

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи



Пичугина Анна Евгеньевна

**Моделирование термоупругого деформирования тонких композитных
оболочек на основе асимптотической теории**

ДИССЕРТАЦИЯ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор
Димитриенко Ю.И.

Москва, 2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Вывод уравнений тонких термоупругих композитных оболочек на основе асимптотической теории	12
1.1 Геометрическая модель оболочки.....	12
1.2. Система уравнений термоупругости для многослойной оболочки....	14
1.3 Модель тонкой оболочки	19
1.4. Постановка задачи квазистатической термоупругости для тонкой многослойной оболочки	21
1.5 Асимптотические разложения решения задачи для тонкой оболочки	23
1.6 Формулировка локальных задач для тонких оболочек.....	25
1.7 Решение локальной задачи нулевого приближения.....	29
1.8 Решение локальных задач L_n высших приближений	30
1.9 Выражение решения первого приближения через нулевое приближение	32
1.10 Выражение решения второго приближения через нулевое приближение.....	36
1.11 Выражение решения третьего приближения через нулевое приближение.....	43
1.12 Выражение для компонент полного тензора напряжений	45
1.13 Осредненные уравнения равновесия многослойных оболочек.	48
1.14 Осредненные определяющие соотношения теории оболочек	51
1.15 Осредненная система уравнений термоупругости для многослойных оболочек	51
1.16 Граф связи формул для вычисления компонент тензоров, необходимых для расчета всех компонент тензора напряжений.....	54
2. Асимптотическая теория термоупругости тонких цилиндрических оболочек	56
2.1 Геометрические соотношения для цилиндрических оболочек.....	56

2.2	Осредненная система уравнений теории термоупругости цилиндрических оболочек.....	57
2.3	Соотношения для вычисления напряжений в цилиндрической оболочке	59
3.	Решение задач термоупругости для цилиндрических композитных многослойных оболочек на основе асимптотической теории.....	63
3.1	Постановка задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической композитной оболочки при воздействии неравномерного нагрева и давления .	63
3.2	Алгоритм решения задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической композитной оболочки при воздействии неравномерного нагрева и давления	66
3.3	Решение задачи для случая жесткого закрепления	71
3.4	Решение задачи для случая шарнирного закрепления.....	73
3.5	Напряжения в цилиндрической оболочке при осесимметричном изгибе и неравномерном нагреве	74
3.6	Численный алгоритм решения нестационарной задачи теплопроводности	76
3.7	Расчет характеристик композиционного материала цилиндрической оболочки.....	77
3.8	Результаты численных расчетов для случая жестко закрепленных торцов цилиндрической оболочки из КМ-1 без нагрева.....	80
3.9	Результаты численных расчетов для случая жестко закрепленных торцов цилиндрической оболочки из КМ-2 без нагрева.....	92
3.10	Результаты численных расчетов для случая совместного воздействия нагрева и давления	101
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ.....	115
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	117
	СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА	126

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные оболочки из различных материалов являются основой современных строительных конструкций: зданий, мостов, корпусов автомобилей, самолетов и кораблей, ракет, спутников и других объектов [39-41,53]. Несмотря на появление в последнее время мощных вычислительных средств, позволяющих решать задачи теории упругости и термоупругости в общей трехмерной постановке для конструкций сложной формы, интерес к решению задач в двумерной постановке для оболочек не пропадает.

Очевидные преимущества двумерных постановок: снижение размерности задачи, отсутствие необходимости детального построения конечно-элементных сеток по толщинной координате для достижения приемлемой точности расчета напряжений сохраняются в настоящее время и, по-видимому, будут актуальны еще долгое время.

В настоящее время существует большое число различных теорий оболочек [1-5,7-11,15-18,19-21,23,26-28,37,38,42-44,48,49,50,51,53,55,57,59-61,65,69,72-77,81,85-96], в которых используются некоторая система допущений относительно характера распределения перемещений и деформаций или напряжений по толщине.

Классическими и исторически первыми теориями оболочек являются теории Кирхгофа-Лява [52] и Тимошенко [70]. Как известно, теория Кирхгофа-Лява основана на гипотезе о недеформируемости нормали к срединной поверхности. Если ввести систему координат X^i , связанную с главными кривизнами срединной поверхности оболочки и нормалью к ней (толщинная координата X^3), а все компоненты перемещений u_α , деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} рассмотреть в ортонормированном базисе, связанном с координатами X^i , то из гипотезы о недеформируемости нормали к срединной поверхности следует, что три компоненты тензора деформации ε_{i3} , $i = 1, 2, 3$ обращаются в ноль. Этот результат в совокупности с допущением о том, что метрика в оболочке мало изменяется по

координате X^3 в рамках теории малых деформаций приводит к тому, что две продольные компоненты вектора перемещений оболочки линейно зависят от X^3 , а поперечная компонента (прогиб) не зависит от X^3

$$u_\alpha = U_\alpha + X^3 \gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad u_3 = W, \quad (0.1)$$

где все пять функций

$$U_1, U_2, \gamma_1, \gamma_2, W \parallel X^1, X^2 \quad (0.2)$$

зависят только от X^1 и X^2 .

В теории Кирхгофа-Лява углы поворота нормали γ_α не являются независимыми, а выражаются через W и U_α [9,18,52].

В теории Тимошенко вводится более слабое дополнительное допущение – об отсутствии только поперечной деформации ε_{33} , а сдвиговые деформации $\varepsilon_{\alpha 3}$ обычно полагают не нулевыми, но не меняющимися по X^3 [18,53]. В этом случае соотношения (0.1) о линейном характере распределения перемещений оболочки по толщинной координате X^3 также имеют место, но углы поворота γ_α являются уже независимыми неизвестными [14,23,26,53].

Обе теории оболочек Кирхгофа-Лява и Тимошенко получили широкое распространение в методах расчета тонкостенных конструкций и дают достаточно точные результаты в рамках соблюдения тех допущений, на которых они основаны. Теория Кирхгофа-Лява наиболее широко применяется для расчета конструкций из однородных жестких материалов (металлов и сплавов), а теория Тимошенко – активно применяется для расчета конструкций расчета из неоднородных материалов: многослойных оболочек [10,14], композиционных материалов, для которых характерна пониженная жесткость на межслойный сдвиг по сравнению с продольными модулями упругости.

Наибольшие сложности при расчете оболочек возникают с определением компонент тензора напряжений. При построении теории Кирхгофа-Лява для изотропных сред все три компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ полагаются нулевыми [18]. В теории Тимошенко касательные напряжения $\sigma_{\alpha 3}$ отличны от нуля и являются линейными функциями по X^3 , поперечным же напряжением σ_{33} в классическом варианте этой теории обычно пренебрегают.

Для большого класса прикладных задач напряжения $\sigma_{\alpha 3}$ и σ_{33} не играют большой роли, и ими можно пренебречь, в этом случае классические варианты теории оболочек Кирхгофа-Лява и Тимошенко позволяют достаточно точно вычислять напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций. Однако для некоторых специальных классов прикладных задач, особенно связанных с расчетом оболочек из композитов [12, 46, 47], необходим детальный анализ всех 6 полей напряжений, включая поперечные нормальные напряжения σ_{33} и межслойные напряжения $\sigma_{\alpha 3}$. К числу таких задач относятся задачи расчета термонапряжений в композитных оболочках при неравномерном по толщине нестационарном нагреве [17, 45, 99], расчета теплозащитных элементов конструкций [23], расчета диссипации энергии конструкций, разрушения конструкций [66] и другие задачи. Результаты расчета напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ и σ_{33} , которые получаются при использовании классических теорий Кирхгофа-Лява и Тимошенко оказываются не удовлетворительными для этих классов задач: с помощью решения некоторых стандартных задач 3-х мерной теории упругости установлено, что распределение межслойных напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ по толщинной координате является не линейным, а параболическим [14] для однородных материалов, или более еще сложным для многослойных материалов [21].

В связи с этим попытки модификации классических теорий пластин и оболочек, направленные на получение уточненных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния тонких тел, продолжают быть востребованными, так как применение трехмерной точной теории упругости для

решения задач расчета оболочек из композитных материалов приводит к чрезвычайно большим объемам вычислений [36].

Существует достаточно большое число различных теорий оболочек, являющихся модификациями или аналогами теории Тимошенко [14,10,11,13-15,21,23,42-44,53-56,61,72-77,88-96]. Одной из проблем, которую приходится преодолевать при попытке создать обобщение теории Тимошенко и найти удовлетворительные формулы для напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ и σ_{33} , является проблема непротиворечивости сделанных допущений. Например, если вначале принять допущения классической теории Тимошенко для тонких пластин, построить двумерные уравнения этой теории, а затем вновь вернуться к исходным трехмерным уравнениям равновесия теории упругости, подставить в них линейные зависимости по X^3 для продольных напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, и проинтегрировать эти уравнения по координате X^3 , то можно получить достаточно точные выражения для напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ и σ_{33} , в том числе параболическое распределение напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ по X^3 . Однако такой подход будет логически противоречив, поскольку вначале делается допущение о линейности напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ от X^3 , а затем доказывается, что эта зависимость является параболической. Существуют различные подходы, которые позволяют преодолеть указанные противоречия, однако они основаны на тех или иных допущениях относительно распределения перемещений и напряжений, или, например, на приближенном удовлетворении части определяющих соотношений для напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ и σ_{33} [21].

Существуют теории оболочек, основанные на отказе от допущений (0.1) о линейности распределения перемещений по толщине оболочки и применении более сложных зависимостей от X^3 , например полиномиальных [3,4], или в виде в виде специальных функций [57,58,71,96]. Одной из проблем, которые возникают при таких подходах, является повышенный порядок производных в системе двумерных уравнений, который неизбежно возникает в этих методах.

Наиболее перспективными на сегодняшний день для построения логически непротиворечивой теории пластин и оболочек, сохраняющими все преимущества классических теорий Кирхгофа-Лява и Тимошенко, по-видимому, являются различные асимптотические теории, в которых используются асимптотические разложения исходных трехмерных уравнений теории упругости по малому геометрическому параметру, представляющему отношение толщины оболочки к ее характерному размеру в плане.

Существует несколько разновидностей асимптотического метода [2,28-36,54,55,75-77,80,81,90-93,95], в частности, в работе [55] используется вариант, в котором допускается существование асимптотических разложений при отрицательных степенях от малого параметра. В работе [28], по-видимому, впервые был использован метод асимптотических разложений без отрицательных степеней малого параметра, в котором удалось получить замкнутые аналитические решения так называемых локальных задач, что позволило получить осредненные двумерные уравнения теории пластин, аналогичные классическим уравнениям Кирхгофа-Лява для изотропного случая, но без использования допущений (0.1) и гипотезы о недеформируемости нормали. Соотношения (0.1) были выведены в ходе асимптотических разложений из общей трехмерной теории, тем самым фактически было была показана математическая обоснованность классической теории Кирхгофа-Лява, при этом были получены и выражения для всех 6 компонент тензора напряжений, с сохранением параболического распределения для напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ от X^3 . В работе [36] представлено сравнение результатов расчётов по асимптотической и трёхмерной теории. Показательным является то, что при меньших затратах ресурсов вычислителя асимптотическая теория даёт высокоточные расчёты.

Указанный вариант метода асимптотических разложений успешно использован для разработки различных теорий пластин: упругих [28], термоупругих [35], с учетом термоползучести, конструктивно-ортотропных, вязкоупругих.

Целью настоящей диссертации является обобщение данного варианта метода асимптотических разложений на случай тонких композитных многослойных термоупругих оболочек произвольной кривизны для случая малых деформаций.

Актуальность темы обоснована широким применением тонкостенных конструкций из композиционных материалов в различных областях, в первую очередь в авиации, судостроении, атомной технике; в том числе из композиционных материалов изготавливают теплонагруженные тонкостенные конструкции. Для них актуальны задачи точного расчета этих конструкций, когда важную роль играют эффекты в поперечном направлении, а также напряжения межслойного сдвига.

Объектом исследования являются методы расчета термоупругого деформирования тонких композиционных оболочечных конструкций, при совместном воздействии механических нагрузок и нестационарного нагрева.

Цель диссертационной работы состоит в применении метода асимптотических разложений для построения двумерных уравнений теории тонкостенных оболочек из композиционных материалов, исходя из общих трехмерных уравнений термоупругости.

Задачами настоящей работы являются:

- разработка варианта уравнений тонкостенных композитных оболочек на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений термоупругости;
- решение локальных задач термоупругости, возникающих в асимптотической теории;
- разработка аналитических соотношений для вычисления полного тензора напряжений для тонкостенных композиционных оболочек методом асимптотических разложений;
- вывод уравнений термоупругости для случая цилиндрических тонкостенных оболочек;

– решение частной задачи об осесимметричном изгибе и нестационарном нагреве цилиндрической композитной оболочки, проведение численного моделирования термонапряжений в тонких цилиндрических оболочках, в качестве примера применения разработанного метода.

Методы исследования. В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

- метод асимптотических разложений уравнений в частных производных;
- аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка;
- численные методы интегрирования.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

- разработка варианта асимптотической теории для тонкостенных композитных многослойных термоупругих оболочек;
- выражения для полных компонент тензора напряжений в оболочках, полученные с помощью асимптотической теории.

Практическая значимость диссертационной работы. Метод расчета тонкостенных композитных оболочек, основанный на асимптотической теории, может быть использован при термопрочностных расчетах и проектировании элементов конструкций из композиционных материалов, применяемых в самолетостроении, двигателестроении, ракетостроении, строительстве и других отраслях промышленности, в которых применяются композиционные материалы.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на:

Всероссийской студенческой конференции «СТУДЕНЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ ВЕСНА - 2017», посвящённой 170-летию со дня рождения Н.Е. Жуковского, Москва 2017 г,

Всероссийской студенческой конференции «СТУДЕНЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ ВЕСНА», посвященной 165-летию со дня рождения В.Г. Шухова», Москва 2018 г.

Международной конференции «International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences», August 27-31, 2018, Moscow, Russia;

Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 5-8 декабря 2018;

2-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 20-21 ноября 2019;

Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (ФАРМ-2019), 10-12 декабря, МГТУ им Баумана

3-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2020;

4-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 1-3 декабря 2021;

5-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2022;

научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (Москва, 2018-2022 гг.).

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы 8 публикаций [29-32,62,82-84], в том числе 6 в изданиях из списка ВАК [29,31,32,82-84] и 3 статьи [82-84] в журналах, индексируемых в Scopus.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, 3 разделов, выводов и списка литературы из 100 наименований. Работа изложена на 129 листах, содержит 53 рисунка.

1. Вывод уравнений тонких термоупругих композитных оболочек на основе асимптотической теории

1.1 Геометрическая модель оболочки

Следуя [18, 26], оболочкой назовем область $V \subset \mathcal{E}_3^\alpha$ трехмерного евклидова пространства \mathcal{E}_3^α , если для нее можно ввести ортогональные (вообще говоря, криволинейные) координаты X^i , в которых это тело представляет собой окрестность V_h двумерной поверхности Σ_0 [26].

На рисунке 1.1. показана Σ_0 – срединная поверхность оболочки.

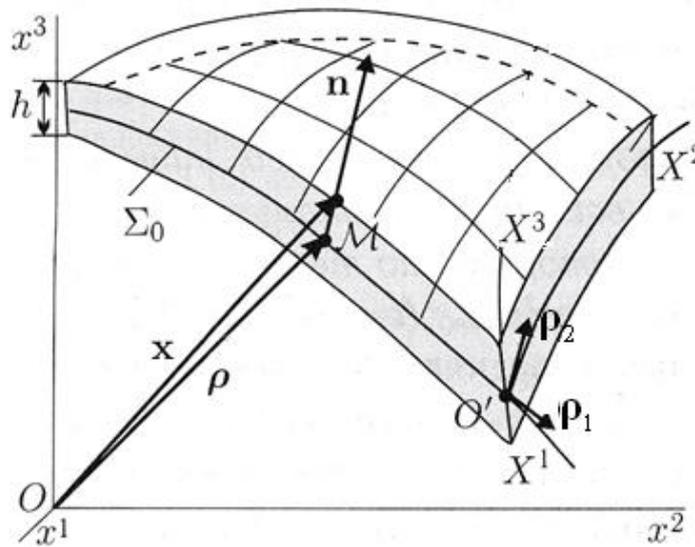


Рисунок 1.1 – Геометрическая модель оболочки

Уравнения этой поверхности имеют вид:

$$\Sigma_0: \quad x^i = x^i(X^I), \quad X^I \in \Sigma_{X^0}, \quad I=1,2, \quad i=1,2,3 \quad (1.1)$$

$$V_h = \{x^i : x^i = x^i(X^I), \quad X^I \in \Sigma_{X^0}, \quad -\frac{h}{2} < X^3 < \frac{h}{2}\}.$$

Здесь Σ_{X^0} – область в пространстве координат X^i , являющаяся прообразом срединной поверхности Σ_0 , h – толщина оболочки.

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами $I, J, K, L, M, \alpha, \beta$ принимают значения 1,2, причём $\alpha \neq \beta$, а индексы i, j, k, l - значения 1,2,3.

Радиус-вектор точки M , принадлежащей срединной поверхности Σ_0 оболочки и точки M' , принадлежащей оболочке V_h , можно представить в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(X^I) = x^i(X^I)\bar{\mathbf{e}}_i, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(X^j) = x^i(X^j)\bar{\mathbf{e}}_i,$$

где $\bar{\mathbf{e}}_i$ – декартов ортонормированный базис в пространстве координат x^i . Дифференцируя формулы (1.2) по X^i , находим векторы локального базиса для срединной поверхности и для всей оболочки [25]:

$$\boldsymbol{\rho}_I = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^I}, \quad \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i}, \quad (1.3)$$

с помощью которых введём метрическую матрицу на срединной поверхности \tilde{g}_{IJ} размером 2×2 и метрическую матрицу g_{ij} размером 3×3 в оболочке:

$$\tilde{g}_{IJ} = \boldsymbol{\rho}_I \cdot \boldsymbol{\rho}_J, \quad g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j. \quad (1.4)$$

Ввиду ортогональности координат X^i обе эти матрицы будут диагональными:

$$\tilde{g}_{IJ} = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \det(\tilde{g}_{IJ}), \quad (1.5)$$

где $A_\alpha = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\alpha}}$ – коэффициенты Ламе срединной поверхности, $H_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ – коэффициенты Ламе оболочки.

Вектор нормали $\mathbf{n}(X^I)$ к срединной поверхности определяем по формуле:

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{\tilde{g}})\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2. \quad (1.6)$$

Радиус-вектор точек M' , принадлежащих оболочке, согласно определению (1.1) окрестности V_h поверхности Σ_0 [25], можно представить следующим образом:

$$\mathbf{x}(X^i) = \boldsymbol{\rho}(X^i) + X^3 \mathbf{n}(X^i), \quad (1.7)$$

где координата X^3 для оболочек постоянной толщины принимает значение в диапазоне $-h/2 < X^3 < h/2$.

Введем также ортонормированный базис [25]

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\mathbf{r}_\alpha}{H_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

1.2. Система уравнений термоупругости для многослойной оболочки

Рассмотрим для оболочки $V = V_h$ квазистатическую задачу линейной теории термоупругости в рамках малых деформаций в тензорной (безындексной) форме [26]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = 0, \quad \varepsilon V \quad (1.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\alpha} \Delta \theta, \quad \varepsilon V \cup \Sigma \quad (1.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \nabla \otimes \mathbf{u}^T), \quad \varepsilon V \cup \Sigma \quad (1.11)$$

$$\rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad \varepsilon V \quad (1.12)$$

$$-\mathbf{q} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}, \quad \varepsilon V \cup \Sigma \quad (1.13)$$

$$\mathbf{g} = \nabla \theta, \quad \varepsilon V \cup \Sigma \quad (1.14)$$

$$\Sigma_{3\pm} : \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\tilde{p}_\pm \mathbf{n}, \quad \Sigma_{Tu} : \mathbf{u} = \mathbf{u}_e \quad \Sigma_{T\sigma} : \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_{ne} \quad (1.15)$$

$$\Sigma_s : \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0 \quad (1.16)$$

$$\Sigma_{3\pm} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \pm q_{e\pm}; \quad \Sigma_T : \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0; \quad (1.17)$$

$$\Sigma_s : \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}] = 0, \quad [\theta] = 0 \quad (1.18)$$

$$t = 0: \quad \theta = \theta_0 \quad (1.19)$$

где (1.9) – уравнения равновесия, (1.10) – обобщенный закон Гука, (1.11) – соотношения Коши, (1.12) – уравнение теплопроводности, (1.13) – закон Фурье, (1.15), (1.17) – граничные условия, (1.16), (1.18) – условия идеального контакта, (1.19) – начальные условия, \mathbf{C} – тензор модулей упругости, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор малых деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ – тензор тепловых деформаций, $\boldsymbol{\alpha}$ – тензор теплового расширения, θ – температура, $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ – перепад температур, θ_0 – начальная температура, \mathbf{u} – вектор перемещений, \mathbf{n} – вектор нормали, ρ – плотность, c_v – удельная теплоемкость, \mathbf{f} – вектор плотности массовых сил, $\boldsymbol{\lambda}$ – тензор теплопроводности, \mathbf{q} – вектор теплового потока, \mathbf{g} – градиент температуры, \mathbf{u}_e – заданный на части Σ_{Tu} торцевой поверхности вектор перемещений, \mathbf{t}_{ne} – вектор напряжений, заданный на оставшейся торцевой части $\Sigma_{T\sigma}$ поверхности ($\Sigma_T = \Sigma_{T\sigma} \cup \Sigma_{Tu}$), $q_{e\pm}$ – заданный тепловой поток на поверхностях Σ_{\pm} оболочки, \tilde{p}_{\pm} – давление, заданное на внешней и внутренней поверхностях Σ_{\pm} оболочки, где

$$\Sigma_{\pm} = \left\{ X^3 = \pm \frac{h}{2}, X^I \in \Sigma_0 \right\} \quad (1.20)$$

Оболочка предполагается многослойной (с числом слоев S), границы раздела слоев имеют вид

$$\Sigma_s = \{ X^3 = X_s^3, X^I \in \Sigma_0 \}, \quad s = 1, \dots, S-1, \quad (1.21)$$

где X_s^3 – координаты раздела слоев $-h/2 \leq X_s^3 \leq h/2$. На поверхностях раздела слоев Σ_s задаются условия идеального контакта (1.16), (1.18), $[u_i]$ – скачок функций.

Тензор модулей упругости \mathbf{C} , тензор теплопроводности λ , тензор теплового расширения α , плотность ρ и теплоемкость c_v для разных слоев оболочки различны, их можно считать функциями координаты X^3 .

Компоненты всех указанных выше тензоров и векторов в ортонормированном базисе \mathbf{e}_i (1.8) обозначим

$$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, \varepsilon_{ij}^T, q_i, g_i, C_{ijkl}, \lambda_{ij}, \alpha_{ij}. \quad (1.22)$$

Обозначим через L характерный линейный размер срединной поверхности Σ_0 оболочки, который может быть введен, например, следующим образом

$$L = \text{diam}\Sigma_0 = \max_{X_0^I, X_1^I \in \Sigma_0} \left\{ \sum_{I=1}^2 |X_0^I - X_1^I|^2 \right\}. \quad (1.23)$$

Для цилиндрической оболочки в качестве L может быть выбран радиус срединной поверхности R или ее длина L_0 .

Введем безразмерные компоненты скаляров, векторов и тензоров, участвующих в (1.9) – (1.19) и (1.22)

$$\bar{p}_{\pm} = \tilde{p}_{\pm} / E_0, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{L}, \quad \bar{u}_{ei} = \frac{u_{ei}}{L}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E_0}, \quad \bar{C}_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{E_0}, \quad \bar{t}_{nei} = \frac{t_{nei}}{E_0} \quad (1.24)$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{c}_v = \frac{c_v}{c_0}, \quad (1.25)$$

$$\bar{\lambda}_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_0}, \quad \bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \theta_0, \quad \bar{q}_i = \frac{q_i L}{\lambda_0 \theta_0}, \quad \bar{g}_i = \frac{g_i L}{\theta_0} \quad (1.26)$$

где введены характерные значения: E_0 – модуля упругости, θ_0 – температуры, λ_0 – теплопроводности, ρ_0 – плотности, c_0 – теплоемкости, t_0 – времени. Введем также безразмерный параметр Фурье

$$F_0 = \frac{\lambda_0 t_0}{\rho_0 c_0 L^2}. \quad (1.27)$$

Координаты X^i будем полагать имеющими размерность длины, тогда $\bar{X}^i = X^i / L$ являются безразмерными, так же, как и параметры Ламе H_i .

Запишем систему уравнений (1.9) – (1.19) в компонентах в базисе \mathbf{e}_i (1.8). При этом будем использовать безразмерную форму записи с учетом (1.24) – (1.26). При таком способе обезразмеривания безразмерные уравнения отличаются от размерных уравнений только чертой сверху у соответствующих неизвестных и координат X^i . Это позволяет далее опустить эту черту, что и будем далее делать. Тогда в криволинейных координатах X^i уравнения равновесия (1.9) оболочки имеют вид [26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^\alpha} (H_\beta H_3 \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial X^\beta} (H_\alpha H_3 \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial X^3} (H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha 3}) - \sigma_{\beta\beta} H_3 \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\alpha} - \\ - \sigma_{33} H_\beta \frac{\partial H_3}{\partial X^\alpha} + \sigma_{\alpha\beta} H_3 \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} + \sigma_{\alpha 3} H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^3} + H_1 H_2 H_3 f_\alpha = 0; \end{aligned} \quad (1.28)$$

$\alpha, \beta = 1, 2$; , а также $\alpha \neq \beta$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^3} (H_1 H_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial X^1} (H_2 H_3 \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial X^2} (H_1 H_3 \sigma_{23}) - \sigma_{11} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial X^3} - \\ - \sigma_{22} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial X^3} + \sigma_{13} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial X^1} + \sigma_{23} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial X^2} + H_1 H_2 H_3 f_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Соотношения Коши (1.11), связывающие деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ композита с перемещениями u_α , в криволинейной системе координат X^α имеют вид [26]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial X^\alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} u_\beta + \frac{1}{H_\alpha H_3} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^3} u_3; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial X^3} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial X^1} u_1 + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial X^2} u_2; \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial X^2} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial X^1} \left(\frac{u_2}{H_2} \right); \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial X^3} - \frac{u_\alpha}{H_\alpha H_3} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^3} + \frac{H_3}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \left(\frac{u_3}{H_3} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Определяющие соотношения (1.10) оболочки, связывающие деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$, с учетом (1.24) – (1.26) имеют следующий вид в криволинейной системе координат X^α :

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ} &= C_{IJKL}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{KL}^T) + C_{IJ33}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^T) + 2C_{IJK3}(\varepsilon_{K3} - \varepsilon_{K3}^T); \\ \sigma_{I3} &= C_{I3KL}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{KL}^T) + C_{I333}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^T) + 2C_{I3K3}(\varepsilon_{K3} - \varepsilon_{K3}^T); \\ \sigma_{33} &= C_{33KL}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{KL}^T) + C_{3333}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^T) + 2C_{33K3}(\varepsilon_{K3} - \varepsilon_{K3}^T); \\ \varepsilon_{ij}^T &= \alpha_{ij}\Delta\theta\end{aligned}\quad (1.31)$$

Граничные условия (1.15) и (1.16) в компонентах имеют вид:

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\tilde{p}_\pm \delta_{i3}; \quad \Sigma_{Tu} : u_i = u_{ei}; \quad \Sigma_{T\sigma} : \sigma_{ij} n_j = t_{nei} \quad (1.32)$$

$$\Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0; \quad [u_i] = 0. \quad (1.33)$$

Уравнение теплопроводности (1.12) в криволинейных координатах после обезразмеривания принимает вид (черта сверху опущена)

$$\frac{\rho c_v}{Fo} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(H_2 H_3 \frac{\partial q_1}{\partial X^1} + H_1 H_3 \frac{\partial q_2}{\partial X^2} + H_1 H_2 \frac{\partial q_3}{\partial X^3} \right). \quad (1.34)$$

Закон Фурье (1.13) в компонентах с учетом (1.24) – (1.26) принимает вид

$$-q_I = \lambda_{IJ} g_J + \lambda_{I3} g_3; \quad -q_3 = \lambda_{3J} g_J + \lambda_{33} g_3; \quad (1.35)$$

а соотношение (1.14) – следующий вид:

$$g_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial X^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.36)$$

Граничные условия (1.17), (1.18) в компонентах имеют вид

$$\Sigma_{3\pm} : \quad q_3 = \pm q_{e\pm}; \quad (1.37)$$

$$\Sigma_T : \quad q_I n_I = 0; \quad (1.38)$$

$$\Sigma_S : \quad [q_3] = 0, \quad [\theta] = 0. \quad (1.39)$$

1.3 Модель тонкой оболочки

Введем отношение толщины оболочки h к характерному размеру L , которое будем полагать далее малым геометрическим параметром

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1. \quad (1.40)$$

Это основное допущение № 1 асимптотической теории тонких тел [28-36]. Оболочку, для которой введено допущение (1.40), будем называть *тонкой*.

Введем кроме безразмерных ортогональных координат $\bar{X}^i = X^i / L$, называемых глобальными, еще и локальную ξ координату по толщине оболочки:

$$\xi = \bar{X}^3 / \varepsilon. \quad (1.41)$$

Далее, как было отмечено в 1.2, черту сверху над безразмерными координатами \bar{X}^i будем опускать.

Координаты раздела слоев с помощью локальной переменной обозначим как $\xi = \xi_s$, $s = 1, \dots, S-1$, тогда поверхности раздела слоев можно записать следующим образом:

$$\Sigma_s = \{\xi = \xi_s, X^I \in \Sigma_0\}, \quad s = 1, \dots, S-1,$$

причем $\xi_0 = -0.5$, $\xi_S = 0.5$, а области каждого слоя V_{ξ_s} запишутся таким образом

$$V_{\xi_s} = \{\xi_{s-1} < \xi < \xi_s, X^I \in \Sigma_0\}, \quad s = 1, \dots, S.$$

Все функции, являющиеся решением задачи термоупругости (1.28) – (1.39), (1.19) будем рассматривать как зависящие от двумерных глобальных координат и локальной координаты:

$$u_i = u_i(X^\alpha, \xi), \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.42)$$

Согласно общей концепции асимптотических методов, основанных на введении двух масштабов изменения решений дифференциальных уравнений в частных производных [6,62,64,68,98], будем полагать выполненным следующее правило дифференцирования функций вида (1.42), которое вытекает из (1.41):

$$\frac{\partial u_i}{\partial X^3} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \quad (1.43)$$

Для тонких оболочек примем допущения [14,18,52,53] о малости изменения метрики по толщине оболочки, которые с помощью введенных обозначений запишем в следующем виде:

$$H_3 = 1, \quad H_\alpha = A_\alpha (1 + \varepsilon k_\alpha \xi) \approx A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial \xi} = \varepsilon A_{\alpha 3}, \quad A_{\alpha 3} = A_\alpha k_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} = A_{\alpha, \beta} + \varepsilon (A_\alpha k_\alpha)_{, \beta} \approx A_{\alpha, \beta}$$

здесь k_α – безразмерные главные кривизны срединной поверхности Σ_0 оболочки, а $R_\alpha = 1/k_\alpha$ – безразмерные главные радиусы кривизны срединной поверхности.

В модель тонких оболочек входит допущение о том, что соотношения (1.44) и (1.45) применяются к основным дифференциальным уравнениям (1.28) – (1.30), (1.34) в том виде, как они записаны.

Введем обозначения для производных:

$$u_{i/3} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi}, \quad u_{i, \alpha} = \frac{\partial u_i}{\partial X^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.46)$$

А также обозначим

$$O_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} = \frac{1}{A_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.47)$$

– обратный параметр Ламе.

Следуя [35], введем допущения № 2 об условиях нагрева

$$Fo = \varepsilon^2 Fo_0, \quad q_{e\pm} = \frac{1}{\varepsilon} q_{\pm}^{(-1)} \quad (1.48)$$

где Fo_0 и $q_{\pm}^{(-1)}$ – величины порядка $O(1)$. Это допущение означает, что нагрев рассматривается на относительно коротких временах, когда распределение температурного поля по толщине оболочки является существенно неравномерным.

Введем также допущение № 3, которое заключается в том, что векторы напряжений $\mathbf{t}_{n\pm}$ на внутренней и внешней поверхностях заданы в виде давления \tilde{p}_{\pm} , которое имеет порядок малости $O(\varepsilon^3)$ т.е.

$$\mathbf{t}_{n\pm} = -\tilde{p}_{\pm} \mathbf{n}, \quad \tilde{p}_{\pm} = \varepsilon^3 p_{\pm}. \quad (1.49)$$

Это допущение, как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких оболочек.

Перемещения u_{ei} на торцевой поверхности Σ_{Ti} полагаем не зависящими от толщинной координаты ξ .

1.4. Постановка задачи квазистатической термоупругости для тонкой многослойной оболочки

Применим к уравнениям равновесия (1.28), (1.29) допущения (1.44), (1.45) тонкой оболочки с учетом обозначений (1.46), тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} A_1 A_2 \sigma_{\alpha 3/3} + (A_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (A_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \\ & - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta} + A_{\beta} A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3} + A_1 A_2 \rho f_{\alpha} = 0; \\ & \frac{1}{\varepsilon} A_1 A_2 \sigma_{33/3} + (A_2 \sigma_{13})_{,1} + (A_1 \sigma_{23})_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11} - \\ & - A_1 A_{23} \sigma_{22} + A_1 A_2 \rho f_3 = 0; \end{aligned} \quad (1.50)$$

Соотношения Коши (1.30) для тонкой оболочки принимают вид

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} u_\beta + O_\alpha A_{\alpha 3} u_3,$$

$$2\varepsilon_{12} = A_1 O_2 (u_1 O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u_2 O_2)_{,1} \quad (1.51)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{\varkappa} u_{\alpha/3} + O_\alpha (u_{3,\alpha} - A_{\alpha 3} u_\alpha), \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{\varkappa} u_{3/3}.$$

Уравнение теплопроводности (1.34) с учетом (1.44), (1.45) и (1.48) для тонкой оболочки принимает вид

$$\frac{\rho c_v}{\varkappa^2 \text{Fo}_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -O_1 O_2 \left(A_2 q_{1,1} + A_1 q_{2,2} + \frac{A_1 A_2}{\varkappa} q_{3/3} \right) \quad (1.52)$$

Слои оболочки далее полагаем моноклинными материалами [22], с главным базисом осей анизотропии, совпадающим с \vec{e}_α . Для моноклинных материалов компоненты тензора C_{ijkl} имеют следующую структуру [22]

$$(C_{ijkl}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{2212} \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{3312} \\ & & & 2C_{2323} & \sqrt{2}C_{2313} & 0 \\ \text{симм.} & & & & 2C_{1313} & 0 \\ & & & & & 2C_{1212} \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

Для моноклинных материалов слоев компоненты тензоров α_{kl} , λ_{kl} и ε_{ij}^T имеют следующий вид [22]

$$\alpha_{kl} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{kl} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{ij}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^T & \varepsilon_{12}^T & 0 \\ \varepsilon_{12}^T & \varepsilon_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

Тогда определяющие соотношения (1.31) для тонкой оболочки примут вид:

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL} (\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{KL}^T) + C_{IJ33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^T);$$

$$\sigma_{I3} = 2C_{I3K3}\varepsilon_{K3};$$

$$\sigma_{33} = C_{33KL}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{KL}^T) + C_{3333}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^T). \quad (1.55)$$

Закон Фурье (1.35) для моноклинных слоев оболочки принимает следующий вид:

$$-q_I = \lambda_{IJ}g_J; \quad -q_3 = \lambda_{33}g_3; \quad (1.56)$$

а соотношения для градиента температуры (1.36) для тонкой оболочки записываем так:

$$g_\alpha = O_\alpha \theta_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad g_3 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}. \quad (1.57)$$

Механические граничные условия (1.32), (1.33) с учетом (1.49) принимают вид:

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\varepsilon^3 p_\pm \delta_{i3}; \quad \Sigma_{Tu} : u_i = u_{ei}; \quad \Sigma_{T\sigma} : \sigma_{iJ} n_J = t_{nei}, \quad (1.58)$$

$$\Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0; \quad [u_i] = 0, \quad (1.59)$$

а тепловые граничные условия (1.37) – (1.39) с учетом (1.48) записываются в виде:

$$\Sigma_{3\pm} : \quad q_3 = \pm \frac{1}{\varepsilon} q_\pm^{(-1)} \quad (1.60)$$

$$\Sigma_T : q_I n_I = 0; \quad \Sigma_S : [q_3] = 0, \quad [\theta] = 0; \quad (1.61)$$

$$t = 0 : \quad \theta = \theta_0 \quad (1.62)$$

Здесь черта над безразмерными величинами опущена.

