МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
(МАИ)

на правах рукописи

Царьков Кирилл Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА, НЕЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ

**Специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»,
05.13.01 — «Системный анализ, управление и обработка информации (авиационная и ракетно-космическая техника)»**

ДИССЕРТАЦИЯ

**на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Хрусталев Михаил Михайлович

Москва, 2017

Оглавление

Список основных обозначений

R^r – r - мерное евклидово пространство.

$T = [t_0; t_1]$ – интервал времени функционирования динамической системы, моменты времени t_0 и t_1 заданы.

T_0 – произвольное множество нулевой меры Бореля из T.

$x \in R^n$ – вектор состояния системы.

$u \in R^m$ – вектор управления.

$w(\cdot)$ – ν-мерный стандартный винеровский процесс.

$x \to p(t, x)$ – плотность распределения вероятности состояния в момент t.

$x \to p_0(x) = p(t_0, x)$ – заданная начальная плотность распределения.

$C^2(R^n)$ – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на R^n.

$C_p^2(R^n) \subset C^2(R^n)$ – множество дважды непрерывно дифференцируемых плотностей распределения вероятности на пространстве R^n;

$\blacksquare$ – символ, означающий полное завершение доказательства.

Введение

В настоящее время существует обширный класс практических задач, связанных с управлением динамическими системами в условиях неполноты информации о положении в фазовом пространстве. Такая неполнота информации может быть обусловлена ограничениями, накладываемыми на измерительные устройства вследствие реализации специальных инженерных решений или вследствие возникновения технических неисправностей произвольного характера. Возможности управления этими системами существенно зависят от той информации, которая может быть получена путём измерения и обработки наблюдений.

К таким задачам относятся любые практические задачи, связанные с высоким риском возникновения технических неисправностей измерительных устройств, например, задачи оптимального управления механическими манипуляторами, которые применяются для перемещения грузов на космических станциях, обследовании внешней поверхности летательных аппаратов, взаимодействии с оборудованием в безвоздушном пространстве, выполнении различных функций при работе на поверхности Земли, под водой и т.д. Кроме того, к ним относятся задачи управления пико- и наноспутниками, для которых установка высокоточных измерительных систем не является эффективной ввиду существенного увеличения массы, выводимой на орбиту. Отдельно стоит отметить задачи гидродинамического управления на основе агрегатов струйной техники, которым в последнее время уделяется повышенное внимание в контексте конструирования высоконадёжных систем управления критически важными объектами.

Особенное значение вопросы управления при неполной информации приобретают в том случае, когда динамическая система функционирует в условиях неопределённых внешних возмущений, которые по тем или иным причинам могут быть охарактеризованы как случайные процессы. Такая ситуация позволяет применить для математического моделирования рассматриваемой динамической системы стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа и поставить задачу оптимизации стратегии управления с неполной обратной связью. Дальнейшие результаты, отыскиваемые путём решения поставленной задачи оптимального управления, существенным образом зависят от класса полученного стохастического дифференциального уравнения и соответствующей динамической системы, которую оно описывает. Если в случае линейных стохастических систем соотношения для нахождения оптимальных линейных регуляторов широко известны, то в общем нелинейном случае могут быть записаны только аналитические соотношения, которым должно удовлетворять оптимальное управление, а не конкретные равенства или численные процедуры его поиска. Однако класс линейных стохастических систем неприменим для описания многих процессов управления из ряда практических приложений, указанных выше. В частности, линейные системы не позволяют учитывать, например, мультипликативные возмущения, которые могут возникать при реализации управляющих воздействий.

Таким образом, весьма актуальными являются получение аналитических результатов, построение численных методов и разработка комплекса программ для решения задач оптимизации процессов управления такими стохастическими системами, которые достаточно реалистично описывают широкий спектр встречающихся на практике проблем, и в то же время позволяют получить конструктивные соотношения и алгоритмы поиска оптимального решения по аналогии с линейными стохастическими системами. Если подходящий класс систем подобрать удаётся, то отдельным вопросом при этом становится проблема реализации полученной стратегии управления, так как она может иметь достаточно сложную структуру или не удовлетворять заданным техническим требованиям. Простая и известная наперёд структура функции управления является обязательным критерием для её успешной реализации на управляющем устройстве жёсткой фиксированной конструкции, например построенной на основе струйных технологий. В связи с этим возникает необходимость дополнительного исследования возможности синтеза оптимального управления в заранее суженном классе функций, удобных в реализации. Такое управление предлагается далее называть субоптимальным.

Отправной точкой исследования являются результаты, полученные М.М. Хрусталёвым в [1, 2] при разработке метода функций Ляпунова–Лагранжа, являющегося развитием метода функций В.Ф. Кротова [3] на нелинейные стохастические управляемые системы, а также результаты, полученные Д.С. Румянцевым и М.М. Хрусталёвым при конкретизации этого метода на случай так называемых квазилинейных стохастических систем с информационными ограничениями [4, 5]. Здесь и далее в работе под информационными ограничениями (неполнотой информации) понимается априорная зависимость каждой из компонент вектора управления от своего набора компонент вектора состояния, если не оговорено иное. Такая терминология была введена в работе [1] и затем использовалась в [2, 4, 5].

В работах [1, 2] метод функций Ляпунова–Лагранжа формулируется и применяется с целью получения условий равновесия по Нэшу в стохастических нелинейных дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии. В частном случае, когда имеется всего один игрок, условия равновесия становятся условиями оптимальности в задаче оптимизации стратегии управления диффузионным процессом с информационными ограничениями. Соответствующие результаты для нелинейных в общем случае управляемых систем сформулированы в [5] и конкретизированы в [4] для линейных систем, правые части которых содержат линейные по состоянию и управлению слагаемые в матрице диффузии. Такие системы в работах [4, 5] предлагается называть квазилинейными. В диссертационной работе дополнительно рассматривается более общий случай квазилинейных систем, коэффициенты сноса и диффузии которых могут быть нелинейными функциями вектора управления. В связи с этим квазилинейные системы, содержащие линейные по управлению коэффициенты, будем в дальнейшем называть обыкновенными квазилинейными системами. Различные отечественные и зарубежные авторы также применяют для их наименования такие термины, как «линейные системы с мультипликативными возмущениями» [10, 11, 12], «linear systems with state- and control-dependent noise» [13, 14], «билинейные системы» и ряд других.

Сам термин «квазилинейные стохастические системы», понимаемый в указанном смысле, был введён Ю.И. Параевым в его работе [6] и представляется достаточно удачным ввиду того, что он подчёркивает существенные отличия от широко изученных линейных стохастических систем, наиболее явно проявляющиеся на практике. Одними из первых работ, в которых исследовались задачи оптимизации стратегий управления квазилинейными стохастическими системами с непрерывным временем и их обобщениями, были работы Н.Н. Красовского [7, 8, 9], А.Б. Куржанского [10], Ю.И. Параева [6] и В.М. Вонэма [11]. В дальнейшем такими задачами при наличии полной информации о состоянии также занималось достаточно большое число авторов (см., например, работы М.Е. Шайкина [12]). Гораздо меньше работ связано с задачами построения для квазилинейных систем оптимального управления с неполной обратной связью. Результаты, наиболее близкие к полученным в диссертации, сформулированы в работах P.J. McLane [13], F. Carravetta и G. Mavelli [14]. Для систем с дискретным временем квазилинейные задачи рассматривались, например, В.В. Домбровским [15].

Необходимость учёта неполноты информации о текущем состоянии системы является одной из ключевых особенностей рассматриваемых в [1, 2, 4, 5] постановок задач. Эта особенность отделяет такие задачи от классических задач поиска оптимального программного управления (информация о текущем состоянии отсутствует) [16] и задач синтеза управления с полной обратной связью (имеется полная информация о векторе состояния в текущий момент времени) [17]. Исследованию такого класса задач посвящено огромное количество работ, среди которых выделим работы [6],[13]-[15],[18]-[24]. В случае стохастических управляемых систем обычно исследуется зависимость вектора управления от части компонент вектора состояния (см., например, работы В.В. Семёнова и А.В. Пантелеева [25, 26, 27]) или ситуация, при которой управляющему устройству известен дополнительный вектор измерений (управление по выходу), который также может содержать шумовые составляющие (см., например, работы [13, 14]). Второй вариант также тесно связан с работами по задачам оценивания и фильтрации [49]-[53], среди которых можно выделить, например, работы Е.А. Руденко [44].

Оба упомянутых варианта неполной информированности о состоянии характеризуются тем, что каждая компонента вектора управления зависит от одного и того же набора компонент вектора состояния. В отличие от этого, в работах [1]-[5] рассматривается более общая постановка вопроса информированности, имеющая определённую связь и практическую применимость к задачам децентрализованного управления [31]-[35]. А именно, рассматриваются информационные ограничения, при которых каждая компонента вектора управления зависит от своего заранее заданного набора компонент вектора состояния. Использование дифференциальных соотношений для аналитической записи таких ограничений и их учёт в структуре функций Ляпунова–Лагранжа позволяют получить конструктивные условия оптимальности для задач оптимизации стратегий управления с информационными ограничениями [4, 5].

Необходимо ещё раз отметить, что проблема синтеза оптимальных стратегий управления в условиях информационных ограничений является весьма актуальной для технических систем. Сравнение различных вариантов информационных ограничений по критерию качества на оптимальном управлении позволяет выделить среди них наилучший вариант по каким-либо дополнительным показателям эффективности. Кроме того, зависимость компонент вектора управления от различных наборов компонент вектора состояния может оказаться конструктивной особенностью системы. Перспективным является использование стратегий с информационными ограничениями в системах управления критическими объектами, построенных на основе струйных технологий [54, 55].

Что касается задач программного управления динамическими системами, то им посвящено ещё больше различных работ, начиная с основополагающих исследований Л.С. Понтрягина, в результате которых был сформулирован широко известный принцип максимума [16]. При изучении стохастических систем аналогичные результаты получили название стохастического принципа максимума [48, 56].

Принимая во внимание эти широко известные результаты, крайне интересной становится идея построения конструктивных условий оптимальности для нелинейных по программному управлению стохастических систем. Эта идея предложена в работах Е.А. Трушковой [57], где рассматривается детерминированная задача оптимального управления линейной по состоянию системой с нелинейно зависящими от управления коэффициентами, и М.М. Хрусталёва и А.С. Халиной [58], в которой рассматривается задача оптимизации квазилинейной стохастической системы, функционирующей на бесконечном интервале времени, по параметрам, входящим нелинейно в коэффициенты системы.

Наряду с развитием идей метода Ляпунова–Лагранжа на квазилинейные системы, функционирующие на ограниченном интервале времени, существенное развитие в последнее время также получили и другие направления. В частности, задачи оптимизации стратегий управления стохастическими системами, функционирующими на бесконечном интервале времени исследуются в работах [58]-[61]. Весь спектр имеющихся результатов было предложено объединить в теорию аналитического конструирования оптимальных регуляторов стохастических систем (АКОРСС) [61] по аналогии с теорией АКОР А.М. Лётова для детерминированных систем.

Разумеется, ещё необозримое число работ посвящено близким к описанным здесь исследованиям, и привести в данном обзоре их все не представляется возможным. Среди них можно выделить, например, работы по задачам со случайной структурой или задачам с дополнительными импульсными воздействиями, условия оптимальности для которых сформулированы К.А. Рыбаковым [62, 63].

Тем не менее, в диссертационной работе предлагается сконцентрировать внимание на исследовании стохастических систем с детерминированной структурой на конечном интервале времени. Внимательное изучение изложенных выше результатов позволяет задуматься о возможности применения метода Ляпунова–Лагранжа для реализации идеи построения конструктивных условий оптимальности в нелинейных по программному управлению стохастических задачах. При этом важно заметить, что такой путь не только не уводит нас от исследования значимых на практике квазилинейных систем с информационными ограничениями, но и позволяет полностью исследовать их в виде частного случая нелинейной по управлению постановки. Дело в том, что при исследовании обыкновенных квазилинейных систем [4, 5], так или иначе приходится постулировать линейную по состоянию структуру управления. Но если изначально рассмотреть задачу синтеза оптимальной стратегии управления обыкновенной квазилинейной системой с информационными ограничениями в суженном классе линейных по состоянию стратегий управления, то это позволит перейти к проблеме поиска оптимальных коэффициентов линейного регулятора, которые являются функциями времени. Ввиду того, что функция управления входит в рассматриваемую систему линейным образом, указанные коэффициенты можно принять за новое искомое управление, и такая задача будет являться частным случаем нелинейной по управлению постановки.

Таким образом, объектом исследования настоящей диссертационной работы становятся квазилинейные стохастические системы диффузионного типа, нелинейные по управлению. В свою очередь предметом исследования является оптимальное управление такими системами.

Целью диссертационной работы является разработка методов синтеза оптимальных стратегий управления квазилинейными стохастическими системами с информационными ограничениями, оптимального программного управления квазилинейными системами с нелинейными по управлению коэффициентами, а также субоптимального управления этими системами.

В соответствии с целью исследования ставятся следующие задачи:

1) исследовать класс математических моделей линейных по состоянию и управлению динамических стохастических систем диффузионного типа с мультипликативными возмущениями, в которых управление имеет вид линейного регулятора с неполной обратной связью (класс обыкновенных квазилинейных систем с информационными ограничениями);

2) формализовать и исследовать новый класс математических моделей

линейных по состоянию динамических стохастических систем диффузионного типа, коэффициенты которых могут быть нелинейными функциями программного управления (класс квазилинейных систем, нелинейных по управлению);

3) получить необходимые условия оптимальности в задачах оптимизации:

   - стратегий управления обыкновенными квазилинейными системами с информационными ограничениями;
   - программного управления квазилинейными системами, нелинейными по управлению;

4) получить необходимые условия субоптимальности (оптимальности в заранее суженном классе управлений) в данных задачах;

5) разработать численные методы поиска оптимального и субоптимального управления, основанные на процедуре градиентного спуска в функциональном пространстве;

6) разработать комплекс программ, реализующих эти численные методы;

7) при помощи полученных результатов провести решение ряда модельных примеров и прикладных задач оптимального управления и стабилизации движения.

Основным методом исследования является метод функций Ляпунова–Лагранжа, разработанный М.М. Хрусталёвым и являющийся развитием метода функций В.Ф. Кротова на стохастические управляемые системы. В данной работе указанный метод по существу применяется для построения необходимых условий оптимальности программного управления $u(t)$ для квазилинейной стохастической системы диффузионного типа с нелинейными по управлению коэффициентами и квадратичным критерием качества. Исследование этого вопроса можно также осуществить при помоще стохастического принципа максимума [48, 56], уже упомянутого выше. Более того, т.к. рассматривается функция программного управления $u(t)$, а переменная состояния x входит во все соотношения не более чем во второй степени, для построения необходимых условий оптимальности будет достаточно записать уравнения для первых двух моментов и перейти к рассмотрению полученной детерминированной системы, к которой могут быть применены широко известные методы типа принципа максимума Л.С. Понтрягина. Такой подход, в частности, использовался в работах [13, 14] при решении задачи оптимального управления по выходу в обыкновенной квазилинейной системе. Все эти три подхода совершенно равнозначны и позволяют получить абсолютно одинаковые результаты. Для проведения диссертационного исследования был выбран первый из них.

Для более детального обоснования на содержательном уровне научной новизны получаемых условий оптимальности приведём исследуемую в главе 1 общую постановку задачи оптимизации программного управления динамической стохастической системой. Здесь для простоты опустим часть требований на функции, представленных в основной части работы.

Процесс управления описывается системой уравнений Ито

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

где $t \in T = [t_0; t_1]$ – время; $x \in R^n$ – вектор состояния системы; $w(\cdot)$ – ν-мерный стандартный винеровский процесс; $u \in R^m$ – вектор управления. Случайный вектор x_0 имеет плотность распределения $x \to p_0(x) : R^n \to R^1$. Функция p_0 считается заданной.

Предположим, что для рассматриваемого здесь случайного процесса x плотность распределения вероятности $(t, x) \to p(t, x) : T \times R^n \to R^1$ существует, имеет конечные первый и второй моменты и удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [6, 64]

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f_i(t, x, u(t)) p(t, x) \right] + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[a_{ij}(t, x, u(t)) p(t, x) \right],$$

где $a_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{\nu} g_{il}\, g_{jl}/2$, с начальным условием

$$p(t_0, x) = p_0(x).$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим множество допустимых процессов управления $z = (p^*(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих условию: при заданном управлении $u(\cdot)$ функция $t \to p^*(t) = p(t, \cdot) : T \to C_p^2(R^n)$ абсолютно непрерывна и такова, что плотность p является решением уравнения ФПК с заданным начальным условием. Здесь и далее предполагается, что множество $\mathcal{D}$ непусто.

Для процесса $z \in \mathcal{D}$ определим функционал качества управления

$$z \to J(z) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} f^c(t, x, u(t)) p(t, x) dx dt + \int_{R^n} F^c(x) p(t_1, x) dx : \mathcal{D} \to R^1,$$

где $(t, x, u) \to f^c(t, x, u) : T \times R^n \times R^m \to R^1$, $x \to F^c(x) : R^n \to R^1$ – заданные функции.

Цель управления состоит в минимизации функционала качества на множестве $\mathcal{D}$.

Интересным теоретическим вопросом, возникающим при постановке задачи оптимизации, является вопрос формулировки достаточных условий существования решения этой задачи. Принимая это во внимание, нельзя не учитывать тот факт, что для практических приложений существенно важнее иметь возможность построить улучшение процесса управления в том числе в тех случаях, когда оптималь и вовсе не существует. В связи с этим основными задачами диссертационного исследования становятся именно задачи построения численных методов улучшения процесса управления и формулировки на их основе необходимых условий оптимальности. Для решения этих задач предлагается использовать результаты работ [1, 2, 4, 5].

Одной из ключевых идей этих работ является использование функций специального вида, удовлетворяющих необходимому набору теоретико-функциональных требований. Здесь в качестве таких функций будут выступать функции $(t,x) \to \psi^0(t,x)$, которые строго определяются в разделе 1.3. При помощи этих функций конструируется функционал Лагранжа–Кротова [1, 2]

$$\begin{gathered} L(z) = \int\limits_{R^n} \psi^0(t_0,x)p_0(x)dx + \\ + \int\limits_{R^n} \left[F^c(x) - \psi^0(t_1,x)\right] p(t_1,x)dx + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R^n} \left[\tfrac{\partial}{\partial t}\psi^0(t,x) + h(t,x,u(t))\right] p(t,x)dxdt, \end{gathered}$$

где использована конструкция

$$\begin{gathered} h(t,x,u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x,u)\tfrac{\partial}{\partial x_i}\psi^0(t,x) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u)\tfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\psi^0(t,x) + f^c(t,x,u). \end{gathered}$$

Важнейшим результатом, базирующимся на идеях Лагранжа и принципе расширения [65], является следующее утверждение.

Л е м м а. Для всех $z \in \mathcal{D}$ определён функционал Лагранжа–Кротова L и справедливо равенство

$$J(z) = L(z).$$

Это утверждение позволяет использовать функционал L для построения процедуры улучшения процесса управления и последующего получения необходимых условий оптимальности.

Рассмотрим теперь квазилинейную постановку задачи, т.е. в исходной постановке возьмём

$$f(t,x,u) = A(t,u)x + B(t,u), \quad g_l(t,x,u) = G^{(l)}(t,u)x + C^{(l)}(t,u),$$

$$f^c(t,x,u) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}D(t,u)x + S^{\mathrm{T}}(t,u)x + E(t,u), \quad F^c(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx,$$

где столбцы $g_l(\cdot)$ составляют матрицу $g(\cdot)$ размеров $n \times \nu$, а все функции в правых частях равенств могут быть в общем случае нелинейны по своим аргументам. При этом функцию ψ^0 зададим в виде

$$\psi^0(t,x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}M(t)x + \lambda^{\mathrm{T}}(t)x + \gamma(t).$$

Основным результатом диссертационной работы можно считать следующее утверждение.

Т е о р е м а. Для того чтобы процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ был оптимален, необходимо существование функций M, λ, γ, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered}\frac{d\gamma}{dt}(t) = -\lambda^{\mathrm{T}}(t)B(t,u(t)) - E(t,u(t)) - \\ -\tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{\nu} C^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t))M(t)C^{(l)}(t,u(t)),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\lambda}{dt}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t,u(t))\lambda(t) - S(t,u(t)) - M(t)B(t,u(t)) - \\ -\sum_{l=1}^{\nu} G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t))M(t)C^{(l)}(t,u(t)),\end{gathered}$$

$$\frac{dM}{dt}(t) = -M(t)A(t,u(t)) - A^{\mathrm{T}}(t,u(t))M(t) - D(t,u(t)) -$$
$$- \sum_{l=1}^{\nu} G^{(l)\mathrm{T}}(t,u(t))M(t)G^{(l)}(t,u(t)),$$
$$\gamma(t_1) = 0, \quad \lambda(t_1) = 0, \quad M(t_1) = Q,$$

и функций $m,\ K$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{dm}{dt}(t) = A(t,u(t))m(t) + B(t,u(t)),$$

$$\frac{dK}{dt}(t) = A(t,u(t))K(t) + K(t)A^{\mathrm{T}}(t,u(t)) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{\nu} \Big(G^{(l)}(t,u(t))K(t)G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t)) +$$
$$+ \left[C^{(l)}(t,u(t)) + G^{(l)}(t,u(t))m(t)\right] \cdot$$
$$\cdot \left[C^{(l)}(t,u(t)) + G^{(l)}(t,u(t))m(t)\right]^{\mathrm{T}} \Big),$$
$$m(t_0) = m_0, \quad K(t_0) = K_0,$$

таких, что при $t \in (T \setminus T_0)$ выполнены соотношения

$$\mathrm{tr}\left(\left[M(t)(A^u)'_r(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(G^{(l)u})'_r(t) + \tfrac{1}{2}(D^u)'_r(t) \right] K(t) \right) +$$
$$+ m^{\mathrm{T}}(t) \left[M(t)(A^u)'_r(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(G^{(l)u})'_r(t) + \tfrac{1}{2}(D^u)'_r(t) \right] m(t) +$$
$$+ m^{\mathrm{T}}(t) \Bigg[((A^u)'_r)^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) + M(t)(B^u)'_r(t) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{\nu} \left(((G^{(l)u})'_r)^{\mathrm{T}}(t)M(t)C^{(l)u}(t) + (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(C^{(l)u})'_r(t) \right) + (S^u)'_r(t) \Bigg] +$$
$$+ \lambda^{\mathrm{T}}(t)(B^u)'_r(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (C^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(C^{(l)u})'_r(t) + (E^u)'_r(t) = 0, \quad r = \overline{1,m},$$

где через $(\cdot)'_r$ обозначена производная по компоненте u_r вектора управления и использованы обозначения вида $A^u(t) = A(t,u(t))$.

Полученные условия оптимальности и разработанный на их основе численный метод градиентного типа позволяют решать достаточно широкий класс задач оптимального управления. В частности, конкретизировав эти результаты для случая обыкновенных квазилинейных систем, можно использовать их для синтеза оптимального линейного регулятора, учитывающего неполноту информации о текущем состоянии системы. Соответствующие исследования проведены в третьей главе диссертации.

Достоверность научных утверждений и выводов, представленных в диссертационной работе, подтверждена строгими математическими доказательствами, численными экспериментами, сравнением полученных результатов с уже существующими. Сформулированные в диссертационной работе необходимые условия оптимальности для нелинейных по управлению систем полностью соответствуют необходимым условиям, которые можно вывести из соотношений стохастического принципа максимума.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в получении конструктивных необходимых условий оптимальности и эффективных численных алгоритмов синтеза оптимального управления динамическими стохастическими системами наиболее общего вида, для которых такие конструктивные условия и алгоритмы могут быть получены. Ряд известных результатов, связанных с задачами поиска оптимальных стратегий управления линейными и обыкновенными квазилинейными системами при различной степени информированности о состоянии, могут быть получены в виде частных случаев представленных в работе результатов в предположении линейности искомых оптимальных стратегий. При этом для рассматриваемого в первой части работы линейного по состоянию и нелинейного по управлению случая общие условия оптимальности типа стохастического принципа максимума ранее не конкретизировались.

Отдельно следует отметить разработанные в диссертации алгоритмы поиска субоптимального управления достаточно простой структуры для задач оптимизации квазилинейных систем. Использование таких стратегий управления в практических приложениях может быть значительно эффективнее ввиду того, что их легко конструировать и удобно хранить в памяти различных бортовых ЭВМ.

В качестве области практического использования результатов диссертационной работы можно указать широкий спектр задач, достаточно реалистично описываемых квазилинейными управляемыми системами со случайными возмущениями и неполной информации о состоянии. Дополнительных исследований требуют области практического использования результатов, полученных для нелинейных по управлению стохастических систем.

<u>Апробация работы и публикации.</u> Существенные результаты диссертационной работы получены при поддержке РФФИ (гранты №13-08-01120, №15-07-09091, №16-08-00472). Основные результаты опубликованы в журналах из перечня ВАК [66, 67, 68, 69] и в журнале [70], обсуждались на международных конференциях [71, 72, 73, 74, 75, 76], Всероссийском совещании по проблемам управления в 2014 году [77] и научных семинарах Института проблем управления РАН в 2015 году. Кроме того, некоторые результаты диссертации опубликованы в издании IEEE [78]. Работа [79] заняла 3-е место на международном конкурсе научно-технических работ «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики» в 2013 году.

