116), эта система записывается в следующей форме:

$$\begin{cases} \sigma_{IJ}^{(1,0)} = \hat{C}_{IJKL} \left(\xi \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right) - \varepsilon_{KL}^{c(1,0)} \right), \\ \sigma_{i3}^{(1,0)} = 0, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{c(1,0)} = \frac{1}{\eta} \left(\sigma_{ij}^{(1,0)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}^{(1,0)} \right), \\ \varepsilon_{ij}^{c(1,0)} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (1.127)$$

Таким образом, вид этой системы аналогичен виду системы (1.117) (с точностью до замен $\sigma_{ij}^{(0,1)} \rightarrow \sigma_{ij}^{(1,0)}$, $e_{IJ}(\mathbf{v}^{L(1)}) \rightarrow \xi \eta_{IJ}(v_3^{(0)})$, $\varepsilon_{ij}^{c(0,1)} \rightarrow \varepsilon_{ij}^{c(1,0)}$). Тогда ее решение может быть записано в виде, подобном (1.126) (аналогично (1.118) получаем, что $\varepsilon_{I3}^{c(1,0)} = 0$):

$$\varepsilon_{IJ}^{c(1,0)} = \xi \tilde{K}_{IJKL} \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right). \quad (1.128)$$

Подставляя найденные выражения для компонент тензоров деформаций ползучести $\varepsilon_{IJ}^{c(0,0)}$, $\varepsilon_{IJ}^{c(0,1)}$, $\varepsilon_{IJ}^{c(1,0)}$ в формулы (1.89) для функций в правых частях уравнений системы (1.83), будем иметь:

$$\begin{aligned} f_{IJ}^{T(1)} &= -\tilde{\tilde{C}}_{IJKL}^c e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(1)} \right) - \tilde{B}_{IJKL}^c \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right), \\ f_{IJ}^{M(1)} &= -\tilde{B}_{IJKL}^c e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(1)} \right) - \tilde{D}_{IJKL}^c \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (1.129)$$

Здесь введены обозначения для следующих интегральных операторов и их ядер ($\forall f \in L_2[0, T]$):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{IJKL}^c f &= \int_0^\tau C_{IJKL}^c(\tau-t) f(t) dt, C_{IJKL}^c(\tau) = \hat{C}_{IJPQ} K_{PQKL}(\tau), \\ \tilde{\tilde{C}}_{IJKL}^c f &= \langle \tilde{C}_{IJKL}^c f \rangle, \tilde{B}_{IJKL}^c f = \langle \xi \tilde{C}_{IJKL}^c f \rangle, \tilde{D}_{IJKL}^c f = \langle \xi^2 \tilde{C}_{IJKL}^c f \rangle. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Учитывая изотропность материалов слоев пластины и сингулярное разложение (1.123) для матриц вида (1.120), матричное представление компонент $C_{IJKL}^c(\cdot)$ может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
(C_{IJKL}^c(\tau))_3^3 &= \begin{pmatrix} C_{1111}^c(\tau) & C_{1122}^c(\tau) & 2C_{1122}^c(\tau) \\ & C_{2222}^c(\tau) & 2C_{2212}^c(\tau) \\ \text{сум.} & & 2C_{1212}^c(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{1111} & \hat{C}_{1122} & 0 \\ \hat{C}_{1122} & \hat{C}_{1111} & 0 \\ 0 & 0 & 2\hat{C}_{1212} \end{pmatrix} (K_{IJKL}(\tau))_3^3 = \\
&= U \begin{pmatrix} \hat{C}_1^d C_1^{cd} e^{-C_1^{cd}\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{C}_2^d C_2^{cd} e^{-C_2^{cd}\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_3^d C_3^{cd} e^{-C_3^{cd}\tau} \end{pmatrix} U^T = U \begin{pmatrix} Q_1(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & Q_2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & Q_3(\tau) \end{pmatrix} U^T, \tag{1.131}
\end{aligned}$$

где:

$$\hat{C}_1^d = \hat{C}_{1111} + \hat{C}_{1122}, \quad \hat{C}_2^d = \hat{C}_{1111} - \hat{C}_{1122}, \quad \hat{C}_3^d = 2\hat{C}_{1212}.$$

Подставляя найденные выражения для правых частей (1.129) в систему (1.83), получим явный вид этой системы для модели ползучести (1.113):

$$\begin{cases} \check{\check{C}}_{IJKL} \partial_J e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \check{\check{B}}_{IJKL} \partial_J \eta_{KL}(v_3^{(0)}) = 0, \\ \check{\check{B}}_{IJKL} \partial_{IJ}^2 e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \check{\check{D}}_{IJKL} \partial_{IJ}^2 \eta_{KL}(v_3^{(0)}) = \Delta p, \\ v_I^{(1)}|_{\Gamma} = u_I^{b(1)}, \\ v_3^{(0)}|_{\Gamma} = u_3^{b(0)}, \\ \left. \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{1.132}$$

где $\check{\check{C}}_{IJKL}$, $\check{\check{B}}_{IJKL}$, $\check{\check{D}}_{IJKL}$ - операторы на $L_2[0, T]$, имеющие вид ($\forall f \in L_2[0, T]$):

$$\check{\check{C}}_{IJKL} f = \hat{C}_{IJKL} f - \check{\check{C}}_{IJKL}^c f, \tag{1.133}$$

$$\check{\check{C}}_{IJKL} f = \langle \check{\check{C}}_{IJKL} f \rangle = \bar{C}_{IJKL} f - \check{\check{C}}_{IJKL}^c f, \quad \check{\check{B}}_{IJKL} f = \langle \xi \check{\check{C}}_{IJKL} f \rangle = B_{IJKL} f - \check{\check{B}}_{IJKL}^c f,$$

$$\check{\check{D}}_{IJKL} f = \langle \xi^2 \check{\check{C}}_{IJKL} f \rangle = D_{IJKL} f - \check{\check{D}}_{IJKL}^c f. \tag{1.134}$$

Аналогично, подставляя найденные решения (1.126) и (1.128) в формулы для напряжений (1.92)-(1.94) и учитывая обозначения (1.130), получим (верхний индекс – наибольший порядок удерживаемых членов):

$$\check{\check{\sigma}}_{IJ}^{(1)} = \kappa \check{\check{C}}_{IJKL} \left[e_{KL}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \xi \eta_{KL}(v_3^{(0)}) \right], \tag{1.135}$$

$$\check{\sigma}_{13}^{(2)} = -\kappa^2 \left\{ \check{C}_{IMKL} \partial_M \left[e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(1)} \right) + \xi \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right) \right] \right\}_\xi, \quad (1.136)$$

$$\check{\sigma}_{33}^{(3)} = -\kappa^3 \left(p_- + \Delta p (\xi + 1/2) \right) + \kappa^3 \left\{ \left\{ \check{C}_{MKNL} \partial_{MN}^2 \left[e_{KL} \left(\mathbf{v}^{L(1)} \right) + \xi \eta_{KL} \left(v_3^{(0)} \right) \right] \right\}_\xi \right\}_\xi. \quad (1.137)$$

Таким образом, отличие вида системы (1.83) и соотношений для напряжений (1.92)-(1.94) при учете эффектов ползучести (в рамках модели (1.113)) от упругого случая состоит в замене приведенных модулей упругости \hat{C}_{IKL} на коэффициенты-операторы \check{C}_{IKL} .

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

2.1. Применение метода конечных элементов для решения двумерных осредненных задач асимптотического метода

Пусть (K, P_K, D_K) - конечный элемент в смысле определения в [69], где $P_K = P_K^1 \times \dots \times P_K^m$, $D_K = D_K^1 \times \dots \times D_K^m$, s_i - наивысший порядок производных в определении множеств D_K^i , и Π_K^i - оператор P_K^i -интерполяции, где $i=1\dots m$, $m \in \mathbb{N}$. Обозначим $\varphi_i = (\varphi_i^1 \dots \varphi_i^{d_i})^T$ - столбец базисных функций (или функций формы) конечного элемента ($\varphi_i^j \in P_K^i, j=1\dots d^i, d^i = \dim(P_K^i)$), соответствующих оператору Π_K^i ($u \in C^{s_i}(K)$):

$$\Pi_K^i u = \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_i^j T_i^j(u), \quad (2.1)$$

где $T_i^j(\cdot) \in D_K^i$ - соответствующая функции формы φ_i^j степень свободы. Введем тогда оператор P_K - интерполяции Π_K и соответствующий оператор функций формы $T_K(\cdot)$ для некоторой вектор-функции $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f^1 \dots f^m)^T$:

$$\Pi_K f = (\Pi_K^1 f_1 \dots \Pi_K^m f_m)^T, \quad T_K(f) = (T_1^1(f_1) \dots T_1^{d^1}(f_1) \quad T_2^1(f_2) \dots)^T.$$

Непосредственной подстановкой проверяется справедливость следующего утверждения о представлении оператора Π_K , которое позволяет упростить дальнейшие выкладки.

Утверждение. Пусть $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f^1 \dots f^m)^T$ - интерполируемая на K функция, где $f_i \in C^{s_i}(K)$. Тогда справедливо следующее представление оператора Π_K :

$$\Pi_K f = \Phi T_K(f), \quad (2.2)$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^m (\varphi_i^T \otimes E_m) P_i, \quad (2.3)$$

где Φ - матрица функций формы размера $m \times (d^1 + \dots + d^m)$ для пространства P_K , имеющая вид:

$$\Phi = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \varphi_1^1 & \dots & \varphi_1^{d^1} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & & & \varphi_2^1 & \dots & \varphi_2^{d^2} & \\ & & \ddots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ & & & 0 & & \ddots & \\ & & & 0 & & & \end{array} \right),$$

\otimes - кронекерово произведение матриц, E_m - единичная матрица размерности m , P_i - обобщенная (возможно содержащая нулевые столбцы) матрица перестановок размера $(md^i) \times (d^1 + \dots + d^m)$, которая может быть записана в следующей блочной форме:

$$P_i = \left(\begin{array}{c|ccc|c|ccc} \theta_i & \dots & & & \theta_i & \dots & & \\ \hline & \dots & e_i & e_{i+m} & \dots & e_{i+(d^i-1)m} & \dots & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \end{array} \right), \quad (2.4)$$

где обозначены следующие столбцы: $\theta_i^k = 0$, $e_i^k = \delta_i^k$, $k = 1 \dots (md^i)$. Если число p различных пространств из P_K^i меньше m , то число слагаемых в сумме (2.3) может быть уменьшено до p путём замены $P_i \rightarrow \sum_{l=1}^{q_i} P_{i(i)}^{l(i)}$, где $P_K^{i(i)} = \dots = P_K^{i_{q_i}(i)}$, $i_1(i) = i$.

Отметим также, что при иной группировке элементов в определении оператора-столбца $T_K(\cdot)$ представление (2.3) для матрицы функций Φ также имеет место при соответствующей перегруппировке столбцов в матрицах (2.4).

Далее предполагается, что для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.69)-(1.70) и (1.73) была использована явная разностная схема Эйлера, примененная для сетки $U_M = (\tau_0 = 0, \dots, \tau_M = T)$ по безразмерному временному параметру τ . При необходимости описываемый ниже конечно-элементный метод может быть без труда адаптирован под другие разностные схемы. Будем далее обозначать $f^{(m)} = f|_{\tau=\tau_m}$, $m=0, \dots, M$ для некоторой функции f .

Перейдем к рассмотрению дискретных задач, соответствующих задачам (1.101') и (1.100''). Будем предполагать построенной регулярную триангуляцию \mathfrak{T}_h ($h = \max_{K \in \mathfrak{T}_h} \text{diam}(K)$) [69] области Σ на основе многоугольных конечных элементов $K \in \mathfrak{T}_h$ (т.е. $\exists C > 0$, что $\forall K \in \mathfrak{T}_h : \text{diam}(K) \leq C\rho_K$, где ρ_K - верхняя грань диаметров кругов, вписанных в K). Рассмотрим пару (K^u, K^ε) , где $K^u = (K, P_K^u, D_K^u)$ ($P_K^u = P_K^{u(1)} \times P_K^{u(2)} \times P_K^{u(3)}$, $D_K^u = D_K^{u(1)} \times D_K^{u(2)} \times D_K^{u(3)}$) - конечный элемент, используемый для аппроксимации обобщенных перемещений, а $K^\varepsilon = (K, P_K^\varepsilon, D_K^\varepsilon)$ ($P_K^\varepsilon = P_K^{\varepsilon(1)} \times \dots \times P_K^{\varepsilon(6)}$, $D_K^\varepsilon = D_K^{\varepsilon(1)} \times \dots \times D_K^{\varepsilon(6)}$) - конечный элемент, применяемый для аппроксимации обобщенных деформаций (1.102). Будем полагать, что $P_K^{u(i)} \subseteq P_{d_i^u}(K)$, $P_K^{\varepsilon(j)} \subseteq P_{d_j^\varepsilon}(K)$, $i=1..3$, $j=1..6$, где $P_n(K)$ - пространство полиномов степени n на множестве K . Также будем предполагать, что пара (K^u, K^ε) выбрана так, что для конечно-элементных пространств $X_h^u = X_h^{u(1)} \times \dots \times X_h^{u(3)}$, $X_h^\varepsilon = X_h^{\varepsilon(1)} \times \dots \times X_h^{\varepsilon(6)}$ [69] справедливы включения: $X_h^u \subset [H^1(\Sigma_h)]^2 \times H^2(\Sigma_h)$, $X_h^\varepsilon \subset [L_2(\Sigma_h)]^6$ (в частности, для элементов X_h^ε допускаются разрывы при переходе через межэлементную границу), где $\Sigma_h = \bigcup_{K \in \mathfrak{T}_h} K$ - область, полученная триангуляцией исходной области Σ . В пространстве X_h^u выделим подпространство $V_h = V_h^1 \times \dots \times V_h^3 : V_h^l = \{v \in X_h^{u(l)} : \text{Tr}_{\Gamma_h}(v) = 0\}$, $V_h^3 = \{v \in X_h^{u(3)} : \text{Tr}_{\Gamma_h}(v) = \text{Tr}_{\Gamma_h}(\partial_l v) n_l^{\Gamma_h} = 0\}$ - подпространства функции с нулевыми граничными условиями (в смысле теории следов) на кривой Γ_h (полученной при

триангуляции исходной области для кривой $\Gamma = \partial\Sigma$). Пусть также $\tilde{\omega}_h^{(0)}, \omega_h^{(1)} \in X_h^u$ - дискретные аналоги функций $\tilde{\omega}^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$ в определениях слабых решений (1.101') и (1.100''). Функции $\tilde{\omega}_h^{(0)}, \omega_h^{(1)}, p_{\pm}$ будем далее предполагать непрерывными функциями от временного параметра τ . Тогда задаче (1.100'') соответствует следующая дискретная задача. Для каждого $m=0, \dots, M$ требуется найти такую пару $(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)}, \lambda_h^{(0)(m)}) \in X_h^u \times X_h^{\varepsilon}$, что $\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)} - \tilde{\omega}_h^{(0)(m)} \in V_h$ и:

$$\begin{cases} B_{HR(h)}^1(w, \lambda_h^{(0)(m)}) = f_h^{T(0)(m)}(w) + f_h^{M(0)(m)}(w), \forall w \in V_h, \\ B_{HR(h)}^1(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)}, \mu) = B_{HR(h)}^2(\mu, \lambda_h^{(0)(m)}), \forall \mu \in X_h^{\varepsilon}, \end{cases} \quad (2.5)$$

причем должно выполняться условие $\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)} = 0$. Аналогично, дискретный аналог задачи (1.101') имеет следующую формулировку: для каждого $m=0, \dots, M$ необходимо найти такую пару $(\zeta_h^{(1)(m)}, \lambda_h^{(1)(m)}) \in X_h^u \times X_h^{\varepsilon}$, что $\zeta_h^{(1)(m)} - \omega_h^{(1)(m)} \in V_h$ и:

$$\begin{cases} B_{HR(h)}^1(w, \lambda_h^{(1)(m)}) = f_h^{T(1)(m)}(w) + f_h^{M(1)(m)}(w), \forall w \in V_h, \\ B_{HR(h)}^1(\zeta_h^{(1)(m)}, \mu) = B_{HR(h)}^2(\mu, \lambda_h^{(1)(m)}), \forall \mu \in X_h^{\varepsilon}. \end{cases} \quad (2.6)$$

В этих постановках введены следующие отображения (в соответствии с матричными представлениями (1.104)-(1.105)):

$$B_{HR(h)}^1(w, \lambda) = \int_{\Sigma_h} \varepsilon(w)^T C \lambda d\Sigma, \quad B_{HR(h)}^2(\mu, \lambda) = \int_{\Sigma_h} \mu^T C \lambda d\Sigma, \quad \forall \lambda, \mu \in X_h^{\varepsilon}, \quad \forall w \in X_h^u,$$

$$f_h^{T(I-1)(m)}(w) = - \int_{\Sigma_h} \varepsilon(w)^T \hat{f}^{T(I-1)(m)} d\Sigma, \quad f_h^{M(0)(m)}(w) = - \int_{\Sigma_h} \varepsilon(w)^T \hat{f}^{M(0)(m)} d\Sigma,$$

$$f_h^{M(1)(m)}(w) = - \int_{\Sigma_h} w^T F^{(m)} d\Sigma - \int_{\Sigma_h} \varepsilon(w)^T \hat{f}^{M(1)(m)} d\Sigma, \quad \forall w \in X_h^u. \quad (2.7)$$

Здесь компоненты столбцов $\hat{f}^{T(I-1)(m)}, \hat{f}^{M(I-1)(m)}$ вычисляются по формулам (1.78), в которых для вычисления компонент $\varepsilon_{KL}^{c(0,0)(m)}, \varepsilon_{KL}^{c(0,1)(m)}, \varepsilon_{KL}^{c(1,0)(m)}$ в момент времени $\tau = \tau_m$ используется выбранная разностная схема. После решения задач (2.5)-(2.6) неизвестные функции $\tilde{\zeta}_h^{(0)}, \zeta_h^{(1)}, \lambda_h^{(I-1)}$ вычисляются путем линейной интерполяции:

$$f(\tau, q_J) = f^{(k)}(q_J) + \frac{\tau - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} (f^{(k+1)}(q_J) - f^{(k)}(q_J)), \text{ для } \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}], k = 0, \dots, M-1,$$

$$f \in \{\zeta_h^{(0)}, \zeta_h^{(1)}, \lambda_h^{(I-1)}\}.$$

Представляя в вариационных уравнениях (2.5)-(2.6) интегралы по области Σ_h в виде сумм интегралов по конечным элементам $K \in \mathfrak{T}_h$, получим:

$$\begin{cases} \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \left(B_{HR(K)}^1(w, \lambda_h^{(0)(m)}) - f_K^{T(0)(m)}(w) - f_K^{M(0)(m)}(w) \right) = 0, \forall w \in V_h, \\ \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \left(B_{HR(K)}^1(\zeta_h^{(0)(m)}, \mu) - B_{HR(K)}^2(\mu, \lambda_h^{(0)(m)}) \right) = 0, \forall \mu \in X_h^\varepsilon, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \left(B_{HR(K)}^1(w, \lambda_h^{(1)(m)}) - f_K^{T(1)(m)}(w) - f_K^{M(1)(m)}(w) \right) = 0, \forall w \in V_h, \\ \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \left(B_{HR(K)}^1(\zeta_h^{(1)(m)}, \mu) - B_{HR(K)}^2(\mu, \lambda_h^{(1)(m)}) \right) = 0, \forall \mu \in X_h^\varepsilon. \end{cases} \quad (2.9)$$

В уравнениях (2.8)-(2.9) отображения $B_{HR(K)}^I(\cdot, \cdot)$, $f_K^{T(I-1)(m)}(\cdot)$, $f_K^{M(I-1)(m)}(\cdot)$ получаются из (2.7) заменой области интегрирования $\Sigma_h \rightarrow K$.

Получим далее явный вид уравнений (2.8)-(2.9). Для этого введем дифференциальный оператор L , который сопоставляет столбцу обобщенных перемещений u столбец обобщенных деформации $\varepsilon(u)$ в матричном представлении (1.102):

$$\varepsilon(u) = Lu, \quad L = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{11}^2 \\ 0 & 0 & -\partial_{22}^2 \\ 0 & 0 & -2\partial_{12}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Поскольку $\forall u \in X_h^u$ и $\forall \lambda \in X_h^\varepsilon$ для операторов P_K^u и P_K^ε - интерполяции справедливы соотношения $\Pi_K^u u = u$, $\Pi_K^\varepsilon \lambda = \lambda$, то подставляя представления (2.2) и (2.10) в уравнения (2.8), получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left(T_K^u(w)^T \left(\int_K (L\Phi^u)^T C \Phi^\varepsilon d\Sigma \right) T_K^\varepsilon \left(\lambda_h^{(0)(m)} \right) \right) = \\
& - \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left(T_K^u(w)^T \int_K (L\Phi^u)^T \hat{f}^{T(0)(m)} d\Sigma \right) - \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left(T_K^u(w)^T \int_K (L\Phi^u)^T \hat{f}^{M(0)(m)} d\Sigma \right), \forall w \in V_h, \quad (2.11) \\
& \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left(T_K^\varepsilon(\mu)^T \int_K (\Phi^\varepsilon)^T C \left(L\Phi^u T_K^u \left(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)} \right) - \Phi^\varepsilon T_K^\varepsilon \left(\lambda_h^{(0)(m)} \right) \right) d\Sigma \right) = 0, \forall \mu \in X_h^\varepsilon,
\end{aligned}$$

где Φ^u и Φ^ε - матрицы функций формы для пространств P_K^u и P_K^ε . Пусть далее построена единая (глобальная) для всех степеней свободы обобщенных перемещений в триангуляции \mathfrak{S}_h нумерация ($n=1 \dots N$, N - общее число степеней свободы обобщенных перемещений в \mathfrak{S}_h), $l(K,n)$ - локальный номер степени свободы в столбце $T_K^u(\cdot)$, а $D_n \subset \mathfrak{S}_h$ - подмножество конечных элементов $K \in \mathfrak{S}_h$, содержащих степень свободы с глобальным номером n . Тогда, поскольку $T_K^\varepsilon(\cdot)$ независимы для различных конечных элементов (по построению X_h^ε), то из (2.11) имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in D_n} \left(e_{l(K,n)}^T \left(\int_K B^T C \Phi^\varepsilon d\Sigma \right) T_K^\varepsilon \left(\lambda_h^{(0)(m)} \right) \right) = - \sum_{K \in D_n} \left(e_{l(K,n)}^T \int_K B^T \hat{f}^{T(0)(m)} d\Sigma \right) - \\
& - \sum_{K \in D_n} \left(e_{l(K,n)}^T \int_K B^T \hat{f}^{M(0)(m)} d\Sigma \right), n=1 \dots N, \quad (2.12) \\
& \left(\int_K (\Phi^\varepsilon)^T C B d\Sigma \right) T_K^u \left(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)} \right) = \left(\int_K (\Phi^\varepsilon)^T C \Phi^\varepsilon d\Sigma \right) T_K^\varepsilon \left(\lambda_h^{(0)(m)} \right), \forall K \in \mathfrak{S}_h.
\end{aligned}$$

Здесь обозначены: $B = L\Phi^u$, $e_i^k = \delta_i^k$, $k=1 \dots (d^1 + d^2 + d^3)$, $d^i = \dim(P_K^{u(i)})$. Выражая во втором уравнении столбец неизвестных $T_K^\varepsilon \left(\lambda_h^{(0)(m)} \right)$ через $T_K^u \left(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)} \right)$, получим:

$$T_K^\varepsilon \left(\lambda_h^{(0)(m)} \right) = Q^{-1} S T_K^u \left(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)} \right), \forall K \in \mathfrak{S}_h, \quad (2.13)$$

где обозначены следующие матрицы:

$$Q = \int_K (\Phi^\varepsilon)^T C \Phi^\varepsilon d\Sigma, \quad S = \int_K (\Phi^\varepsilon)^T C B d\Sigma.$$

Подставляя (2.13) в (2.12), получим разрешающую систему уравнений, определяющую $\forall K \in \mathfrak{Z}_h$ степени свободы $T_K^u(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)})$:

$$\sum_{K \in D_n} e_{l(K,n)}^T \left(S^T Q^{-1} S T_K^u(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)}) - f_K^{(0)(m)} \right) = 0, \quad n = 1 \dots N,$$

$$f_K^{(0)(m)} = - \int_K B^T \hat{f}^{T(0)(m)} d\Sigma - \int_K B^T \hat{f}^{M(0)(m)} d\Sigma. \quad (2.14)$$

Проводя аналогичный вывод для задачи (2.9), приходим к системе, определяющей $\forall K \in \mathfrak{Z}_h$ степени свободы $T_K^u(\zeta_h^{(1)(m)})$:

$$\sum_{K \in D_n} e_{l(K,n)}^T \left(S^T Q^{-1} S T_K^u(\zeta_h^{(1)(m)}) - f_K^{(1)(m)} \right) = 0, \quad n = 1 \dots N,$$

$$f_K^{(1)(m)} = - \int_K B^T \hat{f}^{T(1)(m)} d\Sigma - \int_K (\Phi^u)^T F^{(m)} d\Sigma - \int_K B^T \hat{f}^{M(1)(m)} d\Sigma. \quad (2.15)$$

2.2. Частный случай конечно-элементных соотношений для одинаковой аппроксимации обобщенных деформаций

В предыдущем пункте были получены явные выражения для уравнений (2.14)-(2.15) без ограничения на способ аппроксимации обобщенных перемещений и деформаций. В данном пункте будет показана возможность значительного упрощения этих выражений при дополнительном допущении об одинаковости аппроксимации обобщенных деформаций, т.е. $P_K^{\varepsilon(1)} = \dots = P_K^{\varepsilon(6)}$ и $D_K^{\varepsilon(1)} = \dots = D_K^{\varepsilon(6)}$. Также будем предполагать постоянство обобщенной матрицы упругости C внутри конечного элемента K . В этом случае, согласно соотношению (2.3), справедливо следующее представление для матрицы функций формы Φ^ε :

$$\Phi^\varepsilon = \psi^T \otimes E_6,$$

где ψ - столбец функций формы пространства $P_K^{\varepsilon(1)}$. Тогда воспользовавшись свойствами кронекерова произведения матриц, получаем следующее представление для матрицы Q :

$$Q = \int_K (\psi \otimes E_6) ((1) \otimes C) (\psi^T \otimes E_6) d\Sigma = \int_K [(\psi \psi^T) \otimes C] d\Sigma = N \otimes C,$$

$$N = \int_K \psi \psi^T d\Sigma. \quad (2.16)$$

Далее, отметим справедливость следующих вспомогательных матричных соотношений:

$$(\psi \otimes E_6) C = (\psi \otimes E_6) ((1) \otimes C) = \psi \otimes C = (E_l \otimes C) (\psi \otimes E_6),$$

$$C (\psi^T \otimes E_6) = (\psi^T \otimes E_6) (E_l \otimes C), \quad (2.17)$$

где l - число строк (число функций формы в $P_K^{\varepsilon(1)}$) у столбца ψ . Тогда для матрицы $S^T Q^{-1} S$ в системах (2.14)-(2.15) из (2.17) имеем:

$$S^T Q^{-1} S = \int_K B^T C (\psi^T \otimes E_6) d\Sigma (N^{-1} \otimes C^{-1}) \int_K (\psi \otimes E_6) C B d\Sigma =$$

$$= \tilde{G}^T (E_l \otimes C) (N^{-1} \otimes C^{-1}) (E_l \otimes C) \tilde{G} = \tilde{G}^T \tilde{H} \tilde{G},$$

$$\tilde{G} = \int_K (\psi \otimes E_6) B d\Sigma, \quad \tilde{H} = N^{-1} \otimes C. \quad (2.18)$$

Аналогично, для столбцов степеней свободы обобщенных деформаций $T_K^\varepsilon(\lambda_h^{(I-1)(m)})$ имеем:

$$T_K^\varepsilon(\lambda_h^{(I-1)(m)}) = (N^{-1} \otimes C^{-1}) \int_K (\psi \otimes E_6) C B d\Sigma T_K^u(u_h^{(I-1)(m)}) =$$

$$= (N^{-1} \otimes C^{-1}) (E_l \otimes C) \tilde{G} T_K^u(u_h^{(I-1)(m)}) = (N^{-1} \otimes E_6) \tilde{G} T_K^u(u_h^{(I-1)(m)}), \quad (2.19)$$

где $u_h^{(0)(m)} = \tilde{\zeta}_h^{(0)(m)}$ для задачи (2.14) и $u_h^{(1)(m)} = \zeta_h^{(1)(m)}$ для задачи (2.15). Таким образом, если ввести матрицу G :

$$G = (N^{-1} \otimes E_6) \int_K (\psi \otimes E_6) B d\Sigma = \int_K ((N^{-1}\psi) \otimes E_6) B d\Sigma = \int_K (\tilde{\psi} \otimes E_6) B d\Sigma,$$

$$\tilde{\psi} = \left(\int_K \psi \psi^T d\Sigma \right)^{-1} \psi, \quad (2.20)$$

то соотношение (2.19) примет компактный вид:

$$T_K^\varepsilon \left(\lambda_h^{(l-1)(m)} \right) = G T_K^u \left(u_h^{(l-1)(m)} \right). \quad (2.21)$$

Выражение для матрицы $S^T Q^{-1} S$, с учетом введенной матрицы G , может быть преобразовано следующим образом:

$$S^T Q^{-1} S = G^T (N \otimes E_6) (N^{-1} \otimes C) (N \otimes E_6) G = G^T H G, \quad H = N \otimes C. \quad (2.22)$$

Подставляя в (2.20) представление (2.3) для матрицы функций формы Φ^u , получим:

$$G = \sum_{i=1}^m \left(\int_K (\tilde{\psi} \otimes E_6) L(\varphi_i^T \otimes E_m) d\Sigma \right) P_i = \sum_{i=1}^m G_i P_i, \quad G_i = \int_K g_i d\Sigma, \quad g_i = (\tilde{\psi} \otimes E_6) L(\varphi_i^T \otimes E_3). \quad (2.23)$$

Здесь $m \leq 3$ - число различных пространств из $P_K^{u(i)}$. Для подынтегральной матрицы g_i , в силу определения кронекерова произведения матриц, справедливо следующее блочное представление:

$$g_i = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 L \varphi_i^1 & \cdots & \tilde{\psi}_1 L \varphi_i^{d_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\psi}_l L \varphi_i^1 & \cdots & \tilde{\psi}_l L \varphi_i^{d_i} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

где $d_i = \dim(P_K^{u(i)})$ - число функций формы в $P_K^{u(i)}$. Данное представление обеспечивает возможность аналитического вычисления интегралов $G_i = \int_K g_i d\Sigma$ в случае достаточно сложных функций формы $\tilde{\psi}_i, i=1 \dots l$, $\varphi_i^j, j=1 \dots d_i, i=1 \dots m$.

2.3. Треугольный конечный элемент для решения осредненных задач

В рамках данной работы в качестве конечного элемента K будет использоваться треугольный конечный элемент, с узлами, расположенными в вершинах (рис. 2.1). Степени свободы $T_K^u(\zeta_h^{(0)(m)})$, $T_K^u(\zeta_h^{(1)(m)})$ для неизвестных функций $\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)}$, $\zeta_h^{(1)(m)}$ в задачах (2.14)-(2.15) будут также рассматриваться в вершинах треугольника K , а их вид будет конкретизирован в следующих подпунктах, в соответствии с выбранными функциями формы.

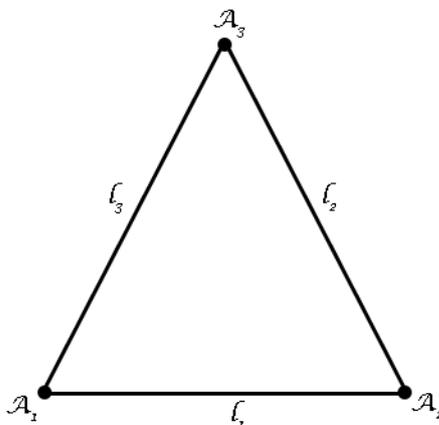


Рис. 2.1. Треугольный конечный элемент K .

После нахождения степеней свободы обобщенных перемещений $T_K^u(\tilde{\zeta}_h^{(0)(m)})$, $T_K^u(\zeta_h^{(1)(m)})$ (путем решения задач (2.14)-(2.15)) для каждого конечного элемента K , вычисление соответствующих степеней свободы обобщенных деформаций $T_K^\varepsilon(\lambda_h^{(l-1)(m)})$ производится на основе формулы (2.13) (или, если выполняются указанные в пункте 2.2 условия, на основе формулы (2.21)). Далее, по найденным аппроксимациям обобщенных деформаций (интерполируя по временному параметру τ) $\Pi_K^\varepsilon \lambda_h^{(l-1)} = \Phi^\varepsilon T_K^\varepsilon(\lambda_h^{(l-1)})$, аппроксимации компонент напряжений (для данного конечного элемента K) могут быть вычислены по формулам (1.92)-(1.94).