1.5 Асимптотические разложения решения задачи для тонкой оболочки

Уравнения (1.50) – (1.52), (1.57), (1.58), (1.60) содержат малый параметр ε , будем искать их решение в виде асимптотических разложений по параметру ε в виде функций (1.42), зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n u_{ij}^{(n)} = u_k^{(0)}(X^\alpha) + \mathfrak{a} u_k^{(1)}(X^\alpha, \xi) + \mathfrak{a}^2 u_k^{(2)}(X^\alpha, \xi) + \dots, \quad (1.63)$$

$$\theta = \theta^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n \theta^{(n)} = \theta^{(0)}(X^\alpha, \xi, t) + \mathfrak{a} \theta^{(1)}(X^\alpha, \xi, t) + \mathfrak{a}^2 \theta^{(2)}(X^\alpha, \xi, t) + \dots \quad (1.64)$$

Подставим разложения (1.63) в соотношения Коши (1.51), при этом используя правила дифференцирования функций локальных координат (1.43), получим асимптотические разложения для деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \mathfrak{a} \varepsilon_{ij}^{(1)} + \mathfrak{a}^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots \quad (1.65)$$

Тогда из формул (1.51) получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} &= O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} u_\beta^{(n)} + u_3^{(n)} A_{\alpha 3} O_\alpha, \\ 2\varepsilon_{12}^{(n)} &= A_1 O_2 (u_1^{(n)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u_2^{(n)} O_2)_{,1}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)},$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} = u_{\alpha/3}^{(n+1)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(n)} - O_\alpha A_{\alpha 3} u_\alpha^{(n)}.$$

Подставив (1.66) в определяющие соотношения (1.55), получаем асимптотическое разложения для напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(0)} + \mathfrak{a} \sigma_{ij}^{(1)} + \mathfrak{a}^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots \quad (1.67)$$

здесь

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJ33} \varepsilon_{33}^{(n)} - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(n)}, \quad (1.68)$$

$$\sigma_{I3}^{(n)} = 2C_{I3K3} \varepsilon_{K3}^{(n)}, \quad (1.69)$$

$$\sigma_{33}^{(n)} = C_{33KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{3333} \varepsilon_{33}^{(n)} - C_{33kl} \varepsilon_{kl}^{T(n)}, \quad (1.70)$$

где

$$\varepsilon_{ij}^{T(n)} = \alpha_{ij} \Delta \theta^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.71)$$

$$\Delta \theta^{(0)} = \theta^{(0)} - \theta_0, \quad \Delta \theta^{(n)} = \theta^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.72)$$

Подставляя (1.64) в (1.57), а затем в (1.56), получаем асимптотические разложения для градиента температуры и вектора теплового потока

$$g_i = \frac{1}{\varepsilon} g_i^{(-1)} + g_i^{(0)} + \varepsilon g_i^{(1)} + \varepsilon^2 g_i^{(2)} + \dots \quad (1.73)$$

$$q_i = \frac{1}{\varepsilon} q_i^{(-1)} + q_i^{(0)} + \varepsilon q_i^{(1)} + \varepsilon^2 q_i^{(2)} + \dots \quad (1.74)$$

где

$$g_\alpha^{(-1)} = 0, \quad g_3^{(-1)} = \theta_{/3}^{(0)}, \quad g_\alpha^{(n)} = O_\alpha \theta_{,\alpha}^{(n)}, \quad g_3^{(n)} = \theta_{/3}^{(n+1)}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (1.75)$$

$$-q_I^{(-1)} = 0, \quad -q_3^{(-1)} = \lambda_{33} g_3^{(-1)}, \quad -q_I^{(n)} = \lambda_{IJ} g_J^{(n)}, \quad -q_3^{(n)} = \lambda_{33} g_3^{(n)}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (1.76)$$

1.6 Формулировка локальных задач для тонких оболочек

Подставляя разложения (1.63), (1.65), (1.67) в уравнения равновесия (1.50) и граничные условия (1.58), получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} N_\alpha^{(-1)} + N_\alpha^{(0)} + \varepsilon N_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 N_\alpha^{(2)} + \dots = 0; \\ \frac{1}{\varepsilon} N_3^{(-1)} + N_3^{(0)} + \varepsilon N_3^{(1)} + \varepsilon^2 N_3^{(2)} + \dots = 0; \end{cases} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{i3}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{i3}^{(2)} + \dots &= -\varepsilon^3 p_\pm \delta_{i3}; \\ \Sigma_T : u_i &= u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + \varepsilon^2 u_i^{(2)} + \varepsilon^3 u_i^{(3)} + \dots = u_{ei}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

В формулах (1.77) обозначены следующие величины:

$$\begin{aligned} N_\alpha^{(-1)} &= A_1 A_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(0)}, & N_3^{(-1)} &= A_1 A_2 \sigma_{33/3}^{(0)}; \\ N_\alpha^{(n)} &= \left(A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n)} \right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} \right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n)} + A_\beta A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n)} + \\ &\quad + A_1 A_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(n+1)} + A_\beta f_\alpha^{(n)} \\ N_3^{(n)} &= \left(A_2 \sigma_{13}^{(n)} \right)_{,1} + \left(A_1 \sigma_{23}^{(n)} \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n)} + \\ &\quad + A_1 A_2 \sigma_{33/3}^{(n+1)} + A_1 A_2 f_3^{(n)} \\ f_3^{(0)} &= f_3, \quad f_\alpha^{(0)} = f_\alpha, \quad f_3^{(n)} = 0, \quad f_\alpha^{(n)} = 0, \quad n > 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Подставляя разложения (1.64), (1.73), (1.74) в уравнение теплопроводности (1.52) и граничные условия (1.60), (1.61) и начальное условие (1.62), получим:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} N_0^{(-2)} + \frac{1}{\varepsilon} N_0^{(-1)} + N_0^{(0)} + \varepsilon N_0^{(1)} + \varepsilon^2 N_0^{(2)} + \dots = 0; \quad (1.80)$$

$$\Sigma_{3\pm} : \frac{1}{\varepsilon} (q_3^{(-1)} \mp q_{e\pm}) + q_3^{(0)} + \varepsilon q_3^{(1)} + \varepsilon^2 \dots = 0; \quad (1.81)$$

$$\Sigma_T : \left(\frac{1}{\varepsilon} q_I^{(-1)} + q_I^{(0)} + \varepsilon q_I^{(1)} + \varepsilon^2 \dots \right) n_I = 0 \quad (1.82)$$

$$t = 0: \quad \theta^{(0)} + \varepsilon \theta^{(1)} + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \dots = \theta_0 \quad (1.83)$$

В формулах (1.80) обозначены следующие величины:

$$N_0^{(-2)} = \frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} + q_{3/3}^{(-1)},$$

$$N_0^{(-1)} = \frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} + q_{3/3}^{(0)}$$

$$N_0^{(0)} = \frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial t} + O_1 O_2 (A_2 q_{1,1}^{(0)} + A_1 q_{2,2}^{(0)}) + q_{3/3}^{(1)} \quad (1.84)$$

$$N_0^{(n)} = \frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(n+2)}}{\partial t} + O_1 O_2 (A_2 q_{1,1}^{(n)} + A_1 q_{2,2}^{(n)}) + q_{3/3}^{(n+1)}, \quad \Delta \theta^{(n)} = \theta^{(n)}, n = 1, 2, \dots$$

Приравнявая в уравнениях равновесия (1.50) и в уравнении теплопроводности (1.52) члены при отрицательных степенях ε к нулю, а при остальных степенях ε – к некоторым величинам $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, \dots$ и $h_0^{(0)}, h_0^{(1)}, h_0^{(2)}$, не зависящим от ξ , получим рекуррентную последовательность локальных задач термоупругости.

Локальная задача термоупругости нулевого приближения при $n = 0$ имеет вид:

$$\frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} = -q_{3/3}^{(-1)} \quad (1.85)$$

$$-q_3^{(-1)} = \lambda_{33} g_3^{(-1)}, \quad g_3^{(-1)} = \theta_{/3}^{(0)} \quad (1.86)$$

$$\sigma_{i3/3}^{(0)} = 0; \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(0)} &= C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJ33} \varepsilon_{33}^{(0)} - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \\ \sigma_{I3}^{(0)} &= 2C_{I3K3} \varepsilon_{K3}^{(0)}, \\ \sigma_{33}^{(0)} &= C_{33KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3333} \varepsilon_{33}^{(0)} - C_{33kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \end{aligned} \quad (1.88)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} &= O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(0)} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(0)} + A_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(0)}; \\ 2\varepsilon_{12}^{(0)} &= A_1 O_2 (u_1^{(0)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u_2^{(0)} O_2)_{,1}; \\ \varepsilon_{33}^{(0)} &= u_{3/3}^{(1)}; \\ 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(0)} &= u_{\alpha/3}^{(1)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} O_\alpha u_\alpha^{(0)}; \end{aligned} \quad (1.89)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} &= 0; \\ \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(0)}] &= 0; [u_i^{(1)}] = 0; \\ < u_i^{(1)} > &= 0 \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$\Sigma_{3\pm} : q_3^{(-1)} = \pm q_{e\pm} \quad (1.91)$$

для высших приближений при $n = 1, 2, \dots$:

$$\frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial t} + O_1 O_2 (A_2 q_{1,1}^{(n-2)} + A_1 q_{2,2}^{(n-2)}) + q_{3/3}^{(n-1)} = h_0^{(n-2)}, \quad (1.92)$$

$$-q_I^{(n-2)} = \lambda_{IJ} g_J^{(n-2)}, \quad -q_3^{(n-1)} = \lambda_{33} g_3^{(n-1)}, \quad g_J^{(n-2)} = \theta_{,J}^{(n-2)}, \quad g_3^{(n-1)} = \theta_{/3}^{(n-1)}, \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(n)} + (A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + \\ + A_\beta A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} + A_1 A_2 f_\alpha^{(n-1)} = h_\alpha^{(n-1)} \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \sigma_{33/3}^{(n)} + (A_2 \sigma_{13}^{(n-1)})_{,1} + (A_1 \sigma_{23}^{(n-1)})_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - \\ - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} + A_1 A_2 f_3^{(n-1)} = h_3^{(n-1)} \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(n)} &= C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJKL} \varepsilon_{33}^{(n)} - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(n)}, \\ \sigma_{I3}^{(n)} &= 2C_{I3K3} \varepsilon_{K3}^{(n)}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{33}^{(n)} = C_{33KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{3333} \varepsilon_{33}^{(n)} - C_{33kl} \varepsilon_{kl}^{T(n)}; \quad (1.96)$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(n)} + A_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(n)};$$

$$2\varepsilon_{12}^{(n)} = O_2 u_{1,2}^{(n)} + O_1 u_{2,1}^{(n)} - O_1 O_2 (A_{1,2} u_1^{(n)} + A_{2,1} u_2^{(n)}); \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33}^{(n)} &= u_{3/3}^{(n+1)}; \\
2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} &= u_{\alpha/3}^{(n+1)} + O_{\alpha} u_{3,\alpha}^{(n)} - A_{\alpha 3} O_{\alpha} u_{\alpha}^{(n)}; \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(n)} &= S_{i\pm}^{(n)}; \\
\Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(n)}] = 0; [u_i^{(n+1)}] = 0; [q_3^{(n-1)}] = 0; [\theta^{(n)}] = 0; \\
\langle u_i^{(n+1)} \rangle &= 0, \langle \theta^{(n)} \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{1.98}$$

$$\Sigma_{3\pm} : q_3^{(n-1)} = 0; \tag{1.99}$$

$$\Sigma_T : q_I^{(n-2)} n_I = 0$$

Здесь обозначена операция осреднения по толщине оболочки

$$\langle u_i^{(n)} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(n)} d\xi, \tag{1.100}$$

а также обозначены функции граничных условий и массовых сил

$$S_{i\pm}^{(n)} = 0, \text{ если } n=1,2,4,5,\dots; \quad S_{i\pm}^{(n)} = -p_{\pm} \delta_{i3}, \text{ если } n=3. \tag{1.101}$$

$$f_i^{(n)} = 0, \quad n=1,2,3,4,5,\dots; \quad f_i^{(n)} = \rho f_i, \text{ если } n=0. \tag{1.102}$$

Уравнения равновесия (1.77) после введения функций $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ принимают вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n h_i^{(n)} = h_i^{(0)} + \varkappa h_i^{(1)} + \varkappa^2 h_i^{(2)} + \dots = 0. \tag{1.103}$$

Решением локальной задачи термоупругости в нулевом приближении (1.85) – (1.91) являются функции $\theta^{(0)}, u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$, они зависят от локальной координаты ξ и входных данных этой задачи – перемещений $u_j^{(0)}(X^{\alpha})$. Решением задачи термоупругости n -го приближения (1.92) – (1.99) являются функции $\theta^{(n)}, u_j^{(n+1)}, \varepsilon_{kl}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(n)}$, а $\theta^{(n-1)}, u_j^{(n)}, \varepsilon_{kl}^{(n-1)}, \sigma_{ij}^{(n-1)}$ в этой задаче – входные данные.

1.7 Решение локальной задачи нулевого приближения

Ввиду того, что задачи (1.87), (1.90) являются одномерными по локальной переменной ξ , их решение можно найти аналитически. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче нулевого приближения имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0; \quad \forall \xi: -0,5 < \xi < 0,5. \quad (1.104)$$

Подставив (1.104) во вторую и третью группу определяющих соотношений в системе (1.88), получаем:

$$C_{13K3} \varepsilon_{K3}^{(0)} = 0, \quad C_{33KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3333} \varepsilon_{33}^{(0)} - C_{33kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} = 0. \quad (1.105)$$

Отсюда следует, что в нулевом приближении деформации межслойного сдвига во всех слоях являются нулевыми, а поперечная деформация — ненулевая

$$\varepsilon_{K3}^{(0)} = 0; \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}; \quad (1.106)$$

где обозначено

$$Z_{3KL} = C_{3333}^{-1} C_{33KL}, \quad Z_{3kl} = C_{3333}^{-1} C_{33kl} \quad (1.107)$$

Подставив в (1.106) выражения для деформаций $\varepsilon_{K3}^{(0)}$, $\varepsilon_{33}^{(0)}$ из (1.89), получаем:

$$u_{\alpha/3}^{(1)} = -O_{\alpha} u_{3,\alpha}^{(0)} + A_{\alpha 3} O_{\alpha} u_{\alpha}^{(0)}; \quad \alpha = 1, 2, \\ u_{3/3}^{(1)} = Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}. \quad (1.108)$$

После интегрирования этих уравнений с учетом условий $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$, находим перемещения $u_i^{(1)}$:

$$u_{\alpha}^{(1)} = -\xi O_{\alpha} (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_{\alpha}^{(0)}); \\ u_3^{(1)} = U_{3KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + U_3^{T(1)}, \quad (1.109)$$

где обозначено

$$U_{3KL}^{(1)} = -\langle Z_{3KL} \rangle_{\xi}; \quad U_3^{T(1)} = \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle_{\xi} \quad (1.110)$$

Здесь учтено, что деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}(X^{\alpha})$ не зависят от величины ξ . В (1.110) введено обозначение для следующей операции:

$$\langle f \rangle_{\xi} = \int_{-0,5}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} - \langle \int_{-0,5}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} \rangle. \quad (1.111)$$

Подставив выражения (1.106) в первую группу определяющих соотношений системы (1.88), находим напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$:

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \quad (1.112)$$

где обозначено

$$C_{IJKl}^{(0)} = C_{IJKl} - C_{IJ33} Z_{3kl}. \quad (1.113)$$

1.8 Решение локальных задач L_n высших приближений

Решим уравнения равновесия (1.94), (1.95) относительно $\sigma_{\alpha 3/3}^{(n)}$ и $\sigma_{33/3}^{(n)}$. Выразим n -е приближение через $n-1$. Для этого выразим слагаемое, содержащее $\sigma_{i3/3}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3/3}^{(n)} = & -O_1 O_2 \left((A_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (A_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - \right. \\ & \left. - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + A_{\beta} A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} \right) + O_1 O_2 \left(h_{\alpha}^{(n-1)} - A_{\beta} f_{\alpha}^{(n-1)} \right) \end{aligned} \quad (1.114)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33/3}^{(n)} = & -O_1 O_2 \left((A_2 \sigma_{13}^{(n-1)})_{,1} + (A_1 \sigma_{23}^{(n-1)})_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} \right) + \\ & + O_1 O_2 \left(h_3^{(n-1)} - A_1 A_2 f_3^{(n-1)} \right) \end{aligned} \quad (1.115)$$

Проинтегрируем обе части этих уравнений по ξ , принимая во внимание, что $A_i, O_i, h_{\alpha}^{(n-1)}, f_{\alpha}^{(n-1)}$ не зависят от ξ .

$$\begin{aligned} & \sigma_{\alpha 3}^{(n)}(\xi) - \sigma_{\alpha 3}^{(n)}(-0.5) = \\ & = -O_1 O_2 \int_{-0.5}^{\xi} \left((A_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (A_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + \right. \\ & \left. + A_{\beta} A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} \right) d\xi + O_1 O_2 \left(h_{\alpha}^{(n-1)} - A_1 A_2 f_{\alpha}^{(n-1)} \right) (\xi + 0.5) \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(n)}(\xi) - \sigma_{33}^{(n)}(-0.5) = & -O_1 O_2 \int_{-0.5}^{\xi} \left((A_2 \sigma_{13}^{(n-1)})_{,1} + (A_1 \sigma_{23}^{(n-1)})_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - \right. \\ & \left. - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} \right) d\xi + O_1 O_2 (h_3^{(n-1)} - A_1 A_2 f_3^{(n-1)})(\xi + 0.5) \end{aligned} \quad (1.117)$$

Подставим полученные выражения в граничные условия (1.98) на поверхности Σ_{3-} , в результате найдем значения констант $\sigma_{\alpha 3}^{(n)}(-0.5)$ и $\sigma_{33}^{(n)}(-0.5)$:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(n)}(-0.5) = S_{\alpha-}^{(n)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(n)}(-0.5) = S_{3-}^{(n)}. \quad (1.118)$$

Подставляя выражения (1.116) и (1.117) в граничные условия (1.98) на поверхности Σ_{3+} , находим функции $h_{\alpha}^{(n-1)}$ и $h_3^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{(n-1)} = & A_1 A_2 f_{\alpha}^{(n-1)} + \langle (A_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (A_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - \\ & - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + A_{\beta} A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} \rangle \end{aligned} \quad (1.119)$$

$$\begin{aligned} h_3^{(n-1)} = & A_1 A_2 (\Delta S_3^{(n)} + f_3^{(n-1)}) + \langle (A_2 \sigma_{13}^{(n-1)})_{,1} + (A_1 \sigma_{23}^{(n-1)})_{,2} - \\ & - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} \rangle \end{aligned} \quad (1.120)$$

где обозначено

$$\Delta S_3^{(n)} = S_{3+}^{(n)} - S_{3-}^{(n)}. \quad (1.121)$$

Введем оператор

$$\begin{aligned} \{f(X^{\alpha}, \xi)\}_{\xi} &= \int_{-0.5}^{\xi} (f(X^{\alpha}, \tilde{\xi}) - \langle f \rangle) d\tilde{\xi} = \\ &= \int_{-0.5}^{\xi} f(X^{\alpha}, \tilde{\xi}) d\tilde{\xi} - (\xi + 0.5) \langle f \rangle \end{aligned} \quad (1.122)$$

Тогда, подставляя выражения (1.119) и (1.120) в (1.116) и (1.117), с учетом (1.118) и (1.122), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{(n)} = & -O_1 O_2 \{ (A_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (A_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + \\ & + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + A_{\beta} A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} \}_{\xi} \end{aligned} \quad (1.123)$$

$$\sigma_{33}^{(n)} = -O_1 O_2 \left\{ \left(A_2 \sigma_{13}^{(n-1)} \right)_{,1} + \left(A_1 \sigma_{23}^{(n-1)} \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} \right\}_{\xi} + \Delta S_3^{(n)} (\xi + 0.5) + S_{3-}^{(n)}, \quad (1.124)$$

$n = 1, 2, \dots$, причем

$$\Delta S_3^{(n)} = S_{3+}^{(n)} - S_{3-}^{(n)} = -\Delta p \delta_{i3} \delta_{n3}, \quad \Delta p = p_+ - p_- \quad (1.125)$$

Из определяющих соотношений системы (1.96) выразим деформации $\varepsilon_{K3}^{(n)}$ и $\varepsilon_{33}^{(n)}$:

$$2\varepsilon_{K3}^{(n)} = C_{I3K3}^{-1} \sigma_{I3}^{(n)}, \quad (1.126)$$

$$\varepsilon_{33}^{(n)} = C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(n)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(n)}. \quad (1.127)$$

Подставим эти выражения в кинематические соотношения системы (1.97)

$$u_{3/3}^{(n+1)} = C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(n)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(n)}, \quad (1.128)$$

$$u_{\alpha/3}^{(n+1)} = C_{\alpha 3 I 3}^{-1} \sigma_{I 3}^{(n)} - O_{\alpha} u_{3,\alpha}^{(n)} + A_{\alpha 3} O_{\alpha} u_{\alpha}^{(n)}. \quad (1.129)$$

Проинтегрируем обе части этих соотношений и используем условие нормировки из системы (1.98): $\langle u_i^{(n+1)} \rangle = 0$, тогда получим

$$u_3^{(n+1)} = \langle C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(n)} \rangle_{\xi} - \langle Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} \rangle_{\xi} + \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(n)} \rangle_{\xi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.130)$$

$$u_{\alpha}^{(n+1)} = \langle C_{\alpha 3 I 3}^{-1} \sigma_{I 3}^{(n)} \rangle_{\xi} - O_{\alpha} \langle u_{3,\alpha}^{(n)} \rangle_{\xi} + A_{\alpha 3} O_{\alpha} \langle u_{\alpha}^{(n)} \rangle_{\xi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.131)$$

1.9 Выражение решения первого приближения через нулевое приближение

Выразим деформации $\varepsilon_{KL}^{(1)}$ первого приближения через деформации и перемещения нулевого приближения. Для этого запишем выражения для $\varepsilon_{KL}^{(n)}$ из системы (1.97) при $n = 1$:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)} = O_{\alpha} u_{\alpha,\alpha}^{(1)} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} u_{\beta}^{(1)} + u_3^{(1)} A_{\alpha 3} O_{\alpha} \quad (1.132)$$

$$2\varepsilon_{12}^{(1)} = A_1 O_2 (u_1^{(1)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u_2^{(1)} O_2)_{,1} \quad (1.133)$$

Подставим в эти формулы выражения (1.109) для $u_\alpha^{(1)}$ и $u_3^{(1)}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)} = & O_\alpha (-\xi O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}))_{,\alpha} + \\ & + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} (-\xi O_\beta (u_{3,\beta}^{(0)} - A_{\beta 3} u_\beta^{(0)})) + U_{3KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} A_{\alpha 3} O_\alpha + U_3^{T(1)} A_{\alpha 3} O_\alpha \end{aligned} \quad (1.134)$$

$$2\varepsilon_{12}^{(1)} = A_1 O_2 (-\xi O_1^2 (u_{3,1}^{(0)} - A_{13} u_1^{(0)}))_{,2} + A_2 O_1 (-\xi O_2^2 (u_{3,2}^{(0)} - A_{23} u_2^{(0)}))_{,1} \quad (1.135)$$

Введем обозначения:

$$-\eta_{\alpha\alpha} = O_\alpha (O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}))_{,\alpha} + O_1 O_2 O_\beta A_{\alpha,\beta} (u_{3,\beta}^{(0)} - A_{\beta 3} u_\beta^{(0)}) \quad (1.136)$$

$$-2\eta_{12} = A_1 O_2 (O_1^2 (u_{3,1}^{(0)} - A_{13} u_1^{(0)}))_{,2} + A_2 O_1 (O_2^2 (u_{3,2}^{(0)} - A_{23} u_2^{(0)}))_{,1},$$

$$\Phi_{\alpha\alpha KL} = A_{\alpha 3} O_\alpha U_{3KL}^{(1)}, \quad \Phi_{12KL} = 0, \quad (1.137)$$

$$\Phi_{\alpha\alpha}^{T(1)} = U_3^{T(1)} A_{\alpha 3} O_\alpha, \quad \Phi_{12}^{T(1)} = 0.$$

С учетом этих обозначений формулы (1.134) и (1.135) можно записать так

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)} = \xi \eta_{\alpha\alpha} + \Phi_{\alpha\alpha KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \Phi_{\alpha\alpha}^{T(1)} \quad (1.138)$$

$$\varepsilon_{12}^{(1)} = \xi \eta_{12}$$

Или в едином тензорном виде:

$$\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \xi \eta_{IJ} + \Phi_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \Phi_{IJ}^{T(1)} \quad (1.139)$$

Выразим *напряжения первого приближения* $\sigma_{i3}^{(1)}$ через деформации нулевого приближения $\varepsilon_{KL}^{(0)}$, используя формулы (1.123) и (1.124) и (1.112).

Из (1.123) и (1.124) при $n = 1$ имеем:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -O_1 O_2 \left\{ (A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} \right\}_\xi \quad (1.140)$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = O_1 O_2 \left\{ A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(0)} + A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(0)} \right\}_\xi \quad (1.141)$$

Здесь учтено, что согласно (1.104) $\sigma_{i3}^{(0)} = 0$.

Подставляя формулы (1.112) в (1.140) и (1.141), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{(1)} = & -O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}\}_{\xi} (A_{\beta} \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\alpha} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_{\xi} (A_{\alpha} \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\beta} + \right. \\ & \left. + \{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_{\xi} A_{\alpha,\beta} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \{C_{\beta\beta KL}^{(0)}\}_{\xi} A_{\beta,\alpha} \varepsilon_{KL}^{(0)} \right) + \\ & + O_1 O_2 \left((A_{\beta} \{C_{\alpha\alpha kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi})_{,\alpha} + (A_{\alpha} \{C_{\alpha\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi})_{,\beta} + \right. \\ & \left. + A_{\alpha,\beta} \{C_{\alpha\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} - A_{\beta,\alpha} \{C_{\beta\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} \right) \end{aligned} \quad (1.142)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)} = & (O_1 A_{13} \{C_{11KL}^{(0)}\}_{\xi} + O_2 A_{23} \{C_{22KL}^{(0)}\}_{\xi}) \varepsilon_{KL}^{(0)} - \\ & - (O_1 A_{13} \{C_{11kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} + O_2 A_{23} \{C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi}) \end{aligned} \quad (1.143)$$

Введем обозначения

$$C_{\alpha 3KL}^{(1)} = O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)}\}_{\xi} A_{\beta,\alpha} + 2\{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_{\xi} A_{\alpha,\beta} \right) \quad (1.144)$$

$$R_{\alpha K LJ}^{(1)} = O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}\}_{\xi} A_{\beta} \delta_{\alpha J} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_{\xi} A_{\alpha} \delta_{\beta J} \right)$$

$$C_{33KL}^{(1)} = O_1 A_{13} \{C_{11KL}^{(0)}\}_{\xi} + O_2 A_{23} \{C_{22KL}^{(0)}\}_{\xi},$$

а также обозначим тепловые напряжения первого приближения

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{T(1)} = & -O_1 O_2 \left((A_{\beta} \{C_{\alpha\alpha kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi})_{,\alpha} + (A_{\alpha} \{C_{\alpha\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi})_{,\beta} + \right. \\ & \left. + A_{\alpha,\beta} \{C_{\alpha\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} - A_{\beta,\alpha} \{C_{\beta\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} \right) \end{aligned} \quad (1.145)$$

$$\sigma_{33}^{T(1)} = (O_1 A_{13} \{C_{11kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} + O_2 A_{23} \{C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi}).$$

Тогда формулы (1.142), (1.143) можно записать так

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -C_{\alpha 3KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha K LJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - \sigma_{\alpha 3}^{T(1)} \quad (1.146)$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = C_{33KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{33}^{T(1)} \quad (1.147)$$

Выразим напряжения $\sigma_{IJ}^{(1)}$ первого приближения через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ нулевого приближения. Для этого запишем определяющие соотношения из системы (1.96) при $n=1$:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{IJKL} \varepsilon_{33}^{(1)} - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(1)} \quad (1.148)$$

Подставим в это выражение формулу (1.127) для деформаций $\varepsilon_{33}^{(1)}$:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{IJ33} \left(C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(1)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(1)} \right) - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(1)} \quad (1.149)$$

С учетом обозначения (1.113), получаем

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + Z_{3IJ} \sigma_{33}^{(1)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(1)} \quad (1.150)$$

Подставляя выражение (1.147) в (1.150), находим

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + G_{IJKL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \tilde{\sigma}_{IJ}^{T(1)} \quad (1.151)$$

Где обозначено

$$G_{IJKL}^{(1)} = Z_{3IJ} C_{33KL}^{(1)} \quad (1.152)$$

$$\tilde{\sigma}_{IJ}^{T(1)} = C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(1)} + Z_{3IJ} \sigma_{33}^{T(1)} \quad (1.153)$$

Подставим теперь соотношение (1.139) в (1.151), тогда получим итоговое выражение для напряжений $\sigma_{IJ}^{(1)}$ первого приближения через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ нулевого приближения:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{IJKL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{IJ}^{T(1)} \quad (1.154)$$

где введены обозначения

$$C_{IJKL}^{(1)} = C_{IJMN}^{(0)} \Phi_{MNKL} + G_{IJKL}^{(1)}, \quad (1.155)$$

$$\sigma_{IJ}^{T(1)} = \tilde{\sigma}_{IJ}^{T(1)} - C_{IJKL}^{(0)} \Phi_{KL}^{T(1)}. \quad (1.156)$$

Найдем *перемещения второго приближения*.

Запишем формулы (1.130) при $n = 1$:

$$u_3^{(2)} = \langle C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(1)} \rangle_{\xi} - \langle Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} \rangle_{\xi} + \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(1)} \rangle_{\xi}, \quad (1.157)$$

$$u_{\alpha}^{(2)} = \langle C_{\alpha 3 K 3}^{-1} \sigma_{K 3}^{(1)} \rangle_{\xi} + A_{\alpha 3} O_{\alpha} \langle u_{\alpha}^{(1)} \rangle_{\xi} - O_{\alpha} \langle u_{3, \alpha}^{(1)} \rangle_{\xi}. \quad (1.158)$$

Подставим в эти выражения формулы (1.146), (1.147), (1.139) и (1.109)

$$u_3^{(2)} = \langle C_{3333}^{-1} C_{33KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} \rangle_\xi - \langle Z_{3KL} (\xi \eta_{KL} + \Phi_{KLMN} \varepsilon_{MN}^{(0)}) \rangle_\xi - \langle C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{T(1)} \rangle_\xi - \langle Z_{3KL} \Phi_{IJ}^{T(1)} \rangle_\xi + \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(1)} \rangle_\xi \quad (1.159)$$

$$u_\alpha^{(2)} = - \langle C_{\alpha 3 K 3}^{-1} (C_{K 3 L M}^{(1)} \varepsilon_{L M}^{(0)} + R_{K L M N}^{(1)} \varepsilon_{L M, N}^{(0)}) \rangle_\xi - A_{\alpha 3} O_\alpha \langle \xi O_\alpha (u_{3, \alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}) \rangle_\xi - O_\alpha \langle (U_{3 K L}^{(1)} \varepsilon_{K L}^{(0)})_{, \alpha} \rangle_\xi - \langle C_{\alpha 3 K 3}^{-1} \sigma_{K 3}^{T(1)} \rangle_\xi - O_\alpha \langle U_{3, \alpha}^{T(1)} \rangle_\xi \quad (1.160)$$

Введем обозначения:

$$J_{3KL} = \langle Z_{3KL} \xi \rangle_\xi,$$

$$U_{3KL}^{(2)} = \langle C_{3333}^{-1} C_{33KL}^{(1)} \rangle_\xi - \langle Z_{3IJ} \Phi_{IJKL} \rangle_\xi, \quad (1.161)$$

$$U_{\alpha KL}^{(2)} = \langle C_{\alpha 3 I 3}^{-1} C_{I 3 K L}^{(1)} \rangle_\xi,$$

$$K_{\alpha K L J} = \langle C_{\alpha 3 I 3}^{-1} R_{I K L J}^{(1)} \rangle_\xi + O_\alpha \langle U_{3 K L}^{(1)} \rangle_\xi \delta_{\alpha J},$$

$$U_3^{T(2)} = - \langle C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{T(1)} \rangle_\xi - \langle Z_{3KL} \Phi_{IJ}^{T(1)} \rangle_\xi + \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(1)} \rangle_\xi,$$

$$U_\alpha^{T(2)} = - \langle C_{\alpha 3 K 3}^{-1} \sigma_{K 3}^{T(1)} \rangle_\xi - O_\alpha \langle U_{3, \alpha}^{T(1)} \rangle_\xi.$$

С учетом этих обозначений из (1.159) и (1.160) получим

$$u_3^{(2)} = -J_{3KL} \eta_{KL} + U_{3KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + U_3^{T(2)}, \quad (1.162)$$

$$u_\alpha^{(2)} = - \langle \xi \rangle_\xi A_{\alpha 3} O_\alpha^2 (u_{3, \alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}) - U_{\alpha KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - K_{\alpha K L J} \varepsilon_{K L, J}^{(0)} + U_\alpha^{T(2)}. \quad (1.163)$$

1.10 Выражение решения второго приближения через нулевое приближение

Выразим напряжения второго приближения $\sigma_{\alpha 3}^{(2)}$ и $\sigma_{33}^{(2)}$ через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и искривления η_{IJ} нулевого приближения.

