

Тепловые процессы в технике. 2022. Т. 14. № 11. С. 482–494
Thermal processes in engineering, 2022, vol. 14, no. 11, pp. 482–494

Научная статья
УДК 536.2.001
DOI: 10.34759/tpt-2022-14-11-482-494

Модификация обобщенных тепловых потенциалов Тихонова – Самарского в аналитической теории нестационарного теплопереноса для нецилиндрических областей

Э.М. Карташов^{1,2✉}, С.С. Крылов²

¹ МИРЭА – Российский технологический университет (Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова), Москва, Россия

² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
professor.kartashov@gmail.com✉

Аннотация. Развита модификация метода обобщенных тепловых потенциалов применительно к решению краевых задач нестационарной теплопроводности в области с равномерно движущейся во времени границей. Классический подход нахождения неизвестной плотности потенциала из граничного условия задачи предполагает решение соответствующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода для частично ограниченных областей или системы уравнений для конечных областей. Модифицированный подход заключается в предварительном нахождении операционной формы потенциала и выявлении операционной плотности потенциала, подлежащей нахождению. Благодаря указанному подходу аналитические решения задач теплопроводности имеют простейшую функциональную форму, удобную для проведения численных экспериментов. Рассмотрена серия конкретных иллюстративных задач нестационарной теплопроводности практического характера. Описан новый эффект влияния термоизолированной движущейся границы на тепловую реакцию нецилиндрической области. Высказано предположение о переходе кинетической энергии движущейся теплоизолированной границы в тепловую энергию области.

Ключевые слова: обобщенные тепловые потенциалы, нецилиндрические области, аналитические решения

Для цитирования. Карташов Э.М., Крылов С.С. Модификация обобщенных тепловых потенциалов Тихонова – Самарского в аналитической теории нестационарного теплопереноса для нецилиндрических областей // Тепловые процессы в технике. 2022. Т. 14. № 11. С. 482–494. DOI: 10.34759/tpt-2022-14-11-482-494

Original article

Modification of the generalized Tikhonov – Samarsky heat potentials in the analytical theory of nonstationary heat transfer for non-cylindrical regions

E.M. Kartashov^{1,2✉}, S.S. Krylov²

¹ MIREA – Russian Technological University (Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies), Moscow, Russia

² Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
professor.kartashov@gmail.com✉

Abstract. A modification of the method of generalized thermal potentials is developed as applied to the boundary value problems solution of nonstationary heat conduction in a domain with a boundary uniformly moving in time. The classical approach to finding the unknown potential density from the boundary condition of the problem involves solving the corresponding Volterra integral equation of the second kind for partially bounded domains or a system of equations for finite domains. The modified approach consists in preliminary finding the operational form of the potential and identifying the operational density of the potential to be found. Due to this approach, analytical solutions to the heat conduction problems are of the simplest functional form, convenient for numerical experiments. The authors considered a series of specific illustrative problems of non-stationary heat conduction of a practical nature, and described a new effect of the thermally insulated moving boundary impact on the thermal response of a non-cylindrical region. An assumption is made on the transition of the kinetic energy of a moving thermally insulated boundary into the thermal energy of the region.

Keywords: generalized thermal potentials, noncylindrical regions, analytical solutions

For citation. Kartashov E.M., Krylov S.S. Modification of the generalized Tikhonov – Samarsky heat potentials in the analytical theory of nonstationary heat transfer for non-cylindrical regions. *Тепловые процессы в технике = Thermal processes in engineering*, 2022, vol. 14, no. 11, pp. 482–494. (In Russ.). DOI: 10.34759/tpt-2022-14-11-482-494

Введение

В книге «Уравнения математической физики» [1] А.Н. Тихонов и А.А. Самарский описали обобщенные тепловые потенциалы простого и двойного слоя как один из возможных аналитических методов решения краевых задач для уравнений параболического типа в области с движущимися границами, но одновременно отметили возникающие при этом технические трудности. Эдуард Михайлович Карташов при личной встрече с Александром Андреевичем Самарским познакомил академика с предложенной им модификацией метода для областей с равномерно движущейся границей при построении функций Грина. А.А. Самарский тут же представил статью «Метод функций Грина при решении краевых задач для уравнений параболического типа в нецилиндрических

областях» в РАН [2]. В данной статье строятся аналитические решения нового типа и отмечается ряд особенностей краевых задач в нецилиндрических областях.

Круг вопросов, при рассмотрении которых приходится сталкиваться с уравнением нестационарной теплопроводности в областях с движущимися во времени границами (нецилиндрические области), весьма широк и включают как случаи, когда движение границ задано, так и более сложные, когда это движение требуется определить из дополнительных условий задачи (задачи Стефана и более сложные задачи) для уравнения теплопроводности со свободной границей). Задачи указанного типа представляют особый интерес для теории роста кристаллов, теории плотин, механики почв, термике нефтяных пластов, теории фильтрации, теории коле-

баний, в электродинамических задачах, в проблеме теплового удара концентрированными потоками энергии и др. Сложность аналитического решения такого рода задач определяется тем, что к ним непосредственно неприменимы классические методы дифференциальных уравнений математической физики [1, 3–6]. Оставаясь в рамках этих методов, не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границ области. Для нахождения аналитических решений указанного класса краевых задач необходимы специальные методы или модификация известных подходов. Настоящая статья как раз и посвящена этому вопросу – модификации метода обобщенных тепловых потенциалов, имеющему особое значение в аналитической теплофизике для областей нецилиндрического типа.

Общая постановка рассматриваемых краевых задач для уравнений параболического типа

Пусть Ω_t – нецилиндрическая область в фазовом пространстве $(n+1)$ -измерений, сечение которой плоскостью-характеристикой $t = \text{const} \geq t_0 > 0$ есть выпуклая область $D_t (D_t \in R^n)$ изменения $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$; S_t – кусочно-гладкая поверхность, зависящая от времени $t \geq 0$ и ограничивающая область D_t ; n – внешняя нормаль к S_t (вектор, непрерывный в точках S_t), так что $\Omega_t = \{M \in D_t = D_t + S_t, t \geq 0\}$. Пусть $T(M, t)$ – температурная функция, удовлетворяющая условиям задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + f(M, t), \quad M \in D_t, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}|_{t=0}, \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \varphi(M, t), \quad M \in S_t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Здесь

$$f(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}_t), \quad \Phi_0(M) \in C^1(\bar{\Omega}_t), \quad (4)$$

$$\varphi(M, t) \in C^0(S_t \times t \geq 0), \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

Искомое решение

$$T(M, t) \in C^2(\Omega_t) \cap C^0(\bar{\Omega}_t), \quad (5)$$

$$\text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}_t).$$

В областях с движущимися границами, как и в случае областей канонического типа, также можно говорить о первой ($\beta_1 = 0$), второй ($\beta_2 = 0$) или третьей ($\beta_i > 0, i = 1, 2$) краевых задачах. Однако указанная эквивалентность в записи граничных условий сохраняется не всегда. В частности, условие теплоизоляции движущейся границы области $x \in [0, y(t)], t \geq 0$, где $y(t)$ при $t > 0$ – непрерывно-дифференцируемая функция имеет вид [6]

$$\left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{v(t)}{a} T(x, t) \right]_{x=y(t)} = 0, \quad t > 0. \quad (6)$$

И для скорости движения $v(t) = dy(t)/dt = 0 (y(t) = \text{const})$ выражение (6) совпадает с классической записью тепловой изоляции неподвижной границы, вытекающей из закона Фурье в скалярной форме.