<u>Личный вклад автора.</u> Все новые научные результаты получены лично автором. В работах [66, 72] построены алгоритмы синтеза субоптимальных стратегий управления в задачах оптимизации обыкновенных квазилинейных динамических стохастических систем с информационными огра-

ничениями. В основу алгоритмов положен метод градиентного спуска. В [66, 67, 79] эти алгоритмы применены к задаче стабилизации двухзвенного механического манипулятора. Работа [77] посвящена развитию градиентных методов синтеза субоптимальных стратегий управления на проблемы поиска оптимальных стратегий управления в задачах оптимизации квазилинейных систем с информационными ограничениями. В качестве практических приложений исследованы различные постановки задач стабилизации спутника, снабженного балкой гравитационной стабилизации [70, 73, 74, 75]. Обобщения полученных теоретических результатов формулируются в работах [69, 76, 78] в виде необходимых условий оптимальности и численных методов на основе процедуры градиентного спуска в функциональном пространстве для задач оптимизации программного управления квазилинейными стохастическими системами, нелинейными по управлению.

Несмотря на то, что главной целью диссертационного исследования является изучение задач синтеза оптимальных стратегий управления квазилинейными системами с информационными ограничениями, методически более выгодным является изложение в основной части работы результатов, связанных с задачей оптимизации квазилинейных систем, коэффициенты которых могут нелинейно зависеть от программного управления. Затем эти результаты удобно конкретизировать для задачи поиска оптимальных линейных регуляторов, учитывающих неполноту информации о состоянии.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографического списка из 85 наименований. Работа изложена на 118 страницах машинописного текста, содержит 27 рисунков и 7 таблиц.

Во введении даётся обзор известных методов оптимального управления динамическими стохастическими системами, обосновывается научная новизна проведенных исследований и актуальность получения новых результатов, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность, представлены положения, выносимые на защиту и описана структура диссертации.

В первой главе для удобства изложения приводятся используемые в диссертации результаты работ Хрусталёва М.М., конкретизированные для случая полного отсутствия информации о состоянии системы, рассматриваемого в основной части работы при поиске оптимального программного управления. Формулируется постановка задачи оптимального программного управления стохастическими системами общего вида, в правые части которых могут входить нелинейные как по состоянию, так и по управлению функции. Для рассматриваемого класса задач устанавливается вид функционала Лагранжа–Кротова, играющего ключевую роль при разработке всех новых результатов диссертационной работы, и с его помощью формулируются достаточные условия оптимальности. Формулируется основная идея построения новых результатов диссертации, и наиболее явным образом конкретизируется вид функционала Лагранжа–Кротова.

Во второй главе формулируются результаты диссертационной работы, связанные с построением оптимального программного управления квазилинейными стохастическими системами, коэффициенты которых могут быть в общем случае нелинейными функциями управления. Формулируется постановка задачи оптимального управления квазилинейными системами, нелинейными по управлению. Определяется вид функций Ляпунова–Лагранжа и функционала Лагранжа–Кротова, позволяющий в условиях данной задачи получить конструктивные соотношения для поиска оптимального управления. Устанавливается возможность улучшения процессов управления. Формулируются и доказываются необходимые условия оптимальности. Конструируется численный метода поиска оптимального программного управления и решается конкретный модельный пример.

В третьей главе рассматривается задача синтеза оптимальной стратегии управления квазилинейными динамическими стохастическими системами с информационными ограничениями в классе линейных регуляторов. Формулируется постановка задачи и вводится понятие стратегии управления с информационными ограничениями. Задача формулируется в виде частного случая задачи оптимального программного управления квазилинейной системой с нелинейными по управлению коэффициентами. Конкретизируются необходимые условия оптимальности и численный метод.

Четвёртая глава диссертационной работы посвящена построению оптимального управления в заранее суженном классе функций достаточно простой структуры (субоптимального управления) для задач, рассматриваемых в главах 2 и 3. Формулируется понятие субоптимального управления и определяется его структура. Формулируются необходимые условия субоптимальности и численные методы поиска субоптимального управления в задачах глав 2 и 3.

Пятая глава диссертации посвящена описанию комплекса программ, разработанного в процессе диссертационного исследования, и решению с его помощью ряда прикладных задач оптимизации процессов управления. Рассматриваются постановки задач оптимального управления двухзвенным механическим манипулятором и оптимальной стабилизации спутника с упругой штангой.

Научные результаты, выносимые на защиту:

1) математическая модель, необходимые условия оптимальности, численный метод и программное обеспечение для решения задач оптимизации стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами с информационными ограничениями;

2) математическая модель, необходимые условия оптимальности, численный метод и программное обеспечение для решения задач оптимизации квазилинейных динамических стохастических систем, нелинейных по управлению;

3) необходимые условия субоптимальности, численные методы и программное обеспечение для поиска субоптимального управления в указанных задачах;

4) принципы построения условий оптимальности и численных методов синтеза оптимального и субоптимального управления.

1. Оптимизация стохастических систем диффузионного типа

В первой главе для удобства изложения приводятся используемые в диссертации результаты работ М.М. Хрусталёва [1, 2], конкретизированные для случая полного отсутствия информации о состоянии системы. За счёт этого многие конструкции упрощены, а часть результатов в явном виде не приводится ввиду отсутствия в них необходимости в дальнейшем. При этом отдельно подчёркиваются сходства и различия между разработанными в [1, 2] и предлагаемыми в диссертационной работе методами и подходами. Новых научных результатов данная глава не содержит.

В § 1.1 формулируется постановка задачи оптимального программного управления стохастическими системами общего вида, в правые части которых могут входить нелинейные как по состоянию, так и по управлению функции.

Для рассматриваемого класса задач в разделе 1.2 устанавливается вид функционала Лагранжа–Кротова, играющего ключевую роль при разработке всех новых результатов данной работы (лемма 1), и с его помощью формулируются достаточные условия оптимальности (теорема 1).

Раздел 1.3 является наиболее содержательным, т.к. в нём формулируется основная идея построения новых результатов диссертации, и для этих целей наиболее явным образом конкретизируется вид функционала

Лагранжа–Кротова.

1.1. Постановка задачи оптимального программного управления стохастическими системами диффузионного типа

Процесс управления описывается системой уравнений Ито

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t),$$
$$x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $t \in T = [t_0; t_1]$ – время; $x \in R^n$ – вектор состояния системы; $w(\cdot)$ – ν-мерный стандартный винеровский процесс; $u \in R^m$ – вектор управления. Функции $(t, x, u) \to f(t, x, u) : T \times R^n \times R^m \to R^n$, $(t, x, u) \to g(t, x, u) : T \times R^n \times R^m \to R^{n\times\nu}$, $t \to u(t) : T \to U \subset R^m$ измеримы по Борелю. Случайный вектор x_0 имеет плотность распределения $x \to p_0(x) : R^n \to R^1$. Функция p_0 принадлежит множеству $C_p^2(R^n)$ дважды непрерывно дифференцируемых плотностей распределения на R^n и считается заданной. Далее в работе, если это не вызывает недоразумений, аргументы функций будем опускать.

Предположим, что для рассматриваемого здесь случайного процесса x плотность распределения вероятности $(t, x) \to p(t, x) : T \times R^n \to R^1$ существует, имеет конечные первый и второй моменты и удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [6, 64]

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f_i(t, x, u(t))p(t, x)\right] + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[a_{ij}(t, x, u(t))p(t, x)\right], \tag{1.2}$$

где $a_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{\nu} g_{il}\, g_{jl}/2$, с начальным условием

$$p(t_0, x) = p_0(x). \tag{1.3}$$

Тем самым мы предполагаем существование не только решения ФПК (1.2), (1.3), но и слабого решения уравнения Ито (1.1).

В [1] вместо уравнения вида (1.2) используется обобщение уравнения ФПК, описывающее эволюцию вероятностной меры, задающей распределение вектора состояния для диффузионного процесса общего вида. В данном случае, когда предполагается существование плотности распределения вероятности, это обобщённое уравнение принимает вид интегрального тождества

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{R^n} \eta(x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}dx = \\
&\quad= \int\limits_{R^n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x)f_i(t,x,u(t)) + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_i \partial x_j}(x)a_{ij}(t,x,u(t))\right]p(t,x)dx,
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

которое должно выполняться для любых финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций $x \to \eta(x) : R^n \to R^1$. Однако не только финитные функции могут удовлетворять тождеству (1.4). Более широкий класс таких функций обозначается в [1] через $\overset{*}{W}$.

Через $\mathcal{D}$ обозначим множество допустимых процессов управления $z = (p^*(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих условию: при заданном управлении $u(\cdot)$ функция $t \to p^*(t) = p(t,\cdot) : T \to C_p^2(R^n)$ абсолютно непрерывна и такова, что плотность p является решением уравнения (1.2) с начальным условием (1.3).

Для процесса $z \in \mathcal{D}$ определим функционал качества управления

$$
\begin{aligned}
&z \to J(z) = \\
&\quad= \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R^n} f^c(t,x,u(t))p(t,x)dxdt + \int\limits_{R^n} F^c(x)p(t_1,x)dx : \mathcal{D} \to R^1,
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

где $(t,x,u) \to f^c(t,x,u) : T \times R^n \times R^m \to R^1$, $x \to F^c(x) : R^n \to R^1$ – заданные измеримые функции.

Цель управления состоит в минимизации функционала (1.5) на множестве $\mathcal{D}$.

1.2. Достаточные условия оптимальности

В работе [1] для построения достаточных условий вводится класс Φ вектор-функций Ляпунова–Лагранжа $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^n)$, первые компоненты φ^0 которых играют роль множителей Лагранжа, соответствующих уравнению (1.4), а компоненты $\varphi^\alpha,\ \alpha = \overline{1, n}$, используются для учёта неполноты информации о состоянии в задачах синтеза оптимальной стратегии управления с информационными ограничениями [1, 2, 4, 5].

В диссертации рассматривается функция программного управления $t \to u(t)$, поэтому потребуется использование только первой компоненты $\varphi^0 \in \Phi^0$ функции Ляпунова–Лагранжа. Функции из множества Φ^0 должны удовлетворять условиям А.1 – А.2:

А.1) функция $(t, q) \to \varphi^0(t, q) : T \times \tilde{C}_p^2 \to R^1$ локально липшицева на $T \times \tilde{C}_p^2$ и дифференцируема по Фреше по совокупности аргументов (t, q) всюду на $(T \setminus T_0) \times \tilde{C}_p^2$, где $\tilde{C}_p^2$ – некоторая окрестность множества $C_p^2(R^n)$ в пространстве $C^2(R^n)$;

А.2) частная производная $\partial\varphi^0/\partial q$ функции φ^0 при всех $t \in T \setminus T_0$ и $q \in \tilde{C}_p^2$ представима в виде

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial q}[q] = \int\limits_{R^n} \xi(t, x, q(\cdot)) q(x) dx, \tag{1.6}$$

где функция $(t, x, q) \to \xi(t, x, q) : T \times R^n \times \tilde{C}_p^2 \to R^1$ такова, что для любых фиксированных $t \in T \setminus T_0$ и $q \in \tilde{C}_p^2$ функция $\xi(t, \cdot, q) : R^n \to R^1$ принадлежит классу $\overset{*}{W}$.

О п р е д е л е н и е 1. Процесс $\overline{z} \in \mathcal{D}$ называется *оптимальным*, если $J(\overline{z}) \le J(z)$ для любого процесса $z \in \mathcal{D}$.

Построим следующие конструкции:

$$K(t,x,u,q) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x,u)\tfrac{\partial}{\partial x_i}\xi(t,x,q)+ \\ + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u)\tfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\xi(t,x,q) + f^c(t,x,u), \tag{1.7}$$

$$H(t,x,u,q) = K(t,x,u,q)q(x), \tag{1.8}$$

$$B(t,v,q) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi^0(t,q) + \int\limits_{R^n} H(t,x,v,q)dx, \tag{1.9}$$

$$G(q) = \int\limits_{R^n} F^c(x)\, q(x)\, dx - \varphi^0(t_1,q). \tag{1.10}$$

Здесь ξ – производная Фреше функции φ^0, задаваемая равенством (1.6).

Центральную роль при доказательстве теорем, устанавливающих оптимальность процесса, играет функционал Лагранжа–Кротова [1]

$$L(z) = \varphi^0(t_0, p^*(t_0)) + G(p^*(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} B(t, u(t), p^*(t))dt, \tag{1.11}$$

используемый далее в диссертационной работе для формулировки необходимых условий оптимальности и обоснования предлагаемых алгоритмов поиска оптимального управления.

Приведём ряд утверждений из [1], касающихся функционала L.

Л е м м а 1. Для всех $z \in \mathcal{D}$ определён функционал (1.11) и справедливо равенство

$$J(z) = L(z). \tag{1.12}$$

Т е о р е м а 1. Пусть задан процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$, функции $\varphi^0 \in \Phi^0,\ \mu(\cdot) \in L_1(T)$, число $\beta \in R^1$ и выполнены условия:

1. $B(t,v,q) \geq \mu(t), \quad (t,v,q) \in (T \setminus T_0) \times U \times \tilde{C}_p^2\,;$

2. $G(q) \geq \beta, \quad q \in \tilde{C}_p^2\,.$

Тогда

а) $J(z) \geq \lambda$ для всех $z \in \mathcal{D}$, где

$$\lambda = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mu(t)dt + \beta + \varphi^0(t_0, p_0(\cdot)).$$

б) Если справедливо равенство

$$J(z) = \lambda,$$

то процесс является оптимальным.

1.3. Функционал Лагранжа–Кротова

Как отмечается в [1, 2], в общем случае отыскание процесса и функции Ляпунова–Лагранжа (даже первой её компоненты), удовлетворяющих теореме 1, представляет достаточно сложную задачу.

В методе Лагранжа [2] предлагается раскладывать функции Ляпунова–Лагранжа в ряды по аргументу q и искать линейный член ряда. Одновременно с выбором этого линейного члена, процесс управления подбирается так, чтобы добиться локального выполнения условий оптимальности. Такой процесс в [2] предлагается называть экстремалью.

В данной работе мы не будем нацеливаться на отыскание экстремальных процессов управления. Вместо этого здесь предлагается сформулировать необходимые условия оптимальности, непосредственно работая с функционалом Лагранжа–Кротова. Тем не менее, нам потребуется для этого использовать некоторые построения из [2, 4, 5], связанные с поиском экстремалей.

Следуя [2, 5], функцию $\varphi^0 \in \Phi^0$ будем искать в форме

$$\varphi^0(t,q) = \int\limits_{R^n} \psi^0(t,x)\, q(x) dx. \tag{1.13}$$

Здесь $(t,x) \to \psi^0(t,x) : T \times R^n \to R^1$ – заданная функция. При этом считается, что эта функция такова, что $\varphi^0(\cdot)$ вида (1.13) удовлетворяет условиям A.1–A.2 (в частности, $\psi^0(t,\cdot)$ при фиксированном $t \in T \backslash T_0$ есть функция из $\overset{*}{W}$).

В этом случае конструкции (1.7)-(1.8) конкретизируются в форме

$$\begin{gathered} h(t,x,u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x,u) \tfrac{\partial}{\partial x_i} \psi^0(t,x) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u) \tfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \psi^0(t,x) + f^c(t,x,u), \end{gathered} \tag{1.14}$$

а функционал Лагранжа–Кротова для заданного процесса $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ принимает вид

$$\begin{gathered} L(z) = \int\limits_{R^n} \psi^0(t_0,x) p_0(x) dx + \\ + \int\limits_{R^n} \left[F^c(x) - \psi^0(t_1,x)\right] p(t_1,x) dx + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left[\tfrac{\partial}{\partial t} \psi^0(t,x) + h(t,x,u(t))\right] p(t,x) dx dt. \end{gathered} \tag{1.15}$$

В заключение отметим следующий естественный результат [5, лемма 1], непосредственно вытекающий из формулы (1.15) и леммы 1.

<u>Л е м м а 2.</u> Если процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ и функция ψ^0 удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^0(t,x) + h(t,x,u(t)) = 0, \ (t,x) \in (T \setminus T_0) \times R^n, \tag{1.16}$$

$$\psi^0(t_1,x) = F^c(x), \ x \in R^n, \tag{1.17}$$

то справедливо равенство

$$J(z) = \int\limits_{R^n} \psi^0(t_0, x) p_0(x) dx. \tag{1.18}$$

1.4. Результаты

Записана постановка задачи оптимального программного управления стохастическими системами диффузионного типа, определён ряд ключевых понятий и соотношений, а также сформулирована основная идея, используемая для синтеза оптимального управления. Отдельно выделим следующие результаты:

1) сформулированы основные понятия, необходимые для описания и анализа динамических стохастических управляемых систем;

2) введены понятия вектор-функций Ляпунова–Лагранжа и функционала Лагранжа–Кротова, на основе которых получены основные результаты данной работы;

3) определены понятия допустимого и оптимального процессов управления, сформулированы достаточные условия оптимальности общего вида;

4) сформулированы утверждения, устанавливающие наиболее явный вид функционала Лагранжа–Кротова и являющиеся фундаментом для построения новых теоретических результатов.

2. Оптимизация квазилинейных систем с нелинейными по управлению коэффициентами

Во второй главе формулируются результаты диссертационной работы, связанные с построением оптимального программного управления квазилинейными стохастическими системами, коэффициенты которых могут быть в общем случае нелинейными функциями управления.

В § 2.1 формулируется постановка задачи оптимального управления квазилинейными системами, нелинейными по управлению. Устанавливаются основные обозначения, используемые далее в работе, и проводятся связи с общей постановкой задачи главы 1.

В разделе 2.2 определяется вид функций Ляпунова–Лагранжа и функционала Лагранжа–Кротова, позволяющий в условиях данной задачи получить конструктивные соотношения для поиска оптимального управления. Соответствующим образом уточняется лемма 2.

Раздел 2.3 содержит ключевые результаты диссертации, устанавливающие возможность улучшения процессов управления (теоремы **??**-2). На их основе в разделе 2.4 формулируются и доказываются необходимые условия оптимальности (теорема 3).

Наконец, § 2.5 и § 2.6 посвящены построению численного метода поиска оптимального программного управления и решению конкретного модельного примера. В рамках этого примера необходимые условия оптимальности разрешаются аналитически, а на основе разработанного метода строится численное приближение, и проводится их сравнение.

2.1. Постановка задачи оптимального управления квазилинейными динамическими стохастическими системами, нелинейными по управлению

Процесс управления описывается системой уравнений Ито

$$
\begin{gathered}
dx(t) = [A(t,u(t))x(t) + B(t,u(t))]\,dt + \\
+\sum_{l=1}^{\nu}\left[G^{(l)}(t,u(t))x(t) + C^{(l)}(t,u(t))\right]dw_l(t), \qquad (2.1)\\
x(t_0) = x_0,
\end{gathered}
$$

где $t \in T = [t_0; t_1]$ – время; $x \in R^n$ – вектор состояния системы; $w(\cdot)$ – ν-мерный стандартный винеровский процесс; $u \in R^m$ – вектор управления; $t \to u(t) : T \to R^m$ – ограниченная борелевская функция на T. Здесь $(t,u) \to A(t,u) : T \times R^m \to R^{n\times n}$, $(t,u) \to B(t,u) : T \times R^m \to R^n$, $(t,u) \to G^{(l)}(t,u) : T \times R^m \to R^{n\times n}$, $(t,u) \to C^{(l)}(t,u) : T \times R^m \to R^n$, $l = \overline{1,\nu}$, – непрерывные по t и дважды непрерывно дифференцируемые по u функции на $T \times R^m$ (см. далее замечание 1). Случайный вектор x_0 имеет плотность распределения $x \to p_0(x) : R^n \to R^1$ с математическим ожиданием $m_0 \in R^n$ и ковариационной матрицей $K_0 \in R^{n\times n}$. Функция p_0 принадлежит множеству $C_p^2(R^n)$ и считается заданной.

В обозначениях главы 1 имеем

$$
f(t,x,u) = A(t,u)x + B(t,u), \quad g_l(t,x,u) = G^{(l)}(t,u)x + C^{(l)}(t,u),
$$

где столбцы $g_l(\cdot)$ составляют матрицу $g(\cdot)$ размеров $n \times \nu$.

Для рассматриваемого здесь случайного процесса x плотность распределения вероятности $(t, x) \to p(t, x) : T \times R^n \to R^1$ существует, имеет конечные первый и второй моменты и удовлетворяет уравнению ФПК (1.2) с начальным условием (1.3) [6, 64].

Аналогично разделу 1.1 введём в рассмотрение множество $\mathcal{D}$ допустимых процессов управления $z = (p^*(\cdot), u(\cdot))$ и определим на нём функционал качества управления

$$\begin{gathered} z \to J(z) = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left[\tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} D(t, u(t)) x + S^{\mathrm{T}}(t, u(t)) x + E(t, u(t))\right] p(t, x) dx dt + \\ + \int\limits_{R^n} \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x p(t_1, x) dx : \mathcal{D} \to R^1, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $Q \in R^{n \times n}$, а $(t, u) \to D(t, u) : T \times R^m \to R^{n \times n}$, $(t, u) \to S(t, u) : T \times R^m \to R^n$, $(t, u) \to E(t, u) : T \times R^m \to R^1$ – непрерывные по t и дважды непрерывно дифференцируемые по u функции на $T \times R^m$, и при каждом $(t, u) \in T \times R^m$ выполнены условия $D(t, u) \geq 0$, $Q \geq 0$. Здесь и далее матрицы квадратичных форм считаются симметрическими. Цель управления состоит в минимизации функционала (2.2) на множестве $\mathcal{D}$.

В обозначениях главы 1

$$f^c(t, x, u) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} D(t, u) x + S^{\mathrm{T}}(t, u) x + E(t, u), \quad F^c(x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x.$$

<u>З а м е ч а н и е 1.</u> Условия на функции $A, B, G^{(l)}, C^{(l)}, D, S, E$ могут быть ослаблены. Для доказательства справедливости излагаемых ниже результатов, достаточно потребовать, чтобы эти функции вместе со своими первыми частными производными $\partial A/\partial u$, $\partial B/\partial u$, $\partial G^{(l)}/\partial u$, $\partial C^{(l)}/\partial u, \partial D/\partial u$, $\partial S/\partial u$, $\partial E/\partial u$, были ограниченными и липшицевыми по

переменной u борелевскими функциями на любом компактном подмножестве из $T \times R^m$.

З а м е ч а н и е 2. Условия ограниченности и измеримости по Борелю, накладываемые на указанные в разделе функции, требуются для их интегрируемости на интервале T.

2.2. Функционал Лагранжа–Кротова

В данном разделе мы окончательно сформируем нужный нам вид функции Ляпунова–Лагранжа и конкретизируем результаты раздела 1.3, касающиеся функционала Лагранжа–Кротова (лемма 2), для рассматриваемой здесь задачи. Ввиду того, что переменная состояния x входит во все соотношения из раздела 2.1 не более чем во второй степени, функцию $\psi^0(t,x)$ в формуле (1.13), также как и в случае обыкновенных (линейных по управлению) квазилинейных стохастических систем [4, 5], будем искать в виде

$$\psi^0(t,x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}M(t)x + \lambda^{\mathrm{T}}(t)x + \gamma(t), \tag{2.3}$$

где $t \to M(t) : T \to R^{n\times n},\ t \to \lambda(t) : T \to R^n,\ t \to \gamma(t) : T \to R^1$ – некоторые функции времени такие, что выполнены теоретико-функциональные требования раздела 1.2, предъявляемые к функции $\varphi^0(t,q)$.

Используя формулу (2.3), нетрудно преобразовать лемму 2 в следующий результат.

Л е м м а 3. Если процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ и функции $M,\ \lambda,\ \gamma$

удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt}(t) = -\lambda^{\mathrm{T}}(t)B(t,u(t)) - E(t,u(t)) - \\ -\tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{\nu} C^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t))M(t)C^{(l)}(t,u(t)), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t,u(t))\lambda(t) - S(t,u(t)) - M(t)B(t,u(t)) - \\ -\sum_{l=1}^{\nu} G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t))M(t)C^{(l)}(t,u(t)), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt}(t) = -M(t)A(t,u(t)) - A^{\mathrm{T}}(t,u(t))M(t) - D(t,u(t)) - \\ -\sum_{l=1}^{\nu} G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t))M(t)G^{(l)}(t,u(t)), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\gamma(t_1) = 0, \quad \lambda(t_1) = 0, \quad M(t_1) = Q, \tag{2.7}$$

то справедливо равенство

$$J(z) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(M_0K_0) + \frac{1}{2}m_0^{\mathrm{T}}M_0m_0 + \lambda_0^{\mathrm{T}}m_0 + \gamma_0, \tag{2.8}$$

где $M_0 = M(t_0)$, $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, $\gamma_0 = \gamma(t_0)$. Здесь и далее через tr обозначен оператор следа квадратной матрицы.

Доказательство. В случае задания $\psi^0(t,x)$ в виде (2.3) все функции в равенствах (1.16) и (1.17) примут вид линейно-квадратичных функций от x. Приравнивая слагаемые при одинаковых степенях x, из (1.16) получим систему дифференциальных уравнений (2.4)-(2.6), а из (1.17) – условия (2.7) при $t = t_1$. Аналогично, выражение в правой части (1.18) принимает вид линейно-квадратичной функции, интегрируемой с плотностью p_0 по R^n. Этот интеграл вычисляется аналитически с учётом равенств

$$\int\limits_{R^n} x^{\mathrm{T}}\mathcal{A}xp_0(x)dx = \mathrm{tr}(\mathcal{A}K_0) + m_0^{\mathrm{T}}\mathcal{A}m_0,$$

$$\int\limits_{R^n} x^{\mathrm{T}}\mathcal{B}p_0(x)dx = m_0^{\mathrm{T}}\mathcal{B}, \ \int\limits_{R^n} \mathcal{C}p_0(x)dx = \mathcal{C},$$

где $\mathcal{A} \in R^{n\times n}$, $\mathcal{B} \in R^n$, $\mathcal{C} \in R^1$ – произвольные матрицы. В результате формула (1.18) преобразуется к виду (2.8). ■

Для дальнейшего нам потребуется дополнить полученную в лемме 3 систему дифференциальных уравнений и условий к ним системой уравнений для функций $t \to m(t) : T \to R^n$, $t \to K(t) : T \to R^{n\times n}$, имеющих смысл математического ожидания и ковариационной матрицы случайного процесса $x(t)$ [4, 5, 6],

$$\frac{dm}{dt}(t) = A(t,u(t))m(t) + B(t,u(t)), \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} \frac{dK}{dt}(t) = A(t,u(t))K(t) + K(t)A^{\mathrm{T}}(t,u(t)) + \\ + \sum_{l=1}^{\nu} \Big(G^{(l)}(t,u(t))K(t)G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t)) + \\ + \left[C^{(l)}(t,u(t)) + G^{(l)}(t,u(t))m(t)\right] \cdot \\ \cdot \left[C^{(l)}(t,u(t)) + G^{(l)}(t,u(t))m(t)\right]^{\mathrm{T}} \Big), \end{gathered} \tag{2.10}$$

интегрируемых с начальными условиями

$$m(t_0) = m_0, \quad K(t_0) = K_0, \tag{2.11}$$

а также установить следующий факт.