Запишем формулы (1.123) и (1.124) при $n = 2$:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -O_1 O_2 \left\{ \left(A_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha}^{(1)} \right)_{,\alpha} + \left(A_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta}^{(1)} \right)_{,\beta} + A_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(1)} - \right. \\ \left. - A_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(1)} + A_{\beta} A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(1)} \right\}_{\xi} \quad (1.164)$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = -O_1 O_2 \left\{ \left(A_2 \sigma_{13}^{(1)} \right)_{,1} + \left(A_1 \sigma_{23}^{(1)} \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(1)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(1)} \right\}_{\xi} \quad (1.165)$$

Подставим выражения (1.146), (1.147) и (1.154) для напряжений первого приближения $\sigma_{IJ}^{(1)}$ и $\sigma_{\alpha 3}^{(1)}$, $\sigma_{33}^{(1)}$ в формулы (1.164) и (1.165)

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -O_1 O_2 \left\{ \left(A_{\beta} \left(C_{\alpha \alpha KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{\alpha \alpha KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{\alpha \alpha}^{T(1)} \right) \right)_{,\alpha} + \right. \\ \left. + \left(A_{\alpha} \left(C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{\alpha \beta KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{\alpha \beta}^{T(1)} \right) \right)_{,\beta} + \right. \\ \left. + A_{\alpha, \beta} \left(C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{\alpha \beta KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{\alpha \beta}^{T(1)} \right) - \right. \\ \left. - A_{\beta, \alpha} \left(C_{\beta \beta KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{\beta \beta KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{\beta \beta}^{T(1)} \right) - \right. \\ \left. - A_{\beta} A_{\alpha 3} \left(C_{\alpha 3 KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{\alpha KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \sigma_{\alpha 3}^{T(1)} \right) \right\}_{\xi} \quad (1.166)$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = -O_1 O_2 \left\{ - \left(A_2 \left(C_{13 KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{1 KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \sigma_{13}^{T(1)} \right) \right)_{,1} - \right. \\ \left. - \left(A_1 \left(C_{23 KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{2 KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \sigma_{23}^{T(1)} \right) \right)_{,2} - \right. \\ \left. - A_2 A_{13} \left(C_{11 KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{11 KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{11}^{T(1)} \right) - \right. \\ \left. - A_1 A_{23} \left(C_{22 KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{22 KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{22}^{T(1)} \right) \right\}_{\xi} \quad (1.167)$$

Дифференцируя произведение функций, запишем эти формулы так

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -O_1 O_2 \left\{ C_{\alpha \alpha KL}^{(0)} \xi A_{\beta, \alpha} \eta_{KL} + C_{\alpha \alpha KL}^{(0)} \xi A_{\beta} \eta_{KL, \alpha} + \right. \\ \left. + C_{\alpha \alpha KL}^{(1)} A_{\beta, \alpha} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{\alpha \alpha KL}^{(1)} A_{\beta} \varepsilon_{KL, \alpha}^{(0)} - A_{\beta, \alpha} \sigma_{\alpha \alpha}^{T(1)} - A_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha, \alpha}^{T(1)} + \right. \\ \left. + C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \xi A_{\alpha} \eta_{KL, \beta} + C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \xi A_{\alpha, \beta} \eta_{KL} + \right. \\ \left. + C_{\alpha \beta KL}^{(1)} A_{\alpha} \varepsilon_{KL, \beta}^{(0)} + C_{\alpha \beta KL}^{(1)} A_{\alpha, \beta} \varepsilon_{KL}^{(0)} - A_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{T(1)} - A_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta, \beta}^{T(1)} + \right. \\ \left. + A_{\alpha, \beta} \left(C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{\alpha \beta KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{\alpha \beta}^{T(1)} \right) - \right. \\ \left. - A_{\beta, \alpha} \left(C_{\beta \beta KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{\beta \beta KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{\beta \beta}^{T(1)} \right) - \right. \\ \left. - A_{\beta} A_{\alpha 3} \left(C_{\alpha 3 KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{\alpha KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \sigma_{\alpha 3}^{T(1)} \right) \right\}_{\xi}; \quad (1.168)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{(2)} = & O_1 O_2 \left\{ A_{2,1} (C_{13KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{1KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \sigma_{13}^{T(1)}) + \right. \\
& + A_2 (C_{13KL}^{(1)} \varepsilon_{KL,1}^{(0)} + R_{1KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J,1}^{(0)} + \sigma_{13,1}^{T(1)}) + \\
& + A_{1,2} (C_{23KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{2KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \sigma_{23}^{T(1)}) + \\
& + A_1 (C_{23KL}^{(1)} \varepsilon_{KL,2}^{(0)} + R_{2KLJ}^{(1)} A_1 \varepsilon_{KL,J,2}^{(0)} + \sigma_{23,2}^{T(1)}) + \\
& + A_2 A_{13} (C_{11KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{11KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{11}^{T(1)}) + \\
& \left. + A_1 A_{23} (C_{22KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{22KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{22}^{T(1)}) \right\}_\xi
\end{aligned} \tag{1.169}$$

Поскольку ξ , $C_{ijkl}^{(0)}$, $C_{\alpha\beta KL}^{(1)}$, не зависят от X^I , а $\varepsilon_{KL}^{(0)}$, H_α , η_{KL} не зависят от ξ ,

то можно преобразовать формулы (1.168) и (1.169) следующим образом

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = & -O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(1)} - C_{\beta\beta KL}^{(1)}\}_\xi A_{\beta,\alpha} + 2\{C_{\alpha\beta KL}^{(1)}\}_\xi A_{\alpha,\beta} - \{C_{\alpha 3 KL}^{(1)}\}_\xi A_\beta A_{\alpha 3} \right) \varepsilon_{KL}^{(0)} - \\
& -O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(1)}\}_\xi A_\beta \delta_{\alpha J} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(1)}\}_\xi A_\alpha \delta_{\beta J} - \{R_{\alpha KLJ}^{(1)}\}_\xi A_\beta A_{\alpha 3} \right) \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - \\
& -O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)}\}_\xi \right) A_{\beta,\alpha} + 2\{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_\xi A_{\alpha,\beta} \eta_{KL} - \\
& -O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}\}_\xi A_\beta \delta_{\alpha J} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_\xi A_\alpha \delta_{\beta J} \right) \eta_{KL,J} + \\
& + O_1 O_2 \left\{ (A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{T(1)})_{,\alpha} + (A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{T(1)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{T(1)} - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{T(1)} + A_\beta A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{T(1)} \right\}_\xi
\end{aligned} \tag{1.170}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{(2)} = & O_1 O_2 \left(\{C_{13KL}^{(1)}\}_\xi A_{2,1} + \{C_{23KL}^{(1)}\}_\xi A_{1,2} + \right. \\
& + \{C_{11KL}^{(1)}\}_\xi A_2 A_{13} + \{C_{22KL}^{(1)}\}_\xi A_1 A_{23} \left. \right) \varepsilon_{KL}^{(0)} + \\
& + O_1 O_2 \left(\{C_{13KL}^{(1)}\}_\xi A_2 \delta_{1J} + \{R_{1KLJ}^{(1)}\}_\xi A_{2,1} + \{C_{23KL}^{(1)}\}_\xi A_1 \delta_{2J} + \{R_{2KLJ}^{(1)}\}_\xi A_{1,2} \right) \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \\
& + O_1 O_2 \left(\{R_{1KLJ}^{(1)}\}_\xi A_2 \delta_{1M} + \{R_{2KLJ}^{(1)}\}_\xi A_1 \delta_{2M} \right) \varepsilon_{KL, JM}^{(0)} + \\
& + O_1 O_2 \left(\{C_{11KL}^{(0)}\}_\xi \right) A_2 A_{13} + \{C_{22KL}^{(0)}\}_\xi A_1 A_{23} \eta_{KL} + \\
& + O_1 O_2 \left\{ (A_2 \sigma_{13}^{T(1)})_{,1} + (A_1 \sigma_{23}^{T(1)})_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{T(1)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{T(1)} \right\}_\xi
\end{aligned} \tag{1.171}$$

Введем обозначения:

$$C_{\alpha 3 KL}^{(2)} = O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(1)} - C_{\beta\beta KL}^{(1)}\}_\xi A_{\beta,\alpha} + 2\{C_{\alpha\beta KL}^{(1)}\}_\xi A_{\alpha,\beta} - \{C_{\alpha 3 KL}^{(1)}\}_\xi A_\beta A_{\alpha 3} \right),$$

$$R_{\alpha 3 KLJ}^{(2)} = O_1 O_2 \left(\{C_{\alpha\alpha KL}^{(1)}\}_\xi A_\beta \delta_{\alpha J} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(1)}\}_\xi A_\alpha \delta_{\beta J} - \{R_{\alpha KLJ}^{(1)}\}_\xi A_\beta A_{\alpha 3} \right),$$

$$N_{\alpha 3KL} = O_1 O_2 \left(\left\{ (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)}) \xi \right\}_\xi A_{\beta, \alpha} + 2 \left\{ C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \xi \right\}_\xi A_{\alpha, \beta} \right), \quad (1.172)$$

$$V_{\alpha 3KLJ} = O_1 O_2 \left(\left\{ C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \xi \right\}_\xi A_\beta \delta_{\alpha J} + \left\{ C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \xi \right\}_\xi A_\alpha \delta_{\beta J} \right),$$

$$C_{33KL}^{(2)} = O_1 O_2 \left(\left\{ C_{13KL}^{(1)} \right\}_\xi A_{2,1} + \left\{ C_{23KL}^{(1)} \right\}_\xi A_{1,2} + \left\{ C_{11KL}^{(1)} \right\}_\xi A_2 A_{13} + \left\{ C_{22KL}^{(1)} \right\}_\xi A_1 A_{23} \right),$$

$$R_{33KLJ}^{(2)} = O_1 O_2 \left(\left\{ C_{13KL}^{(1)} \right\}_\xi A_2 \delta_{1J} + \left\{ C_{23KL}^{(1)} \right\}_\xi A_1 \delta_{2J} + \right. \\ \left. + \left\{ R_{1KLJ}^{(1)} \right\}_\xi A_{21} + \left\{ R_{2KLJ}^{(1)} \right\}_\xi A_{12} \right),$$

$$E_{33KLJM}^{(2)} = O_1 O_2 \left(\left\{ R_{1KLJ}^{(1)} \right\}_\xi A_2 \delta_{1M} + \left\{ R_{2KLJ}^{(1)} \right\}_\xi A_1 \delta_{2M} \right),$$

$$N_{33KL}^{(2)} = O_1 O_2 \left(\left\{ C_{11KL}^{(0)} \xi \right\}_\xi A_2 A_{13} + \left\{ C_{22KL}^{(0)} \xi \right\}_\xi A_1 A_{23} \right).$$

А также обозначения для тепловых напряжений 2-го приближения

$$\sigma_{\alpha 3}^{T(2)} = -O_1 O_2 \left\{ (A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{T(1)})_{,\alpha} + (A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{T(1)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{T(1)} - \right. \\ \left. - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{T(1)} + A_\beta A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{T(1)} \right\}_\xi, \quad (1.173)$$

$$\sigma_{33}^{T(2)} = -O_1 O_2 \left\{ (A_2 \sigma_{13}^{T(1)})_{,1} + (A_1 \sigma_{23}^{T(1)})_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{T(1)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{T(1)} \right\}_\xi.$$

С учетом этих обозначений получим окончательно

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -C_{\alpha 3KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha 3KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - N_{\alpha 3KL} \eta_{KL} - V_{\alpha 3KLJ} \eta_{KL,J} - \sigma_{\alpha 3}^{T(2)}, \quad (1.174)$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = C_{33KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{33KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{33KLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + N_{33KL} \eta_{KL} - \sigma_{33}^{T(2)}.$$

Выразим деформации $\varepsilon_{KL}^{(2)}$ второго приближения через деформации и перемещения нулевого приближения.

Запишем выражения для $\varepsilon_{KL}^{(n)}$ из системы (1.97) при $n = 2$:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(2)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(2)} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(2)} + A_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(2)}; \\ 2\varepsilon_{12}^{(2)} = A_1 O_2 (u_1^{(2)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u_2^{(2)} O_2)_{,1}. \quad (1.175)$$

Подставим сюда выражения (1.162), (1.163) для $u_\alpha^{(2)}$ и $u_3^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(2)} = & O_\alpha \left(-\langle \xi \rangle_\xi A_{\alpha 3} O_\alpha^2 (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}) - \right. \\
& \left. - U_{\alpha KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - K_{\alpha KLJ} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + U_\alpha^{T(2)} \right)_{,\alpha} + \\
& + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 \left(-\langle \xi \rangle_\xi A_{\beta 3} O_\beta^2 (u_{3,\beta}^{(0)} - A_{\beta 3} u_\beta^{(0)}) - \right. \\
& \left. - U_{\beta KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - K_{\beta KLJ} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + U_\beta^{T(2)} \right) + \\
& + A_{\alpha 3} O_\alpha \left(-J_{3KL} \eta_{KL} + U_{3KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + U_3^{T(2)} \right);
\end{aligned} \tag{1.176}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{12}^{(2)} = & A_1 O_2 \left(-\langle \xi \rangle_\xi A_{13} O_1^3 (u_{3,1}^{(0)} - A_{13} u_1^{(0)}) - \right. \\
& \left. - O_1 U_{1KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - O_1 K_{1KLJ} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + O_1 U_1^{T(2)} \right)_{,2} + \\
& + A_2 O_1 \left(-\langle \xi \rangle_\xi A_{23} O_2^3 (u_{3,2}^{(0)} - A_{23} u_2^{(0)}) - \right. \\
& \left. - O_2 U_{2KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - O_2 K_{2KLJ} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + O_2 U_2^{T(2)} \right)_{,1}
\end{aligned} \tag{1.177}$$

Введем обозначение для кривизн второго приближения оболочки:

$$-\eta_{\alpha\alpha}^{(2)} = O_\alpha \left(A_{\alpha 3} O_\alpha^2 (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}) \right)_{,\alpha} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} A_{\beta 3} O_\beta^2 (u_{3,\beta}^{(0)} - A_{\beta 3} u_\beta^{(0)}), \tag{1.178}$$

$$-2\eta_{12}^{(2)} = A_1 O_2 \left(A_{13} O_1^3 (u_{3,1}^{(0)} - A_{13} u_1^{(0)}) \right)_{,2} + A_2 O_1 \left(A_{23} O_2^3 (u_{3,2}^{(0)} - A_{23} u_2^{(0)}) \right)_{,1}. \tag{1.179}$$

Тогда формулы (1.176) и (1.177) можно записать так

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(2)} = & \langle \xi \rangle_\xi \eta_{\alpha\alpha}^{(2)} - (A_{\alpha 3} O_\alpha J_{3KL}) \eta_{KL} - \\
& - \left(O_\alpha U_{\alpha KL,\alpha}^{(2)} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} U_{\beta KL}^{(2)} - A_{\alpha 3} O_\alpha U_{3KL}^{(2)} \right) \varepsilon_{KL}^{(0)} - \\
& - \left(O_\alpha U_{\alpha KL}^{(2)} \delta_{\alpha J} + O_\alpha K_{\alpha KLJ,\alpha} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} K_{\beta KLJ} \right) \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - \\
& - \left(O_\alpha K_{\alpha KLJ} \delta_{\alpha M} \right) \varepsilon_{KL, JM}^{(0)} + \\
& + O_\alpha U_{\alpha,\alpha}^{T(2)} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 U_\beta^{T(2)} + A_{\alpha 3} O_\alpha U_3^{T(2)}
\end{aligned} \tag{1.180}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{12}^{(2)} = & 2 \langle \xi \rangle_\xi \eta_{12}^{(2)} - \left(A_1 O_2 (U_{1KL}^{(2)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (U_{2KL}^{(2)} O_2)_{,1} \right) \varepsilon_{KL}^{(0)} - \\
& - \left(O_2 U_{1KL}^{(2)} \delta_{2J} + A_1 O_2 O_{12} K_{1KLJ} + O_2 K_{1KLJ,2} + O_1 U_{2KL}^{(2)} \delta_{1J} + \right. \\
& \left. + A_2 O_1 O_{21} K_{2KLJ} + O_1 K_{2KLJ,1} \right) \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - \\
& - \left(O_2 K_{1KLJ} \delta_{2M} + O_1 K_{2KLJ} \delta_{1M} \right) \varepsilon_{KL, JM}^{(0)} + \\
& + A_1 O_2 (U_1^{T(2)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (U_2^{T(2)} O_2)_{,1}
\end{aligned} \tag{1.181}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\alpha KL}^{(2)} &= A_{\alpha 3} O_{\alpha} J_{3KL}, \\
\Phi_{\alpha\alpha KL}^{(2)} &= O_{\alpha} U_{\alpha KL, \alpha}^{(2)} + O_1 O_2 A_{\alpha, \beta} U_{\beta KL}^{(2)} - A_{\alpha 3} O_{\alpha} U_{3KL}^{(2)}, \\
B_{\alpha\alpha KLJ}^{(2)} &= O_{\alpha} U_{\alpha KL}^{(2)} \delta_{\alpha J} + O_{\alpha} K_{\alpha KLJ, \alpha} + O_1 O_2 A_{\alpha, \beta} K_{\beta KLJ}, \\
K_{\alpha\alpha KLJM}^{(2)} &= O_{\alpha} K_{\alpha KLJ} \delta_{\alpha M}, \\
L_{12KL}^{(2)} &= 0, \tag{1.182}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Phi_{12KL}^{(2)} &= A_1 O_2 (U_{1KL}^{(2)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (U_{2KL}^{(2)} O_2)_{,1}, \\
2B_{12KLJ}^{(2)} &= O_2 U_{1KL}^{(2)} \delta_{2J} + A_1 O_2 O_{12} K_{1KLJ} + O_2 K_{1KLJ,2} + \\
&\quad + O_1 U_{2KL}^{(2)} \delta_{1J} + A_2 O_1 O_{21} K_{2KLJ} + O_1 K_{2KLJ,1} \\
2K_{12KLJM}^{(2)} &= O_2 K_{1KLJ} \delta_{2M} + O_1 K_{2KLJ} \delta_{1M}, \\
\Phi_{\alpha\alpha}^{T(2)} &= O_{\alpha} U_{\alpha, \alpha}^{T(2)} + A_{\alpha, \beta} O_1 O_2 U_{\beta}^{T(2)} + A_{\alpha 3} O_{\alpha} U_3^{T(2)}, \\
2\Phi_{12}^{T(2)} &= A_1 O_2 (U_1^{T(2)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (U_2^{T(2)} O_2)_{,1}.
\end{aligned}$$

С учетом этих обозначений получим:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(2)} &= \langle \xi \rangle_{\xi} \eta_{\alpha\alpha}^{(2)} - L_{\alpha\alpha KL}^{(2)} \eta_{KL} - \Phi_{\alpha\alpha KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \\
&\quad - B_{\alpha\alpha KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL, J}^{(0)} - K_{\alpha\alpha KLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL, JM}^{(0)} + \Phi_{\alpha\alpha}^{T(2)}, \tag{1.183} \\
\varepsilon_{12}^{(2)} &= \langle \xi \rangle_{\xi} \eta_{12}^{(2)} - \Phi_{12KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - B_{12KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL, J}^{(0)} - K_{12KLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL, JM}^{(0)} + \Phi_{12}^{T(2)}.
\end{aligned}$$

С учетом того, что $L_{12KL}^{(2)} = 0$, формулы (1.183) можно записать окончательно в едином тензорном виде:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{SP}^{(2)} &= \langle \xi \rangle_{\xi} \eta_{SP}^{(2)} - L_{SPKL}^{(2)} \eta_{KL} - \Phi_{SPKL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - B_{SPKLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL, J}^{(0)} - \\
&\quad - K_{SPKLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL, JM}^{(0)} + \Phi_{SP}^{T(2)} \tag{1.184}
\end{aligned}$$

Выразим напряжения $\sigma_{IJ}^{(2)}$ второго приближения через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ нулевого приближения. Из определяющих соотношений системы (1.96) при $n = 2$ получим

$$2\varepsilon_{K3}^{(2)} = C_{I3K3}^{-1} \sigma_{I3}^{(2)} \quad (1.185)$$

$$\varepsilon_{33}^{(2)} = C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(2)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(2)} + Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(2)} \quad (1.186)$$

$$\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{IJ33} \varepsilon_{33}^{(2)} - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(2)} \quad (1.187)$$

Подставляя (1.186) в (1.187), получаем:

$$\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(2)} + Z_{3IJ} \sigma_{33}^{(2)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(2)} \quad (1.188)$$

С учетом формул (1.184) для $\varepsilon_{SP}^{(2)}$ и (1.174) для $\sigma_{33}^{(2)}$ формула (1.188) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(2)} = & C_{IJKL}^{(0)} \langle \xi \rangle_{\xi} \eta_{KL}^{(2)} - \left(C_{IISP}^{(0)} L_{SPKL}^{(2)} - Z_{3IJ} N_{33KL}^{(2)} \right) \eta_{KL} - \\ & - \left(C_{IISP}^{(0)} \Phi_{SPKL}^{(2)} - Z_{3IJ} C_{33KL}^{(2)} \right) \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left(C_{IISP}^{(0)} B_{SPKLM}^{(2)} - Z_{3IJ} R_{33KLM}^{(2)} \right) \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - \\ & - \left(C_{IISP}^{(0)} K_{SPKLMN}^{(2)} - Z_{3IJ} E_{33KLMN}^{(2)} \right) \varepsilon_{KL,MN}^{(0)} + C_{IJKL}^{(0)} \Phi_{KL}^{T(2)} - Z_{3IJ} \sigma_{33}^{T(2)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(2)} \end{aligned} \quad (1.189)$$

Введем обозначения:

$$C_{IJKL}^{(2)} = C_{IISP}^{(0)} \Phi_{SPKL}^{(2)} - Z_{3IJ} C_{33KL}^{(2)}$$

$$R_{IJKLM}^{(2)} = C_{IISP}^{(0)} B_{SPKLM}^{(2)} - Z_{3IJ} R_{33KLM}^{(2)}$$

$$E_{IJKLMN} = C_{IISP}^{(0)} K_{SPKLMN}^{(2)} - Z_{3IJ} E_{33KLMN}^{(2)} \quad (1.190)$$

$$N_{IJKL} = C_{IISP}^{(0)} L_{SPKL}^{(2)} - Z_{3IJ} N_{33KL}^{(2)}$$

$$\sigma_{IJ}^{T(2)} = -C_{IJKL}^{(0)} \Phi_{KL}^{T(2)} + Z_{3IJ} \sigma_{33}^{T(2)} + C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(2)}$$

С учетом этих обозначений выражение (1.189) для $\sigma_{IJ}^{(2)}$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(2)} = & C_{IJKL}^{(0)} \langle \xi \rangle_{\xi} \eta_{KL}^{(2)} - C_{IJKL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \\ & - R_{IJKLM}^{(2)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - E_{IJKLMN} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)} - N_{IJKL} \eta_{KL} - \sigma_{IJ}^{T(2)}. \end{aligned} \quad (1.191)$$

1.11 Выражение решения третьего приближения через нулевое приближение

Выразим напряжение третьего приближения $\sigma_{33}^{(3)}$ через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и искривления η_{IJ} нулевого приближения.

Из выражения (1.124) при $n = 3$ получим:

$$\sigma_{33}^{(3)} = -O_1 O_2 \left\{ \left(A_2 \sigma_{13}^{(2)} \right)_{,1} + \left(A_1 \sigma_{23}^{(2)} \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(2)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(2)} \right\}_{\xi} - \Delta p (\xi + 0.5) - p_- \quad (1.192)$$

Подставляя в (1.192) выражения (1.191) для $\sigma_{IJ}^{(2)}$ и выражения (1.174) для $\sigma_{\alpha 3}^{(2)}$, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(3)} = & -O_1 O_2 \left\{ \left(A_2 \left(-C_{13KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{13KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - N_{13KL} \eta_{KL} - V_{13KLJ} \eta_{KL,J} - \sigma_{13}^{T(2)} \right) \right)_{,1} + \right. \\ & \left. + \left(A_1 \left(-C_{23KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{23KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - N_{23KL} \eta_{KL} - V_{23KLJ} \eta_{KL,J} - \sigma_{23}^{T(2)} \right) \right)_{,2} \right\} - \quad (1.193) \\ & - A_2 A_{13} \left(C_{11KL}^{(0)} \langle \xi \rangle_{\xi} \eta_{KL}^{(2)} - C_{11KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{11KLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - \right. \\ & \left. - E_{11KLMN} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)} - N_{11KL} \eta_{KL} - \sigma_{11}^{T(2)} \right) - \\ & - A_1 A_{23} \left(C_{22KL}^{(0)} \langle \xi \rangle_{\xi} \eta_{KL}^{(2)} - C_{22KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{22KLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - \right. \\ & \left. - E_{22KLMN} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)} - N_{22KL} \eta_{KL} - \sigma_{22}^{T(2)} \right) \Big\}_{\xi} - \left(\Delta p (\xi + 0.5) + p_- \right) \end{aligned}$$

Раскрывая производные, преобразуем это выражение к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(3)} = & O_1 O_2 \left(A_{21} \left\{ C_{13KL}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} + A_{21} \left\{ R_{13KLJ}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + A_{21} \left\{ N_{13KL} \right\}_{\xi} \eta_{KL} + \right. \\ & + A_{21} \left\{ V_{13KLJ} \right\}_{\xi} \eta_{KL,J} + A_2 \left\{ C_{13KL,1}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} + A_2 \left\{ C_{13KL}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,1}^{(0)} + A_2 \left\{ R_{13KLJ,1}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \\ & + A_2 \left\{ R_{13KLJ}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,J,1}^{(0)} + A_2 \left\{ N_{13KL,1} \right\}_{\xi} \eta_{KL} + A_2 \left\{ N_{13KL} \right\}_{\xi} \eta_{KL,1} + A_2 \left\{ V_{13KLJ,1} \right\}_{\xi} \eta_{KL,J} + \\ & + A_2 \left\{ V_{13KLJ} \right\}_{\xi} \eta_{KL,J,1} + A_{12} \left\{ C_{23KL}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} + A_{12} \left\{ R_{23KLJ}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + A_{12} \left\{ N_{23KL} \right\}_{\xi} \eta_{KL} + \\ & + A_{12} \left\{ V_{23KLJ} \right\}_{\xi} \eta_{KL,J} + A_1 \left\{ C_{23KL,2}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} + A_1 \left\{ C_{23KL}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,2}^{(0)} + A_1 \left\{ R_{23KLJ,2}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \\ & + A_1 \left\{ R_{23KLJ}^{(2)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,J,2}^{(0)} + A_1 \left\{ N_{23KL,2} \right\}_{\xi} \eta_{KL} + A_1 \left\{ N_{23KL} \right\}_{\xi} \eta_{KL,2} + A_1 \left\{ V_{23KLJ,2} \right\}_{\xi} \eta_{KL,J} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A_1 \{V_{23KLJ}\}_\xi \eta_{KL,J2} + A_2 A_{13} \{C_{11KL}^{(0)} < \xi >_\xi\}_\xi \eta_{KL}^{(2)} - A_2 A_{13} \{C_{11KL}^{(2)}\}_\xi \varepsilon_{KL}^{(0)} - \\
& - A_2 A_{13} \{R_{11KLM}^{(2)}\}_\xi \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - A_2 A_{13} \{E_{11KLMN}\}_\xi \varepsilon_{KL,MN}^{(0)} - A_2 A_{13} \{N_{11KL}\}_\xi \eta_{KL} + \\
& + A_1 A_{23} \{C_{22KL}^{(0)} < \xi >_\xi\}_\xi \eta_{KL}^{(2)} - A_1 A_{23} \{C_{22KL}^{(2)}\}_\xi \varepsilon_{KL}^{(0)} - A_1 A_{23} \{R_{22KLM}^{(2)}\}_\xi \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - \\
& - A_1 A_{23} \{E_{22KLMN}\}_\xi \varepsilon_{KL,MN}^{(0)} - A_1 A_{23} \{N_{22KL}\}_\xi \eta_{KL} + \\
& + O_1 O_2 \left\{ \left(A_2 \sigma_{13}^{T(2)} \right)_{,1} + \left(A_1 \sigma_{23}^{T(2)} \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{T(2)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{T(2)} \right\}_\xi - \\
& - (\Delta p(\xi + 0.5) + p_-)
\end{aligned} \tag{1.194}$$

Сгруппируем слагаемые при $\varepsilon_{KL}^{(0)}$, $\varepsilon_{KL,J}^{(0)}$, $\varepsilon_{KL,JM}^{(0)}$, η_{KL} , $\eta_{KL,M}$, $\eta_{KL,MN}$, тогда, вводя обозначения

$$\begin{aligned}
C_{33KL}^{(3)} &= O_1 O_2 \left(A_{2,1} \{C_{13KL}^{(2)}\}_\xi + A_2 \{C_{13KL,1}^{(2)}\}_\xi + \right. \\
& \left. + A_{1,2} \{C_{23KL}^{(2)}\}_\xi + A_1 \{C_{23KL,2}^{(2)}\}_\xi - A_2 A_{13} \{C_{11KL}^{(2)}\}_\xi - A_1 A_{23} \{C_{22KL}^{(2)}\}_\xi \right) \\
R_{33KLJ}^{(3)} &= O_1 O_2 \left(A_{2,1} \{R_{13KLJ}^{(2)}\}_\xi + A_2 \{C_{13KL}^{(2)}\}_\xi \delta_{1J} + A_2 \{R_{13KLJ,1}^{(2)}\}_\xi + \right. \\
& \left. + A_{1,2} \{R_{23KLJ}^{(2)}\}_\xi + A_1 \{C_{23KL}^{(2)}\}_\xi \delta_{2J} + A_1 \{R_{23KLJ,2}^{(2)}\}_\xi - A_2 A_{13} \{R_{11KLJ}^{(2)}\}_\xi - A_1 A_{23} \{R_{22KLJ}^{(2)}\}_\xi \right) \\
E_{33KLJM}^{(3)} &= O_1 O_2 \left(A_2 \{R_{13KLJ}^{(2)}\}_\xi \delta_{1M} + A_1 \{R_{23KLJ}^{(2)}\}_\xi \delta_{2M} - \right. \\
& \left. - A_2 A_{13} \{E_{11KLJM}\}_\xi - A_1 A_{23} \{E_{22KLJM}\}_\xi \right) \\
N_{33KL}^{(3)} &= O_1 O_2 \left(A_{2,1} \{N_{13KL}\}_\xi + A_2 \{N_{13KL,1}\}_\xi + A_{1,2} \{N_{23KL}\}_\xi + \right. \\
& \left. + A_1 \{N_{23KL,2}\}_\xi - A_2 A_{13} \{N_{11KL}\}_\xi - A_1 A_{23} \{N_{22KL}\}_\xi \right) \\
V_{33KLM}^{(3)} &= O_1 O_2 \left(A_{2,1} \{V_{13KLM}\}_\xi + A_2 \{N_{13KL}\}_\xi \delta_{1M} + \right. \\
& \left. + A_2 \{V_{13KLM,1}\}_\xi + A_{1,2} \{V_{23KLM}\}_\xi + A_1 \{N_{23KL}\}_\xi \delta_{2M} + A_1 \{V_{23KLM,2}\}_\xi \right) \\
U_{33KLMN}^{(3)} &= O_1 O_2 \left(A_2 \{V_{13KLM}\}_\xi \delta_{1N} + A_1 \{V_{23KLM}\}_\xi \delta_{2N} \right) \\
W_{KL}^{(3)} &= O_1 O_2 \left(A_2 A_{13} \{C_{11KL}^{(0)} < \xi >_\xi\}_\xi + A_1 A_{23} \{C_{22KL}^{(0)} < \xi >_\xi\}_\xi \right) \\
\sigma_{33}^{T(3)} &= -O_1 O_2 \left\{ \left(A_2 \sigma_{13}^{T(2)} \right)_{,1} + \left(A_1 \sigma_{23}^{T(2)} \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{T(2)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{T(2)} \right\}_\xi
\end{aligned} \tag{1.195}$$

получим окончательное выражение для $\sigma_{33}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(3)} = & C_{33KL}^{(3)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{33KLJ}^{(3)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{33KLJM}^{(3)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + N_{33KL}^{(3)} \eta_{KL} + V_{33KLM}^{(3)} \eta_{KL,M} + \\ & + U_{33KLMN}^{(3)} \eta_{KL,MN} + W_{KL}^{(3)} \eta_{KL}^{(2)} - (\Delta p (\xi + 0.5) + p_-) - \sigma_{33}^{T(3)} \end{aligned} \quad (1.196)$$

1.12 Выражение для компонент полного тензора напряжений

В работах [35,36] было установлено, что для достижения приемлемой инженерной точности вычислений напряжений σ_{IJ} в многослойных пластинах достаточно ограничиться только нулевым и первым приближением, для сдвиговых напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ – нулевым, первым и вторым приближением, а для компонент σ_{33} – третьим приближением. Применим этот же подход для вычисления компонент полного тензора напряжений с точки зрения сохранения минимально необходимого числа членов в асимптотических разложениях.

Тогда для компонент σ_{IJ} получим, сохраняя члены ряда (1.67) до первого приближения включительно:

$$\sigma_{IJ} = \sigma_{IJ}^{(0)} + \varkappa \sigma_{IJ}^{(1)}. \quad (1.197)$$

Выражения для $\sigma_{IJ}^{(0)}$ и $\sigma_{IJ}^{(1)}$ были получены в формулах (1.112) и (1.154).

Подставим их в выражение для σ_{IJ} :

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{T(0)} + \varkappa \left(C_{IJKL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{IJKL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{IJ}^{T(1)} \right). \quad (1.198)$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые при $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и η_{KL} , тогда получим искомое выражение для компонент σ_{IJ} тензора напряжений:

$$\sigma_{IJ} = \hat{C}_{IJKL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{C}_{IJKL}^{(0)} \xi \eta_{KL} - \sigma_{IJ}^T \quad (1.199)$$

где обозначены:

$$\hat{C}_{IJKL}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} + \varkappa C_{IJKL}^{(1)}, \quad (1.200)$$

$$\hat{C}_{IJKL}^{(0)} = \varkappa C_{IJKL}^{(0)},$$

$$\sigma_{IJ}^T = C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} + \varkappa \sigma_{IJ}^{T(1)}.$$

Для сдвиговых компонент $\sigma_{\alpha 3}$ сохраним члены ряда до второго приближения:

$$\sigma_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^{(0)} + \varkappa \sigma_{\alpha 3}^{(1)} + \varkappa^2 \sigma_{\alpha 3}^{(2)}. \quad (1.201)$$

Выражения для $\sigma_{\alpha 3}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha 3}^{(1)}$ и $\sigma_{\alpha 3}^{(2)}$ были получены в формулах (1.104), (1.146) и (1.174). Подставим их в выражение (1.201) для $\sigma_{\alpha 3}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} = & \varkappa \left(-C_{\alpha 3KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha 3KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - \sigma_{\alpha 3}^{T(1)} \right) + \\ & + \varkappa^2 \left(-C_{\alpha 3KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha 3KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - N_{\alpha 3KL} \eta_{KL} - V_{\alpha 3KLJ} \eta_{KL,J} - \sigma_{\alpha 3}^{T(2)} \right) \end{aligned} \quad (1.202)$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые при $\varepsilon_{KL}^{(0)}$, $\varepsilon_{KL,J}^{(0)}$, η_{KL} и $\eta_{KL,J}$, тогда получим искомое выражение для компонент $\sigma_{\alpha 3}$ тензора напряжений:

$$-\sigma_{\alpha 3} = \hat{C}_{\alpha 3KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{R}_{\alpha 3KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \hat{N}_{\alpha 3KL} \eta_{KL} + \hat{V}_{\alpha 3KLJ} \eta_{KL,J} + \sigma_{\alpha 3}^T \quad (1.203)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\alpha 3KL}^{(2)} &= \varkappa C_{\alpha 3KL}^{(1)} + \varkappa^2 C_{\alpha 3KL}^{(2)} \\ \hat{R}_{\alpha 3KLJ}^{(2)} &= \varkappa R_{\alpha 3KLJ}^{(1)} + \varkappa^2 R_{\alpha 3KLJ}^{(2)} \\ \hat{N}_{\alpha 3KL} &= \varkappa^2 N_{\alpha 3KL} \\ \hat{V}_{\alpha 3KLJ} &= \varkappa^2 V_{\alpha 3KLJ} \\ \sigma_{\alpha 3}^T &= \varkappa \sigma_{\alpha 3}^{T(1)} + \varkappa^2 \sigma_{\alpha 3}^{T(2)} \end{aligned} \quad (1.204)$$

Для компонент σ_{33} сохраним члены асимптотического ряда до третьего приближения:

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^{(0)} + \varkappa \sigma_{33}^{(1)} + \varkappa^2 \sigma_{33}^{(2)} + \varkappa^3 \sigma_{33}^{(3)}. \quad (1.205)$$

Выражения для $\sigma_{33}^{(0)}$, $\sigma_{33}^{(1)}$, $\sigma_{33}^{(2)}$ и $\sigma_{33}^{(3)}$ были получены в формулах (1.104), (1.147), (1.174), (1.196). Подставим их в выражение (1.205) для σ_{33} :

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = & \mathfrak{a} \left(C_{33KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{33}^{T(1)} \right) + \\
& + \mathfrak{a}^2 \left(C_{33KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{33KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{33KLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + N_{33KL}^{(2)} \eta_{KL} - \sigma_{33}^{T(2)} \right) + \\
& + \mathfrak{a}^3 \left(C_{33KL}^{(3)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{33KLJ}^{(3)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{33KLJM}^{(3)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + N_{33KL}^{(3)} \eta_{KL} + V_{33KLM}^{(3)} \eta_{KL,M} + \right. \\
& \left. + U_{33KLMN}^{(3)} \eta_{KL,MN} + W_{KL}^{(3)} \eta_{KL}^{(2)} - \sigma_{33}^{T(3)} - (\Delta p (\xi + 0.5) + p_-) \right)
\end{aligned} \tag{1.206}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые при $\varepsilon_{KL}^{(0)}$, $\varepsilon_{KL,J}^{(0)}$, $\varepsilon_{KL,JM}^{(0)}$, η_{KL} , $\eta_{KL,M}$, $\eta_{KL,MN}$, тогда получим явное выражение для компонент σ_{33} тензора напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = & \hat{C}_{33KL}^{(3)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{R}_{33KLJ}^{(3)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \hat{E}_{33KLJM}^{(3)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + \hat{N}_{33KL}^{(3)} \eta_{KL} + \\
& + \hat{V}_{33KLM}^{(3)} \eta_{KL,M} + \hat{U}_{33KLMN}^{(3)} \eta_{KL,MN} + \hat{W}_{KL}^{(3)} \eta_{KL}^{(2)} - \sigma_{33}^T - \mathfrak{a}^3 (\Delta p (\xi + 0.5) + p_-).
\end{aligned} \tag{1.207}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{33KL}^{(3)} &= \mathfrak{a} C_{33KL}^{(1)} + \mathfrak{a}^2 C_{33KL}^{(2)} + \mathfrak{a}^3 C_{33KL}^{(3)}, \\
\hat{R}_{33KLJ}^{(3)} &= \mathfrak{a}^2 R_{33KLJ}^{(2)} + \mathfrak{a}^3 R_{33KLJ}^{(3)}, \\
\hat{E}_{33KLJM}^{(3)} &= \mathfrak{a}^2 E_{33KLJM}^{(2)} + \mathfrak{a}^3 E_{33KLJM}^{(3)}, \\
\hat{N}_{33KL}^{(3)} &= \mathfrak{a}^2 N_{33KL}^{(2)} + \mathfrak{a}^3 N_{33KL}^{(3)}, \\
\hat{V}_{33KLM}^{(3)} &= \mathfrak{a}^3 V_{33KLM}^{(3)}, \\
\hat{U}_{33KLMN}^{(3)} &= \mathfrak{a}^3 U_{33KLMN}^{(3)}, \\
\hat{W}_{KL}^{(3)} &= \mathfrak{a}^3 W_{KL}^{(3)}, \\
\sigma_{33}^T &= \mathfrak{a} \sigma_{33}^{T(1)} + \mathfrak{a}^2 \sigma_{33}^{T(2)} + \mathfrak{a}^3 \sigma_{33}^{T(3)}.
\end{aligned} \tag{1.208}$$

В итоге получены выражения для полного тензора напряжений через деформации и кривизны, которые, в свою очередь, выражаются через перемещения нулевого приближения.

1.13 Осредненные уравнения равновесия многослойных оболочек.