Тепловые потенциалы

Пусть S_t^* – область, состоящая из концов отрезка $[l, y(t)], l \geq 0, y(t) > 0$. Тепловым потенциалом простого слоя по прямой $x = l$ и обобщенным тепловым потенциалом простого слоя по кривой $x = y(t)$ называются, соответственно, интегралы

$$\Pi_1(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau, \quad (7)$$

$$\Pi_2(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-y(\tau))^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau. \quad (8)$$

Тепловые потенциалы (7), (8) вне точки области S_t^* являются решениями однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad l < x < y(t), \quad t > 0,$$

дважды непрерывно дифференцируемыми по пространственной координате x и непрерывно дифференцируемыми по времени t и удовлетворяют нулевым начальным условиям. Имеют место следующие утверждения.

1. В точках x^* области S_t^* тепловые потенциалы $\Pi_i(x, t)$ являются непрерывными функциями точки x^* и времени t

$$\Pi_i(x, t)|_{x=x^*-0} = \Pi_i(x, t)|_{x=x^*+0} = \Pi_i(x^*, t). \quad (9)$$

2. Нормальная производная Π'_{ix} потенциалов (7) и (8) при подходе вдоль нормали к точ-

кам (x^*, t) боковой поверхности S_i^* области $[l, y(t)]$ изнутри и извне стремится к своим непрерывным значениям, определяемым, соответственно, равенствами

$$\frac{\partial \Pi_i^+(x, t)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow x^*+0} = -\frac{\Psi_i(t)}{2} + \frac{\partial \Pi_i(x^*, t)}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Pi_i^-(x, t)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow x^*-0} = +\frac{\Psi_i(t)}{2} + \frac{\partial \Pi_i(x^*, t)}{\partial x}, \quad (11)$$

где $\partial \Pi_i(x^*, t) / \partial x$ – результат формального дифференцирования $\Pi_i(x, t)$ в точке (x^*, t) под знаком интеграла ($x^* = l, i = 1; x^* = y(t), i = 2$). Плотности тепловых потенциалов $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$ – неизвестные функции, которые определяются как решения интегральных уравнений, полученных из удовлетворения граничным условиям задачи, причем в том виде, в каком они записаны под знаками интегралов (7) и (8). При этом конечный результат зачастую мало пригоден для числовых расчетов, если иметь в виду, что задача по определению неизвестных плотностей потенциалов в конечном счете сводится к трудно разрешимой системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Однако ситуация меняется, когда закон перемещения границы есть линейная функция времени $y(t) = l + vt$, что имеет место в многочисленных практических приложениях [6]. В этом случае возможно построение новой модифицированной методики применения тепловых потенциалов, что приводит к новым (простейшим) функциональным конструкциям в качестве аналитических решений тепловых задач, весьма удобным для численных экспериментов.

Область $x \in [l + vt, \infty), t \geq 0$

Поясним кратко суть подхода на примере решения довольно простой тепловой задачи, из которой наглядно будут видны традиционный и модифицированный приемы. Пусть имеется задача:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > l + vt, t > 0, \quad (12)$$

$$T(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad x \geq l, \quad (13)$$

$$T(x, t) \Big|_{x=l+vt} = \varphi(t), \quad t > 0, \quad (14)$$

$$|T(x, t)| < \infty, \quad x \geq l + vt, t \geq 0. \quad (15)$$

Ищем $T(x, t)$ в виде обобщенного теплового потенциала простого слоя по кривой $x = l + vt$:

$$T(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-l-v\tau)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau. \quad (16)$$

Для определения неизвестной плотности $\Psi(t)$ использует граничное условие (14), что дает интегральное уравнение Абеля

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (17)$$

где для упрощения обозначено

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi(t) \exp\left[(v^2/4a)t\right], \\ \Psi_1(t) &= \Psi(t) \exp\left[(v^2/4a)t\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Находим решение уравнения (17) в виде

$$\Psi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{d\varphi_1(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

а вместе с этим и искомое решение $T(x, t)$:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-l-v\tau)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau \times \\ &\times \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\alpha}} \left[\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{v^2}{4a} \varphi(\alpha) \right] \times \\ &\times \exp\left[-\frac{v^2(\tau-\alpha)^2}{4a}\right] d\alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь рассмотрим новый подход. Пусть по-прежнему решение $T(x, t)$ имеет вид (16). Найдем предварительно операционную форму

$\bar{T}(x, p) = \int_0^\infty T(x, t) \exp(-pt) dt$ выражения (16):

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, p) &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{(x-l)}{\sqrt{a}} \sqrt{p}\right] \times \\ &\times \bar{\Psi}_1 \left[\left(\sqrt{p} - \frac{v}{2\sqrt{a}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь отчетливо видно, что неизвестную плотность $\Psi_1(t)$ в классе изображений следует искать относительно того вида, в каком она появилась в изображении решения $\bar{T}(x, p)$. Используя далее граничное условие (14), из (17) и (18) находим:

$$\begin{aligned} &\bar{\Psi}_1 \left[\left(\sqrt{p} - \frac{v}{2\sqrt{a}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{p} - \frac{v}{2\sqrt{a}} \right) \bar{\varphi}_1 \left[\left(\sqrt{p} - \frac{v}{2\sqrt{a}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Откуда решение задачи в операционной форме будет иметь следующий вид:

$$\bar{T}(x, p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\sqrt{p} - \frac{v}{2\sqrt{a}} \right) \times \bar{\varphi}_1 \left[\left(\sqrt{p} - \frac{v}{2\sqrt{a}} \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{(x-l)}{\sqrt{a}} \sqrt{p} \right].$$

Переходим в класс оригиналов, используя теорему Эфроса [6]. Окончательно получим:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{x - (l + vt)}{(t - \tau)^{3/2}} \times \varphi(\tau) \exp \left[-\frac{(x - l - v\tau)^2}{4a(t - \tau)} \right] d\tau. \quad (21)$$

Нетрудно убедиться, что все условия задачи удовлетворяются. Кроме того, сравнение выражений (19) и (21) (тождественных в смысле числа) показывает очевидное преимущество последнего при численной обработке.