<u>Л е м м а 4.</u> При заданном управлении $u(\cdot)$ функции γ, λ, M, m, K, удовлетворяющие условиям (2.4)-(2.7), (2.9)-(2.11), существуют и определены единственным образом.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Пусть функция u – заданная ограниченная борелевская функция на T. Тогда системы уравнений (2.9)-(2.10) и (2.4)-(2.6) с условиями (2.11) и (2.7) представляют собой две задачи Коши, интегрируемые раздельно в прямом и обратном времени соответственно. При этом система уравнений (2.4)-(2.6) является линейной, а линейное уравнение (2.9) может быть проинтегрировано отдельно от нелинейного

уравнения (2.10), после чего последнее также становится линейным относительно неизвестной функции. Существование и единственность решений m, K и γ, λ, M для такого рода задач хорошо известны. ■

В целях упрощения нижеследующих построений, мы не будем полностью выписывать вид функционала Лагранжа–Кротова, соответствующий выбору функции ψ^0 в форме (2.3), а продолжим использовать формулу (1.15). Тем не менее это частично будет проделано далее при доказательстве основных результатов работы.

2.3. Улучшение процесса управления

Возьмём некоторый допустимый процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ и подберём функцию ψ^0 вида (2.3) так, чтобы для процесса z выполнялись условия леммы 2 или, что то же самое, леммы 3 (это можно сделать в силу леммы 4).

Далее, рассмотрим некоторый другой допустимый процесс $\tilde{z} = (\tilde{p}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathcal{D}$. Зафиксируем ψ^0 и запишем формулу вычисления приращения критерия $J(\cdot)$ при переходе от процесса z к процессу $\tilde{z}$. Используя равенство (1.18), вид функционала Лагранжа–Кротова (1.15), условие (1.17) и лемму 1, получим

$$\Delta J = J(\tilde{z}) - J(z) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi^0(t, x) + h(t, x, \tilde{u}(t)) \right] \tilde{p}(t, x) dx dt. \quad (2.12)$$

Здесь интеграл по R^n с плотностью $\tilde{p}(t, x)$ как и в предыдущем разделе может быть вычислен аналитически, на этот раз при помощи функций $\tilde{m}(t)$ и $\tilde{K}(t)$, которые имеют смысл математического ожидания и ковариационной матрицы случайного процесса $x(t)$, определяемых плотностью

$\tilde{p}(t,x)$, и являются решением задачи Коши (2.9)-(2.11), где вместо управления $u(t)$ используются $\tilde{u}(t)$. В результате останется только интеграл по времени, подынтегральная часть которого будет зависеть от t и значений $\tilde{m}(t), \tilde{K}(t), \tilde{u}(t)$, т.е. формула для ΔJ примет вид

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} I(t, \tilde{m}(t), \tilde{K}(t), \tilde{u}(t))dt, \tag{2.13}$$

где $(t, \tilde{m}, \tilde{K}, \tilde{u}) \to I(t, \tilde{m}, \tilde{K}, \tilde{u}) : T \times R^n \times R^{n\times n} \times R^m \to R^1$ – некоторая функция.

Теперь выберем процесс $\tilde{z} = (\tilde{p}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathcal{D}$ так, чтобы он улучшал значение функционала качества (1.5), определив управление $\tilde{u}(\cdot)$ равенством

$$\tilde{u}_r(t) = u_r(t) - \theta\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t, m(t), K(t), u(t)),\ r = \overline{1,m},\ t \in T,\ \theta > 0, \tag{2.14}$$

в котором значение θ достаточно мало.

При таком подходе использование $\tilde{u}(\cdot)$ уменьшает значение критерия по сравнению с $u(\cdot)$, если только не выполнено условие $\partial I/\partial\tilde{u}_r(t, m(t), K(t), u(t)) = 0$ почти всюду на T, $r = \overline{1,m}$. Если же это условие выполнено при почти всех t, то такая процедура не улучшает процесс z в смысле функционала J. Строгие формулировки и доказательства этих результатов приведены в теоремах 2 и 3.

Вернёмся к функции $I(\cdot)$ и определим значение $I(t, \tilde{m}(t), \tilde{K}(t), \tilde{u}(t))$. Для этого вычислим интеграл по R^n в правой части (2.12). Используя формулы (1.14) и (2.3), определяющие конструкцию $h(t,x,u)$ и функцию $\psi^0(t,x)$ соответственно, а также обозначения вида $A^u(t) = A(t, u(t))$, запишем первый сомножитель под знаком интеграла:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\psi^0}{\partial t}(t,x)+h(t,x,\tilde{u}(t))= \\
=\tfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\tfrac{dM}{dt}(t)x+x^{\mathrm{T}}\tfrac{d\lambda}{dt}(t)+\tfrac{d\gamma}{dt}(t)+\left(A^{\tilde{u}}(t)x+B^{\tilde{u}}(t)\right)^{\mathrm{T}}(M(t)x+\lambda(t))+ \\
+\tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{\nu}\left(\left[x^{\mathrm{T}}G^{(l)\tilde{u}}(t)+(C^{(l)\tilde{u}})^{\mathrm{T}}(t)\right]M(t)\left[G^{(l)\tilde{u}}(t)x+C^{(l)\tilde{u}}(t)\right]\right)+ \\
+\tfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}D^{\tilde{u}}(t)x+(S^{\tilde{u}})^{\mathrm{T}}(t)x+E^{\tilde{u}}(t).
\end{gathered}$$

Полученное выражение при каждом фиксированном t представляет собой линейно-квадратичную функцию от x, интегрируемую с плотностью $\tilde{p}(t,x)$ по R^n. Как уже отмечалось выше, такие интегралы вычисляются аналитически при помощи соотношений

$$\int\limits_{R^n} x^{\mathrm{T}}\mathcal{A}(t)x\tilde{p}(t,x)dx=\mathrm{tr}(\mathcal{A}(t)\tilde{K}(t))+\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)\mathcal{A}(t)\tilde{m}(t),$$

$$\int\limits_{R^n} x^{\mathrm{T}}\mathcal{B}(t)\tilde{p}(t,x)dx=\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)\mathcal{B}(t),\ \int\limits_{R^n}\mathcal{C}(t)\tilde{p}(t,x)dx=\mathcal{C}(t),$$

где $t\to\mathcal{A}(t):T\to R^{n\times n}$, $t\to\mathcal{B}(t):T\to R^n$, $t\to\mathcal{C}(t):T\to R^1$ – произвольные функции.

В результате интегрирования получим соотношение

$$\begin{gathered}
I(t,\tilde{m}(t),\tilde{K}(t),\tilde{u}(t))= \\
=\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tfrac{dM(t)}{dt}\tilde{K}(t)\right)+\tfrac{1}{2}\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)\tfrac{dM(t)}{dt}\tilde{m}(t)+\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)\tfrac{d\lambda(t)}{dt}+\tfrac{d\gamma(t)}{dt}+ \\
+\mathrm{tr}\left(M(t)A^{\tilde{u}}(t)\tilde{K}(t)\right)+\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)M(t)A^{\tilde{u}}(t)\tilde{m}(t)+ \\
+\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)\left[(A^{\tilde{u}})^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)+M(t)B^{\tilde{u}}(t)\right]+\lambda^{\mathrm{T}}(t)B^{\tilde{u}}(t)+ \\
+\sum_{l=1}^{\nu}\left\{\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left((G^{(l)\tilde{u}})^{\mathrm{T}}(t)M(t)G^{(l)\tilde{u}}(t)\tilde{K}(t)\right)+\right. \\
+\tfrac{1}{2}\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)(G^{(l)\tilde{u}})^{\mathrm{T}}(t)M(t)G^{(l)\tilde{u}}(t)\tilde{m}(t)+ \\
\left.+\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)(G^{(l)\tilde{u}})^{\mathrm{T}}(t)M(t)C^{(l)\tilde{u}}(t)+\tfrac{1}{2}(C^{(l)\tilde{u}})^{\mathrm{T}}(t)M(t)C^{(l)\tilde{u}}(t)\right\}+ \\
+\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(D^{\tilde{u}}(t)\tilde{K}(t))+\tfrac{1}{2}\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)D^{\tilde{u}}(t)\tilde{m}(t)+\tilde{m}^{\mathrm{T}}(t)S^{\tilde{u}}(t)+E^{\tilde{u}}(t),
\end{gathered} \tag{2.15}$$

а его непосредственное дифференцирование по переменной $\tilde{u}_r,\ r=\overline{1,m}$ в точке $(t,m(t),K(t),u(t))$ даст формулу

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t,m(t),K(t),u(t))=$$
$$=\operatorname{tr}\left(\left[M(t)(A^u)'_r(t)+\sum_{l=1}^{\nu}(G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(G^{(l)u})'_r(t)+\tfrac{1}{2}(D^u)'_r(t)\right]K(t)\right)+$$
$$+m^{\mathrm{T}}(t)\left[M(t)(A^u)'_r(t)+\sum_{l=1}^{\nu}(G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(G^{(l)u})'_r(t)+\tfrac{1}{2}(D^u)'_r(t)\right]m(t)+$$
$$+m^{\mathrm{T}}(t)\Big[((A^u)'_r)^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)+M(t)(B^u)'_r(t)+$$
$$+\sum_{l=1}^{\nu}\big(((G^{(l)u})'_r)^{\mathrm{T}}(t)M(t)C^{(l)u}(t)+(G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(C^{(l)u})'_r(t)\big)+(S^u)'_r(t)\Big]+$$
$$+\lambda^{\mathrm{T}}(t)(B^u)'_r(t)+\sum_{l=1}^{\nu}(C^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t)M(t)(C^{(l)u})'_r(t)+(E^u)'_r(t),\tag{2.16}$$

где через $(\cdot)'_r$ обозначена производная по $\tilde{u}_r$.

<u>Т е о р е м а 2.</u> Процедура перехода от управления u к управлению $\tilde{u}$ с помощью формулы (2.14) при условии $\partial I/\partial\tilde{u}_r(t,m(t),K(t),u(t))\neq 0,\ t\in(T\setminus T_0),\ r\in\{\overline{1,m}\}$ и достаточно малом $\theta>0$ является релаксационной по критерию J.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Линеаризуем при каждом $t\in(T\setminus T_0)$ функцию $(\tilde{m},\tilde{K},\tilde{u})\to I(t,\tilde{m},\tilde{K},\tilde{u})$ в окрестности точки $(m(t),K(t),u(t))$, получим

$$\Delta J=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Bigg[I(t,m(t),K(t),u(t))+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial\tilde{m}_i}(t,m(t),K(t),u(t))\Delta m_i(t)+$$
$$+\operatorname{tr}\left(\left[\frac{\partial I}{\partial\tilde{K}_{ij}}\right](t,m(t),K(t),u(t))\Delta K(t)\right)+$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial I}{\partial\tilde{u}_r}(t,m(t),K(t),u(t))\Delta u_r(t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial I}{\partial\tilde{m}_i}(t,\mathcal{M}(t),\mathcal{K}(t),\mathcal{U}(t))-\frac{\partial I}{\partial\tilde{m}_i}(t,m(t),K(t),u(t))\right)\Delta m_i(t)+$$

$$+\operatorname{tr}\left(\left(\left[\frac{\partial I}{\partial\tilde{K}_{ij}}\right](t,\mathcal{M}(t),\mathcal{K}(t),\mathcal{U}(t))-\left[\frac{\partial I}{\partial\tilde{K}_{ij}}\right](t,m(t),K(t),u(t))\right)\Delta K(t)\right)+$$

$$+\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial I}{\partial\tilde{u}_r}(t,\mathcal{M}(t),\mathcal{K}(t),\mathcal{U}(t))-\frac{\partial I}{\partial\tilde{u}_r}(t,m(t),K(t),u(t))\right)\Delta u_r(t)\Bigg]\,dt,$$

где $\Delta m=\tilde{m}-m,\ \Delta K=\tilde{K}-K,\ \Delta u=\tilde{u}-u$, а значения $\mathcal{M}(t)\in R^n,\ \mathcal{K}(t)\in R^{n\times n},\ \mathcal{U}(t)\in R^m$ определяются равенствами $\mathcal{M}(t)=(1-\xi_1(t))m(t)+\xi_1(t)\tilde{m}(t),\ \mathcal{K}(t)=(1-\xi_2(t))K(t)+\xi_2(t)\tilde{K}(t),\ \mathcal{U}(t)=(1-\xi_3(t))u(t)+\xi_3(t)\tilde{u}(t)$, в которых $\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t)\in[0,1]$. Через $[\partial I/\partial\tilde{K}_{ij}]$ обозначена матрица, составленная из соответствующих частных производных.

Процесс $z=(p^*(\cdot),u(\cdot))$ удовлетворяет условиям леммы 2, а следовательно, по определению (2.13) функции I, для первого подынтегрального слагаемого в полученном выражении справедливо тождество

$$I(t,m(t),K(t),u(t))\equiv 0.$$

Кроме того, используя эти условия из леммы 3, непосредственным дифференцированием нетрудно показать справедливость тождеств

$$\frac{\partial I}{\partial\tilde{m}_i}(t,m(t),K(t),u(t))\equiv 0,$$

$$\left[\frac{\partial I}{\partial\tilde{K}_{ij}}\right](t,m(t),K(t),u(t))\equiv 0,$$

а значит

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial I}{\partial\tilde{u}_r}(t,m(t),K(t),u(t))\Delta u_r(t)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial\tilde{m}_i}(t,\mathcal{M}(t),\mathcal{K}(t),\mathcal{U}(t))\Delta m_i(t)+$$

$$+\operatorname{tr}\left(\left[\frac{\partial I}{\partial\tilde{K}_{ij}}\right](t,\mathcal{M}(t),\mathcal{K}(t),\mathcal{U}(t))\Delta K(t)\right)+$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t, \mathcal{M}(t), \mathcal{K}(t), \mathcal{U}(t)) - \frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t, m(t), K(t), u(t)) \right) \Delta u_r(t) \Bigg] dt.$$

Учитывая требования, накладываемые в разделе 2.1 на функции, входящие в правые части (2.15), (2.16) (см. замечания 1, 2), непрерывность по $\tilde{m}$, $\tilde{K}$ функции I вместе с её частными производными, а также непрерывность по $\tilde{u}(\cdot)$ функций $\tilde{m}$, $\tilde{K}$ как решения задачи Коши (2.9)-(2.11) при $u = \tilde{u}$, и формулу (2.14) для определения величины $\Delta u_r(t)$, нетрудно убедиться в том, что

$$\Delta J = -\theta \cdot \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}^2 (t, m(t), K(t), u(t)) dt + o(\theta). \qquad (2.17)$$

Здесь подынтегральная часть, домноженная на величину $-\theta$, полностью совпадает с первым подынтегральным слагаемым из предыдущего выражения (после подстановки $\Delta u_r(t)$ из формулы (2.14)), в то время как все остальные слагаемые имеют меньший порядок малости, а значит входят в величину $o(\theta)$.

Таким образом мы можем заключить, что при достаточно малом θ значение $\Delta J < 0$, если подынтегральное выражение в (2.17) не равно нулю при $t \in (T \setminus T_0)$, следовательно рассмотренная процедура является релаксационной. ■

2.4. Необходимые условия оптимальности

<u>Т е о р е м а 3.</u> Для того чтобы процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ был оптимален, необходимо существование функций M, λ, γ, удовлетворяющих условиям (2.4)-(2.7), и функций m, K, удовлетворяющих условиям (2.9)-

(2.11), таких, что при $t \in (T \setminus T_0)$ выполнены соотношения

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t, m(t), K(t), u(t)) = 0, \quad r = \overline{1, m}, \tag{2.18}$$

где значения $\partial I / \partial \tilde{u}_r$ вычисляются по формуле (2.16).

Доказательство. Пусть процесс z оптимален. Тогда процедура перехода к процессу $\tilde{z}$ при помощи формулы (2.14), очевидно, не может его улучшить. При этом функция I в соответствующей точке $(t, m(t), K(t), u(t))$ определена вместе со своей частной производной по $\tilde{u}$, т.к. функции m, K, M, λ, γ в правых частях (2.15), (2.16) при данном $u(\cdot)$ определены в силу леммы 4. Неулучшаемость процесса z, в свою очередь, исходя из формулы (2.14), влечёт справедливость равенства (2.18) при почти всех t. ■

Таким образом, оптимальный процесс z не удовлетворяет условиям теоремы 2, и для него процедура перехода к новому управлению с помощью формулы (2.14) не будет релаксационной.

2.5. Численный метод поиска оптимального управления

В данном разделе при использовании результатов теорем 2 и 3 формулируется численный метод поиска оптимального программного управления $u(t)$, основанный на широко известной процедуре градиентного спуска в функциональном пространстве.

Пусть процесс $z = (p^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ является некоторым приближением оптимального процесса. Исходя из результатов двух предыдущих разделов, будем строить следующее приближение $\tilde{z} = (\tilde{p}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ путём перехода от управления u к управлению $\tilde{u}$ по формуле (2.14).

После того как функция $\tilde{u}$ определена могут быть подсчитаны функции $\tilde{m}$ и $\tilde{K}$, соответствующие плотности $\tilde{p}$. Они определяются численным интегрированием уравнений (2.9)-(2.10) с условиями (2.11) в прямом времени. После этого из решения задачи Коши (2.4)-(2.7) в обратном времени могут быть найдены функции $\tilde{\gamma},\ \tilde{\lambda},\ \tilde{M}$, при помощи которых подсчитывается значение критерия $J(\tilde{z})$ по формуле (2.8), и определяется новая функция ψ^0 вида (2.3). Затем процесс $\tilde{z}$ принимается за следующее приближение оптимального процесса. На этом итерация завершается. Как обычно в градиентных методах, если значение критерия не уменьшается, уменьшим шаг θ в формуле (2.14) и пересчитаем итерацию заново. Если несколько итераций проведены успешно, значение θ можно увеличить. Закончить вычисления можно например тогда, когда изменение критерия становится достаточно малым.

Общий алгоритм поиска оптимального управления заключается в выборе некоторого начального значения $u(\cdot)$ (во многих случаях удаётся использовать, например, значение $u(t) \equiv 0$), определении соответствующего ему процесса z и функции ψ^0 и последующем итеративном применении описанной выше процедуры.

Интегрирование дифференциальных уравнений будем осуществлять численно, разбив интервал времени T на отрезки фиксированной длины. Все функции будем представлять значениями в соответствующих точках разбиения. Множество таких точек обозначим через $\overline{T}$. Тогда контроль точности приближения к оптимальному решению будем осуществлять при помощи величины

$$||\nabla I|| = \sum_{r=1}^{m} \sum_{t \in \overline{T}} \left| \frac{\partial I}{\partial \tilde{u}_r}(t, m(t), K(t), u(t)) \right|. \tag{2.19}$$

Шаг градиентного метода θ будем изменять его по следующему правилу: в случае двух подряд успешных спусков по градиенту, когда новые значения $\tilde{u}(t)$, вычисленные по формуле (2.14), уменьшают значение функционала качества J, значение θ увеличивается вдвое при переходе к следующей итерации, а в случае неудачного спуска θ уменьшается вдвое (сама итерация при этом повторяется заново).

Завершение работы программы осуществим при выполнении одного из условий: $||\nabla I|| < \varepsilon_1$ или $\theta < \varepsilon_2$.

Сконструированный таким образом градиентный метод можно формально представить в следующем виде.

Алгоритм поиска оптимального управления.

Ш а г 1. Произвольным образом или из дополнительных соображений задать θ – шаг градиентного метода, $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ – требуемые максимальные погрешности приближения, $u^{(0)}$ – начальную точку приближения, и положить номер итерации $k = 0$, количество успешных итераций $i = 0$.

Ш а г 2. Решить (численно) задачи Коши сперва в прямом, а затем и в обратном времени для системы уравнений (2.9), (2.10), (2.4)-(2.6) с условиями (2.11), (2.7), используя управление $u = u^{(k)}$.

Ш а г 3. Вычислить значение критерия $J^{(k)}$ по формуле (2.8). Если $k = 0$, перейти к шагу 5. В противном случае проверить выполнение условия $J^{(k)} < J^{(k-1)}$: если условие выполнено, увеличить i на единицу и перейти к шагу 4, иначе положить $i = 0$, $u^{(k)} = u^{(k-1)}$, уменьшить θ

вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 6.

Ш а г 4. Если $i = 2$, увеличить θ вдвое, положить $i = 0$.

Ш а г 5. Для всех $r = \overline{1, m}$ вычислить $\partial I / \partial u_r$ по формуле (2.16).

Ш а г 6. Вычислить величину $||\nabla I||$ по формуле (2.19) и проверить выполнение условий $||\nabla I|| < \varepsilon_1$, $\theta < \varepsilon_2$: если любое из условий выполнено, искомое значение $\overline{u}$ положить равным $u^{(k)}$ и закончить расчет, иначе вычислить $u^{(k+1)}$ по формуле (2.14) и перейти к шагу 7.

Ш а г 7. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 2. ■

Данный алгоритм является основным и отличается от алгоритмов, описанных далее в главах 3 и 4, только в деталях. При решении модельных и прикладных задач из разделов 2.6, 5.2, 5.3 применяется комплекс программ, разработанный на основе этих алгоритмов. В нём для интегрирования дифференциальных уравнений в основном используется метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности с шагом 0.005. Начальное значение шага градиентного метода θ берётся равным величине 0.1. Значения ε_1 и ε_2 выбираются равными 1 и 10^{-5} соответственно. Более подробное описание разработанного комплекса программ приведено в разделе 5.1.

2.6. Модельный пример

Пусть на интервале времени $T = [0; 1]$ процесс управления описывается скалярным уравнением

$$dx(t) = (ax(t) + b)dt + cu^2(t)dw(t)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 – случайная величина с математическим ожиданием $m_0 = 0$ и дисперсией $K_0 = 1$.

Требуется отыскать управление $u(t)$, минимизирующее функционал качества

$$J = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ku^3(t)p(t,x)dxdt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}qx^2 p(1,x)dx.$$

Здесь a, b, c, k, q – некоторые числа.

Уравнения (2.9), (2.10) для описания моментных характеристик m, K случайного процесса $x(t)$ с учётом начальных данных примут вид

$$\frac{dm(t)}{dt} = am(t) + b, \quad m(0) = 0,$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = 2aK(t) + c^2u^4(t), \quad K(0) = 1.$$

В свою очередь, система уравнений (2.4)-(2.6) с условиями (2.7), определяющая функции γ, λ, M, запишется в виде

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -b\lambda(t) - ku^3(t) - \frac{1}{2}c^2M(t)u^4(t), \quad \gamma(1) = 0,$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -a\lambda(t) - bM(t), \quad \lambda(1) = 0,$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = -2aM(t), \quad M(1) = q.$$

Наконец, формула (2.16) для вычисления значений $\partial I/\partial \tilde{u}$ будет иметь вид

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}}(t, m(t), K(t), u(t)) = 2c^2M(t)u^3(t) + 3ku^2(t).$$

Разрешив уравнение $\partial I/\partial \tilde{u} = 0$ при почти всех t относительно $u(t)$, будем иметь

$$u_1(t) = 0,$$

$$u_2(t) = -\frac{3k}{2c^2M(t)}.$$

Заметим далее, что полученная система дифференциально-алгебраических соотношений после подстановки любого из управлений

$u_1(t)$, $u_2(t)$ становится аналитически разрешимой при интегрировании уравнений начиная с последнего для функции $M(t)$.

В частности, могут быть получены решения для функций γ, λ, M

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) = \frac{b^2 q}{2a^2}\left(e^{2a(1-t)} - 2e^{a(1-t)} + 1\right), \text{ при } u(t) = u_1(t),$$

$$\gamma(t) = \gamma_2(t) = \gamma_1(t) + \frac{9k^4}{64ac^6q^3}\left(e^{6a(t-1)} - 1\right), \text{ при } u(t) = u_2(t),$$

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \frac{bq}{a}\left(e^{2a(1-t)} - e^{a(1-t)}\right),$$

$$M(t) = M_1(t) = M_2(t) = qe^{2a(1-t)}.$$

Определив функцию $M(t)$, окончательно заключаем, что управление $u_2(t)$ имеет вид

$$u_2(t) = -\frac{3k}{2c^2q}e^{2a(t-1)}. \tag{2.20}$$

Найденные управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ удовлетворяют необходимым условиям оптимальности теоремы 3. При этом легко убедиться в том, что функционал J в данной модельной задаче ограничен снизу, если выполнены условия $c \neq 0$ и $q \neq 0$. Для этого перепишем его в виде

$$J = k\int_0^1 u^3(t)dt + \frac{1}{2}q\left[K(1) + m^2(1)\right].$$

Здесь значения $K(1)$ и $m(1)$ вычисляются аналитически и имеют вид

$$K(1) = e^{2a}\left[1 + c^2\int_0^1 u^4(t)e^{-2at}dt\right],$$

$$m(1) = \frac{b}{a}\left[e^a - 1\right].$$

Подставляя полученные значения в формулу для J, будем иметь соотношение

$$J = \frac{1}{2}q\left[e^{2a} + \frac{b^2}{a^2}(e^a - 1)^2\right] + \int_0^1\left[k + \frac{1}{2}qc^2e^{2a(1-t)}u(t)\right]u^3(t)dt,$$

в котором первое слагаемое в правой части не зависит от u, а подынтегральная часть во втором слагаемом может стать отрицательной только при выполнении условия ограниченности величины $u(t)$ нулём с одной стороны и значением $-\frac{2k}{qc^2}e^{2a(t-1)}$ с другой. Но в этом случае подынтегральная функция в точках отрезка $[0,1]$ будет также ограничена, как композиция ограниченной и непрерывной функций. Следовательно, значение J ограничено снизу, что и требовалось доказать.