Из результатов построения асимптотического решения уравнений равновесия тонкой оболочки (раздел 1.5) следует, что после приравнивания членов асимптотических ряда (1.77) к величинам $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$, не зависящим от ξ ,

$$N_\alpha^{(-1)} = 0, N_3^{(-1)} = 0, N_\alpha^{(n)} = h_\alpha^{(n)}, N_3^{(n)} = h_3^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots \alpha = 1, 2. \quad (1.209)$$

разложения (1.77) принимают вид

$$\begin{cases} h_3^{(0)} + \varepsilon h_3^{(1)} + \varepsilon^2 h_3^{(2)} + \dots = 0, \\ h_\alpha^{(0)} + \varepsilon h_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 h_\alpha^{(2)} + \dots = 0. \end{cases} \quad (1.210)$$

Подставим в эти уравнения выражения (1.119) и (1.120) для функций $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$, тогда получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (A_1 A_2 f_\alpha^{(n)} + \langle (A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n)})_{,\alpha} + (A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} - \\ - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n)} + A_\beta A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n)} \rangle) = 0, \end{aligned} \quad (1.211)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (A_1 A_2 (\Delta S_3^{(n+1)} + f_3^{(n)}) + \\ + \langle (A_2 \sigma_{13}^{(n)})_{,1} + (A_1 \sigma_{23}^{(n)})_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n)} \rangle) = 0. \end{aligned} \quad (1.212)$$

Примем во внимание, что коэффициенты $A_\alpha A_{\beta 3} A_{\alpha,\beta}$ не зависят от ξ , и их можно вынести за знак операции осреднения, а также учтем выражения (1.102) и (1.121) для функций $f_\alpha^{(n)}$ и $\Delta S_3^{(n)}$, тогда получим

$$\begin{aligned} \left(A_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{\alpha\alpha}^{(n)} \rangle \right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} \rangle \right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} \rangle - \\ - A_{\beta,\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{\beta\beta}^{(n)} \rangle + A_\beta A_{\alpha 3} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{\alpha 3}^{(n)} \rangle + A_1 A_2 \langle \rho f_\alpha \rangle = 0, \end{aligned} \quad (1.213)$$

$$\begin{aligned} \left(A_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{13}^{(n)} \rangle \right)_{,1} + \left(A_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{23}^{(n)} \rangle \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{11}^{(n)} \rangle - \\ - A_1 A_{23} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \langle \sigma_{22}^{(n)} \rangle + A_1 A_2 (\langle \rho f_3 \rangle - \varepsilon^2 \Delta p) = 0. \end{aligned} \quad (1.214)$$

Введем обозначения для усилий T_{IJ} , моментов M_{IJ} и перерезывающих сил Q_I в оболочке:

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \langle \sigma_{IJ} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \langle \sigma_{IJ}^{(n)} \rangle, \\ M_{IJ} &= \mathfrak{a} \langle \xi \sigma_{IJ} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^{n+1} \langle \xi \sigma_{IJ}^{(n)} \rangle, \\ Q_I &= \langle \sigma_{I3} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \langle \sigma_{I3}^{(n)} \rangle, \end{aligned} \quad (1.215)$$

и осредненных массовых сил, действующих на оболочку

$$F_i = \langle \rho f_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.216)$$

Тогда уравнения (1.213) и (1.214) можно записать в следующем виде

$$\left(A_{\beta} T_{\alpha\alpha} \right)_{,\alpha} + \left(A_{\alpha} T_{\alpha\beta} \right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha} T_{\beta\beta} + A_{\beta} A_{\alpha 3} Q_{\alpha} + A_1 A_2 F_{\alpha} = 0, \quad (1.217)$$

$$\left(A_2 Q_1 \right)_{,1} + \left(A_1 Q_2 \right)_{,2} - A_2 A_{13} T_{11} - A_1 A_{23} T_{22} + A_1 A_2 (F_3 - \Delta \bar{p}) = 0, \quad (1.218)$$

где обозначено $\Delta \bar{p} = \mathfrak{a}^2 \Delta p$.

Для вывода уравнения моментов оболочки рассмотрим исходные уравнения равновесия (1.28) с учетом введения локальных и глобальных координат (1.41) и правил (1.43), тогда имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathfrak{a}} (H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3})_{/3} + \left(H_{\beta} H_3 \sigma_{\alpha\alpha} \right)_{,\alpha} + \left(H_{\alpha} H_3 \sigma_{\alpha\beta} \right)_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} H_3 \sigma_{\alpha\beta} - \\ & - H_{\beta,\alpha} H_3 \sigma_{\beta\beta} + \frac{1}{\mathfrak{a}} H_{\beta} H_{\alpha/3} \sigma_{\alpha 3} - H_{\beta} H_{3,\alpha} \sigma_{33} + H_1 H_2 H_3 \rho f_{\alpha} = 0; \end{aligned} \quad (1.219)$$

Домножим это уравнение на $\xi \mathfrak{a}$ и проинтегрируем его по толщине, тогда получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \langle \xi (H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle + \mathfrak{a} \langle \xi \left(H_{\beta} H_3 \sigma_{\alpha\alpha} \right)_{,\alpha} \rangle + \mathfrak{a} \langle \xi \left(H_{\alpha} H_3 \sigma_{\alpha\beta} \right)_{,\beta} \rangle + \\ & + \mathfrak{a} \langle \xi H_{\alpha,\beta} H_3 \sigma_{\alpha\beta} \rangle - \mathfrak{a} \langle H_{\beta,\alpha} H_3 \xi \sigma_{\beta\beta} \rangle + \langle \xi H_{\beta} H_{\alpha/3} \sigma_{\alpha 3} \rangle - \\ & - \mathfrak{a} \langle \xi H_{\beta} H_{3,\alpha} \sigma_{33} \rangle + \mathfrak{a} \langle \xi H_1 H_2 H_3 \rho f_{\alpha} \rangle = 0; \end{aligned} \quad (1.220)$$

Преобразуем в этом выражении слагаемые, не содержащие \mathfrak{a}

$$\begin{aligned}
& \langle \xi(H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle = \langle (\xi H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle - \langle H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3} \rangle = \\
& = 0.5(H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3})_{0.5} + 0.5(H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3})_{-0.5} - \langle H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3} \rangle = - \langle H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3} \rangle \\
& \langle \xi H_\beta H_{\alpha/3} \sigma_{\alpha 3} \rangle = \langle (\xi H_\beta H_\alpha \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle - \langle H_\alpha (\xi H_\beta \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle = \\
& = 0.5(H_\beta H_\alpha \sigma_{\alpha 3})_{0.5} + 0.5(H_\beta H_\alpha \sigma_{\alpha 3})_{-0.5} - \langle H_\alpha (\xi H_\beta \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle = \\
& = - \langle H_\alpha (\xi H_\beta \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle
\end{aligned} \tag{1.221}$$

Здесь применено правило интегрирования по частям, а также использовано граничное условие (1.58): $(\sigma_{\alpha 3})_{\pm 0.5} = 0$.

Применим теперь к формулам (1.221) соотношения (1.44) модели тонкой оболочки, тогда получим

$$\langle \xi(H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle = - \langle H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3} \rangle = -A_1 A_2 \langle \sigma_{\alpha 3} \rangle = -A_1 A_2 Q_\alpha \tag{1.222}$$

$$\begin{aligned}
\langle \xi H_\beta H_{\alpha/3} \sigma_{\alpha 3} \rangle &= - \langle H_\alpha (\xi H_\beta \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle = -A_\alpha A_\beta \langle (\xi \sigma_{\alpha 3})_{/3} \rangle = \\
&= -A_\alpha A_\beta 0.5((\sigma_{\alpha 3})_{0.5} + (\sigma_{\alpha 3})_{-0.5}) = 0
\end{aligned} \tag{1.223}$$

Здесь использовано определение (1.215) перерезывающих сил Q_α , а также граничное условие $(\sigma_{\alpha 3})_{\pm 0.5} = 0$.

Подставляя (1.222) и (1.223) в (1.220), и применяя к этому уравнению соотношения (1.44) модели тонкой пластины, получаем

$$\begin{aligned}
-A_1 A_2 Q_\alpha + \mathfrak{x} \left(A_\beta \langle \xi \sigma_{\alpha\alpha} \rangle \right)_{,\alpha} + \mathfrak{x} \left(A_\alpha \langle \xi \sigma_{\alpha\beta} \rangle \right)_{,\beta} + \mathfrak{x} A_{\alpha,\beta} \langle \xi \sigma_{\alpha\beta} \rangle - \\
- \mathfrak{x} A_{\beta,\alpha} \langle \xi \sigma_{\beta\beta} \rangle + \mathfrak{x} A_1 A_2 \langle \xi \rho f_\alpha \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{1.224}$$

Используя определение (1.215) моментов, получаем окончательно уравнение моментов оболочки

$$(A_\beta M_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (A_\alpha M_{\alpha\beta})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha} M_{\beta\beta} - A_1 A_2 (Q_\alpha - m_\alpha) = 0 \tag{1.225}$$

Здесь обозначены моменты внешних массовых сил

$$m_\alpha = \langle \xi \rho f_\alpha \rangle. \tag{1.226}$$

Система (1.217), (1.218) и (1.225) – это искомые осредненные уравнения равновесия многослойной оболочки, Эти уравнения формально в точности совпадают с классическими осредненными уравнениями равновесия теории оболочек Кирхгофа-Лява [9,18] и Тимошенко [14], однако они выведены с помощью асимптотической теории.

1.14 Осредненные определяющие соотношения теории оболочек

Подставляя выражения (1.199) для напряжений σ_{IJ} в формулы (1.215), получим следующие выражения для усилий и моментов

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} - T_{IJ}^T, \quad (1.227)$$

$$M_{IJ} = \bar{B}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} - M_{IJ}^T, \quad (1.228)$$

где обозначены средние функции – тензоры мембранных жесткостей, изгибных жесткостей и смешанных жесткостей оболочки

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL} &= \langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle + \varkappa \langle C_{IJKL}^{(1)} \rangle, \\ B_{IJKL} &= \varkappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \end{aligned} \quad (1.229)$$

$$\bar{B}_{IJKL} = \varkappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle + \varkappa^2 \langle \xi C_{IJKL}^{(1)} \rangle,$$

$$D_{IJKL} = \varkappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle,$$

а также тепловые усилия и моменты в оболочке

$$T_{IJ}^T = \langle \sigma_{IJ}^T \rangle, \quad M_{IJ}^T = \varkappa \langle \xi \sigma_{IJ}^T \rangle. \quad (1.230)$$

1.15 Осредненная система уравнений термоупругости для многослойных оболочек

Соберем вместе кинематические соотношения, описывающие тангенциальные деформации срединной поверхности оболочки (1.89) при $n = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} &= O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(0)} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(0)} + A_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(0)}; \\ 2\varepsilon_{12}^{(0)} &= A_1 O_2 (u_1^{(0)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u_2^{(0)} O_2)_{,1}; \end{aligned} \quad (1.231)$$

и соотношения (1.136), описывающие искривление срединной поверхности оболочки

$$-\eta_{\alpha\alpha} = O_\alpha (O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}))_{,\alpha} + O_1 O_2 O_\beta A_{\alpha,\beta} (u_{3,\beta}^{(0)} - A_{\beta 3} u_\beta^{(0)}) \quad (1.232)$$

$$-2\eta_{12} = A_1 O_2 (O_1^2 (u_{3,1}^{(0)} - A_{13} u_1^{(0)}))_{,2} + A_2 O_1 (O_2^2 (u_{3,2}^{(0)} - A_{23} u_2^{(0)}))_{,1}.$$

В итоге получим кинематические соотношения асимптотической теории оболочек. Эти уравнения с точностью до обозначений ($O_\alpha A_{\alpha 3} = k_\alpha = 1/R_\alpha$) совпадают с кинематическими соотношениями общей теории тонких оболочек Кирхгофа-Лява, приведенными, например, в [9]. Выражения $\gamma_\alpha = O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)})$ представляют собой углы поворота нормали.

Присоединим к этим соотношениям уравнения равновесия оболочек (1.217), (1.218) и (1.225)

$$(A_\beta T_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (A_\alpha T_{\alpha\beta})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha} T_{\beta\beta} + A_\beta A_{\alpha 3} Q_\alpha + A_1 A_2 F_\alpha = 0, \quad (1.233)$$

$$(A_2 Q_1)_{,1} + (A_1 Q_2)_{,2} - A_2 A_{13} T_{11} - A_1 A_{23} T_{22} + A_1 A_2 (F_3 - \Delta \bar{p}) = 0, \quad (1.234)$$

$$(A_\beta M_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (A_\alpha M_{\alpha\beta})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha} M_{\beta\beta} - A_1 A_2 (Q_\alpha - m_\alpha) = 0 \quad (1.235)$$

и определяющие соотношения (1.227), (1.228)

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} - T_{IJ}^T, \quad (1.236)$$

$$M_{IJ} = \bar{B}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} - M_{IJ}^T. \quad (1.237)$$

В результате получим итоговую осредненную систему уравнений асимптотической теории анизотропных оболочек.

После подстановки (1.231) и (1.232) в (1.236), (1.237), и далее в систему (1.233) – (1.235), получаем итоговую систему 5 уравнений теории оболочек относительно 5 неизвестных функций: $u_i^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ и Q_i , определенных на срединной поверхности Σ_0 оболочки.

К этой системе присоединяем граничные условия на краю $\partial\Sigma_0$ оболочки, представляющем собой пересечение поверхностей срединной и торцевой поверхностей: $\partial\Sigma_{0u} = \Sigma_0 \cap \Sigma_{Tu}$. Для вывода этих граничных условий воспользуемся трехмерными граничными условиями (1.58) на Σ_{Tu} , подставим в них асимптотическое разложение (1.63) и ограничимся только первым приближением:

$$\Sigma_{Tu} : u_i^{(0)} + \varkappa u_i^{(1)} = u_{ei}. \quad (1.238)$$

Осредним это уравнение с учетом наложенного требования (1.98) $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$, тогда, поскольку $u_i^{(0)}$ и u_{ei} ξ , получим

$$\partial \Sigma_{0u} : u_i^{(0)} = u_{ei}. \quad (1.239)$$

Если же уравнение (1.233) продифференцировать по ξ , а затем подставить в него выражение (1.109) для $u_\alpha^{(1)}$ и умножить скалярно на вектор нормали ν_I к контуру $\partial \Sigma_0$, то получим

$$\partial \Sigma_{0u} : \sum_{\alpha=1}^2 \nu_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}) = 0. \quad (1.240)$$

В итоге имеем 4 граничных условия (1.239), (1.240) на контуре $\partial \Sigma_{0u}$. При $u_{ei} = 0$ получаем условия жесткого закрепления оболочки на этом контуре.

После решения этой осредненной системы уравнений для оболочек с граничными условиями и определения всех 5 функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ и Q_I , могут быть вычислены все 6 компонент тензора напряжений по формулам (1.199), (1.203) и (1.207) без решения дополнительных задач, а только по аналитическим соотношениям.

Для определения температуры $\theta^{(0)}$ необходимо решить задачу теплопроводности (1.85), (1.86), (1.91) в нулевом приближении:

$$\frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} = -q_{3/3}^{(-1)} \quad (1.241)$$

$$-q_3^{(-1)} = \lambda_{33} g_3^{(-1)}, \quad g_3^{(-1)} = \theta_{/3}^{(0)}$$

$$\Sigma_{3\pm} : q_3^{(-1)} = \pm q_{e\pm}$$

$$t = 0: \quad \theta = \theta_0$$

Для вычисления температуры $\theta^{(n)}$ в более высоких приближениях (в формулах участвует температура до 3 приближения) необходимо решить задачи теплопроводности (1.92), (1.93), (1.99):

$$\frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial t} + O_1 O_2 (A_2 q_{1,1}^{(n-2)} + A_1 q_{2,2}^{(n-2)}) + q_{3/3}^{(n-1)} = 0, \quad (1.242)$$

$$-q_I^{(n-2)} = \lambda_{IJ} g_J^{(n-2)}, \quad -q_3^{(n-1)} = \lambda_{33} g_3^{(n-1)},$$

$$g_J^{(n-2)} = \theta_{,J}^{(n-2)}, \quad g_3^{(n-1)} = \theta_{/3}^{(n)}$$

$$\Sigma_{3\pm} : q_3^{(n-1)} = 0; \quad t = 0 : \theta^{(n)} = 0.$$

1.16 Граф связи формул для вычисления компонент тензоров, необходимых для расчета всех компонент тензора напряжений

Для вычисления компонент всех тензоров, входящих в соотношения (1.199), (1.203) и (1.207) для вычисления компонент тензоров, необходимых для расчета всех компонент тензора напряжений σ_{IJ} , $\sigma_{\alpha 3}$, σ_{33} в оболочке составлена структурная схема в виде ориентированного графа связи компонент различных тензоров, входящих в эти формулы и необходимых для расчета этих компонент тензора напряжений.

На рисунке 1.2 компоненты C_{IJKL} , C_{IJ33} , C_{3333} , C_{33KL} – входные данные, а $\hat{C}_{IJKL}^{(1)}$, $\hat{C}_{IJKL}^{(0)}$, $\hat{C}_{\alpha 3KL}^{(2)}$, $\hat{R}_{\alpha 3KL}^{(2)}$, $\hat{N}_{\alpha 3KL}$, $\hat{V}_{\alpha 3KLJ}$, $\hat{C}_{33KL}^{(3)}$, $\hat{R}_{33KLJ}^{(3)}$, $\hat{E}_{33KLJM}^{(3)}$, $\hat{N}_{33KL}^{(3)}$, $\hat{V}_{33KLM}^{(3)}$, $\hat{U}_{33KLMN}^{(3)}$, $\hat{W}_{KL}^{(3)}$ – выходные данные. Черные стрелки обозначают линейную связь компонент, цветные – связь через осреднения.

2. Асимптотическая теория термоупругости тонких цилиндрических оболочек

2.1 Геометрические соотношения для цилиндрических оболочек

Рассмотрим случай цилиндрических оболочек, когда срединная поверхность Σ_0 оболочки является цилиндром радиуса R и длиной L_0 .

Введем цилиндрическую систему координат z, s, r с началом координат O – на одном из торцов оболочки, где $s = \varphi R$ – длина дуги окружной координаты, а φ – угол, z – осевая координата по оси симметрии оболочки, r – радиальная координата.

Введем безразмерные цилиндрические координаты X^i , выбирая в качестве характерного размера L – радиус R (рисунок 2.1):

$$X^1 = z/R, \quad X^2 = \varphi, \quad X^3 = (r/R - 1) \quad (2.1)$$

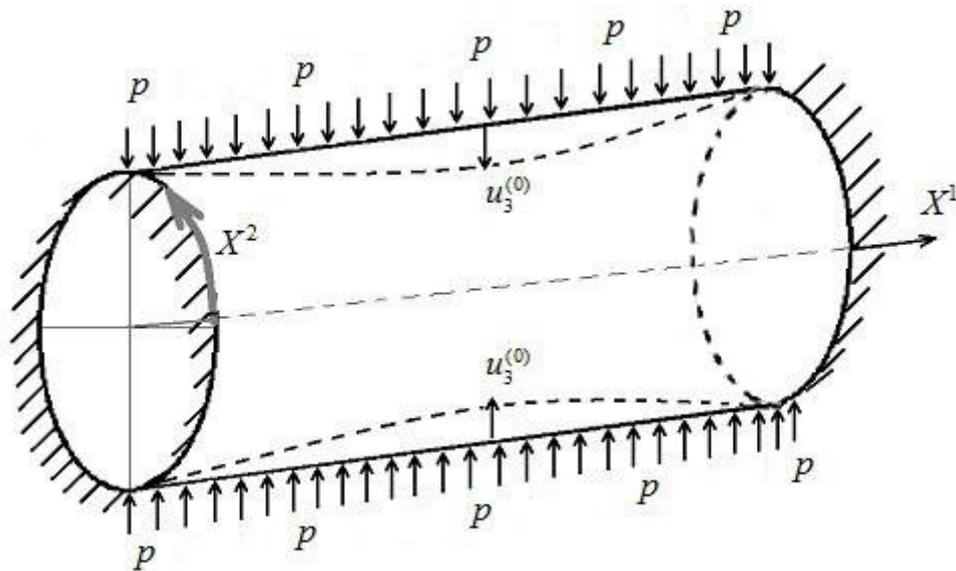


Рисунок 2.1 – Цилиндрическая оболочка

Срединная поверхность цилиндрической оболочки имеет координаты $X^3 = 0$ и $r = R$.

Введем малый параметр ε (1.40) и локальную координату ξ по толщине оболочки по формуле (1.41):

$$\xi = \frac{X^3}{\varepsilon} = \frac{r-R}{R\varepsilon} = \frac{(r-R)R}{Rh} = \frac{(r-R)}{h}. \quad (2.2)$$

Внутренняя и внешняя поверхности оболочки $\Sigma_{3\pm}$ имеют координаты

$$\Sigma_{3\pm}: r = R \pm h/2, \quad X^3 = \pm \frac{h}{2R} = \pm \frac{\varepsilon}{2}, \quad \xi = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Для тонкой оболочки в цилиндрических координатах безразмерные параметры Ламе H_α и их производные $H_{\alpha/3}$ и $H_{\alpha,\beta}$ (1.44), (1.45) имеют следующий вид [2, 26]:

$$\begin{aligned} H_1 = 1; \quad H_2 = 1, \quad H_3 = 1 & \quad (2.4) \\ A_1 = A_2 = 1, \quad O_1 = O_2 = 1, \\ A_{\alpha,\beta} = 0, \\ H_{\alpha/3} = \varepsilon A_{\alpha 3}, \quad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 1, \\ k_1 = 0, \quad k_2 = 1. \end{aligned}$$

2.2 Осредненная система уравнений теории термоупругости цилиндрических оболочек

С учетом (2.4) кинематические соотношения (1.231) для тангенциальных деформаций срединной поверхности цилиндрических оболочек принимают вид:

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)}, \quad \varepsilon_{22}^{(0)} = u_{2,2}^{(0)} + u_3^{(0)}, \quad 2\varepsilon_{12}^{(0)} = u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}, \quad (2.5)$$

а соотношения (1.232) для искривлений срединной поверхности цилиндрических оболочек принимают следующий вид:

$$\eta_{11} = -u_{3,11}^{(0)}, \quad \eta_{22} = -u_{3,22}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}, \quad \eta_{12} = -u_{3,12}^{(0)} + \frac{1}{2}u_{2,1}^{(0)}. \quad (2.6)$$

Осредненная система уравнений равновесия (1.217), (1.218) и (1.225) для случая цилиндрических оболочек, с учетом (2.4) принимает вид

$$\begin{cases} T_{11,1} + T_{12,2} + F_1 = 0, \\ T_{22,2} + T_{12,1} + Q_2 + F_2 = 0, \\ M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1 + m_1 = 0, \\ M_{22,2} + M_{12,1} - Q_2 + m_2 = 0, \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} - T_{22} + F_3 - \Delta\bar{p} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

В системе обозначено $\Delta\bar{p} = \varkappa^2 \Delta p$.

Определяющие соотношения (1.227), (1.228) для оболочки в цилиндрических координатах связывают усилия, моменты и перерезывающие силы с деформациями и искривлениями срединной поверхности $\varepsilon_{KL}^{(0)}, \eta_{KL}$:

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} - T_{IJ}^T, \quad (2.8)$$

$$M_{IJ} = \bar{B}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} - M_{IJ}^T, \quad (2.9)$$

мембранные жесткости оболочки \bar{C}_{IJKL} , смешанные жесткости B_{IJKL} , \bar{B}_{IJKL} и изгибные жесткости D_{IJKL} определяются по формулам (1.229), а тепловые усилия и моменты T_{IJ}^T, M_{IJ}^T – по формулам (1.230).

Система уравнений (2.5) – (2.9) состоит из 5 уравнений относительно 5 неизвестных функций $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}$ и Q_1, Q_2 .

После решения двумерной системы уравнений (2.5) – (2.9) все 6 напряжений в слоях оболочки вычисляются по явным аналитическим формулам (1.199), (1.203), (1.207).

Для определения температуры ограничимся только нулевым приближением, тогда для вычисления $\theta^{(0)}$ получаем задачу (1.242), при этом $\varepsilon_{kl}^{T(n)} = 0, n \geq 1$.

2.3 Соотношения для вычисления напряжений в цилиндрической оболочке

Для частного случая цилиндрических координат выражения для тензоров, участвующих явным или косвенным образом в формулах (1.199), (1.203), (1.207), по которым производится вычисление всех компонент тензора напряжений σ_{IJ} , $\sigma_{\alpha 3}$, σ_{33} , упрощаются.

Формулы (1.137) принимают вид

$$\Phi_{11KL} = 0, \quad \Phi_{22KL} = U_{3KL}^{(1)} = -\langle Z_{3KL} \rangle_{\xi}, \quad \Phi_{12KL} = 0, \quad (2.10)$$

$$\Phi_{11}^{T(1)} = 0, \quad \Phi_{22}^{T(1)} = U_3^{T(1)} = \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle_{\xi}, \quad \Phi_{12}^{T(1)} = 0.$$

Соотношения (1.144) принимают вид

$$C_{\alpha 3KL}^{(1)} = 0, \quad R_{\alpha K LJ}^{(1)} = \{C_{\alpha \alpha KL}^{(0)}\}_{\xi} \delta_{\alpha J} + \{C_{\alpha \beta KL}^{(0)}\}_{\xi} \delta_{\beta J}, \quad C_{33KL}^{(1)} = \{C_{22KL}^{(0)}\}_{\xi}. \quad (2.11)$$

Тепловые напряжения первого приближения (1.145) принимают вид

$$\sigma_{\alpha 3}^{T(1)} = -\{C_{\alpha \alpha kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi, \alpha} - \{C_{\alpha \beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi, \beta}, \quad \sigma_{33}^{T(1)} = \{C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi}. \quad (2.12)$$

Формулы (1.155) и (1.156) с учетом (2.10) принимают вид

$$C_{IJKL}^{(1)} = C_{IJ22}^{(0)} \Phi_{22KL} + G_{IJKL}^{(1)}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{T(1)} &= \tilde{\sigma}_{IJ}^{T(1)} - C_{IJ22}^{(0)} \Phi_{22}^{T(1)} = \\ &= C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(1)} + Z_{3IJ} \{C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} - C_{IJ22}^{(0)} \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle_{\xi}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Выражения (1.161) принимают вид

$$J_{3KL} = \langle Z_{3KL} \xi \rangle_{\xi},$$

$$U_{3KL}^{(2)} = \langle C_{3333}^{-1} C_{33KL}^{(1)} \rangle_{\xi} - \langle Z_{322} \Phi_{22KL} \rangle_{\xi}, \quad (2.15)$$

$$U_{\alpha KL}^{(2)} = 0,$$

$$K_{\alpha K LJ} = \langle C_{\alpha 313}^{-1} R_{IKLJ}^{(1)} \rangle_{\xi} + \langle U_{3KL}^{(1)} \rangle_{\xi} \delta_{\alpha J},$$

$$U_3^{T(2)} = -\langle C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{T(1)} \rangle_\xi - \langle Z_{322} \Phi_{22}^{T(1)} \rangle_\xi + \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(1)} \rangle_\xi,$$

$$U_\alpha^{T(2)} = -\langle C_{\alpha 3 K 3}^{-1} \sigma_{K 3}^{T(1)} \rangle_\xi - \langle U_3^{T(1)} \rangle_{\xi, \alpha}.$$

Формулы (1.172) принимают вид

$$C_{\alpha 3 K L}^{(2)} = 0,$$

$$R_{13 K L J}^{(2)} = \{C_{11 K L}^{(1)}\}_\xi \delta_{1 J} + \{C_{12 K L}^{(1)}\}_\xi \delta_{2 J},$$

$$R_{23 K L J}^{(2)} = \{C_{22 K L}^{(1)}\}_\xi \delta_{2 J} + \{C_{12 K L}^{(1)}\}_\xi \delta_{1 J} - \{R_{2 K L J}^{(1)}\}_\xi,$$

$$R_{33 K L J}^{(2)} = \{C_{13 K L}^{(1)}\}_\xi \delta_{1 J} + \{C_{23 K L}^{(1)}\}_\xi \delta_{2 J} = 0,$$

$$N_{\alpha 3 K L} = 0, \quad (2.16)$$

$$V_{13 K L J} = \{C_{11 K L}^{(0)} \xi\}_\xi \delta_{1 J} + \{C_{12 K L}^{(0)} \xi\}_\xi \delta_{2 J},$$

$$V_{23 K L J} = \{C_{22 K L}^{(0)} \xi\}_\xi \delta_{2 J} + \{C_{12 K L}^{(0)} \xi\}_\xi \delta_{1 J},$$

$$C_{33 K L}^{(2)} = \{C_{22 K L}^{(1)}\}_\xi = \{C_{2222}^{(0)} \Phi_{22 K L} + G_{22 K L}^{(1)}\}_\xi,$$

$$E_{33 K L J M}^{(2)} = \{R_{1 K L J}^{(1)}\}_\xi \delta_{1 M} + \{R_{2 K L J}^{(1)}\}_\xi \delta_{2 M},$$

$$N_{33 K L}^{(2)} = \{C_{22 K L}^{(0)} \xi\}_\xi.$$

А также обозначения для тепловых напряжений 2-го приближения

$$\sigma_{\alpha 3}^{T(2)} = -\{(\sigma_{\alpha \alpha}^{T(1)})_{,\alpha} + (\sigma_{\alpha \beta}^{T(1)})_{,\beta} + \delta_{\alpha 2} \sigma_{\alpha 3}^{T(1)}\}_\xi, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{33}^{T(2)} = -\{\sigma_{13,1}^{T(1)} + \sigma_{23,2}^{T(1)} - \sigma_{22}^{T(1)}\}_\xi.$$

Формулы (1.178) и (1.179) принимают вид

$$\eta_{11}^{(2)} = 0, \quad \eta_{22}^{(2)} = -u_{3,22}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}, \quad \eta_{12}^{(2)} = -\frac{1}{2}(u_{3,12}^{(0)} - u_{2,1}^{(0)}) \quad (2.18)$$

Соотношения (1.182) принимают вид

$$\begin{aligned}
L_{11KL}^{(2)} &= 0, \quad L_{22KL}^{(2)} = J_{3KL}, \quad L_{12KL}^{(2)} = 0, \\
\Phi_{11KL}^{(2)} &= 0, \quad \Phi_{22KL}^{(2)} = -U_{3KL}^{(2)}, \quad \Phi_{12KL}^{(2)} = 0, \\
B_{\alpha\alpha KLJ}^{(2)} &= K_{\alpha KLJ, \alpha}, \quad 2B_{12KLJ}^{(2)} = K_{1KLJ, 2} + K_{2KLJ, 1}, \\
K_{\alpha\alpha KLJM}^{(2)} &= K_{\alpha KLJ} \delta_{\alpha M}, \quad 2K_{12KLJM}^{(2)} = K_{1KLJ} \delta_{2M} + K_{2KLJ} \delta_{1M}, \\
\Phi_{\alpha\alpha}^{T(2)} &= U_{\alpha, \alpha}^{T(2)} + \delta_{\alpha 2} U_3^{T(2)}, \quad 2\Phi_{12}^{T(2)} = U_{1,2}^{(2)} + U_{2,1}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Формулы (1.190) принимают вид

$$\begin{aligned}
C_{IJKL}^{(2)} &= C_{IJ22}^{(0)} \Phi_{22KL}^{(2)} - Z_{3IJ} C_{33KL}^{(2)}, \\
R_{IJKLM}^{(2)} &= C_{IJSP}^{(0)} B_{SPKLM}^{(2)} - Z_{3IJ} R_{33KLM}^{(2)}, \\
E_{IJKLMN} &= C_{IJSP}^{(0)} K_{SPKLMN}^{(2)} - Z_{3IJ} E_{33KLMN}^{(2)}, \\
N_{IJKL} &= C_{IJ22}^{(0)} L_{22KL}^{(2)} - Z_{3IJ} N_{33KL}^{(2)}, \\
\sigma_{IJ}^{T(2)} &= -C_{IJKL}^{(0)} \Phi_{KL}^{T(2)} + Z_{3IJ} \sigma_{33}^{T(2)} + C_{IJKl}^{(0)} \epsilon_{kl}^{T(2)}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Выражения (1.195) принимают вид

$$\begin{aligned}
C_{33KL}^{(3)} &= -\{C_{22KL}^{(2)}\}_{\xi}, \\
R_{33KLJ}^{(3)} &= \{C_{13KL}^{(2)}\}_{\xi} \delta_{1J} + \{C_{23KL}^{(2)}\}_{\xi} \delta_{2J} - \{R_{22KLJ}^{(2)}\}_{\xi}, \\
E_{33KLJM}^{(3)} &= \{R_{13KLJ}^{(2)}\}_{\xi} \delta_{1M} + \{R_{23KLJ}^{(2)}\}_{\xi} \delta_{2M} - \{E_{22KLJM}^{(2)}\}_{\xi}, \\
N_{33KL}^{(3)} &= -\{N_{22KL}\}_{\xi}, \\
V_{33KLM}^{(3)} &= \{N_{13KL}\}_{\xi} \delta_{1M} + \{N_{23KL}\}_{\xi} \delta_{2M} = 0, \\
U_{33KLMN}^{(3)} &= \{V_{13KLM}\}_{\xi} \delta_{1N} + \{V_{23KLM}\}_{\xi} \delta_{2N}, \\
W_{KL}^{(3)} &= \{C_{22KL}^{(0)} \langle \xi \rangle_{\xi}\}_{\xi}, \\
\sigma_{33}^{T(3)} &= -\{\sigma_{13,1}^{T(2)} + \sigma_{23,2}^{T(2)} - \sigma_{22}^{T(2)}\}_{\xi}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Формулы (1.204) и (1.208) сохраняют свой вид без изменений за исключением формулы

$$\hat{N}_{\alpha 3KL} = 0. \quad (2.22)$$

С учетом этих выражений (2.10) – (2.22) компоненты тензора напряжений σ_{IJ} , $\sigma_{\alpha 3}$, σ_{33} в цилиндрической оболочке вычисляются по формулам (1.199), (1.203) и (1.207). Сохраняя в этих формулах только главные члены по отношению к малому параметру ε , получаем следующие выражения:

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} + \varepsilon C_{IJKL}^{(0)} \xi \eta_{KL}, \quad (2.23)$$

– для тангенциальных напряжений;

$$-\sigma_{\alpha 3} = \varepsilon \left(R_{\alpha K LJ}^{(1)} \varepsilon_{KL, J}^{(0)} - \left\{ C_{\alpha \alpha kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi, \alpha} - \left\{ C_{\alpha \beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi, \beta} \right) + \varepsilon^2 V_{\alpha 3KLJ} \eta_{KL, J},$$

$$R_{\alpha K LJ}^{(1)} = \left\{ C_{\alpha \alpha KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{\alpha J} + \left\{ C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{\beta J}, \quad (2.24)$$

$$V_{\alpha 3KLJ} = \left\{ C_{\alpha \alpha KL}^{(0)} \xi \right\}_{\xi} \delta_{\alpha J} + \left\{ C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \xi \right\}_{\xi} \delta_{\beta J},$$

– для касательных межслойных напряжений;

$$\sigma_{33} = \varepsilon \left(\left\{ C_{22KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\{ C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi} \right) + \varepsilon^2 \left(E_{33KLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL, JM}^{(0)} + \left\{ C_{22KL}^{(0)} \xi \right\}_{\xi} \eta_{KL} \right) + \varepsilon^3 \left(p_- + \Delta p (\xi + 0.5) + U_{33KLMN}^{(3)} \eta_{KL, MN} + \left\{ C_{22KL}^{(0)} \langle \xi \rangle_{\xi} \right\}_{\xi} \eta_{KL}^{(2)} \right),$$

$$E_{33KLJM}^{(2)} = \left\{ R_{1KLJ}^{(1)} \right\}_{\xi} \delta_{1M} + \left\{ R_{2KLJ}^{(1)} \right\}_{\xi} \delta_{2M}, \quad (2.25)$$

$$U_{33KLMN}^{(3)} = \left\{ V_{13KLM} \right\}_{\xi} \delta_{1N} + \left\{ V_{23KLM} \right\}_{\xi} \delta_{2N},$$

– для поперечных напряжений.

Выражения для тепловых напряжений, согласно (2.23) – (2.25) имеют вид:

$$\sigma_{IJ}^T = -C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \quad (2.26)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^T = \varepsilon \left(\left\{ C_{\alpha \alpha kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi, \alpha} + \left\{ C_{\alpha \beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi, \beta} \right), \quad \sigma_{33}^T = -\varepsilon \left\{ C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi}.$$

3. Решение задач термоупругости для цилиндрических композитных многослойных оболочек на основе асимптотической теории

3.1 Постановка задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической композитной оболочки при воздействии неравномерного нагрева и давления

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, нагруженную равномерным давлением $\Delta\bar{p} = const$, массовые силы будем полагать отсутствующими $F_i = 0$, а также отсутствующим – окружной момент $m_2 = 0$. На внешней поверхности оболочки действует внешний источник тепла, не зависящий от окружной координаты X^2 . Рассмотрим 2 варианта граничных условий на торцах оболочки:

1) оба торца оболочки полагаются жестко закрепленными

$$X^1 = 0, X^1 = \bar{L}: u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 0, u_{3,1}^{(0)} = 0, \quad (3.1)$$

где $\bar{L} = L_0 / R$ – безразмерная длина оболочки; R – радиус срединной поверхности оболочки.

2) оба торца оболочки полагаются шарнирно закрепленными

$$X^1 = 0, X^1 = \bar{L}: u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 0, M_{11} = 0. \quad (3.2)$$

Торцы оболочки будем полагать теплоизолированными.