Запишем теперь общий результат для области $x \geq l + vt, t \geq 0$, где рассматривается задача:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > l + vt, t > 0, \quad (22)$$

$$T(x, t)|_{t=0} = 0, \quad x \geq l, \quad (23)$$

$$\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_2 T \right) |_{x=l+vt} = \beta_3 \varphi(t), \quad t > 0, \quad (24)$$

$$|T(x, t)| < \infty, \quad x \geq l + vt, t \geq 0, \quad (25)$$

где $\beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1$ – в случае первой краевой задачи; $\beta_2 = 0, \beta_1 = \beta_3 = 1$ – в случае второй краевой задачи; $\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = -h$ (h – относительный коэффициент теплообмена) – в случае третьей краевой задачи. Функцию $T(x, t)$ ищем в форме обобщенного теплового потенциала простого слоя по кривой $x = l + vt$ (16). Устанавливаем операционную форму интегрального выражения (16), записанную в несколько ином виде с учетом (18):

$$\bar{T}(x, p) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp \left(-\frac{x-l}{\sqrt{a}} \sqrt{p} \right) \times \bar{\Psi} \left(p - \frac{v}{\sqrt{a}} \sqrt{p} \right), \quad (26)$$

откуда вытекает операционная форма неизвестной плотности потенциала. Повторяя приведенные выше рассуждения, находим следующую

базовое соотношение для операционного решения приведенной задачи:

$$\bar{T}(x, p) = \bar{\Theta}(p) \left(1 - \frac{v/2a}{\sqrt{p/a}} \right) \times \exp \left(-\frac{x-l}{\sqrt{a}} \sqrt{p} \right) \bar{\varphi} \left(p - \frac{v}{\sqrt{a}} \sqrt{p} \right), \quad (27)$$

где

$$\bar{\Theta}(p) = \begin{cases} 1 & \text{для первой краевой задачи;} \\ -1/\sqrt{p/a} & \text{для второй краевой задачи;} \\ \frac{h}{h + \sqrt{p/a}} & \text{для третьей краевой задачи.} \end{cases}$$

Выражение (27) включает в себя многочисленные частные случаи граничной функции $\varphi(t)$, представляющие практический интерес: однородные, импульсные, пульсирующие, периодические и др. Основным достоинством соотношения (27) является наиболее простая функциональная конструкция для решения $T(x, t)$, вытекающая из (27). Так, в случае первой краевой задачи решение имеет компактный вид (21). В случае второй краевой задачи в (24) решение имеет вид

$$T(x, t) = \frac{v}{a} \int_0^t \varphi(\tau) \Phi^* \left(\frac{x-l-v\tau}{2\sqrt{a(t-\tau)}} \right) d\tau - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left[-\frac{(x-l-v\tau)^2}{4a(t-\tau)} \right] d\tau. \quad (28)$$

В случае третьей краевой задачи в (24) решение записывается в виде

$$T(x, t) = \frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left[-\frac{(x-l-v\tau)^2}{4a(t-\tau)} \right] d\tau - ah \left(h + \frac{v}{a} \right) \int_0^t \varphi(\tau) \Phi^* \left(\frac{x-l-v\tau}{2\sqrt{a(t-\tau)}} + h\sqrt{a(t-\tau)} \right) \times \exp \left[(x-l-v\tau)h + ah^2(t-\tau) \right] d\tau, \quad (29)$$

где $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z), \Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$ – функция Лапласа.

Рассмотрим в (29) частный случай граничной функции $\varphi(t) = 1$. Вычисляя в (29) интегралы и переходя к безразмерным переменным $z = x/l, Fo = at/l^2, Bi = hl, v_0 = vl/a$, найдем

$$T(z, Fo) = \frac{1}{2} \Phi^* \left(\frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} \right) + \frac{Bi}{2(Bi + v_0)} \times \\ \times \Phi^* \left(\frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} - v_0 \sqrt{Fo} \right) \times \exp \left[v_0^2 Fo - (z-1)v_0 \right] - \\ - \frac{v_0 + 2Bi}{2(v_0 + Bi)} \Phi^* \left(Bi\sqrt{Fo} + \frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} \right) \times \\ \times \exp \left[Bi^2 Fo + (z-1)Bi \right].$$

Заметим, что в случае равенства нулю скорости движения границы ($v_0 = 0$) записанное соотношение переходит в известное решение, приведенное в [6]. Следующим обобщением предложенного подхода является переход к уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{c\rho} F(t), \quad x > l + vt, \quad t > 0 \quad (30)$$

с однородным, но нестационарным источником теплоты. Задачу (30), (24), (25) рассмотрим в безразмерных (обобщенных) переменных

$$z = x/l, \quad F = at/l^2, \quad z = x/l, \\ Fo = at/l^2, \quad Pe = vl/a, \quad Bi = hl, \\ \varphi(Fo) = \varphi(t)/T_0, \quad W(z, Fo) = T(x, t)/T_0, \\ q(Fo) = l^2 F(t)/(\lambda T_0), \quad (31)$$

где T_0 – выбранная температурная единица масштаба; λ – теплопроводность материала ($\lambda = ac\rho$). В новых переменных имеем

$$\frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + q(Fo), \quad z > 1 + PeFo, \quad Fo > 0, \quad (32)$$

$$W(z, Fo)|_{Fo=0} = 0, \quad z \geq 1, \quad (33)$$

$$\left(\beta_1 \frac{\partial W}{\partial z} + \beta_2 W \right) \Big|_{z=1+PeFo} = \beta_3 \varphi(Fo), \quad Fo > 0, \quad (34)$$

$$|W(z, Fo)| < \infty, \quad z \geq 1 + PeFo, \quad Fo \geq 0, \quad (35)$$

где, как и выше, $\beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1$ – в случае первой краевой задачи; $\beta_2 = 0, \beta_1 = \beta_3 = 1$ – в случае второй краевой задачи; $\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = -Bi$ – в случае третьей краевой задачи. Решение $W(z, Fo)$ ищем в виде

$$W(z, Fo) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{Fo-\tau}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{(z-1-Pe\tau)^2}{4(Fo-\tau)} \right] d\tau + \int_0^{Fo} q(\tau) d\tau, \quad (36)$$