2.3.1. Применение аппроксимации Белла для функций прогиба

Как уже было отмечено в пункте 1.10, применение вариационных уравнений вариационного принципа Хеллингера-Рейснера не позволяет понизить порядок производных от прогибов $\tilde{\zeta}_3^{(0)(m)}$, $\zeta_3^{(1)(m)}$. Таким образом, для того, чтобы оставаться в рамках конформного метода конечных элементов [69] в случае, когда $\Sigma_h = \Sigma$ (в частности, необходима справедливость включения $X_h^{u(3)} \subset H^2(\Sigma_h)$), согласно теореме вложения Соболева [54, 73], требуется такой выбор множеств $P_K^{u(3)}$, $D_K^{u(3)}$, чтобы имела место непрерывность самой функции $p \in X_h^{u(3)}$ и ее первой производной при переходе через межэлементную границу, т.е. $X_h^{u(3)} \subset C^1(\bar{\Sigma}_h)$. Как было отмечено в книгах [10, 67], использование кубических полиномов (без корректировки вида вариационного уравнения) не гарантирует непрерывности первой производной. Из теоремы Женишека [69, 109-110] следует, что минимальный порядок полинома двух переменных на треугольнике K , который допускает выполнение этого условия, есть пятый порядок (т.е. необходимо положить $P_K^{u(3)} \subseteq P_5(K)$). Случай $P_K^{u(3)} = P_K^A = P_5(K)$ позволяет достичь максимальный в рассматриваемом случае порядок аппроксимации $O(h^4)$ в норме $\|\cdot\|_{H^2(\Sigma_h)}$ [69], а соответствующие степени свободы могут быть выбраны в виде (аппроксимация Аргириса [69, 75]):

$$D_K^A = \left\{ \partial^\alpha p(A_i), 1 \leq i \leq 3, |\alpha| \leq 2, \partial_{\mathbf{n}_i} p(A_{ij}), j = 1 + i \bmod 3, 1 \leq i \leq 3 \right\}, \quad (2.25)$$

где A_i - точки в вершинах треугольника K , A_{ij} - точки в середине сторон, \mathbf{n}_i - вектор нормали к соответствующей стороне l_i , $\partial_{\mathbf{n}_i}$ - производная по нормали к $l_i, i=1...3$. Данная аппроксимация имеет недостаток технического характера, связанный с различием числа степеней свободы в вершинах и в узлах на серединах сторон K , что усложняет компьютерную реализацию данной аппроксимации. Альтернативный подход, который будет применяться в данной работе, состоит в исключении степеней свободы на сторонах треугольника путем

наложения на элементы пространства P_K^A условия кубичности нормальной производной к сторонам K :

$$P_K^{u(3)} = P_K^B = \{p \in P_5(K) : \partial_{\mathbf{n}_i} p \in P_3(l_i), 1 \leq i \leq 3\}, \quad (2.26)$$

$$D_K^{u(3)} = D_K^B = \{\partial^\alpha p(A_i), 1 \leq i \leq 3, |\alpha| \leq 2\}. \quad (2.27)$$

Полученная таким образом аппроксимация называется аппроксимацией Белла [78]. В отличие от аппроксимации Аргириса, для пространства P_K^B выполняется включение $P_4(K) \subset P_K^B$, что снижает порядок аппроксимации до $O(h^3)$ в норме $\|\cdot\|_{H^2(\Sigma_h)}$ [69]. Примеры применения аппроксимаций типа Аргириса и Белла для построения конечных элементов пластин и оболочек можно найти в работах [11, 76, 82, 83].

Непосредственный вывод функций формы для данной аппроксимации может быть осуществлён следующим образом. Пусть $m_5(q_1, q_2)$ - столбец мономов от двух переменных до 5-го порядка включительно (содержащий 21 элемент):

$$m_5(q_1, q_2) = \left(1 \quad q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad [q_2]^5\right)^T.$$

Обозначив через D вспомогательный оператор-строку вида (соответствующий выбранным степеням свободы (2.27)):

$$D = (1 \quad \partial_1 \quad \partial_2 \quad \partial_{11}^2 \quad \partial_{12}^2 \quad \partial_{22}^2),$$

введем следующую матрицу B :

$$B = \left(D \otimes m_5|_{A_1} \quad D \otimes m_5|_{A_2} \quad D \otimes m_5|_{A_3} \quad \frac{\partial^5 m_5}{\partial^4 \boldsymbol{\tau}_1 \partial \mathbf{n}_1} \quad \frac{\partial^5 m_5}{\partial^4 \boldsymbol{\tau}_2 \partial \mathbf{n}_2} \quad \frac{\partial^5 m_5}{\partial^4 \boldsymbol{\tau}_3 \partial \mathbf{n}_3} \right), \quad (2.28)$$

где $\boldsymbol{\tau}_i$ - вектор касательной к стороне $l_i, i=1..3$. Тогда столбцы коэффициентов α_i при мономах $m_5(\cdot, \cdot)$ для i -й функции формы φ_i^B аппроксимации Белла удовлетворяют следующей системе линейных уравнений ($i=1..18$):

$$B^T \alpha_i = e_i,$$

где e_i - столбец с элементами $e_i^k = \delta_i^k$, $k=1\dots 21$. Таким образом, функции φ_i^B могут быть представлены в следующем виде:

$$\varphi_i^B(q_1, q_2) = \alpha_i^T m_5(q_1, q_2) = e_i^T B^{-1} m_5(q_1, q_2). \quad (2.29)$$

Вычисление матрицы B и функций формы φ_i^B может быть проведено в одном из пакетов символьных вычислений (Mathematica, Maple и т.п.). Явный вид функций формы φ_i^B для стандартного треугольника (с вершинами в точках $(1 \ 0)$, $(0 \ 1)$, $(0 \ 0)$) приведен в книге [53], но так как треугольник (аппроксимация) Белла (и треугольник Аргириса) не обладает свойством аффинной эквивалентности [69] (в отличие, например, от лагранжевых конечных элементов), то при получении выражений для произвольно расположенных на плоскости треугольников необходимо использовать общие соотношения (2.28)-(2.29).

2.3.2. Применение аппроксимации кубическими полиномами для обобщенных деформаций

Выбор в предыдущем пункте в качестве аппроксимации для прогибов аппроксимации Белла индуцирует (в силу вида дифференциального оператора L (2.10)) выбор соответствующих пространств обобщенных деформаций $P_K^{\varepsilon(i)}$, $i=4\dots 6$ как пространств кубических полиномов на треугольнике K (содержащих 10 коэффициентов): $P_K^{\varepsilon(4)} = \dots = P_K^{\varepsilon(6)} = P_3(K)$. С целью использования результатов пункта 2.2 положим, что $P_K^{\varepsilon(1)} = \dots = P_K^{\varepsilon(6)} = P_3(K)$. В качестве соответствующих степеней свободы $D_K^{\varepsilon(1)} = \dots = D_K^{\varepsilon(6)}$ будем использовать стандартные лагранжевы степени свободы для кубической аппроксимации [43, 66, 77]:

$$D_K^{\varepsilon(1)} = \{p(A_i), p(A_{ijJ}), p(C), j = 1 + i \bmod 3, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq J \leq 2\},$$

где A_{ijJ} - точки на сторонах треугольника K , C - барицентр треугольника K (рис.

2.2). Столбец функций формы при таком выборе степеней свободы имеет следующий вид:

$$2\psi = \begin{pmatrix} L_1(3L_1-1)(3L_1-2) \\ L_2(3L_2-1)(3L_2-2) \\ L_3(3L_3-1)(3L_3-2) \\ 9L_1L_2(3L_1-1) \\ 9L_1L_2(3L_2-1) \\ 9L_3L_1(3L_1-1) \\ 9L_3L_1(3L_3-1) \\ 9L_2L_3(3L_2-1) \\ 9L_2L_3(3L_3-1) \\ 54L_1L_2L_3 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Здесь $L_i = L_i(M)$ - барицентрические координаты точки M в треугольнике K .

Отметим, что разрывы обобщенных деформаций при переходе через межэлементную границу в данном случае допускаются, т.е. указанные степени свободы независимы для каждого конечного элемента K в триангуляции.

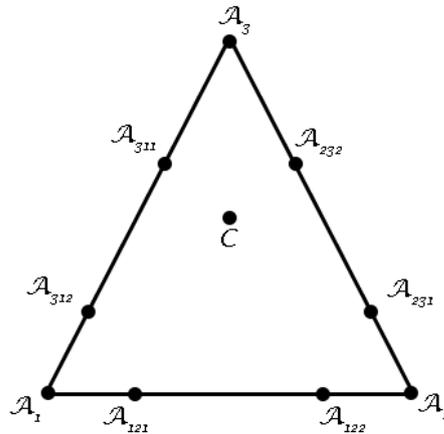


Рис. 2.2. Расположение точек при кубической лагранжевой аппроксимации для треугольника.

2.3.3. Применение аппроксимации трикубическими полиномами Биркгофа для продольных перемещений

Необходимость согласования с выбранными в предыдущем пункте пространствами конечно-элементной аппроксимации обобщенных деформаций $P_K^{e(i)}$, $i=1...3$, соответствующих продольным перемещениям $\tilde{\zeta}_{h(I)}^{(0)(m)}$, $\zeta_{h(I)}^{(1)(m)}$, $I=1,2$, и вид оператора L (2.10) побуждают выбор в качестве пространства $P_K^{u(1)} = P_K^{u(2)}$ подпространства полиномов четвертого порядка: $P_K^{u(1)} \subseteq P_4(K)$. При этом в контексте технической реализации желательно согласование узлов, к которым отнесены степени свободы соответствующие аппроксимациям прогибов и продольных перемещений. Обоим указанным условиям удовлетворяет трикубическая аппроксимация Биркгофа [80]. В этой аппроксимации в качестве множества P_K^{Bg} выбирается множество полиномов четвертой степени, обращающиеся в полиномы третьего порядка на всякой прямой параллельной какой-либо из сторон треугольника K , или:

$$P_K^{Bg} = P_3(K) \oplus \text{span} \{L_1^2 L_2 L_3, L_1 L_2^2 L_3, L_1 L_2 L_3^2\}, \quad (2.31)$$

где $L_i(M)$, $i=1...3$ - барицентрические координаты точки M в треугольнике K .

Поскольку $\sum_{i=1}^3 L_i = 1$, то $\dim P_K^{Bg} = \dim P_3(K) + 2 = 12$. В указанной работе Биркгофа в качестве степеней свободы D_K^{Bg} предлагается использовать значения функции, ее первых и второй смешанной производной в вершинах треугольника. Такой выбор степеней свободы имеет недостаток, связанный с неудобством выражения смешанных производных через производные по барицентрическим координатам. Более предпочтительным, представляется, следующий выбор степеней свободы:

$$D_K^{Bg} = \{\partial^\alpha p(A_i), 1 \leq i \leq 3, |\alpha| = 0, 2\}. \quad (2.32)$$

Свойства такого выбора степеней свободы описываются следующей теоремой.

Теорема 4. Множество D_K^{Bg} P_K^{Bg} - унисольвентно. Справедливо включение $X_h^{Bg} \subset C(\bar{\Sigma}_h)$.

Доказательство. Покажем сначала первое утверждение. Пусть для $p \in P_K^{Bg}$ выполнено условие:

$$p(A_i) = \partial_{11}^2 p(A_i) = \partial_{12}^2 p(A_i) = \partial_{22}^2 p(A_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (2.33)$$

Положим, что z - координата вдоль некоторой стороны l_i треугольника K , выбранная таким образом, что точке A_i соответствует координата $z=0$, а точке A_j - $z=1$, $j=1+i \bmod 3$, $1 \leq i \leq 3$. Тогда, рассматривая p как функцию от координаты z , из (2.33) вытекают следующие условия:

$$p(0) = p(1) = p''(0) = p''(1) = 0. \quad (2.34)$$

Поскольку, в силу выбора пространства P_K^{Bg} , $p \in P_3(l_i)$, то из условия (2.34) вытекает, что $p(z) = 0$. Данное рассуждение справедливо для каждой стороны треугольника, и, следовательно, такая функция может быть записана в виде:

$$p(L_1, L_2) = L_1 L_2 L_3 (C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3),$$

где C_i , $i=1 \dots 3$ - произвольные постоянные. Воспользовавшись формулой связи между вторыми производными по барицентрическим и декартовым координатам:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial L_i \partial L_j} = \tilde{J}_K^i \tilde{J}_L^j \frac{\partial^2 p}{\partial q_K \partial q_L},$$

где \tilde{J}_j^i - компоненты транспонированной матрицы Якоби (невырожденной при невырожденном треугольнике K) перехода от барицентрических к декартовым координатам и условиями на вторые производные в (2.33), получим:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Таким образом, единственная функция $p \in P_K^{Bg}$, имеющая нулевые степени свободы из D_K^{Bg} , есть тождественный нуль, т.е. степени свободы однозначно определяют элемент $p \in P_K^{Bg}$, что и означает, что множество степеней свободы D_K^{Bg} P_K^{Bg} - унисольвентно.

Для доказательства второго утверждения теоремы, рассмотрим соседние треугольники K_1, K_2 (со смежной стороной l) и сужения некоторого элемента $f \in X_h^{Bg}$ на эти треугольники: $f|_{K_1} = p_1 \in P_{K_1}^{Bg}$, $f|_{K_2} = p_2 \in P_{K_2}^{Bg}$. Данные сужения будем рассматривать на стороне l как функции от координаты z , заданной вдоль l . Тогда, вводя вспомогательную функцию $p(z) = p_2(z) - p_1(z)$, получаем, что она удовлетворяет условиям (2.34) (при надлежащем масштабировании введенной координаты z). Но поскольку (по построению $P_{K_1}^{Bg}, P_{K_2}^{Bg}$) p - кубический полином от z , то $p=0$, и, следовательно, элемент f - непрерывен при переходе через межэлементную границу. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет использовать аппроксимацию трикубическими полиномами Биркгофа со степенями свободы в форме (2.32) в качестве аппроксимации для продольных перемещений $\tilde{\zeta}_{h(l)}^{(0)(m)}, \zeta_{h(l)}^{(1)(m)}$ в задачах (2.14)-(2.15) оставаясь в рамках конформного метода конечных элементов в случае, когда $\Sigma_h = \Sigma$ (в частности, необходима справедливость включения $X_h^{u(l)} \subset H^1(\Sigma_h)$). Данная аппроксимация будет далее применяться в указанном качестве в рамках данной работы ($P_K^{u(1)} = P_K^{u(2)} = P_K^{Bg}$, $D_K^{u(1)} = D_K^{u(2)} = D_K^{Bg}$). Вывод функций формы для данной аппроксимации может быть проведен в полной аналогии с выводом функций формы для аппроксимации Белла в пункте 2.3.1.

2.4. Решение систем уравнений

В пункте 2.3 был конкретизирован конечный элемент, применяемый далее для нахождения приближенных слабых решений задач (1.82)-(1.83) (постановки (1.101') и (1.100'')), определяемых дискретными задачами (2.5)-(2.6). Данные задачи сводятся к системам линейных алгебраических уравнений вида (2.14)-(2.15). Технически, процедура сборки (соответствующая вычислению сумм в (2.14)-(2.15)) из матрицы $S^T Q^{-1} S$ и столбцов $f_K^{(l-1)(m)}$ для каждого конечного элемента K (локальной матрицы и локального вектора правой части) общей системы уравнений (с глобальной матрицей и глобальным вектором правой части), определяющей столбец степеней свободы, производится на основе стандартной процедуры ансамблирования [43, 66]. При этом (в силу выбора пространств деформаций $P_K^{e(i)}, i=1\dots 6$ в пункте 2.3.2) матрица $S^T Q^{-1} S$ допускает представление (2.22). Вычисление интегралов, определяющих матрицы N и G в (2.16) и (2.23), а также правые части $f_K^{(l-1)(m)}$ в (2.14)-(2.15), может быть проведено аналитически (используя для матрицы G представление (2.24)) в одном из пакетов символьной алгебры (например, Mathematica, Maple и т.п.).

Далее, так как матрица для одного конечного элемента $S^T Q^{-1} S$, как и глобальная матрица S^G в (2.14)-(2.15), является симметричной и положительно определенной, то для решения систем линейных уравнений с такой матрицей могут быть применены соответствующие методы решения, например, метод сопряженных градиентов [91]. Также, поскольку матрица S^G , является разреженной (содержащей малую долю ненулевых элементов), то для ее представления в памяти вычислительного устройства имеет смысл применять специальные компактные методы хранения (например, CSR, CSIR [2, 58]). В рамках данной работы был использован CSR метод хранения. Указанный метод, хотя и приводит к увеличению используемой памяти по сравнению с CSIR методом, но позволяет уменьшить число кэш-промахов процессора при матрично-

векторных операциях. Решение глобальной системы уравнений в рамках данной работы производилось с помощью метода сопряженных градиентов с диагональным и ILU предобуславливателем [2].

2.5. Программная реализация

Реализация вычислительных методов (объединенных в комплекс), описанных в предыдущем пункте, производилась в рамках системы суперкомпьютерного моделирования SMCM, разрабатываемой в научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (СИМПЛЕКС) МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Рассматриваемый программный комплекс состоит из следующих модулей (реализованных в форме динамически подключаемых библиотек): модуля контейнеров-решателей систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), модуля типов конечных элементов, модуля решателей задач метода конечных элементов (МКЭ) и запускающего модуля (рис. 2.3).

Перед запуском решателя входной файл сетки (в разработанном в рамках системы SMCM формате BMF) формируется на основе препроцессинга конечно-элементной сетки, полученной с помощью одного из генераторов (например, Netgen, Gmsh и т.п.), и осуществляется с помощью визуализатора системы SMCM. Запускающий модуль 1 получает на вход следующие файлы в формате XML: файл постановки задачи (ПЗ), файлы свойств материалов (СМ), файлы настроек модулей комплекса (конфигурационные файлы (КФ)) и файл сетки в указанном выше формате. На основе полученных из этих файлов данных, запускающий модуль запускает и инициализирует используемый в данной задаче тип конечного элемента, тип контейнера-решателя СЛАУ и решатель МКЭ задачи (передавая ему указанные объекты).

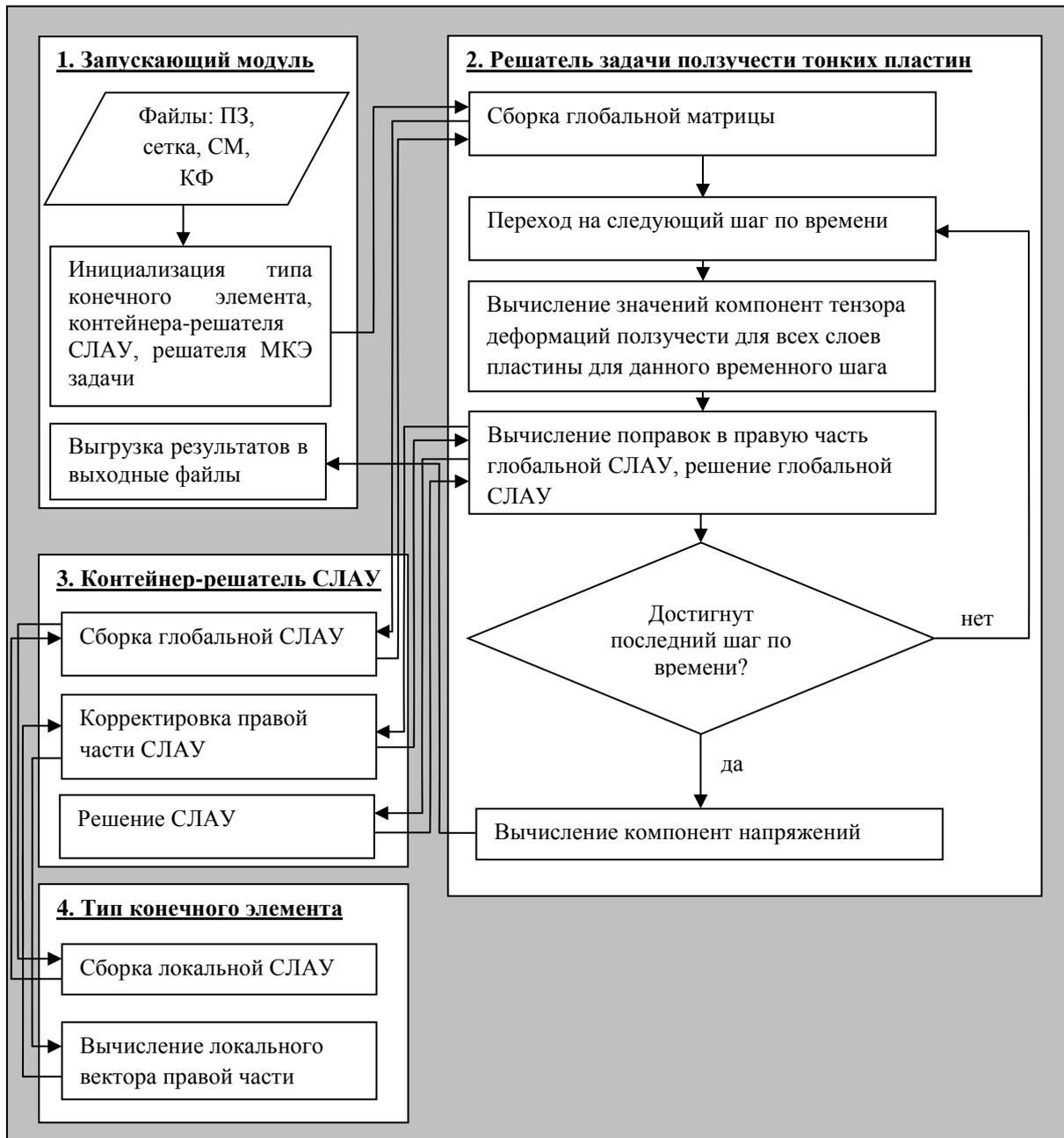


Рис.2.3. Блок-схема программного комплекса численного моделирования ползучести многослойных тонких пластин

Модуль 4 типов конечного элемента реализует для рассматриваемого треугольного конечного элемента (описанного в пункте 2.3) сборку матрицы $S^T Q^{-1} S$ и векторов правых частей $f_K^{(l-1)(m)}$ в (2.14)-(2.15) для данного конечного элемента (выражения в скобках системы (2.14)-(2.15)).

Модуль контейнеров-решателей СЛАУ (№ 3 на рис. 2.3) осуществляет в рассматриваемой задаче хранение (в формате CSR), сборку (на основе системы для одного конечного элемента, выдаваемой модулем типа КЭ) и решение (на

основе метода сопряженных градиентов с диагональным или ILU предобуславливателем) систем линейных уравнений, соответствующих дискретным задачам (2.5)-(2.6).

Модуль решателя МКЭ задачи реализует разностную схему решения задач (1.69)-(1.70) и (1.73) для выбранной модели ползучести, определяемой тензорной функцией $\mathbf{F}(\dots)$ в исходной задаче (1.1). На каждом шаге этой разностной схемы вызывается метод решения дискретных задач (2.5)-(2.6), сведенных к СЛАУ, из соответствующего модуля 3. После расчета всех временных шагов, соответствующих рассматриваемому отрезку моделирования процесса ползучести $[0, T]$, компоненты напряжений вычисляются по формулам (1.92)-(1.94).

Результаты расчета выгружаются запускающим модулем в виде выходных файлов форматов BRF (содержащие информацию о полученных полях) и файлов формата CSV (содержащие табличные данные о распределении компонент напряжений по толщине пластины). Визуализация файлов формата BRF осуществляется с помощью визуализатора системы SMCM.

Разработка описанного программного комплекса осуществлялась на языке C++ (с применением стандарта C++14) в интегрированной среде разработки Qt Creator с использованием компиляторов GCC и MinGW.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ И БЕЗ УЧЕТА ПОЛЗУЧЕСТИ

3.1. Задача об изгибе многослойной прямоугольной тонкой пластины без учета ползучести

3.1.1. Аналитическое решение задачи

Рассмотрим задачу об изгибе пластины прямоугольной формы без ограничений на расположение слоев относительно срединной плоской поверхности (т. е. тензор модулей упругости ${}^4C(\cdot)$, вообще говоря, не является четной функцией от локальной координаты ξ), без учета деформаций ползучести и под действием постоянного давления. Будем предполагать, что q_1 - продольная ($q_1 \in [0,1]$), q_2 - поперечная глобальные координаты пластины ($q_2 \in [-b/2, b/2]$, $b \in \mathbb{R}_+$), а материалы слоев пластины являются ортотропными. В этом случае справедливы соотношения, полученные в пункте 1.8.

В качестве граничных условий для систем (1.82)-(1.83) выберем условия жесткого защемления:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^{(0)}|_{q_1=0} = v_1^{(0)}|_{q_1=1} = v_3^{(0)}|_{q_1=0} = v_3^{(0)}|_{q_1=1} = 0, \\ v_2^{(0)}|_{q_2=-\frac{b}{2}} = v_2^{(0)}|_{q_2=\frac{b}{2}} = 0, \\ \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \\ v_1^{(1)}|_{q_1=0} = v_1^{(1)}|_{q_1=1} = 0, \\ v_2^{(1)}|_{q_2=-\frac{b}{2}} = v_2^{(1)}|_{q_2=\frac{b}{2}} = 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Неизвестные функции $v_i^{(0)}$, $v_i^{(1)}$ этих систем будем искать в виде полиномов от продольной координаты q_1 :

$$\begin{cases} v_1^{(0)}(q_1) = v_2^{(0)}(q_1) = 0 \\ v_3^{(0)}(q_1) = Bq_1^2(q_1 - 1)^2 \\ v_1^{(1)}(q_1) = A_1q_1(q_1^2 - 1) + A_2q_1(q_1 - 1), \\ v_2^{(1)}(q_1) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь A_1 , A_2 , B – некоторые неизвестные константы. Функции $v_i^{(0)}$, $v_i^{(1)}$, выбранные в таком виде, удовлетворяют граничным условиям задачи (3.1). Как уже неоднократно упоминалось, в силу однородных граничных условий по продольным перемещениям в (3.1), нулевые функции $v_i^{(0)}$ тождественно удовлетворяют системе (1.82). Подставляя (3.2) в систему (1.83), получим следующую систему уравнений относительно неизвестных констант:

$$\begin{cases} \bar{C}_{1111}(6A_1q_1 + 2A_2) - B_{1111}B(24q_1 - 12) = 0, \\ 6B_{1111}A_1 - 24D_{1111}B = \Delta p. \end{cases}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях координаты q_1 , будем иметь следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 6\bar{C}_{1111}A_1 - 24B_{1111}B = 0, \\ 2\bar{C}_{1111}A_2 - 12B_{1111}B = 0, \\ 6B_{1111}A_1 - 24D_{1111}B = \Delta p. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решая данную систему уравнений, приходим к выражениям для констант:

$$\begin{cases} B = -\frac{\Delta p \bar{C}_{1111}}{24(D_{1111}\bar{C}_{1111} - (B_{1111})^2)}, \\ A_1 = -\frac{\Delta p B_{1111}}{6(D_{1111}\bar{C}_{1111} - (B_{1111})^2)}, \\ A_2 = \frac{\Delta p B_{1111}}{4(D_{1111}\bar{C}_{1111} - (B_{1111})^2)}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Соотношения для напряжений (1.92)-(1.94), с учетом зависимости решений системы (1.83) только от продольной координаты пластины и отсутствия эффектов ползучести, упрощаются следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{11}^{(1)} = \kappa \hat{C}_{1111} \left[e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \xi \eta_{11}(v_3^{(0)}) \right], \quad (3.5)$$

$$\bar{\sigma}_{13}^{(2)} = -\kappa^2 \left[\left\{ \hat{C}_{1111} \right\}_{\xi} \partial_1 e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \left\{ \xi \hat{C}_{1111} \right\}_{\xi} \partial_1 \eta_{11}(v_3^{(0)}) \right], \quad (3.6)$$

$$\bar{\sigma}_{33}^{(3)} = \kappa^3 \left[-(p_- + \Delta p(\xi + 1/2)) + \left\{ \left\{ \hat{C}_{1111} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{11}^2 e_{11}(\mathbf{v}^{L(1)}) + \left\{ \left\{ \xi \hat{C}_{1111} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \partial_{11}^2 \eta_{11}(v_3^{(0)}) \right]. \quad (3.7)$$

3.1.2. Сравнение с трехмерным решением

Для анализа точности решения, полученного на основе разработанного асимптотического метода, было проведено сравнение результатов расчета компонент тензора напряжений по формулам (3.5)-(3.7) с компонентами, рассчитанными по 3-х мерной теории упругости (конечно-элементное решение). Для этого в качестве области $\tilde{\Omega}$ будем рассматривать прямоугольный параллелепипед:

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \tilde{x}_i \tilde{\mathbf{e}}_i : \tilde{x}_1 \in [0, L], \tilde{x}_2 \in \left[-\frac{\tilde{b}}{2}, \frac{\tilde{b}}{2} \right], \tilde{x}_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{e}}_i$ – орты системы координат $O\tilde{x}_i$. Толщина пластины h была выбрана равной $2.1 \cdot 10^{-2}$, а остальные геометрические параметры пластины были подобраны таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$\kappa = \frac{h}{L} = \frac{\tilde{b}}{L} = 0.025.$$

Граничные условия для трехмерной задачи (1.2) теории упругости были заданы следующими:

$$\begin{cases} \sigma_{i3}|_{\tilde{x}_3=\pm h/2} = -\tilde{p}_{\pm} \delta_{i3}, \\ u_1|_{\tilde{x}_1=0} = u_1|_{\tilde{x}_1=L} = 0, \\ u_2|_{\tilde{x}_2=\pm \tilde{b}/2} = 0, \\ u_3|_{\tilde{x}_1=0} = u_3|_{\tilde{x}_1=L} = 0. \end{cases}$$

Безразмерные значения давления на внешней и внутренней поверхности \hat{p}_{\pm} были выбраны следующими: $\hat{p}_{+} = 10^{-2}$ и $\hat{p}_{-} = 10^{-3}$. Пластина состояла из 3-х слоев, толщины которых соответствовали сетке $A_3 = (-1/2, -1/42, 3/14, 1/2)$ по локальной координате $\xi = \tilde{x}_3 / h$. Значения упругих характеристик ортотропных материалов слоев металлокерамической пластины приведены в таблице 2.1. Слой № 3 соответствует значению локальной координаты $\xi = -0.5$, а слой № 1 - $\xi = 0.5$. Поскольку материалы слоев выбраны ортотропными, то $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$.

| № | E_1 , ГПа | E_2 , ГПа | E_3 , ГПа | G_{12} , ГПа | G_{13} , ГПа | G_{23} , ГПа | ν_{12} | ν_{13} | ν_{23} |
|---|-------------|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|------------|------------|------------|
| 1 | 300 | 300 | 300 | 111.111 | 111.111 | 111.111 | 0.35 | 0.35 | 0.35 |
| 2 | 60 | 60 | 40 | 23 | 15 | 15 | 0.15 | 0.2 | 0.2 |
| 3 | 200 | 200 | 200 | 76.923 | 76.923 | 76.923 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |

Таблица 3.1. Упругие характеристики материалов слоёв

Для численного решения трехмерной задачи теории упругости использовался конечно-элементный комплекс ANSYS, с тетраэдральным десятиузловым конечным элементом SOLID187. Для проведения расчетов на рассматриваемой пластине была сгенерирована сетка со сгущениями в окрестности расчетных нормальных сечений пластины, соответствующих значениям $\{0.125, 0.25, 0.375, 0.5\}$ продольной координаты q_1 , что позволило сократить общее число конечных элементов. В расчете использовалось 25 конечных элементов на слой в

окрестности расчетных сечений и 2 конечных элемента на слой в остальных частях пластины (рисунок 3.1). Общее число конечных элементов для всей пластины составило 10864455 (14658117 узлов). На рисунках 3.2-3.5 показано сравнение графиков напряжений по толщине пластины в расчетных сечениях (а - $q_1 = 0.125$, г - $q_1 = 0.5$), вычисленных на основе асимптотического метода (АМ) и полученных путем численного решения трехмерной задачи теории упругости.