Композиционный материал, из которого изготовлена оболочка, рассматриваемый как среда с эффективными свойствами, будем полагать ортотропным [26], т.е. все матрицы компонент тензоров \bar{C}_{ijkl} , \bar{B}_{ijkl} , D_{ijkl} имеют следующий вид

$$(\bar{C}_{ijkl}) = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1111} & \bar{C}_{1122} & 0 \\ \bar{C}_{1122} & \bar{C}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{1212} \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_{1211} = \bar{C}_{1222} = 0. \quad (3.3)$$

При таких граничных условиях в оболочке имеет место состояние осесимметричного изгиба, при котором отличны от нуля прогиб $u_3^{(0)}$ и продольное перемещение $u_1^{(0)}$, а также изгибающий момент M_{11} , перерезывающая сила Q_1 и T_{11}, T_{22} – продольное и окружное усилия, которые зависят только от осевой координаты X^1 (см. рисунок 3.1)

$$u_1^{(0)}, u_3^{(0)}, M_{11}, Q_1, T_{11}, T_{22} // X^1$$

$$u_2^{(0)} = 0, \quad M_{12} = 0, \quad T_{12} = 0, \quad Q_2 = 0. \quad (3.4)$$

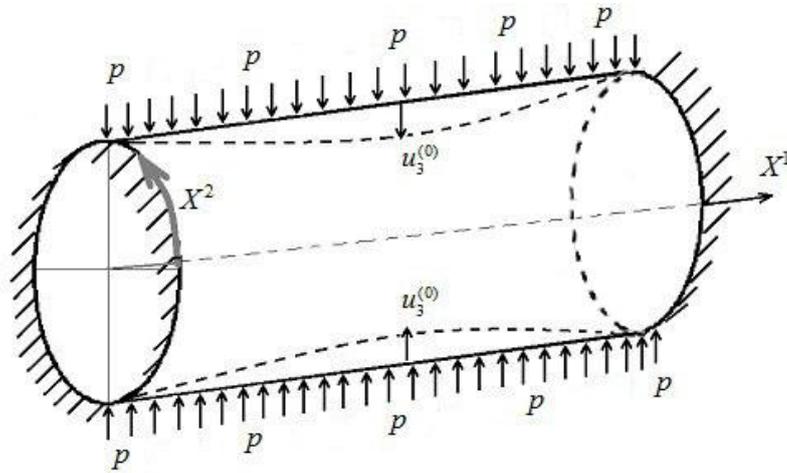


Рисунок 3.1 – Осесимметричный изгиб оболочки

Тогда система уравнений равновесия (2.7) принимает вид

$$\begin{cases} T_{11,1} = 0, \\ M_{11,1} - Q_1 + m_1 = 0, \\ Q_{1,1} - T_{22} + F_3 - \Delta \bar{p} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) в (2.5) и (2.6), получаем следующие выражения для деформаций и кривизн срединной поверхности

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)}, \quad \varepsilon_{22}^{(0)} = u_3^{(0)}, \quad \varepsilon_{12}^{(0)} = 0, \quad (3.6)$$

$$\eta_{11} = -u_{3,11}^{(0)}, \quad \eta_{22} = 0, \quad \eta_{12} = 0.$$

Подставляя (3.4) в (2.18), получаем

$$\eta_{11}^{(2)} = 0, \quad \eta_{22}^{(2)} = 0, \quad \eta_{12}^{(2)} = 0. \quad (3.7)$$

Тождественно ненулевые определяющие соотношения (2.8), (2.9) с учетом (3.6) записываются следующим образом

$$T_{11} = \bar{C}_{1111}\varepsilon_{11}^{(0)} + \bar{C}_{1122}\varepsilon_{22}^{(0)} + B_{1111}\eta_{11} - T_{11}^T, \quad (3.8)$$

$$T_{22} = \bar{C}_{1122}\varepsilon_{11}^{(0)} + \bar{C}_{2222}\varepsilon_{22}^{(0)} + B_{2211}\eta_{11} - T_{22}^T, \quad (3.9)$$

$$M_{11} = \bar{B}_{1111}\varepsilon_{11}^{(0)} + \bar{B}_{1122}\varepsilon_{22}^{(0)} + D_{1111}\eta_{11} - M_{11}^T. \quad (3.10)$$

Тепловые напряжения T_{11}^T , T_{22}^T и тепловые моменты M_{11}^T зависят от температуры $\theta^{(0)}$ согласно формулам (1.230) и (1.200), (1.156), (1.153)

$$T_{IJ}^T = \langle \sigma_{IJ}^T \rangle = \langle C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle + \alpha \langle \sigma_{IJ}^{T(1)} \rangle = \langle C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle, \quad (3.11)$$

$$M_{IJ}^T = \alpha \langle \xi \sigma_{IJ}^T \rangle = \alpha \langle \xi C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{kl}^{T(0)} = \alpha_{kl}(\theta^{(0)} - 1). \quad (3.13)$$

В этих формулах оставлены только главные члены разложения.

Для определения температуры $\theta^{(0)}$ необходимо решить задачу теплопроводности (1.241) в нулевом приближении

$$\frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} = (\lambda_{33} \theta_{/3}^{(0)})_{/3}, \quad (3.14)$$

$$\Sigma_{3\pm} : \lambda_{33} \theta_{/3}^{(0)} = \pm q_{e\pm}, \quad (3.15)$$

$$q_{e\pm} = \alpha_{\pm}^T (\theta_{e\pm} - \theta^{(0)}), \quad (3.16)$$

$$t=0: \theta=1. \quad (3.17)$$

Здесь обозначены α_{\pm}^T – коэффициенты теплообмена на внешней и внутренней поверхностях оболочки, $\theta_{e\pm}$ – температура внешней среды на внешней и внутренней поверхностях оболочки.

3.2 Алгоритм решения задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической композитной оболочки при воздействии неравномерного нагрева и давления

Из уравнений равновесия (3.3) получаем основное разрешающее уравнение для момента

$$M_{11,11} - T_{22} + m_{1,1} + F_3 - \Delta \bar{p} = 0, \quad (3.18)$$

а для вычисления перерезывающей силы и продольного усилия имеем следующие формулы

$$Q_1 = M_{11,1} + m_1, \quad (3.19)$$

$$T_{11} = const = T_1^0. \quad (3.20)$$

Подставляя (3.6) в (3.8) – (3.10), получаем

$$T_{11} = \bar{C}_{1111} u_{1,1}^{(0)} + \bar{C}_{1122} u_3^{(0)} - B_{1111} u_{3,11}^{(0)} - T_{11}^T, \quad (3.21)$$

$$T_{22} = \bar{C}_{1122} u_{1,1}^{(0)} + \bar{C}_{2222} u_3^{(0)} - B_{1122} u_{3,11}^{(0)} - T_{22}^T, \quad (3.22)$$

$$M_{11} = B_{1111} u_{1,1}^{(0)} + B_{1122} u_3^{(0)} - D_{1111} u_{3,11}^{(0)} - M_{11}^T. \quad (3.23)$$

Подставим (3.20) в (3.21) и выразим из получившегося уравнения деформацию $\varepsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)}$:

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)} = \frac{1}{\bar{C}_{1111}} (T_1^0 + T_{11}^T - \bar{C}_{1122} u_3^{(0)} + B_{1111} u_{3,11}^{(0)}). \quad (3.24)$$

Подставляя (3.24) в (3.22) и (3.23), получаем

$$T_{22} = \tilde{C}_{2222}u_3^{(0)} - \tilde{B}_{1122}u_{3,11}^{(0)} - \tilde{T}_{22}^T + \beta_2 T_1^0, \quad (3.25)$$

$$M_{11} = \tilde{B}_{1122}u_3^{(0)} - \tilde{D}_{1111}u_{3,11}^{(0)} - \tilde{M}_{11}^T + \beta_1 T_1^0, \quad (3.26)$$

где обозначены

$$\tilde{C}_{2222} = \bar{C}_{2222} - \frac{(\bar{C}_{1122})^2}{\bar{C}_{1111}}, \quad \tilde{B}_{1122} = B_{1122} - \beta_2 B_{1111}, \quad (3.27)$$

$$\tilde{D}_{1111} = D_{1111} - \frac{(B_{1111})^2}{\bar{C}_{1111}}, \quad \tilde{T}_{22}^T = T_{22}^T - \beta_2 T_{11}^T, \quad \tilde{M}_{11}^T = M_{11}^T - \beta_1 T_{11}^T,$$

$$\beta_1 = \frac{B_{1111}}{\bar{C}_{1111}}, \quad \beta_2 = \frac{\bar{C}_{1122}}{\bar{C}_{1111}}.$$

После подстановки (3.25) и (3.26) в (3.18), приходим к следующему уравнению для прогиба:

$$2\tilde{B}_{1122}u_{3,11}^{(0)} - \tilde{D}_{1111}u_{3,1111}^{(0)} - \tilde{C}_{2222}u_3^{(0)} + f - \beta_2 T_1^0 = 0, \quad (3.28)$$

где обозначен комплекс тепловых и механических массовых нагрузок

$$f = -\Delta\bar{p} + m_{1,1} + F_3 + \tilde{T}_{22}^T - \tilde{M}_{11,11}^T. \quad (3.29)$$

Перепишем уравнение (3.28) в виде

$$u_3^{(0)IV} - 2k_1^2 u_3^{(0)II} + k_2^2 u_3^{(0)} = k_p, \quad (3.30)$$

где обозначены

$$k_1^2 = \frac{\tilde{B}_{1122}}{\tilde{D}_{1111}}, \quad k_2^2 = \frac{\tilde{C}_{2222}}{\tilde{D}_{1111}}, \quad k_p = \frac{f - \beta_2 T_1^0}{\tilde{D}_{1111}}. \quad (3.31)$$

Если $f = const$, то общее решение уравнения (3.30) имеет вид

$$u_3^{(0)} = w_0 - \beta_3 T_1^0 + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_m(X^1), \quad (3.32)$$

где

$$w_0 = \frac{f}{\bar{C}_{2222}}, \quad \beta_3 = \frac{\beta_2}{\bar{C}_{2222}}, \quad (3.33)$$

а C_m – произвольные константы.

Если $k_1^2 < k_2^2$ (т.к. $\bar{B}_{1122} \leq \bar{C}_{2222}$, то это условие выполняется для реальных материалов), тогда функции $\Phi_m(X^1)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{-rX^1} \cos \omega X^1, \quad \Phi_2 = e^{-rX^1} \sin \omega X^1, \\ \Phi_3 &= e^{rX^1} \cos \omega X^1, \quad \Phi_4 = e^{rX^1} \sin \omega X^1, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где

$$r = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{2}. \quad (3.35)$$

Вычислим производные от прогиба (3.32)

$$u_{3,1}^{(0)} = \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{m,1}, \quad u_{3,11}^{(0)} = \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{m,11}, \quad u_{3,111}^{(0)} = \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{m,111} \quad (3.36)$$

Дифференцируя функции (3.34), получаем следующие выражения для первых производных

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1} &= -re^{-rX^1} \cos \omega X^1 - \omega e^{-rX^1} \sin \omega X^1, \\ \Phi_{2,1} &= -re^{-rX^1} \sin \omega X^1 + \omega e^{-rX^1} \cos \omega X^1, \\ \Phi_{3,1} &= re^{rX^1} \cos \omega X^1 - \omega e^{rX^1} \sin \omega X^1, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\Phi_{4,1} = re^{rX^1} \sin \omega X^1 + \omega e^{rX^1} \cos \omega X^1,$$

для вторых производных

$$\begin{aligned}\Phi_{1,11} &= (r^2 - \omega^2)e^{-rX^1} \cos \omega X^1 + 2r\omega e^{-rX^1} \sin \omega X^1, \\ \Phi_{2,11} &= (r^2 - \omega^2)e^{-rX^1} \sin \omega X^1 - 2r\omega e^{-rX^1} \cos \omega X^1, \\ \Phi_{3,11} &= (r^2 - \omega^2)e^{rX^1} \cos \omega X^1 - 2r\omega e^{rX^1} \sin \omega X^1, \\ \Phi_{4,11} &= (r^2 - \omega^2)e^{rX^1} \sin \omega X^1 + 2r\omega e^{rX^1} \cos \omega X^1,\end{aligned}\tag{3.38}$$

и для третьих производных

$$\begin{aligned}\Phi_{1,111} &= (3r\omega^2 - r^3)e^{-rX^1} \cos \omega X^1 - (3r^2\omega - \omega^3)e^{-rX^1} \sin \omega X^1, \\ \Phi_{2,111} &= (3\omega^2r - r^3)e^{-rX^1} \sin \omega X^1 + (3r^2\omega - \omega^3)e^{-rX^1} \cos \omega X^1, \\ \Phi_{3,111} &= (r^3 - 3r\omega^2)e^{rX^1} \cos \omega X^1 + (\omega^3 - 3r^2\omega)e^{rX^1} \sin \omega X^1, \\ \Phi_{4,111} &= (r^3 - 3r\omega^2)e^{rX^1} \sin \omega X^1 + (3r^2\omega - \omega^3)e^{rX^1} \cos \omega X^1.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Вычислим интегралы от функций (3.34)

$$\begin{aligned}\int \Phi_1 dx &= \chi_1(-r\Phi_1 + \omega\Phi_2) + const, \\ \int \Phi_2 dx &= -\chi_1(r\Phi_2 + \omega\Phi_1) + const, \\ \int \Phi_3 dx &= \chi_1(r\Phi_3 + \omega\Phi_4) + const, \\ \int \Phi_4 dx &= \chi_1(r\Phi_4 - \omega\Phi_3) + const,\end{aligned}\tag{3.40}$$

$$\chi_1 = \frac{1}{r^2 + \omega^2}.$$

Тогда

$$\int u_3^{(0)} dx = (w_0 - \beta_3 T_1^0)x + \chi_1(C_1(-r\Phi_1 + \omega\Phi_2) - C_2(r\Phi_2 + \omega\Phi_1) + C_3(r\Phi_3 + \omega\Phi_4) + C_4(r\Phi_4 - \omega\Phi_3)) + const. \quad (3.41)$$

Интегрируя уравнение (3.24), находим продольное перемещение с точностью до 6 неопределенных констант C_0, C_1, \dots, C_4 и T_1^0 :

$$u_1^{(0)} = C_0 + \beta_1 \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{m,1} + \frac{x}{\bar{C}_{1111}} (T_1^0 + T_{11}^T) - \beta_2 (w_0 - \beta_3 T_1^0)x - \beta_2 \chi_1 (C_1(-r\Phi_1 + \omega\Phi_2) - C_2(r\Phi_2 + \omega\Phi_1) + C_3(r\Phi_3 + \omega\Phi_4) + C_4(r\Phi_4 - \omega\Phi_3)) \quad (3.42)$$

Подставим полученные выражения (3.32) и (3.36) в уравнения для деформаций срединной поверхности и искривлений цилиндрической оболочки (3.6):

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{T_{11}^T}{\bar{C}_{1111}} - \beta_2 w_0 + \left(\frac{1}{\bar{C}_{1111}} + \beta_2 \beta_3 \right) T_1^0 - \sum_{m=1}^4 C_m (\beta_2 \Phi_m - \beta_1 \Phi_{m,11}),$$

$$\varepsilon_{12}^{(0)} = 0, \quad \varepsilon_{22}^{(0)} = w_0 - \beta_3 T_1^0 + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_m, \quad (3.43)$$

$$\eta_{11} = -\sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{m,11}, \quad \eta_{22} = 0, \quad \eta_{12} = 0.$$

Подставляя формулы (3.32) и (3.36) в соотношения (3.25) и (3.26), получаем выражения для усилий и моментов через функции $\Phi_m(X^1)$ и их производные

$$T_{22} = w_0 \tilde{C}_{2222} + \sum_{m=1}^4 C_m (\tilde{C}_{2222} \Phi_m - \tilde{B}_{1122} \Phi_{m,11}) - \tilde{T}_{22}^T, \quad (3.44)$$

$$M_{11} = w_0 \tilde{B}_{1122} + \sum_{m=1}^4 C_m (\tilde{B}_{1122} \Phi_m - \tilde{D}_{1111} \Phi_{m,11}) - \tilde{M}_{11}^T + T_1^0 (\beta_1 - \tilde{B}_{1122} \beta_3). \quad (3.45)$$

3.3 Решение задачи для случая жесткого закрепления

Рассмотрим граничное условие жесткого закрепления (3.1) и используем его для нахождения констант C_m .

Тогда с учетом (3.4) имеем 6 граничных условий

$$X^1 = 0, X^1 = L: u_1^{(0)} = 0, u_3^{(0)} = 0, u_{3,1}^{(0)} = 0. \quad (3.46)$$

Подставляя выражение (3.42) в (3.46), получаем

$$\begin{aligned} & C_1(\beta_1\Phi_{31} + \beta_2\chi_1(r\Phi_{11} - \omega\Phi_{12})) + \\ & + C_2(\beta_1\Phi_{32} + \beta_2\chi_1(r\Phi_{12} + \omega\Phi_{11})) + \\ & + C_3(\beta_1\Phi_{33} - \beta_2\chi_1(r\Phi_{13} + \omega\Phi_{14})) + \\ & + C_4(\beta_1\Phi_{34} - \beta_2\chi_1(r\Phi_{14} - \omega\Phi_{13})) + C_0 = 0, \\ & \frac{\bar{L}}{\bar{C}_{1111}}(T_1^0 + T_{11}^T) - \beta_2(w_0 - \beta_3T_1^0)\bar{L} + \\ & + C_1(\beta_1\Phi_{41} + \beta_2\chi_1(r\Phi_{21} - \omega\Phi_{22})) + \\ & + C_2(\beta_1\Phi_{42} + \beta_2\chi_1(r\Phi_{22} + \omega\Phi_{21})) + \\ & + C_3(\beta_1\Phi_{43} - \beta_2\chi_1(r\Phi_{23} + \omega\Phi_{24})) + \\ & + C_4(\beta_1\Phi_{44} - \beta_2\chi_1(r\Phi_{24} - \omega\Phi_{23})) + C_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где обозначены значения функций и их производных при 0 и \bar{L}

$$\Phi_{1m} = \Phi_m(0), \Phi_{2m} = \Phi_m(\bar{L}), \Phi_{3m} = \Phi_{m,1}(0), \Phi_{4m} = \Phi_{m,1}(\bar{L}). \quad (3.48)$$

Подставляя выражения (3.34) и (3.37) в (3.48), находим элементы матрицы Φ_{sm} :

$$\begin{aligned} & \Phi_{11} = \Phi_{13} = 1, \Phi_{12} = \Phi_{14} = 0, \\ & \Phi_{21} = e^{-r\bar{L}} \cos \omega\bar{L}, \Phi_{22} = e^{-r\bar{L}} \sin \omega\bar{L}, \Phi_{23} = e^{r\bar{L}} \cos \omega\bar{L}, \Phi_{24} = e^{r\bar{L}} \sin \omega\bar{L}, \\ & \Phi_{31} = -r, \Phi_{32} = \omega, \Phi_{33} = r, \Phi_{34} = \omega, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\Phi_{41} = -re^{-r\bar{L}} \cos \omega\bar{L} - \omega e^{-r\bar{L}} \sin \omega\bar{L}, \quad \Phi_{42} = -re^{-r\bar{L}} \sin \omega\bar{L} + \omega e^{-r\bar{L}} \cos \omega\bar{L},$$

$$\Phi_{43} = re^{r\bar{L}} \cos \omega\bar{L} - \omega e^{r\bar{L}} \sin \omega\bar{L}, \quad \Phi_{44} = re^{r\bar{L}} \sin \omega\bar{L} + \omega e^{r\bar{L}} \cos \omega\bar{L}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= \beta_1 \Phi_{31} + \beta_2 \chi_1 (r\Phi_{11} - \omega\Phi_{12}) \\ \Phi_{02} &= \beta_1 \Phi_{32} + \beta_2 \chi_1 (r\Phi_{12} + \omega\Phi_{11}) \\ \Phi_{03} &= \beta_1 \Phi_{33} - \beta_2 \chi_1 (r\Phi_{13} + \omega\Phi_{14}) \\ \Phi_{04} &= \beta_1 \Phi_{34} - \beta_2 \chi_1 (r\Phi_{14} - \omega\Phi_{13}) \\ \\ \Phi_{51} &= \beta_1 \Phi_{41} + \beta_2 \chi_1 (r\Phi_{21} - \omega\Phi_{22}) \\ \Phi_{52} &= \beta_1 \Phi_{42} + \beta_2 \chi_1 (r\Phi_{22} + \omega\Phi_{21}) \\ \Phi_{53} &= \beta_1 \Phi_{43} - \beta_2 \chi_1 (r\Phi_{23} + \omega\Phi_{24}) \\ \Phi_{54} &= \beta_1 \Phi_{44} - \beta_2 \chi_1 (r\Phi_{24} - \omega\Phi_{23}) \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\Phi_{55} = \frac{\bar{L}}{C_{1111}} + \beta_2 \beta_3 \bar{L}, \quad \Phi_{00} = 1, \quad \Phi_{50} = 1,$$

$$U_5 = \beta_2 w_0 \bar{L} - \frac{\bar{L}}{C_{1111}} T_{11}^T.$$

Тогда уравнения (3.47) можно записать следующим образом:

$$\sum_{m=0}^4 \Phi_{0m} C_m = 0, \quad \sum_{m=0}^4 \Phi_{5m} C_m + \Phi_{55} T_1^0 = U_5. \tag{3.51}$$

Подставляя (3.32) и (3.36) в (3.46), получаем систему 4-х линейных алгебраических уравнений относительно C_0, C_1, \dots, C_4 и $C_5 \equiv T_1^0$:

$$w_0 - \beta_3 T_1^0 + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{1m} = 0, \quad w_0 - \beta_3 T_1^0 + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{2m} = 0, \tag{3.52}$$

$$\sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{3m} = 0, \quad \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{4m} = 0. \tag{3.53}$$

Вводя обозначения для коэффициентов

$$\Phi_{15} = \Phi_{25} = -\beta_3, \quad U_1 = U_2 = -w_0, \quad (3.54)$$

$$\Phi_{35} = \Phi_{45} = 0, \quad U_0 = U_3 = U_4 = 0,$$

систему уравнений (3.51), (3.52) можно записать в едином виде

$$\sum_{m=0}^5 \Phi_{sm} C_m = U_s, \quad s = 0, \dots, 5. \quad (3.55)$$

Решая эту систему, находим константы C_m :

$$C_m = \sum_{s=0}^5 \Phi_{ms}^{-1} U_s, \quad m = 0, \dots, 5 \quad (3.56)$$

где Φ_{ms}^{-1} – матрица, обратная к Φ_{sm} .

3.4 Решение задачи для случая шарнирного закрепления

Для случая шарнирного закрепления из (3.2) имеем следующие граничные условия

$$X^1 = 0, X^1 = \bar{L}: \quad u_1^{(0)} = 0 \quad u_3^{(0)} = 0, \quad M_{11} = 0. \quad (3.57)$$

Уравнения (3.51) и (3.52) для вычисления констант C_m в этом случае также имеют место, а вместо уравнений (3.53) имеем следующие:

$$\sum_{m=1}^5 C_m \Phi_{3m} + w_0 \tilde{B}_{1122} - \tilde{M}_{11}^T = 0, \quad \sum_{m=1}^5 C_m \Phi_{4m} + w_0 \tilde{B}_{1122} - \tilde{M}_{11}^T = 0, \quad (3.58)$$

которые получаем после подстановки выражения (3.45) в последнее уравнение в (3.55).

Элементы матрицы Φ_{sm} в данном случае имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} = \Phi_{13} = 1, \quad \Phi_{12} = \Phi_{14} = 0, \quad \Phi_{15} = -\beta_3 \\
\Phi_{21} = e^{-r\bar{L}} \cos \omega\bar{L}, \quad \Phi_{22} = e^{-r\bar{L}} \sin \omega\bar{L}, \\
\Phi_{23} = e^{r\bar{L}} \cos \omega\bar{L}, \quad \Phi_{24} = e^{r\bar{L}} \sin \omega\bar{L}, \quad \Phi_{25} = -\beta_3, \\
\Phi_{3m} = B_{1122} \Phi_m(0) - D_{1111} \Phi_{m,11}(0), \quad m=1, \dots, 4, \\
\Phi_{4m} = B_{1122} \Phi_m(\bar{L}) - D_{1111} \Phi_{m,11}(\bar{L}), \quad m=1, \dots, 4, \\
\Phi_{35} = (\beta_1 - \tilde{B}_{1122} \beta_3), \quad \Phi_{45} = \beta_1 - \tilde{B}_{1122} \beta_3.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Элементы Φ_{sm} и Φ_{sm} определяются по формулам (3.50).

Коэффициенты столбца правых частей U_s имеют вид:

$$U_0 = 0, \quad U_1 = U_2 = -w_0, \quad U_3 = U_4 = \tilde{M}_{11}^T - w_0 \tilde{B}_{1122}. \tag{3.60}$$

Тогда систему 6 уравнений (3.51), (3.52) и (3.58) можно записать в матричном виде (3.55).

Решая эту систему, находим константы C_m по формулам (3.56), где элементы матрицы Φ_{sm} и столбца U_s имеют вид (3.59) и (3.60).

3.5 Напряжения в цилиндрической оболочке при осесимметричном изгибе и неравномерном нагреве

Получим явные выражения для тангенциальных σ_{IJ} , касательных σ_{I3} и поперечных σ_{33} компонент тензора напряжений, используя формулы (2.23) – (2.25) для задачи об осесимметричном изгибе оболочки:

$$\sigma_{IJ} = C_{IJ11}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(0)} + C_{IJ22}^{(0)} \varepsilon_{22}^{(0)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} + \alpha C_{IJ11}^{(0)} \xi \eta_{11},$$

$$-\sigma_{13} = \mathfrak{a} \left(\{C_{1111}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{11,1}^{(0)} + \{C_{1122}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{22,1}^{(0)} - \{C_{11kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi,1} \right) + \mathfrak{a}^2 \{C_{1111}^{(0)} \xi\}_{\xi} \eta_{11,1}, \quad (3.61)$$

$$-\sigma_{23} = \mathfrak{a} \left(\{C_{1211}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{11,1}^{(0)} + \{C_{1222}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{22,1}^{(0)} - \{C_{12kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi,1} \right) + \mathfrak{a}^2 \{C_{1211}^{(0)} \xi\}_{\xi} \eta_{11,1},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & \mathfrak{a} \left(\{C_{2211}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{11}^{(0)} + \{C_{2222}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{22}^{(0)} - \{C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} \right) + \\ & + \mathfrak{a}^2 \left(\{ \{C_{1111}^{(0)}\}_{\xi} \}_{\xi} \varepsilon_{11,11}^{(0)} + \{ \{C_{1122}^{(0)}\}_{\xi} \}_{\xi} \varepsilon_{22,11}^{(0)} + \{C_{2211}^{(0)} \xi\}_{\xi} \eta_{11} \right) + \\ & + \mathfrak{a}^3 \left(p_- + \Delta p (\xi + 0.5) + \{ \{C_{1111}^{(0)} \xi\}_{\xi} \}_{\xi} \eta_{11,11} \right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

Здесь учтено, что $R_{\alpha K L J}^{(1)}$, $V_{\alpha 3 K L J}$, $E_{33 K L J M}^{(2)}$, согласно формулам (2.24), (2.25) имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} R_{1111}^{(1)} = \{C_{1111}^{(0)}\}_{\xi}, \quad R_{1221}^{(1)} = \{C_{1122}^{(0)}\}_{\xi}, \quad R_{2111}^{(1)} = \{C_{1211}^{(0)}\}_{\xi}, \quad R_{2221}^{(1)} = \{C_{1222}^{(0)}\}_{\xi} \\ V_{13111} = \{C_{1111}^{(0)} \xi\}_{\xi}, \quad V_{23111} = \{C_{1211}^{(0)} \xi\}_{\xi}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$E_{331111}^{(2)} = \{R_{1111}^{(1)}\}_{\xi} = \{ \{C_{1111}^{(0)}\}_{\xi} \}_{\xi}, \quad E_{332211}^{(2)} = \{R_{1221}^{(1)}\}_{\xi} = \{ \{C_{1122}^{(0)}\}_{\xi} \}_{\xi},$$

$$U_{331111}^{(3)} = \{V_{13111}\}_{\xi} = \{ \{C_{1111}^{(0)} \xi\}_{\xi} \}_{\xi}.$$

Таким образом, получены явные выражения тангенциальных σ_{IJ} , касательных σ_{I3} и поперечных σ_{33} компонент тензора напряжений.

Выражения для тепловых напряжений, согласно (3.61), (3.62) имеют вид

$$\sigma_{IJ}^T = -C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \quad (3.64)$$

$$\sigma_{13}^T = \mathfrak{a} \{C_{11kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,1}^{T(0)}\}_{\xi} = 0, \quad \sigma_{23}^T = \mathfrak{a} \{C_{12kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,1}^{T(0)}\}_{\xi} = 0,$$

$$\sigma_{33}^T = \mathfrak{a} \{C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi}.$$

В силу того, что в данной задаче температурное поле не зависит от координат $X^1 = 0,5\bar{L}$ и $X^1 = 0,5\bar{L}$, касательные тепловые напряжения $\sigma_{\alpha 3}^T$ в слоях цилиндрической оболочки отсутствуют. Однако из-за того, что перемещения $u_3^{(0)}$ и $u_1^{(0)}$ зависят от всех тепловых напряжений в совокупности, касательные

напряжения σ_{I3} в слоях оболочки все равно зависят от температурного поля нагрева.

Общая структурная схема программы для расчета напряжений в цилиндрической оболочке при осесимметричном изгибе представлена на рисунке 3.2.

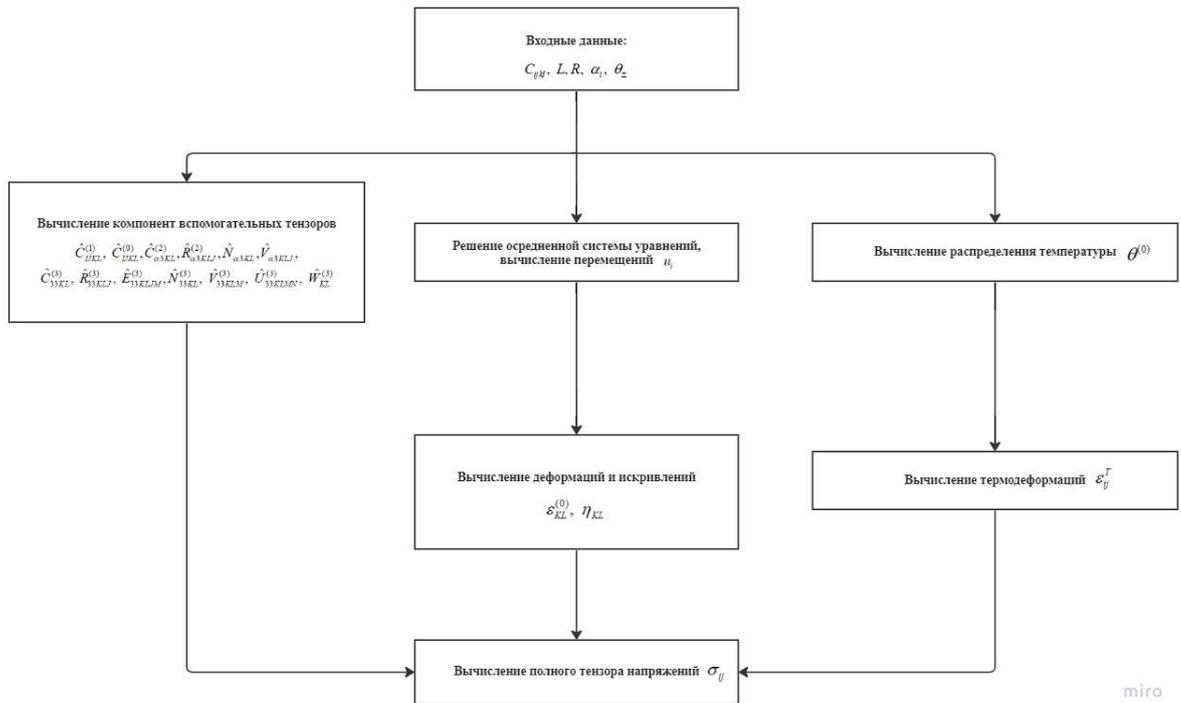


Рисунок 3.2 – Общая структурная схема компьютерной программы для решения задачи термоупругости оболочек

3.6 Численный алгоритм решения нестационарной задачи теплопроводности

Решение задачи теплопроводности в нулевом приближении (3.14) – (3.17) осуществляется численно, с помощью конечно-разностного метода. Используется разностная аппроксимация задачи по неявной схеме:

$$\begin{aligned}
k_i \frac{\partial \bar{\theta}_i^{j+1} - \bar{\theta}_i^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda_{i+1}}{\Delta \xi^2} (\bar{\theta}_{i+1}^{j+1} - \bar{\theta}_i^{j+1}) - \frac{\lambda_i}{\Delta \xi^2} (\bar{\theta}_i^{j+1} - \bar{\theta}_{i-1}^{j+1}), \\
i = 0: \quad \frac{\lambda_0}{\Delta \xi} (\theta_1^{j+1} - \theta_0^{j+1}) &= -\tilde{\alpha}_-^T (\theta_{e-} - \theta_0^{j+1}), \\
i = N: \quad \frac{\lambda_N}{\Delta \xi} (\theta_N^{j+1} - \theta_{N-1}^{j+1}) &= \tilde{\alpha}_+^T (\theta_{e+} - \theta_N^{j+1}), \\
t = 0: \quad \theta_i^0 &= 1, i = 0, 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Здесь $\lambda = \lambda_{33}$, $k = \frac{\rho c_v}{F_{O_0}}$. Данная система имеет трехдиагональную структуру,

для ее решения применен метод прогонки [67].

3.7 Расчет характеристик композиционного материала цилиндрической оболочки

При проведении расчетов цилиндрической композитной оболочки была рассмотрена многослойная слоисто-волоконистая структура (рисунок 3.3), каждый слой которой представлял однонаправленно-армированный системой нитей материал (1D материал), ориентированный под некоторым углом $\phi_{(s)}$ к направлению X^1 в касательной плоскости, ортогональной к оси OX^3 , совпадающей с направлением ξ .

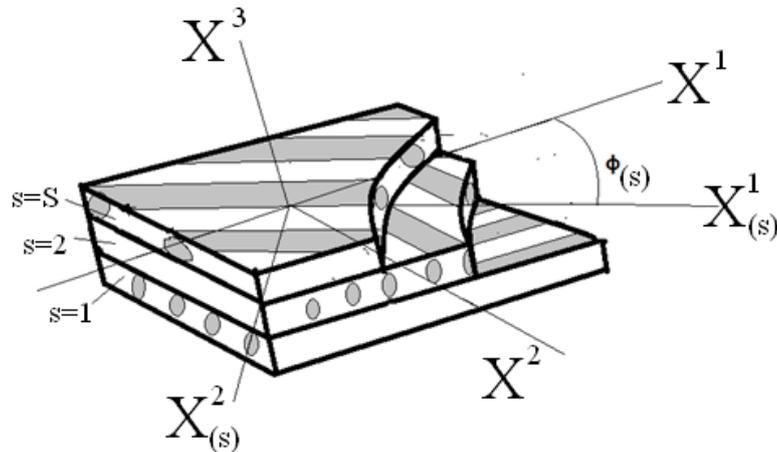


Рисунок 3.3 – Структура слоисто-волоконистого композита в оболочке

Введем собственную систему координат $X_{(s)}^i$ в каждом s -м слое, повернутую на угол $\phi_{(s)}$ к системе координат X^i в каждой точке оболочки. Обозначим компоненты тензоров модулей упругости, теплопроводности и теплового расширения 1D материала в собственной системе координат $X_{(s)}^i$ как $\hat{C}_{ijkl}^{(s)}, \hat{\lambda}_{ij}^{(s)}, \hat{\alpha}_{ij}^{(s)}$. Однонаправленные слои полагаем трансверсально-изотропными [26]. Для расчета компонент тензоров $\hat{C}_{ijkl}^{(s)}$ в собственной системе координат используем формулу [26]

$$\hat{C}_{ijkl}^{(s)} = \hat{\Pi}_{ijkl}^{(s)-1}, \quad (3.66)$$

где $\hat{\Pi}_{ijkl}^{(s)}$ – тензор упругих податливостей, являющийся обратным к $\hat{C}_{ijkl}^{(s)}$ и имеющий вид [26]

$$(\hat{\Pi}_{ijkl}^{(s)}) = \begin{pmatrix} 1/E_L & -\nu_L/E_L & -\nu_L/E_L & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_T & -\nu_T/E_T & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_T & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2G_T & 0 & 0 \\ & \text{симм.} & & & 1/2G_L & 0 \\ & & & & & 1/2G_L \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

где E_L – продольный модуль упругости, E_T – поперечный модуль упругости, ν_L – продольный коэффициент Пуассона, ν_T – поперечный коэффициент Пуассона, G_T – поперечный модуль сдвига, G_L – продольный модуль сдвига 1D материала.

В собственной системе координат $X_{(s)}^i$, где $OX_{(s)}^1$ – оси ориентации нитей в касательной плоскости, компоненты тензоров $\hat{\lambda}_{ij}^{(s)}, \hat{\alpha}_{ij}^{(s)}$ 1D материала имеют следующий вид [24]

$$\hat{\alpha}_{ij}^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_L & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_T \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_{ij}^{(s)} = \begin{pmatrix} \lambda_L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

где α_L – продольный коэффициент теплового расширения (к.т.р.), α_T – поперечный к.т.р. 1D материала, λ_L – продольный коэффициент теплопроводности, λ_T – поперечный коэффициент теплопроводности 1D материала. 1D материал в каждом слое полагается состоящим из матрицы и волокон одного и того же типа, с одним и тем же коэффициентом армирования.