и далее сохраняются все рассуждения, касающиеся случая (22)–(25). В пространстве изображений (по Лапласу) находим следующее базовое соотношение для операционного решения задачи

$$\bar{W}(z, p) = \bar{\Theta}(p) \left(1 - \frac{Pe}{2\sqrt{p}} \right) \exp \left[-(z-1)\sqrt{p} \right] \times \\ \times \left[\bar{\varphi}(p - Pe\sqrt{p}) - \frac{\chi}{\sqrt{p}(\sqrt{p} - Pe)} \bar{q}(p - Pe\sqrt{p}) \right] + \\ + \frac{\bar{q}(p)}{p}, \quad (37)$$

где

$$\bar{\Theta}(p) = \begin{cases} 1 & \text{для первой краевой задачи} \\ & (\beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1, \chi = 1); \\ -1/\sqrt{p} & \text{для второй краевой задачи} \\ & (\beta_2 = 0, \beta_1 = \beta_3 = 1, \chi = 0); \\ \frac{Bi}{Bi + \sqrt{p}} & \text{для третьей краевой задачи} \\ & (\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = -Bi, \chi = 1). \end{cases}$$

Здесь также могут быть рассмотрены различные частные случаи задания в (32)–(35) граничной функции и функции источника. При этом решение имеет наиболее компактный вид для данного типа модельных задач. Например, для первой краевой задачи решение имеет вид

$$W(z, Fo) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \varphi(\tau) \frac{z-1-PeFo}{(Fo-\tau)^{3/2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{(z-1-Pe\tau)^2}{4(Fo-\tau)} \right] d\tau - \\ - \frac{1}{2} \exp [Pe(1-z-PeFo)] \times \\ \times \int_0^{Fo} \varphi(\tau) \Phi^* \left(\frac{z-1-Pe\tau}{2\sqrt{Fo-\tau}} - Pe\sqrt{Fo-\tau} \right) d\tau - \\ - \frac{1}{2} \int_0^{Fo} q(\tau) \Phi^* \left(\frac{z-1-Pe\tau}{2\sqrt{Fo-\tau}} \right) d\tau + \int_0^{Fo} q(\tau) d\tau. \quad (38)$$

В случае однородных краевых функций $\varphi(Fo) = \varphi_0 = \text{const}$, $q(Fo) = q_0 = \text{const}$ соотношения (37), (38) дают

$$\begin{aligned}
 W(z, Fo) = & \frac{q_0}{2} \left\{ \Phi^* \left(\frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} \right) + \right. \\
 & \left. + \exp \left[-Pe(z-1 - Pe^2 Fo) \right] \Phi^* \left(\frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} - Pe\sqrt{Fo} \right) \right\} - \\
 & - \frac{q_0(z-1)}{2\sqrt{Pe}} \Phi^* \left(\frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} \right) + \frac{q_0(z-1 - 2PeFo)}{2Pe} \times \\
 & \times \exp \left[-Pe(z-1 - PeFo) \right] \times \\
 & \times \Phi^* \left(\frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} - Pe\sqrt{Fo} \right) + q_0 Fo.
 \end{aligned} \quad (39)$$

Наиболее сложный случай – наличие в уравнении нестационарной теплопроводности неоднородного нестационарного источника теплоты с крайевыми условиями (23)–(25)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x > l + vt, \\
 t > 0 \quad (f(x, t) = 1 / cpF(x, t)).
 \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь могут быть указаны различные подходы. В первом из них строится соответствующая функция Грина, и аналитическое решение задачи выписывается через интегральное представление, содержащее функцию Грина и все неоднородности в исходной постановке задачи (метод функций Грина для нецилиндрических областей автор предполагает рассмотреть в последующей публикации). Второй подход связан с тождественными преобразованиями. Построим функцию

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} \times \\
 & \times \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a(t-\tau)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi-2l)^2}{4a(t-\tau)} \right] \right\} d\tau,
 \end{aligned}$$

удовлетворяющую уравнению (40). Тогда функция $\Theta(x, t) = T(x, t) - \Psi(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению (22), и далее могут быть использованы выписанные соотношения для аналитических решений с преобразованными граничными функциями. Движущиеся границы вызывают эффекты, которые проявляются при графическом изображении температурной функции. На рис. 1 приведены построенные по соотношению (39) зависимости $T(z, Fo)$ от Fo в сечении $z = 2$ при $Pe = 0, q_0 = 1$ и различных значениях q_0 .

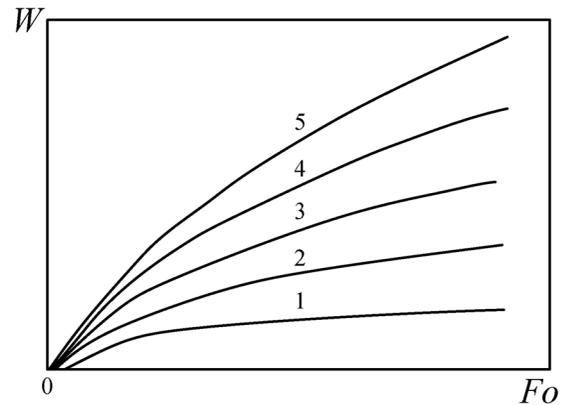


Рис. 1. Зависимость температурной функции $W(z, Fo)$ от безразмерного времени Fo в случае температурного нагрева с постоянной температурой на границе и с источником теплоты постоянной мощности в сечении $z = 2$ для $q_0 = 1, Pe = 0$ при различных значениях мощности источника: 1 – $q_0 = 0$; 2 – $q_0 = 0.5$; 3 – $q_0 = 1$; 4 – $q_0 = 2$; 5 – $q_0 = 3$

Характер кривых на рисунке является типичным для теплообмена в области $z > 1$ с внутренним однородным источником теплоты. Однако с появлением движения границы ситуация резко меняется, что отражено на рис. 2, построенном также по соотношению (39) при тех же условиях. При $z > 1 + PeFo$ для сечения $z = \text{const}$ имеем $0 < Fo < (z-1)/Pe$, и при $z = 2$, как показывает рис. 2, в интервале $Fo \in (0, 1/Pe)$ существует момент времени, при котором температура достигает максимального значения. Последнее обстоятельство имеет важное прикладное значение в термомеханике при изучении теплового удара, приводящего к разрывам сплошности во внутренних слоях твердого тела.