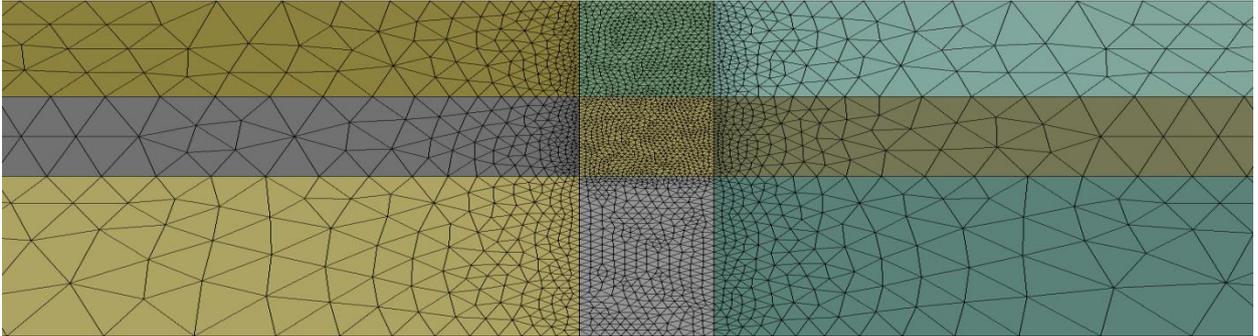


Рисунок 3.1. Сетка в окрестности расчетного сечения.

Относительное отклонение между решением на основе предложенного асимптотического метода и численным решением в ANSYS измерялось в метрике

$L_2[-1/2, 1/2]$:

$$\delta_{ij}(q_1) = \frac{\|\sigma_{ij}^{ANSYS}(q_1) - \sigma_{ij}^{AT}(q_1)\|_{L_2[-1/2, 1/2]}}{\|\sigma_{ij}^{AT}(q_1)\|_{L_2[-1/2, 1/2]}} \cdot 100\% .$$

Отклонение для выбранных нормальных сечений, рассчитанное по этой формуле, приведено в таблице 3.2.

Согласно формуле (3.6) компонента тензора напряжений σ_{13} , рассчитанная на основе асимптотического метода, обращается в нуль при $q_1 = 0.5$. Численное решение, полученное на основе трехмерной теории и показанное на рисунке 3.5г, отражает близость к решению на основе асимптотического метода.

| δ | $q_1 = 0.125$ | $q_1 = 0.25$ | $q_1 = 0.375$ | $q_1 = 0.5$ |
|---------------|---------------|--------------|---------------|-------------|
| δ_{11} | 0.528 | 2.59 | 0.448 | 0.364 |
| δ_{22} | 2.779 | 3.059 | 2.647 | 0.452 |
| δ_{13} | 0.066 | 0.065 | 0.065 | * |
| δ_{33} | 0.021 | 0.012 | 0.013 | 0.009 |

Таблица 3.2. Относительное отклонение компонент тензора напряжений, рассчитанных на основе асимптотического метода и трехмерной теории в нормальных сечениях (* - аналитическое значение компоненты - нуль).

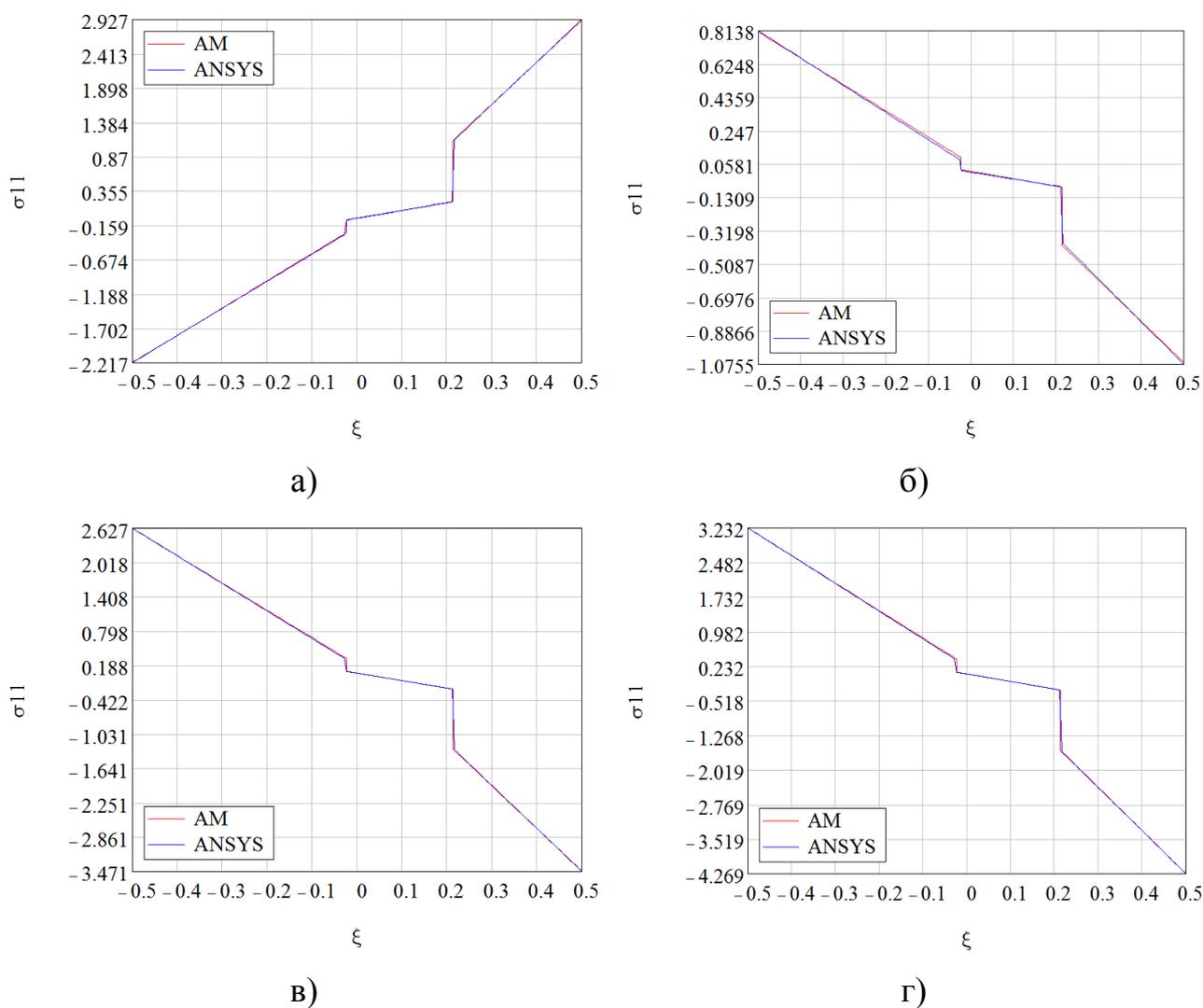
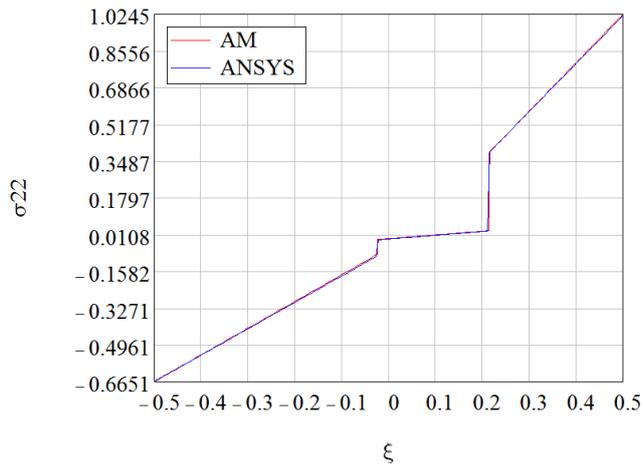
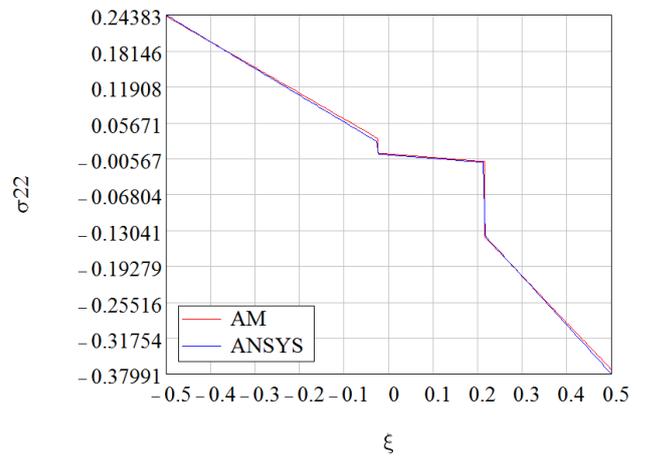


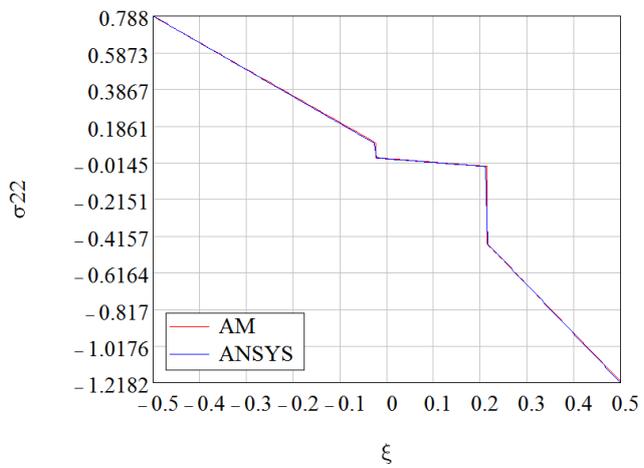
Рисунок 3.2. Распределение изгибного напряжения σ_{11} (безразмерного) по толщине пластины.



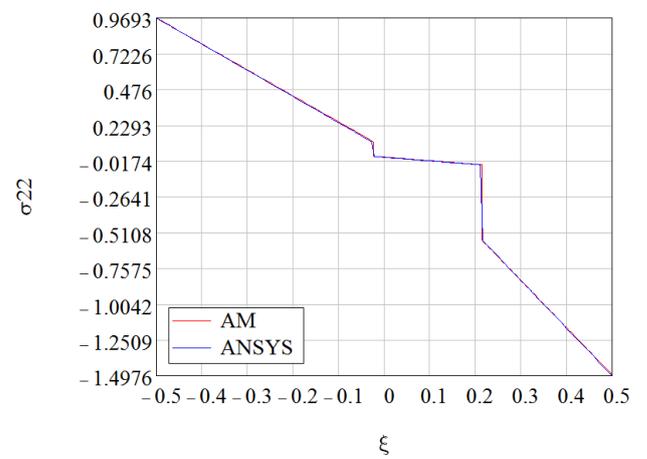
а)



б)

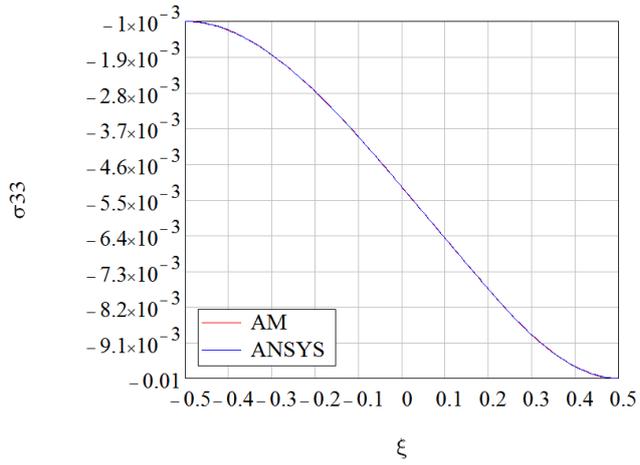


в)

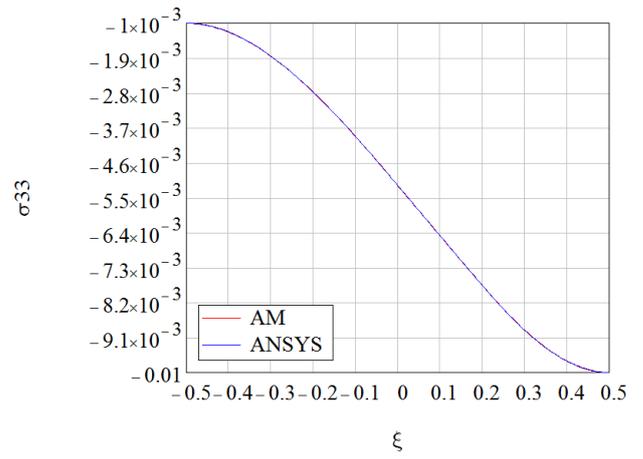


г)

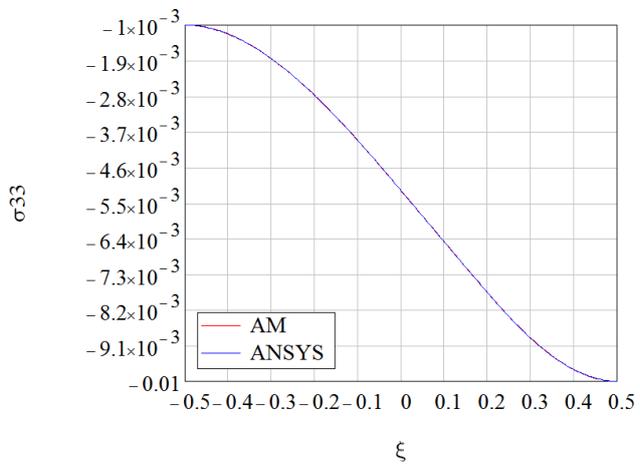
Рисунок 3.3. Распределение поперечного напряжения σ_{22} (безразмерного) по толщине пластины.



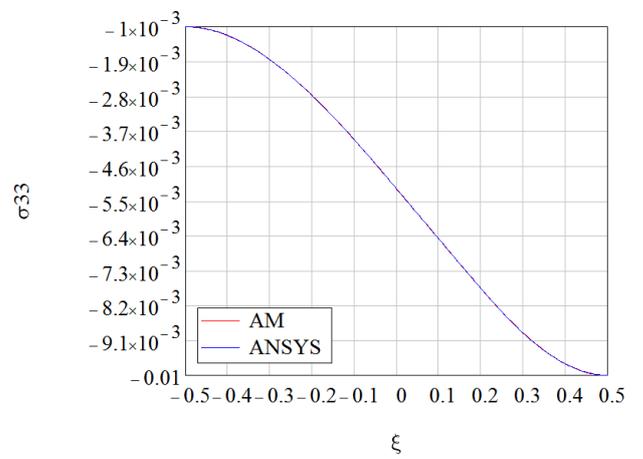
а)



б)



в)



г)

Рисунок 3.4. Распределение нормального напряжения σ_{33} (безразмерного) по толщине пластины.

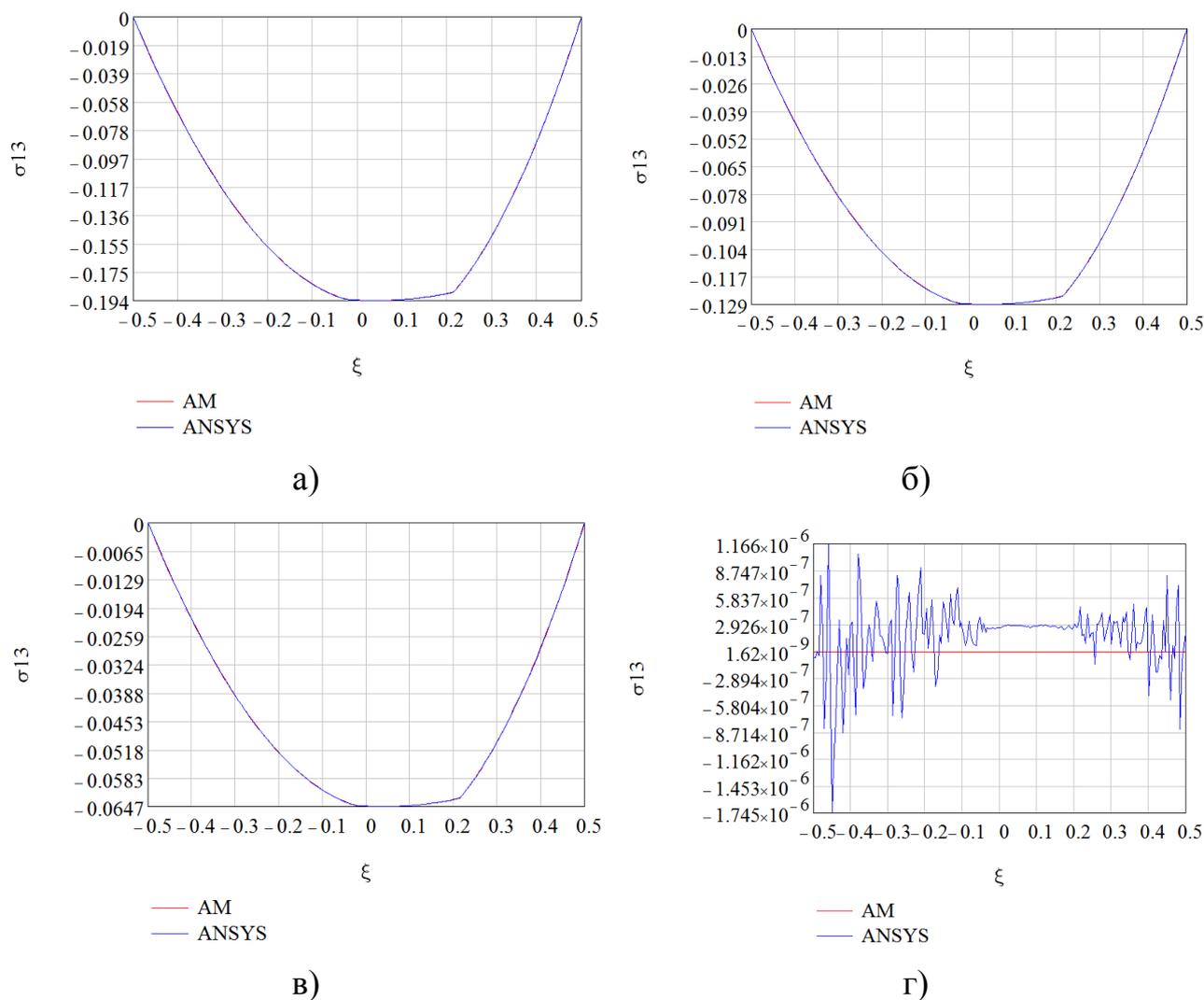


Рисунок 3.5. Распределение напряжения межслойного сдвига σ_{13} (безразмерного) по толщине пластины.

3.1.3. Сравнение аналитического и конечно-элементного решения

Для оценки работоспособности конечного элемента, предложенного в пункте 2.3, в данном разделе будет проведено сравнение получаемых на его основе результатов с аналитическим решением, найденным в пункте 3.1.1.

В качестве рассматриваемой пластины выберем трехслойную прямоугольную пластину, для которой величина малого геометрического параметра $\kappa = 0.025$;

$\Sigma = [0,1] \times [-1/4, 1/4]$, а толщины слоев соответствуют сетке $A_3 = (-1/2, -1/4, 0, 1/2)$ по нормальной координате ξ . Безразмерное давление на верхней и нижней поверхности положим равными: $\hat{p}_+ = 10^{-3}$ и $\hat{p}_- = 10^{-4}$. Свойства материалов слоев пластины представлены в таблице 3.3. Как и в предыдущем пункте, слой № 3 соответствует значению локальной координаты $\xi = -0.5$, а слой № 1 - $\xi = 0.5$.

| № | E_1 , ГПа | E_2 , ГПа | E_3 , ГПа | G_{12} , ГПа | G_{13} , ГПа | G_{23} , ГПа | ν_{12} | ν_{13} | ν_{23} |
|---|-------------|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|------------|------------|------------|
| 1 | 14 | 14 | 5.3 | 1.8 | 0.75 | 0.75 | 0.08 | 0.14 | 0.15 |
| 2 | 7 | 7 | 2.7 | 0.9 | 0.38 | 0.38 | 0.04 | 0.07 | 0.08 |
| 3 | 21 | 21 | 8 | 2.7 | 1.13 | 1.13 | 0.12 | 0.21 | 0.23 |

Таблица 3.3. Свойств материалов слоев пластины

Результаты численного моделирования обобщенных перемещений для данной задачи представлены на рисунках 3.6-3.7.

Для сравнения компонент вектора обобщенных перемещений введём относительные отклонения для прогибов $v_3^{(0)}$ и продольных перемещений $v_1^{(1)}$:

$$\delta v_3^{(0)}(q_1, q_2) = \frac{|v_3^{(0)}(q_1) - v_3^{(0)FEM}(q_1, q_2)|}{|v_3^{(0)}(q_1)|}, \quad \delta v_1^{(1)}(q_1, q_2) = \frac{|v_1^{(1)}(q_1) - v_1^{(1)FEM}(q_1, q_2)|}{|v_1^{(1)}(q_1)|}. \quad (3.8)$$

Результаты сравнения отклонений обобщенных перемещений, вычисленных на основе аналитического и конечно-элементного решений для различных сеток ($N_{q_1} \times N_{q_2}$, где N_{q_i} - число конечных элементов по координате q_i) в различных точках пластины приведены в таблице 3.4. Сравнение отклонений обобщенных перемещений для сетки 8×4 в различных точках пластины приведены в таблице 3.5.

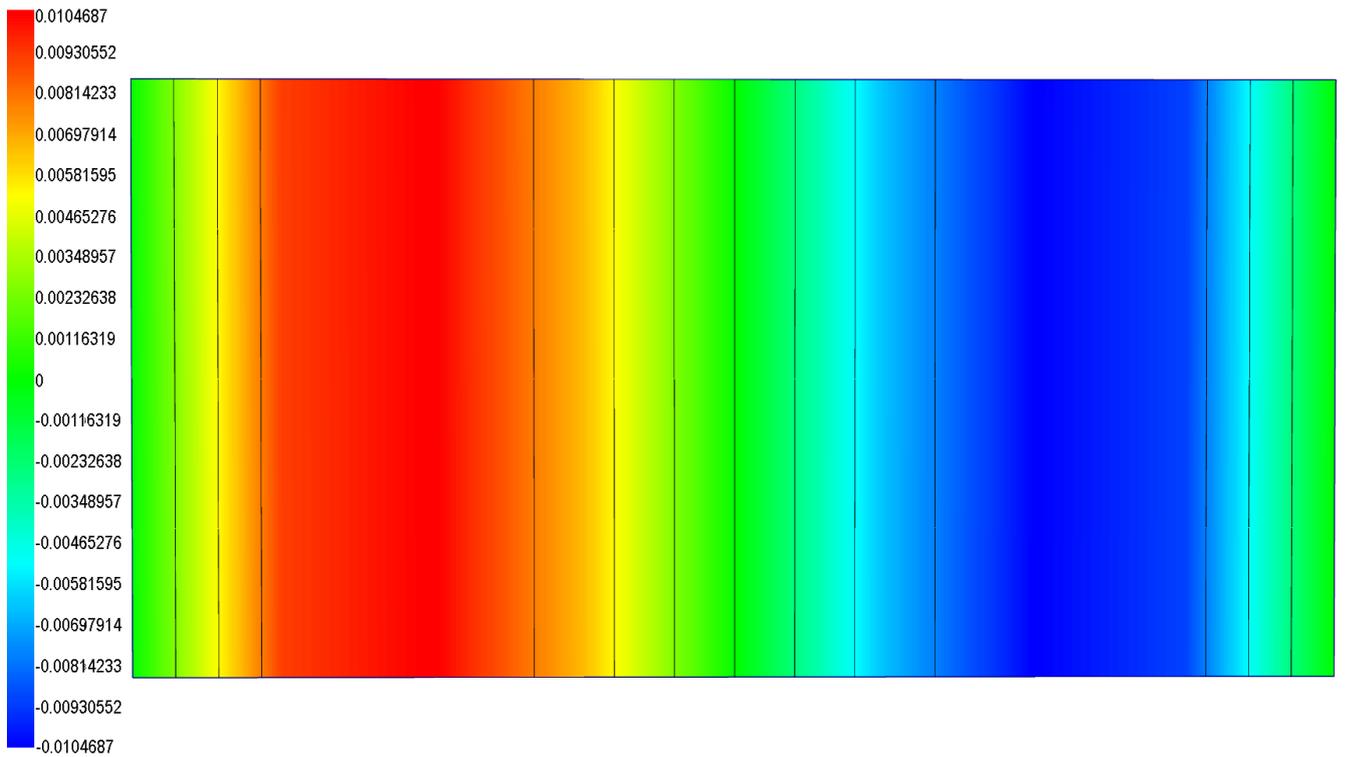


Рисунок 3.6. Распределение продольного перемещения $v_1^{(1)}$ (безразмерного) для сетки 8×4 .

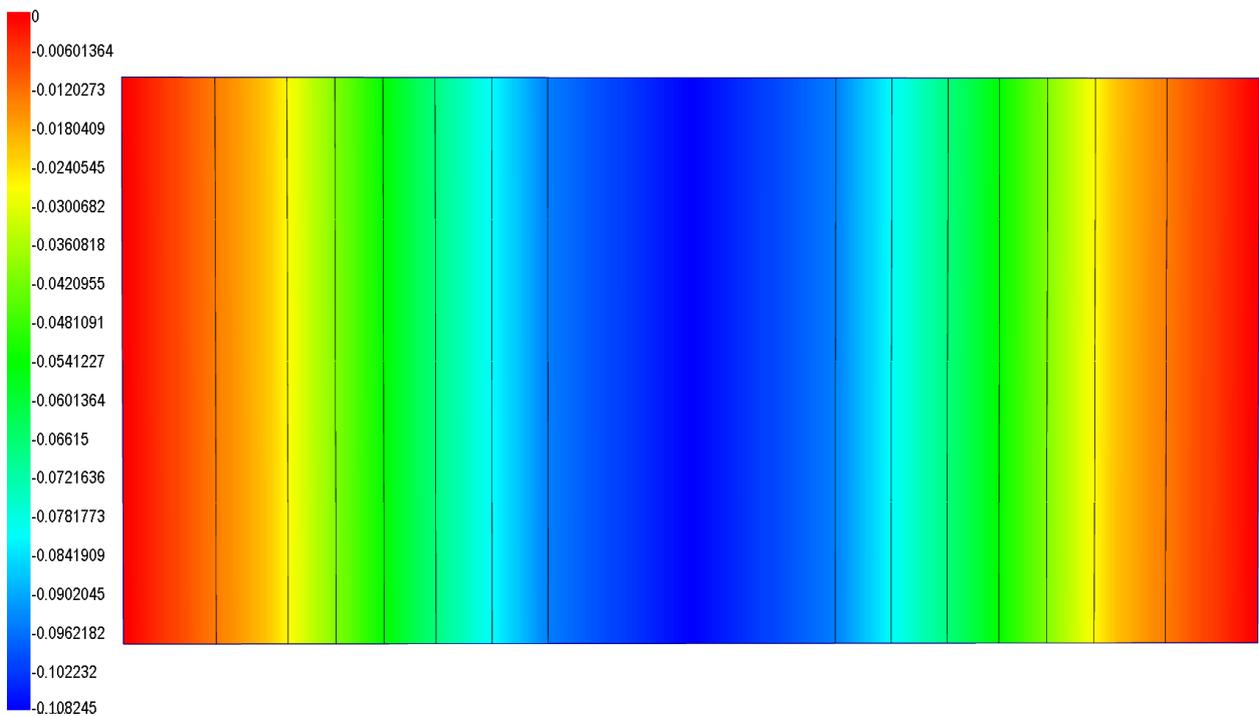


Рисунок 3.7. Распределение прогиба $v_3^{(0)}$ (безразмерного) для сетки 8×4 .

| Сетка | $\delta v_3^{(0)}(1/2, -1/4)$ | $\delta v_3^{(0)}(1/2, 0)$ | $\delta v_3^{(0)}(1/4, 0)$ | $\delta v_1^{(1)}(1/4, -1/4)$ | $\delta v_1^{(1)}(1/4, 0)$ |
|-------|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 2×2 | 3.718×10^{-11} | 2.308×10^{-11} | 2.732×10^{-11} | 2.445×10^{-11} | 2.421×10^{-11} |
| 4×2 | 1.01×10^{-11} | 9.333×10^{-12} | 9.003×10^{-12} | 9.69×10^{-12} | 9.445×10^{-12} |
| 6×2 | 8.317×10^{-12} | 7.41×10^{-12} | 7.731×10^{-12} | 7.821×10^{-12} | 7.214×10^{-12} |
| 8×2 | 5.41×10^{-12} | 5.212×10^{-12} | 4.912×10^{-12} | 5.21×10^{-12} | 4.955×10^{-12} |
| 2×4 | 7.936×10^{-12} | 7.59×10^{-12} | 6.892×10^{-12} | 7.341×10^{-12} | 6.751×10^{-12} |
| 4×4 | 2.667×10^{-12} | 1.487×10^{-12} | 2.345×10^{-12} | 3.777×10^{-12} | 2.005×10^{-12} |
| 6×4 | 8.423×10^{-13} | 7.757×10^{-13} | 6.721×10^{-13} | 7.351×10^{-13} | 5.921×10^{-13} |
| 8×4 | 1.794×10^{-13} | 1.791×10^{-13} | 1.742×10^{-13} | 1.901×10^{-13} | 1.863×10^{-13} |

Таблица 3.4. Относительные отклонения прогибов и продольных перемещений для различного числа конечных элементов сетки.

| q_1 | $\delta v_3^{(0)}(q_1, -1/4)$ | $\delta v_3^{(0)}(q_1, 0)$ | $\delta v_3^{(0)}(q_1, 1/4)$ |
|-------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 0 | 0* | 0* | 0* |
| $1/8$ | 1.701×10^{-13} | 1.674×10^{-13} | 1.659×10^{-13} |
| $1/4$ | 1.763×10^{-13} | 1.742×10^{-13} | 1.741×10^{-13} |
| $3/8$ | 1.801×10^{-13} | 1.781×10^{-13} | 1.804×10^{-13} |
| $1/2$ | 1.794×10^{-13} | 1.791×10^{-13} | 1.832×10^{-13} |
| $5/8$ | 1.768×10^{-13} | 1.789×10^{-13} | 1.817×10^{-13} |
| $3/4$ | 1.721×10^{-13} | 1.741×10^{-13} | 1.787×10^{-13} |
| $7/8$ | 1.659×10^{-13} | 1.669×10^{-13} | 1.713×10^{-13} |
| 1 | 0* | 0* | 0* |

Таблица 3.5а. Относительные отклонения прогибов для сетки 8×4 в различных точках пластины. Символом «*» отмечены абсолютные значения отклонений, когда аналитическое значение соответствующей компоненты есть нуль.

| q_1 | $\delta v_1^{(1)}(q_1, -1/4)$ | $\delta v_1^{(1)}(q_1, 0)$ | $\delta v_1^{(1)}(q_1, 1/4)$ |
|-------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 0 | 0* | 0* | 0* |
| $1/8$ | 1.8×10^{-13} | 1.723×10^{-13} | 1.723×10^{-13} |
| $1/4$ | 1.901×10^{-13} | 1.863×10^{-13} | 1.806×10^{-13} |
| $3/8$ | 1.9×10^{-13} | 1.877×10^{-13} | 1.913×10^{-13} |
| $1/2$ | 2.638×10^{-17} * | 8.226×10^{-18} * | 3.001×10^{-17} * |
| $5/8$ | 1.845×10^{-13} | 1.886×10^{-13} | 2.003×10^{-13} |
| $3/4$ | 1.763×10^{-13} | 1.814×10^{-13} | 1.889×10^{-13} |
| $7/8$ | 1.689×10^{-13} | 1.712×10^{-13} | 1.738×10^{-13} |
| 1 | 0* | 0* | 0* |

Таблица 3.5б. Относительные отклонения продольных перемещений для сетки 8×4 в различных точках пластины. Символом «*» отмечены абсолютные значения отклонений, когда аналитическое значение соответствующей компоненты есть нуль.