Теперь выбор среди решений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ единственного оптимального можно осуществить, сравнив соответствующие значения функционала качества J_1 и J_2, вычисленные по формуле (2.8), которая для данного примера имеет вид

$$J = \frac{1}{2}M(0) + \gamma(0).$$

Таким образом, подставляя найденные значения функций при $t = 0$, имеем

$$J_2 = J_1 + \frac{9k^4}{64ac^6q^3}\left(e^{-6a} - 1\right).$$

Положим $a = -1,\ b = c = k = q = 1$. В этом случае из соотношения

$$\frac{9k^4}{64ac^6q^3}\left(e^{-6a} - 1\right) = \frac{9}{64}(1 - e^6) < 0$$

можно сделать вывод, что управление $u(t)$, имеющее вид

$$u(t) = u_2(t) = -\frac{3}{2}e^{2(1-t)},$$

является оптимальным, а оптимальное значение функционала качества J для него равно

$$J_2 = e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{9}{64}(1 - e^6) \approx -56.3.$$

При этом значение J_1, соответствующее управлению $u_1(t)$, существенно больше, и приблизительно равно величине 0.3.

Заметим также, что необходимым условиям оптимальности удовлетворяет любое решение вида

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{при } t \in \mathfrak{T}, \\ u_2(t), & \text{при } t \in T \setminus \mathfrak{T}, \end{cases}$$

где $\mathfrak{T}$ – произвольное борелевское подмножество T.

Сравним полученные результаты с приближённым оптимальным решением, найденным градиентным методом. Для этого используем программную реализацию предложенной в разделе 2.5 итерационной процедуры.

В качестве начального приближения управления $u(t)$ рассмотрим несколько вариантов.

Вариант 1: $u(t) \equiv -5$.

Полученное значение критерия: -56.1; количество итераций: 64.

Таблица 1. Численные результаты применения метода по итерациям

№ итерации	J	θ	$\|\|\nabla I\|\|$
0	10.4	0.1	10432
1	-37.2	0.025	3214
2	-54.0	0.025	1002
3	-55.7	0.05	309
23	-56.1	0.05	13
64	-56.1	0.025	1

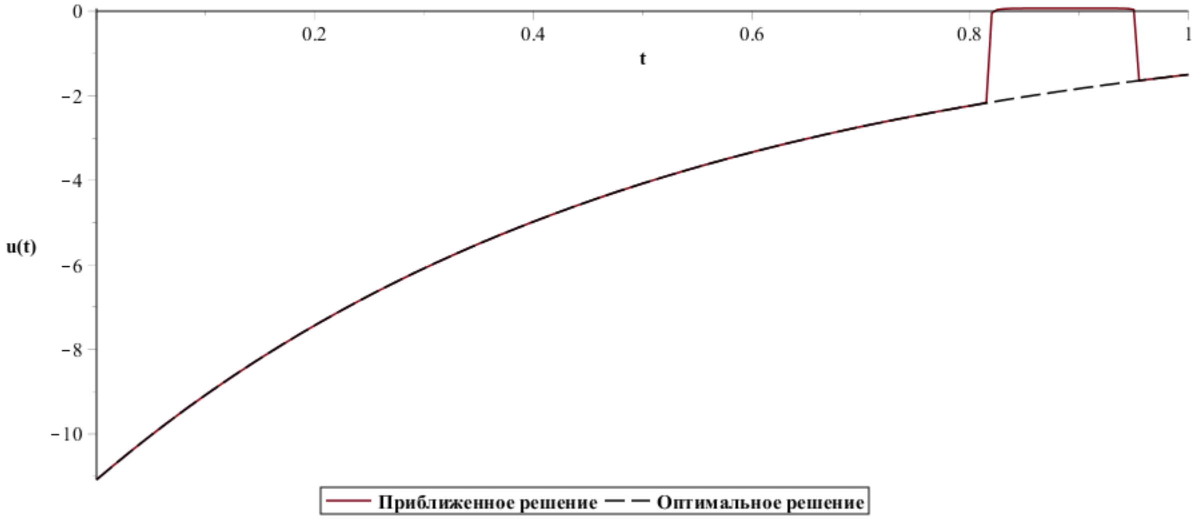

Рисунок 1. Сравнение с оптимальным решением $u_2(t)$

Вариант 2: $u(t) \equiv -3$.

Полученное значение критерия: -56.3; количество итераций: 32.

Таблица 2. Численные результаты применения метода по итерациям

№ итерации	J	θ	$\|\|\nabla I\|\|$
0	-9.2	0.1	2411
1	-25.5	0.05	2195
2	-52.8	0.1	1098
3	-56.2	0.025	156
4	-56.3	0.025	93
32	-56.3	0.025	1

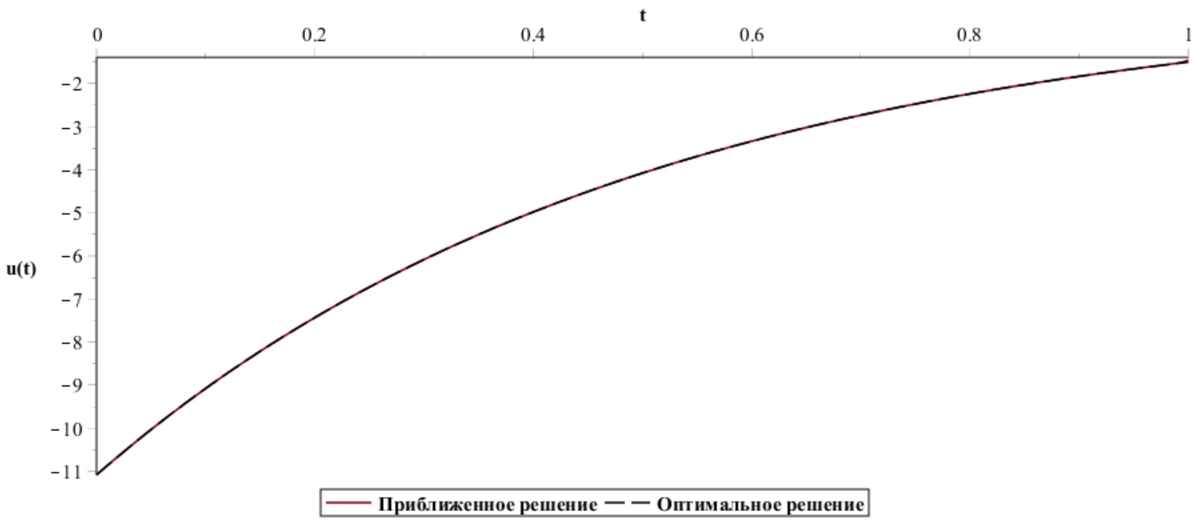

Рисунок 2. Сравнение с оптимальным решением $u_2(t)$

Вариант 3: $u(t) \equiv 5$.

Полученное значение критерия: -0.7; количество итераций: 30.

Таблица 3. Численные результаты применения метода по итерациям

№ итерации	J	θ	$\|\|\nabla I\|\|$
0	260.4	0.1	36834
1	3.8	0.0125	1447
2	1.9	0.0125	926
5	0.2	0.05	300
9	-0.3	0.2	54
15	-0.5	0.2	85
17	-0.6	0.1	18
30	-0.7	0.1	1

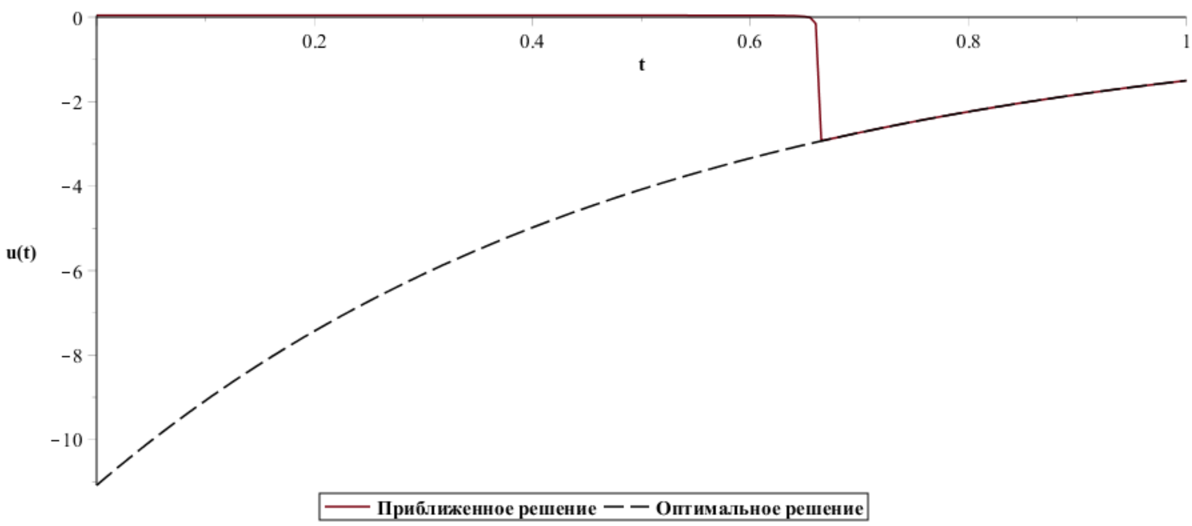

Рисунок 3. Сравнение с оптимальным решением $u_2(t)$

Вариант 4: $u(t) = 10 \sin 20t - 5$.

Полученное значение критерия: -29.2; количество итераций: 43.

Таблица 4. Численные результаты применения метода по итерациям

№ итерации	J	θ	$\|\|\nabla I\|\|$
0	1755.2	0.1	121665
1	443.3	0.003	37184
2	70.6	0.003	12286
3	0.1	0.006	5256
4	-10.0	0.006	3250
10	-25.3	0.05	293
12	-25.9	0.05	526
15	-27.5	0.05	91
16	-27.7	0.05	104
19	-27.8	0.05	30
35	-29.2	0.05	120
43	-29.2	0.00001	9

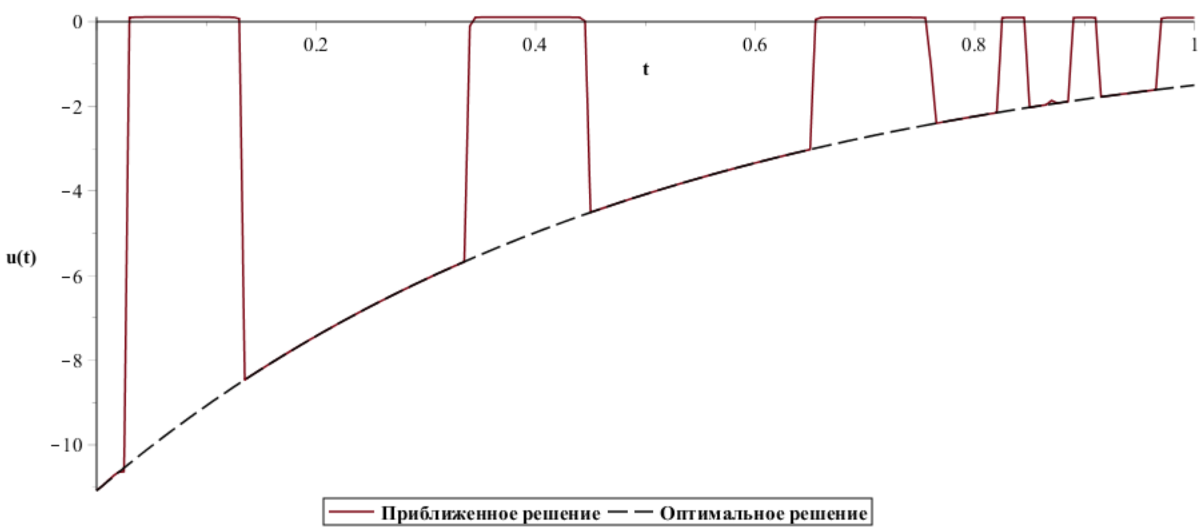

Рисунок 4. Сравнение с оптимальным решением $u_2(t)$

Изменение управления $u(t)$ в процессе применения метода особенно интересно для последнего варианта. Приведём для него сравнительные графики первых 3-х итераций.

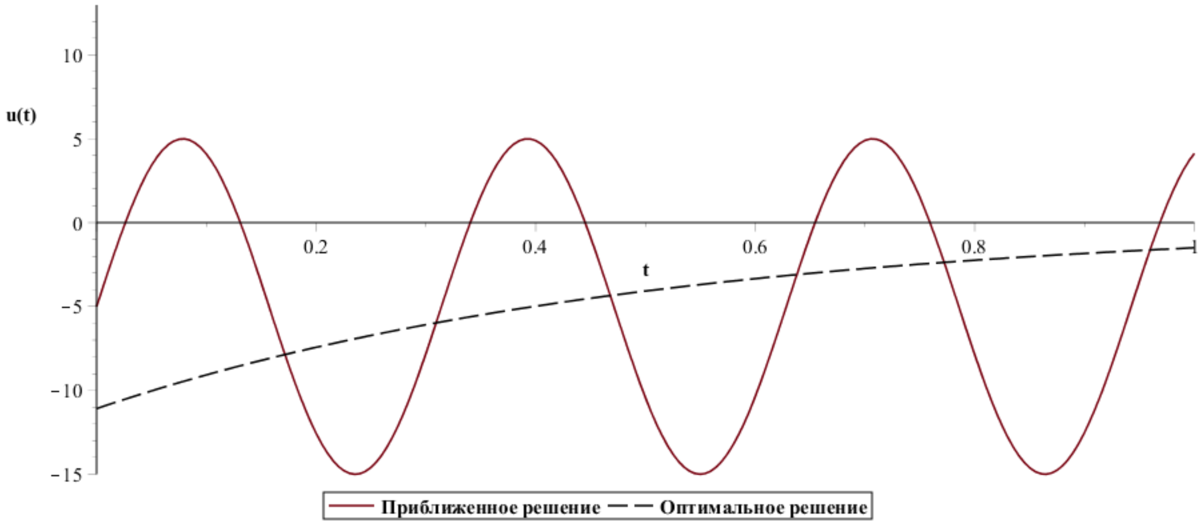

Рисунок 5. Начальное приближение

Рисунок 6. Итерация 1

Рисунок 7. Итерация 2

Рисунок 8. Итерация 3

Последующие итерации приводят решение к виду, представленному на рис. 4.

Из приведённых графиков видно, что в зависимости от выбранного начального приближения, градиентный метод на разных участках интервала T может сходиться как к оптимальному решению $u_2(\cdot)$, так и к решению

$u_1(t) \equiv 0$, которое в данном случае является ещё одной стационарной точкой. Понятно также, что подобная ситуация возможна и в общем случае при наличии нескольких решений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Таким образом, при поиске оптимального управления в рассматриваемых здесь задачах выбор начального приближения играет существенную роль.

Отметим также два частных случая постановки задачи для данного примера, когда $c = 0$ или $q = 0$. Последний случай приводит к тому, что решение $M(t) \equiv 0$, а, следовательно, в обеих указанных ситуациях при должном выборе оставшихся значений параметров, будет иметь место неограниченность снизу функционала качества J, и как видно из равенства (2.20), оптимальное управление не существует, а разработанный градиентный метод от шага к шагу будет неограниченно уменьшать значение J.

2.7. Результаты

Основные результаты данной главы связаны с поиском оптимального программного управления квазилинейными стохастическими системами с нелинейными по управлению коэффициентами и состоят в следующем:

1) построена процедура улучшения заданного процесса управления;

2) показано, что неулучшаемость процесса управления в смысле данной процедуры является необходимым условием его оптимальности;

3) сконструирован численный метод градиентного типа для поиска оптимального управления;

4) условия и метод опробованы на модельном примере.

Результаты главы опубликованы в работах [69, 76, 78].

3. Оптимизация квазилинейных систем при неполной информации о состоянии

Здесь рассматривается задача синтеза оптимальной стратегии управления квазилинейными динамическими стохастическими системами с информационными ограничениями в классе линейных регуляторов. Показано, что результаты главы 2 можно непосредственным образом продолжить на рассматриваемый класс задач.

В § 3.1 формулируется постановка задачи оптимизации стратегии управления квазилинейными динамическими стохастическими системами при неполной информации о состоянии и вводится понятие стратегии управления с информационными ограничениями (определение 2).

Далее, в разделе 3.2 поставленная задача формулируется в виде частного случая рассматриваемой в главе 2 задачи оптимального программного управления квазилинейной системой с нелинейными по управлению коэффициентами.

В результате этого необходимые условия оптимальности и численный метод, сформулированные в разделах 2.4-2.5 удаётся в § 3.3 и § 3.4 конкретизировать для рассматриваемой здесь задачи.

3.1. Постановка задачи оптимального управления квазилинейными динамическими стохастическими системами с информационными ограничениями

Процесс управления описывается системой уравнений Ито

$$
\begin{gathered}
dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t,x(t))]\,dt + \\
+\sum_{l=1}^{\nu}\left[G^{(l)}(t)x(t) + F^{(l)}(t)u(t,x(t)) + C^{(l)}(t)\right]dw_l(t), \\
x(t_0) = x_0,
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где $t \in T = [t_0; t_1]$ – время; $x \in R^n$ – вектор состояния системы; $w(\cdot)$ – ν-мерный стандартный винеровский процесс; $u \in R^m$ – вектор управления; $(t,x) \to u(t,x) : T \times R^n \to R^m$ – стратегия управления. Случайный вектор x_0 имеет плотность распределения $p_0(x)$ с математическим ожиданием m_0 и ковариационной матрицей $K_0 > 0$. Здесь и далее в главе размерности матриц и векторов, а также условия на функции соответствуют приведённым ранее в главе 2.

В обозначениях главы 1

$$
f(t,x,u) = A(t)x + B(t)u, \quad g_l(t,x,u) = G^{(l)}(t)x + F^{(l)}(t)u + C^{(l)}(t,u),
$$

где столбцы $g_l(\cdot)$ вновь составляют матрицу $g(\cdot)$ размеров $n \times \nu$.

Рассматривается функция управления $t \to u^*(t) = u(t,\cdot) : T \to V \subset B^{n,m}$, где V – множество, задающее информационные ограничения, которые состоят в том, что каждая компонента вектора стратегии $u(\cdot)$ зависит от своего априори назначаемого набора компонент вектора состояния x, $B^{n,m}$ – множество борелевских функций $x \to v(x) : R^n \to R^m$. Указанные ограничения отражают возможности получения информации о состоянии.

<u>П р и м е р 1.</u> Пусть управляемая динамическая система имеет вектор состояния $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}}$ и вектор управления $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^{\mathrm{T}}$. Требуется синтезировать стратегию управления в виде

$$u(t,x) = \begin{pmatrix} u_1(t, \quad, x_2, \quad, x_4, \quad) \\ u_2(t, \quad, \quad, x_3, x_4, \quad) \\ u_3(t, x_1, \quad, \quad, x_4, \quad) \\ u_4(t, x_1, x_2, \quad, x_4, \quad) \end{pmatrix}$$

Все компоненты вектора u зависят от координаты x_4, ни одна компонента не зависит от x_5 и каждая по-своему зависит от x_1, x_2, x_3.

Формально информационные ограничения можно задать следуя [1], сформировав набор функций $(t,x) \to u^{\alpha}(t,x) : T \times R^n \to R^{m^{\alpha}}$, $m_{\alpha} \leq m$, непрерывно дифференцируемых по x_{α}, $\alpha = \overline{1, n_1}$, $n_1 \leq n$. Каждая функция u^{α} состоит из компонент вектора стратегии управления $u(\cdot)$, не зависящих от компоненты x_{α} вектора состояния x.

<u>О п р е д е л е н и е 2.</u> Функцию $u^*(\cdot)$ будем называть *управлением с информационными ограничениями*, если для набора функций $u^{\alpha}(\cdot)$ выполнено

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} u^{\alpha}(t,x) = 0, \ (t,x) \in T \times R^n, \ \alpha = \overline{1, n_1}.$$

Если все компоненты вектора стратегии управления $u(\cdot)$ зависят от всех компонент вектора x, то указанные функции не вводятся и стратегия управления заданной структуры совпадает с обычной стратегией управления с полной обратной связью.

Здесь через $\mathcal{D}$ обозначим множество допустимых процессов управления $z = (p^*(\cdot), u^*(\cdot))$, удовлетворяющих условиям:

А.1) управление $u^*(\cdot)$ является управлением с информационными ограничениями;

А.2) при заданном управлении $u^*(\cdot)$ функция $t \to p^*(t) = p(t,\cdot) : T \to C_p^2(R^n)$ абсолютно непрерывна и такова, что плотность p является решением уравнения ФПК (1.2) с начальным условием (1.3).

Для процесса $z \in \mathcal{D}$ определим функционал качества управления

$$z \to J(z) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left[\tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} D(t) x + u^{\mathrm{T}} S(t) x + \tfrac{1}{2} u^{\mathrm{T}} E(t) u\right] p(t,x) dx dt + \\ + \int\limits_{R^n} \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x p(t_1, x) dx : \mathcal{D} \to R^1, \tag{3.2}$$

где квадратичные формы в подынтегральных выражениях неотрицательно определены, и выполнено условие $E(t) \geq E_0 > 0,\ t \in T$.

В обозначениях главы 1

$$f^c(t,x,u) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} D(t) x + u^{\mathrm{T}} S(t) x + \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} E(t) u, \quad F^c(x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x.$$

Цель управления состоит в минимизации критерия (3.2) на множестве $\mathcal{D}$.

3.2. Синтез линейного регулятора

При решении задачи синтеза оптимальной стратегии управления квазилинейной системой с информационными ограничениями вида (3.1), в отличие от линейной системы, приходится так или иначе постулировать линейность по состоянию искомой оптимальной стратегии. В результате оптимальная стратегия управления ищется в виде линейного регулятора [4, 5]

$$u(t,x) = -(P(t)x + L(t)). \tag{3.3}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае информационные ограничения можно учесть, зафиксировав элементы $P_{ij}(t) \equiv 0$, если компонента u_i вектора стратегии управления не должна зависеть от компоненты x_j вектора состояния.

Принимая совокупность оставшихся ненулевых элементов матрицы $P(\cdot)$ и компонент вектора $L(\cdot)$ за функцию управления $t \to \hat{u}(t) : T \to R^p,\ p \leq m \cdot (n+1)$, получим новую постановку задачи в виде

$$\begin{gathered} dx(t) = \left[\hat{A}(t, \hat{u}(t))x(t) + \hat{B}(t, \hat{u}(t))\right] dt + \\ + \sum_{l=1}^{\nu} \left[\hat{G}^{(l)}(t, \hat{u}(t))x(t) + \hat{C}^{(l)}(t, \hat{u}(t))\right] dw_l(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} J(z) = & \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} & \left[\tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \hat{D}(t, \hat{u}(t))x + \hat{S}^{\mathrm{T}}(t, \hat{u}(t))x + \hat{E}(t, \hat{u}(t))\right] p(t,x) dx dt + \\ & + \int_{R^n} \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x p(t_1, x) dx, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{gathered} \hat{A}(t, \hat{u}) = A(t) - B(t)P, \\ \hat{B}(t, \hat{u}) = -B(t)L, \\ \hat{G}^{(l)}(t, \hat{u}) = G^{(l)}(t) - F^{(l)}(t)P, \\ \hat{C}^{(l)}(t, \hat{u}) = C^{(l)}(t) - F^{(l)}(t)L, \\ \hat{D}(t, \hat{u}) = D(t) - P^{\mathrm{T}} S(t) - S^{\mathrm{T}}(t)P + P^{\mathrm{T}} E(t)P, \\ \hat{S}^{\mathrm{T}}(t, \hat{u}) = L^{\mathrm{T}} E(t)P - L^{\mathrm{T}} S(t), \\ \hat{E}(t, \hat{u}) = 1/2 \cdot L^{\mathrm{T}} E(t)L. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Полученная задача (3.4)-(3.5) представляет собой частный случай задачи (2.1)-(2.2), и к ней могут быть применены предложенные в разделе 2.3 процедуры улучшения процесса управления. В частности, формула (2.16) для вычисления значений $\partial I/\partial\tilde{u}_r$ при переходе к новому управлению $\tilde{u}$ примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial I}{\partial\tilde{u}_r}(t,m(t),K(t),\hat{u}(t))=\\ =\mathrm{tr}\left(P_r'^{\mathrm{T}}(t)\left[\left(E(t)+\Theta(t)\right)P(t)-B^{\mathrm{T}}(t)M(t)-\Pi(t)-S(t)\right]K(t)\right)+\\ +\left(P_r'(t)m(t)+L_r'(t)\right)^{\mathrm{T}}\left(\left[\left(E(t)+\Theta(t)\right)L(t)-B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)-\Lambda(t)\right]+\right.\\ \left.+\left[\left(E(t)+\Theta(t)\right)P(t)-B^{\mathrm{T}}(t)M(t)-\Pi(t)-S(t)\right]m(t)\right),\end{gathered}\tag{3.7}$$

где $\Pi=\sum\limits_{l=1}^{\nu}F^{(l)^{\mathrm{T}}}MG^{(l)}$, $\Lambda=\sum\limits_{l=1}^{\nu}F^{(l)^{\mathrm{T}}}MC^{(l)}$, $\Theta=\sum\limits_{l=1}^{\nu}F^{(l)^{\mathrm{T}}}MF^{(l)}$, а через $(\cdot)_r'$ обозначена производная по элементу матрицы P или вектора L, соответствующего компоненте $\hat{u}_r$ нового вектора управления $\hat{u}$, $r=\overline{1,p}$. В справедливости этой формулы легко убедиться, выполнив подстановку выражений (3.6) вместо соответствующих функций в формулу (2.16).