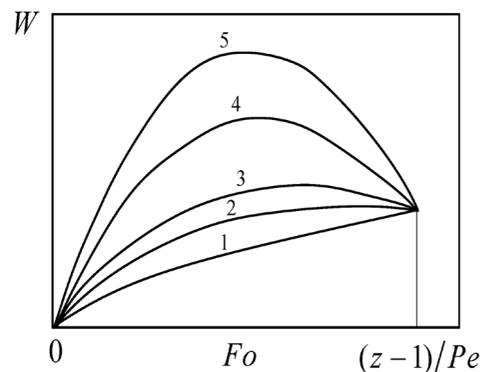


Рис. 2. Зависимость температурной функции $W(z, Fo)$ от безразмерного времени Fo в случае температурного нагрева с постоянной температурой на границе и с источником теплоты постоянной мощности в сечении $z = 2$ для $q_0 = 1, Pe = 0.35$ при различных значениях мощности источника: 1 – $q_0 = 0$; 2 – $q_0 = 0.5$; 3 – $q_0 = 1$; 4 – $q_0 = 2$; 5 – $q_0 = 3$

Область $x \in [0, l + vt], t \geq 0$

Область в виде отрезка прямой с равномерно движущимся концом является наиболее сложной для изучения, однако и для этого случая модифицированный метод доводит решение задачи до конца. Для сокращения выкладок рассмотрим первую краевую задачу вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l + vt, \quad t > 0, \quad (41)$$

$$T(x, t)|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (42)$$

$$T(x, t)|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t > 0, \quad (43)$$

$$T(x, t)|_{x=l+vt} = \varphi_2(t), \quad t > 0. \quad (44)$$

Решение $T(x, t)$ ищем в виде суммы тепловых потенциалов (7) и (8):

$$T(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-l-v\tau)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau, \quad (45)$$

где $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$ – неизвестные плотности потенциалов, подлежащие нахождению. Выражение (33) запишем в пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{T}(x, p) = \int_0^\infty \exp(-pt) T(x, t) dt, \quad \operatorname{Re} p \geq \beta > 0, \quad |\arg p| < \frac{\pi}{2}:$$

$$\bar{T}(x, p) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \bar{\Psi}_1(p) + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{(l-x)}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right], \quad (46)$$

где $\Psi_3(t) = \Psi_2(t) \exp(\gamma^2 t)$, $\gamma^2 = \frac{v^2}{4a}$.

Таким образом, для нахождения оригинала $T(x, t)$ из (46) необходимо искать изображения плотностей относительно $\bar{\Psi}_1(p)$ и $\bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right]$. Удовлетворяя в (45) граничным условиям, находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(l+v\tau)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau &= \varphi_1(t), \\ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(l+v\tau)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{v^2}{4a}(t-\tau)\right] d\tau &= \varphi_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

В пространстве изображений система интегральных уравнений (47) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \bar{\Psi}_1(p) + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] &= \bar{\varphi}_1(p), \\ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + \gamma)\right] \bar{\Psi}_1\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \bar{\Psi}_3(p) &= \bar{\varphi}_3(p), \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где $\varphi_3(t) = \varphi_2(t) \exp(\gamma^2 t)$. Исключая из системы функциональных уравнений (48) вначале $\bar{\Psi}_3(p)$, а затем $\bar{\Psi}_1(p)$, найдем

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + 2\gamma)\right] \bar{\Psi}_1\left[(\sqrt{p} + 2\gamma)^2\right] - \exp\left(\frac{l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right) \bar{\Psi}_1(p) &= \\ = \frac{2(\sqrt{p} + \gamma)}{\sqrt{a}} \bar{\varphi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \exp\left(\frac{l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right) \bar{\varphi}_1(p), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + 2\gamma)\right] \bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + 2\gamma)^2\right] - \exp\left[\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + \gamma)\right] \bar{\Psi}_3(p) &= \\ = \frac{2(\sqrt{p} + \gamma)}{\sqrt{a}} \bar{\varphi}_1\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \exp\left[\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + \gamma)\right] \bar{\varphi}_3(p). \end{aligned} \quad (50)$$

Обозначим [7]

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1(p^2) &= \bar{A}_1(p), \quad \bar{\Psi}_3(p^2) = \bar{A}_3(p), \\ \bar{\Phi}_1(p^2) &= \bar{F}_1(p), \quad \bar{\Phi}_3(p^2) = \bar{F}_3(p) \end{aligned} \tag{51}$$

и перепишем (49), (50) в виде

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}\right)\bar{A}_1(p+2\gamma) - \exp\left(\frac{2l}{\sqrt{a}}p\right)\bar{A}_1(p) &= \\ = \frac{2}{\sqrt{a}}\left[(p+\gamma)\exp\left(\frac{l}{\sqrt{a}}p\right)\bar{F}_3(p+\gamma) - p\exp\left[\frac{2l}{\sqrt{a}}p\right]\bar{F}_1(p)\right], \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}\right)\bar{A}_3(p+2\gamma) - \exp\left(\frac{2l}{\sqrt{a}}p\right)\bar{A}_3(p) &= \\ = \frac{2}{\sqrt{a}}\left[(p+\gamma)\exp\left(\frac{l}{\sqrt{a}}(p+\gamma)\right)\bar{F}_1(p+\gamma) - p\exp\left(\frac{2l}{\sqrt{a}}p\right)\bar{F}_3(p)\right]. \end{aligned} \tag{53}$$

С помощью подстановки [7]

$$\bar{A}_i(p) = \exp\left(\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma}p^2\right)\bar{B}_i(p), \quad i = 1, 3, \tag{54}$$

уравнения (52) и (53) приводятся к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\bar{B}_1(p+2\gamma) - \bar{B}_1(p) = \frac{2}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma}p^2\right) \cdot \left[(p+\gamma)\exp\left(-\frac{l}{\sqrt{a}}p\right)\bar{F}_3(p+\gamma) - p\bar{F}_1(p)\right], \tag{55}$$

$$\bar{B}_3(p+2\gamma) - \bar{B}_3(p) = \frac{2}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma}p^2\right) \cdot \left[(p+\gamma)\exp\left(-\frac{l}{\sqrt{a}}(p+\gamma)\right)\bar{F}_1(p+\gamma) - p\bar{F}_3(p)\right]. \tag{56}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что искомым частным решением функционального уравнения $\bar{B}(p+2\gamma) - \bar{B}(p) = \bar{\Theta}(p)$ является функция $\bar{B}(p) = -\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Theta}(p+2\gamma n)$, если этот ряд

сходится. Но ряд типа $\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma}\right)(n+\bar{d}(p))^2\right]$, к которому приводятся решения уравнений

(55) и (56), сходится, так как $\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma} > 0$. Находим $\bar{B}_i(p)$, $i = 1, 3$, и далее из (51) и (54) находим искомые изображения плотностей потенциалов (45) в виде (46):