Далее было проведено сравнение компонент напряжений вычисленных по аналитическим формулам (3.5)-(3.7) и значений, полученных на основе конечно-элементного расчета. Мера относительного отклонения, как и в пункте 3.1.2, оценивалась в метрике $L_2[-1/2, 1/2]$:

$$\delta_{ij}(q_1) = \frac{\|\sigma_{ij}(q_1) - \sigma_{ij}^{FEM}(q_1)\|_{L_2[-1/2, 1/2]}}{\|\sigma_{ij}(q_1)\|_{L_2[-1/2, 1/2]}}. \quad (3.9)$$

Результаты сравнения компонент напряжений для сетки 8×4 и значений продольной координаты $q_1 \in \{0, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2\}$ представлены в таблице 3.6а, для значений продольной координаты $q_1 \in \{5/8, 3/4, 7/8, 1\}$ - в таблице 3.6б.

| δ | $q_1 = 0$ | $q_1 = \frac{1}{8}$ | $q_1 = \frac{1}{4}$ | $q_1 = \frac{3}{8}$ | $q_1 = \frac{1}{2}$ |
|---------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| δ_{11} | 1.615×10^{-13} | 1.86×10^{-13} | 2.112×10^{-13} | 2.146×10^{-13} | 2.153×10^{-13} |
| δ_{22} | 1.612×10^{-13} | 1.087×10^{-13} | 1.155×10^{-12} | 5.909×10^{-13} | 5.142×10^{-13} |
| δ_{33} | 2.179×10^{-14} | 1.352×10^{-13} | 4.891×10^{-13} | 6.473×10^{-13} | 2.592×10^{-13} |
| δ_{12} | $2.5 \times 10^{-16} *$ | $2.771 \times 10^{-15} *$ | $6.272 \times 10^{-15} *$ | $3.603 \times 10^{-15} *$ | $7.317 \times 10^{-15} *$ |
| δ_{13} | 1.245×10^{-13} | 1.876×10^{-13} | 5.526×10^{-13} | 1.06×10^{-12} | $2.935 \times 10^{-14} *$ |
| δ_{23} | $1.698 \times 10^{-16} *$ | $1.593 \times 10^{-14} *$ | $3.812 \times 10^{-14} *$ | $5.816 \times 10^{-14} *$ | $4.446 \times 10^{-14} *$ |

Таблица 3.6а. Относительные отклонения компонент напряжений для сетки 8×4 в различных точках пластины. Символом «*» отмечены абсолютные значения отклонений, когда аналитическое значение соответствующей компоненты есть нуль.

| δ | $q_1 = \frac{5}{8}$ | $q_1 = \frac{3}{4}$ | $q_1 = \frac{7}{8}$ | $q_1 = 1$ |
|---------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| δ_{11} | 2.268×10^{-13} | 2.227×10^{-13} | 1.862×10^{-13} | 1.57×10^{-13} |
| δ_{22} | 6.871×10^{-13} | 9.274×10^{-13} | 1.21×10^{-13} | 1.566×10^{-13} |
| δ_{33} | 4.947×10^{-13} | 1.796×10^{-13} | 2.12×10^{-13} | 3.693×10^{-14} |
| δ_{12} | $8.768 \times 10^{-15} *$ | $7.361 \times 10^{-15} *$ | $4.537 \times 10^{-15} *$ | $2.453 \times 10^{-16} *$ |
| δ_{13} | 6.171×10^{-13} | 3.535×10^{-14} | 1.793×10^{-13} | 9.367×10^{-14} |
| δ_{23} | $2.147 \times 10^{-14} *$ | $3.232 \times 10^{-14} *$ | $3.181 \times 10^{-15} *$ | $1.853 \times 10^{-16} *$ |

Таблица 3.6б. Относительные отклонения компонент напряжений для сетки 8×4 в различных точках пластины. Символом «*» отмечены абсолютные значения отклонений, когда аналитическое значение соответствующей компоненты есть нуль.

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о высокой точности предложенного в пункте 2.3 конечного элемента и о возможности получения на его основе качественных результатов на “редких” сетках.

3.2. Задача об изгибе многослойной прямоугольной тонкой пластины с учетом ползучести

3.2.1. Аналитическое решение задачи изгиба пластины с симметричным расположением слоев под действием постоянного давления

Получим в данном пункте аналитическое решение задачи изгиба прямоугольной пластины (как и ранее, $q_1 \in [0,1]$ - продольная, q_2 - поперечная координаты) с симметричным расположением слоев (т.е. будем предполагать, что F_{ij} и C_{ijkl} являются четными функциями от локальной координаты ξ) под действием постоянного давления с граничными условиями жесткого закрепления (3.1). Материалы слоев пластины будем предполагать изотропными. В качестве модели ползучести слоев будем рассматривать модель, определяемую функцией (1.113). Аналитическое решение для системы (1.132), соответствующей указанной модели, будем искать в следующем виде (аналогичном (3.2), с учетом симметрии слоев и зависимости от временного параметра $\tau \in [0, T]$):

$$\begin{cases} v_1^{(0)}(\tau, q_1) = v_2^{(0)}(\tau, q_1) = v_1^{(1)}(\tau, q_1) = v_2^{(1)}(\tau, q_1) = 0, \\ v_3^{(0)}(\tau, q_1) = B(\tau)q_1^2(q_1 - 1)^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

где $B(\cdot)$ - некоторая неизвестная функция. Подставляя эти соотношения в систему (1.132), приходим к интегральному уравнению Вольтерры второго рода относительно функции $B(\cdot)$ (в силу формул (1.134) и (1.130)):

$$-24 \left(D_{1111} B(\tau) - \int_0^\tau D_{1111}^c(\tau-t) B(t) dt \right) = \Delta p, \quad (3.11)$$

где ядро $D_{1111}^c(\cdot)$, в соответствии с представлением (1.131), имеет вид:

$$D_{1111}^c(\tau) = \langle \xi^2 C_{1111}^c(\tau, \xi) \rangle, \quad (3.12)$$

$$2C_{1111}^c(\tau, \xi) = Q_1(\tau, \xi) + Q_2(\tau, \xi), \quad 2C_{1122}^c(\tau, \xi) = Q_1(\tau, \xi) - Q_2(\tau, \xi),$$

$$Q_i(\tau, \xi) = \hat{C}_i^d(\xi) C_i^{cd}(\xi) e^{-C_i^{cd}(\xi)\tau}. \quad (3.13)$$

Несмотря на простоту ядра, аналитическое решение данного уравнения довольно громоздко, особенно в случае многослойной пластины. Для его численного решения в данной работе будем применять метод квадратур, с квадратурной формулой трапеций [5].

Формулы для компонент напряжений (1.135)-(1.137), в силу зависимости решения только от продольной координаты пластины q_1 и определения оператора \check{C}_{ijkl} (1.133), примут вид:

$$\check{\sigma}_{11}^{(1)} = -2\kappa\xi(6q_1^2 - 6q_1 + 1) \left[\hat{C}_{1111} B(\tau) - \int_0^\tau C_{1111}^c(\tau-t) B(t) dt \right], \quad (3.14)$$

$$\check{\sigma}_{13}^{(2)} = 12(2q_1 - 1)\kappa^2 \left[\left\{ \xi \hat{C}_{1111} \right\}_\xi B(\tau) - \int_0^\tau \left\{ \xi C_{1111}^c(\tau-t, \xi) \right\}_\xi B(t) dt \right], \quad (3.15)$$

$$-\check{\sigma}_{33}^{(3)} = \kappa^3 (p_- + \Delta p(\xi + 1/2)) + 24\kappa^3 \left\{ \left\{ \xi \hat{C}_{1111} B(\tau) - \int_0^\tau C_{1111}^c(\tau-t, \xi) B(t) dt \right\}_\xi \right\}_\xi. \quad (3.16)$$

3.2.2. Сравнение конечно-элементного и аналитического решения

В данном пункте будет проведено сравнение конечно-элементного (на основе конечного элемента, предложенного в пункте 2.3) и аналитического (найденного в предыдущем пункте) решения задачи изгиба прямоугольной пластины.

Сравнение будем проводить для трёхслойной пластины, для которой $\kappa = 0.025$, $\Sigma = [0,1] \times [-1/4, 1/4]$, а толщины слоев соответствуют сетке $A_3 = (-1/2, -1/4, 1/4, 1/2)$ по нормальной координате ξ . Безразмерное давление на верхней и нижней поверхности положим равными: $\hat{p}_+ = 5 \cdot 10^{-3}$ и $\hat{p}_- = 5 \cdot 10^{-4}$. Свойства материалов слоев пластины представлены в таблице 3.7. Верхний предел моделирования выберем следующим: $T = 1$ ($t_0 = 1000\text{ч}$).

| № | E , ГПа | ν | η |
|---|-----------|-------|------------------|
| 1 | 300 | 0.35 | $1.5 \cdot 10^5$ |
| 2 | 40 | 0.15 | 10^2 |
| 3 | 300 | 0.35 | $1.5 \cdot 10^5$ |

Таблица 3.7. Свойств материалов слоев пластины

На рисунке 3.8 показан результат конечно-элементного моделирования прогиба $v_3^{(0)}$ для рассматриваемой задачи. Результаты сравнения обобщенных перемещений для аналитического и конечно-элементного решения при постоянных шагах сетки $\Delta\tau = 10^{-3}$ и $\Delta\tau = 10^{-4}$ по временному параметру представлены в таблицах 3.8 и 3.9 соответственно (отклонения определяются по формулам (3.8)).

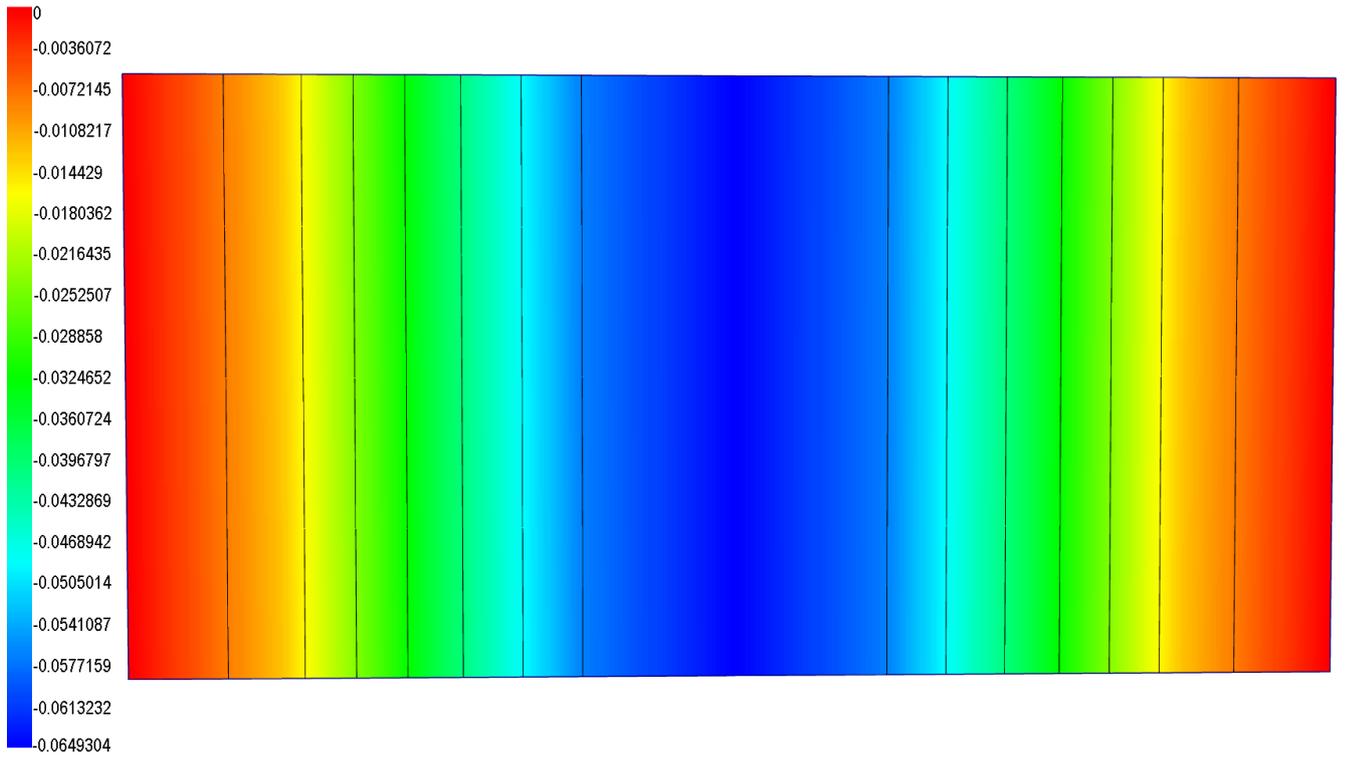


Рисунок 3.8. Распределение прогиба $v_3^{(0)}$ (безразмерного) для $\tau = T = 1$ при шаге разностной сетки $\Delta\tau = 10^{-4}$.

| q_1 | $\delta v_3^{(0)}(q_1, -1/4)$ | $\delta v_3^{(0)}(q_1, 0)$ | $\delta v_3^{(0)}(q_1, 1/4)$ |
|-------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $1/8$ | $2.785110029 \times 10^{-6}$ | $2.785109997 \times 10^{-6}$ | $2.785109968 \times 10^{-6}$ |
| $1/4$ | $2.785110024 \times 10^{-6}$ | $2.785109993 \times 10^{-6}$ | $2.785109963 \times 10^{-6}$ |
| $3/8$ | $2.785110022 \times 10^{-6}$ | $2.785109989 \times 10^{-6}$ | $2.785109957 \times 10^{-6}$ |
| $1/2$ | $2.785110021 \times 10^{-6}$ | $2.785109982 \times 10^{-6}$ | $2.785109949 \times 10^{-6}$ |
| $5/8$ | $2.785110019 \times 10^{-6}$ | $2.785109978 \times 10^{-6}$ | $2.785109939 \times 10^{-6}$ |
| $3/4$ | $2.785110018 \times 10^{-6}$ | $2.785109973 \times 10^{-6}$ | $2.78510993 \times 10^{-6}$ |
| $7/8$ | $2.78511002 \times 10^{-6}$ | $2.785109972 \times 10^{-6}$ | $2.78510993 \times 10^{-6}$ |

Таблица 3.8. Относительные отклонения прогибов для $\tau = T = 1$ при шаге сетки $\Delta\tau = 10^{-3}$ в различных точках пластины.

| q_1 | $\delta v_3^{(0)}(q_1, -1/4)$ | $\delta v_3^{(0)}(q_1, 0)$ | $\delta v_3^{(0)}(q_1, 1/4)$ |
|-------|-------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| $1/8$ | $2.78399591 \times 10^{-7}$ | $2.78399568 \times 10^{-7}$ | $2.78399541 \times 10^{-7}$ |
| $1/4$ | $2.78399589 \times 10^{-7}$ | $2.78399565 \times 10^{-7}$ | $2.78399539 \times 10^{-7}$ |
| $3/8$ | $2.78399588 \times 10^{-7}$ | $2.78399561 \times 10^{-7}$ | $2.78399533 \times 10^{-7}$ |
| $1/2$ | $2.78399587 \times 10^{-7}$ | $2.78399557 \times 10^{-7}$ | $2.78399526 \times 10^{-7}$ |
| $5/8$ | $2.78399587 \times 10^{-7}$ | $2.78399554 \times 10^{-7}$ | $2.78399519 \times 10^{-7}$ |
| $3/4$ | $2.78399588 \times 10^{-7}$ | $2.78399551 \times 10^{-7}$ | $2.78399508 \times 10^{-7}$ |
| $7/8$ | $2.78399591 \times 10^{-7}$ | $2.78399547 \times 10^{-7}$ | $2.78399496 \times 10^{-7}$ |

Таблица 3.9. Относительные отклонения прогибов для $\tau = T = 1$ при $\Delta\tau = 10^{-4}$.

Далее было проведено сравнение компонент напряжений, вычисленных по формулам (3.14)-(3.16) и на основе конечно-элементного метода. Отклонение вычислялось согласно формуле (3.9). Результаты сравнения приведены в таблице 3.10 (для шага $\Delta\tau = 10^{-3}$) и 3.11 (для шага $\Delta\tau = 10^{-4}$).

| δ | $q_1 = 0$ | $q_1 = 1/8$ | $q_1 = 1/4$ | $q_1 = 3/8$ | $q_1 = 1/2$ |
|---------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| δ_{11} | 1.23×10^{-6} | 1.23×10^{-6} | 1.23×10^{-6} | 1.23×10^{-6} | 1.23×10^{-6} |
| δ_{22} | 7.626×10^{-5} | 7.626×10^{-5} | 7.626×10^{-5} | 7.626×10^{-5} | 7.626×10^{-5} |
| δ_{33} | 1.032×10^{-7} | 1.032×10^{-7} | 1.032×10^{-7} | 1.032×10^{-7} | 1.032×10^{-7} |
| δ_{12} | 0 * | 3.46×10^{-13} * | 4.602×10^{-13} * | 4.337×10^{-13} * | 2.153×10^{-13} * |
| δ_{13} | 1.236×10^{-6} | 1.236×10^{-6} | 1.236×10^{-6} | 1.236×10^{-6} | 9.861×10^{-13} * |
| δ_{23} | 8.785×10^{-14} * | 5.62×10^{-13} * | 4.27×10^{-13} * | 1.316×10^{-12} * | 6.437×10^{-13} * |

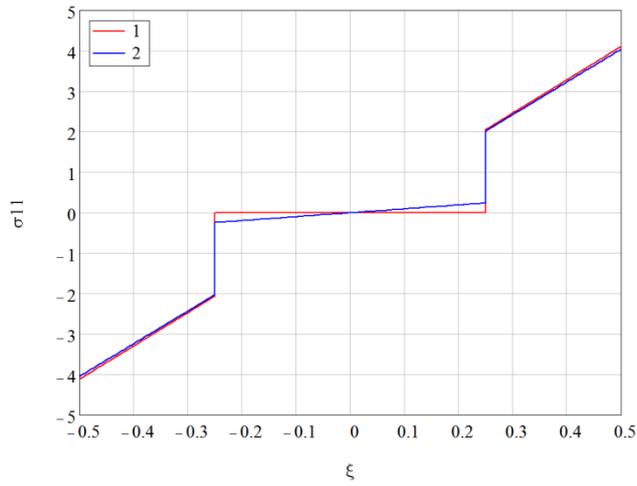
Таблица 3.10. Относительные отклонения компонент напряжений для $\tau = T = 1$ при $\Delta\tau = 10^{-3}$. Символом «*» отмечены абсолютные значения отклонений, когда аналитическое значение соответствующей компоненты есть нуль.

| δ | $q_1 = 0$ | $q_1 = \frac{1}{8}$ | $q_1 = \frac{1}{4}$ | $q_1 = \frac{3}{8}$ | $q_1 = \frac{1}{2}$ |
|---------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| δ_{11} | 1.236×10^{-7} | 1.236×10^{-7} | 1.236×10^{-7} | 1.236×10^{-7} | 1.236×10^{-7} |
| δ_{22} | 7.53×10^{-6} | 7.53×10^{-6} | 7.53×10^{-6} | 7.53×10^{-6} | 7.53×10^{-6} |
| δ_{33} | 1.024×10^{-8} | 1.024×10^{-8} | 1.024×10^{-8} | 1.024×10^{-8} | 1.024×10^{-8} |
| δ_{12} | 0 * | 2.244×10^{-13} * | 3×10^{-13} * | 3.31×10^{-13} * | 1.876×10^{-13} * |
| δ_{13} | 1.237×10^{-7} | 1.237×10^{-7} | 1.237×10^{-7} | 1.237×10^{-7} | 6.071×10^{-13} * |
| δ_{23} | 3.557×10^{-14} * | 5.218×10^{-14} * | 2.546×10^{-13} * | 4.81×10^{-13} * | 2.528×10^{-13} * |

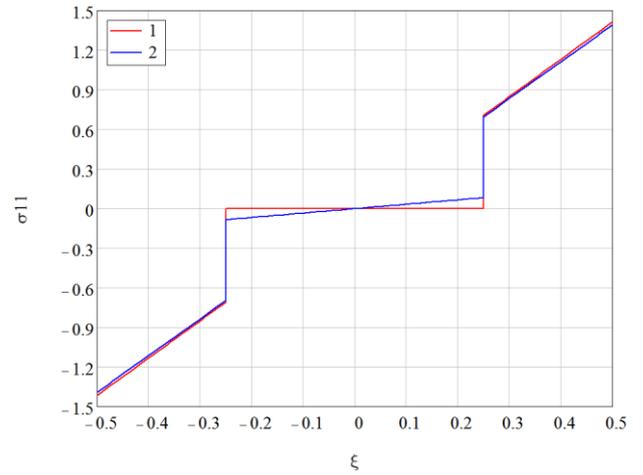
Таблица 3.11. Относительные отклонения компонент напряжений для $\tau = T = 1$ при шаге сетки $\Delta\tau = 10^{-4}$ в различных точках пластины. Символом «*» отмечены абсолютные значения отклонений, когда аналитическое значение соответствующей компоненты есть нуль.

Приведенные результаты демонстрируют сходимость конечно-элементного решения к аналитическому при уменьшении шага сетки $\Delta\tau$ по временному параметру. На рисунках 3.9-3.12 приведены распределения компонент напряжений по толщине пластины (а - $q_1 = 0$, д - $q_1 = \frac{1}{2}$) для моментов времени $\tau = 0$ (аналитическое решение) и $\tau = T = 1$ (конечно-элементное решение для разностной схемы с шагом $\Delta\tau = 10^{-3}$), при значениях продольной координаты

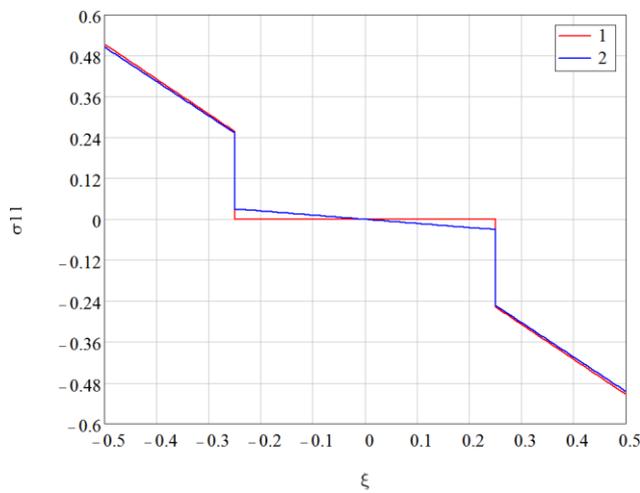
$$q_1 \in \left\{ 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right\}.$$



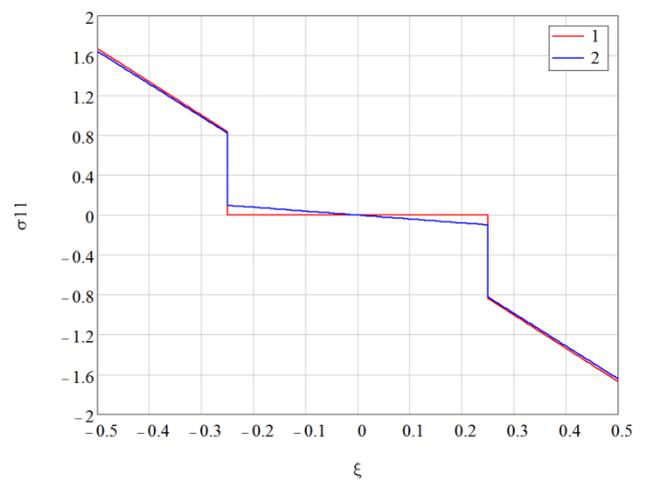
а)



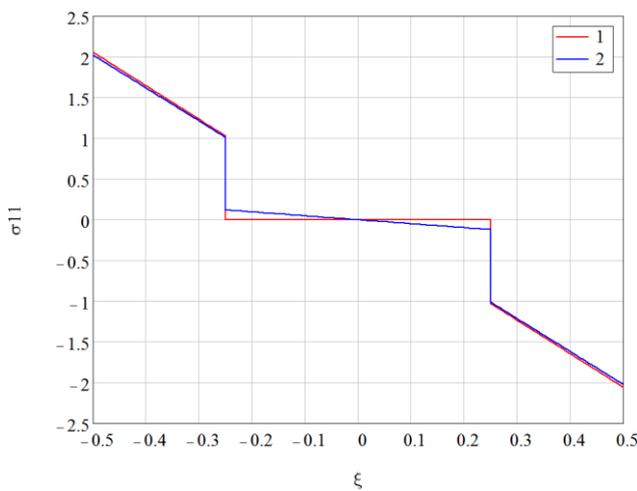
б)



в)

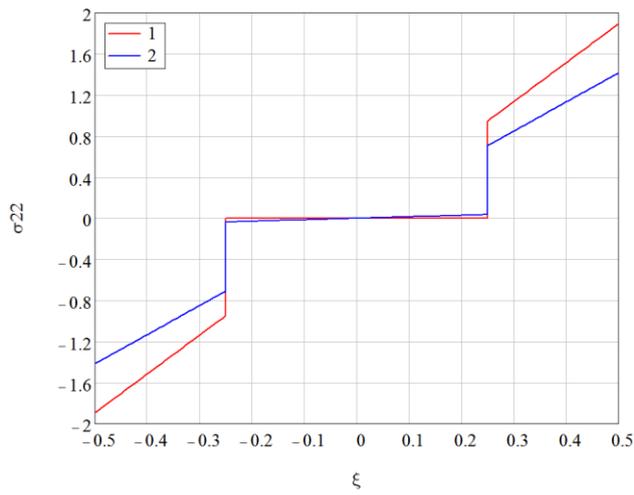


г)

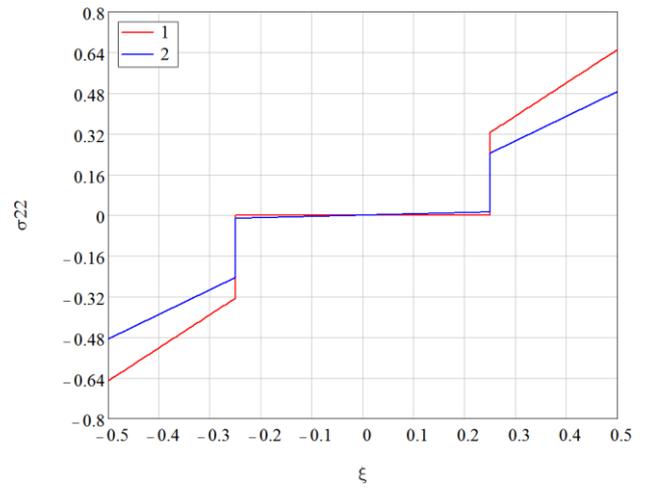


д)

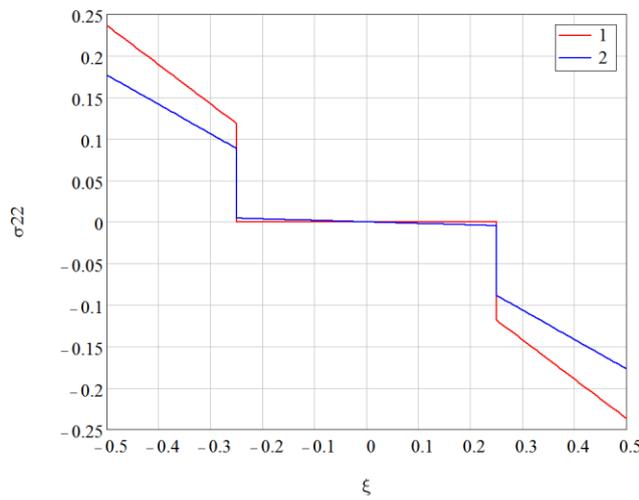
Рисунок 3.9. Распределение изгибного напряжения σ_{11} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$)



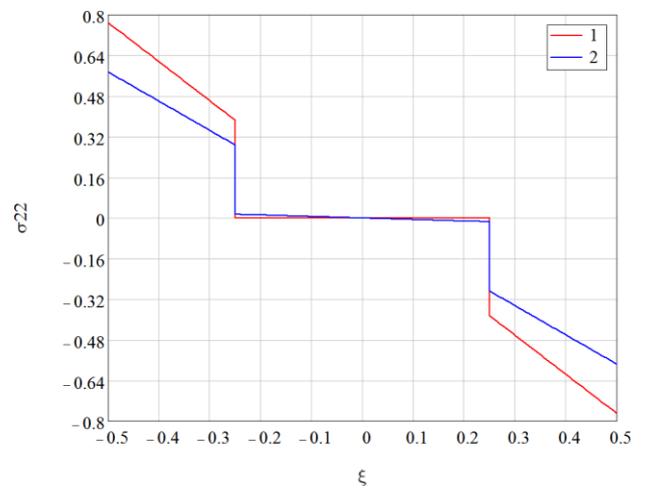
а)



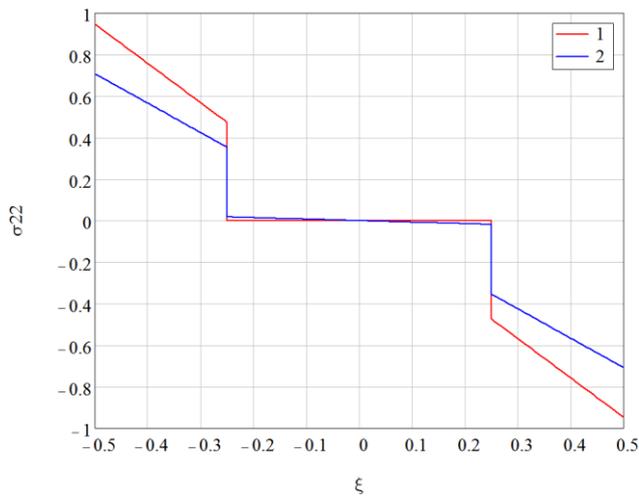
б)



в)

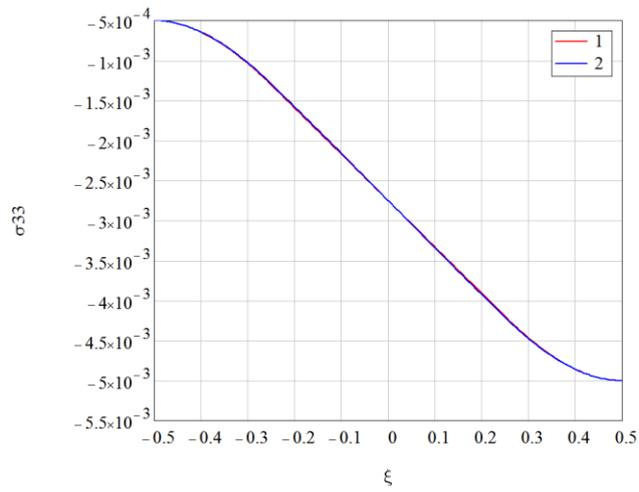


г)

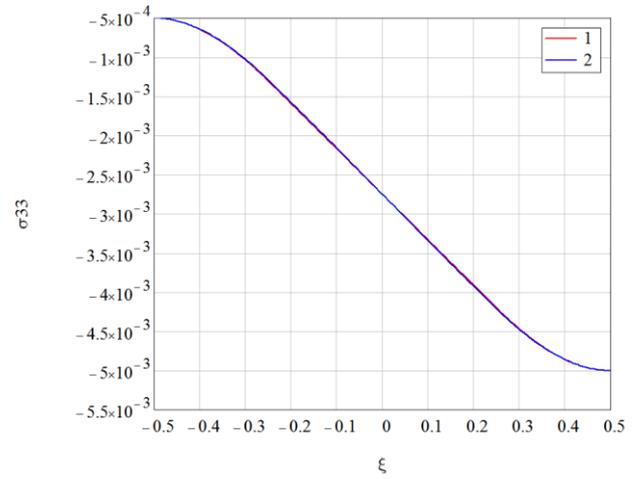


д)

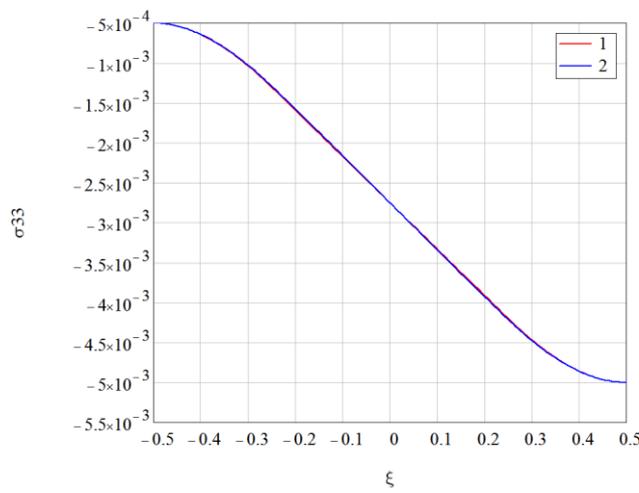
Рисунок 3.10. Распределение поперечного напряжения σ_{22} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$)



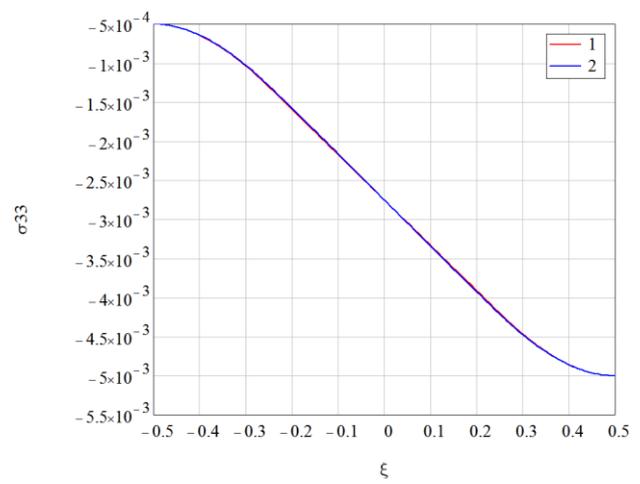
а)