Значения компонент тензоров в единой для всех слоев системе координат X^i вычисляются с помощью тензорных формул преобразования компонент при повороте системы координат на угол $\phi_{(s)}$:

$$C_{ijkl}(\xi) = \hat{C}_{mnpq}^{(s)} Q_{im}^{(s)} Q_{jn}^{(s)} Q_{kp}^{(s)} Q_{lq}^{(s)}, \quad \xi \in V_{\xi_s}, \quad (3.69)$$

$$\alpha_{ij}(\xi) = \hat{\alpha}_{mn}^{(s)} Q_{im}^{(s)} Q_{jn}^{(s)}, \quad \xi \in V_{\xi_s},$$

$$\lambda_{ij}(\xi) = \hat{\lambda}_{mn}^{(s)} Q_{im}^{(s)} Q_{jn}^{(s)}, \quad \xi \in V_{\xi_s},$$

а V_{ξ_s} – s -ый слой оболочки, $Q_{im}^{(s)}$ – элементы матрицы поворота слоя с номером s

$$[Q_{ij}^{(s)}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_{(s)} & \sin \phi_{(s)} & 0 \\ -\sin \phi_{(s)} & \cos \phi_{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad s = 1, \dots, S. \quad (3.70)$$

При расчетах были приняты следующие значения констант композиционного материала:

$$E_L = 100 \text{ ГПа}, \quad E_T = 6 \text{ ГПа}, \quad \nu_L = 0,1 \quad \nu_T = 0,15, \quad G_L = 4 \text{ ГПа}, \quad (3.71)$$

$$\alpha_L = 4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad \alpha_T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1},$$

$$\lambda_L = 1,5 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}), \quad \lambda_T = 0,3 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}).$$

Углы ориентации волокон в слоях $\phi_{(s)}$ варьировались: базовым для расчетов был выбран пакет из 4-х слоев с системой углов $[\phi_{(1)} / \phi_{(2)} / \phi_{(3)} / \phi_{(4)}] =$

$[30^\circ / 60^\circ / 60^\circ / 30^\circ]$ (КМ-1) и $[45^\circ / 30^\circ / 30^\circ / 45^\circ]$ (КМ-2). Толщины всех слоев были выбраны одинаковыми, что обеспечивало ортотропность всего композиционного материала оболочки, как эффективной среды.

Толщина оболочки была постоянной и равной $h = 2 \cdot 10^{-2}$ м, радиус срединной поверхности оболочки $R = 0.2$ м, длина оболочки L_0 варьировалась.

Давление на внешней стороне оболочки: $\tilde{p}_+ = 10^{-4}$ ГПа, давление на внутренней стороне оболочки: $\tilde{p}_- = 0$ ГПа.

На внешней стороне оболочки был задан конвективный теплообмен с внешней средой, а внутренняя поверхность оболочки была теплоизолирована:

$$\alpha_+^T = 10 \text{ Вт} / (\text{м}^2 \text{ К}), \quad \theta_{e+} = 573 \text{ К}, \quad q_{e-} = 0.$$

3.8 Результаты численных расчетов для случая жестко закрепленных торцов цилиндрической оболочки из КМ-1 без нагрева

Вначале был рассмотрен случай жесткого закрепления торцов цилиндрической оболочки, а нагружение осуществлялось только за счет внешнего давления на оболочку, нагрев при этом отсутствовал. Результаты численных расчетов для случая КМ-1 представлены на рисунках 3.4...3.16. Все результаты расчетов на этих рисунках показаны для различных вариантов значения безразмерной длины оболочки: $\bar{L} = L_0 / R$: от 0.5 до 2.5.

На рисунке 3.4 показан график зависимости изгибающего момента M_{11} в оболочке от продольной координаты X^1 при различных значениях длины \bar{L} . Для относительно коротких оболочек при $\bar{L} \leq 1$ распределение функции M_{11} по координате X^1 существенно неравномерно, максимумы функции M_{11} располагаются на торцах оболочки, а в средней части оболочки имеются три

локальных экстремума. При этом для коротких оболочек отсутствует «плато» с постоянным значением момента M_{11} .

Для более длинных оболочек при $\bar{L} > 1$ в оболочке возникает зона безмоментного состояния – в средней части оболочки на удалении от торцов значение момента $M_{11} = 0$. При этом вблизи торцов оболочки состояние остается моментным: в этой области значение момента M_{11} резко возрастают до максимальных значений. Экстремальные значения момента M_{11} не зависят от длины \bar{L} .

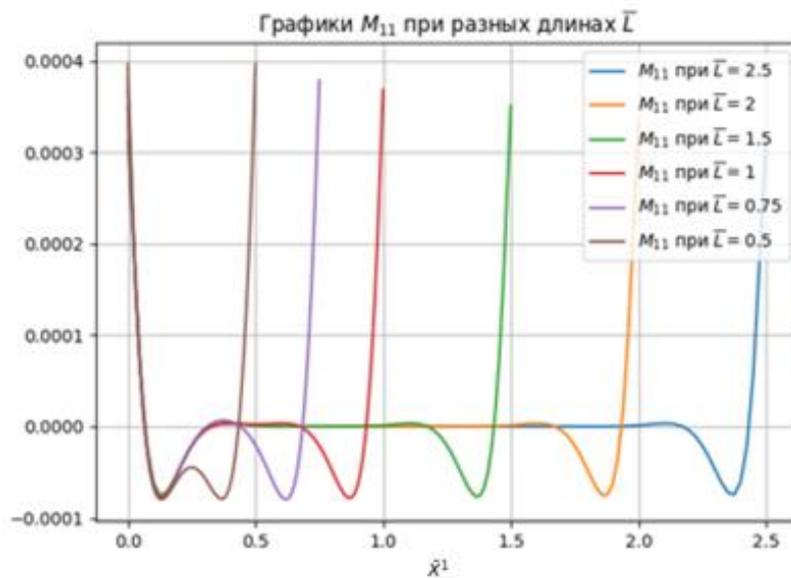


Рисунок 3.4 – Зависимость момента M_{11} (ГН) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки

На рисунке 3.5 показан график зависимости окружного усилия T_{22} в оболочке от продольной координаты X^1 при различных значениях длины \bar{L} . Как видно из графиков, для относительно коротких оболочек при $\bar{L} \leq 1$ распределение функции T_{22} по координате X^1 существенно неравномерно, поскольку решение задачи является «существенно моментным», максимумы окружных усилий T_{22} располагаются по середине оболочки, а на торцах оболочки значения T_{22}

минимальны. При этом для коротких оболочек отсутствует «плато» с постоянным значением усилия T_{22} .

Для более длинных оболочек при увеличении значений \bar{L} в оболочке возникает зона безмоментного состояния в средней части оболочки на удалении от торцов. В этой зоне оболочки график окружного усилия T_{22} имеет «плато», где функция T_{22} имеет постоянные значения. Вблизи торцов оболочки состояние остается моментным: в этой области усилия T_{22} быстро убывают до минимальных значений. Экстремальные значения момента T_{22} почти не зависят от длины \bar{L} .

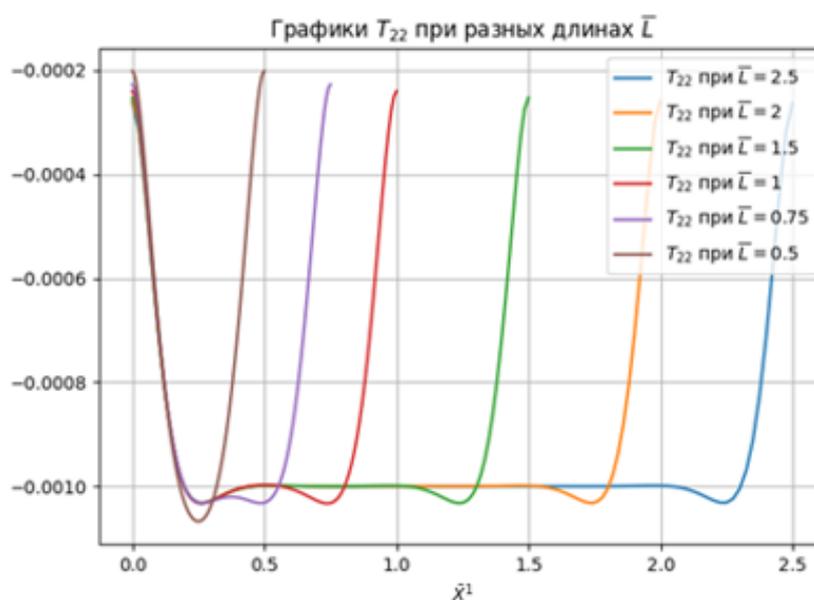


Рисунок 3.5 – Зависимость усилия T_{22} (ГН/м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки

На рисунке 3.6 показан график зависимости перерезывающей силы Q_1 в оболочке от продольной координаты X^1 при различных длины \bar{L} . Как и для M_{11} , для относительно коротких оболочек при $\bar{L} \leq 1$ распределение функции Q_1 по координате X^1 существенно неравномерно, максимумы функции Q_1 располагаются на торцах оболочки, а в средней части оболочки имеются 2 локальных экстремума. Для коротких оболочек отсутствует «плато» с нулевым значением Q_1 .

Для более длинных оболочек при $\bar{L} > 1$ в зоне безмоментного состояния в средней части оболочки на удалении от торцов значение перерезывающей силы $Q_1 = 0$. При этом вблизи торцов оболочки значение перерезывающей силы Q_1 резко возрастают до максимальных значений. Экстремальные значения момента Q_1 не зависят от длины \bar{L} .

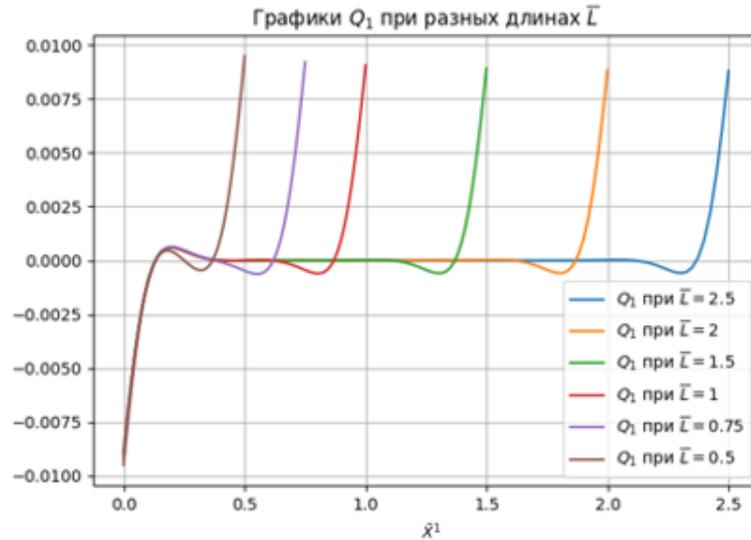


Рисунок 3.6 – Зависимость перерезывающей силы Q_1 (ГН/м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки

На рисунке 3.7 показан график зависимости радиального перемещения (прогиба) оболочки $u_3^{(0)}$ от продольной координаты X^1 при различных значениях длины \bar{L} . Эти графики подобны зависимостям окружного усилия T_{22} от X^1 и от \bar{L} . Для относительно коротких оболочек при $\bar{L} \leq 1$ распределение функции $u_3^{(0)}$ по координате X^1 существенно неравномерно: имеется один локальный минимум в середине оболочки, «плато» с постоянными значениями $u_3^{(0)}$ отсутствует.

Для длинных оболочек при $\bar{L} > 1$ формируется «плато» с постоянными значениями прогиба в зоне безмоментного состояния. Вблизи торцов оболочки функция $u_3^{(0)}$ имеет небольшие локальные экстремумы по отношению к стационарному значению на «плато». Эти стационарные значения прогиба и

локальные экстремумы почти не зависят от длины \bar{L} , меняется только координаты их расположения в оболочке.

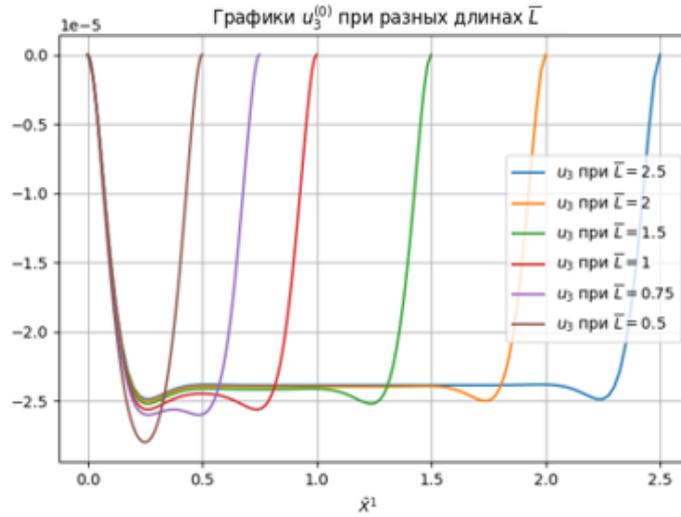


Рисунок 3.7 – Зависимость прогиба оболочки $u_3^{(0)}$ (м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки

Иной характер имеют распределения продольного перемещения $u_1^{(0)}$ по длине оболочки, которое показано на рисунке 3.8. Для этих перемещений нет характерного участка «плато» ни при каких значениях длины \bar{L} .

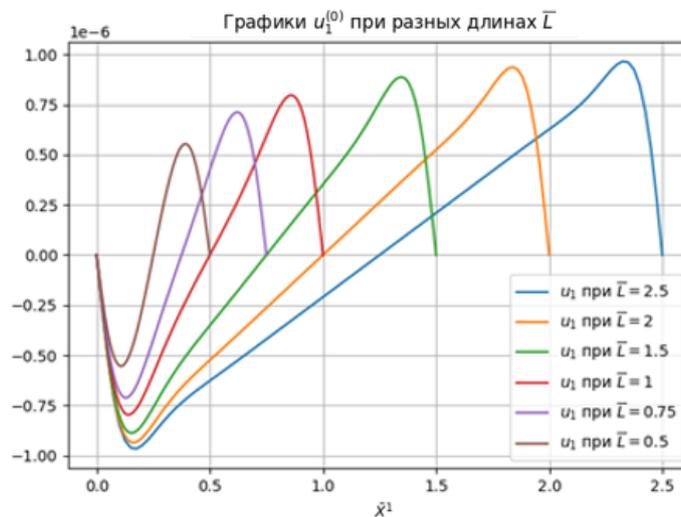


Рисунок 3.8 – Зависимость перемещения $u_1^{(0)}$ (м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки

Продольное перемещение имеет 2 характерных экстремума: одна точка минимума, вторая – точка максимума, которые расположены вблизи торцов оболочки, там, где формируется краевой эффект с моментным состоянием: в этой области перемещения $u_1^{(0)}$ быстро убывают до нулевых значений. Абсолютные значения продольных перемещений на порядок меньше абсолютных значений прогиба $u_3^{(0)}$.

На рисунке 3.9 показан график зависимости продольной деформации $\varepsilon_{11}^{(0)}$ от X^1 при различных значениях длины \bar{L} . Эта функция $\varepsilon_{11}^{(0)}$, согласно (3.6), зависит только от продольного перемещения $u_1^{(0)}$, но в отличие от функции $u_1^{(0)}(X^1)$ график $\varepsilon_{11}^{(0)}(X^1)$ имеет зону безмоментного «плато» для относительно длинных оболочек, у которых при $\bar{L} > 1$. У торцов оболочки при этом также имеется краевой эффект, соответствующий моментному состоянию.

Для относительно коротких оболочек при $\bar{L} \leq 1$ все деформированное состояние является моментным, и «плато» не формируется. С уменьшением длины оболочки возрастает максимальное значение деформации $\varepsilon_{11}^{(0)}$, которое располагается в центре оболочки.

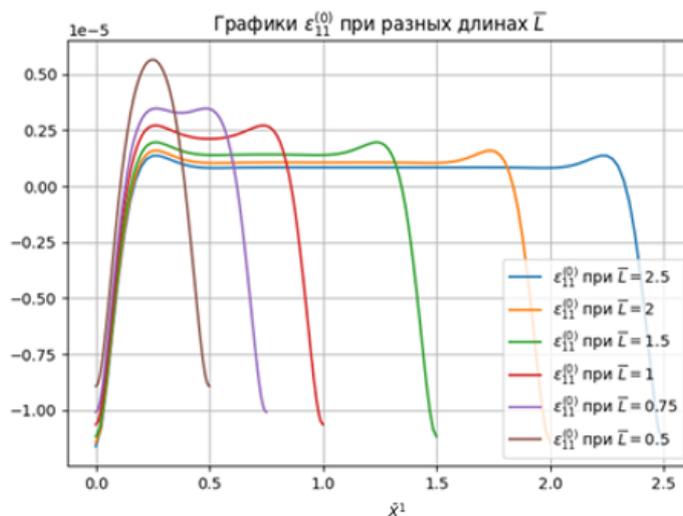


Рисунок 3.9 – Зависимость деформации $\varepsilon_{11}^{(0)}$ от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки

Также были получены компоненты тензора тангенциальной деформации $\varepsilon_{IJ}^{(0)}$ для оболочки.

На рисунке 3.10 показан график зависимости окружной деформации $\varepsilon_{22}^{(0)}$ от X^1 при различных значениях длины \bar{L} . Эта функция $\varepsilon_{22}^{(0)}$, согласно (3.6), совпадает с радиальным перемещением $u_3^{(0)}$, поэтому и характер этих графиков идентичен: для относительно коротких оболочек при $\bar{L} < 0.5$ распределение функции $\varepsilon_{22}^{(0)}$ по координате X^1 существенно неравномерно, поскольку решение задачи является «существенно моментным», максимумы деформаций $\varepsilon_{22}^{(0)}$ располагаются по середине оболочки. При увеличении значений параметра \bar{L} состояние оболочки становится безмоментным в основной части оболочки: деформации $\varepsilon_{22}^{(0)}$ для безмоментной области становятся практически равномерными. Вблизи торцов оболочки состояние остается моментным: в этой области деформации $\varepsilon_{22}^{(0)}$ быстро убывают до нулевых значений.

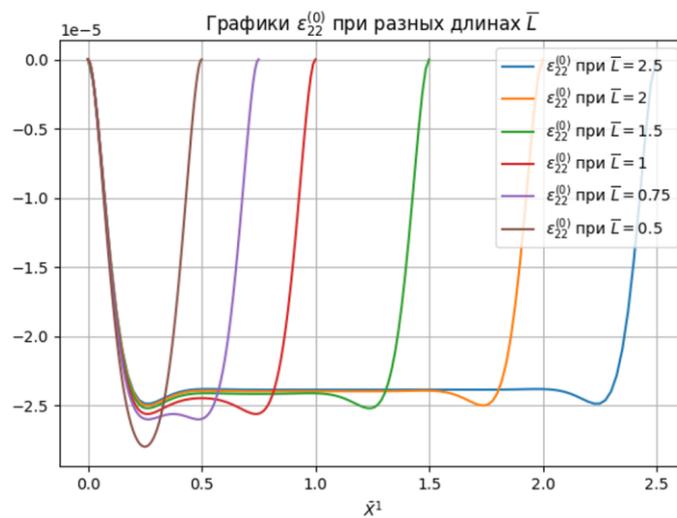


Рисунок 3.10 – Зависимость окружной деформации $\varepsilon_{22}^{(0)}$ от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки

На рисунке 3.11 показан график зависимости продольного (изгибного) напряжения σ_{11} от поперечной координаты ξ при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки. Как видно из графиков, на границе раздела слоев оболочки №№ 1, 2

и №№ 3, 4, при $\xi = -0.25$ и $\xi = 0.25$, соответственно, напряжения σ_{11} изменяют свои значения скачком, это соответствует переходу от к слоя к слою с другим углом ориентации волокон. При $\xi = 0$ скачок отсутствует, потому что углы армирования слоев №№ 2 и 3 совпадают.

С увеличением длины оболочки при $\bar{L} > 0.5$ значения изгибного напряжения уменьшаются, поскольку оболочка в средней своей части переходит в безмоментное состояние, при котором значения кривизны оболочки $\eta_{11} = -u_{3,11}^{(0)}$ являются практически нулевыми. И наоборот, для коротких оболочек напряженное состояние является моментом, изгибные напряжения σ_{11} возрастают, при этом в верхних слоях №№ 3 и 4 эти напряжения – сжимающие, в нижних слоях №№ 1 и 2 – растягивающие, что обусловлено односторонним действием внешнего давления \tilde{p}_+ .

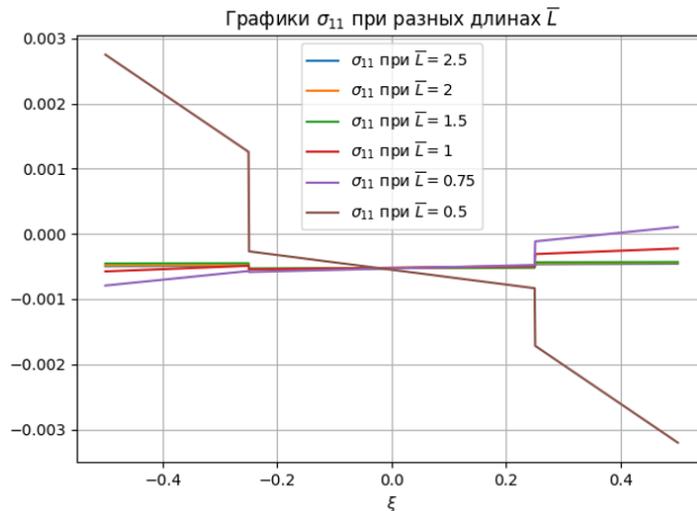


Рисунок 3.11 – Распределение продольного (изгибного) напряжения σ_{11} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки

На рисунке 3.12 показан график зависимости окружного напряжения σ_{22} от поперечной координаты ξ при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки. Функции $\sigma_{22}(\xi, \bar{L})$ подобны функциям $\sigma_{11}(\xi, \bar{L})$: на границе раздела слоев

оболочки при $\xi = -0.25$ и $\xi = 0.25$, когда меняется угол армирования в слое, напряжения $\sigma_{22}(\xi, \bar{L})$ изменяют свои значения скачком.

Для коротких оболочек при $\bar{L} < 0.5$ напряженное состояние является моментным, и максимальные значения напряжений σ_{22} , реализующиеся на внешней и внутренней поверхностях оболочки, являются наибольшими по абсолютному значению. При этом во внутреннем слое оболочки эти напряжения растягивающие, а в остальных слоях №№ 2,3 и 4, напряжения σ_{22} сжимающие.

Для относительно длинных оболочек при $\bar{L} > 0.5$, деформированное состояние в центре оболочки становится безмоментным, и значения напряжений σ_{22} уменьшаются до минимальных. При этом, начиная с некоторого значения $\bar{L} \approx 1,5$ распределения $\sigma_{22}(\xi, \bar{L})$ в центре оболочки практически не меняются с увеличением \bar{L} .

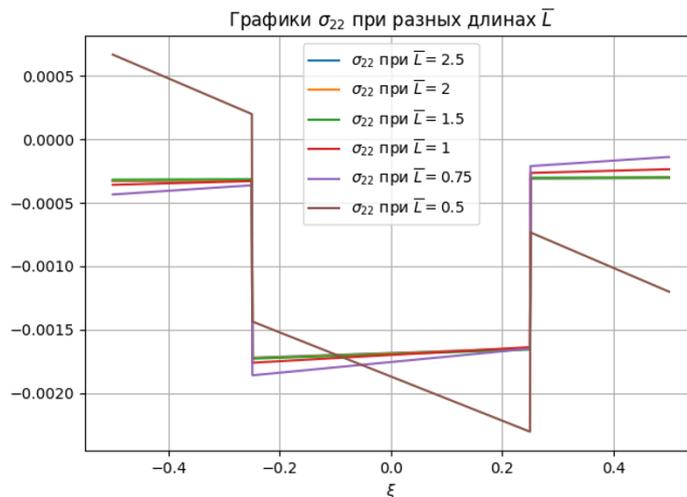


Рисунок 3.12 – Распределение окружных напряжений σ_{22} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки

На рисунке 3.13 показан график зависимости касательного напряжения $\sigma_{12} = \sigma_{rz}$ от поперечной координаты ξ при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки. Основные особенности у этих графиков такие же, как и для изгибного напряжения σ_{11} : на границе раздела слоев оболочки №№ 1, 2 и №№ 3, 4, при

$\xi = -0.25$ и $\xi = 0.25$, соответственно, напряжения σ_{12} изменяют свои значения скачком, так как в этих слоях меняется угол ориентации волокон. Заметим, что все 4 слоя являются моноклинными (неортоотропными) материалами, поэтому при действии внешнего давления в слоях возникают касательные напряжения σ_{12} , хотя усилия T_{12} в оболочке являются нулевыми.

С увеличением длины оболочки при $\bar{L} > 0.5$ значения касательных напряжений σ_{12} также уменьшаются, что связано с переходом оболочки в средней своей части в безмоментное состояние. Для коротких оболочек напряженное состояние является моментом, и касательные напряжения σ_{12} возрастают.

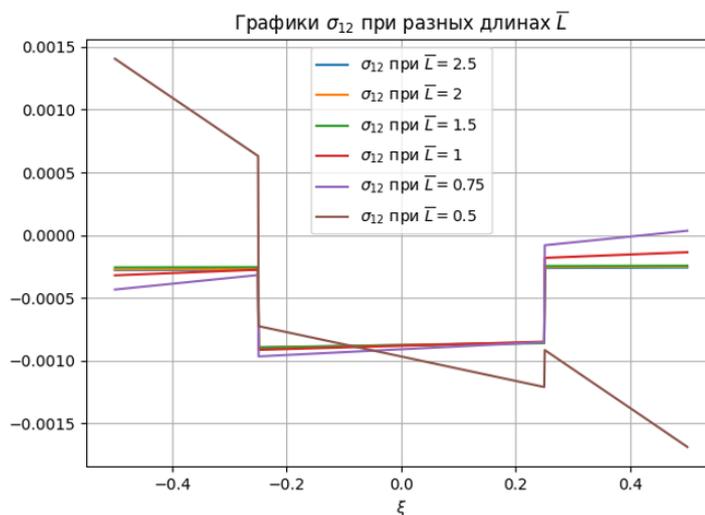


Рисунок 3.13 – Распределение касательных напряжений σ_{12} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки

На рисунке 3.14 показаны графики зависимости напряжений межслойного сдвига σ_{13} от поперечной координаты ξ при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки. Для всех значений \bar{L} функция $\sigma_{13}(\xi, \bar{L})$ имеет одинаковый характерный вид – с единственным экстремумом на срединной поверхности оболочки, где напряжения межслойного сдвига достигают максимума по абсолютной величине. На границе раздела слоев сохраняется непрерывность этих напряжений, но гладкость функций $\sigma_{13}(\xi, \bar{L})$ нарушается.

Для коротких оболочек напряженное состояние является моментым, и напряжений межслойного сдвига σ_{13} возрастают с уменьшением значений \bar{L} .

С увеличением длины оболочки при $\bar{L} > 0.5$ значения напряжений σ_{13} уменьшаются, достигая минимума примерно при $\bar{L} \approx 1.5$, при дальнейшем увеличении длины, межслойные напряжения σ_{13} начинают возрастать, и затем стабилизируются, но по абсолютным значениям максимум этих напряжений существенно меньше абсолютного максимума напряжения $\sigma_{13}(\xi, \bar{L})$ для коротких оболочек.

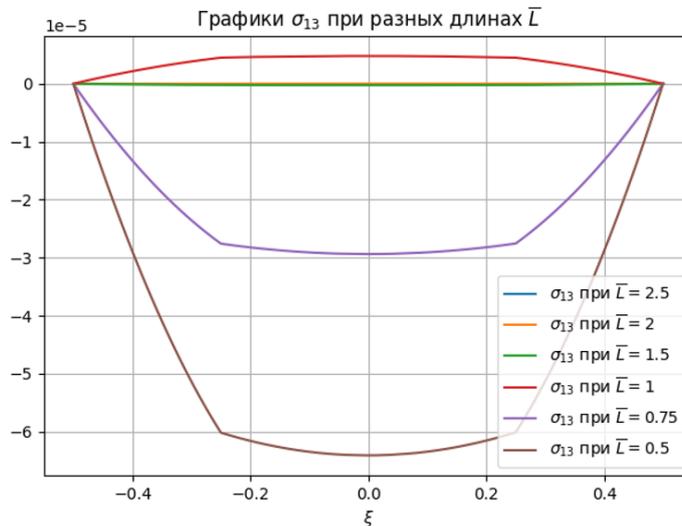


Рисунок 3.14 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{13} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки

На рисунке 3.15 показаны графики зависимости напряжений межслойного сдвига $\sigma_{23} = \sigma_{r\varphi}$ от поперечной координаты ξ при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки. Характер функции $\sigma_{23}(\xi, \bar{L})$ полностью подобен зависимости $\sigma_{13}(\xi, \bar{L})$, различие имеется только в абсолютных значениях напряжений.

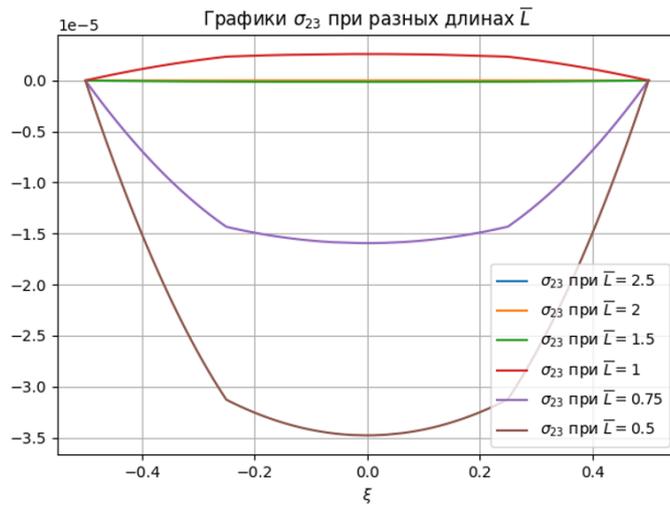


Рисунок 3.15 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{23} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки

На рисунке 3.16 показаны графики зависимости поперечных напряжений σ_{33} от поперечной координаты ξ при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки.

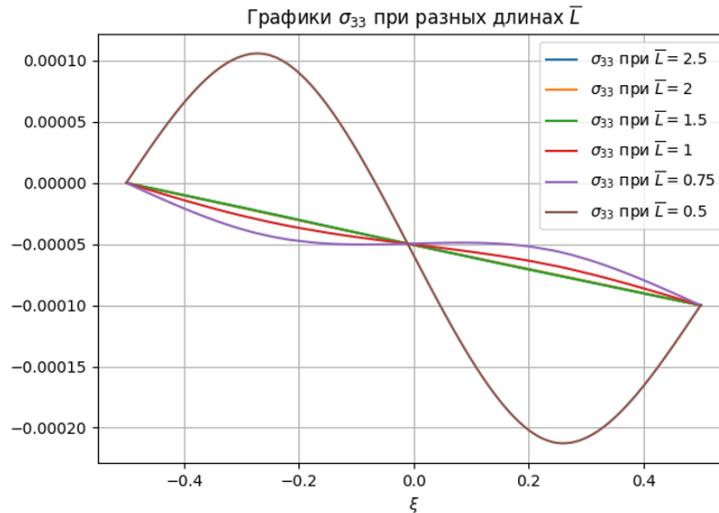


Рисунок 3.16 – Распределение поперечных напряжений σ_{33} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки

Для коротких оболочек при $\bar{L} < 1$ функции $\sigma_{33}(\xi, \bar{L})$ не являются монотонными, они имеют по 2 локальных экстремума, причем при уменьшении параметра \bar{L} эти экстремумы существенно возрастают, так что максимальные по абсолютной величине напряжения σ_{33} в несколько раз превышают значения σ_{33} на

внешней поверхности. При увеличении длины оболочки при $\bar{L} > 0.5$ значения напряжений σ_{33} уменьшаются, и график функции $\sigma_{33}(\xi, \bar{L})$ стремится к линейной по ξ функции.

3.9 Результаты численных расчетов для случая жестко закрепленных торцов цилиндрической оболочки из КМ-2 без нагрева

В данном разделе представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки для случая КМ-2 – с другой схемой армирования: $[45^0 / 30^0 / 30^0 / 45^0]$. Эта схема отличается от КМ-1 $[30^0 / 60^0 / 60^0 / 30^0]$ тем, что внешние слои оболочки № 1 и № 4 у КМ-2 имеют больший угол армирования (45^0 и 30^0 , соответственно), а внутренние слои № 2 и 3, наоборот – меньший угол армирования (30^0 и 60^0). Следовательно, у КМ-2 внешние слои № 1 и 2 обладают меньшей жесткостью, чем у КМ-1, а внутренние – наоборот, большей жесткостью. Представленные ниже расчеты позволяют оценить влияние изменения порядка расположения более жестких слоев в пакете на общее осредненное напряженно-деформированное состояние оболочки, а также на распределение локальных напряжений σ_{ij} в каждом слое.

Условия нагружения и геометрические параметры для цилиндрической оболочки из КМ-2 в точности совпадали с условиями и параметрами для оболочки из КМ-1. На рисунках 3.17...3.29 показаны результаты расчетов для оболочки из КМ-2. Качественно результаты расчетов осредненного НДС оболочки для КМ-2 совпадают с соответствующими результатами для КМ-1 (рисунках 3.4...3.10 и рисунках 3.17...3.23), поэтому проанализируем далее только эффекты, обусловленные изменением структуры композита.

Результаты расчетов, приведенные на рисунках 3.17 и 3.4 показывают, что перераспределение жесткости слоев в пакете КМ-2 по сравнению с КМ-1 приводит

к уменьшению максимальных значений изгибающего момента на торцах оболочки: для длинных оболочек значения $M_{11}(0)$ составляют примерно 0,35 МН для КМ-1 и 0,27 МН для КМ-2, а для коротких 0,4 и 0,35 МН, соответственно. Это означает, что внешние слои оболочки вносят больший вклад в изгибную жесткость оболочки, чем внутренние, поэтому снижение модулей упругости внешних слоев приводит к уменьшению изгибающего момента $M_{11}(0)$.

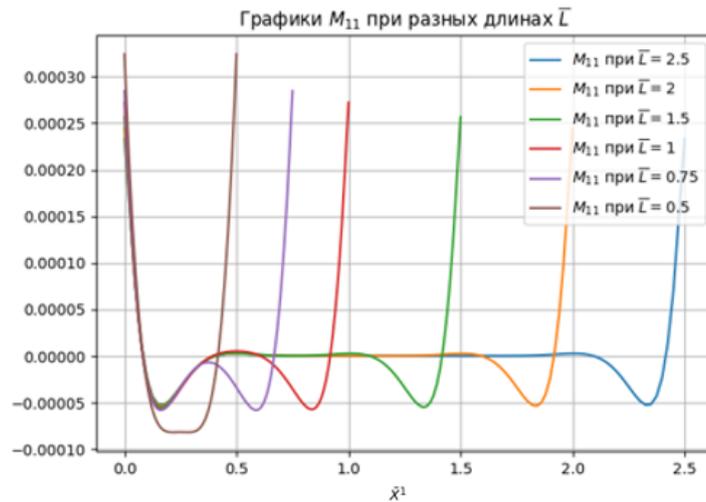


Рисунок 3.17 – Зависимость момента M_{11} (ГН) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2

Существенно меньше изменение структуры пакета слоев в КМ-2 сказывается на распределении окружного усилия T_{22} в оболочке (рисунки 3.18 и 3.5). Для длинных оболочек усилие в зоне безмоментного состояния вообще не зависит от жесткости оболочки, как это и следует из теории расчета безмоментного состояния цилиндрически оболочек [26]. Для коротких оболочек максимум усилия по абсолютной величине $|T_{22}|$ для КМ-2 меньше, чем для КМ-1 (1 и 1,5 МН/м, соответственно).

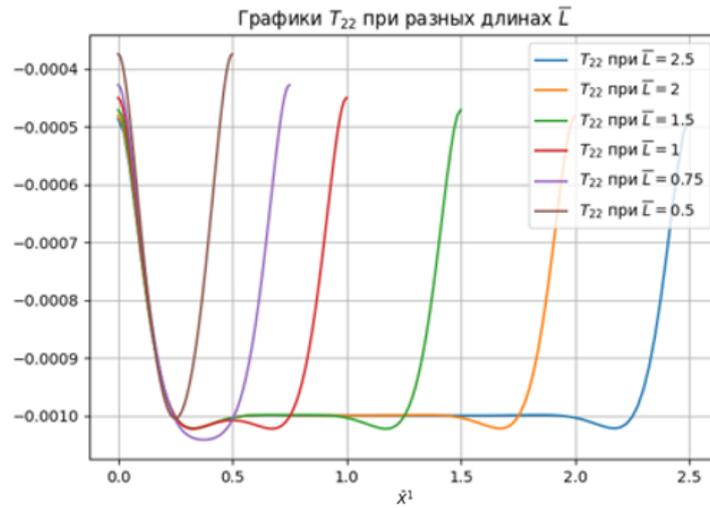


Рисунок 3.18 – Зависимость усилия T_{22} (ГН/м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2

Влияние изменения структуры композита аналогичным образом сказывается и на графике перерезывающей силы Q_1 : для КМ-2 максимальное значение $Q_1(0)$ и $Q_1(\bar{L})$ на торцах оболочки уменьшается по сравнению с КМ-1 (рисунки 3.19 и 3.6).