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1(p) &= -\frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}n(n+1) - \frac{(2n+2)l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] (\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)\bar{\Phi}_3\left[(\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)^2\right] + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}n^2 - \frac{2nl}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] (\sqrt{p} + 2\gamma n)\bar{\Phi}_1\left[(\sqrt{p} + 2\gamma n)^2\right], \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] &= -\frac{2}{\sqrt{a}}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}\right)(n+1)^2 - \frac{(2n+1)l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \times \\ &\times (\sqrt{p} + 2(n+1)\gamma)\bar{\Phi}_1\left[(\sqrt{p} + 2(n+1)\gamma)^2\right] + \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}n(n+1) - \frac{2nl}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \times \\ &\times (\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)\bar{\Phi}_3\left[(\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)^2\right]. \end{aligned} \tag{58}$$

Выражения (46), (57), (58) дают операционное решение задачи:

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, p) = & \bar{\varphi}_1(p) \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \sqrt{p}\right) + \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}} n^2\right) (\sqrt{p} + 2\gamma n) \times \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{(2nl+x)}{\sqrt{a}} \sqrt{p}\right] - \exp\left[\frac{(2nl-x)}{\sqrt{a}} \sqrt{p}\right] \right\} \bar{\varphi}_1\left[(\sqrt{p} + 2\gamma n)^2\right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}} n(n+1)\right] \cdot (\sqrt{p} + (2n+1)\gamma) \times \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{((2n+1)l-x)}{\sqrt{a}} \sqrt{p}\right] - \exp\left[-\frac{((2n+1)l+x)}{\sqrt{a}} \sqrt{p}\right] \right\} \cdot \bar{\varphi}_3\left[(\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)^2\right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Переходя в пространство оригиналов, получаем искомое интегральное представление аналитического решения $T(x, t)$:

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^t \frac{[x + 2n(l + v\tau)]}{(t - \tau)^{3/2}} \varphi_1(\tau) \times \exp\left\{-\frac{v(l + v\tau)}{a} n^2 - \frac{[x + 2n(l + v\tau)]^2}{4a(t - \tau)}\right\} d\tau - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^t \frac{[x + (2n+1)(l + v\tau)]}{(t - \tau)^{3/2}} \varphi_2(\tau) \times \exp\left\{-\frac{v(l + v\tau)}{a} n(n+1) - \frac{[x + (2n+1)(l + v\tau)]^2}{4a(t - \tau)}\right\} d\tau. \end{aligned} \quad (60)$$

Выражение (60) имеет смысл обобщенного решения для широкого класса граничных функций $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2$). В частности, рассмотрим в (41)–(44) часто встречаемый на практике случай: начальное распределение температуры $T(x, 0) = T_0$, $0 \leq x \leq l$, а на границах $T(0, t) = T_c$, $T(l + vt, t) = T_c$, $t > 0$. В безразмерных переменных $z = x/l$, $Fo = at/l^2$, $v_0 = vl/a$, $W(z, Fo) = [T(x, t) - T_0]/(T_c - T_0)$ соотношение (60) принимает вид:

$$\begin{aligned} W(z, Fo) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(-v_0 n^2) \int_0^1 \exp(-v_0 n \xi) \times \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{(2n + \xi - z)^2}{4Fo}\right] - \exp\left[-\frac{(2n + \xi + z)^2}{4Fo}\right] \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (61)$$

На рис. 3 приведены графики изменения относительной температуры (61) по длине стержня для разных значений Fo и скорости v_0 . Приведенные графики могут служить в качестве номограммы для практических расчетов. Расчеты выполнены с использованием подходов [8, 9]. Что касается области $x \in [l_1 + v_1 t, l_2 + v_2 t]$, $t > 0$, то этот случай легко сводится к предыдущему, если ввести новые переменные, тогда $0 \leq z \leq l_0 + v_0 t$, $t \geq 0$, где $l_0 = l_2 - l_1$, $v_0 = v_2 - v_1$, а $W(z, t)$ удовлетворяет уравнению того же типа, что и функция $T(x, t)$. Для других граничных условий специфические особенности метода (7), (8) заключаются лишь в решении конечно-разностного уравнения типа $\bar{F}(p+b) - \bar{F}(p) = \bar{C}(p)$ при нахождении неизвестных плотностей потенциалов и переходе к оригина-

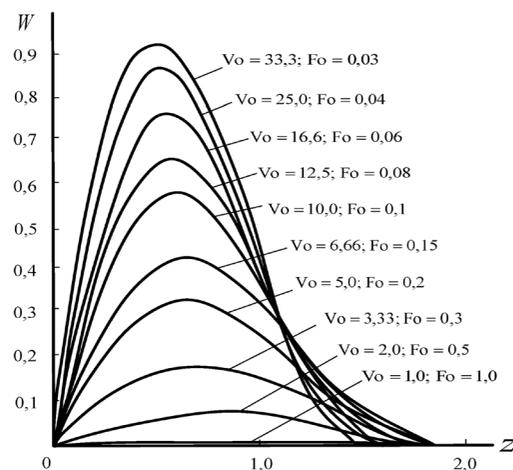


Рис. 3. Изменение температурной функции (61) в зависимости от переменной длины стержня z для разных значений критерия Фурье и скорости v_0

лу. Впрочем, необходимо подчеркнуть, что изучаемая проблема является более сложной, чем это представляется на первый взгляд, и по существу ее решение находится в начале своего пути, если учесть, что для уравнения (41) в области $x \in [0, l + vt]$, $t \geq 0$ можно говорить о девяти типах граничных условий в постановке исходной задачи (и столько же для случаев центральной симметрии в шарообразной области и радиальной симметрии для полой цилиндрической – это те задачи, которые не получили даже начального развития), так что описанные в данной статье проблемы аналитической теплофизики ждут своих исполнителей.

Метод тепловых потенциалов можно использовать также при нахождении аналитических решений сравнительно новых задач переноса (теплоты, массы) с интегральным граничным условием, встречающимся при моделировании ряда процессов экологии, биологии, физики плазмы [10]. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 2\sqrt{a}y(t), \quad t > 0, \quad (62)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (63)$$

$$|T(x, t)| < \infty, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0,$$

$$\int_{2\sqrt{a}y(t)}^{\infty} T(x, t) dx = 2\sqrt{a}y(t), \quad t > 0, \quad (64)$$

где $y(t)$ – известная функция времени. Искомое решение запишем в виде теплового потенциала (8)

$$T(x, t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{[x-2\sqrt{a}y(\tau)]^2}{4a(t-\tau)}\right\} d\tau, \quad (65)$$

где неизвестная плотность потенциала $\varphi(t)$ подлежит нахождению. Подставляя (65) в (64) и вводя новые переменные $z = x/[2\sqrt{a}y(t)]$, $\tau = y't$, получим:

$$\sqrt{t} \int_1^{\infty} dz \int_0^1 \frac{\varphi(y't)}{\sqrt{1-y'}} \times \left\{ \frac{y^2(t)}{t} \frac{[z - \frac{y(y't)}{y(t)}]^2}{(1-y')} \right\} dy' = 1. \quad (66)$$