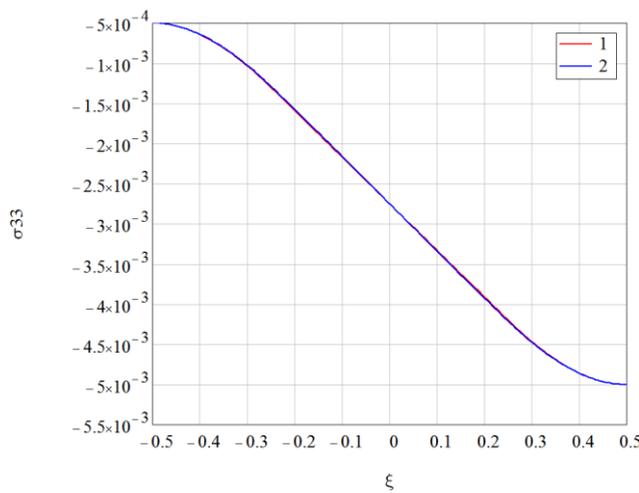
б)



в)

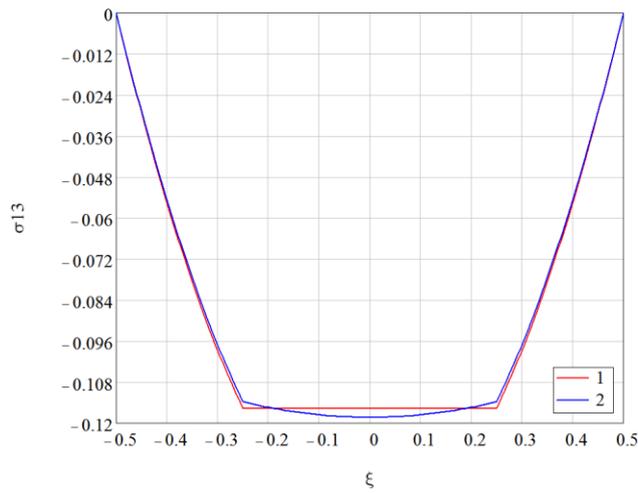


г)

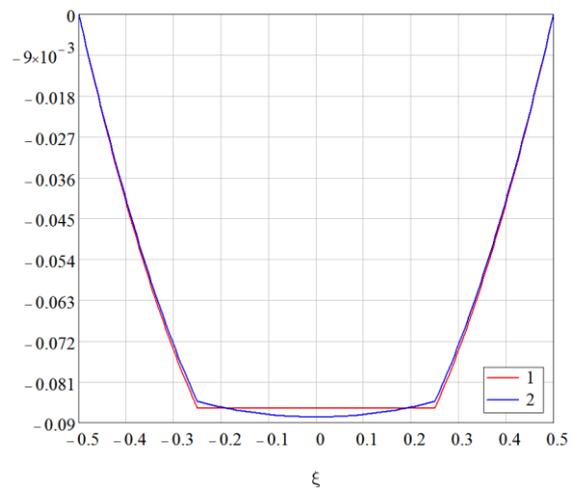


д)

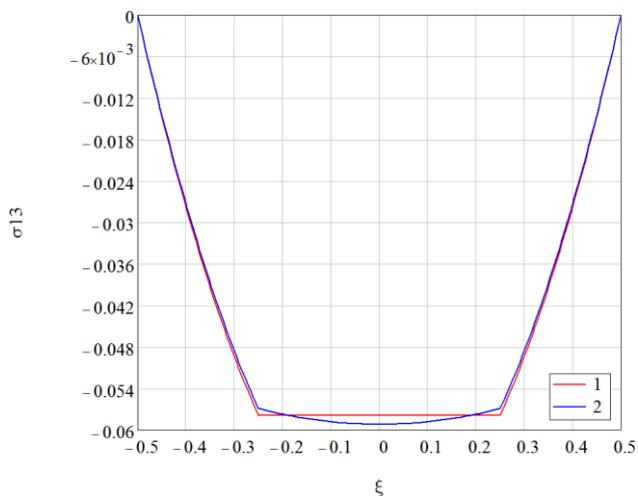
Рисунок 3.11. Распределение нормального напряжения σ_{33} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$)



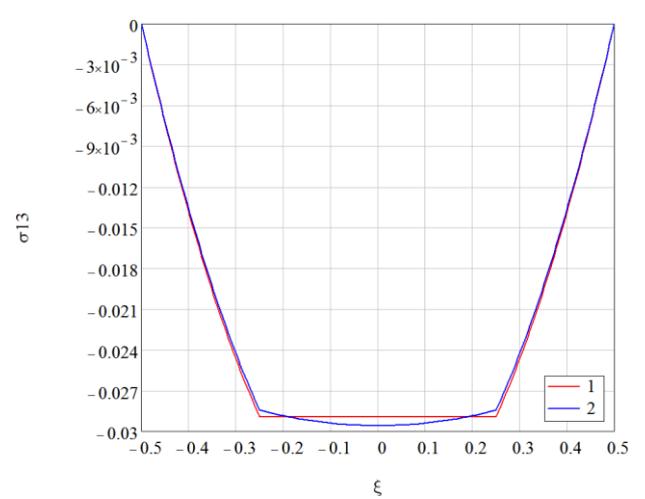
а)



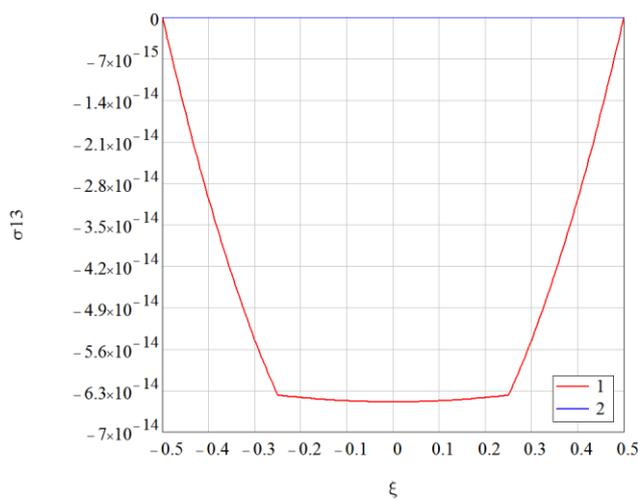
б)



в)



г)



д)

Рисунок 3.12. Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{13} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$)

3.2.3. Численное решение задачи изгиба при несимметричном расположении слоев под действием переменного давления

Рассмотрим в данном пункте задачу изгиба прямоугольной пластины с несимметричным расположением слоев под действием переменного давления с учетом ползучести. Ползучесть слоев, будем предполагать соответствующей модели (1.112).

Моделирование будем производить для трёхслойной пластины, геометрический параметр для которой $\kappa = 0.025$, $\Sigma = [0,1] \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, а толщины слоев соответствуют сетке $A_3 = (-1/2, -1/4, 0, 1/2)$ по нормальной координате ξ . Безразмерное давление на верхней и нижней поверхности будем полагать переменными полями следующего вида:

$$\hat{p}_{\pm}(q_1, q_2) = A_{1\pm} + (A_{3\pm} - A_{1\pm})q_1 + 2(A_{2\pm} - A_{3\pm})\left(q_2 + \frac{1}{4}\right),$$

где $A_{1+} = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $A_{2+} = 3.75 \cdot 10^{-3}$, $A_{3+} = 5 \cdot 10^{-3}$, $A_{1-} = 2.5 \cdot 10^{-4}$, $A_{2-} = 3.75 \cdot 10^{-4}$, $A_{3-} = 5 \cdot 10^{-4}$. Распределение давления на верхней поверхности и расчетная сетка приведены на рисунке 3.13. Свойства материалов слоев пластины представлены в таблице 3.12, слой № 3 соответствует значению координаты $\xi = -0.5$, а слой № 1 - $\xi = 0.5$. На рисунке 3.14 показаны кривые ползучести для материала слоя № 2 пластины (в наибольшей степени подверженного ползучести) для различных значений напряжений (в пределах между минимальным и максимальным значением давления \hat{p}_{\pm}). Верхний предел моделирования выберем, как и в предыдущем пункте, $T = 1$ ($t_0 = 1000\text{ч}$), а шаг разностной сетки $\Delta\tau$ по временному параметру (постоянный) зададим равным $\Delta\tau = 10^{-4}$.

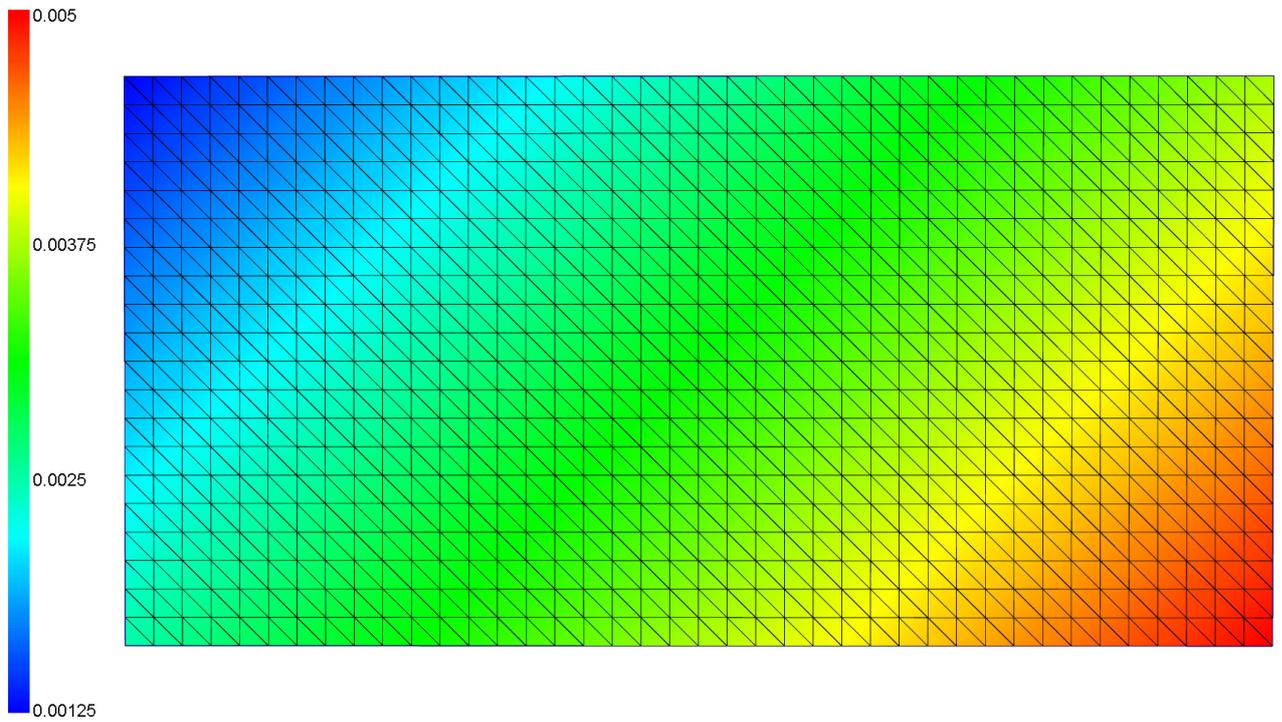


Рисунок 3.13. Поле давления (безразмерного) на верхней поверхности пластины и расчетная сетка.

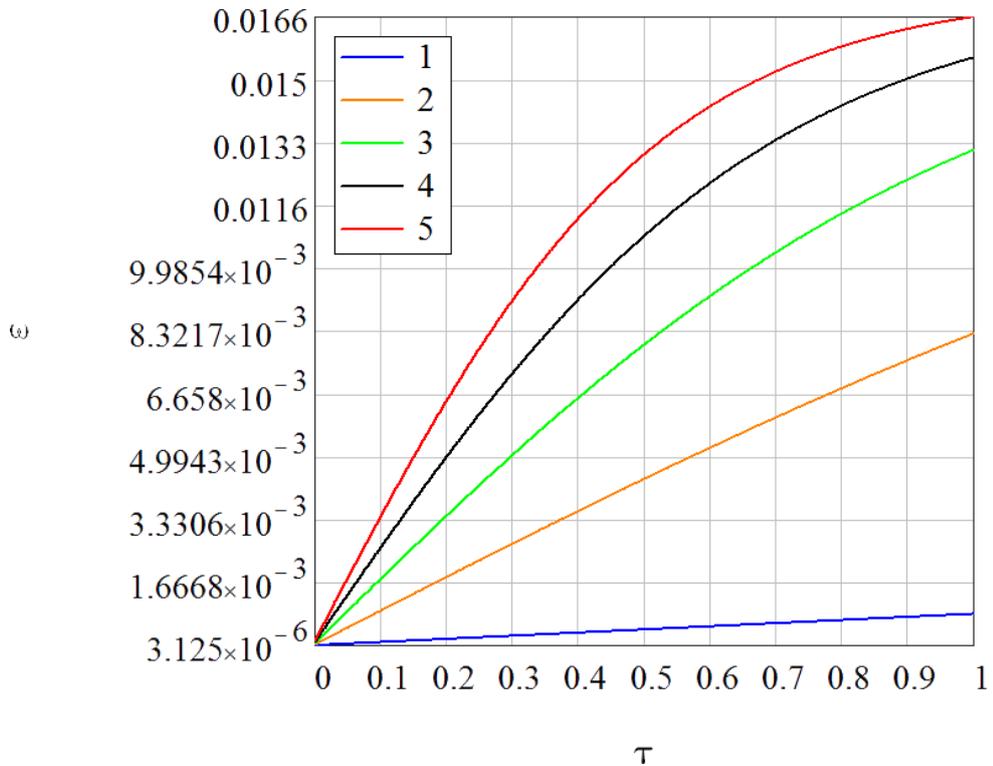


Рисунок 3.14. Кривые ползучести для материала слоя № 2 пластины для различных напряжений (i -я кривая: $\sigma_i = \sigma_{\min} + (i-1)(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/4$, $\sigma_{\min} = 1.25 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_{\max} = 5 \cdot 10^{-3}$).

| № | E , ГПа | ν | ϖ | η | r | σ_T |
|---|-----------|-------|-------------------|------------------|------|------------|
| 1 | 300 | 0.35 | $2 \cdot 10^4$ | $1.5 \cdot 10^5$ | 3.75 | 1 |
| 2 | 40 | 0.15 | $1.5 \cdot 10^3$ | 10^2 | 3.3 | 1 |
| 3 | 200 | 0.3 | $1.12 \cdot 10^4$ | $1 \cdot 10^4$ | 3.5 | 1 |

Таблица 3.12. Свойств материалов слоев пластины

Результаты численного моделирования прогибов $v_3^{(0)}$ и продольных перемещений $v_l^{(1)}$ представлены на рисунках 3.15-3.16.

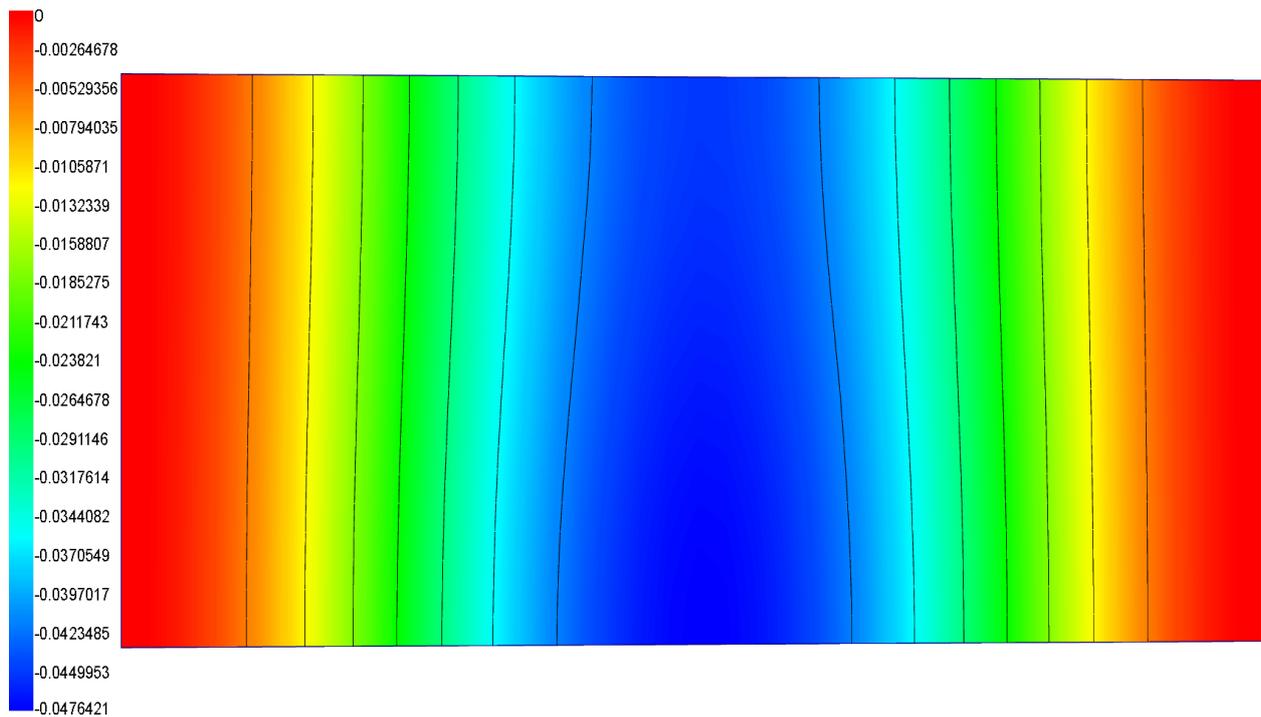
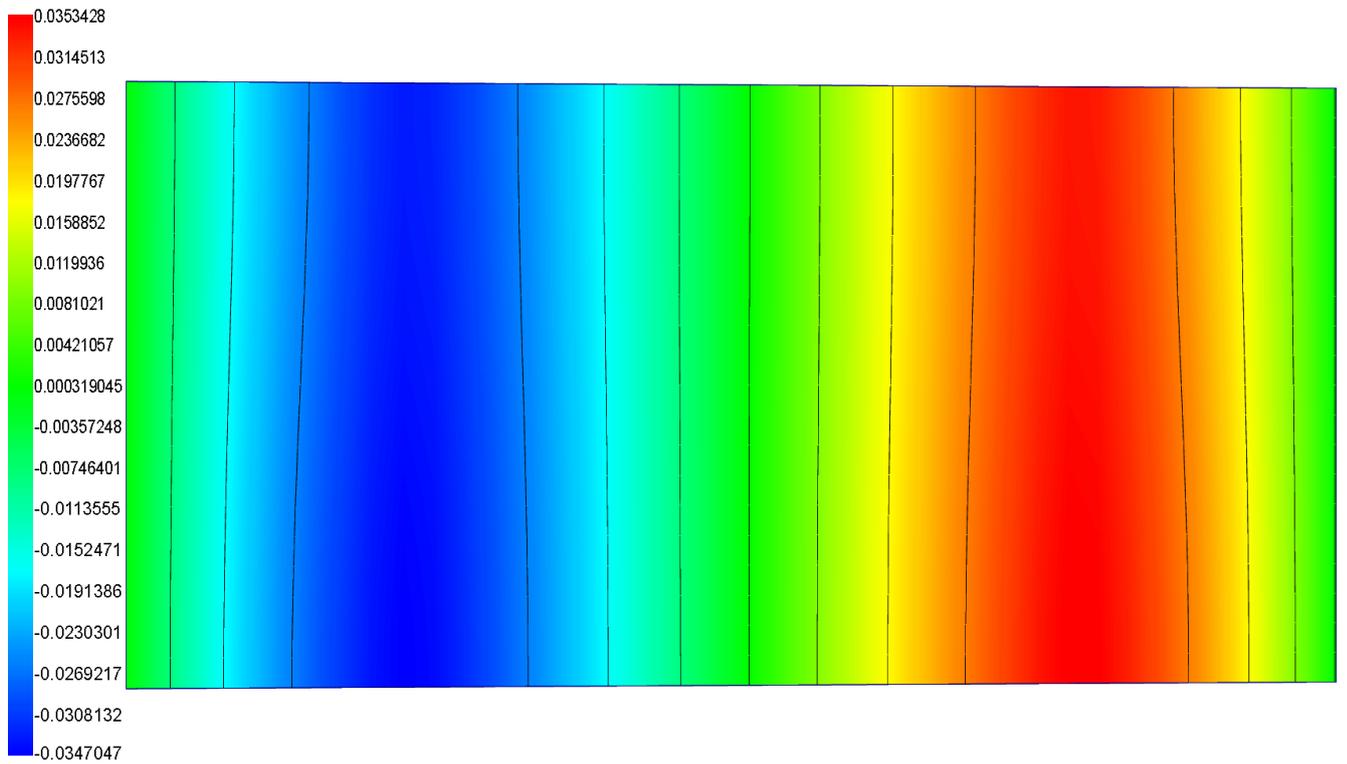
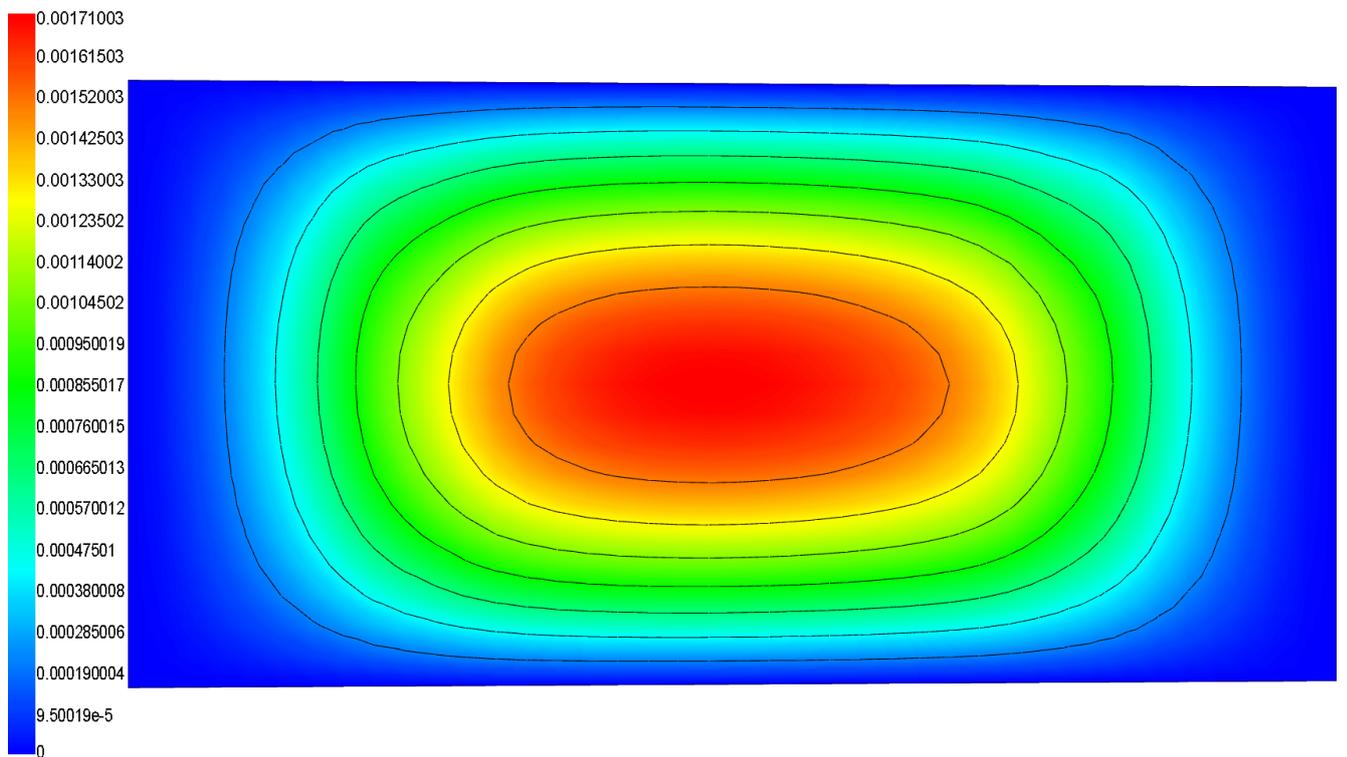


Рисунок 3.15. Распределение прогиба $v_3^{(0)}$ (безразмерного) для $\tau = T = 1$.



а)

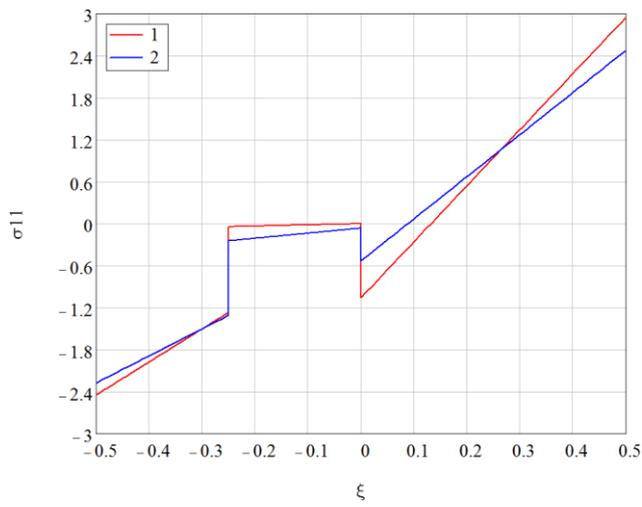


б)

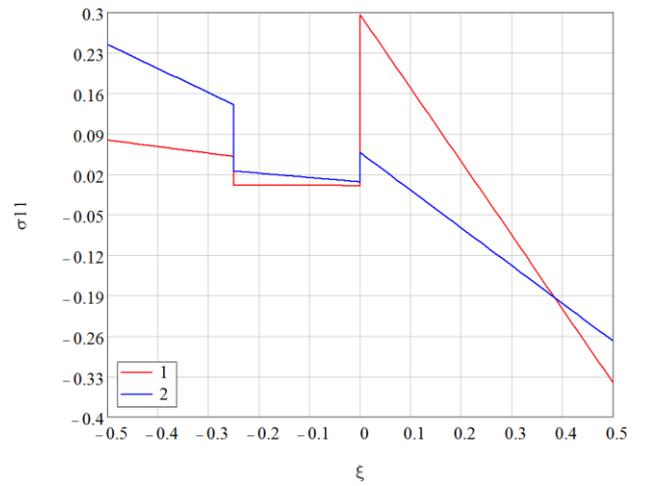
Рисунок 3.16. Поля продольных перемещений $v_1^{(1)}$ (а) и $v_2^{(1)}$ (б) (безразмерных) для $\tau = T = 1$.

На рисунках 3.16-3.28 представлены распределения компонент тензора напряжений по толщине для различных точек пластины (а - $q_1 = 0$, б - $q_1 = 1/4$, в - $q_1 = 1/2$, г - $q_1 = 3/4$, д - $q_1 = 1$). Данные результаты демонстрируют существенное влияние, оказываемое эффектами ползучести на напряженно-деформированное состояние пластины при переменном давлении и несимметричном расположении слоев. В частности, кривая нормального напряжения σ_{33} по толщине пластины может терять свойство монотонности (рис. 3.21-3.22), а кривые напряжений межслойного сдвига σ_{13} , σ_{23} (рис. 3.25-3.28) - испытывают искажение.

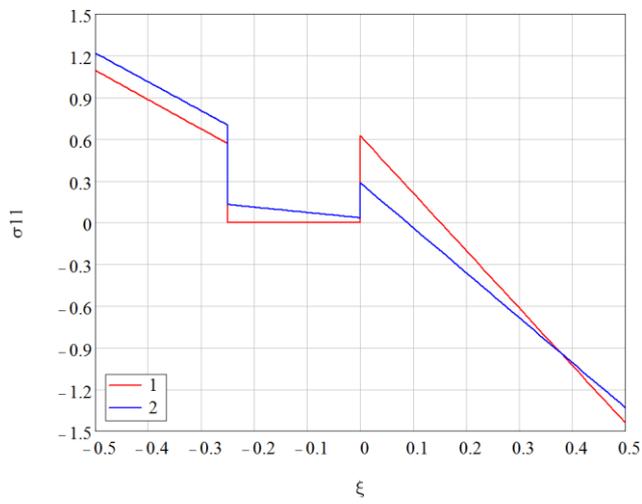
На рисунках 3.29-3.30 показаны кривые изменения продольных σ_{11} и поперечных напряжений σ_{22} , на рисунках 3.31-3.33 - кривые изменения продольных перемещений $v_I^{(1)}$ и прогибов $v_3^{(0)}$ во времени, в различных точках пластины.