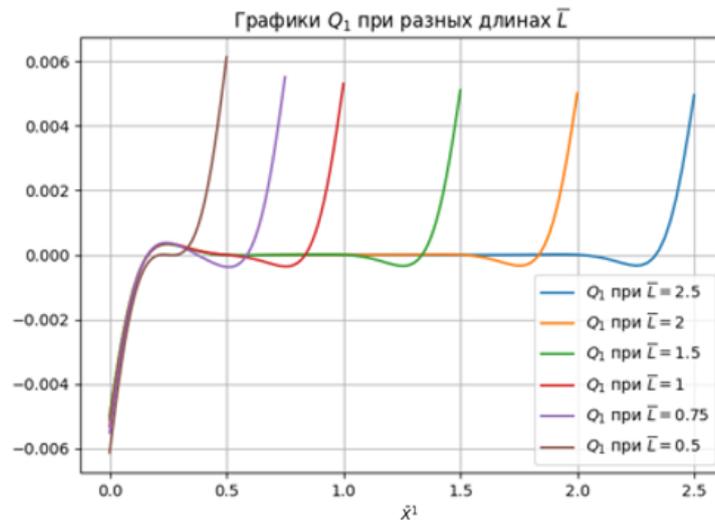


Рисунок 3.19 – Зависимость перерезывающей силы Q_1 (ГН/м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2

Прогиб оболочки $u_3^{(0)}$, наоборот, заметно возрастает с изменением структуры композита от КМ-1 к КМ-2 (рисунки 3.20 и 3.7): максимальное по абсолютной величине значение прогиба составляет, соответственно 0,018 и 0,042 мм в безмоментной зоне длинных оболочек, а также 0,028 и 0,052 – максимальное значение для коротких оболочек. Этот эффект также обусловлен уменьшением изгибной жесткости D_{1111} оболочки при переходе к КМ-2.

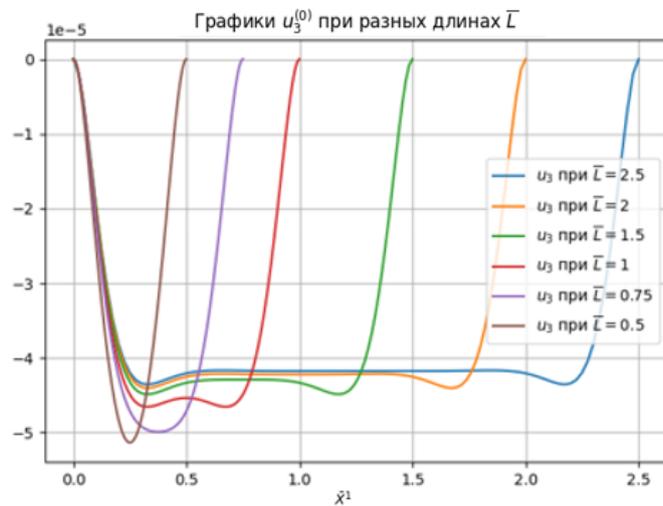


Рисунок 3.20 – Зависимость прогиба оболочки $u_3^{(0)}$ (м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2

Аналогичный эффект увеличения абсолютных значений при переходе к КМ-2 наблюдается также и для продольного перемещения $u_1^{(0)}$ (рисунки 3.21 и 3.8), для продольной деформации $\varepsilon_{11}^{(0)}$ (рисунки 3.22 и 3.9) и для окружной деформации $\varepsilon_{22}^{(0)}$ (рисунки 3.23 и 3.10). Этот эффект также вызван уменьшением изгибной жесткости оболочки при переходе к структуре КМ-2.

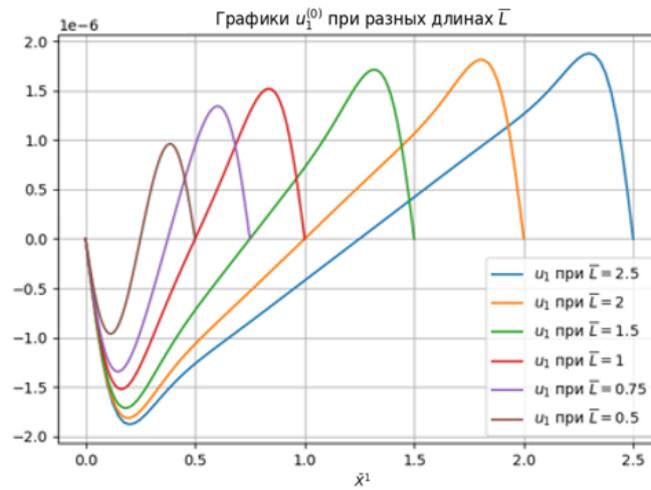


Рисунок 3.21 – Зависимость перемещения $u_1^{(0)}$ (м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2

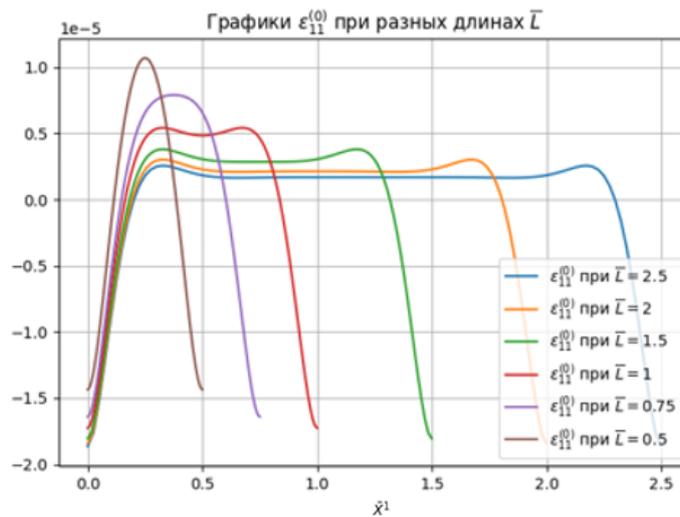


Рисунок 3.22 – Зависимость деформации $\epsilon_{11}^{(0)}$ от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2

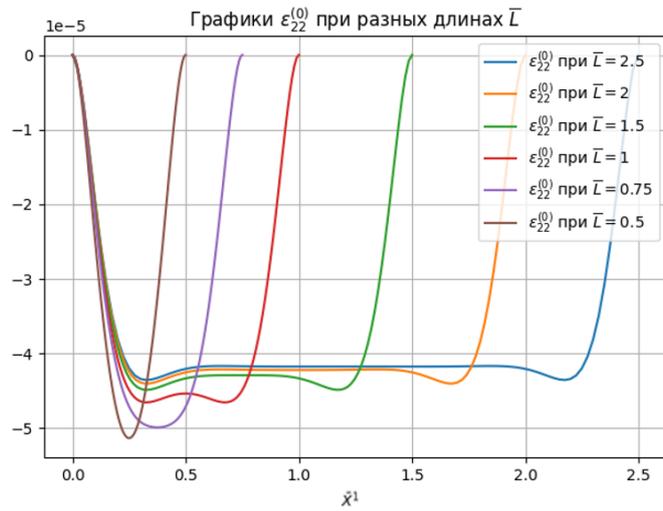


Рисунок 3.23 – График $\varepsilon_{22}^{(0)}$ при $R = 0,2$ м, длина L варьируется

Влияние изменения структуры армирования композитной оболочки на напряжения в слоях оболочки более сложное. Изгибные напряжения σ_{11} в срединных слоях №№ 2 и 3 оболочки в КМ-2 больше, чем в КМ-1 (рисунки 3.24 и 3.11), а во внешних слоях №№ 1 и 4, наоборот, меньше. Это также объясняется тем, что модули упругости C_{1111} в слоях 3 и 4 с углами армирования $\pm 30^\circ$ у КМ-2 больше, чем с углами армирования $\pm 60^\circ$ у КМ-1. И наоборот, в слоях 1 и 4 с углами армирования $\pm 45^\circ$ модули упругости C_{1111} у КМ-2 меньше, чем у КМ-1 с углами $\pm 30^\circ$.

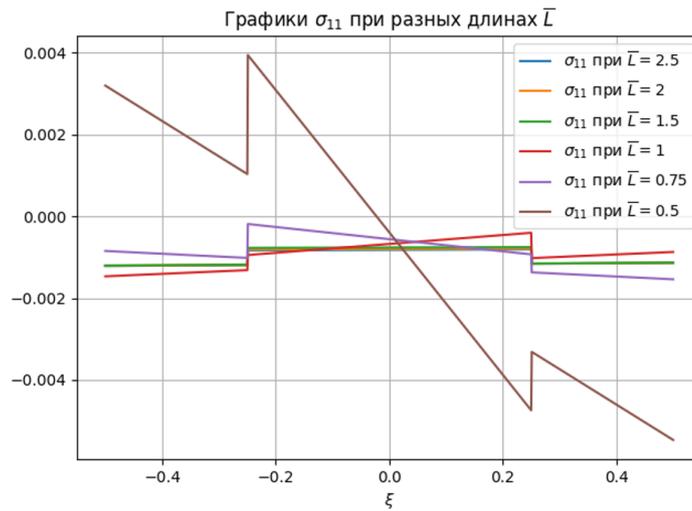


Рисунок 3.24 – Распределение продольного (изгибного) напряжения σ_{11} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2

Подобная ситуация реализуется и для окружного напряжения σ_{22} : в срединных слоях №№ 2 и 3 оболочки в КМ-2 эти максимум этих напряжений по абсолютной величине больше, чем в КМ-1 (рисунки 3.25 и 3.12), а во внешних слоях №№ 1 и 4, наоборот, меньше. Различие для максимумов этих напряжений составляет примерно 2,5. Аналогичную картину можно видеть и для касательных напряжений σ_{12} (рисунки 3.26 и 3.13).

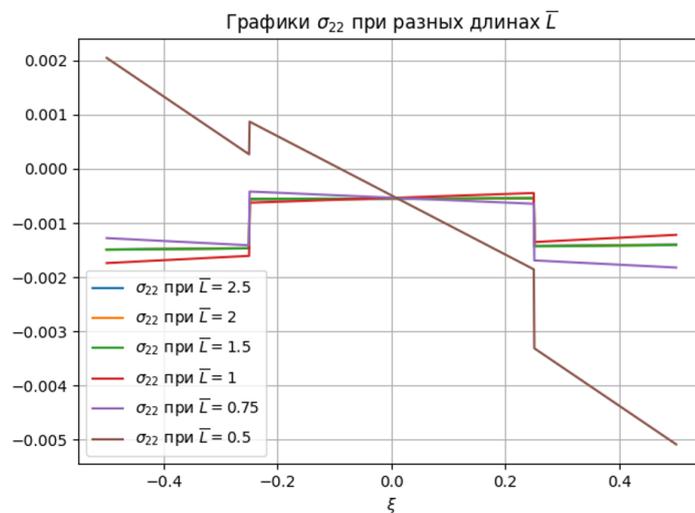


Рисунок 3.25 – Распределение окружных напряжений σ_{22} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2

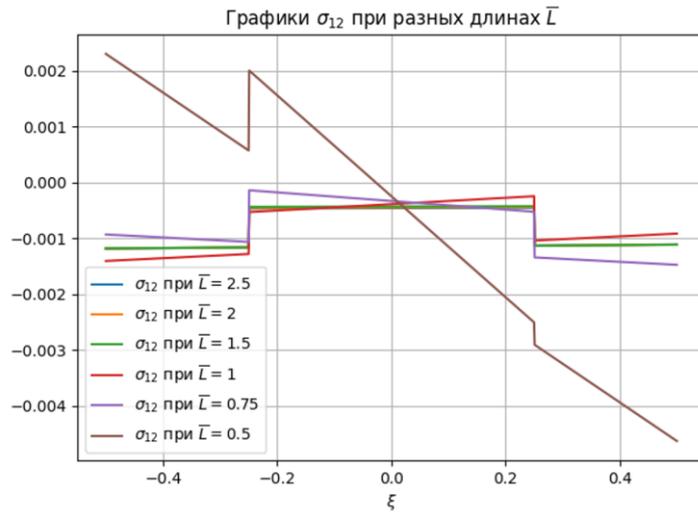


Рисунок 3.26 – Распределение касательных напряжений σ_{12} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2

Для напряжений межслойного сдвига σ_{13} и σ_{23} при переходе от КМ-1 к КМ-2 изменяются не только абсолютные величины максимумов напряжений (примерно в 2 раза), но и характер самих распределений этих напряжений по толщине оболочки. Для КМ-1 в срединных более «мягких» слоях №№ 2 и 3 оболочки напряжения межслойного сдвига более равномерные, почти постоянные по ξ (рисунки 3.14 и 3.15). В тоже время для КМ-2 срединные слои №№ 2 и 3 более жесткие, чем слои №№ 1 и 2, поэтому распределение напряжений σ_{13} и σ_{23} по ξ в них более неравномерное, подобное параболическому закону (рисунки 3.27 и 3.28).

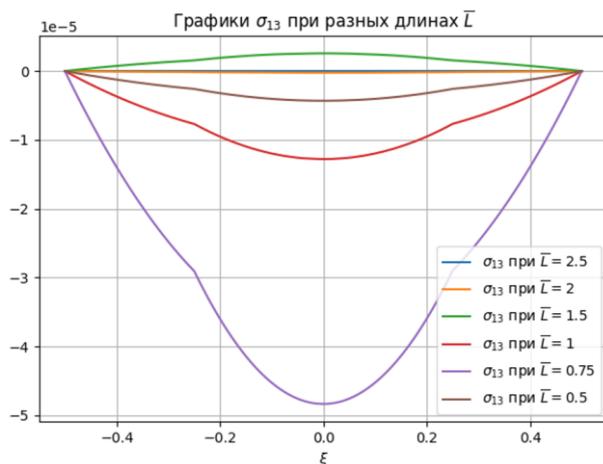


Рисунок 3.27 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{13} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2

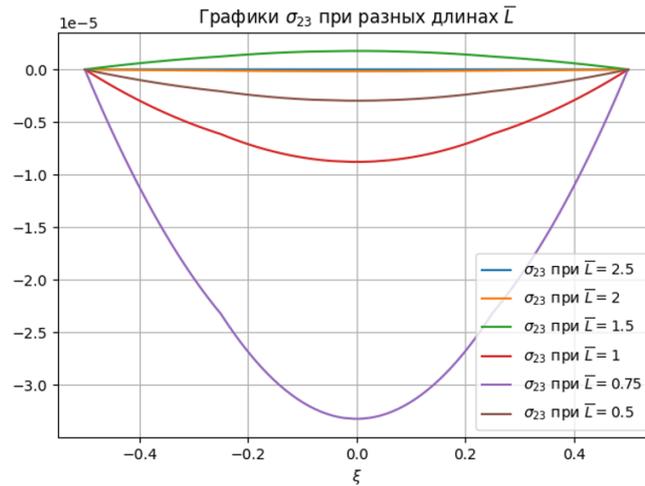


Рисунок 3.28 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{23} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2

Меняется и характер распределения поперечных напряжений σ_{33} при переходе от КМ-1 к КМ-2: для коротких оболочек график напряжений $\sigma_{33}(\xi)$ отражается относительно срединной поверхности: локальные минимумы меняются на локальные максимумы, и наоборот (рисунки 3.16 и 3.29). Абсолютные значения напряжений σ_{33} при переходе к КМ-2 возрастают примерно в 1,5 раза.

Таким образом, разработанный асимптотический метод расчета тонкостенных оболочек позволяет исследовать «тонкие» эффекты изменения полного (для всех 6 компонент тензора напряжений) напряженно-деформированного состояния в каждом слое оболочки.

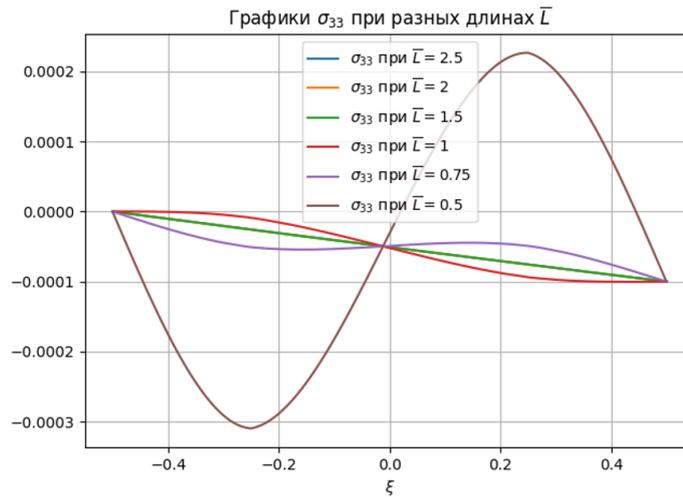


Рисунок 3.29 – Распределение поперечных напряжений σ_{33} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2

3.10 Результаты численных расчетов для случая совместного воздействия нагрева и давления

В данном разделе представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки для случая КМ-2 при совместном воздействии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева с внешней стороны оболочки. Условия нагрева приведены в разделе 3.7. Расчеты проведены для относительно короткой оболочки с $\bar{L} = 0,5$.

На рисунке 3.30 показаны распределения температуры по толщине оболочке в различные моменты времени: от 1 до 40 с. В силу условий теплоизоляции на внутренней поверхности оболочки в течение указанного промежутка времени температурное поле в оболочке выходит на равномерное по всей толщине. Наиболее существенный вклад в НДС температурное поле вносит на начальных моментах времени, когда градиент температуры по толщине имеет максимальные значения.

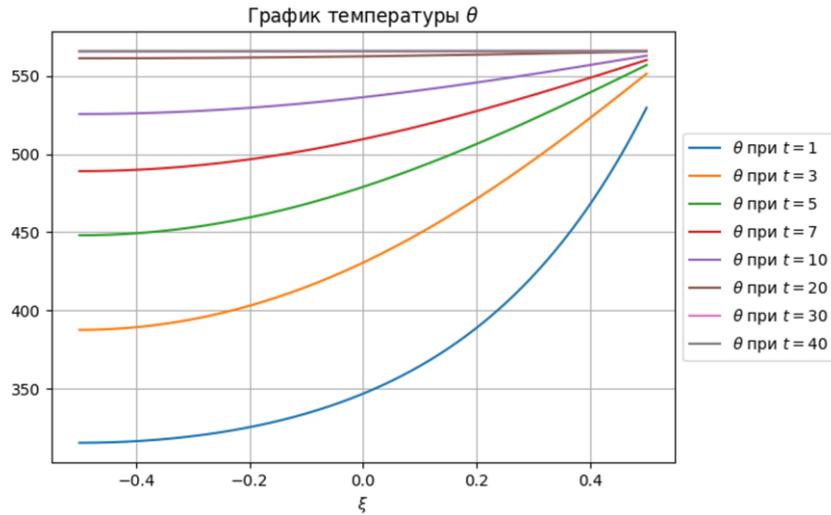


Рисунок 3.30 – Распределение температуры θ (К) по толщине оболочки для различных моментов времени t

На рисунках 3.31...3.34 приведены распределения тепловых деформаций ε_{ij}^T в слоях оболочки для различных моментов времени. Графики поперечной тепловой деформации ε_{33}^T подобны распределениям температуры, поскольку коэффициенты теплового расширения α_{33} всех слоев в поперечном направлении практически совпадают и близки к к.т.р матрицы. Вследствие этого функции $\varepsilon_{33}^T(\xi)$ для всех моментов времени являются гладкими.

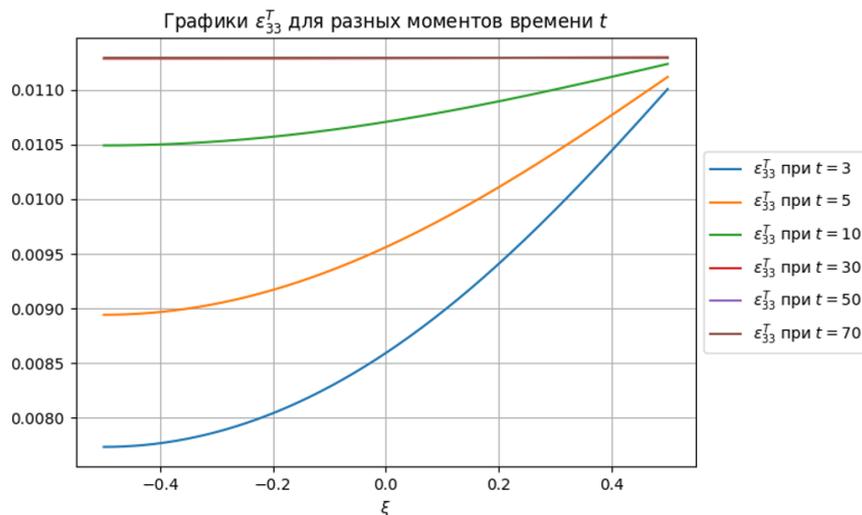


Рисунок 3.31 – Распределение тепловой деформации ε_{33}^T по толщине оболочки для различных моментов времени t

В то же время к.т.р. слоев α_{II} в тангенциальной плоскости существенно различаются, т.к. они существенным образом зависят от угла армирования слоя. Для слоев №№ 1 и 4 угол армирования равен $\pm 45^0$, а для слоев №№ 3 и 4 угол армирования равен $\pm 30^0$. Вследствие этого различия к.т.р. в слоях графики функций $\varepsilon_{II}^T(\xi)$ являются кусочно-гладкими (рисунки 3.32-3.34), причем в слоях №№ 1 и 4 тепловые деформации почти на порядок меньше тепловых деформаций в слоях №№ 2 и 3 во все рассматриваемые моменты времени.

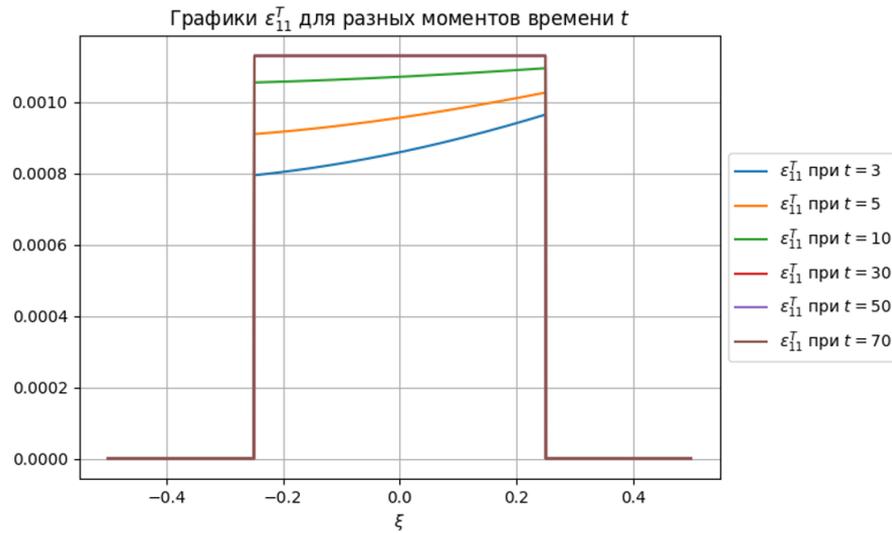


Рисунок 3.32 – Распределение тепловой деформации ε_{11}^T по толщине оболочки для различных моментов времени t

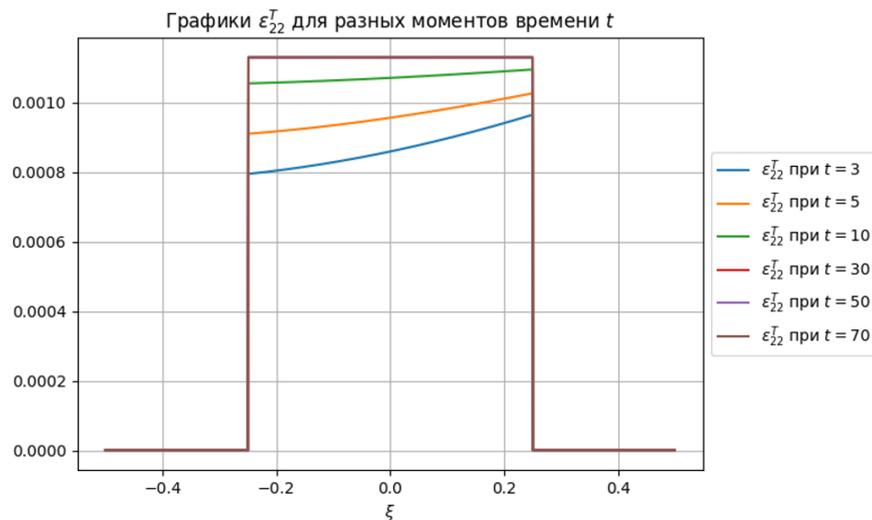


Рисунок 3.33 – Распределение тепловой деформации ε_{22}^T по толщине оболочки для различных моментов времени t

При увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание значений компонент тензора тепловой деформаций $\varepsilon_{IJ}^T(\xi)$, при этом при увеличении времени графики этих функций остаются кусочно-постоянными.

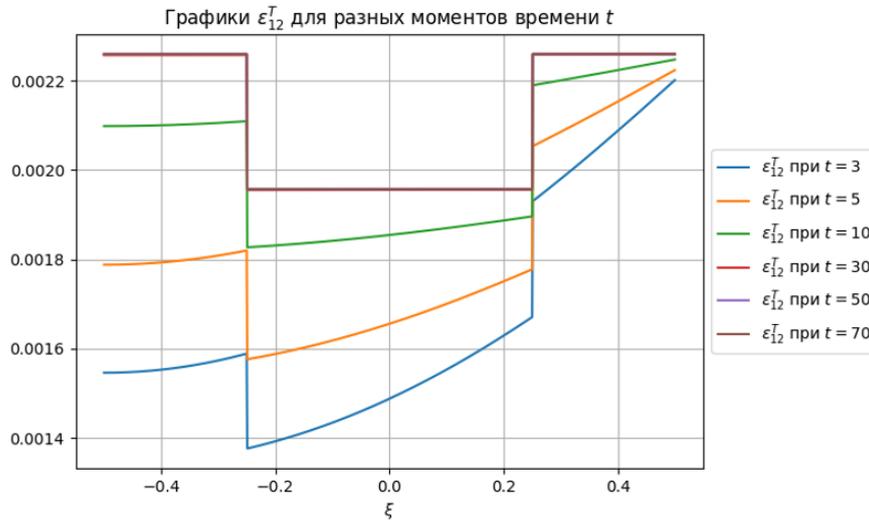


Рисунок 3.34 – Распределение тепловой деформации ε_{12}^T по толщине оболочки для различных моментов времени t

Графики функций тепловых напряжений $\sigma_{IJ}^T(\xi)$ (рисунки 3.35...3.37) также являются кусочно-гладкими, поскольку эти напряжений полностью определяются тепловыми деформациями $\varepsilon_{ij}^T(\xi)$, но поскольку в эти деформации вносит вклад также и поперечная компонента тепловой деформации $\varepsilon_{33}^T(\xi)$, то в слоях №№ 1 и 4 тепловые напряжения оказываются сопоставимы с тепловыми напряжениями в слоях №№ 2 и 3.

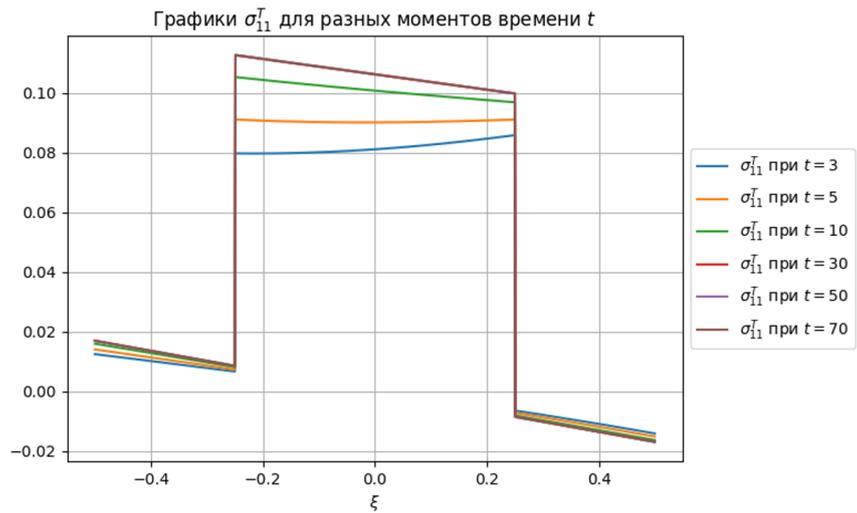


Рисунок 3.35 – Распределение теплового напряжения $\sigma_{11}^T(\xi)$ по толщине оболочки для различных моментов времени t

Как видно из графиков, при увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание абсолютных значений напряжений $\sigma_{IJ}^T(\xi)$.

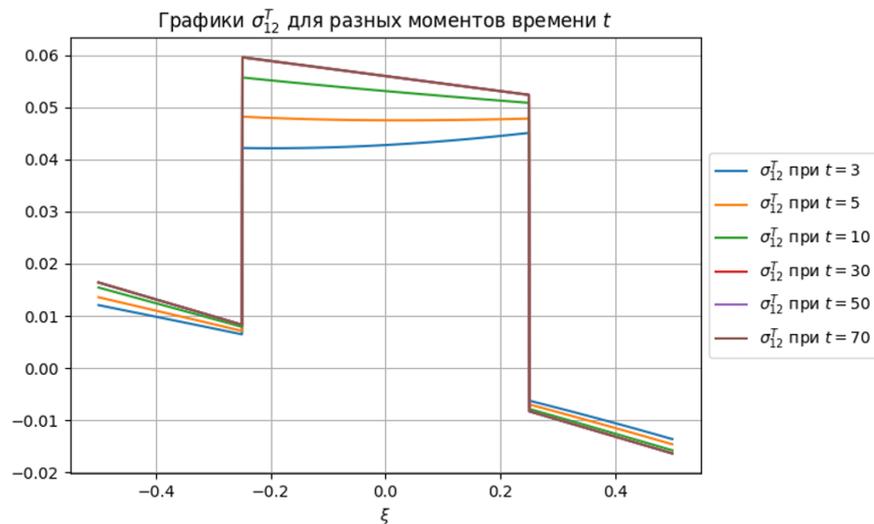


Рисунок 3.36 – Распределение теплового напряжения $\sigma_{12}^T(\xi)$ по толщине оболочки для различных моментов времени t

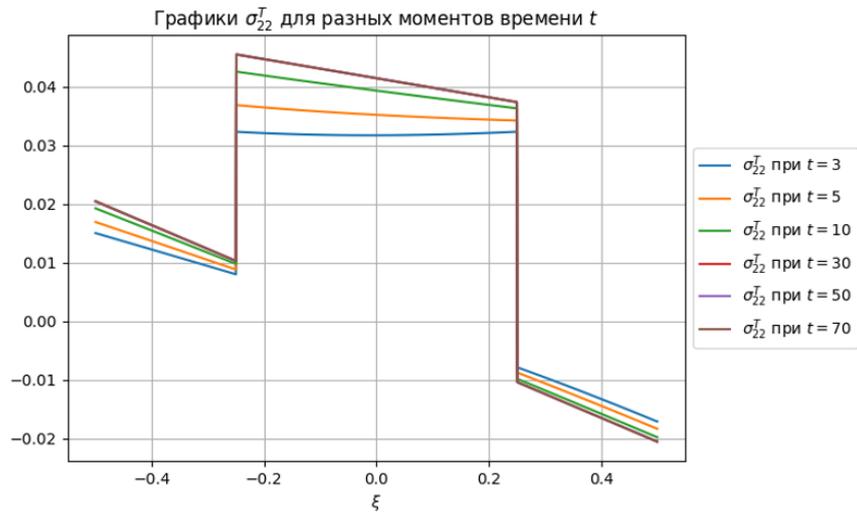


Рисунок 3.37 – Распределение теплового напряжения $\sigma_{22}^T(\xi)$ по толщине оболочки для различных моментов времени t

На рисунках 3.38...3.50 представлены результаты расчета осредненных параметров оболочки, также для различных моментов времени нагрева. Сравним эти результаты с соответствующими результатами для оболочки без нагрева (рисунки 3.4...3.16).

Графики изгибающего момента M_{11} при наличии нагрева существенно образом отличаются случая отсутствия нагрева (рисунки 3.38 и 3.17). Локальные максимумы меняют свои знаки при наличии одностороннего нагрева: на торцах оболочки момент M_{11} имеет отрицательные значения, а в центре оболочки – положительное значение. По абсолютной величине значения момента M_{11} при наличии нагрева возрастают примерно. При увеличении времени нагрева, по мере увеличения общего прогрева оболочки экстремальные значения функции $M_{11}(X^1)$ возрастают.

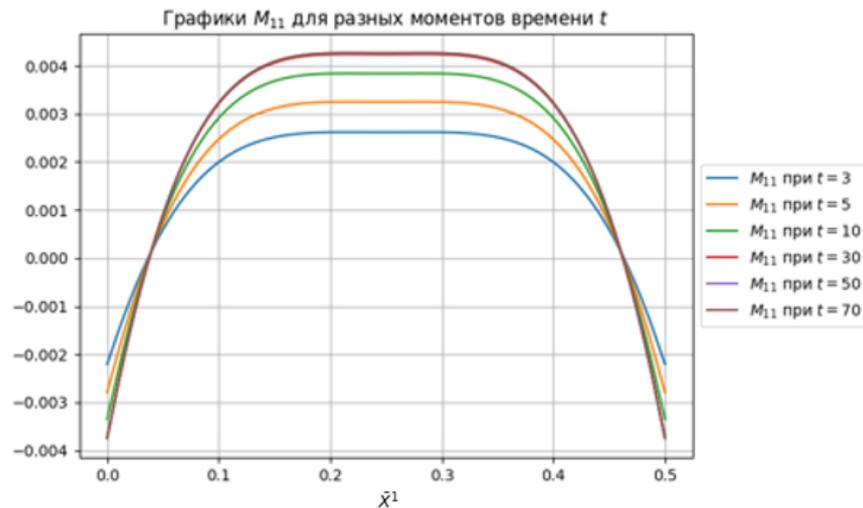


Рисунок 3.38 – График M_{11} (ГН) для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м

Подобным же образом наличие нагрева изменяет распределение перерезывающей силы Q_1 по длине оболочки: максимальные значения функции $Q_1(X^1)$ на торцах оболочки меняют знаки, по сравнению со случаем нагружения без нагрева. Абсолютные значения этих максимумов функции $Q_1(X^1)$ возрастают примерно на порядок. С увеличением времени нагрева экстремальные значения функции $Q_1(X^1)$ возрастают (рисунок 3.39).

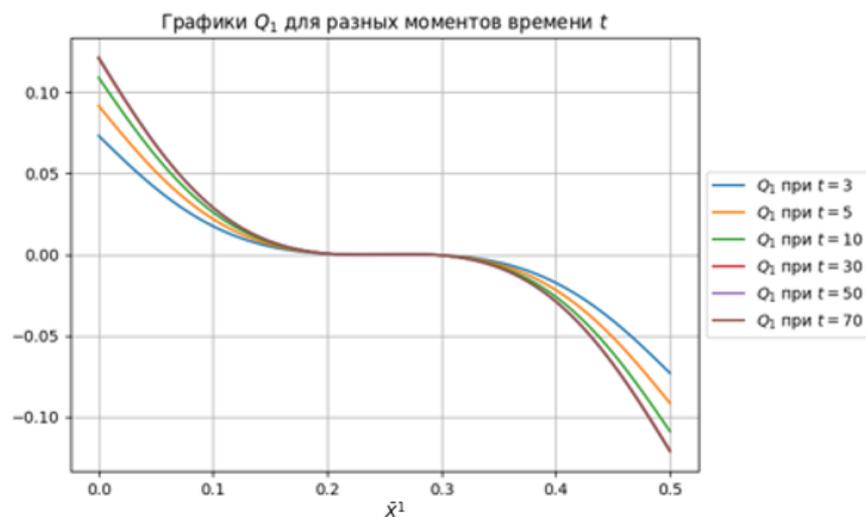


Рисунок 3.39 – График Q_1 (ГН/м) для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м

Аналогичные результаты имеют место и для окружного усилия T_{22} (рисунки 3.40 и 3.18), для прогиба $u_3^{(0)}$ (рисунки 3.41 и 3.20), для продольного перемещения $u_1^{(0)}$ (рисунки 3.42 и 3.21), для деформации $\varepsilon_{11}^{(0)}$ (рисунки 3.43 и 3.22), для деформации $\varepsilon_{22}^{(0)}$ (рисунки 3.44 и 3.23) при наличии и отсутствии нагрева.