Меняя порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл по z , получаем:

$$\int_0^1 \varphi(y't) \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{y(t)}{\sqrt{t}} \frac{1-y(y't)}{\sqrt{1-y'}} \right] \right\} dy' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{y(t)}{t}, \quad (67)$$

где $\Phi(z)$ – функция Лапласа. Рассмотрим в (67) случай $y(t) = vt$ ($v = \text{const}$). Тогда соотношение (67) дает свертку

$$\int_0^t \varphi(\tau) [1 - \Phi(v\sqrt{t-\tau})] d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} vt,$$

операционное решение которой приводит к результату

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v \times \left[1 + v^2 t + \left(v^2 t + \frac{1}{2} \right) \Phi(v\sqrt{t}) + \frac{v\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp(-v^2 t) \right]. \quad (68)$$

Пусть далее $y(t) = \beta\sqrt{t}$ ($\beta = \text{const}$). Тогда (67) приобретает вид

$$\int_0^1 \varphi(y't) \left[1 - \Phi \left(\beta \frac{1-\sqrt{y'}}{\sqrt{1-y'}} \right) \right] dy' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad (69)$$

откуда следует, что $\varphi(t) = C/\sqrt{t}$ ($C = \text{const}$)

$$C = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta \left\{ \int_0^1 \frac{dy'}{\sqrt{y'}} \left[1 - \Phi \left(\beta \frac{1-\sqrt{y'}}{\sqrt{1-y'}} \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (70)$$

Вычислим интеграл (70). Для этого используем достаточно редкий интеграл

$$\Phi^2(z) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \exp[-z^2(1+t^2)] dt, \quad (71)$$

что дает следующий результат:

$$C = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} [1 + \Phi(\beta)]^{-1} \left\{ 1 - \sqrt{\pi} \beta \exp(\beta^2) [1 - \Phi(\beta)] \right\}^{-1},$$

а вместе с этим – весьма полезные для этого класса вычислений интегралы, отсутствовавшие в известных справочниках интегрального исчисления:

$$\int_0^1 \left[1 - \Phi \left(\beta \frac{1-\sqrt{y'}}{\sqrt{1-y'}} \right) \right] \frac{dy'}{\sqrt{y'}} = \frac{1}{2} [1 + \Phi(\beta)] \left\{ 1 - \sqrt{\pi} \beta \exp(\beta^2) [1 - \Phi(\beta)] \right\}, \quad (72)$$

$$\int_0^1 \frac{dy'}{\sqrt{y'(1-y')}} \exp \left[-\beta^2 \frac{(z-\sqrt{y'})^2}{1-y'} \right] = \pi \exp(\beta^2) [1 - \Phi(\beta z)] [1 + \Phi(\beta)]. \quad (73)$$

Новый эффект влияния движущейся теплоизолированной границы на тепловую реакцию области

Э.М. Карташов обнаружил указанный эффект при изучении проблемы теплового удара упругого полупространства с движущейся теплоизолированной границей. В данной статье опишем теплофизическую составляющую эффекта.

Ранее было приведено условие теплоизоляции движущейся границы области $x \in [y(t), \infty)$, $t \geq 0$ в виде соотношения (6). Пусть $T(x, t)$ есть решение задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > l + vt, \quad t > 0 \quad (v = \text{const}), \quad (74)$$

$$\begin{aligned} T(x, t)|_{t=0} &= T_0, \quad x \geq l; \\ |T(x, t)| &< \infty, \quad x \geq l + vt, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{v}{a} T(x, t) \right]_{x=l+vt} = 0, \quad t > 0. \quad (76)$$

Особенность этой задачи заключается в том, что при постоянной начальной температуре, отличной от нулевой, отсутствии в (74)–(76) внешних и внутренних источников теплоты и при наличии движущейся теплоизолированной границы нет явных причин для появления в области градиента температуры. Стохастический анализ указанного эффекта, проделанный авторами в [11], приводит к выводу, что именно движущаяся теплоизолированная граница создает удивительный эффект появления в области градиента температуры или, другими словами, кинетическая энергия движения границы переходит в тепловую энергию области. Запишем (74)–(76) в переменных (z, Fo) : $z = x/l$, $Fo = at/l^2$, $W(z, Fo) = [T(x, t) - T_0]/T_0$, $Pe = vl/a$:

$$\frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad z > 1 + PeFo, \quad Fo > 0, \quad (77)$$

$$\begin{aligned} W(z, Fo)|_{Fo=0} &= 0, \quad z \geq 1, \\ |W(z, Fo)| &< \infty, \quad z \geq 1 + PeFo, \quad Fo \geq 0, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(z, Fo)}{\partial z} \Big|_{z=1+PeFo} &= \\ = -(Pe) [W(z, Fo)|_{z=1+PeFo} - (-1)], & \quad (79) \\ Fo > 0. \end{aligned}$$

Операционное решение задачи (77)–(79) автоматически выписывается из (27) и имеет вид

$$\bar{W}(z, p) = \frac{Pe(\sqrt{p} - Pe/2)}{p(\sqrt{p} - Pe)^2} \exp[-(z-1)\sqrt{p}]. \quad (80)$$

Оригинал этого выражения есть:

$$\begin{aligned} W(z, Fo) &= Pe\sqrt{Fo/\pi} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{(z-1)^2}{4Fo}\right] - \frac{1}{2} \Phi^*\left(\frac{z-1}{2\sqrt{Fo}}\right) + \\ &+ \left[FoPe^2 - \frac{Pe}{2}(z-1) + \frac{1}{2} \right] \times \\ &\times \exp[-Pe(z-1 - PeFo)] \Phi^*\left(\frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} - Pe\sqrt{Fo}\right). \end{aligned} \quad (81)$$

Графики функции (81) в сечении $z = 4$ при разных значениях Pe представлены на рис. 4.