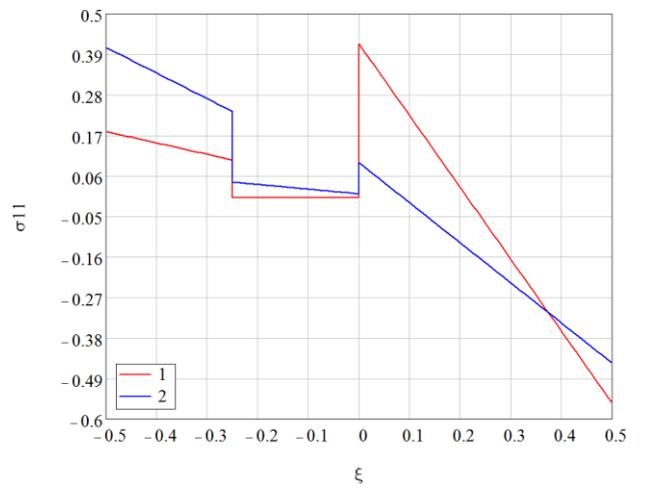
а)



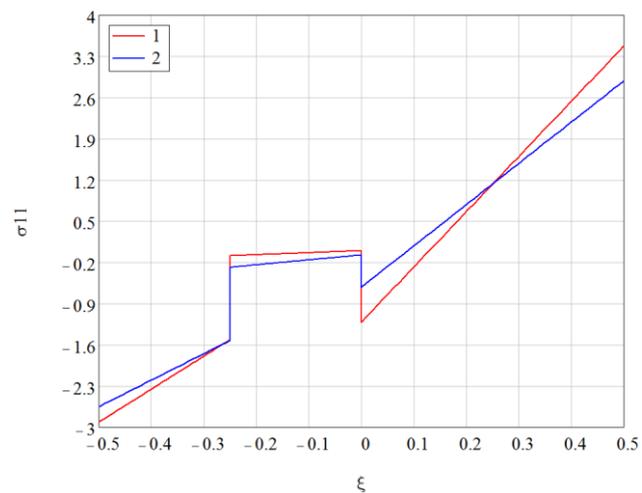
б)



в)

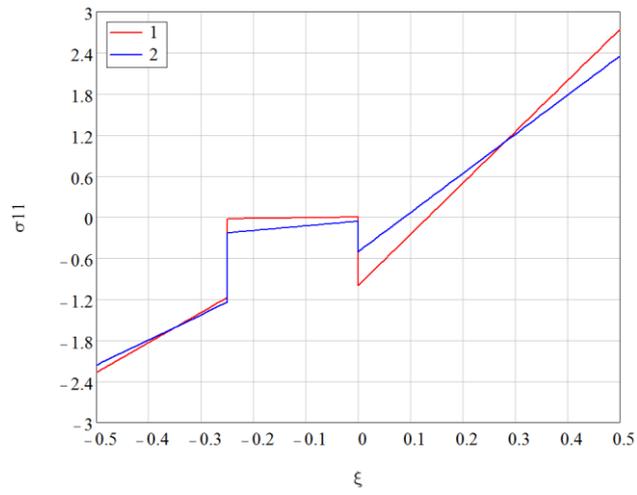


г)

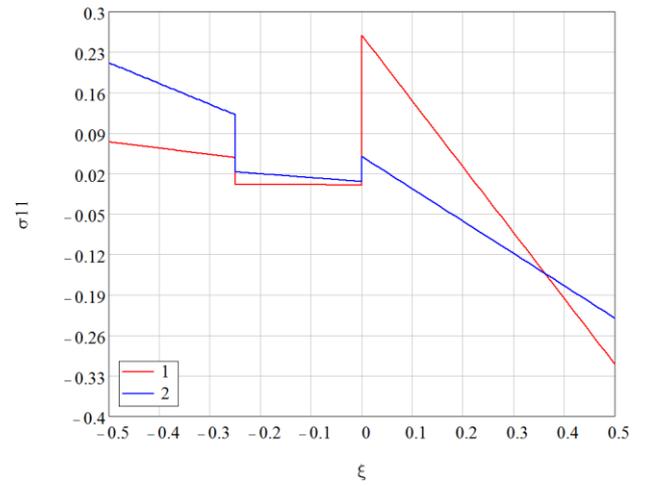


д)

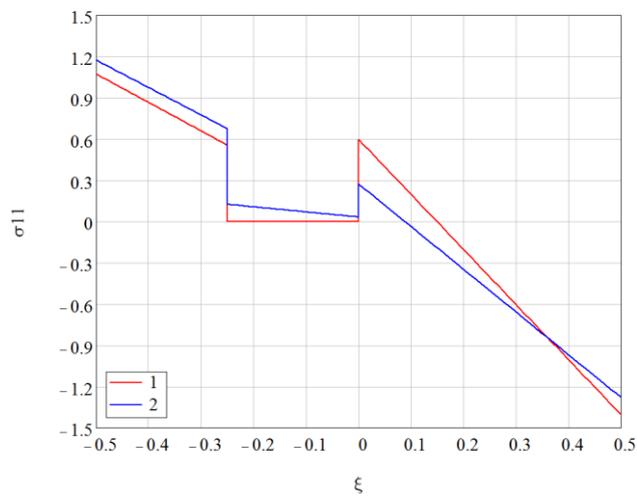
Рисунок 3.17. Распределение изгибного напряжения σ_{11} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = -1/4$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



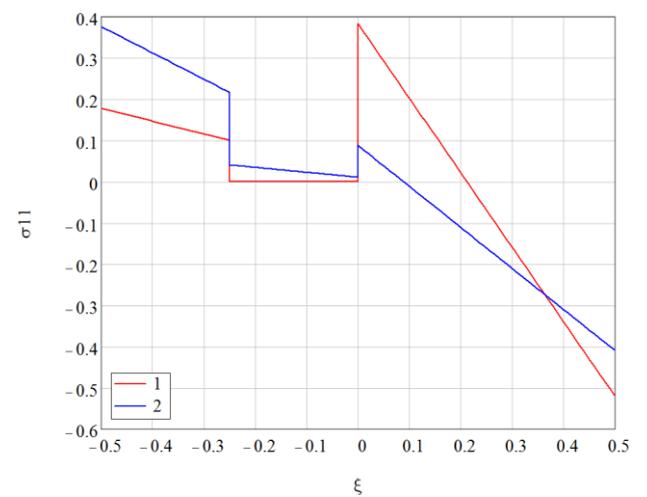
а)



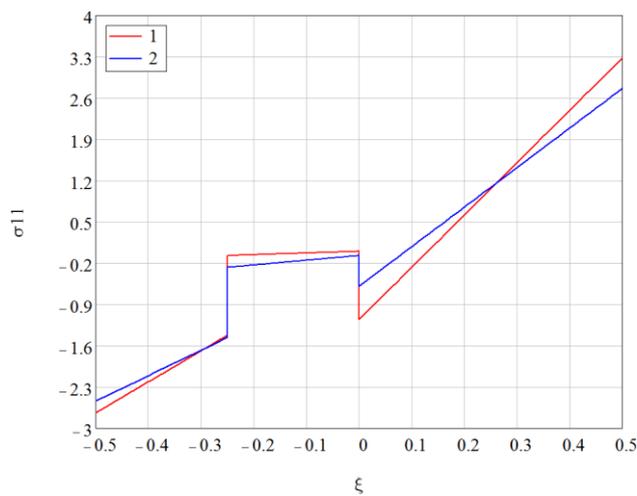
б)



в)

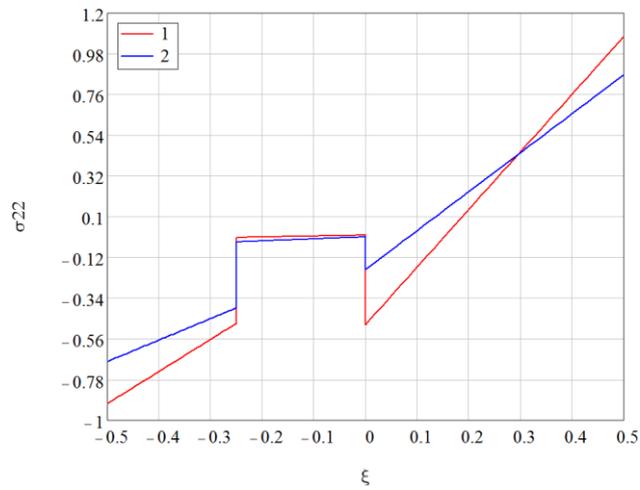


г)

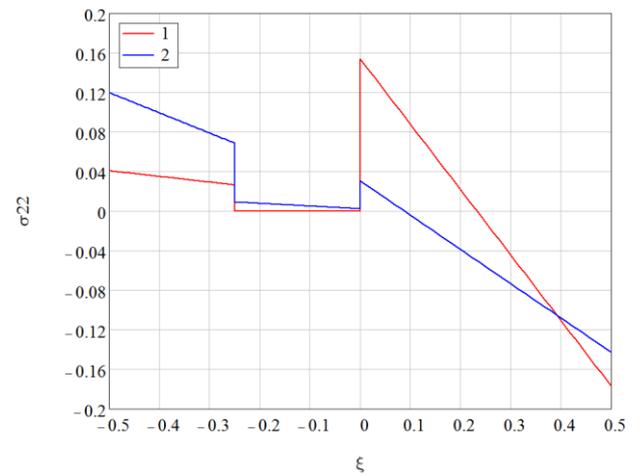


д)

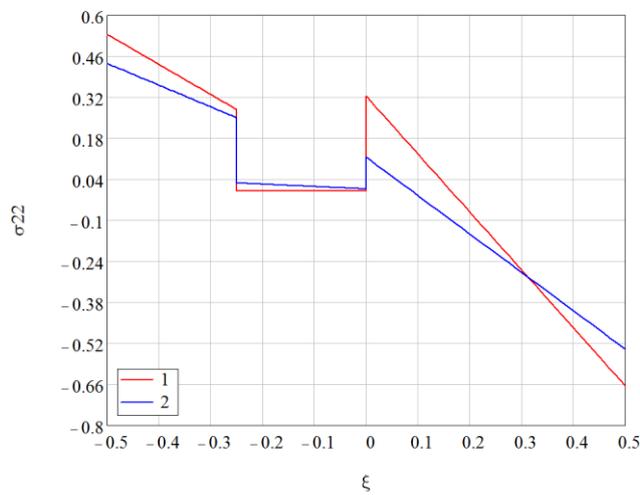
Рисунок 3.18. Распределение изгибного напряжения σ_{11} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



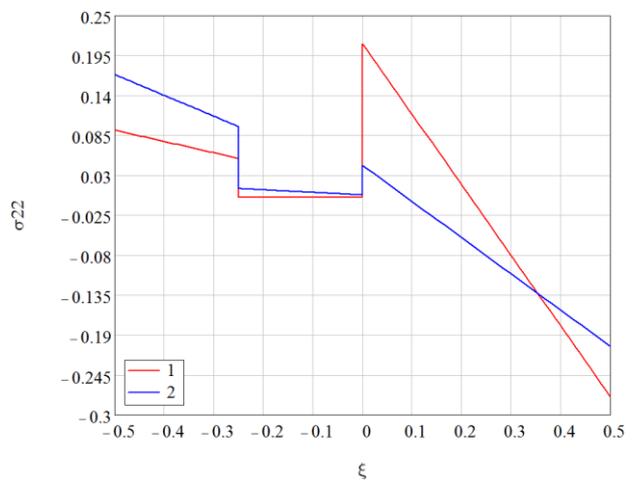
а)



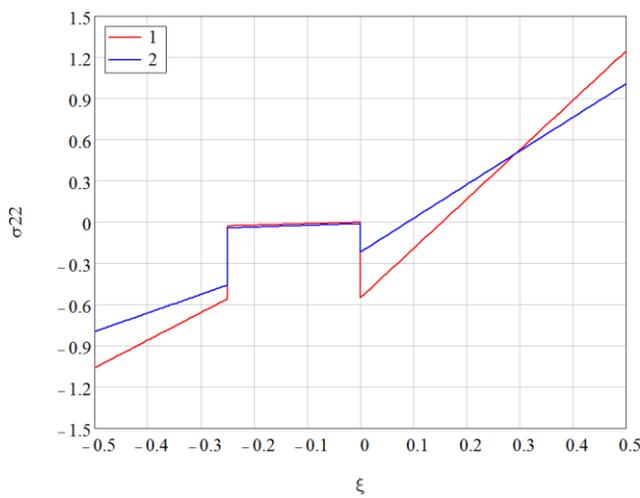
б)



в)

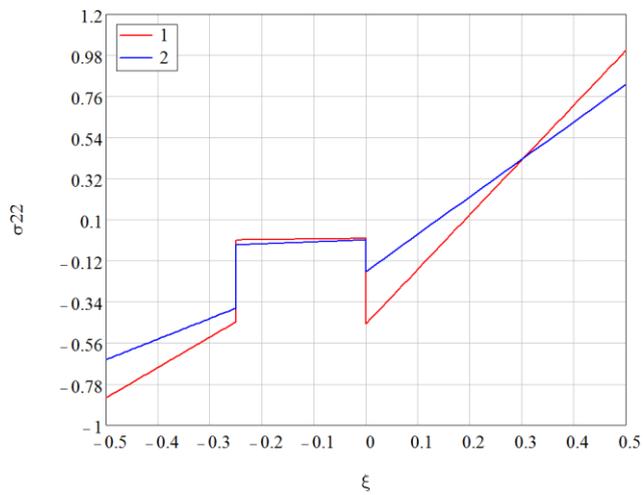


г)

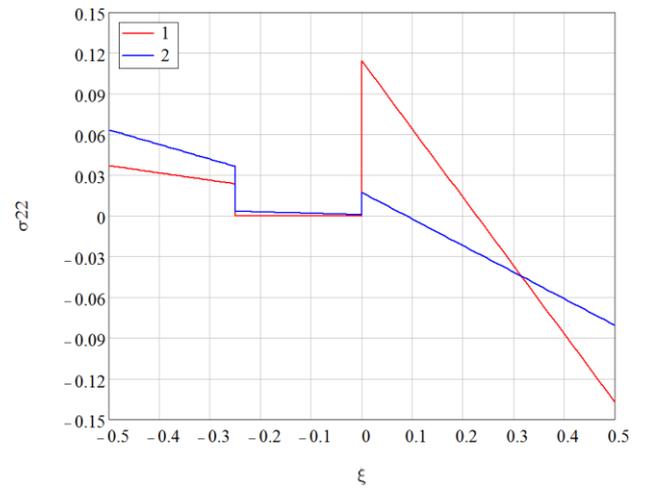


д)

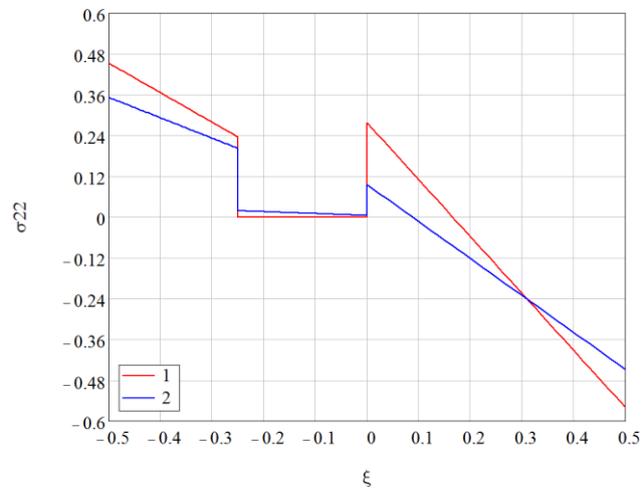
Рисунок 3.19. Распределение поперечного напряжения σ_{22} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = -1/4$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



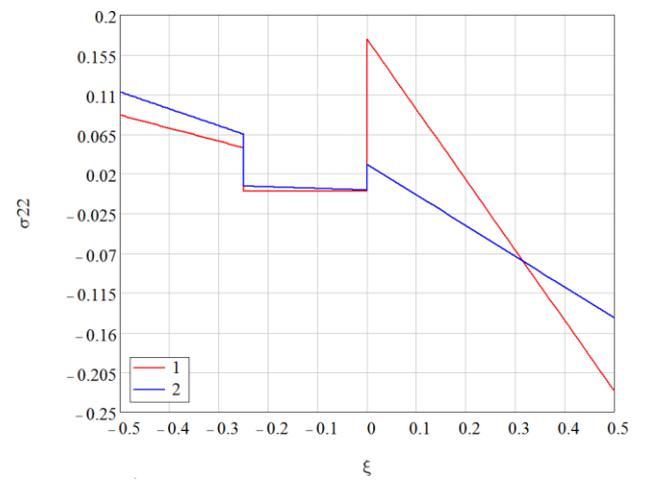
а)



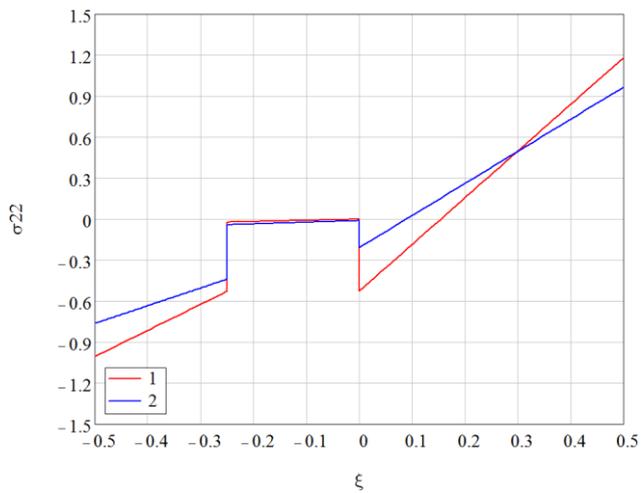
б)



в)

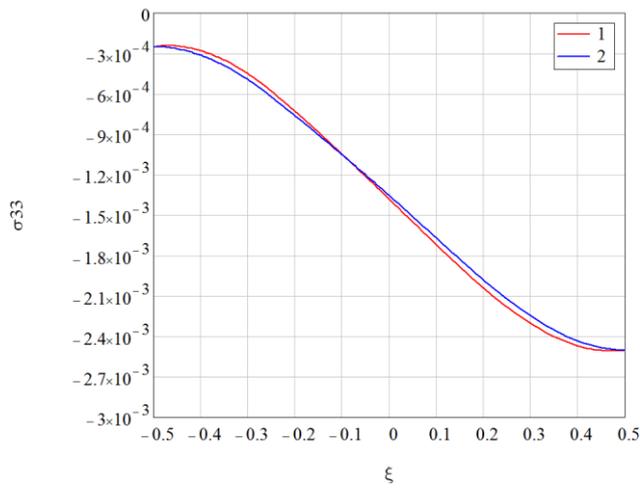


г)

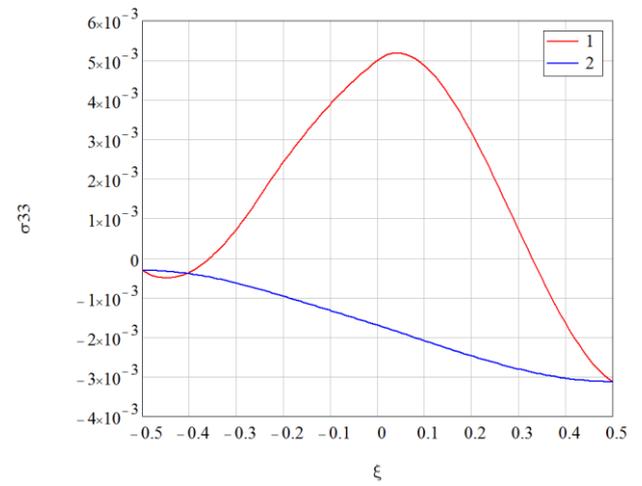


д)

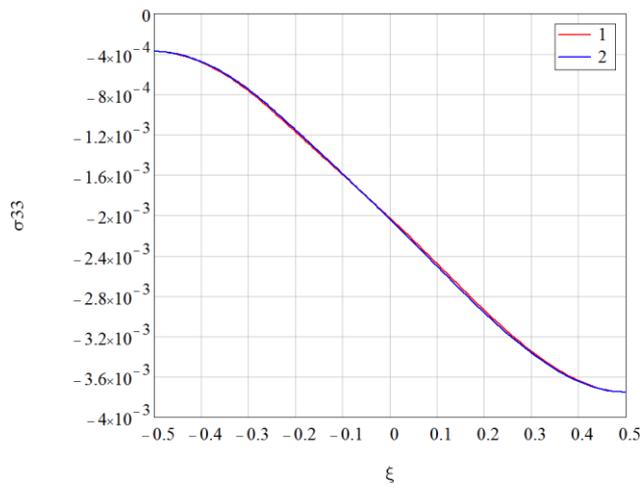
Рисунок 3.20. Распределение поперечного напряжения σ_{22} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



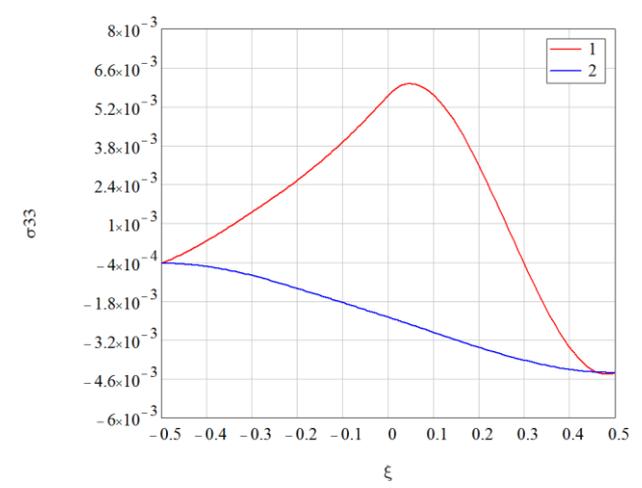
а)



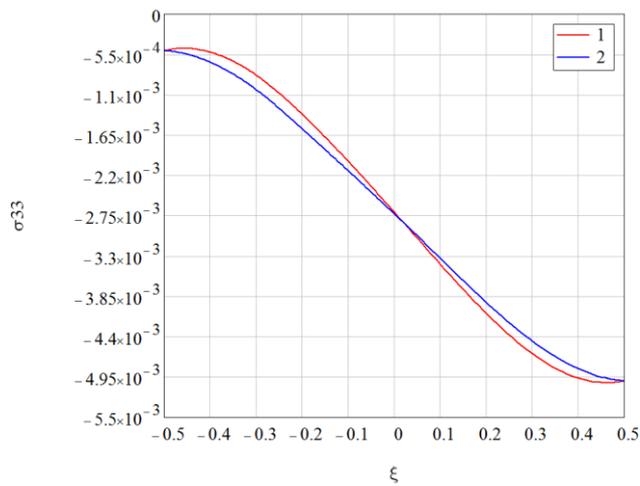
б)



в)

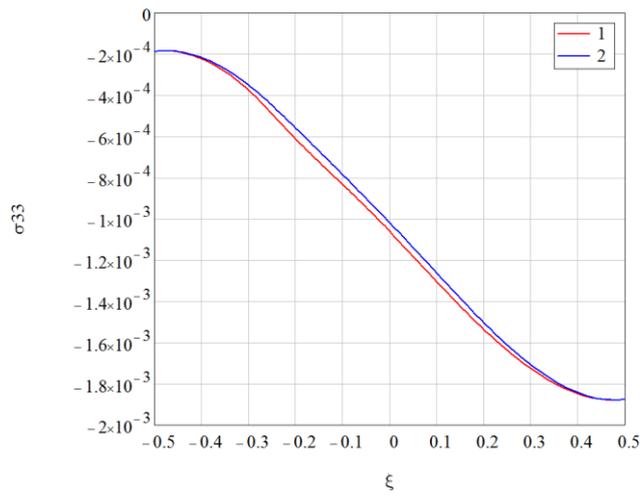


г)

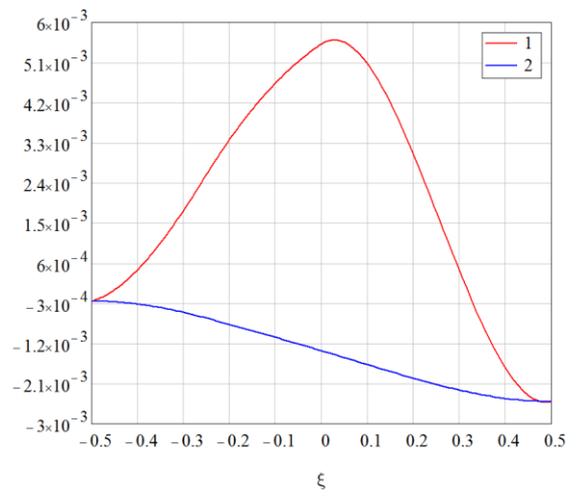


д)

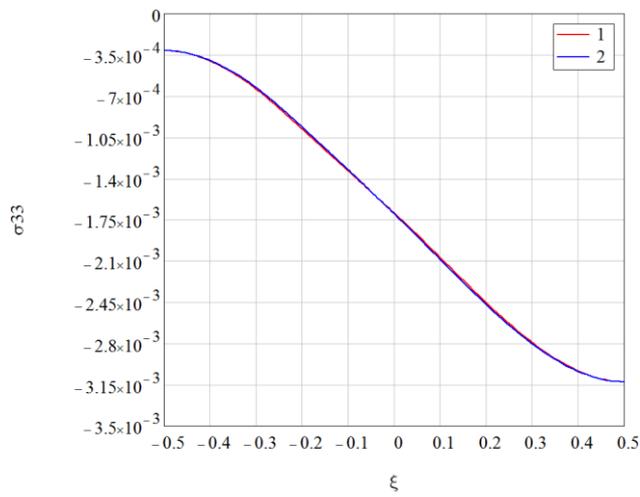
Рисунок 3.21. Распределение нормального напряжения σ_{33} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = -\frac{1}{4}$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



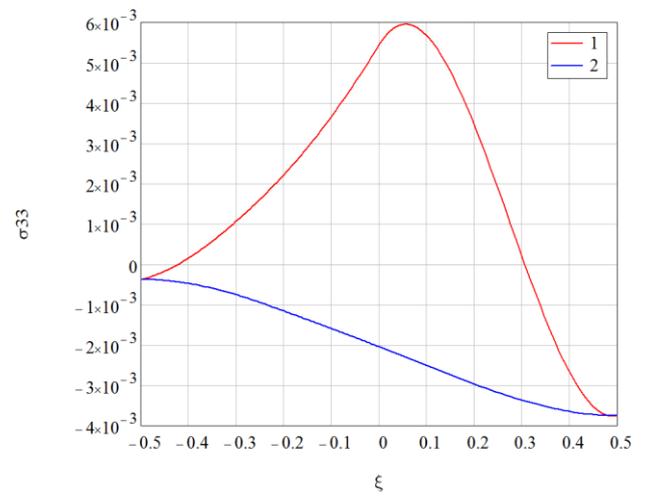
а)



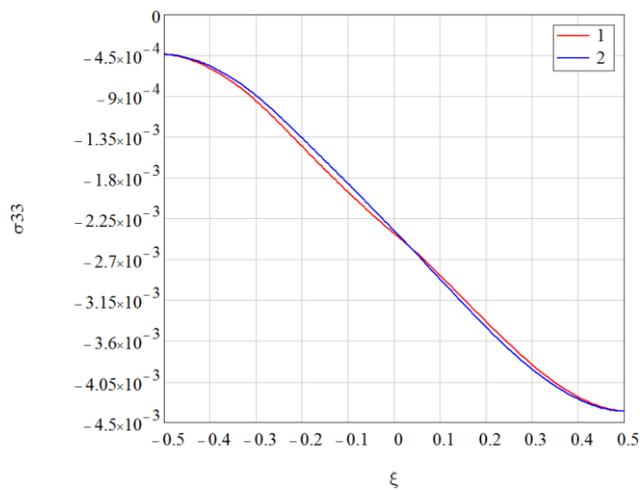
б)



в)

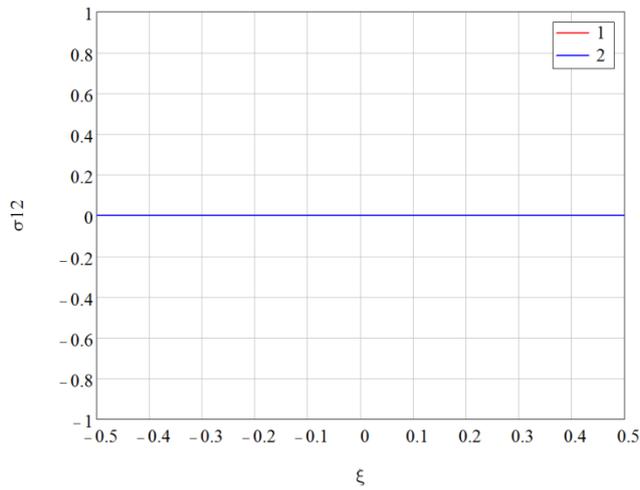


г)

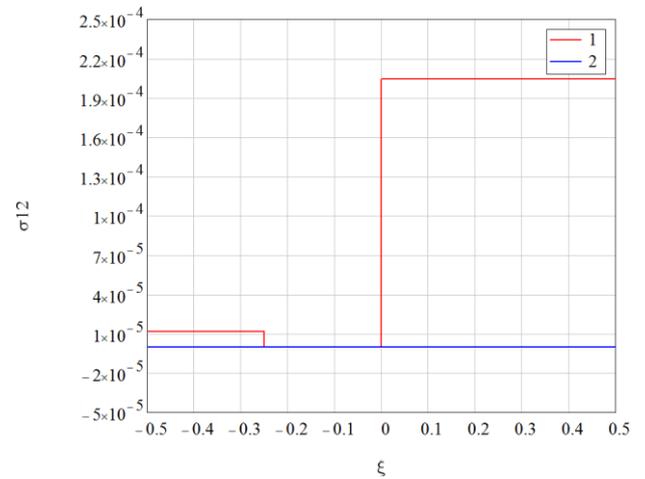


д)

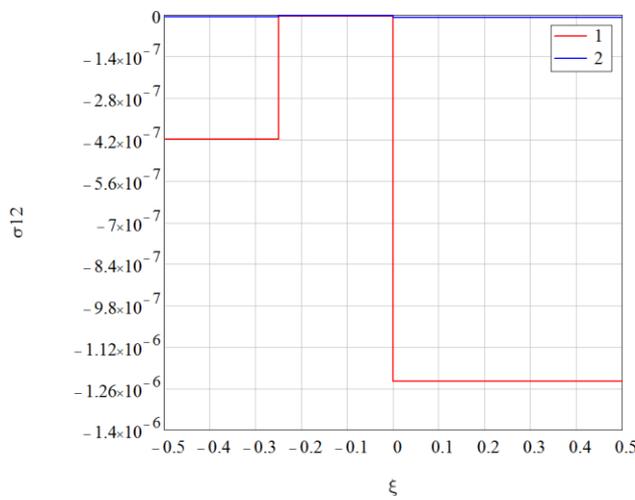
Рисунок 3.22. Распределение нормального напряжения σ_{33} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



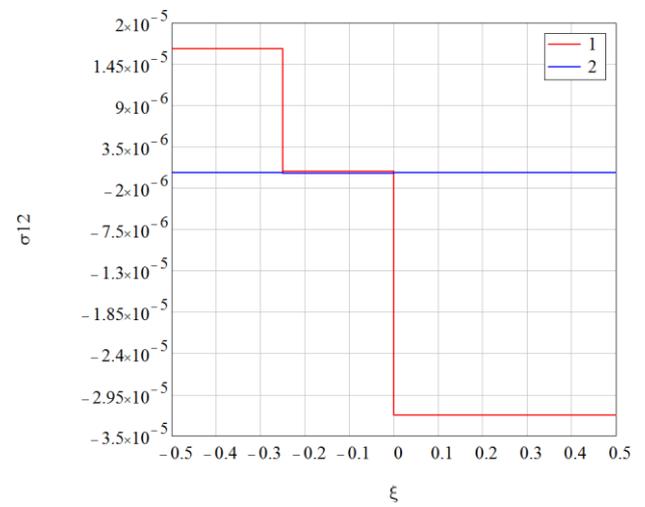
а)



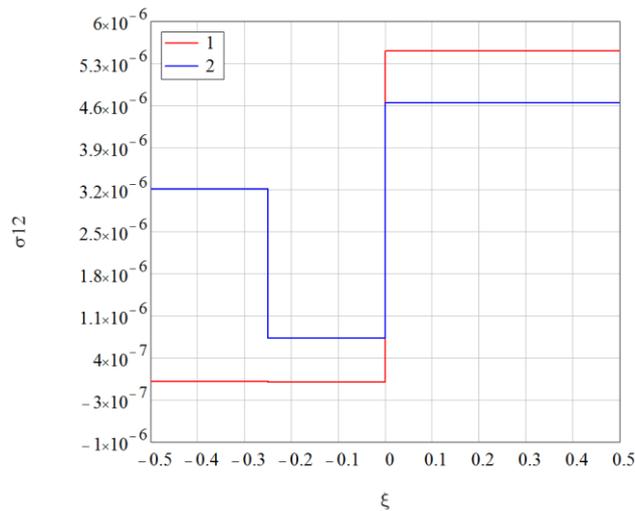
б)



в)

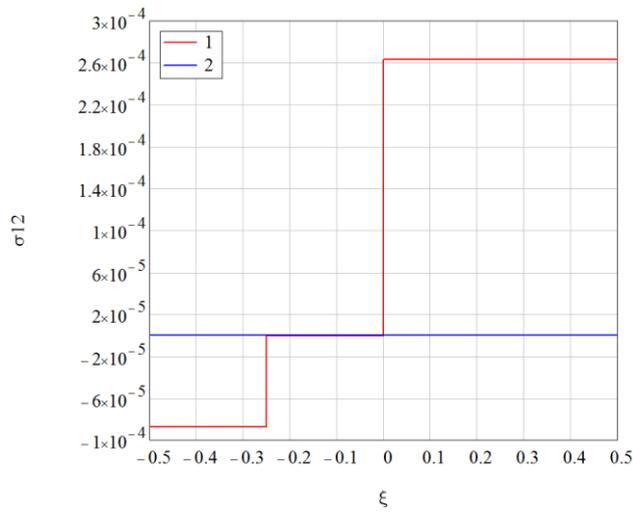


г)

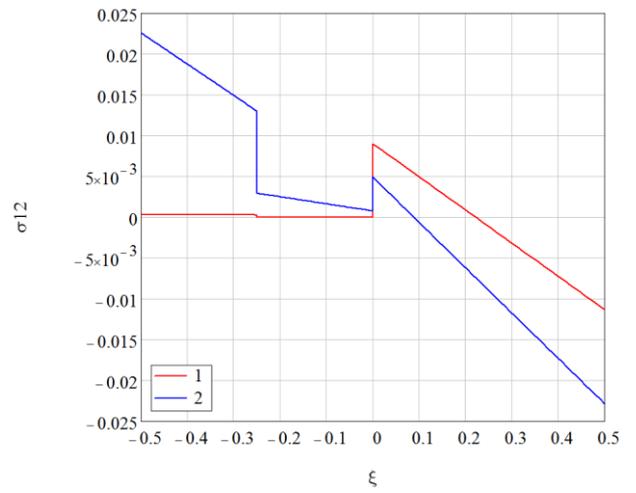


д)

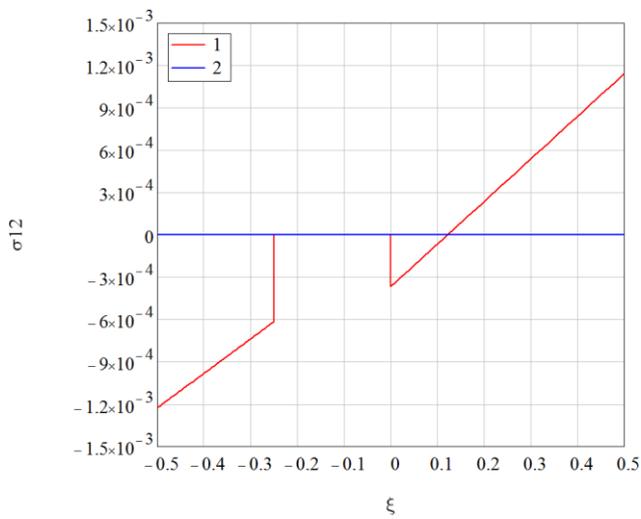
Рисунок 3.23. Распределение сдвигового напряжения σ_{12} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = -\frac{1}{4}$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