Из приведённых в данном разделе рассуждений непосредственно следует справедливость теорем 2 и 3 для квазилинейных стохастических систем с информационными ограничениями. При этом формулировка и доказательство теоремы 2 повторяются с точностью до замены формулы (2.16) на формулу (3.7), в то время как теорему 3 удаётся существенным образом конкретизировать за счёт возможности частично разрешить равенство нулю правой части выражения (3.7) относительно коэффициентов регулятора $P(t)$ и $L(t)$. Соответствующий результат сформулирован в следующем разделе в виде теоремы 4.

Следует отметить, что сконструированные таким образом необходимые условия оптимальности в точности совпадают с локальными условиями, которые получаются при поиске экстремальных процессов управления в задачах оптимизации линейных и обыкновенных квазилинейных стохастических систем с информационными ограничениями [2, 4, 5] при непосредственном использовании метода функций Ляпунова–Лагранжа [1, 2], частично описанного в главе 1.

3.3. Необходимые условия оптимальности

<u>Т е о р е м а 4.</u> Для того чтобы процесс $z = (p^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathcal{D}$, стратегия управления $u(t,x)$ которого есть линейный регулятор (3.3), был оптимален, необходимо существование функций $m,\ K,\ \gamma,\ \lambda,\ M$ и H, удовлетворяющих совместно с коэффициентами регулятора $P,\ L$ перечисленным ниже условиям.

1. Функции $m,\ K$ являются решением системы уравнений

$$\frac{dm}{dt}(t) = \tilde{A}(t)m(t) - B(t)L(t), \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{dK}{dt}(t) = \tilde{A}(t)K(t) + K(t)\tilde{A}^{\mathrm{T}}(t) + \\ + \sum_{l=1}^{\nu}\Big(\tilde{G}^{(l)}(t)K(t)\tilde{G}^{(l)^{\mathrm{T}}}(t) + \\ + \left[\tilde{C}^{(l)}(t) + \tilde{G}^{(l)}(t)m(t)\right]\left[\tilde{C}^{(l)}(t) + \tilde{G}^{(l)}(t)m(t)\right]^{\mathrm{T}}\Big),\end{gathered} \tag{3.9}$$

где $\tilde{A} = A - BP$, $\tilde{G}^{(l)} = G^{(l)} - F^{(l)}P$, $\tilde{C}^{(l)} = C^{(l)} - F^{(l)}L$, с начальными условиями

$$m(t_0) = m_0, \quad K(t_0) = K_0. \tag{3.10}$$

2. Функции $\gamma,\ \lambda,\ M$ являются решением системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d\gamma}{dt}(t) = \lambda^{\mathrm{T}}(t)B(t)L(t) - \tfrac{1}{2}L^{\mathrm{T}}(t)E(t)L(t) - \\ -\tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{\nu}\tilde{C}^{(l)^{\mathrm{T}}}(t)M(t)\tilde{C}^{(l)}(t),\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\lambda}{dt}(t) = -\tilde{A}^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) + S^{\mathrm{T}}(t)L(t) + P^{\mathrm{T}}(t)E(t)L(t) + \\ + M(t)B(t)L(t) - \sum_{l=1}^{\nu}\tilde{G}^{(l)^{\mathrm{T}}}(t)M(t)\tilde{C}^{(l)}(t),\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\frac{dM}{dt}(t) = -M(t)\tilde{A}(t) - \tilde{A}^{\mathrm{T}}(t)M(t) - D(t) + S^{\mathrm{T}}(t)P(t) + \\ + P^{\mathrm{T}}(t)S(t) - P^{\mathrm{T}}(t)E(t)P(t) - \sum_{l=1}^{\nu} \tilde{G}^{(l)\mathrm{T}}(t)M(t)\tilde{G}^{(l)}(t), \tag{3.13}$$

с условиями, заданными при $t = t_1$,

$$\gamma(t_1) = 0, \quad \lambda(t_1) = 0, \quad M(t_1) = Q. \tag{3.14}$$

3. Функции P и L удовлетворяют соотношениям

$$P(t) = (E(t) + \Theta(t))^{-1} \left[B^{\mathrm{T}}(t)M(t) + \Pi(t) + S(t) - H(t)K^{-1}(t)\right], \tag{3.15}$$

$$L(t) = (E(t) + \Theta(t))^{-1} \left[B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) + \Lambda(t) + H(t)K^{-1}(t)m(t)\right], \tag{3.16}$$

где ненулевые элементы матрицы $H(t) = \aleph H^*(t),\ t \in T$, являются решением уравнения

$$\aleph \Big\{ (E(t) + \Theta(t))^{-1} \big[B^{\mathrm{T}}(t)M(t) + \Pi(t) + \\ + S(t) - (\aleph H^*(t))K^{-1}(t)\big] \Big\} = 0. \tag{3.17}$$

Символом $\aleph$ в уравнении (3.17) обозначен линейный оператор структуры управления [2], который определён на множестве матриц размеров $(m \times n)$ и действует на матрицу $H^*(t)$ так, что если компонента u_i вектора стратегии управления зависит от компоненты x_j вектора состояния, то соответствующий элемент $H_{ij}(t)$ матрицы $H(t) = \aleph H^*(t)$ будет равен нулю, в противном случае $H_{ij}(t) = H^*_{ij}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения (3.8)-(3.14) непосредственным образом вытекают из подстановки выражений (3.6) в формулы (2.9)-(2.11) и (2.4)-(2.7). При этом из теоремы 3 следует, что для оптимальности линейного регулятора (3.3) необходимо выполнение равенства $\partial I / \partial \tilde{u}_r = 0$ при почти всех t. Приравнивая к нулю правую часть (3.7) для значений

$r = \overline{p-m+1, p}$, нетрудно получить

$$\begin{gathered}\left[(E(t)+\Theta(t))\,L(t) - B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) - \Lambda(t)\right] + \\ + \left[(E(t)+\Theta(t))\,P(t) - B^{\mathrm{T}}(t)M(t) - \Pi(t) - S(t)\right] m(t) = 0.\end{gathered} \tag{3.18}$$

Отсюда следует, что для каждого $r = \overline{1, p-m}$, в свою очередь имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}\left(P_r'^{\mathrm{T}}(t)\left[(E(t)+\Theta(t))\,P(t) - \right.\right. \\ \left.\left. - B^{\mathrm{T}}(t)M(t) - \Pi(t) - S(t)\right] K(t)\right) = 0.\end{gathered} \tag{3.19}$$

Всякому $r = \overline{1, p-m}$ поставим в соответствие пару индексов i_r, j_r так, что $P_{i_r j_r}(t) = \hat{u}_r(t)$. Тогда каждая матрица P_r', $r = \overline{1, p-m}$, будет отличаться от нулевой матрицы элементом i_r-ой строки и j_r-го столбца, равным единице. Следовательно, из (3.19) заключаем, что элемент матрицы $\left[(E(t)+\Theta(t))\,P(t) - B^{\mathrm{T}}(t)M(t) - \Pi(t) - S(t)\right] K(t)$ с индексами i_r, j_r будет равен нулю. Это означает, что соотношение (3.19) может быть переписано при помощи оператора структуры управления $\aleph$ в виде

$$\left[(E(t)+\Theta(t))\,P(t) - B^{\mathrm{T}}(t)M(t) - \Pi(t) - S(t)\right] K(t) = -\aleph H^*(t),$$

где $H^*(t)$ – некоторая матрица размеров $(m \times n)$.

Функция M удовлетворяет уравнению (3.13) и условию $M(t_1) = Q$. Учитывая исходные предположения относительно матриц D и Q, легко показать, что этого достаточно для неотрицательной определённости $M(t)$, $t \in T$. Ввиду положительной определённости $E(t)$ заключаем, что в этом случае матрица $(E(t)+\Theta(t))$ обратима. При этом K_0 здесь также считается невырожденной, а значит и матрица $K(t)$ будет обратимой при всех t, т.е. последняя формула может быть переписана в виде

$$\begin{gathered}P(t) = (E(t)+\Theta(t))^{-1}\left[B^{\mathrm{T}}(t)M(t) + \Pi(t) + \right. \\ \left. + S(t) - (\aleph H^*(t))K^{-1}(t)\right].\end{gathered} \tag{3.20}$$

Вводя обозначение $H = \aleph H^*$, и подставляя (3.20) в (3.18), получим формулы вычисления компонент оптимального линейного регулятора (3.15)-(3.16).

Остаётся заметить, что матрица $P(t)$ удовлетворяет условию $\aleph P(t) = 0$, т.к. при учёте информационных ограничений соответствующие элементы $P(t)$ принимаются тождественно равными нулю. Тогда, применяя оператор $\aleph$ к правой части (3.20), получим систему уравнений (3.17). ■

3.4. Численный метод синтеза оптимальной стратегии управления

Численный метод поиска оптимальной стратегии управления с информационными ограничениями в задаче (3.1)-(3.2) незначительно отличается от численного метода, сформулированного в разделе 2.5, ввиду того, что настоящий метод формулируется не на основе теорем 2 и 3, а на основе теорем 2 и 4.

Алгоритм поиска оптимальной стратегии управления.

Шаг 1. Произвольным образом или из дополнительных соображений задать θ – шаг градиентного метода, ε_1, ε_2 – требуемые максимальные погрешности приближения, $u^{(0)}(t,x) = -(P^{(0)}(t)x + L^{(0)}(t))$ – начальную точку приближения, учесть информационные ограничения в задаче тождественным занулением нужных компонент матрицы $P^{(0)}(t)$, составить из оставшихся элементов матрицы $P^{(0)}(t)$ и вектора $L^{(0)}(t)$ вектор $\hat{u}^{(0)}(t)$, и положить номер итерации $k = 0$, количество успешных итераций $i = 0$.

Шаг 2. Решить (численно) задачи Коши сперва в прямом, а затем и в обратном времени для системы уравнений (3.8), (3.9), (3.11)-

(3.13) с условиями (3.10), (3.14), используя матрицы регулятора $P = P^{(k)}$ и $L = L^{(k)}$.

Ш а г 3. Вычислить значение критерия $J^{(k)}$ по формуле (2.8). Если $k = 0$, перейти к шагу 5. В противном случае проверить выполнение условия $J^{(k)} < J^{(k-1)}$: если условие выполнено, увеличить i на единицу и перейти к шагу 4, иначе положить $i = 0$, $P^{(k)} = P^{(k-1)}$, $L^{(k)} = L^{(k-1)}$, $\hat{u}^{(k)} = \hat{u}^{(k-1)}$, уменьшить θ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 6.

Ш а г 4. Если $i = 2$, увеличить θ вдвое, положить $i = 0$.

Ш а г 5. Для всех $r = \overline{1,p}$ вычислить $\partial I/\partial u_r$ по формуле (3.7).

Ш а г 6. Вычислить величину $||\nabla I||$ по формуле (2.19) и проверить выполнение условий $||\nabla I|| < \varepsilon_1$, $\theta < \varepsilon_2$: если любое из условий выполнено, искомое значение $\overline{u}(t,x)$ положить равным $u^{(k)}(t,x) = -(P^{(k)}(t)x + L^{(k)}(t))$ и закончить расчет, иначе вычислить $\hat{u}^{(k+1)}(t)$ по формуле (2.14), с учётом информационных ограничений составить из полученных элементов коэффициенты $P^{(k+1)}(t)$, $L^{(k+1)}(t)$ и перейти к шагу 7.

Ш а г 7. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

Разработанный здесь численный метод применяется при решении задачи оптимальной стабилизации спутника с упругой штангой в разделе 5.2.

3.5. Результаты

Задача оптимизации стратегии управления квазилинейной динамической стохастической системой с информационными ограничениями сформулирована в виде частного случая задачи оптимизации программного управления квазилинейной стохастической системой, нелинейной по управлению. Это позволило получить следующие результаты:

1) сформулированы необходимые условия оптимальности стратегии управления с информационными ограничениями;

2) разработан численный метод поиска оптимальной стратегии управления.

Результаты главы опубликованы в работах [69, 77].

4. Субоптимальное управление квазилинейными системами

Четвёртая глава диссертационной работы посвящена построению оптимального управления в заранее суженном классе функций достаточно простой структуры (субоптимального управления) для задач, рассматриваемых в главах 2 и 3.

В § 4.1 формулируется понятие субоптимального управления и определяется его структура.

Разделы 4.2 и 4.3 содержат необходимые условия субоптимальности и численные методы поиска субоптимального управления в задачах глав 2 и 3 соответственно.

4.1. Формулировка понятия субоптимального управления

В общем случае компоненты вектора оптимального управления $u(t)$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности теоремы 3 (в частности матрицы $P(t), L(t)$, определяемые соотношениями (3.15), (3.16) теоремы 4 для стратегии управления $u(t,x)$ вида (3.3)) могут быть достаточно произвольными нелинейными функциями времени t. При разработке приближённо-аналитических методов синтеза оптимальных стратегий управления с информационными ограничениями в [68] было предложено аппроксимировать функции в правых частях (3.15), (3.16) рядами по выбранной системе базисных функций, ортонормированных на заданном отрезке времени. В результате $P(t)$ и $L(t)$ приобретали несколько более простой вид, соответствующий количеству использованных базисных функций.

В данной главе предлагается искать управление $u(t)$ (например, компоненты матриц $P(t), L(t)$) в виде полиномиальных по времени функций. Очевидно, что полученное за счет этого управление уже не будет в общем случае оптимальным по критерию (2.2) среди всех допустимых функций, но применение такого управления на практике может быть значительно выгоднее в силу его простоты.

Для определения структуры управления введём набор параметров $s = (s_1, ..., s_N)$ и обозначим через $\tilde{u}_i(t, s)$, $i = \overline{1, m}$, полиномы от t с коэффициентами s_j. Здесь N определяется значением m и заранее выбранным порядком полиномов. Коэффициенты s_j, $j = \overline{1, N}$, требуется подобрать так, чтобы минимизировать критерий качества управления J.

Таким образом, получена задача безусловной минимизации критериальной функции $J(z(s)) = \hat{J}(s)$, зависящей неявно от $s = (s_1, ..., s_N)$, т.е. необходимо найти значение $\overline{s}$ такое, что

$$\hat{J}(\overline{s}) = \min_{s \in R^N} \hat{J}(s). \tag{4.1}$$

<u>О п р е д е л е н и е 3.</u> Управление $u(t) = \tilde{u}(t, \overline{s})$, где вектор $\overline{s}$ удовлетворяет условию (4.1), будем называть *субоптимальным*.

<u>З а м е ч а н и е 3.</u> Так как при поиске субоптимального управления ставится задача минимизации функции N действительных переменных (в отличие от задач минимизации функционала, рассматриваемых в гла-

вах 1-3), предлагаемые в данной главе алгоритмы имеют значительно большее сходство по построению и структуре с классическими градиентными процедурами [80].

4.2. Субоптимальное управление квазилинейными системами, нелинейными по управлению

В данном разделе мы будем рассматривать задачу (2.1)-(2.2) и в соответствии с определением 3 строить для неё субоптимальное управление вида $u(t) = \tilde{u}(t, \overline{s})$.

Т е о р е м а 5. Для того чтобы управление $u(t) = \tilde{u}(t, \overline{s})$ было субоптимальным, необходимо существование функций M, λ, γ, удовлетворяющих условиям (2.4)-(2.7), и функций m, K, удовлетворяющих условиям (2.9)-(2.11), таких, что выполнены соотношения

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial s_j}(\overline{s}) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \tag{4.2}$$

в которых значения $\partial \hat{J} / \partial s_j$ вычисляются по формуле

$$\begin{gathered}\frac{\partial \hat{J}}{\partial s_j}(\overline{s}) = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ \mathrm{tr} \left(\left[M(t)(A^u)'_j(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t) M(t) (G^{(l)u})'_j(t) + \tfrac{1}{2}(D^u)'_j(t) \right] K(t) \right) + \\ + m^{\mathrm{T}}(t) \left[M(t)(A^u)'_j(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t) M(t) (G^{(l)u})'_j(t) + \tfrac{1}{2}(D^u)'_j(t) \right] m(t) + \\ + m^{\mathrm{T}}(t) \Bigg[((A^u)'_j)^{\mathrm{T}}(t) \lambda(t) + M(t)(B^u)'_j(t) + \\ + \sum_{l=1}^{\nu} \big(((G^{(l)u})'_j)^{\mathrm{T}}(t) M(t) C^{(l)u}(t) + (G^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t) M(t) (C^{(l)u})'_j(t) \big) + (S^u)'_j(t) \Bigg] + \\ + \lambda^{\mathrm{T}}(t)(B^u)'_j(t) + \sum_{l=1}^{\nu} (C^{(l)u})^{\mathrm{T}}(t) M(t) (C^{(l)u})'_j(t) + (E^u)'_j(t) \Bigg\} \, dt,\end{gathered} \tag{4.3}$$

где через $(\cdot)'_j$ обозначена производная по s_j и использованы обозначения вида $A^u(t) = A(t, u(t)) = A(t, \tilde{u}(t, \overline{s}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению 3 субоптимальное управление удовлетворяет условию (4.1), а следовательно и необходимым условиям безусловного экстремума (4.2) [80]. Формулу (4.3) нетрудно получить непосредственным дифференцированием соотношения (1.15) по s_j при $u(t) = \tilde{u}(t, \overline{s})$, используя лемму 1 и результаты главы 2, в частности, формулу (2.16). Функции m, K, M, λ, γ, удовлетворяющие условиям (2.9)-(2.11),(2.4)-(2.7) при данном $u(t) = \tilde{u}(t, \overline{s})$ определены в силу леммы 4. ∎

На основе полученного результата легко формулируется градиентная процедура синтеза субоптимального управления, соответствующая численному методу раздела 2.5.

Алгоритм поиска субоптимального управления.

Ш а г 1. Произвольным образом или из дополнительных соображений задать $\theta > 0$ – шаг градиентного метода, ε_1, ε_2 – требуемые максимальные погрешности приближения, порядок используемых полиномов, $s^{(0)}$ – начальную точку приближения, и положить номер итерации $k = 0$, количество успешных итераций $i = 0$.

Ш а г 2. Решить (численно) задачи Коши сперва в прямом, а затем и в обратном времени для системы уравнений (2.9), (2.10), (2.4)-(2.6) с условиями (2.11), (2.7), используя управление $u(t) = \tilde{u}(t, s^{(k)})$.

Ш а г 3. Вычислить значение критерия $J^{(k)}$ по формуле (2.8). Если $k = 0$, перейти к шагу 5. В противном случае проверить выполнение условия $J^{(k)} < J^{(k-1)}$: если условие выполнено, увеличить i на единицу и перейти к шагу 4, иначе положить $i = 0$, $s^{(k)} = s^{(k-1)}$, уменьшить θ

вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 6.

Ш а г 4. Если $i = 2$, увеличить θ вдвое, положить $i = 0$.

Ш а г 5. Для всех $j = \overline{1, N}$ вычислить $\partial\hat{J}/\partial s_j$ по формуле (4.3).

Ш а г 6. Вычислить величину $||\nabla I||$ по формуле

$$||\nabla I|| = \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial \hat{J}}{\partial s_j}(s^{(k)}) \right| \tag{4.4}$$

и проверить выполнение условий $||\nabla I|| < \varepsilon_1$, $\theta < \varepsilon_2$: если любое из условий выполнено, искомое значение $\overline{s}$ положить равным $s^{(k)}$, $u(t) = \tilde{u}(t, \overline{s})$ и закончить расчет, иначе вычислить $s^{(k+1)}$ по формуле

$$s_j^{(k+1)} = s_j^{(k)} - \theta \frac{\partial \hat{J}}{\partial s_j}(s^{(k)}),\ j = \overline{1, N}, \tag{4.5}$$

и перейти к шагу 7.

Ш а г 7. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

4.3. Субоптимальное управление квазилинейными системами с информационными ограничениями

В данном разделе мы будем рассматривать задачу (3.1)-(3.2) и в соответствии с определением 3 и результатами главы 3 строить для неё субоптимальную стратегию управления с информационными ограничениями вида $u(t, x) = -(\tilde{P}(t, s)x + \tilde{L}(t, s))$. Здесь, как и в главе 3, будем считать, что информационные ограничения учтены заранее тождественным занулением соответствующих элементов матрицы $P(t) = \tilde{P}(t, s)$, и для этих элементов полиномы с коэффициентами s_j не вводятся. В полном соответствии с предыдущим разделом можно сформулировать следующий результат.

Т е о р е м а 6. Для того чтобы стратегия управления $u(t,x) = -(P(t)x + L(t)) = -(\tilde{P}(t,\overline{s})x + \tilde{L}(t,\overline{s}))$ была субоптимальной, необходимо существование функций $M,\ \lambda,\ \gamma$, удовлетворяющих условиям (3.11)-(3.14), и функций $m,\ K$, удовлетворяющих условиям (3.8)-(3.10), таких, что выполнены соотношения (4.2), в которых значения $\partial\hat{J}/\partial s_j$ вычисляются по формуле

$$\frac{\partial\hat{J}}{\partial s_j}(\overline{s}) =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ \mathrm{tr}\left((P_j')^{\mathrm{T}}(t) \left[\left(E(t)+\Theta(t)\right) P(t) - B^{\mathrm{T}}(t)M(t) - \Pi(t) - S(t) \right] K(t) \right) +$$
$$+ \left(P_j'(t)m(t) + L_j'(t) \right)^{\mathrm{T}} \Big(\left[\left(E(t)+\Theta(t)\right) L(t) - B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) - \Lambda(t) \right] +$$
$$+ \left[\left(E(t)+\Theta(t)\right) P(t) - B^{\mathrm{T}}(t)M(t) - \Pi(t) - S(t) \right] m(t) \Big) \Big\}\, dt, \tag{4.6}$$

где через $(\cdot)_j'$ обозначена производная по элементу s_j.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (4.6) выводится аналогично формуле (4.3) с использованием результатов главы 3, в частности, формулы (3.7). ■

Алгоритм поиска субоптимальной стратегии управления.

Ш а г 1. Произвольным образом или из дополнительных соображений задать $\theta > 0$ – шаг градиентного метода, $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ – требуемые максимальные погрешности приближения, порядок используемых полиномов, учесть информационные ограничения в задаче, задать $s^{(0)}$ – начальную точку приближения, и положить номер итерации $k = 0$, количество успешных итераций $i = 0$.

Ш а г 2. Решить (численно) задачи Коши сперва в прямом, а затем и в обратном времени для системы уравнений (3.8), (3.9), (3.11)-(3.13) с условиями (3.10), (3.14), используя $P(t) = \tilde{P}(t, s^{(k)})$, $L(t) = \tilde{L}(t, s^{(k)})$.

Ш а г 3. Вычислить значение критерия $J^{(k)}$ по формуле (2.8). Если $k = 0$, перейти к шагу 5. В противном случае проверить выполнение условия $J^{(k)} < J^{(k-1)}$: если условие выполнено, увеличить i на единицу и перейти к шагу 4, иначе положить $i = 0$, $s^{(k)} = s^{(k-1)}$, уменьшить θ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 6.

Ш а г 4. Если $i = 2$, увеличить θ вдвое, положить $i = 0$.

Ш а г 5. Для всех $j = \overline{1, N}$ вычислить $\partial\hat{J}/\partial s_j$ по формуле (4.6).

Ш а г 6. Вычислить величину $||\nabla I||$ по формуле (4.4) и проверить выполнение условий $||\nabla I|| < \varepsilon_1$, $\theta < \varepsilon_2$: если любое из условий выполнено, искомое значение $\overline{s}$ положить равным $s^{(k)}$, $u(t, x) = -(\tilde{P}(t, \overline{s})x + \tilde{L}(t, \overline{s}))$ и закончить расчет, иначе вычислить $s^{(k+1)}$ по формуле (4.5) и перейти к шагу 7.

Ш а г 7. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

Разработанный в этом разделе численный метод синтеза субоптимальных стратегий управления с информационными ограничениями применяется в задаче управления двухзвенным механическим манипулятором (раздел 5.1).

4.4. Результаты

Сформулировано понятие субоптимального управления квазилинейной стохастической системой и получены следующие результаты:

1) сконструированы необходимые условия субоптимальности и разработан численный метод поиска субоптимального управления в задаче оптимизации квазилинейной стохастической системы, нелинейной по управлению;

2) сконструированы необходимые условия субоптимальности и разработан численный метод поиска субоптимальной стратегии управления в задаче оптимизации квазилинейной стохастической системы с информационными ограничениями.

Результаты главы частично опубликованы в работе [66].

5. Решение задач оптимизации механических систем

Пятая глава диссертации посвящена описанию комплекса программ, разработанного в процессе диссертационного исследования, и решению ряда прикладных задач оптимизации процессов управления.

Раздел 5.1 содержит общие сведения о компьютерной программе, решающей численные задачи поиска оптимального и субоптимального управления квазилинейными системами с информационными ограничениями и нелинейными по управлению системами, а также её функциональное назначение, основные характеристики и логическую структуру. В последующих разделах приведены примеры использования данного программного обеспечения в практических приложениях.

В § 5.2 рассматривается задача оптимального управления двухзвенным механическим манипулятором, а в разделе 5.3 приводится решение задачи оптимальной стабилизации спутника с упругой штангой.

5.1. Комплекс программ для поиска управления

Алгоритмы, описанные в разделах 2.5, 3.4, 4.2, 4.3, требуют на втором шаге численного решения задач Коши для вычисления функций $m(t), K(t), \gamma(t), \lambda(t), M(t)$. В связи с этим возникла необходимость разработки программного обеспечения для реализации каждого из этих алгоритмов.