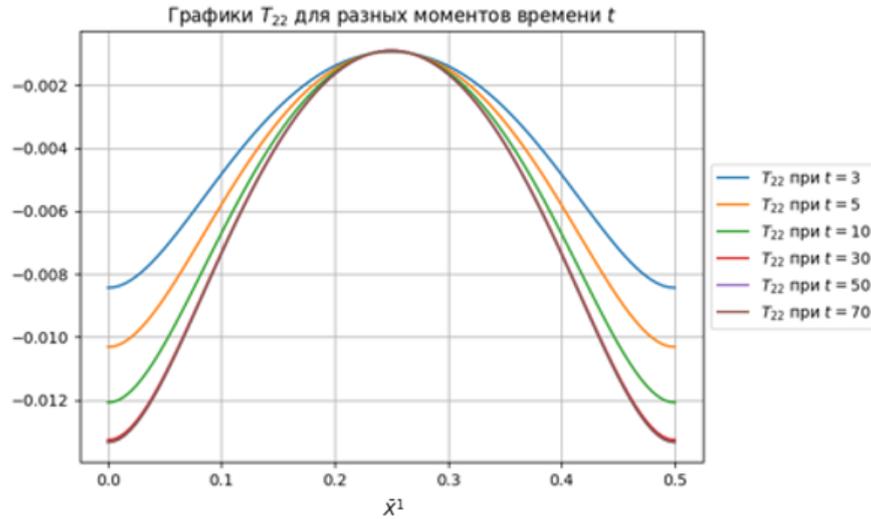


Рисунок 3.40 – График T_{22} (ГН/м) для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м

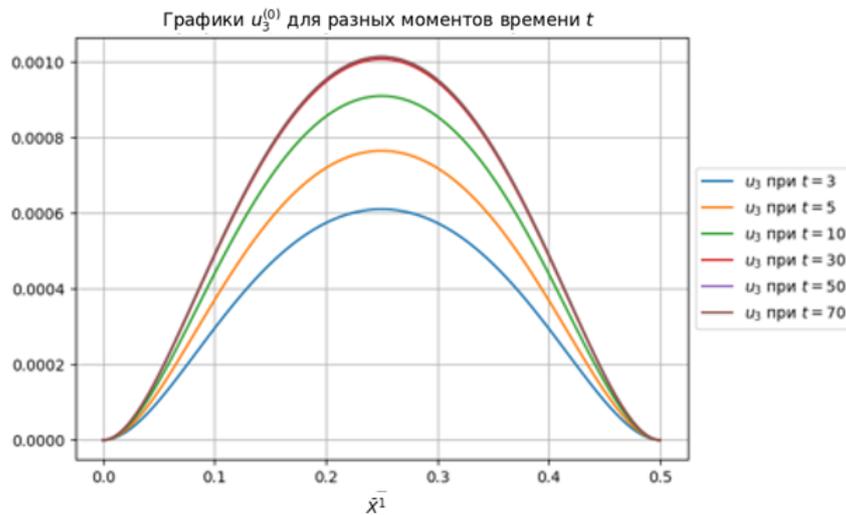


Рисунок 3.41 – График $u_3^{(0)}$ для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м

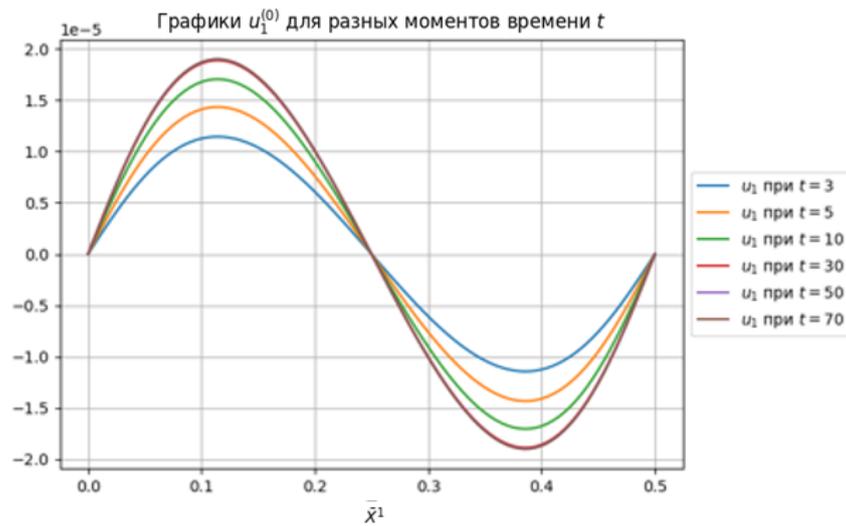


Рисунок 3.42 – График $u_1^{(0)}$ для различных моментов времени при
 $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м

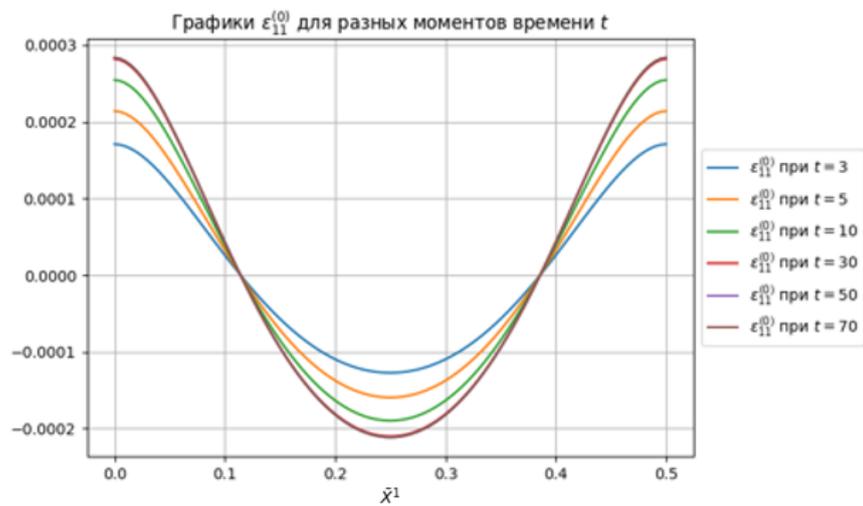


Рисунок 3.43 – График $\varepsilon_{11}^{(0)}$ для различных моментов времени при
 $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м

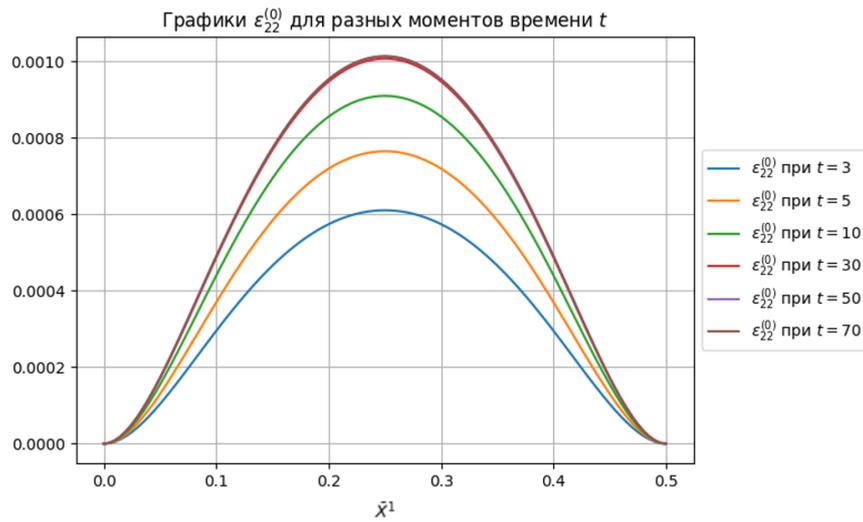


Рисунок 3.44 – График $\varepsilon_{22}^{(0)}$ для различных моментов времени при
 $R = 0.2 \text{ м}$, $L = 0.5 \text{ м}$

Напряжения в оболочке при наличии одностороннего нагрева показаны на рисунках 3.45...3.50. Влияние нагрева приводит к существенному возрастанию общего уровня всех напряжений, прежде всего изгибных σ_{11} (рисунки 3.45 и 3.24), окружных σ_{22} (рисунки 3.46 и 3.25) и касательных σ_{12} (рисунки 3.47 и 3.26). Возрастание экстремальных значений этих напряжений происходит почти на порядок. По мере прогрева оболочки по толщине с увеличением времени t общий уровень этих напряжений возрастает.

Качественно распределение в слоях всех тангенциальных напряжений σ_{1j} при наличии нагрева также меняется.

При отсутствии нагрева и действии только внешнего давления изгибные напряжения σ_{11} во внешних слоях №№ 3 и 4 – отрицательные, а во внутренних слоях №№ 1 и 2 – положительные (рисунок 3.45). Добавление одностороннего внешнего нагрева приводит к тому, что знак напряжений σ_{11} меняется: во внешнем, наиболее нагретом слое № 4 оно становится положительным, а в остальных слоях №№ 1,2 и 3 – отрицательным. С увеличением времени нагрева происходит постепенное возрастание значений напряжений σ_{11} по абсолютной величине.

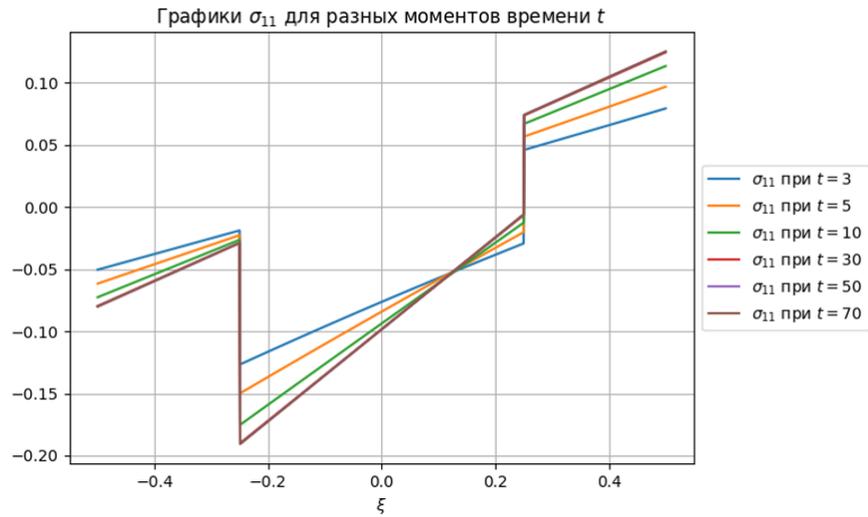


Рисунок 3.45 – Распределение продольных (изгибных) напряжений σ_{11} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева для различных моментов времени t

Аналогичный эффект изменения знака напряжений при действии нагрева возникает и для окружных напряжений σ_{22} (рисунки 3.46 и 3.25), а также для касательных напряжений σ_{12} (рисунки 3.47 и 3.26).

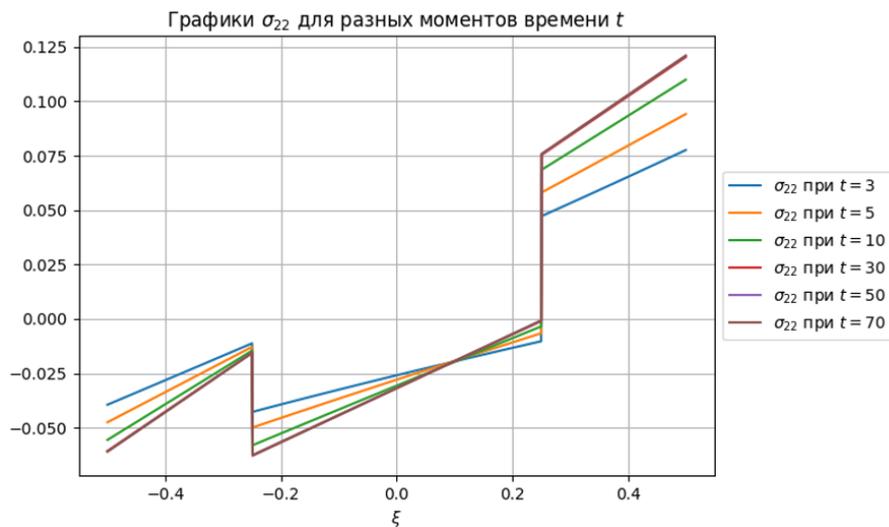


Рисунок 3.46 – Распределение окружных напряжений σ_{22} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии давления и нестационарного одностороннего нагрева для различных моментов времени t

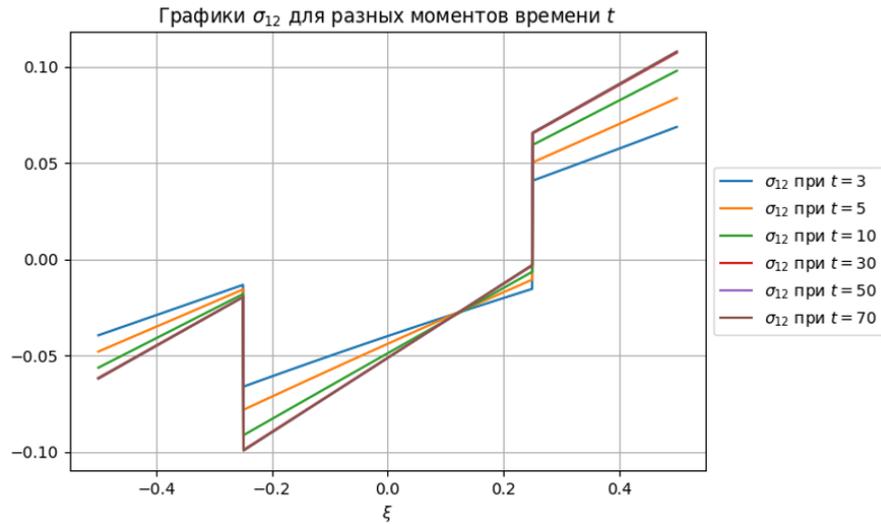


Рисунок 3.47 – Распределение касательных напряжений σ_{12} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева для различных моментов времени t

Напряжения межслойного сдвига σ_{13} (рисунки 3.48 и 3.27) и σ_{23} (рисунок 3.49 и 3.28) при наложении одностороннего нагрева увеличивают значения, однако не на порядок, как тангенциальные напряжений, а примерно в 2 раза. Распределение напряжений межслойного сдвига по толщине сохраняет «параболический» вид, с увеличением времени нагрева максимум этих напряжений возрастает.

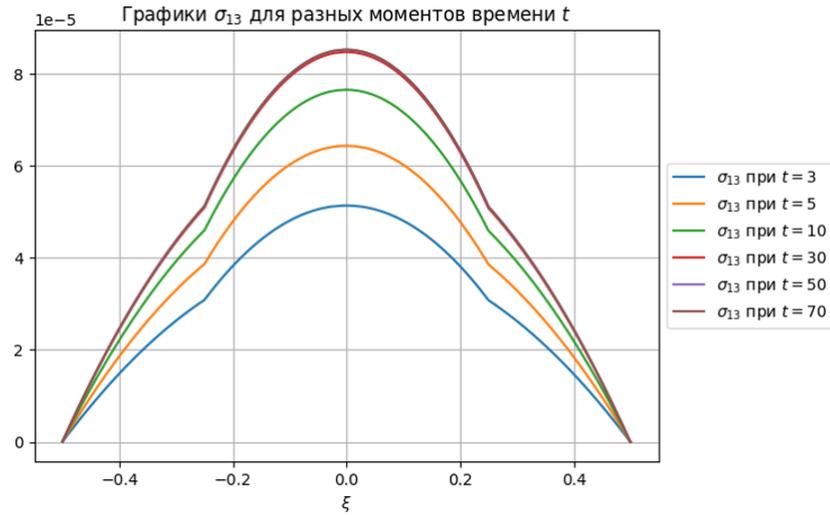


Рисунок 3.48 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{13} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева для различных моментов времени t

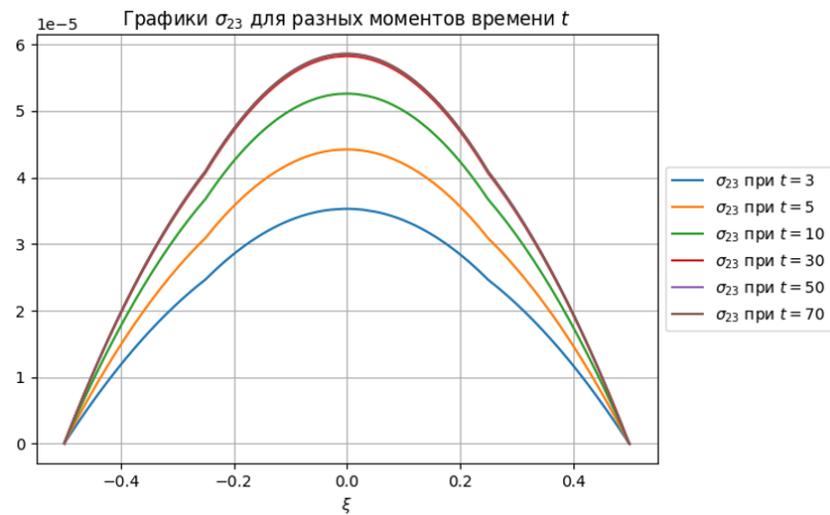


Рисунок 3.49 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{23} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева для различных моментов времени t

Поперечные напряжения σ_{33} при наложении одностороннего нагрева возрастают, так же как и тангенциальные напряжения, примерно на порядок (рисунки 3.50 и 3.29). Максимумы этих напряжений по абсолютной величине существенно превосходят значение напряжений, обусловленных только давлением сжатия $\tilde{p}_+ = 10^{-4}$ ГПа.

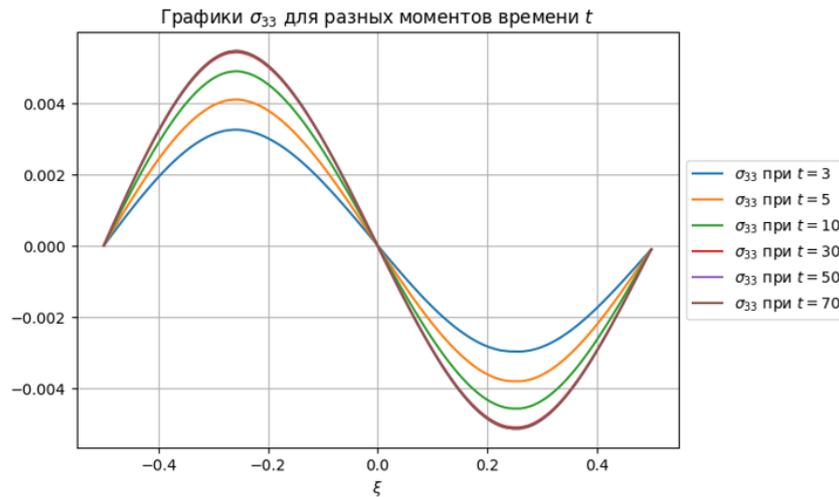


Рисунок 3.50 – Распределение поперечных напряжений σ_{33} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева для различных моментов времени t

Расчет этих напряжений играет важную роль для оценки возможных расслоений композитных конструкций, так как при нагреве эти напряжения $|\sigma_{33}|$ больше по абсолютной величине напряжения межслойного сдвига, которые обычно считаются наиболее «опасными» для слоистых композитов при воздействии только механических нагрузок.

При увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание значений поперечных напряжений σ_{33} по абсолютной величине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

1. Предложена методика асимптотического анализа напряженно-деформированного и теплового состояния многослойных тонких анизотропных композитных оболочек общего вида в трехмерной постановке без дополнительных предположений о характере распределения неизвестных функций по толщине оболочки. Показано, что методика приводит к двумерным осредненным системам уравнений типа анизотропных термоупругих оболочек типа Кирхгофа-Лява, а также позволяет математически строго обосновать формулы для вычисления распределения всех шести компонент тензора напряжений по толщине оболочки с учетом термонапряжений.

2. С помощью разработанной методики асимптотического анализа сформулирована рекуррентная последовательность локальных задач, для которых получены аналитические решения, что позволило получить явные аналитические выражения для всех 6 компонент тензора напряжений в оболочке, без использования гипотез об их характере распределения по толщине.

3. Получена система уравнений двумерной теории цилиндрических оболочек и явные аналитические формулы для всех компонент тензора напряжений в цилиндрических оболочках, которые используют только решение осредненной задачи теории оболочек.

4. В качестве примера применения разработанной методики решены задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической композитной многослойной оболочки при действии внешнего давления, а также при комбинированном воздействии давления и одностороннего нагрева. Показано, что разработанная методика позволяет проводить расчет трехмерного термо-напряженно-деформированного состояния композитных оболочек при различных структурах армирования и сложного термонагружения, используя при этом только двумерную осредненную теорию оболочек, в том числе позволяет вычислять напряжения межслойного

сдвига и поперечные термо-напряжения в оболочке, которые при одностороннем нагреве могут являться наиболее опасными с точки зрения предельного состояния оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
4. Бакулин В.Н. Методы оптимального проектирования и расчёта композиционных конструкций. Том 1. М.:Физматлит, 2008. 256 с.
5. Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С., Алфутов Н.А. и др. Основы строительной механики ракет. М.: Высшая школа, 1969. 494 с.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.:Наука, 1984.
7. Бердичевский В.Л., Вариационные принципы механики сплошной среды, Москва: Наука, 1983.
8. Белкин А. Е., Гаврюшин С.С. Расчет пластин методом конечных элементов: Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 232 с.
9. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. - М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
10. Болотин В.В. и Новичков Ю.Н., Механика многослойных конструкций, Москва: Машиностроение, 1980.
11. Большаков В.И., Андрианов И.В. и Данишевский В.В., Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры, Днепропетровск: Пороги, 2008.
12. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. - Киев: Наукова думка, 1985. 300 с.
13. Василенко А. Т. Исследование напряженного состояния анизотропных оболочек в различных постановках. Прикладная механика, 1985. №4. с. 32-41.

14. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
15. Васильев В. В., Лурье С. А. К проблеме построения неклассической теории пластин. Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела, 1990, №2, с. 158-167.
16. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В. и Ташкинов А.А., Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М: Наука. Физматлит, 1997. 288 с.
17. Гнездилов В.А., Дудченко А.А., Лурье С.А., Фирсанов Вик.В. Основы термоупругости композиционных материалов. Москва, Изд-во «Беловодье», 2015. 144с.
18. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
19. Горбачев В.И., Кабанова Л.А. О постановке задач в общей теории Кирхгофа-Лява неоднородных анизотропных пластин. Вестник Московского университета. Сер.1, математика, механика. 2018. № 3, с. 43-50.
20. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И. и Яровая А.В., Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций, Москва: Физматлит, 2005. 576 с.
21. Григолюк Э. И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов// Механика композит. Материалов, 1988.-№4,-с.698-704.
22. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.:Высшая школа, 2001. 575 с.
23. Димитриенко Ю.И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.:Машиностроение, 1997. 375 с.
24. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды.- М.:Физматлит, 2009. 632 с.
25. Димитриенко Ю. И. Механика сплошной среды, т.1. Тензорный анализ. М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2011. 367 с.

26. Димитриенко Ю.И. Основы механики твердого тела/ Механика сплошной среды. Т.4.-Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2013. 580 с.

27. Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2018. 448 с

28. Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2012, №. 3, с. 86–100.

29. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 3, с. 114–132.

30. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Теория композитных цилиндрических оболочек при квазистатических колебаниях, основанная на асимптотическом анализе уравнений общей вязкоупругости. Ключевые тренды в композитах: наука и технологии. Сборник материалов Международной научно-практической конференции, 2019, с. 162-172.

31. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 4, с. 84–110.

32. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е., Белькова К.В., Борин Д.М. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 2. Расчет цилиндрических оболочек. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 3, с. 3–30.

33. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации. Инженерный журнал: наука и инновации, 2016, №12(60).

34. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 1, с. 16-40
35. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. Механика композиционных материалов и конструкций. 2014, Т.20. № 2, с. 260-282.
36. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, №7(19)
37. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.:ВИНИТИ.1983, т.15. с.3-68.
38. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М.: Машиностроение, 1972. 168 с.
39. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкциях летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1966. 294 с.
40. Зарубин В.С. Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
41. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 564 с.
42. Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко//ПММ, 2008. Т.72, вып.2, с. 308-321.
43. Зверьяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит//ПММ. 2003. Т.67, вып.3. с. 472-483.
44. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев:Наукова думка, 1986. 224 с.
45. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Наукова думка, 1975. 239 с.
46. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. В.В. Васильева, Ю.М.Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1989. 510 с.

47. Композиционные материалы. Т.2. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж.Сендецки. М.: Мир, 1978. 564 с.
48. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.:Физматгиз, 1957. 463 с.
49. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.:Гостехиздат. 1947, 252 с.
50. Лурье С.А., Шахрам Ю. Об определении эффективных характеристик неоднородных материалов. Механика композиционных материалов и конструкций, т. 3, 1997, № 4, с. 76-92.
51. Лурье С. А., Гавва Л. М. Метод расчета напряженно-деформированного состояния панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида. Вестник Московского авиационного института. Т.2. №1, 1995.
52. Ляв А. Математическая теория упругости. Москва, ОНТИ, 1935. 674 с.
53. Малмейтер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление композитных и полимерных материалов. Рига.: Зинатне, 1980. 572 с.
54. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела, Киев: Вища школа, 1982.
55. Назаров С. А., Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки) // Матем. сб., 191:7, 2000. с. 129–159.
56. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Асимптотический анализ задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин при граничных условиях первого и третьего рода // Сибирский журнал индустриальной математики, Том X, № 4(32), 2007, 12 с.
57. Никабадзе М.У. Применение системы полиномов Чебышева к теории тонких тел. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2007. № 5, с. 56-63.
58. Никабадзе М.У. Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. Диссертация док-ра физ.-матем.наук. М.:2014. 384 с.
59. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.:Судпромгиз, 1962. 432 с.

60. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
61. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В. и Андрианов И.В., Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций, Москва: Машиностроение, 1991.
62. Панасенко Г. П. Многокомпонентное осреднение процессов в сильно неоднородных структурах. Матем. сб., 181:1 (1990), с 134–142.
63. Пичугина А.Е. Расчет сдвиговых компонент тензора напряжений в задаче об осесимметричном изгибе композитной оболочки на основе асимптотической теории. Всероссийская студенческая конференция «Студенческая научная весна», посвященная 165-летию со дня рождения В.Г. Шухова». Сборник тезисов докладов. г. Москва, 02-30 апреля 2018г.
64. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
65. Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 294 с.
66. Разрушение конструкций из композитных материалов / И.В. Грушецкий, И.П. Димитриенко, А.Ф.Ермоленко и др./ Под ред. В.П.Тамужа и В.Д.Протасова. - Рига: Зинатне, 1986. 264 с.
67. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.: Наука, 1983. 616 с.
68. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.:Мир, 1984.
69. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. М.:Наука, 1984. 116 с.
70. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: пер. с англ. М.: Наука, 1966, 635 с.
71. Улуханян А.Р. Динамические уравнения теории тонких призматических тел с применением разложения по системе полиномов Лежандра. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2011. № 3, с. 161-177.

72. Фирсанов Вал.В., Зоан Н.Д. Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины при температурном воздействии. *Тепловые процессы в технике*, 2019, Т.11. № 8, с. 365-373.

73. Фирсанов Вал.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние конической оболочки переменной толщины на основе трехмерных уравнений теории упругости. *Проблемы прочности и пластичности*, 2020, Т.82. № 2, с.189-200.

74. Фирсанов Вал.В., Нгуен Л.Х. Напряженное состояние композиционных цилиндрических оболочек на основе уточненной теории с учетом пьезоэлектрического эффекта. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2021. № 4, с.37-44.

75. Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Изв. РАН.МТТ*, 2006. № 6, с. 71-79.

76. Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины. *Вычислительная механика сплошной среды*, 2011, Т.4. №2, с.128-139.

77. Шешенин С.В., Скопцов К.А. Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 49–61.

78. Aboudi J., Pindera M.-J. and Arnold S.M., Microstructural optimization of functionally graded composites subjected to a thermal gradient via the coupled higher-order theory, *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, no. 1-2, p. 93–108, 1997.

79. Aboudi J., Pindera M.-J. and Arnold S., A coupled higher-order theory for functionally graded composites with partial homogenization. *Composites Engineering*, vol. 5, no. 7, p. 771–792, 1995.

80. Bensoussan A., Lions J.L. and Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Amsterdam: North-Holland, 1978.

81. Caillerie D. and Nedelec J.C., Thin elastic and periodic plates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 6, no. 1, p. 159–191, 1984.

82. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, A E Pichugina. Theory of the multilayer thin anisotropic shells, based on the asymptotic analysis of the general equations for the

elasticity theory. IOP Journal of Physics: Conference Series, 2018. volume 1141 012097
doi:10.1088/1742-6596/1141/1/012097

83. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, A E Pichugina. Theory of composite cylindrical shells under quasistatic vibrations, based on an asymptotic analysis of the general viscoelasticity theory equations. IOP Conference Series: Material Science and Engineering, 2019. volume 683 № 012013 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012013, pp.1-6.

84. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva and A E Pichugina. Asymptotic stress analysis of multilayer composite thin cylindrical shells. IOP Conference Series: Material Science and Engineering, 2020. volume 934 (2020) 012017 doi:10.1088/1757-899X/934/1/012017, pp.1-6.

85. Francesco T. Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 200 (2011), pp. 931–952.

86. Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections. Computational mechanics, v.27. 2001, pp.199-207.

87. Jones R., Mechanics of Composite Materials, Philadelphia: Taylor&Francis, 1999.

88. Kalamkarov A.L., Composite and reinforced elements of construction, Chichester: John Wiley & Sons, 1992.

89. Kalamkarov A.L. and Kolpakov A.G., Analysis, design and optimization of composite structures, New York: J.Wiley & Sons, 1997.

90. Kohn R.V. and Vogelius M., A new model of thin plates with rapidly varying thickness, International Journal of Solids and Structures, vol. 20, no. 4, pp. 333-350, 1984.

91. Kolpakov A. G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. – Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004. 228 p.

92. Lewiński T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure. International Journal of Solids and Structures, vol. 29, no. 3, 1992. p. 309–326.

93. Levinski T., Telega J.J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. – Singapore; London: World Sci. Publ., 2000. 739 p.
94. Lurie S., Tuchkova N. and Volkov-Bogorodsky D.D., "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics," in A Generalized Solution of Eshelby and Eshelby Self-Consistent Method for Gradient Models in Mechanics of Composites, Rhodes, Greece, 2010.
95. Manevitch L.I., Andrianov I.V. and Oshmyan V.G., Mechanics of periodically heterogeneous structures, Berlin: Springer, 2002.
96. Nikabadze M., Ulukhanyan A. On the Theory of Multilayer thin bodies. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. T. 42. № 8. pp. 1900-1911.
97. Reiter T., Dvorak G. and Tvergaard V., "Micromechanical models for graded composite materials," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 45, no. 8, p. 1281–1302, 1997.
98. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Springer Verlag, Berlin, 1980.
99. Tarn J.-Q., "Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads," International Journal of Solids and Structures, vol. 38, no. 46-47, p. 8189–8206, 2001.
100. Zhikov V.V., Kozlov S.M. and Oleĭnik O.A., Homogenization of differential operators and integral functionals, Berlin: Springer Verlag, 1994.

СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА

1. Рисунок 1.1 – Геометрическая модель оболочки, стр. 12
2. Рисунок 1.2 – Связь компонент тензоров, необходимых для расчета всех компонент тензора напряжений в слоях оболочки, стр. 55
3. Рисунок 2.1 – Цилиндрическая оболочка, стр. 56
4. Рисунок 3.1 – Осесимметричный изгиб оболочки, стр. 64
5. Рисунок 3.2 – Общая структурная схема компьютерной программы для решения задачи термоупругости оболочек, стр. 76
6. Рисунок 3.3 – Структура слоисто-волокнутого композита в оболочке, стр. 77
7. Рисунок 3.4 – Зависимость момента M_{11} (ГН) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки, стр. 81
8. Рисунок 3.5 – Зависимость усилия T_{22} (ГН/м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки, стр. 82
9. Рисунок 3.6 – Зависимость перерезывающей силы Q_1 (ГН/м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки, стр. 83
10. Рисунок 3.7 – Зависимость прогиба оболочки $u_3^{(0)}$ (м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки, стр. 84
11. Рисунок 3.8 – Зависимость перемещения $u_1^{(0)}$ (м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки, стр. 84
12. Рисунок 3.9 – Зависимость деформации $\varepsilon_{11}^{(0)}$ от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки, стр. 85
13. Рисунок 3.10 – Зависимость окружной деформации $\varepsilon_{22}^{(0)}$ от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки, стр. 86
14. Рисунок 3.11 – Распределение продольного (изгибного) напряжения σ_{11} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки, стр. 87
15. Рисунок 3.12 – Распределение окружных напряжений σ_{22} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки, стр. 88
16. Рисунок 3.13 – Распределение касательных напряжений σ_{12} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки, стр. 89

17. Рисунок 3.14 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{13} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки, стр. 90
18. Рисунок 3.15 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{23} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки, стр. 91
19. Рисунок 3.16 – Распределение поперечных напряжений σ_{33} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки, стр. 91
20. Рисунок 3.17 – Зависимость момента M_{11} (ГН) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 93
21. Рисунок 3.18 – Зависимость усилия T_{22} (ГН/м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 94
22. Рисунок 3.19 – Зависимость перерезывающей силы Q_1 (ГН/м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 94
23. Рисунок 3.20 – Зависимость прогиба оболочки $u_3^{(0)}$ (м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 95
24. Рисунок 3.21 – Зависимость перемещения $u_1^{(0)}$ (м) от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 96
25. Рисунок 3.22 – Зависимость деформации $\varepsilon_{11}^{(0)}$ от продольной координаты X^1 при различных длинах \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 96
26. Рисунок 3.23 – График $\varepsilon_{22}^{(0)}$ при $R = 0,2$ м, длина L варьируется, стр. 97
27. Рисунок 3.24 – Распределение продольного (изгибного) напряжения σ_{11} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 98
28. Рисунок 3.25 – Распределение окружных напряжений σ_{22} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 98
29. Рисунок 3.26 – Распределение касательных напряжений σ_{12} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 99
30. Рисунок 3.27 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{13} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 99

31. Рисунок 3.28 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{23} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 100
32. Рисунок 3.29 – Распределение поперечных напряжений σ_{33} (ГПа) по толщине оболочки при $X^1 = 0,5\bar{L}$ для различных длин \bar{L} оболочки из КМ-2, стр. 101
33. Рисунок 3.30 – Распределение температуры θ (К) по толщине оболочки для различных моментов времени t , стр. 102
34. Рисунок 3.31 – Распределение тепловой деформации ε_{33}^T по толщине оболочки для различных моментов времени t , стр. 102
35. Рисунок 3.32 – Распределение тепловой деформации ε_{11}^T по толщине оболочки для различных моментов времени t , стр. 103
36. Рисунок 3.33 – Распределение тепловой деформации ε_{22}^T по толщине оболочки для различных моментов времени t , стр. 103
37. Рисунок 3.34 – Распределение тепловой деформации ε_{12}^T по толщине оболочки для различных моментов времени t , стр. 104
38. Рисунок 3.35 – Распределение теплового напряжения $\sigma_{11}^T(\xi)$ по толщине оболочки для различных моментов времени t , стр. 105
39. Рисунок 3.36 – Распределение теплового напряжения $\sigma_{12}^T(\xi)$ по толщине оболочки для различных моментов времени t , стр. 105
40. Рисунок 3.37 – Распределение теплового напряжения $\sigma_{22}^T(\xi)$ по толщине оболочки для различных моментов времени t , стр. 106
41. Рисунок 3.38 – График M_{11} (ГН) для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м, стр. 107
42. Рисунок 3.39 – График Q_1 (ГН/м) для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м, стр. 107
43. Рисунок 3.40 – График T_{22} (ГН/м) для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м, стр. 108
44. Рисунок 3.41 – График $u_3^{(0)}$ для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м, стр. 108
45. Рисунок 3.42 – График $u_1^{(0)}$ для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м, стр. 109
46. Рисунок 3.43 – График $\varepsilon_{11}^{(0)}$ для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м, стр. 109
47. Рисунок 3.44 – График $\varepsilon_{22}^{(0)}$ для различных моментов времени при $R = 0.2$ м, $L = 0.5$ м, стр. 110

48. Рисунок 3.45 – Распределение продольных (изгибных) напряжений σ_{11} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева, для различных моментов времени t , стр. 111

49. Рисунок 3.46 – Распределение окружных напряжений σ_{22} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии давления и нестационарного одностороннего нагрева, для различных моментов времени t , стр. 111

50. Рисунок 3.47 – Распределение касательных напряжений σ_{12} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева, для различных моментов времени t , стр. 112

51. Рисунок 3.48 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{13} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева, для различных моментов времени t , стр. 113

52. Рисунок 3.49 – Распределение напряжений межслойного сдвига σ_{23} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева, для различных моментов времени t , стр. 113

53. Рисунок 3.50 – Распределение поперечных напряжений σ_{33} (ГПа) по толщине оболочки из КМ-2 при $X^1 = 0,5\bar{L}$ при совместном действии внешнего давления и нестационарного одностороннего нагрева, для различных моментов времени t , стр. 114