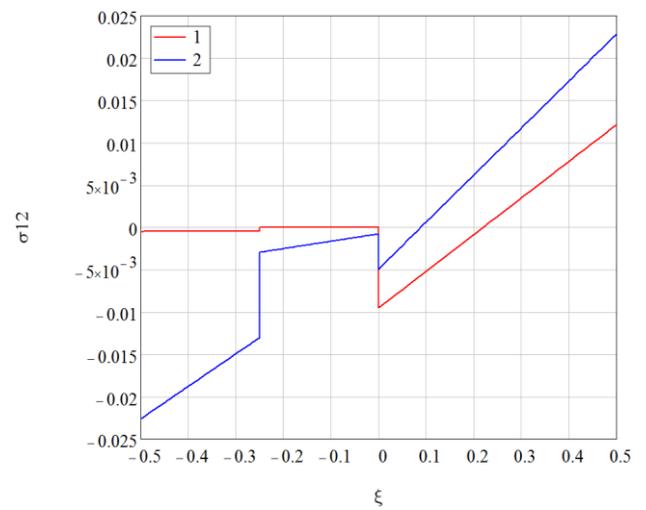
а)



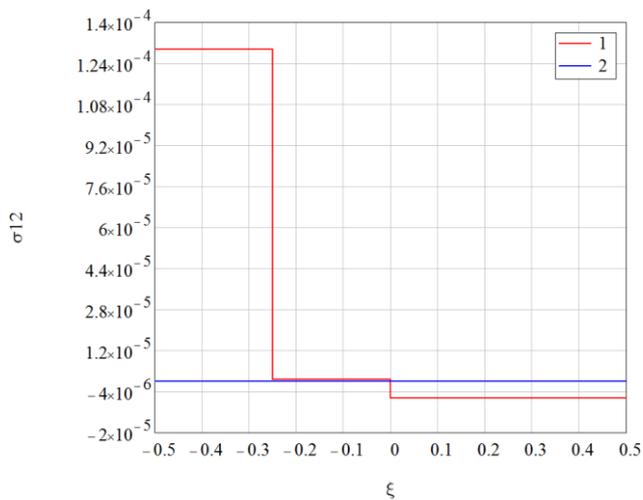
б)



в)

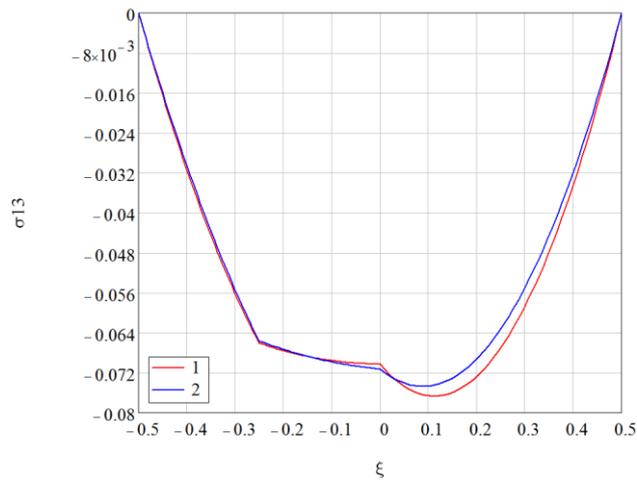


г)

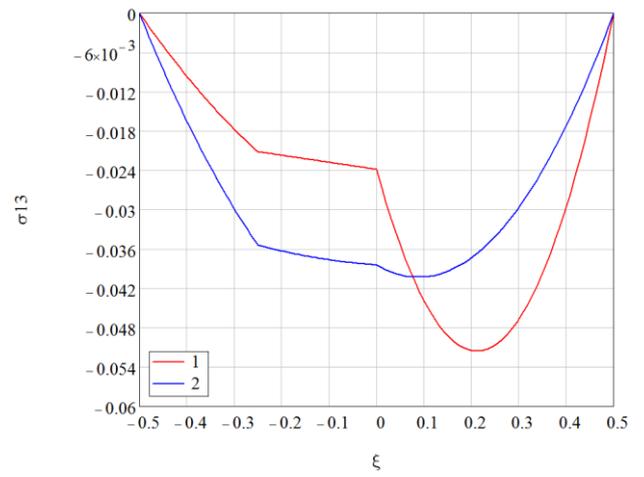


д)

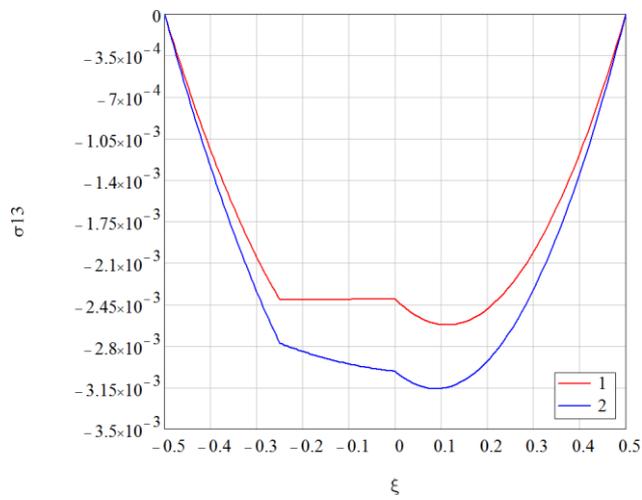
Рисунок 3.24. Распределение сдвигового напряжения σ_{12} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



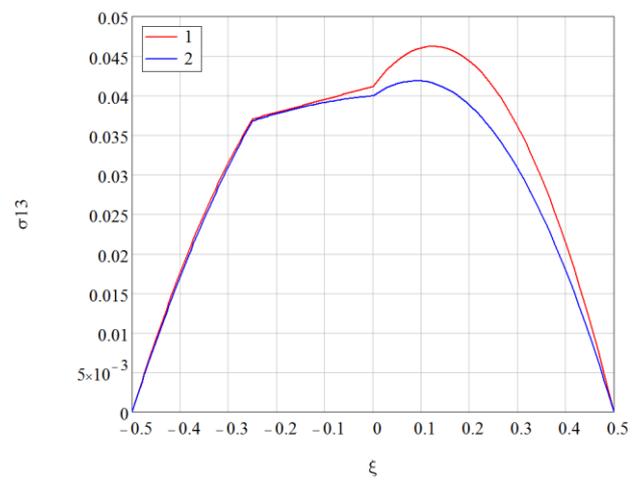
а)



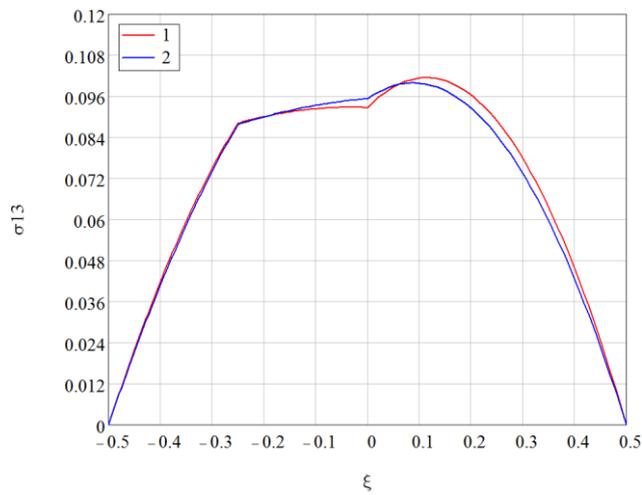
б)



в)

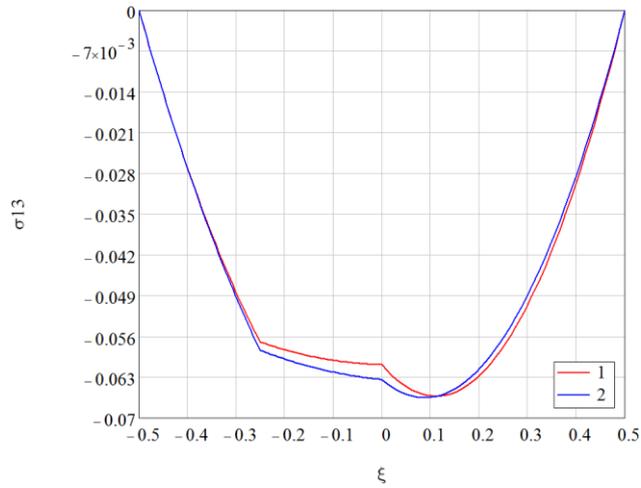


г)

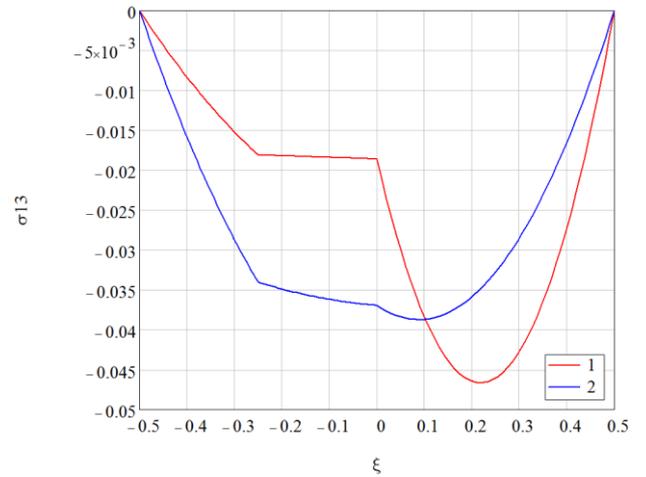


д)

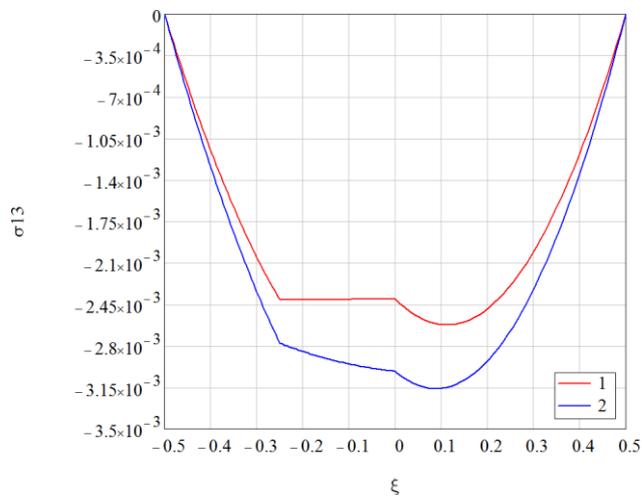
Рисунок 3.25. Распределение напряжения межслойного сдвига σ_{13} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = -\frac{1}{4}$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



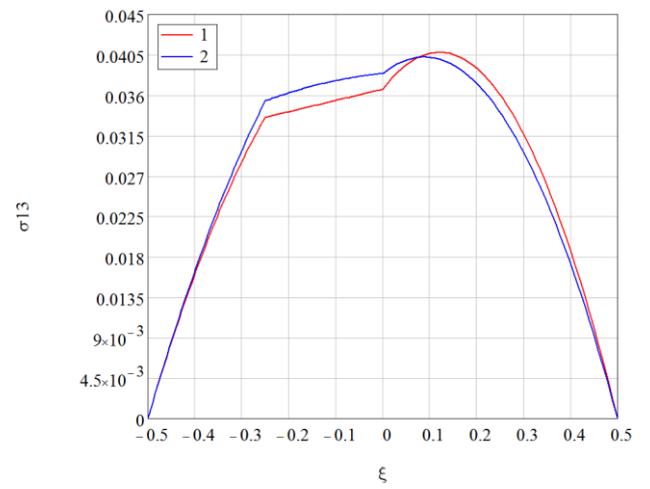
а)



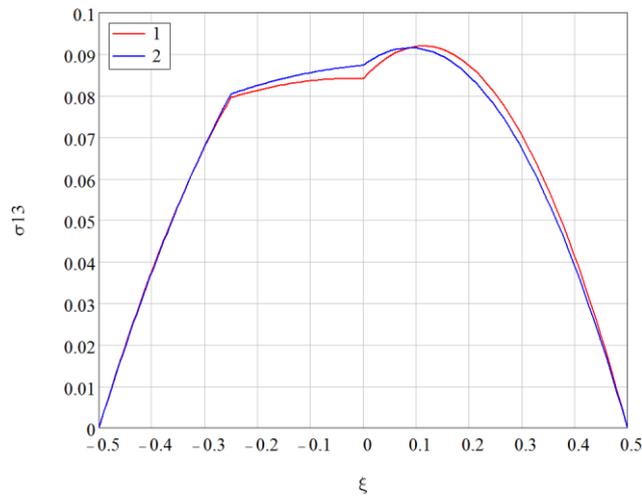
б)



в)

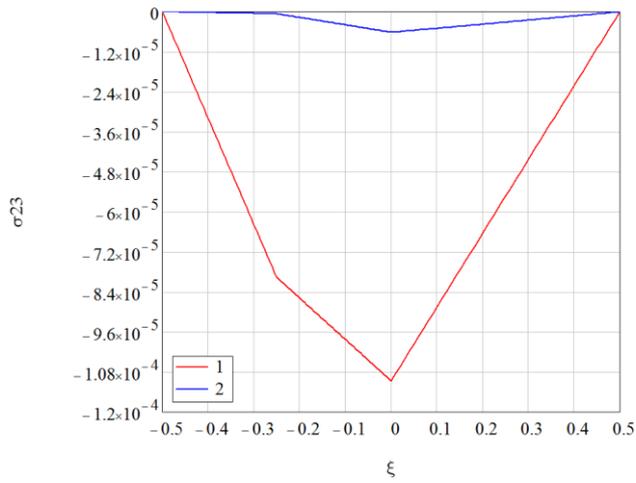


г)

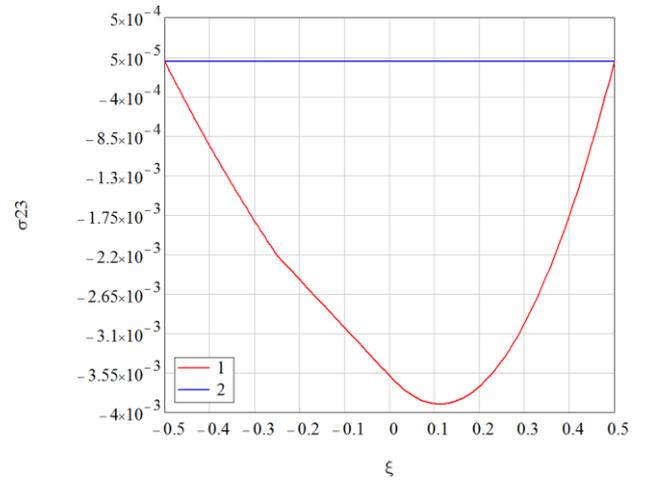


д)

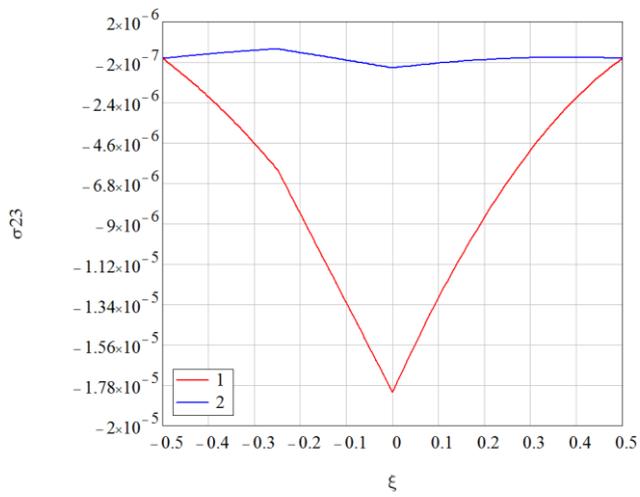
Рисунок 3.26. Распределение напряжения межслойного сдвига σ_{13} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = 0$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



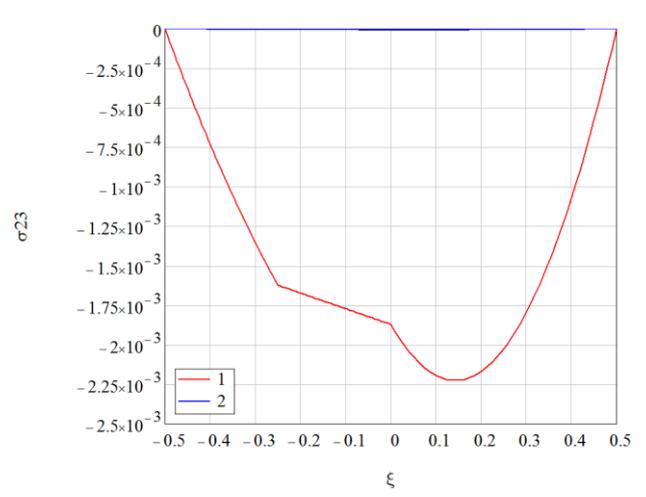
а)



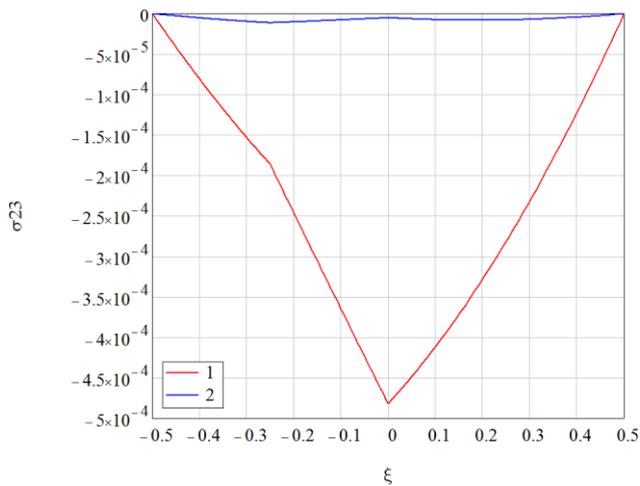
б)



в)

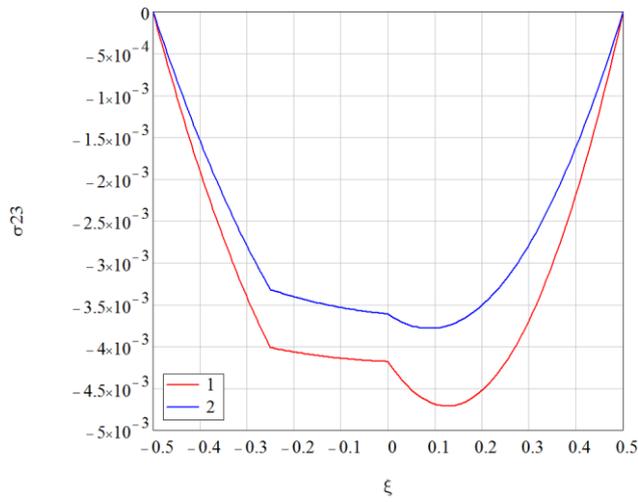


г)

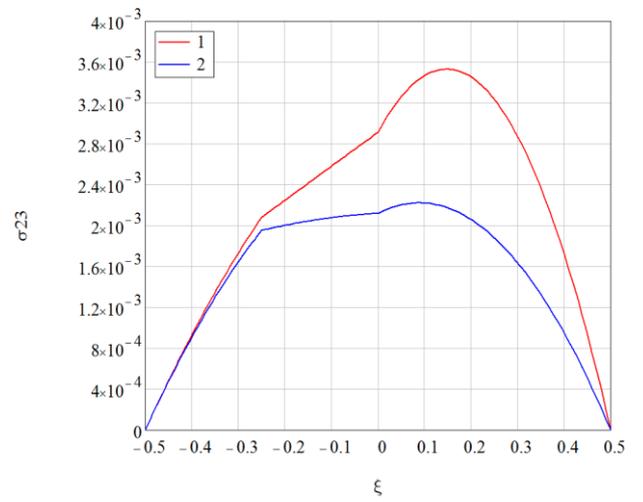


д)

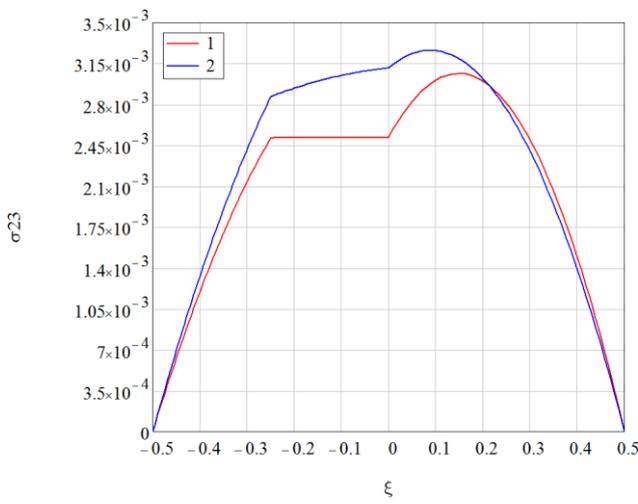
Рисунок 3.27. Распределение напряжения межслойного сдвига σ_{23} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2 = -1/4$ (кривая 1 - $\tau = T = 1$, кривая 2 - $\tau = 0$).



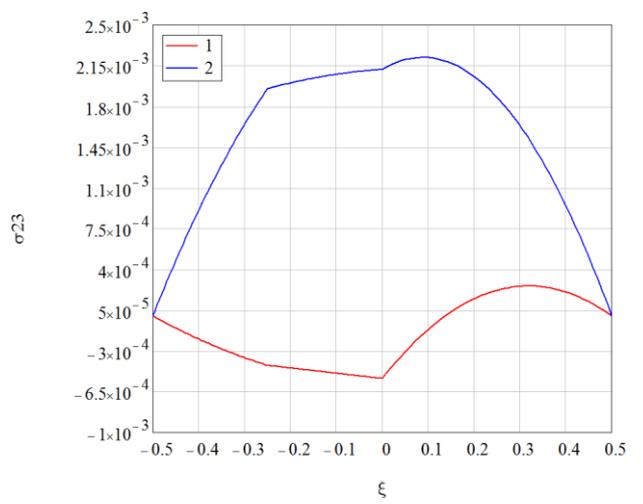
а)



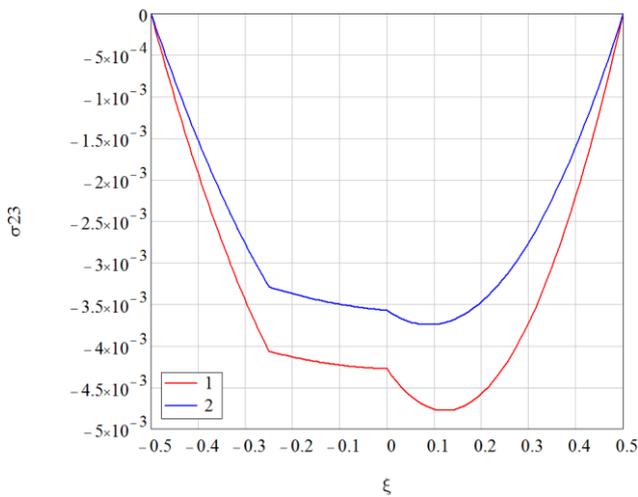
б)



в)



г)



д)

Рисунок 3.28. Распределение напряжения межслойного сдвига σ_{23} (безразмерного) по толщине пластины при $q_2=0$ (кривая 1 - $\tau=T=1$, кривая 2 - $\tau=0$).

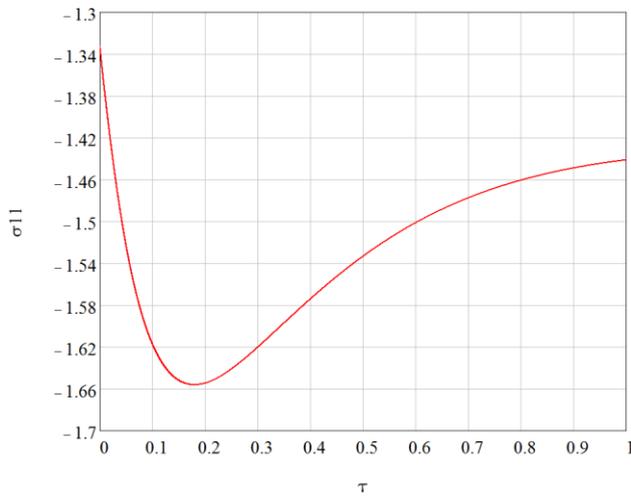
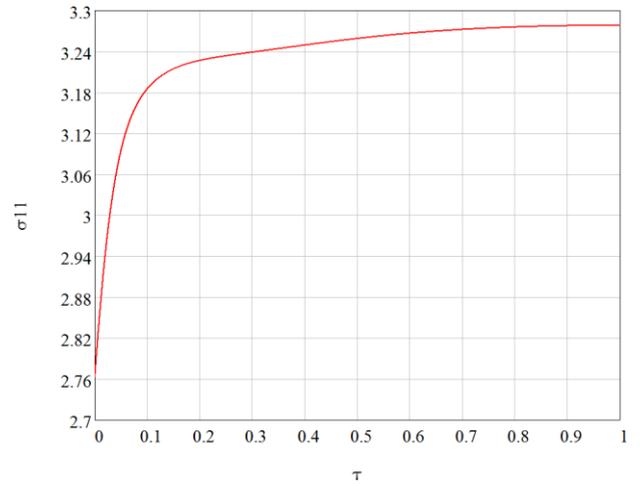
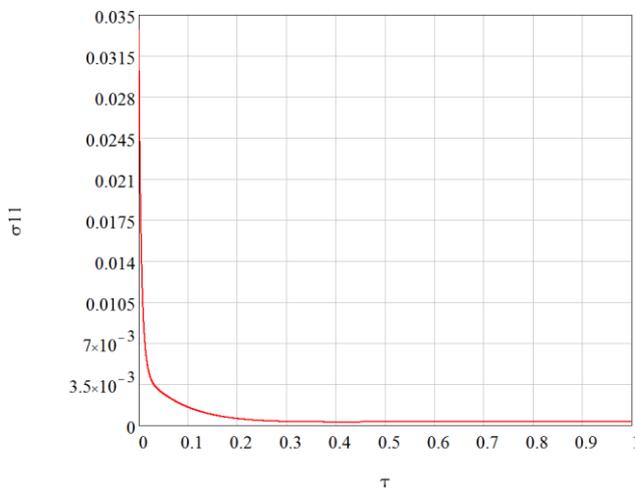
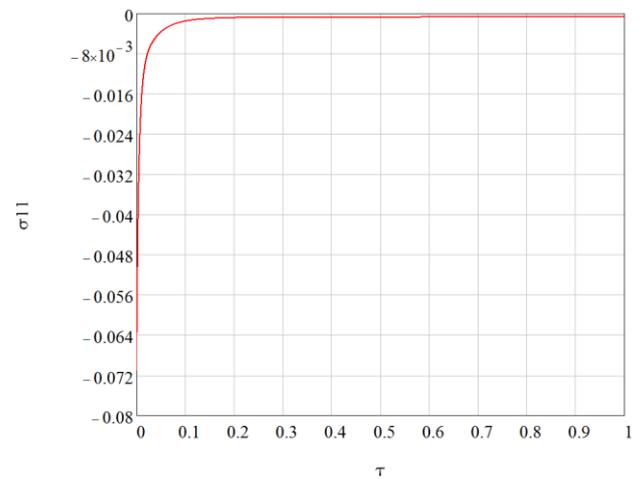
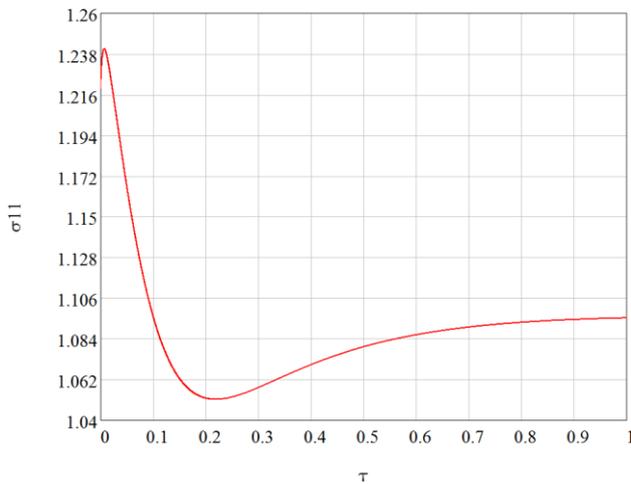
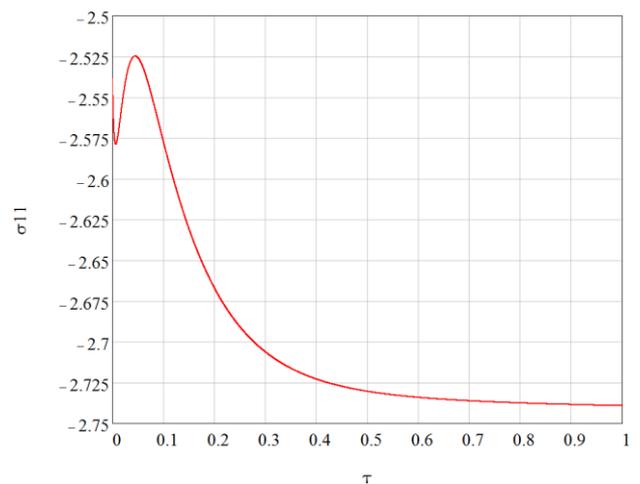
а) $q_1 = 1/2, q_2 = -1/4$ б) $q_1 = 1, q_2 = 0$ в) $q_1 = 1/2, q_2 = -1/4$ г) $q_1 = 1, q_2 = 0$ д) $q_1 = 1/2, q_2 = -1/4$ е) $q_1 = 1, q_2 = 0$

Рисунок 3.29. Кривые изменения изгибного напряжения σ_{11} (безразмерного) во времени (а-б – на верхней, в-г – на срединной, д-е – на нижней поверхности пластины).