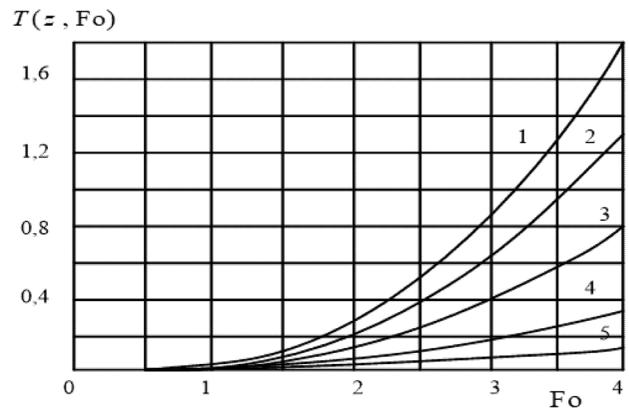


Рис. 4. Зависимость температурной функции (81) от безразмерного времени Fo при условии теплоизоляции на равномерно движущейся границе в сечении $z = 4$ для различных Pe : 1 – $Pe = 0.16$; 2 – $Pe = 0.3$; 3 – $Pe = 0.5$; 4 – $Pe = 0.6$; 5 – $Pe = 0.65$

Следует отметить, что изложенный в статье подход касался краевых задач для уравнения (1), однако фактически могут быть рассмотрены и уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a\Delta T(M, t) - b^2 T(M, t) + \\ &+ \bar{v} \text{grad} T(M, t) + F(M, t), \end{aligned} \quad (82)$$

поскольку подстановкой

$$\begin{aligned} T(M, t) &= \\ = W(M, t) \exp\left[-\frac{1}{2a} rv - \left(b^2 + \frac{1}{4a} \sum_{i=1}^3 v_i^2\right) t\right], \end{aligned}$$

где $\bar{y} = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + v_3 \bar{k}$ ($v_i = \text{const}$), $b^2 = \text{const}$, $r = xi + yj + zk$, уравнение (82) сводится к случаю

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a\Delta W(M, t) + F^*(M, t).$$

Здесь $F^*(M, t)$ – новая (известная) функция.

Заключение

Получена серия аналитических решений краевых задач нестационарной теплопроводности для частично ограниченной и конечной областей с равномерно движущейся границей. Решения получены на основе модификации метода тепловых потенциалов простого слоя в виде функциональных конструкций нового вида, удобных для проведения численных экспериментов. Описан новый эффект влияния движущейся теплоизолированной границы на тепловую реакцию области. Следующий шаг – переход к математическим моделям для уравнений гиперболического типа [12].

Список источников

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 724 с.
2. Карташов Э.М. Метод функций Грина при решении краевых задач для уравнений параболического типа в нецилиндрических областях // Доклады РАН. 1996. Т. 351. № 1. С. 32–36.
3. Формалев В.Ф. Уравнения математической физики. Москва: URSS, 2020. 646 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 600 с.
5. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. Москва: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
6. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 2001. 540 с.
7. Квальвассер В.И., Рутнер Я.Ф. Метод нахождения функции Грина краевых задач уравнения теплопроводности для отрезка прямой с равномерно движущимися границами // Доклады АН СССР. 1964. Т. 156. № 6. С. 1273–1276.
8. Крылов С.С., Перепёлкин В.В., Чунг В.В. Динамический анализ движения земного полюса в коротком интервале времени // Космонавтика и ракетостроение. 2012. № 4 (69). С. 114–120.
9. Котельников М.В., Крылов С.С., Филиппов Г.С. Математическое моделирование пристеночной плазмы в молекулярном режиме // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2022. № 5 (123). С. 68–74.
10. Жданов С.К., Чихачев А.С., Явлинский Ю.Н. Краевая задача диффузии для областей с подвижными границами при сохранении числа частиц // Известия вузов. Физика. 1975. Т. 1. № 6. С. 1545–1547.

Статья поступила в редакцию 10.10.2022; одобрена после рецензирования 09.11.2022; принята к публикации 14.11.2022.

The article was submitted on 10.10.2022; approved after reviewing on 09.11.2022; accepted for publication on 14.11.2022.

11. Карташов Э.М., Соловьев И.А. Стохастический анализ эффекта возникновения градиента температуры при теплоизолированной движущейся границе // Известия РАН. Энергетика. 2017. № 1. С. 119–128.
12. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей нестационарной теплопроводности. // Тонкие химические технологии. 2018. Т. 13. № 2. С. 81–90.

References

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics [Uravneniya matematicheskoi fiziki]. Moscow, Nauka, 1966, 724 p. (In Russ.)
2. Kartashov E.M. Metod funktsii Grina pri reshenii kraevykh zadach dlya uravnenii parabolicheskogo tipa v netsilindricheskikh oblastiakh [Green's function method for solving boundary value problems for equations of parabolic type in noncylindrical domains]. Doklady RAN, 1996, vol. 351, no. 1, pp. 32–36.
3. Formalev V.F. Equations of mathematical physics [Uravneniya matematicheskoi fiziki]. Moscow, URSS, 2020, 646 p. (In Russ.)
4. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity [Teoriya teploprovodnosti]. Moscow, Higher school, 1967, 600 p. (In Russ.)
5. Zarubin V.S. Engineering methods for solving problems of heat conductivity [Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti]. Moscow, Energoatomizdat, 1983, 328 p. (In Russ.)
6. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids [Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001, 540 p. (In Russ.)
7. Kvalvasser V.I., Rutner J.F. A method for finding the Green's function of boundary value problems of the heat equation for a segment of a straight line with uniformly moving boundaries [Metod nakhozheniya funktsii Grina kraevykh zadach uravneniya teploprovodnosti dlya otrezka pryamoi s ravnomerno dvizhushchimisya granitsami]. Doklady AN SSSR, 1964, vol. 156, no. 6, pp. 1273–1276. (In Russ.)
8. Krylov S.S., Perepelkin V.V., Chung V.V. Dynamic analysis of the motion of the Earth's pole in a short time interval [Dinamicheskii analiz dvizheniya zemnogo polyusa v korotkom intervale vremeni]. Kosmonavtika i raketostroyeniye, 2012, no. 4 (69), pp. 114–120. (In Russ.)
9. Kotelnikov M.V., Krylov S.S., Filippov G.S. Mathematical Molecular Modeling of an Edge Plasma. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, vol. 51, no. 5, pp. 457–462.
10. Zhdanov S.K., Chikhachev A.S., Yavlinsky Yu.N. Kraevaya zadacha diffuzii dlya oblasti s podvizhnymi granitsami pri sokhranении chisla chastits [The diffusion boundary value problem for regions with movable boundaries while maintaining the number of particles]. Izvestiya vuzov. Fizika, 1975, vol. 1, no. 6, pp. 1545–1547. (In Russ.)
11. Kartashov E.M., Soloviev I.A. Stochastic analysis of the effect of the appearance of a temperature gradient at a thermally insulated moving boundary. Izvestiya RAN. Energetika, 2017, no. 1, pp. 119–128. (In Russ.)
12. Kartashov E.M. Analiticheskie resheniya giperbolicheskikh modelei nestatsionarnoi teploprovodnosti [Analytical solutions of hyperbolic models of unsteady heat conduction]. Fine chemical technologies, 2018, vol. 13, no. 2, pp. 81–90.