Несмотря на то, что все алгоритмы обладают общей структурой, имеются существенные различия в записи системы дифференциальных уравнений для квазилинейных систем с нелинейными коэффициентами в главе 2 и квазилинейных систем с информационными ограничениями в главе 3. Точно также имеются существенные различия в процессе формирования и вычисления вектора неизвестных при поиске оптимального управления в главах 2, 3 и субоптимального управления в главе 4. В силу этих причин было разработано четыре обособленных программных модуля для реализации каждого из алгоритмов.

Комплекс программ создавался в основном для проверки и возможной корректировки полученных теоретических результатов. В этом случае помимо необходимости обеспечить удобство ввода начальных данных и вывода полученных числовых значений на анализ, ключевым критерием при выборе инструмента разработки программного обеспечения становится необходимость обеспечить удобство и высокую скорость корректировки исходного кода. Чтобы удовлетворить этим требованиям, для создания программного обеспечения была выбрана система компьютерной математики (СКМ) «Maple». Она содержит широкий набор инструментов для реализации численных процедур высокой сложности и в то же время отличается возможностью активного использования символьных вычислений, которые существенным образом ускоряют процесс записи и редактирования исходного кода.

Функциональное назначение. Комплекс программ предназначен для поиска оптимального и субоптимального управления в квазилинейных системах с информационными ограничениями и нелинейных по управлению системах по заданным начальным данным, моделирования траекторий системы в процессе реализации найденного управления, а также для сохранения полученных числовых данных и построения различных графиков.

Основные характеристики. Разработанное программное обеспечение состоит из 4-х обособленных программных модулей, каждый из которых включает в себя 3 основных блока (блок ввода исходных данных, блок поиска управления, блок моделирования процесса управления и вывода результатов). При этом блоки в каждом из модулей имеют свои отличительные особенности в зависимости от решаемой задачи.

- Модуль поиска оптимального программного управления квазилинейной стохастической системой, нелинейной по управлению – реализует алгоритм численного поиска из раздела 2.5, в качестве исходных данных вводятся матрицы системы (2.1) и критерия (2.2), которые могут нелинейно зависеть от времени t и компонент вектора управления $u_i,\ i = \overline{1,m}$, результатом вычислений является численное приближение функции $u(t)$, удовлетворяющей необходимым условиям оптимальности теоремы 3.

- Модуль синтеза оптимальной стратегии управления квазилинейной стохастической системой с информационными ограничениями – реализует алгоритм численного поиска из раздела 3.4, в качестве исходных данных вводятся матрицы системы (3.1) и критерия (3.2), которые могут нелинейно зависеть от времени t, результатом вычислений является численное приближение коэффициентов $P(t), L(t)$ линейного регулятора, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности теоремы 4.

- Модуль поиска субоптимального программного управления квазилинейной стохастической системой, нелинейной по управлению – реализует алгоритм численного поиска из раздела 4.2, в качестве исходных данных вводятся матрицы системы (2.1) и критерия (2.2), которые могут нелинейно зависеть от времени t и компонент вектора управления $u_i,\ i = \overline{1, m}$, результатом вычислений является численное приближение функции $u(t)$, имеющей вид полинома от t заданной степени и удовлетворяющей необходимым условиям субоптимальности теоремы 5.

- Модуль синтеза субоптимальной стратегии управления квазилинейной стохастической системой с информационными ограничениями – реализует алгоритм численного поиска из раздела 4.3, в качестве исходных данных вводятся матрицы системы (3.1) и критерия (3.2), которые могут нелинейно зависеть от времени t, результатом вычислений является численное приближение коэффициентов $P(t), L(t)$ (имеющих вид полиномов от t заданной степени) линейного регулятора, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности теоремы 6.

Описание логической структуры. Логическая структура является общей для всех программных модулей комплекса с учётом изложенных выше отличий. Такая общность основывается на том, что все алгоритмы, описанные в диссертации, построены по одному и тому же принципу.

На рисунке 9 приведена блок-схема работы программных модулей.

Рисунок 9. Блок-схема

Во всех вычислениях интервал времени проходится с шагом h, заданном в блоке поиска управления перед выполнением расчётов. Интегрирование дифференциальных уравнений осуществляется с помощью отдельно составленной программной реализации метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. При вычислении определённых интегралов в формулах (4.3) и (4.6) используется метод трапеций. Моделирование процесса управления системой осуществляется методом Эйлера.

5.2. Задача оптимального управления двухзвенным манипулятором

Рассмотрим следующую задачу [81]. На горизонтальной плоскости находится двухзвенный механический манипулятор, каждое звено которого представляет собой абсолютно жесткий стержень длиной $l_i, i = 1, 2$ (см. рисунок 10).

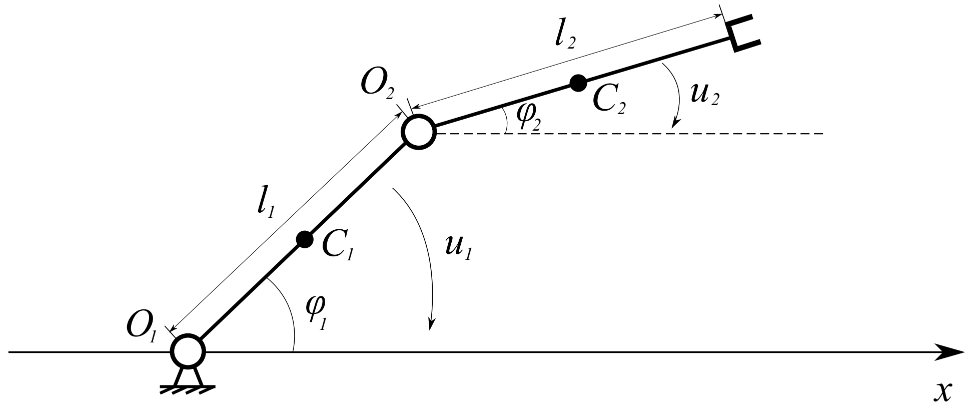

Рисунок 10. Механический манипулятор

Первое звено соединено с неподвижным основанием манипулятора вращательной парой O_1, а со вторым звеном – вращательной парой O_2. Масса схвата манипулятора – m, центр масс i-го звена находится в середине стержня – точке C_i, его масса – m_i, момент инерции i-го звена относительно своего центра масс – $I_i, i = 1, 2$. В соединительных парах могут развиваться управляющие вращательные моменты: соответственно u_1 и u_2. Известно положение $\varphi_1 = \varphi_1^*, \varphi_2 = \varphi_2^*$, в котором требуется стабилизировать манипулятор.

Линеаризованные уравнения движения манипулятора в окрестности

φ_1^*, φ_2^* имеют вид

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}, x_1 = \varphi_1 - \varphi_1^*, x_2 = \varphi_2 - \varphi_2^*, x_3 = \dot{\varphi}_1, x_4 = \dot{\varphi}_2, u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \frac{1}{ab - c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b & -c \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$a = 1/4 \left[l_1^2(m_1 + 4m_2 + 4m) + 4I_1 \right],$$

$$b = 1/4 \left[l_2^2(m_2 + 4m) + 4I_2 \right], \; c = 1/2(2m + m_2) l_1 l_2 \cos(\varphi_1^* - \varphi_2^*).$$

Предполагается, что на движение манипулятора и процесс управления оказывает влияние вектор случайных воздействий, имеющий две компоненты. Будем также считать, что управление осуществляется в условиях информационных ограничений, отражающих невозможность получения полной информации о состоянии. Выбраны следующие характеристики манипулятора: $m_1 = m_2 = m = 30$ кг; $l_1 = l_2 = 1$ м; $I_1 = I_2 = 5/2$ кг·м^2; $\varphi_1^* = \varphi_2^*$.

Цель управления состоит в переводе манипулятора из случайного начального состояния, определяемого математическим ожиданием $m_0 = (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ и матрицей ковариаций $K_0 = diag(0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$ вектора x_0, в состояние, наиболее близкое к точке $x^* = (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. При этом требуется минимизировать затраты на управление. Цель должна быть достигнута за время $T = 5$ с.

Таким образом, задача принимает вид

$$dx(t) = (Ax(t) + Bu(t,x))\,dt + g(u(t,x))dw(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$J = \int\limits_0^5 \int\limits_{R^4} \left(\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}} E u\right) p(t,x)dxdt + \int\limits_{R^4} \left(\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}} Q\, x\right) p(5,x)dx \to \min,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \frac{1}{155}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 8 & -9 \\ -9 & 14 \end{pmatrix},$$

$$g(u) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.25u_1 & 0.15u_2 \\ 0.15u_1 & 0.25u_2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Полученная задача представляет собой задачу оптимизации обыкновенной квазилинейной стохастической системы при неполной информации о состоянии, изучаемой в главе 3 и разделе 4.3. Для синтеза стратегии управления простого вида воспользуемся постоянными по времени матрицами $P(t) \equiv \tilde{P}, L(t) \equiv \tilde{L}$ и предложенным в разделе 4.3 алгоритмом поиска субоптимальной стратегии управления с информационными ограничениями вида $u(t,x) = -(\tilde{P}x + \tilde{L})$. Результаты вычислений представлены в таблице 5. Запись вида $u_2(t, x_2, x_3)$ определяет информационные ограничения на компоненту вектора управления u_2 и означает, что u_2 зависит от x_2, x_3, но не зависит от x_1, x_4.

Таблица 5. Результаты решения задачи (субоптимальный линейный регулятор с постоянными по времени коэффициентами)

Номер варианта	Информационные ограничения	J	$\|\|\nabla I\|\|$	Количество итераций
1	$u_1(t);\ u_2(t)$	87.11	0.025	7
2	$u_1(t);\ u_2(t, x_2, x_3)$	77.59	0.14	15
3	$u_1(t, x_1, x_2, x_4);\ u_2(t)$	79.88	0.295	20
4	$u_1(t, x_2, x_4);$ $u_2(t, x_1, x_2, x_4)$	63.81	0.768	57
5	$u_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4);$ $u_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$	53.97	0.99	69

Пусть теперь точно известно начальное состояние $x_0 = (0.6, -0.3, -0.095, 0.04)^{\mathrm{T}}$, тогда, применяя найденные для разных случаев информированности субоптимальные стратегии управления, получим следующие результаты моделирования процесса управления (см. рис. 11-16).

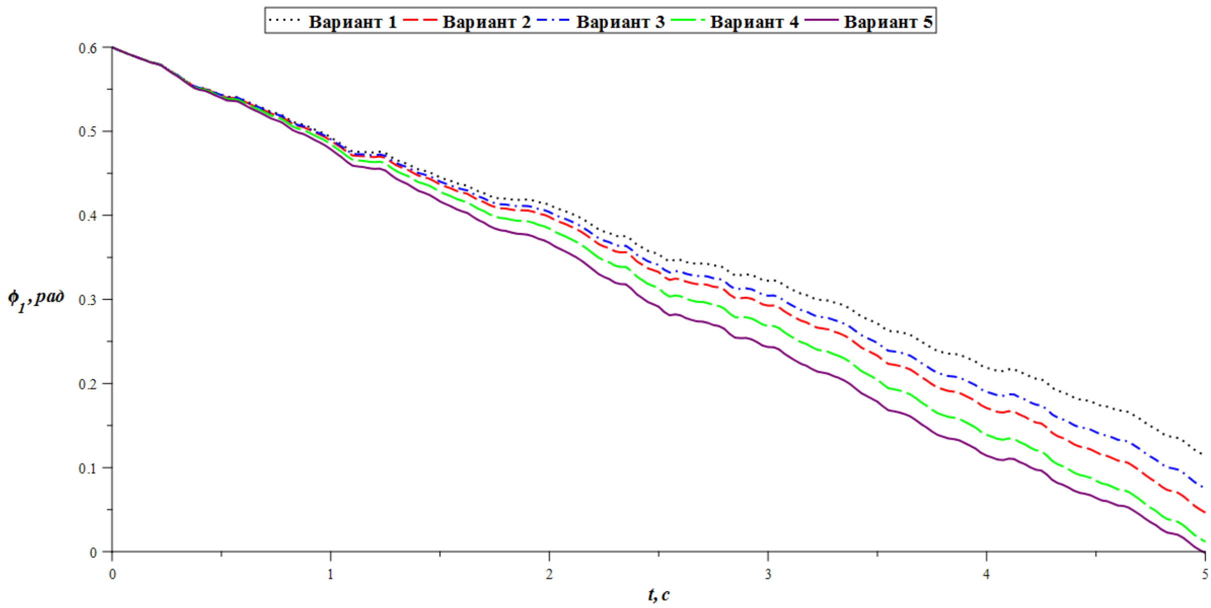

Рисунок 11. Графики $\varphi_1(t)$

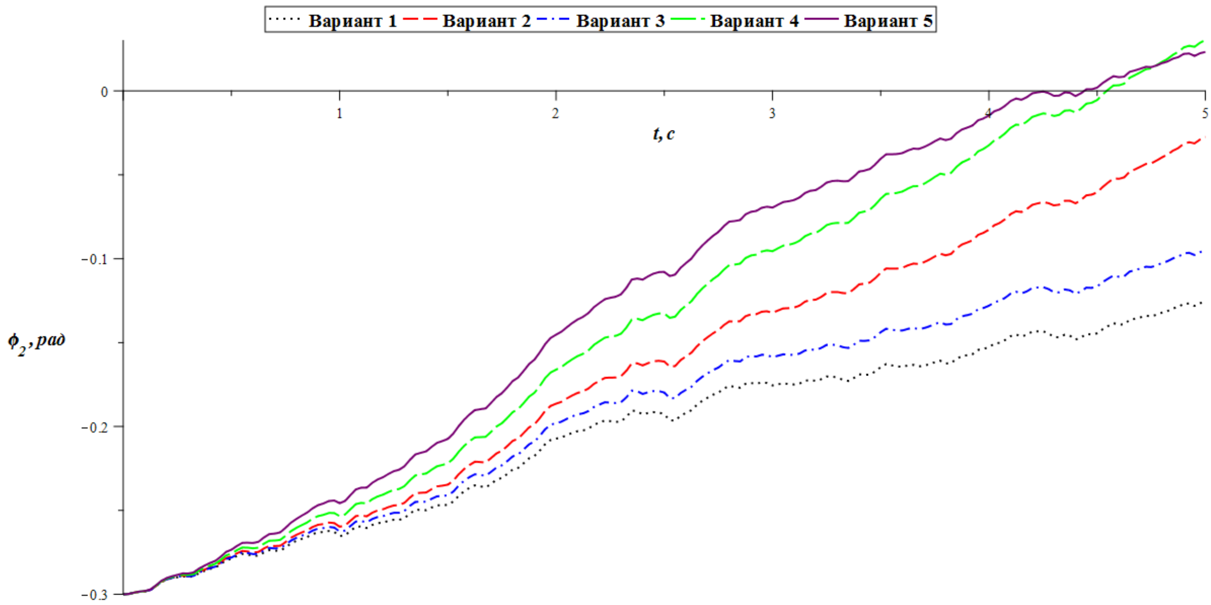

Рисунок 12. Графики $\varphi_2(t)$

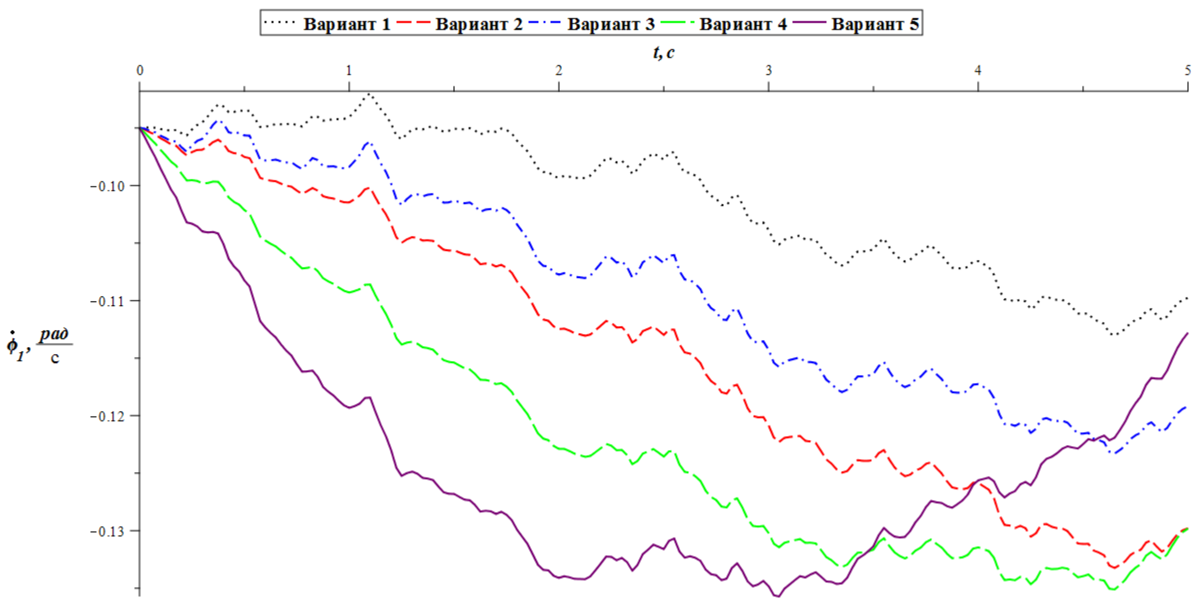

Рисунок 13. Графики $\dot{\varphi}_1(t)$

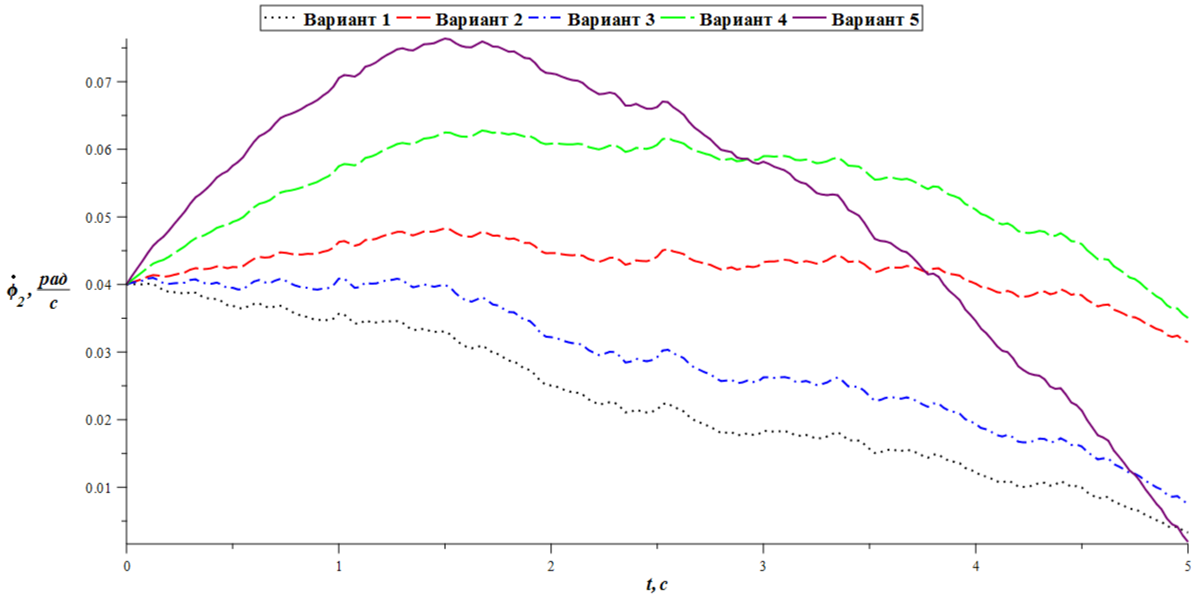

Рисунок 14. Графики $\dot{\varphi}_2(t)$

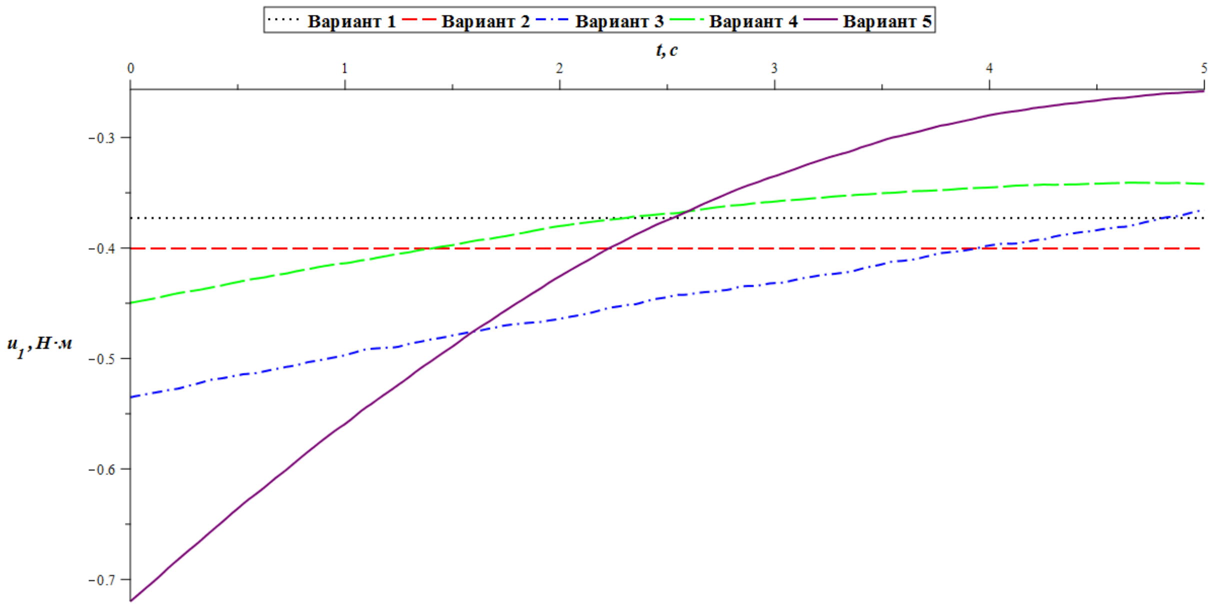

Рисунок 15. Графики $u_1(t, x(t))$

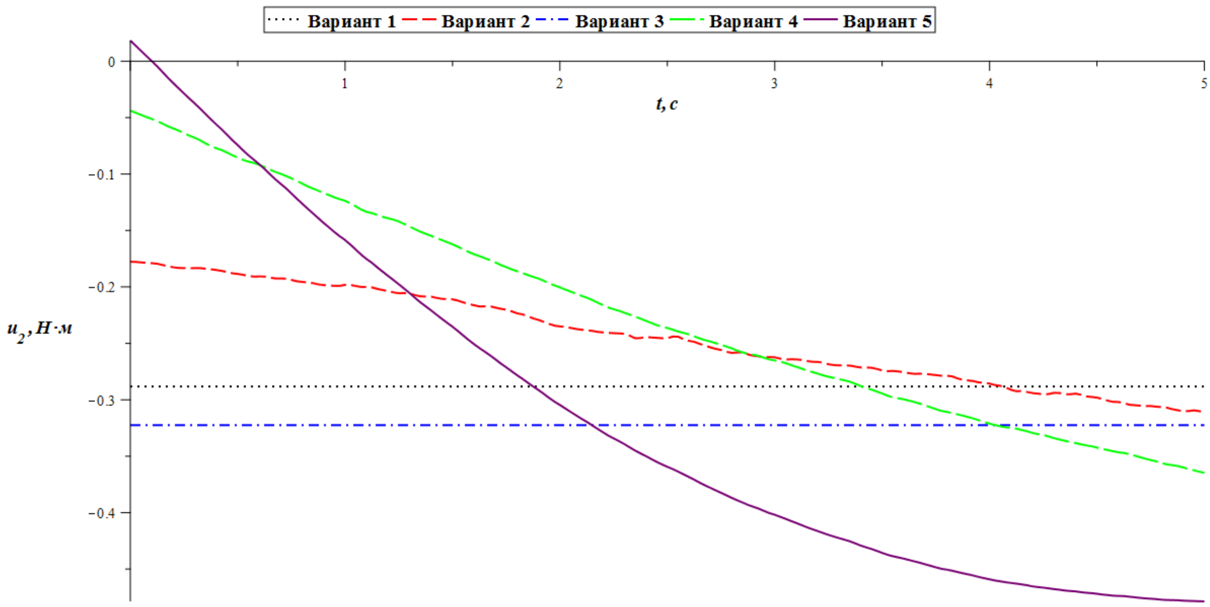

Рисунок 16. Графики $u_2(t, x(t))$

На манипулятор действуют небольшие случайные возмущения, управление реализуется со случайными ошибками. На графиках видно, что с помощью достаточно малых вращательных моментов можно получить незначительные отклонения звеньев манипулятора от требуемого положения в конечный момент времени. Это вполне соответствует целям управления.

Для определения точности приближения синтезированных субоптимальных стратегий управления к оптимальным сравним полученные результаты с результатами, найденными при использовании численного метода раздела 3.4, построив относительную погрешность их приближения в смысле функционала J (см. таблицу 6).

Таблица 6. Сравнение оптимальных и субоптимальных стратегий

№	Информационные ограничения	$J_{\text{опт}}$	$J_{\text{субопт}}$	Относительная погрешность, %
1	$u_1(t)$; $u_2(t)$	86.14	87.11	1.1
2	$u_1(t)$; $u_2(t, x_2, x_3)$	76.59	77.59	1.3
3	$u_1(t, x_1, x_2, x_4)$; $u_2(t)$	78.39	79.88	1.9
4	$u_1(t, x_2, x_4)$; $u_2(t, x_1, x_2, x_4)$	62.66	63.81	1.8
5	$u_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$; $u_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$	52.98	53.97	1.9

Проведём также сравнение результатов моделирования процесса управления при известном начальном состоянии $x_0 = (0.6, -0.3, -0.095, 0.04)^{\text{T}}$ для одного из вариантов информационных ограничений (вариант №3: $u_1 = u_1(t, x_1, x_2, x_4)$; $u_2 = u_2(t)$) (см. рис. 17-22).