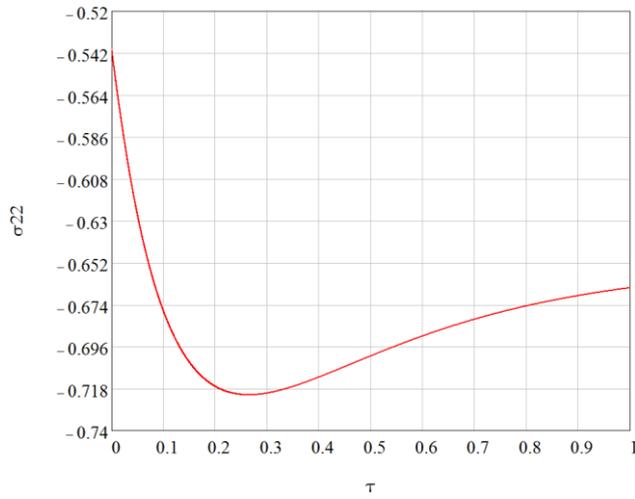
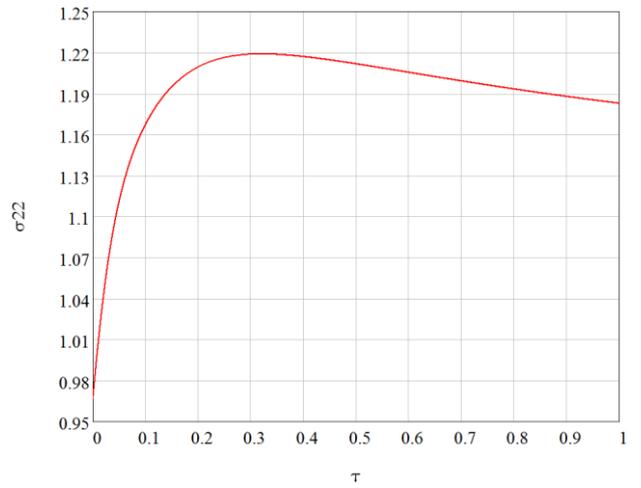
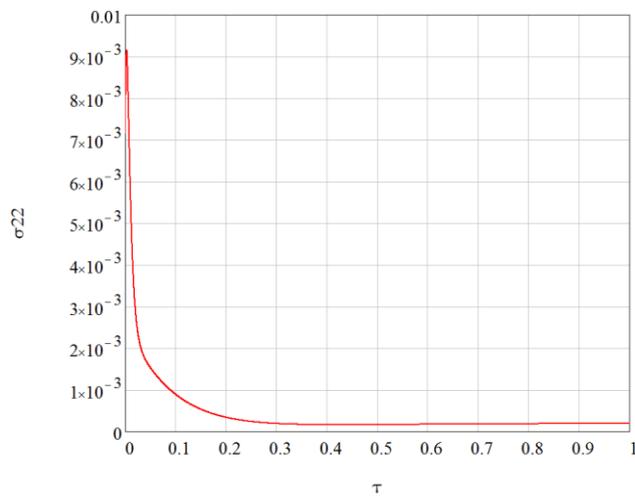
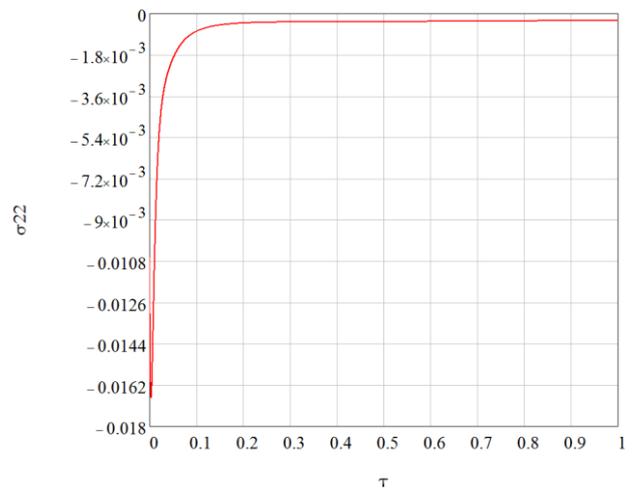
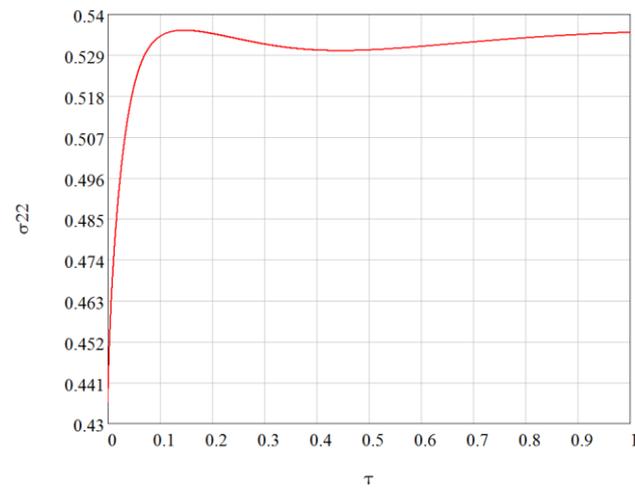
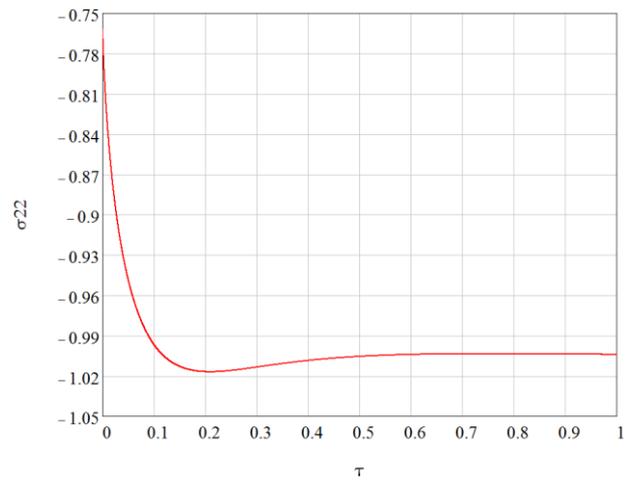
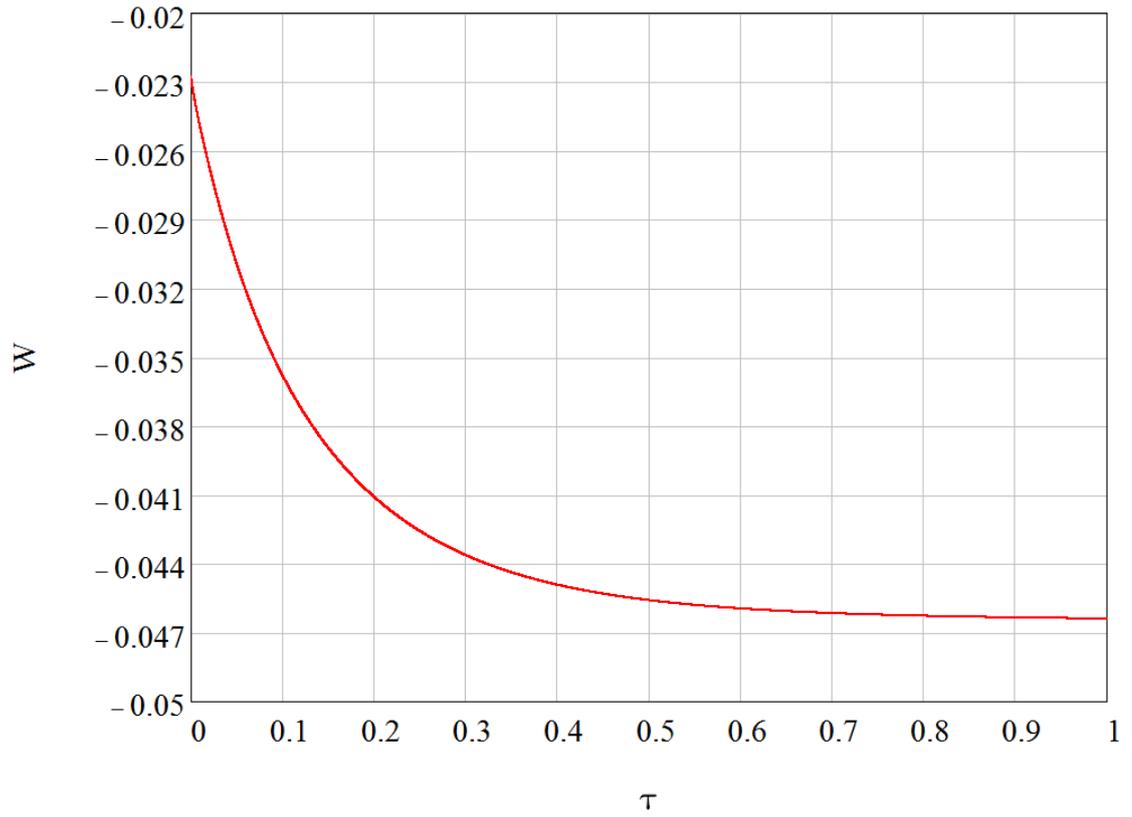
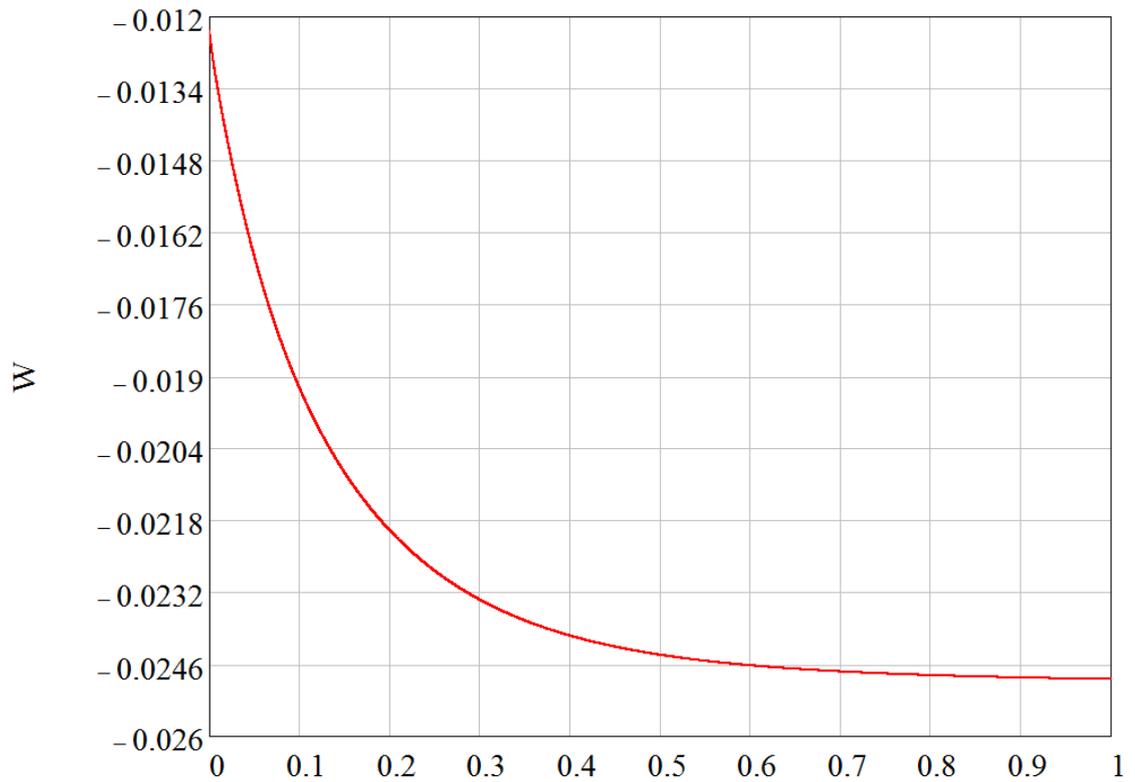
а) $q_1 = 1/2, q_2 = -1/4$ б) $q_1 = 1, q_2 = 0$ в) $q_1 = 1/2, q_2 = -1/4$ г) $q_1 = 1, q_2 = 0$ д) $q_1 = 1/2, q_2 = -1/4$ е) $q_1 = 1, q_2 = 0$

Рисунок 3.30. Кривые изменения поперечного напряжения σ_{22} (безразмерного) во времени (а-б – на верхней, в-г – на срединной, д-е – на нижней поверхности пластины).

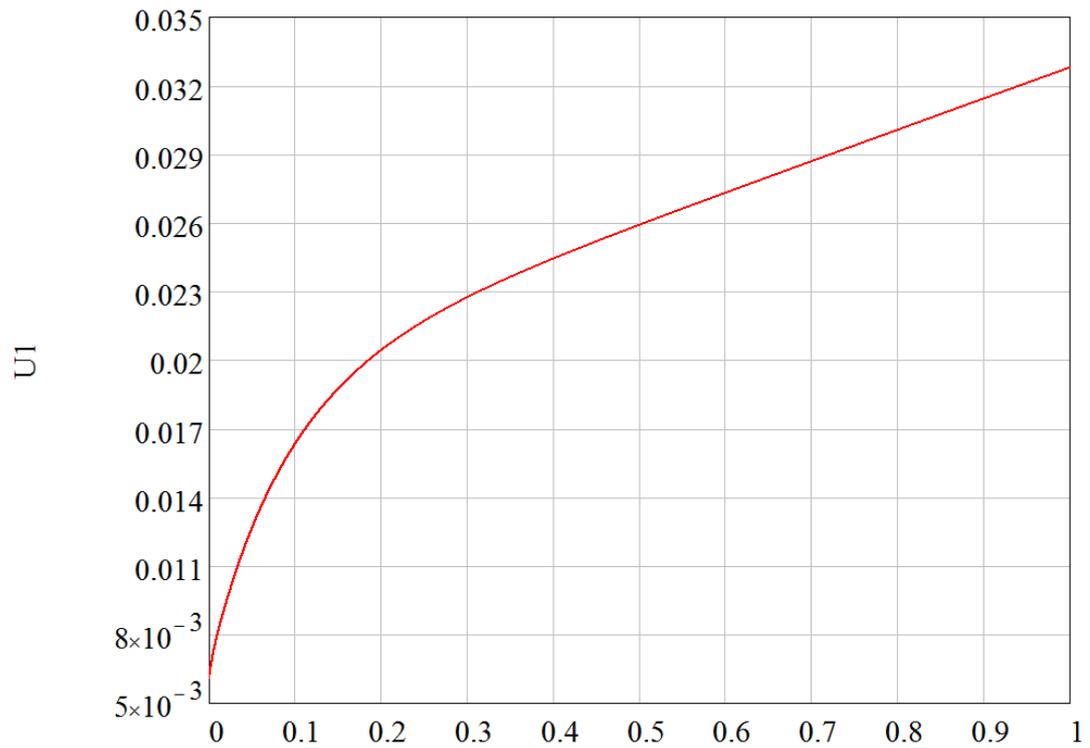


а) $q_1 = 1/2, q_2 = 0$

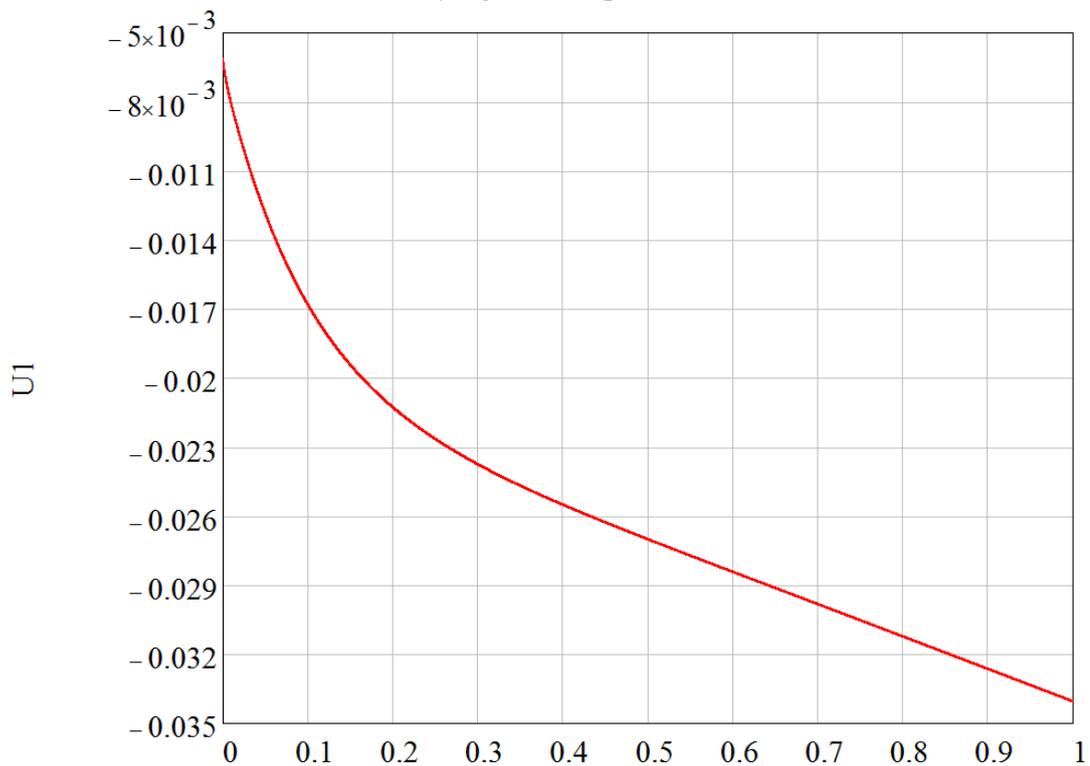


б) $q_1 = 1/4, q_2 = 0$

Рисунок 3.31. Кривые изменения прогиба $v_3^{(0)}$ (безразмерного) во времени для различных точек пластины.



а) $q_1 = 3/4, q_2 = 0$



б) $q_1 = 1/4, q_2 = -1/4$

Рисунок 3.32. Кривые изменения продольного перемещения $v_1^{(1)}$ (безразмерного) во времени для различных точек пластины.

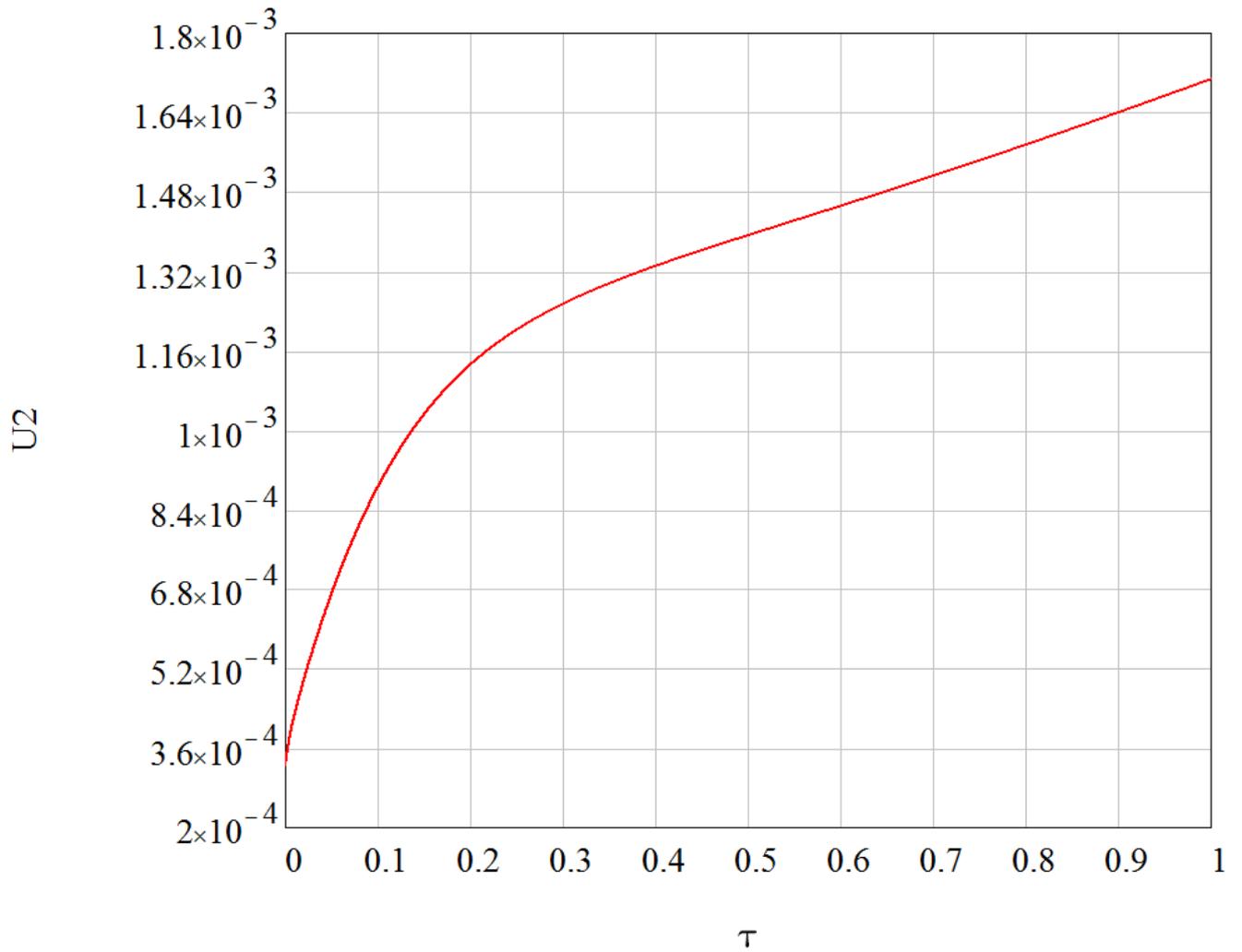


Рисунок 3.33. Кривая изменения продольного перемещения $v_2^{(1)}$ (безразмерного) во времени в центре пластины ($q_1 = 1/2, q_2 = 0$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

1. Предложен метод расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких анизотропных пластин с учетом ползучести, основанный на асимптотическом анализе трехмерной задачи теории ползучести без дополнительных предположений о характере распределения неизвестных функций по толщине пластины. Метод приводит к двумерным осредненным системам уравнений типа теории Кирхгофа-Лява, а также позволяет математически строго обосновать формулы для вычисления распределения всех шести компонент тензора напряжений по толщине. Разработанный метод обеспечивает высокую точность расчетов распределения по толщине пластины всех шести компонент напряжений. Такая точность в рамках трехмерной теории может быть достигнута только на очень мелких конечно-элементных сетках.

2. Предложен вариант конечно-элементного метода решения двумерных осредненных задач для асимптотического метода расчета напряженно-деформированного состояния многослойных тонких анизотропных пластин с учетом ползучести. Метод основан на применении аппроксимации Белла для функции прогиба, аппроксимации трикубическими полиномами Биркгофа со специальным выбором степеней свободы для продольных перемещений и на применении вариационного принципа Хеллингера-Рейснера для получения вариационных уравнений.

3. На примере задачи изгиба пластины с несимметричным расположением слоев, продемонстрирована возможность существенного влияния ползучести на напряженно-деформированное состояние пластины, в частности, показана возможность изменения характера кривых напряжений по толщине пластины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимова Е. А., Назаров С. А., Чечкин Г. А. Асимптотика решения задачи о деформации произвольной локально периодической пластины // Труды московского математического общества, 65, 2004. С. 3–34.
2. Баландин М. Ю., Шурина Э. П. Методы решения СЛАУ большой размерности. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.
3. Бахвалов Н. С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Доклады Академии Наук СССР, т. 221, № 3, 1975. С. 516-519.
4. Бахвалов Н. С. Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Доклады Академии Наук СССР; т.225, № 2, 1975. С. 249-252.
5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Бинوم. Лаборатория знаний. 2003. – 640 с.
6. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
7. Белкин А. Е., Гаврюшин С.С. Расчет пластин методом конечных элементов: Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 232 с.
8. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: МИР, 1987. 542 с.
9. Васильев В. В., Лурье С. А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела, 1990, №2. С. 158-167.
- 10.Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: МИР, 1984. 428 с.
- 11.Голованов А. И., Корнишин М. С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. — Казань, 1989. 270 с.
12. Голованов А. И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 392 с.

13. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов // Механика композит. материалов. 1988. № 4. С. 698–704.
14. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Нелинейные уравнения тонких многослойных оболочек регулярного строения // Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1967, № 1. С. 163 -169.
15. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах // Журн. прикл. механики и технической физики. – 1964, №5. С.109 – 117.
16. Гуреева Н. А. Восьмиугольный объемный конечный элемент в смешанной формулировке на основе функционала Рейсснера // Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 2007, № 5, с. 23–28.
17. Даутов Р. З., Карчевский М. М. Введение в теорию метода конечных элементов: учеб. пособие. Казань: Изд-во КГУ, 2004. 239 с.
18. Димитриенко Ю. И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. № 3. 2012. С. 86–100.
19. Димитриенко Ю. И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 624 с.
20. Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 610 с.
21. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
22. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 36-57.
23. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости

- // Математическое моделирование и численные методы, 2016, №2 (10), с. 3-23.
24. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Федонюк Н. Н., Яковлев Д. О. Метод расчета рассеяния энергии в конструкциях из гибридных композитов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 11. С. 23–34.
25. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Юрин Ю. В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 4. С. 18-36.
26. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Юрин Ю. В. Вариационные уравнения асимптотической теории многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки.- 2015.-№ 4. с.67-87.
27. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Юрин Ю. В. Конечно-элементное моделирование процессов термоползучести на основе методов Рунге-Кутты// Наука и образование. Электронный журнал. # 03, март 2015 DOI: 10.7463/0315.0759406. <http://technomag.bmstu.ru/doc/759406.html>.
28. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Юрин Ю. В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации// Инженерный журнал: наука и инновации, 2016, вып. 12(60). DOI: 10.18698/2308-6033-2016-12-1557. <http://engjournal.ru/articles/1557/1557.pdf>.
29. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Яковлев Д. О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 10. С. 359-382. DOI: 10.7463/1014.0730105.
30. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов // Вестник МГТУ. Естественные науки.- 2002.- №2.- С. 95-108.

31. Димитриенко Ю. И., Ничеговский Е. С. Численное моделирование магнитных свойств композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. - 2010. - № 1. - С. 3-11.
32. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. Математическое моделирование, 24:5, 2012. с. 3–20.
33. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Шпакова Ю. В., Юрин Ю. В. Моделирование поверхностей прочности композитов на основе микроструктурного конечно-элементного анализа // Наука и образование. Электронный журнал.- # 11, ноябрь 2012.-DOI: 10.7463/1112.0496336.
34. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом ползучести// Математическое моделирование и численные методы. № 3.- 2015 г. с.101-118.
35. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Европин С. В. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 1. Численное моделирование накопления повреждений //Известия ВУЗов. Машиностроение, 2013, №11. С.3-11.
36. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Европин С. В., Шиверский Е. А., Корецкий С. А., Прозоровский А. А. Метод расчета характеристик надежности корпусов теплоэнергетических двигательных установок на основе детального конечно-элементного моделирования // Безопасность в техносфере.-№ 3.- 2014. С. 28-36.
37. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Федонюк Н. Н. Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных конструкций с дефектами // Математическое моделирование и численные методы, 2016, № 3 (11). С. 3–23.
38. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Шиверский Е. А. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления.

Часть 2. Численное статистическое моделирование // Известия ВУЗов. Машиностроение.-2013.-№12. С.12-19.

39. Димитриенко Ю. И., Яковлев Д. О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. Т. 20. № 2. 2014. С. 260–282.
40. Димитриенко Ю. И., Яковлев Д. О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12.
41. Зверяев Е. М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–483.
42. Зверяев Е. М., Макаров Г. И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321.
43. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: МИР, 1975. 544 с.
44. Зорич В. А. Математический анализ. Часть 1. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997. 554 с.
45. Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546-549.
46. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90-96.
47. Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С. Об усреднении эллиптических уравнений, описывающих процессы в слоистых средах // УМН, 41:3(249), 1986. С. 185–186.
48. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90-108.
49. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. 1958. Т. 22. – С. 78–89.
50. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. – С. 586–588.

51. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных задач. М.: МИР, 1972. 588 с.
52. Лурье С. А., Гавва Л. М. Метод расчета напряженно-деформированного состояния панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида // Вестник Московского авиационного института. Т.2. №1, 1995.
53. Митчел Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: МИР, 1981. 216 с.
54. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука. 1976. 391 с.
55. Назаров С. А., Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки) // Матем. сб., 191:7, 2000. С. 129–159.
56. Назаров С. А., Свирс Г. Х., Слуцкий А. С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. // Матем. сб., 202:8 (2011), 41–80
57. Панасенко Г. П., Резцов М. В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294. –№ 5. – С. 1061-1065.
58. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. — М.: Мир, 1988.
59. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
60. Попов Б. Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993, 294 с.
61. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
62. Радаев Ю. Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 102–120.
63. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.

64. Рикардс Р. Д. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 284 с.
65. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1978. 224 с.
66. Сегерлинд Л.. Применение метода конечных элементов. М.: МИР, 1979. 392 с.
67. Стренг Г., Фикс Д. Теория метода конечных элементов. М.: МИР, 1977. 350 с.
68. Суслина Т. А. Об усреднении периодической системы Максвелла. // Функциональный анализ и его прил., 38:3, 2004. С. 90–94
69. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: МИР, 1980. 512 с.
70. Шешенин С. В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Изв.РАН.-МТТ.-2006.-№ 6.-с.71-79.
71. Шешенин С. В., Ходос О. А. Эффективные жесткости гофрированной пластины // Вычислительная механика сплошной среды, т. 4, №2, 2011. С.128-139.
72. Эглит М. Э. Об усредненном описании процессов в периодических упруго-пластических средах. Механика композиционных материалов, № 5. 1984. С. 825-831.
73. Adams R. A., Fournier J. J. F. Sobolev Spaces. Academic Press, 2003. 320 p.
74. Andrianov I. V., Bolshakov V. I., Danishevs'kyu V. V., Weichert D. Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite structures // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2008. – V. 464. P. 1181 – 1201.
75. Argyris J. H., Fried I., Scharpf D. W. The TUBA Family of Plate Elements for the Matrix Displacement Method // J. Roy. Aeronaut. Soc., 72, 1968. P. 701-709.
76. Argyris J. H., Scharpf D. W. The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method // The Aeronautical Journal, 72(694), 1968. P. 873–883.

77. Bathe K. J., Wilson E. L. Numerical methods in finite element analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976. 528 P.
78. Bell K. A refined triangular plate bending finite element. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 1, 1969, pp. 101-122.
79. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. New York: North-Holland Publishing, 1978.
80. Birkhoff G. Tricubic Polynomial Interpolation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA Vol. 68, No. 6, 1971. P. 1162-1164.
81. Chien H. Thaia, Kulasegaram S., Tran Loc V., Nguyen-Xuanc H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach // Computers & Structures. Volume 141, 2014. P. 94–112.
82. Cowper G. R., Lindberg G. M., Olson M. D. A shallow shell finite of triangular shape // Int. J. Solids Struct, № 6, 1970. P. 1133-1156.
83. Dawe D. J. High-order triangular finite element for shell analysis // Int. J. Solids Struct. V. 11, N. 10, 1975. P. 1097-1110.
84. Dimitrienko Yu. I. Internal heat-mass-transfer and stresses in thin-walled structures of ablating materials // Int. Journ. of Heat Mass Transfer, 40(7), 1997. P. 1701-1711.
85. Dimitrienko Yu. I. Thermomechanics of Composites Structures under High Temperatures. Springer, 2016. 434 p.
86. Dimitrienko Yu. I., Gubareva E. A., Yakovlev D. O., Yurin Yu. V. Asymptotic homogenization for harmonic vibrations of multilayer thin elastic plates // Multiscale Modeling and Methods: Upscaling in Engineering and Medicine : Abstracts of the Fifth International Conference / Ed. by Yu. Dimitrienko, G. Panasenko; Bauman Moscow State Technical University, Moscow : BMSTU, June 25-27, 2015. P. 17-18.
87. Dimitrienko Yu. I., Minin V. V., Syzdykov E. K. Modeling of the thermo-mechanical processes in composite shells in local radiation heating // Composites:

- Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2(2), 2011. P. 147-169.
88. Dimitrienko Yu. I., Sborshchikov S. V., Sokolov A. P. Numerical simulation of microdestruction and strength characteristics of spatially reinforced composites // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 4(4), 2013. P. 345-364.
89. Ghugal Y. M., Shmipi R. P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams // Journal of Reinforced Plastics and Composites, vol. 20, no. 3, 2001. P. 255-272.
90. Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections // Computational mechanics, v.27. 2001. P.199-207.
91. Henk A. van der Vorst. Iterative Krylov Methods for Large Linear System. Cambridge University Press, 2003. 221 p.
92. Herrmann L. R. Finite-element bending analysis for plates // J. of the engineering mechanics division. Vol. 93, Issue 5. P. 13-26.
93. Hutchinson J. R., Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory // ASME, J. Appl. Mech., 2001. P. 87-92.
94. Kalamkarov A. L., Hassan E. M., Georgiades A.V., Savi M. A. Asymptotic homogenization model for 3D grid-reinforced composite structures with generally orthotropic reinforcements // Composite Structures, Volume 89, Issue 2, 2009. P. 186-196.
95. Kohn R. V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids and Struct., V. 20, № 4, 1984. P. 333-350.
96. Kolpakov A. G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. – Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004. 228 p.
97. Lewiński T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure. International Journal of Solids and Structures, vol. 29, no. 3, 1992. p. 309-326.

98. Levinski T., Telega J.J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. Singapore, London, World Sci. Publ., 2000. 739 p.
99. Li B., Lin J., Yao X. A novel evolutionary algorithm for determining unified creep damage constitutive equations // International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 44, no. 5, 2002. P. 987-1002.
100. Mantari J. L., Oktem A. S., Guedes Soares C. A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates // Computers & Structures Volumes 94–95, 2012. P. 45–53.
101. Matsuda T., Kanamaru S., Yamamoto N., Fukuda Y. A homogenization theory for elastic–viscoplastic materials with misaligned internal structures // International Journal of Plasticity, Volume 27, Issue 12, December 2011. P. 2056-2067.
102. Michel J. C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 172, Iss. 1-4, 1999. P. 109-143.
103. Nejad M. Z., Kashkoli M. D. Time-dependent thermo-creep analysis of rotating FGM thick-walled cylindrical pressure vessels under heat flux // International Journal of Engineering Science, Vol. 82, 2014. P. 222-237.
104. Otero J. A., Castillero J. B., Ramos R.R. Homogenization of heterogeneous piezoelectric medium // Mechanics Research Communications. Volume 24, Issue 1, 1997, P. 75-84
105. Prager W. Variational principle for elastic plates with relaxed continuity requirements // Int. J. of Solids and Structures, V. 4, N. 9, 1968. P. 837-844.
106. Yuanwu Cai, Liang Xu, Gengdong Cheng. Novel numerical implementation of asymptotic homogenization method for periodic plate structures//International Journal of Solids and Structures, Volume 51, Issue 1, 2014, P. 284-292

107. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Springer Verlag, Berlin, 1980.
108. Sayyad A. S. Comparison of various refined beam theories for the bending and free vibration analysis of thick beams. Applied and Computational Mechanics, 5, 2011. P. 217–230.
109. Ženíšek A. Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method // Journal Of Approximation Theory 7, 1973. P. 334-351
110. Ženíšek A. A general theorem on triangular finite Cm-elements // RAIRO Numer. Anal. 8, 1974. P. 119-127.