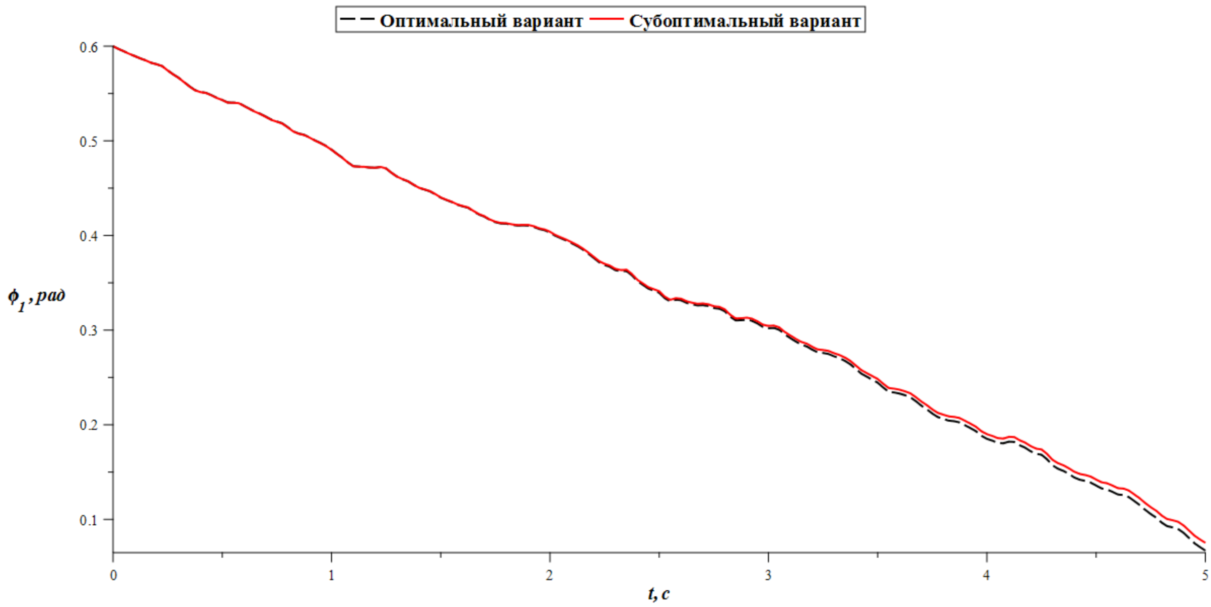

Рисунок 17. Графики $\varphi_1(t)$

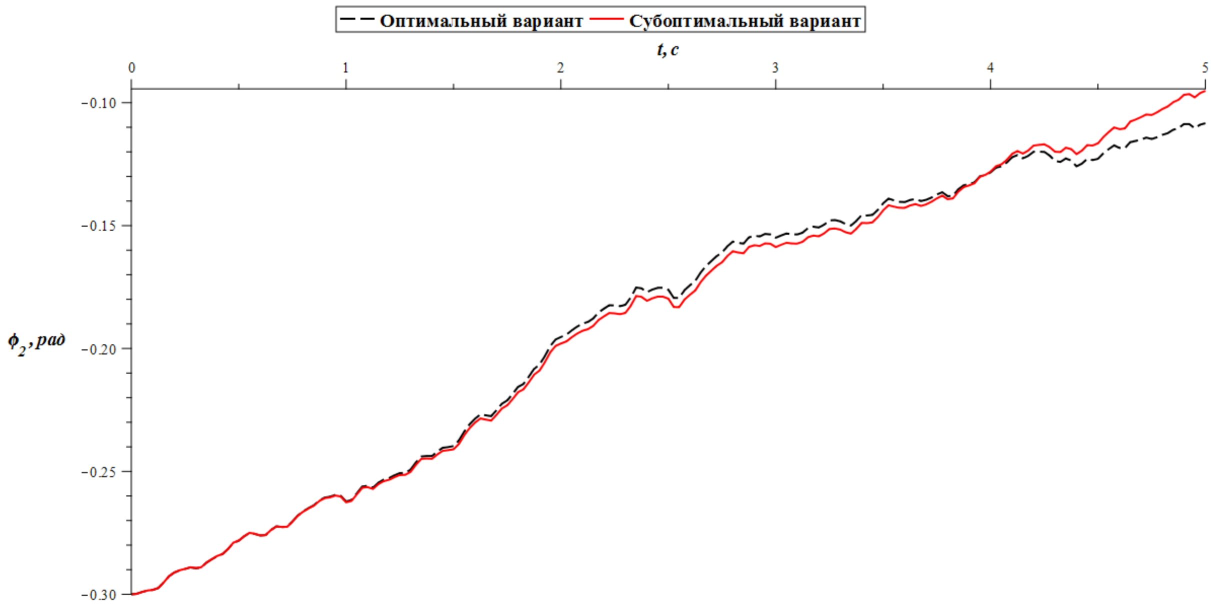

Рисунок 18. Графики $\varphi_2(t)$

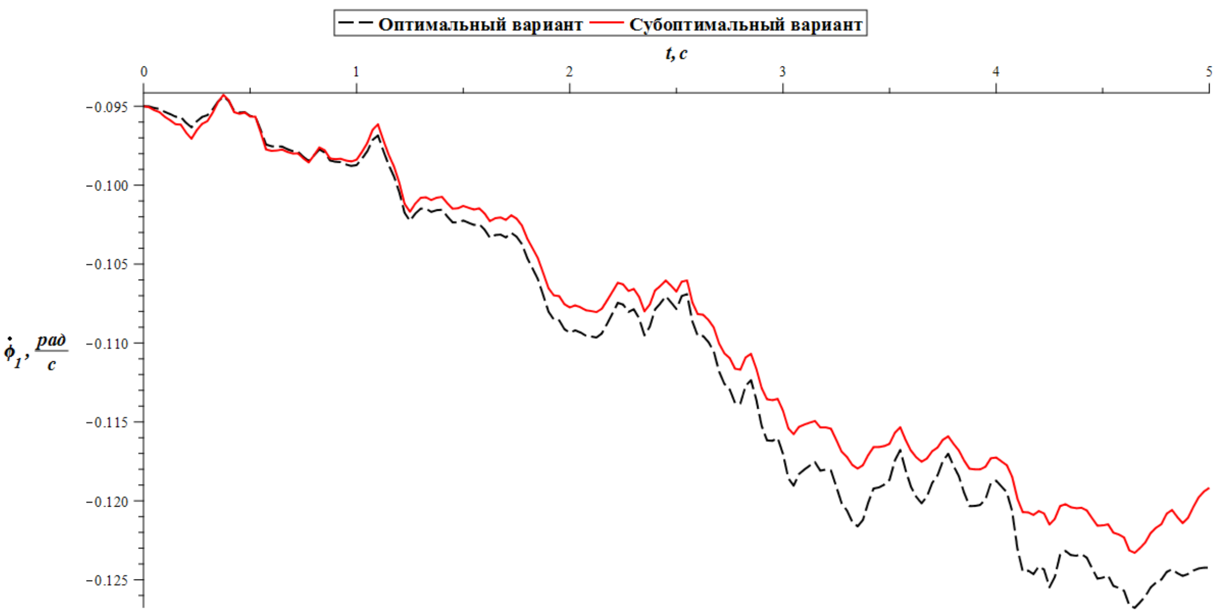

Рисунок 19. Графики $\dot{\varphi}_1(t)$

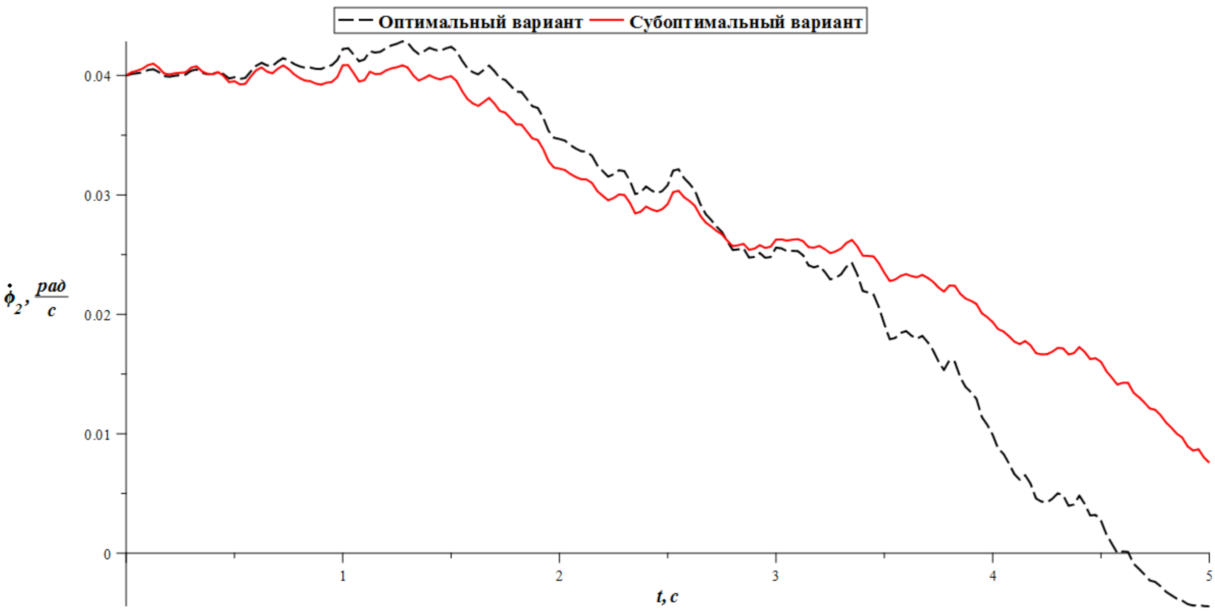

Рисунок 20. Графики $\dot{\varphi}_2(t)$

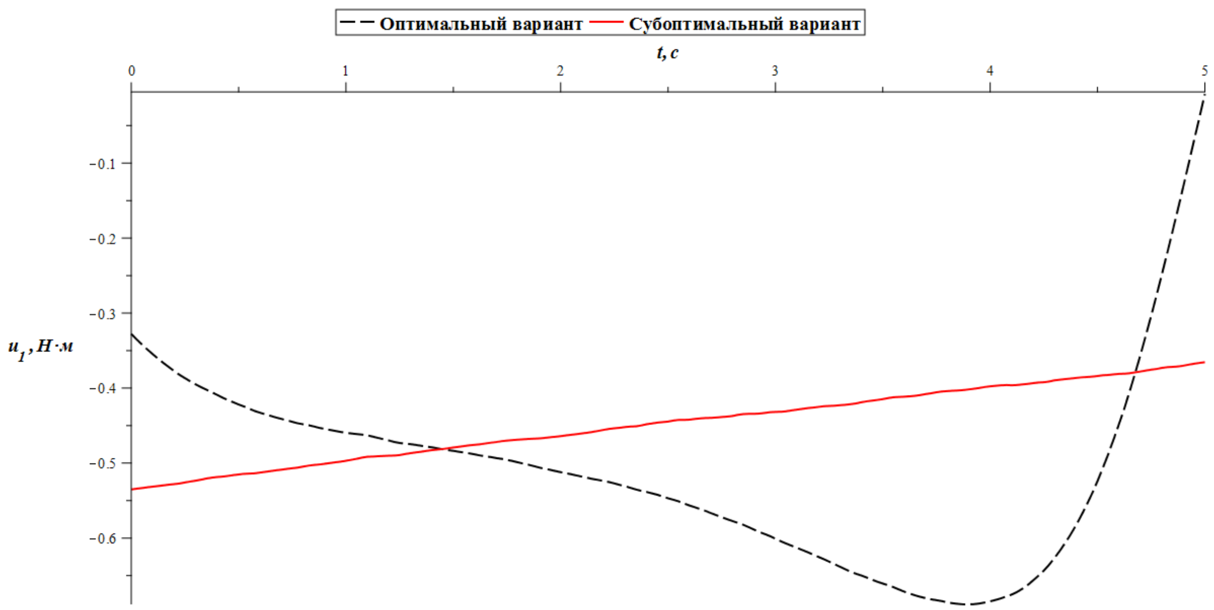

Рисунок 21. Графики $u_1(t)$

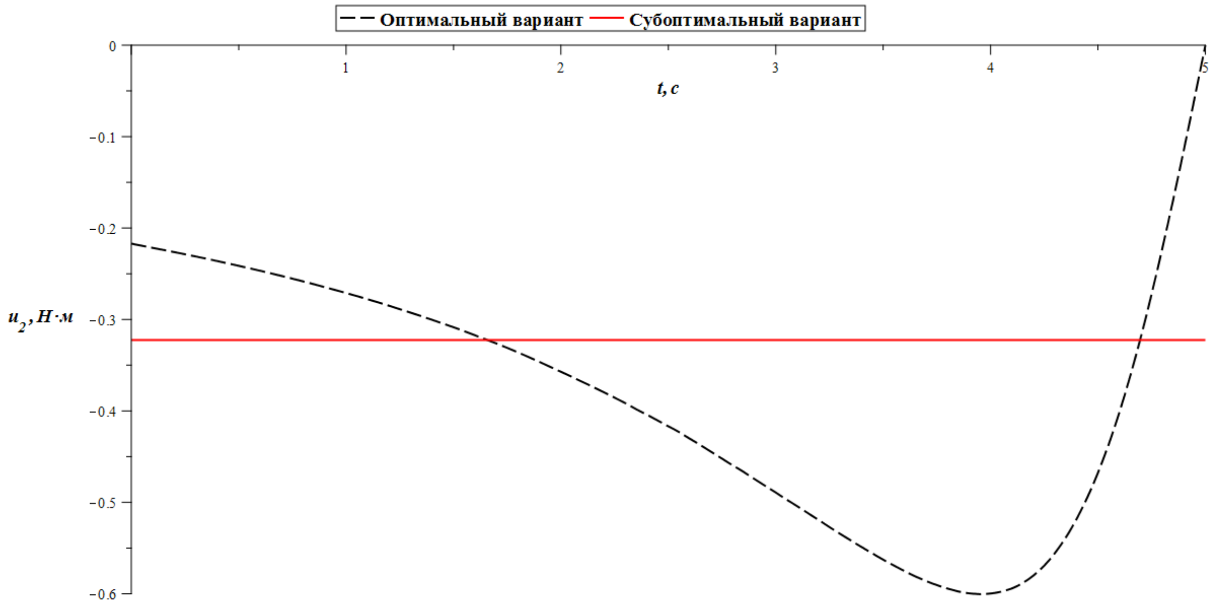

Рисунок 22. Графики $u_2(t)$

Как видно из графиков, несмотря на существенное упрощение субоптимальных стратегий управления в сравнении с оптимальными, в некоторых случаях удаётся получить качественно неплохие результаты уже при использовании постоянных по времени функций (полиномов нулевой степени). Применение полиномов более высоких степеней позволяет эти результаты улучшить.

5.3. Задача стабилизации спутника с упругой штангой

Рассмотрим плоское движение абсолютно жесткого спутника [82] (рис. 23) с моментом инерции J_c и массой m_c под действием возмущающего момента L. В точке O на расстоянии b от центра масс C спутника жестко закреплено начало прямолинейного однородного стержня длиной l с погонной плотностью ρ, модулем Юнга E, коэффициентом внутреннего трения по Фойгту h и моментом инерции поперечного сечения J. На конце стержня в точке O_1 зафиксировано абсолютно жесткое тело C_1 с массой m_1 и моментом инерции J_1.

Система координат Oyz связана со спутником; α – угол отклонения спутника от оси z', направленной к центру масс планеты, т.е. ошибка системы стабилизации; $\tilde{u}$ – управляющий момент газореактивной системы; t – время; $\ddot{y}_c$ – ускорение возмущенного движения центра масс C спутника; $y(z,t)$ – прогиб стержня; $y_1(t) = y(l,t)$ – прогиб конца стержня; α_1 – угол поворота тела C_1 относительно оси Oz; N_0, L_0 и N_1, L_1 – соответственно сила и момент сил реакции стержня в точках O и O_1. Точка обозначает производную по времени.

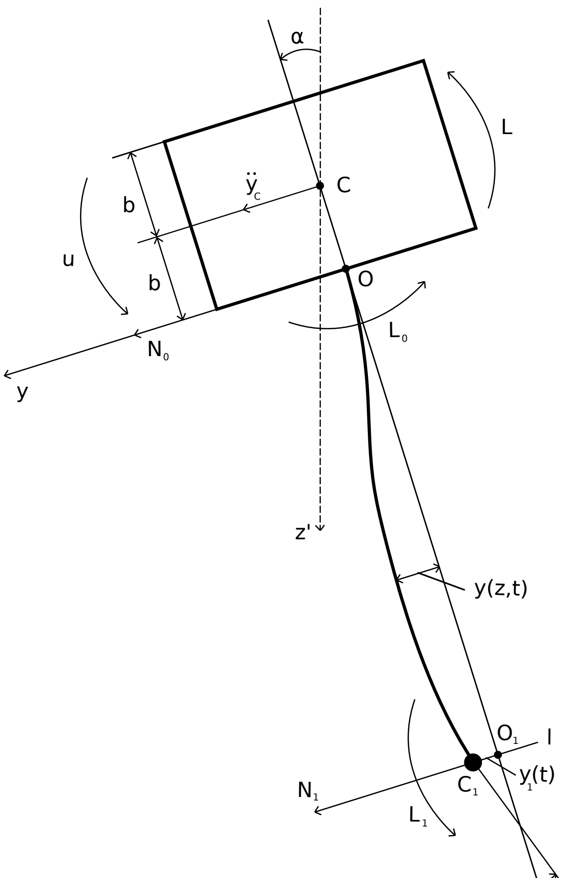

Рис. 23. Спутник с упругой штангой

Считается, что величина $EJ/\rho \gg 1$ м^4/с^2, а величина прогиба $y(z,t)$ по всей длине стержня изменяется достаточно медленно. Величины $\alpha(t), \ddot{y}_c(t), y(z,t), \alpha_1(t)$ считаются малыми.

Возмущающий момент L характеризуется соотношением [83]

$$L = -\Omega\alpha,$$

где коэффициент Ω определяется угловой скоростью обращения по орбите и моментами инерции спутника относительно оси Oz и оси, проходящей через C параллельно Oy.

При сделанных предположениях уравнения движения спутника имеют вид [84]

$$J_c\,\ddot{\alpha} = \tilde{u} - \Omega\alpha - 2EJ\left[\frac{1}{l}(1+\frac{3b}{l})(\alpha_1 + h\dot{\alpha}_1) + \frac{3}{l^2}(1+\frac{2b}{l})(y_1 + h\dot{y}_1)\right],$$

$$m_c\ddot{y}_c = 6EJ\left[\frac{1}{l^2}(\alpha_1 + h\dot{\alpha}_1) + \frac{2}{l^3}(y_1 + h\dot{y}_1)\right],$$

$$J_1\,\ddot{\alpha}_1 = -J_1\,\ddot{\alpha} - 2EJ\left[\frac{2}{l}(\alpha_1 + h\dot{\alpha}_1) + \frac{3}{l^2}(y_1 + h\dot{y}_1)\right],$$

$$m_1\ddot{y}_1 = -m_1\ddot{y}_c + m_1(b+l)\ddot{\alpha} - 6EJ\left[\frac{1}{l^2}(\alpha_1 + h\dot{\alpha}_1) + \frac{2}{l^3}(y_1 + h\dot{y}_1)\right].$$

Величина $\tilde{u}$, играющая роль управления, пропорциональна тяге газореактивного двигателя. Цель управления заключается в успокоении упругих колебаний, возникающих в стержне, и стабилизации спутника относительно оси z' за заданное время T.

Нетрудно видеть, что данная система уравнений распадается на две подсистемы. Одна подсистема представляется 6-ю линейными уравнениями первого порядка с вектором неизвестных $x = (x_1, .., x_6) =$

$(\alpha, \omega_\alpha, \alpha_1, \omega_{\alpha_1}, y_1, V_{y_1})$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = \omega_\alpha, \\
&\dot{\omega}_\alpha = \tfrac{1}{J_c}\tilde{u} - \tfrac{\Omega}{J_c}\alpha - 2\tfrac{EJ}{J_c}\left[\tfrac{1}{l}(1+\tfrac{3b}{l})(\alpha_1 + h\omega_{\alpha_1}) + \tfrac{3}{l^2}(1+\tfrac{2b}{l})(y_1 + hV_{y_1})\right], \\
&\dot{\alpha}_1 = \omega_{\alpha_1}, \\
&\dot{\omega}_{\alpha_1} = -\tfrac{1}{J_c}\tilde{u} + \tfrac{\Omega}{J_c}\alpha + 2\tfrac{EJ}{J_c}\Big[\tfrac{1}{l}(1+\tfrac{3b}{l} - 2\tfrac{J_c}{J_1})(\alpha_1 + h\omega_{\alpha_1}) + \\
&+ \tfrac{3}{l^2}(1+\tfrac{2b}{l} - \tfrac{J_c}{J_1})(y_1 + hV_{y_1})\Big], \\
&\dot{y}_1 = V_{y_1}, \\
&\dot{V}_{y_1} = \tfrac{b+l}{J_c}\tilde{u} - \tfrac{(b+l)\Omega}{J_c}\alpha - 2\tfrac{EJ}{m_1}\Big[\tfrac{1}{l}\left(\tfrac{3m_1}{m_c l} + \tfrac{(b+l)m_1}{J_c}(1+\tfrac{3b}{l}) + \tfrac{3}{l}\right)(\alpha_1 + h\omega_{\alpha_1}) + \\
&+ \tfrac{3}{l^2}(\tfrac{2m_1}{m_c l} + \tfrac{(b+l)m_1}{J_c}(1+\tfrac{2b}{l}) + \tfrac{2}{l})(y_1 + hV_{y_1})\Big],
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

а другая имеет вид

$$\ddot{y}_c = 6\frac{EJ}{m_c}\left[\frac{1}{l^2}(\alpha_1 + h\omega_{\alpha_1}) + \frac{2}{l^3}(y_1 + hV_{y_1})\right].$$

Изменение величины ускорения $\ddot{y}_c$ не влияет на достижение цели управления, поэтому вторая подсистема далее не рассматривается. Таким образом, оставшиеся переменные (угол α отклонения спутника от оси z', скорость его изменения ω_α, угол α_1 поворота тела на конце стержня, скорость его изменения ω_{α_1}, величина y_1 отклонения тела от оси z и её скорость изменения V_{y_1}) составляют вектор x состояния системы. Следует также отметить, что в [84] первая подсистема записана с ошибкой. Правильная запись имеет вид (5.1).

Дополнительно предполагается, что управление реализуется со случайными ошибками [85] так, что $\tilde{u}(t) = u(t)\cdot(1+k_\xi dw(t)/dt)$, где величина u характеризует точные управляющие воздействия, а производная $dw(t)/dt$, понимаемая в обобщённом смысле (белый шум), вместе с коэффициентом

k_ξ характеризует флуктуации величины тяги двигателя. Начальные условия определяются случайным вектором x_0 с математическим ожиданием m_0 и ковариационной матрицей K_0.

Исходные характеристики взяты равными: $J_c = 0.7$ кг·м^2, $m_c = 35$ кг, $b = 0.1$ м, $\Omega = 0.1$ Н·м, $l = 1$ м, $h = 0.01$ с, $\rho = 0.645$ кг/м, $E = 2.8 \cdot 10^{10}$ Па, $J = 3.5 \cdot 10^{-9}$ м^4, $m_1 = 3$ кг, $J_1 = 0.07$ кг·м^2, $k_\xi = 0.25$. Время стабилизации $T = 3$ с.

Таким образом, управляемая динамическая система принимает вид

$$dx(t) = (Ax(t) + Bu(t, x(t)))\,dt + Fu(t, x(t))dw(t),$$

$$m(0) = m_0,\ K(0) = K_0,\ t \in [0, 3],$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.143 & 0 & -364 & -3.64 & -1008 & -10.08 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.143 & 0 & -5236 & -52.36 & -7392 & -73.92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.157 & 0 & -613.2 & -6.132 & -1534.4 & -15.344 \end{pmatrix},$$

$B = (0,\ 1.429,\ 0,\ -1.429,\ 0,\ 1.571)^{\mathrm{T}}$, $F = (0,\ 0.357,\ 0,\ -0.357,\ 0,\ 0.393)^{\mathrm{T}}$, $m_0 = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$, $K_0 = diag(0.0001,\ 0.05,\ 0.00625,\ 2.5,\ 0.00017,\ 0.067)$.

Требуется минимизировать квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2} \int\limits_0^3 \int\limits_{R^6} \left(x^{\mathrm{T}} D x + u^{\mathrm{T}} E u \right) p(t, x) dx dt,$$

$D = diag(1000,\ 2,\ 120,\ 0.4,\ 800,\ 15)$, $E = 0.05$.

Полученная задача вновь относится к классу задач, рассматриваемых в главе 3 и разделе 4.3. На этот раз построим оптимальную стратегию управления для данной задачи при использовании предложенного в разделе 3.4 численного метода градиентного типа и уточним точность приближения, сравнив её с оптимальной стратегией, найденной путём непосредственного использования соотношений, которые записаны в разделе 3.3 в виде необходимых условий оптимальности. Соответствующие результаты получены в работе [84], где эти соотношения записаны в форме достаточных локальных условий. Результаты сравнения представлены в таблице 7.

Таблица 7. Результаты сравнения

№	Информационные ограничения	$J_{\text{НУ}}$	$J_{\text{ЧМ}}$
1	$u(t)$	375.877	375.877
2	$u(t,\ x_1,\ x_3,\ x_5)$	4.325	4.646
3	$u(t,\ x_2,\ x_4,\ x_6)$	3.232	3.331
4	$u(t,\ x_1, ...,\ x_6)$	1.357	1.447

Отметим, что матричная функция L в оптимальной стратегии для данной задачи тождественно равна нулю, так как по условию $C(t) \equiv m_0 = 0$. Поэтому при полном отсутствии информации о состоянии управляющие воздействия не производятся, и движение спутника совпадает со свободным движением.

На графиках (рис. 24 – 27) представлены результаты моделирования процесса управления для заданного начального положения $x_0 = (-0.006,\ -0.139,\ 0.019,\ -1.305,\ -0.004,\ 0.206)^{\text{T}}$.

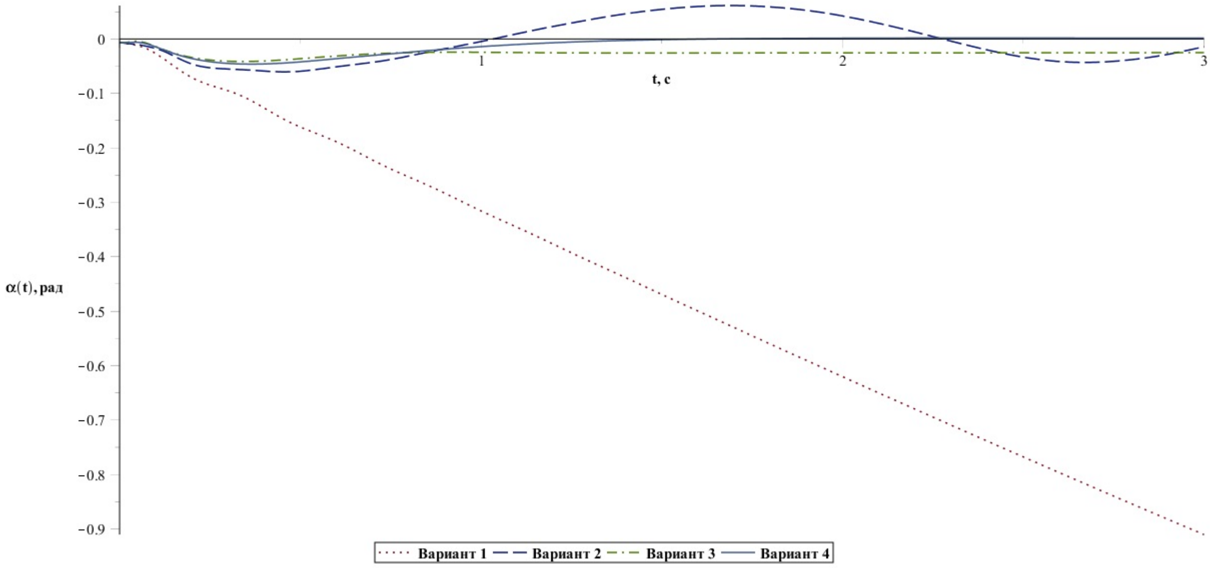

Рис. 24. Графики $\alpha(t)$

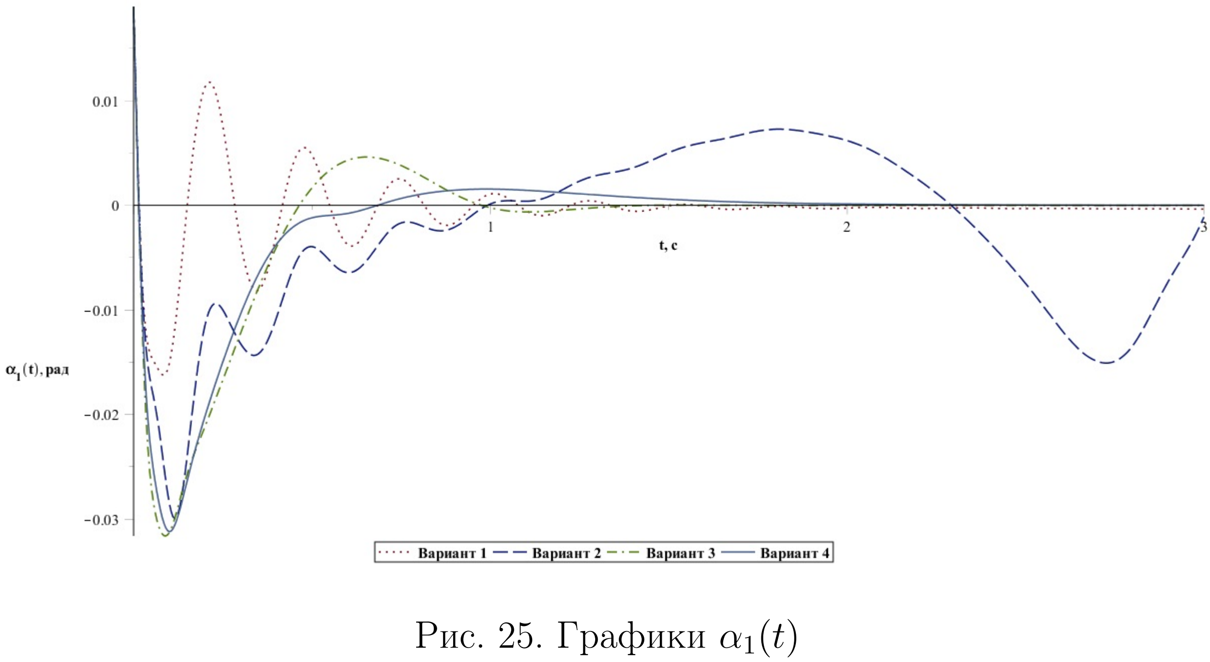

Рис. 25. Графики $\alpha_1(t)$

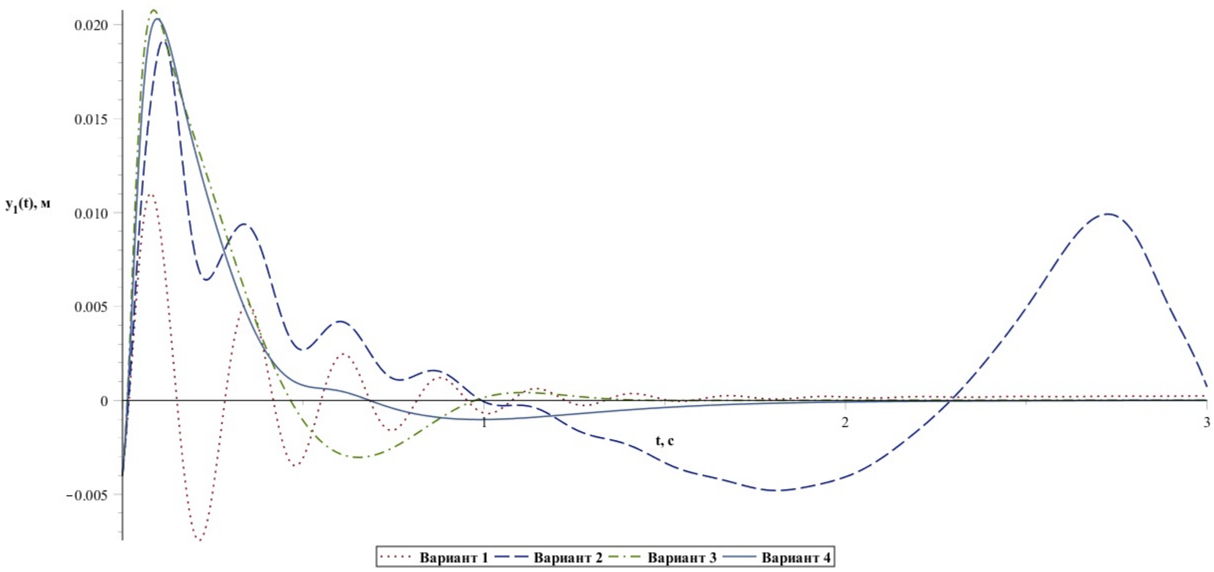

Рис. 26. Графики $y_1(t)$

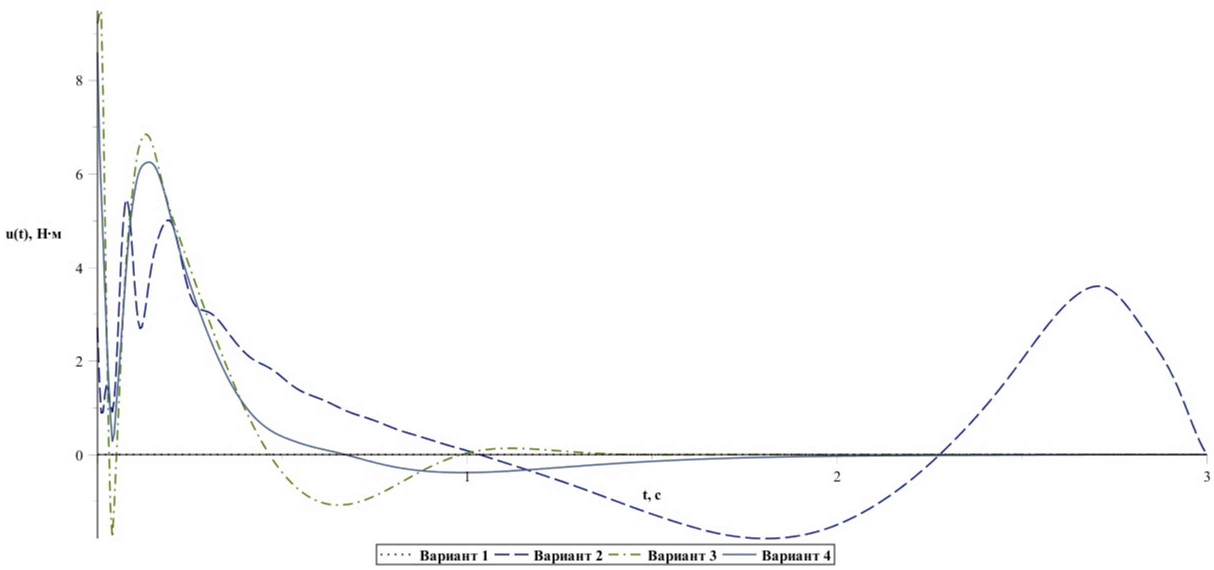

Рис. 27. Графики $u(t)$

5.4. Результаты

Полученные результаты диссертационного исследования использованы в данной главе для решения некоторых прикладных задач оптимального управления в области авиационной и ракетно-космической техники. А именно, при помощи необходимых условий оптимальности и субоптимальности, а также численных методов синтеза управляющих воздействий построены оптимальные и близкие к оптимальным решения задач стабилизации двухзвенного механического манипулятора и спутника с упругой штангой.

Результаты главы опубликованы в работах [66, 67, 70, 73, 74, 79].

Заключение

В диссертационной работе предложены и обоснованы методы решения задач синтеза оптимального и субоптимального управления квазилинейными динамическими стохастическими системами, что выразилось в следующих результатах:

1) исследован класс математических моделей линейных по состоянию и управлению динамических стохастических систем диффузионного типа с мультипликативными возмущениями, в которых управление имеет вид линейного регулятора с неполной обратной связью (класс обыкновенных квазилинейных систем с информационными ограничениями);

2) формализован и исследован новый класс математических моделей линейных по состоянию динамических стохастических систем диффузионного типа, коэффициенты которых могут быть нелинейными функциями программного управления (класс квазилинейных систем, нелинейных по управлению);

3) получены необходимые условия оптимальности в задачах оптимизации:

   - стратегий управления обыкновенными квазилинейными системами с информационными ограничениями;

- программного управления квазилинейными системами, нелинейными по управлению;

4) получены необходимые условия субоптимальности (оптимальности в заранее суженном классе управлений) в данных задачах;

5) разработаны численные методы поиска оптимального и субоптимального управления, основанные на процедуре градиентного спуска в функциональном пространстве;

6) разработан комплекс программ, реализующих эти численные методы;

7) проведено решение задач оптимального управления и стабилизации двухзвенного механического манипулятора и спутника с упругой штангой при помощи полученных результатов.

Литература

1. *Хрусталёв М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности о состоянии I. Достаточные условия равновесия // Известия РАН. Теория и системы управления, 1995, № 6, с. 194-208

2. *Хрусталёв М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности о состоянии II. Метод Лагранжа // Известия РАН. Теория и системы управления, 1996, № 1, с. 72-79

3. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. - М.: Наука, 1973. - 446 с.

4. *Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М.* Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии // Известия РАН. Теория и системы управления, 2006, № 5, с. 43-51

5. *Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М.* Численные методы синтеза оптимального управления для стохастических динамических систем диффузионного типа // Известия РАН. Теория и системы управления, 2007, № 3, с. 27-38

6. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976

7. *Красовский Н.Н., Лидский Э.А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Постановка задачи, метод решения // АиТ. 1961. Т. 22. № 9. С. 1145Ц1150

8. *Красовский Н.Н., Лидский Э.А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Уравнения для оптимального управления. Приближенный метод решения // АиТ. 1961. Т. 22. № 10. С. 1273Ц1278

9. *Красовский Н.Н., Лидский Э.А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Оптимальное регулирование в линейных системах. Минимум среднеквадратичной ошибки // АиТ. 1961. Т. 22. № 11. С. 1425Ц1431

10. *Куржанский А.Б.* Об аналитическом конструировании регулятора в системе с помехой, зависящей от управления // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 2. С. 204Ц213

11. *Вонэм В.М.* Стохастические дифференциальные уравнения в теории управления // Математика: Сб. переводов. 1973. Т. 17. № 5. С. 82Ц114

12. *Шайкин М.Е.* Стохастическое H_2/H_∞-управление динамической системой с внутренними шумами, мультипликативными по состоянию, управлению и внешнему возмущению // Автоматика и телемеханика, 2013, № 3, с. 136-155

13. *McLane P.J.* Linear optimal stochastic control using instantaneous output feedback // Int. J. Control. 1971. V. 13. № 2. P. 383-396

14. *Carravetta F., Mavelli G.* Linear output-feedback control of stochastic linear systems with state- and control-dependent disturbances // Proc. 44 IEEE Conf. Decision Control, Eur. Control Conf. 2005 Seville, Spain, December 12-15. 2005. P. 554-559

15. *Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // АиТ. 2005. № 4. С. 84Ц97

16. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Физматгиз, 1961. - 392 с.

17. *Беллман Р.* Динамическое программирование. - М.: Мир, 1974. - 207 с.

18. *Ahmed N.U., Teo K.L.* Existence theorem on optimal control of partially observable diffusions // SIAM J. Contr. - 1974. - № 12(3). - p. 351 - 374

19. *Bensoussan A., J.H. van Schuppen* Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential-of-integral perfomance index // SIAM J. Contr. - 1985. - v. 23. - N 4.

20. *Christopeit N.* Optimal stochastic control with special information patterns // SIAM J. Contr. - 1980. 18(5). - p. 559 - 575

21. *Davis M.H.A., Varaiya P.* Dynamic programming conditions for partially observable stochastic systems // SIAM J. Contr. - 1973. - p. 226 - 221

22. *Yavin Y.* Computation of suboptimal randomized strategies for steering the random motion of a point under partial observation // J. Optim. Th. & Appl. - 1984. - № 44(1). - p. 159 - 179.

23. *Fleming W.H., Pardoux E.* Optimal control of partially observable diffusions // SIAM J. Control. - 1982, v. 20, - № 2. - p. 261 - 285

24. *Fleming W.H.* Optimal control of partially observable diffusions // SIAM J. Control. - 1968, v. 6, - № 2. - p. 194 - 214

25. *Семёнов В.В.* Синтез алгоритмов управления нелинейными системами при случайных воздействиях с ограниченным составом точных измерений // Аналитические методы синтеза регуляторов: Тем. сб. науч. тр. / Саратов: СПИ. - 1978. Вып. 3. - с. 3 - 20

26. *Пантелеев А.В.* Синтез оптимального управления стохастическими системами с неполной непрерывной информацией // Математические задачи управления движущимися объектами: Тем. сб. науч. тр. / МАИ, М., - 1987. - с. 16 - 22

27. *Пантелеев А.В., Семёнов В.В.* Оптимальное управление вероятностными системами по неполному вектору состояния // Автоматика и телемеханика. 1984. - № 1. - с. 91 - 100

28. *Бортаковский А.С.* Проекционно - оптимальное управление детерминированными системами с неполной обратной связью // Новые задачи оптимизации авиационных систем: Тем. сб. научн. тр. / МАИ, М., - 1989. - с. 4 - 10

29. *Руденко Е.А.* Синтез конечномерного алгоритма управления частично наблюдаемым стохастическим объектом // Задачи стохастического управления: Тем. сб. научн. тр. / МАИ. М. - 1986.

30. *Семёнов В.В., Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С.* Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления. - М.: МАИ, 1993, 312 с.

31. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами: Пер. с англ. / М.: Мир, 1994. - 575 с.

32. *Saberi A., Khalil H.* Decentralized stabilization of a class of nonlinear interconnected systems // Int. J. Control. - 1982. - v. 36, № 5. - p. 803 - 818

33. *Vesely V.* Decentralized control of linear dynamical systems with partial aggregation // Kybernetika. - 1989. - v. 25. № 5. - p. 408 - 418

34. *Chammas A.B.* Decentralized control of discrete - time linear system with incomplete information // Int. J. Contr. - 1982. - № 36(4). - p. 575 - 587

35. *Мисриханов М.Ш.* Аналитический синтез оптимального управления децентрализованными системами. // Современные методы управления многосвязными динамическими системами.: Сборник. Вып. 1 М.: ЭнергоАтомИздат. 2003. с. 615-623

36. *Слепцов С.В., Третьяков В.Е.* Линейно-квадратичная игра с неполной информацией // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. - 1992. - 2. - с. 166-175, 227

37. *Румянцев А.Е.* Достаточные условия существования решения в линейных дифференциальных играх при неполной информации. // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов. Вып. 1. МГУ. М.: Изд-во Фак. вычисл. матем. и кибернет. МГУ, 2005, с. 268-288

38. *Пшеничный Б.Н.* Об одной специальной задаче преследования при неполной информации // Кибернетика и системный анализ - 1995. - № 2. - с. 106-112

39. *Жуковский В.И., Молоствов В.С.* Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации - М.: МНИИПУ, 1990. - 112 с.

40. *Докучаев Н.Г.* Управление диффузией кордесовского типа с неполными наблюдениями в игровой задаче // Дифференц. уравн. - 1996. - 32, № 8. - с. 1051-1062

41. *Чебыкин Л.С.* Условия оптимальности дискретно-непрерывных систем // Оптимальное управление системами с неопределенной информацией: Тем. сб. науч. тр. / Свердловск: УНЦ АН СССР. - 1980. - с. 132 - 140

42. *Пантелеев А.В.* Синтез оптимального управления непрерывными стохастическими системами при неполной дискретной информации // Статистические методы в теории управления ЛА: Тем. сб. науч. тр./ МАИ, М. , 1990. - с. 10 - 19

43. *Panteleyev A.V.* Optimal control of continuous-time deterministic systems with incomplete discrete feedback // J. Optimiz. Theory and Appl. - 1990. - 64, № 3. - c. 557-571

44. *Руденко Е.А.* Достаточные условия оптимальности дискретного конечномерного стохастического управления в условиях неполной информации // Математические задачи оптимизации управления детерминированными и стохастическими системами: Тем. сб. науч. тр. / МАИ, М., 1988. - с. 17 - 25

45. *Дарховский Б.С.* Локально-оптимальная стабилизация при неполной информации // Автомат. и телемех. - 1997. - № 4. - с. 144-154

46. *Гаврина О.М.* Синтез дискретных регуляторов линейных систем при неполной обратной связи // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. - 1993. - № 3. - с. 8-13

47. *Заика Ю.В.* Дискретная стабилизация динамических систем с неполной обратной связью // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. - 1992. - № 3. - с. 24-31

48. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации, М.: Изд-во МАИ, 2012, 160 с.

49. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New results in linear filtering and prediction theory // J. Basic Eng., Trans. ASME, Ser. D, 83, 1961 - p. 95 - 108

50. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. - М.: Изд-во МГУ, 1966.

51. *Пугачёв В.С.* Обобщение теории условно оптимального оценивания и экстраполяции // Докл. АН СССР. - 1982. - т. 262, № 3. - с. 535 - 538

52. *Руденко Е.А.* Оптимальная структура нелинейных фильтров конечного порядка: Препринт / МАИ. М., 1989 - 61 с.

53. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. - М.: Связь, 1976. - 495 с.

54. *Касимов А.М., Балабанов А.В., Попов А.И., Артамонов А.Е.* Автоматизация производства струйных устройств управления // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. с. 9284-9290

55. *Балабанов А.В., Касимов А.М., Артамонов А.Е., Кузичев И.В., Ромакин В.А.* Инструментальные средства компьютерного и физического моделирования для разработки интегральных струйных устройств // Труды 15-ой международной конференции «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта» (CAD/CAM/PDM-2015, Москва), 2015, с. 83-86

56. *Докучаев Н.Г., Якубович В.А.* Принцип максимума для стохастических дифференциальных уравнений с детерминированным управлением // Кибернетика и вычислительная техника, 1982, Вып. 54.

57. *Трушкова Е.А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. с. 151-159

58. *Хрусталёв М.М., Халина А.С.* Условия стабилизируемости и оптимальности квазилинейных стохастических систем при неполной обратной связи на неограниченном интервале времени // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. с. 1126-1134

59. *Хрусталёв М.М., Халина А.С.* Синтез оптимальных регуляторов линейных стохастических систем при неполной информации о состоянии. Необходимые условия и численные методы // Автоматика и телемеханика, 2014, № 11, с. 70-87

60. *Хрусталёв М.М., Онегин Е.Е.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов для квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Программные системы: теория и приложения, 6:2 (2015), с. 29-44

61. *Хрусталёв М.М.* Синтез оптимальных и устойчивых управляемых стохастических систем при неполной информации о состоянии на неограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика. 2011. № 11. с. 174-190

62. *Рыбаков К.А.* Достаточные условия оптимальности в задаче управления системами диффузионно-скачкообразного типа // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. с. 734-744

63. *Рыбаков К.А.* Оптимальное управление стохастическими системами со случайным периодом квантования // Труды МФТИ, 2015, Т.7, №1,

с. 145-165

64. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985, 640 с.

65. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. - М.: Физматлит, 1997. - 287 с.

66. *Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М., Царьков К.А.* Алгоритм поиска субоптимальных стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами диффузионного типа // Известия РАН. Теория и системы управления, 2014, №1, с. 74-86

67. *Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Управление квазилинейными стохастическими системами с неполной информацией на примере механического манипулятора // Труды МАИ, №74, http://www.mai.ru (25.04.2014)

68. *Хрусталев М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Метод Галеркина в задачах оптимизации квазилинейных динамических стохастических систем с информационными ограничениями // Труды МАИ, №66, http://www.mai.ru (27.06.2013)

69. *Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // Автоматика и телемеханика, 2017, № 5

70. *Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Метод оптимизации квазилинейных стохастических систем в приложении к задаче оптимальной стабили-

зации спутника с упругой штангой // Программные системы: теория и приложения, 2015, 6:2(25), с. 3-17

71. *Царьков К.А., Румянцев Д.С.* Стабилизация орбиты искусственного спутника Земли при информационных ограничениях // Тезисы докладов 11-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика - 2012», М.: МАИ, 2012. с. 164-165

72. *Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Алгоритм численного поиска простых квазиоптимальных стратегий управления динамическими стохастическими системами диффузионного типа // Тезисы докладов 18-ой Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС - 2013), Алушта: МАИ, 2013. с. 783-784

73. *Царьков К.А.* Оптимальная стабилизация спутника с гибким стержнем при наличии информационных ограничений и неточной реализации управляющих воздействий // Тезисы докладов 19-ой Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС - 2015), Алушта: МАИ, 2015. с. 672-674

74. *Царьков К.А.* Оптимальное управление спутником с упругой штангой при наличии случайных возмущений и неточной реализации управляющих воздействий // Тезисы докладов 14-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика-2015» (Москва). М.: МАИ, 2015. с. 467-468

75. *Царьков К.А., Румянцев Д.С., Хрусталев М.М.* Необходимые условия оптимальности в задаче оптимизации квазилинейных динамических стохастических систем, нелинейных по управлению // Сборник тезисов докладов 42-ой Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения-2016». М.: МАИ, 2016. Т.1. с. 471-472

76. *Царьков К.А., Румянцев Д.С.* Оптимизация нелинейных по управлению динамических стохастических систем // Материалы 13-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). М.: ИПУ РАН, 2016. с. 410-413

77. *Царьков К.А., Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С.* Градиентный метод оптимизации стратегий управления квазилинейными стохастическими системами при наличии информационных ограничений // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. с. 2383-2392

78. *Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S., Tsarkov K.A.* Numerical Method for Optimization of Quasi-Linear Dynamical Stochastic Systems, Nonlinear in Control // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). M.: IEEE, http://ieeexplore.ieee.org, 2016

79. *Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Квазиоптимальные стратегии в задаче оптимального управления двухзвенным механическим манипулятором // Аннотация конкурсной работы на Межрегиональном мо-

лодёжном конкурсе научно-технических работ и проектов «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики», г. Москва, 2013

80. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах, М.: Высш. шк., 2005. 544 с.

81. *Лутманов С.В.* Линейные задачи оптимизации. Ч.2. Оптимальное управление линейными динамическими объектами, Пермь: Изд. Пермск. ун-та, 2005. 195 с.

82. *Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П.* К теории стабилизации спутников с упругими стержнями. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2004, № 6, с. 150-163

83. *Гурман В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977.

84. *Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С.* Синтез стратегий оптимального управления гибким спутником при информационных ограничениях // Вестник МАИ, 2008, Т.15, №2, с. 147-154

85. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами, М.: Машиностроение, 1987.